# MODIFIKASI KONDENSASI CHIO PIVOT FLEKSIBEL PADA ATURAN CRAMER UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINIER

**SKRIPSI**

Diajukan untuk Memenuhi Sebagai Syarat
Guna Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
dalam Ilmu Pendidikan Matematika


Oleh:
**YULI SAGITA**
NIM. 133511010



**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO**
**SEMARANG**


**2017**

# MODIFIKASI KONDENSASI CHIO PIVOT FLEKSIBEL PADA ATURAN CRAMER UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINIER

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagai Syarat
Guna Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan
dalam Ilmu Pendidikan Matematika


Oleh:

**YULI SAGITA**

NIM. 133511010

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO**

**SEMARANG**


**2017**

## PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertandatangan dibawah ini:

Nama : **Yuli Sagita**

NIM : 113511010

Program Studi : Pendidikan Matematika

Menyatakan bahwa skripsi yang berjudul:

**MODIFIKASI KONDENSASI CHIO PIVOT FLEKSIBEL PADA ATURAN CRAMER UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINIER**

Secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 12 Juni 2017

Pembuat Pernyataan,

**Yuli Sagita**

NIM : 113511010

KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (KampusII) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

## PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini:

| | | |
|---|---|---|
| Judul | : | **Modifikasi Kondensasi Chio Pivot Fleksibel pada Aturan Cramer untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier** |
| Penulis | : | **Yuli Sagita** |
| NIM | : | 113511010 |
| Program Studi | : | Pendidikan Matematika |

Telah diujikan dalam sidang *munaqasyah* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Pendidikan Matematika.

Semarang, 21 Juni 2017

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

**Dr. H. Ruswan, M.A.**
NIP : 19680424 199303 1 004

Penguji II,

**Any Muanalifah, M.Si.**
NIP : 19820113 201101 2 009

Penguji III,

**Mujiasih, S.Pd., M.Pd.**
NIP : 19800703 200912 2 003

Penguji IV,

**Siti Maslihah M.Si.**
NIP : 19770611 201101 2 004

Pembimbing I,

**Any Muanalifah, M.Si.**
NIP : 19820113 201101 2 009

Pembimbing II,

**Aini Fitriyah, M.Sc.**
NIP :

**NOTA DINAS**

Semarang, 8 Juni 2017

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo
di Semarang

*Assalamu'alaikum. wr. wb.*

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

| | | |
|---|---|---|
| Judul | : | **Modifikasi Kondensasi Chio pada Aturan Cramer untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier** |
| Nama | : | **Yuli Sagita** |
| NIM | : | 113511010 |
| Program Studi | : | Pendidikan Matematika |

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqosyah.

*Wassalamu'alaikum. wr. wb.*

Pembimbing I,

**Any Mu'analifah, M.Si.**

NIP. 19820113 201101 2009

**NOTA DINAS**

Semarang, 9 Juni 2017

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo
di Semarang

*Assalamu'alaikum. wr. wb.*

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

| | | |
|---|---|---|
| Judul | : | **Modifikasi Kondensasi Chio pada Aturan Cramer untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier** |
| Nama | : | **Yuli Sagita** |
| NIM | : | 113511010 |
| Program Studi | : | Pendidikan Matematika |

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqosyah.

*Wassalamu'alaikum. wr. wb.*

Pembimbing II,

**Aini Fitriyah, M.Sc.**

NIP.

## ABSTRAK

**Judul : Modifikasi Kondensasi Chio Pivot Fleksibel pada Aturan Cramer untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier**

**Nama : Yuli Sagita**

NIM : 13351010

Jurusan : Pendidikan Matematika

Aturan Cramer adalah aturan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linier $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dengan $det(A) \neq 0$. Salah satu metode yang digunakan untuk menghitung determinan adalah metode kondensasi Chio. Metode kondensasi Chio adalah metode untuk menghitung nilai determinan suatu matriks dengan menurunkan ordo matriks $n \times n$ menjadi ordo $(n-1) \times (n-1)$ yang menganjurkan menggunakan $a_{1,1} \neq 0$ sebagai elemen pivot. Jika elemen $a_{1,1} = 0$, maka metode kondensasi Chio dapat dimodifikasi sehingga sebarang elemen dapat dijadikan elemen pivot yang disebut pivot fleksibel. Selanjutnya, hasil perhitungan determinan menggunakan modifikasi kondensasi Chio ini akan di terapkan pada aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier.

Kata Kunci: *Aturan Cramer, determinan, metode kondensasi Chio, pivot fleksibel, dan sistem persamaan linier*.

## KATA PENGANTAR

*Alhamdulillahirabbil'alamin*, puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT. atas segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "**MODIFIKASI KONDENSASI CHIO PIVOT FEKSIBEL PADA ATURAN CRAMER UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINIER**". Penulisan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di UIN Walisongo Semarang.

Penyusunan dan penyelesaian skripsi ini, tidak lepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Muhibin M.Ag., selaku Rektor UIN Walisongo Semarang,
2. Dr. H. Ruswan, M.A., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang,
3. Yulia Romadiastri, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang,
4. Mujiasih, S.Pd., M.Pd., selaku Sekretaris Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang,
5. Any Mu'analifah, M.Si., selaku dosen pembimbing I dan Aini Fitriyah, M.Sc., selaku dosen pembimbing II yang telah

memberikan banyak bimbingan dan arahan dalam skripsi ini,

6. Moh. Tafrikhan, M.Si., selaku dosen Mata Kuliah Metode Numerik yang banyak membantu dalam pembuatan program MatLab sebagai program pendukung skripsi ini,
7. Seluruh Dosen Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang, yang telah memberikan banyak ilmu selama penulis berkuliah di Jurusan Pendidikan Matematika,
8. Bapak, ibu dan adek saya yang tidak pernah lelah dalam mencurahkan kasih sayang, perhatian, motivasi, do'a, dan dukungan untuk menyelesaikan skripsi ini, dan
9. Semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa penusunan skripsi ini masih jauh dari sempurna. Kritik dan saran dapat ditujukan langsung pada e-mail saya. Akhir kata penulis mohon maaf apabila ada kekeliruan di dalam penyusunan skripsi ini.

Semarang, 12 Juni 2017

Yuli Sagita

**DAFTAR ISI**

**HALAMAN JUDUL** . . . . . **i**
**PERNYATAAN KEASLIAN** . . . . . **ii**
**PENGESAHAN** . . . . . **iii**
**NOTA PEMBIMBING** . . . . . **iv**
**ABSTRAK** . . . . . **vi**
**KATA PENGANTAR** . . . . . **vii**
**DAFTAR ISI** . . . . . **ix**
**I PENDAHULUAN** . . . . . **1**
1.1 Latar Belakang . . . . . 1
1.2 Rumusan Masalah . . . . . 5
1.3 Batasan Masalah . . . . . 5
1.4 Tujuan dan Manfaat Penelitian . . . . . 6
1.5 Kajian Pustaka . . . . . 6
1.6 Metode Penelitian . . . . . 9
1.7 Sistematika Penulisan . . . . . 10
**II LANDASAN TEORI** . . . . . **11**
2.1 Matriks . . . . . 11
2.1.1 Pengertian Matriks . . . . . 11
2.1.2 Jenis-Jenis Matriks . . . . . 12
2.1.3 Operasi Matriks . . . . . 14
2.2 Determinan . . . . . 19
2.2.1 Determinan dengan Ekspansi Kofaktor . 19

2.2.2 Menghitung Determinan dengan Operasi Elementer . . . . . 23
2.3 Invers Matriks . . . . . 29
2.4 Sistem Persamaan Linier . . . . . 34
2.5 Aturan Cramer . . . . . 38
2.6 Metode Kondensasi Chio . . . . . 40
**III PEMBAHASAN . . . . . 45**
3.1 Modifikasi Kondensasi Chio Pivot Fleksibel . . . 45
3.2 Penerapan Modifikasi Kondensasi Chio pada Aturan Cramer untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier . . . . . 53
**IV PENUTUP . . . . . 69**
4.1 Kesimpulan . . . . . 69
4.2 Saran . . . . . 70
**DAFTAR PUSTAKA . . . . . 71**
**LAMPIRAN . . . . . 74**

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu ilmu pengetahuan yang banyak diterapkan dalam permasalahan sehari-hari. Materi yang dipelajari dalam matematika salah satunya adalah sistem persamaan linier. Sistem persamaan linier banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah dalam bidang optimasi, penjadwalan, dan produksi. Sebagai contoh pada suatu perusahaan, sistem persamaan linier digunakan untuk mengoptimasi persediaan barang yang tersedia agar dapat dihasilkan barang secara maksimal, menjadwalkan penggunaan mesin-mesin produksi barang agar mesin-mesin dapat digunakan secara maksimal, dan memproduksi barang agar suatu perusahaan mendapatkan keuntungan yang maksimal.

Sistem persamaan linier dapat diselesaikan dengan beberapa metode, salah satunya adalah aturan Cramer. Aturan Cramer (dalam Ufuoma, 2013) dinamai menurut penemunya, Gabriel Cramer (1704-1752), seorang matematikawan Swiss, lahir di Jenewa. Aturan Cramer adalah aturan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan $det(A) \neq 0$. (Anton dan Rorres,2014).

Aturan Cramer umumnya tidak efisien untuk menyelesaikan sistem persamaan linier (Habgood dan Arel , 2012), karena untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dengan $n$ variabel dibutuhkan sebanyak $n+1$ determinan. Cara yang dapat dilakukan untuk mengefisienkan aturan Cramer adalah dengan memanfaatkan metode yang efektif untuk menghitung determinan matriks berukuran besar (Habgood dan Arel ,2012).

Penelitian tentang aturan Cramer dengan memanfaatkan beberapa metode penghitung determinan sudah banyak dilakukan, diantaranya, penelitian Ufuoma (2013) yang membahas mengenai metode baru yang lebih efisien untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dengan memanfaatkan kondensasi Dodgson untuk menghitung nilai determinan pada aturan Cramer. Metode kondensasi Dodgson adalah metode untuk menghitung nilai determinan dengan menurunkan ordo matriks $n \times n$ menjadi $(n-1) \times (n-1)$ kemudian diturunkan lagi menjadi $(n-2) \times (n-2)$. Selanjutnya membagi setiap elemen yang bersesuaian dengan *interior* $A$ atau *int* $A$. *int* $A$ adalah matriks ordo $(n-2) \times (n-2)$ yang diperoleh dari penghapusan baris pertama, kolom pertama, baris terakhir, dan kolom terakhir (Rice, 2006). Penurunan

sebanyak dua kali ordo matriks awal pada metode kondensasi Dodgson akan membuat penggabungan metode baru tersebut dan aturan Cramer akan menjadi lebih efisien untuk menyelesaikan sistem persamaan linier.

Penelitian lainnya adalah penelitian Hou-biao Li, dkk (2014), yang meneliti pemanfaatan metode kondensasi Sylvester dalam aturan Cramer. Metode kondensasi Sylvester adalah metode untuk menghitung nilai determinan dengan cara mempartisi matriks $A$ (Bareiss, 1968).

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 \\ A_{2,1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{1,1}^{-1}A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,1}^{-1}A_{1,2} \end{bmatrix}$$

maka $det(A) = det(A_{1,1})det(A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,1}^{-1}A_{1,2})$. Pemanfaatan metode kondensasi Sylvester untuk menghitung determinan, akan membuat aturan Cramer menjadi lebih efisien untuk menyelesaikan sistem persamaan linier karena perhitungan determinan dari sebuah partisi matriks yang ordonya lebih kecil dari matriks awal akan lebih mudah untuk dilakukan.

Metode penghitung determinan lain yang dapat diterapkan bersama dalam aturan Cramer adalah metode kondensasi Chio (Nagari , 2009). Penelitian Armistead (2010) dan Nagari (2009) menyatakan bahwa

metode kondensasi Chio memiliki formula sederhana yang dapat diimplementasikan secara paralel dengan aturan Cramer. Aturan Cramer dan metode kondensasi Chio, bila dikombinasikan, metode ini bisa memecahkan satu set variabel dengan cara yang terdistribusi (Habgood,2011).

Metode kondensasi Chio adalah metode untuk menghitung nilai determinan dengan menurunkan ordo matriks $n \times n$ menjadi ordo $(n-1) \times (n-1)$ yang menganjurkan menggunakan $a_{1,1} \neq 0$ sebagai elemen pivot (Eves, 1966). Jika elemen $a_{1,1} = 0$, maka perlu dilakukan pertukaran baris pertama (atau kolom pertama) dengan baris (atau kolom) yang lain sedemikian sehingga $a_{1,1} \neq 0$ (Cohen, 2011). Namun, penukaran baris (atau kolom) ini akan membuat determinan matriks setelah dilakukan penukaran baris (atau kolom) sama dengan deteminan matriks awal dikalikan dengan $(-1)$ (Anton dan Rorres,2014).

Latar belakang tersebut yang membuat penulis tertarik untuk meneliti alternatif lain agar metode kondensasi Chio dapat digunakan untuk menghitung determinan ketika ditemukan elemen $a_{1,1} = 0$ tanpa perlu dilakukan penukaran baris (atau kolom), yaitu dengan melakukan modifikasi kondensasi Chio, sehingga sembarang elemen dapat dipilih untuk dijadikan sebagai

elemen pivot fleksibel. Hasil dari perhitungan nilai determinan menggunakan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel tersebut akan digunakan pada aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka rumusan masalah untuk penelitian ini adalah:

1. Bagaimana mencari determinan dengan menggunakan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel?
2. Bagaimana menerapkan determinan yang diperoleh dari modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel pada aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier?

## 1.3 Batasan Masalah

Agar tujuan dari penelitian ini dapat tercapai dan untuk menghindari pembahasan yang terlalu melebar, maka diperlukan adanya pembatasan masalah, diantaranya:

1. Matriks memiliki elemen $a_{1,1} = 0$
2. Sistem persamaan linier $Ax = b$ dengan $n$ persamaan dan $n$ variabel.
3. Metode untuk menyelesaikan sistem persamaan linier adalah aturan Cramer

## 1.4 Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan dalam penelitian ini adalah:

1. Mencari nilai determinan menggunakan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel.
2. Menerapkan determinan yang diperoleh dari modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel pada aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier.

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat sebagai berikut:

1. Menambah alternatif metode untuk menghitung nilai determinan matriks menggunakan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel.
2. Memberikan langkah-langkah penyelesaian sistem persamaan linier dengan aturan Cramer menggunakan determinan yang diperoleh dari perhitungan menggunakan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel.
3. Mengembangkan suatu kajian mengenai aturan Cramer mengunakan determinan yang diperoleh dari perhitungan menggunakan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel.

## 1.5 Kajian Pustaka

Penelitian Ufuoma (2013) yang ditulis dalam prosiding WCECS (*World Congress on Engineering and*

*Computer Science*) dengan judul *"A New and Simple Method of Solving Large Linier Systems: Based on Cramer's Rule but Employing Dodgson's Condensation"*, membahas mengenai metode baru yang lebih efisien untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dengan memanfaatkan kondensasi Dodgson untuk menghitung nilai determinan pada aturan Cramer. Metode kondensasi Dodgson adalah metode untuk menghitung nilai determinan dengan menurunkan ordo matriks $n \times n$ menjadi $(n-1) \times (n-1)$ kemudian diturunkan lagi menjadi $(n-2) \times (n-2)$. Selanjutnya membagi setiap elemen yang bersesuaian dengan *interior* $A$ atau *int* $A$. *int* $A$ adalah matriks ordo $(n-2) \times (n-2)$ yang diperoleh dari penghapusan baris pertama, kolom pertama, baris terakhir, dan kolom terakhir (Rice, 2006). Penurunan sebanyak dua kali ordo matriks awal pada metode kondensasi Dodgson akan membuat penggabungan metode baru tersebut dan aturan Cramer akan menjadi lebih efisien untuk menyelesaikan sistem persamaan linier.

Penelitian Hou-biao Li, dkk (2014) yang ditulis dalam arXiv dengan judul *"From Sylvester's Determinant Identity to Cramer's Rule"*, membahas mengenai pemanfaatan identitas determinan kondensasi Sylvester dalam aturan Cramer. Metode kondensasi Sylvester adalah metode untuk menghitung nilai determinan

dengan cara mempartisi matriks $A$ (Bareiss , 1968). Pemanfaatan metode kondensasi Sylvester untuk menghitung determinan, akan membuat aturan Cramer menjadi lebih efisien untuk menyelesaikan sistem persamaan linier karena perhitungan determinan dari sebuah partisi matriks yang ordonya lebih kecil dari matriks awal akan lebih mudah untuk dilakukan.

Tesis Armistead (2010) yang berjudul, *"MPI-based Parallel Solution of Sparse Linier Systems Using Chio's Condensation Algorthm and Test Data from Power Flow Analysis"*, menyatakan bahwa metode kondensasi Chio memiliki formula sederhana yang dapat diimplementasikan secara paralel dengan aturan Cramer.

Tesis Nagari (2009) yang berjudul, *"Parallel Processing Architecture for Solving Large Scale Linear Systems"*, menyatakan bahwa metode kondensasi Chio memiliki formula sederhana yang dapat diimplementasikan secara paralel dengan aturan Cramer.

Disertasi Habgood (2011) yang berjudul, *"A Low Communication Condensation-based Linear System Solver Utilizing Cramer's Rule"*, menyatakan bahwa aturan Cramer dan metode kondensasi Chio, bila dikombinasikan, metode ini bisa memecahkan satu set

variabel dengan cara yang sangat terdistribusi.

Hasil-hasil penelitian tersebut yang membuat penulis tertarik untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dengan menggunakan aturan Cramer. Perbedaannya adalah, pada penelitian yang dilakukan, penulis memanfaatkan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel untuk menghitung determinan yang akan digunakan pada aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier.

## 1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kepustakaan *(library research)* yang dilakukan dengan cara mengkaji, menganalisis dan menyelidiki dokumen, literatur atau tulisan yang berkaitan dengan penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang digunakan adalah sebagai berikut:

1. Menelaah metode kondensasi Chio.
2. Merumuskan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel dari metode kondensasi Chio
3. Mencari nilai determinan menggunakan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel.
4. Menerapkan determinan yang diperoleh dari modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel pada aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier.

## 1.7 Sistematika Penulisan

Pada penelitian ini disusun berdasarkan sistematika penulisan sebagai berikut:

**BAB I PENDAHULUAN**

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian, kajian pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

**BAB II LANDASAN TEORI**

Bab ini berisi tentang teori-teori yang menjadi dasar pembahasan. Diantaranya adalah teori matriks, determinan, invers, sistem persamaan linier, aturan Cramer, dan metode kondensasi Chio.

**BAB III PEMBAHASAN**

Bab ini menjelaskan mengenai modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel untuk menentukan determinan matriks, dan penerapannya pada aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier.

**BAB IV PENUTUP**

Bab ini berisi tentang kesimpulan-kesimpulan dan saran-saran.

# BAB II

# LANDASAN TEORI

Berikut ini beberapa teori pendukung yang akan dipergunakan dalam penelitian ini yaitu teori mengenai matriks, determinan, invers, sistem persamaan linier, aturan Cramer, dan metode kondensasi Chio.

## 2.1 Matriks

### 2.1.1 Pengertian Matriks

Matriks adalah susunan segiempat siku-siku dari angka atau simbol, yang tersusun dalam baris dan kolom (Hoffman , 2001). Jika sebuah matriks tersusun atas $n$ baris dan $m$ kolom maka matriks tersebut dikatakan berukuran atau berordo $n \times m$ (Poole , 2003). Penulisan matriks umumnya dinyatakan dengan sebuah huruf kapital ($A$, $B$, $C$, ...). Bentuk umum dari matriks $A$ adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

dengan $a_{i,j}$ menyatakan sebuah elemen matriks $A$, yang berada pada baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$ (Mathews dan Fink, 1999).

Vektor adalah sebuah matriks yang hanya memiliki satu baris atau satu kolom. Sebuah vektor biasa dinotasi dengan huruf kecil yang dicetak tebal.(Hoffman,2001).

Sebuah vektor baris adalah sebuah matriks berordo $1 \times n$ seperti berikut:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

Sebuah vektor kolom adalah sebuah matriks berordo $n \times 1$ seperti berikut:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

### 2.1.2 Jenis-Jenis Matriks

Ada beberapa jenis matriks yang perlu diketahui dan sering digunakan pada pembahasan selanjutnya, yaitu:

1. Matriks persegi adalah sebuah matriks yang memiliki jumlah baris dan kolom sama banyak ($m = n$). Elemen $b_{1,1}, b_{2,2}, \ldots, b_{n,n}$ disebut sebagai diagonal utama dari matriks $A$ (Karris ,2007). Matriks $B$ berikut merupakan matriks

persegi.

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{bmatrix}$$

2. Matriks diagonal adalah matriks persegi yang semua elemennya bernilai nol kecuali elemen diagonal utama (Karris , 2007). Matriks $C$ berikut merupakan matriks diagonal.

$$C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{n,n} \end{bmatrix}$$

3. Matriks identitas adalah matriks diagonal yang seluruh elemennya bernilai 1 (Karris ,2007). Matriks $D$ berikut merupakan matriks identitas.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

4. Matriks segitiga adalah matriks persegi yang semua elemen disatu sisi dari diagonal utama

bernilai nol. Jika yang bernilai nol adalah elemen-elemen dibawah elemen diagonal utama maka disebut matriks segitiga atas. Sedangkan, jika yang bernilai nol adalah elemen-elemen diatas elemen diagonal utama maka disebut matriks segitiga bawah. Matriks $E$ berikut merupakan matriks segitiga atas.

$$E = \begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & \cdots & e_{1,n} \\ 0 & e_{2,2} & \cdots & e_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_{n,n} \end{bmatrix}$$

Sedangkan, Matriks $F$ berikut merupakan matriks segitiga bawah.

$$F = \begin{bmatrix} f_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n,1} & f_{n,2} & \cdots & f_{n,n} \end{bmatrix}$$

### 2.1.3 Operasi Matriks

Matriks banyak digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier. Beberapa operasi matriks yang banyak digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier adalah sebagai berikut:

1. Kesamaan matriks

   Dua matriks dikatakan sama jika kedua matriks tersebut memiliki ukuran yang sama dan elemen-elemen yang bersesuian antara kedua matriks tersebut juga sama (Leon ,2010).

   **Contoh 2.1.** *(Kesamaan Matriks)*

   *Tinjaulah kesamaan tiga buah matriks berikut:*

   $$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{bmatrix}$$

   ***Penyelesaian***

   *Matriks $A$ dan $B$ tidak sama karena ukuran kedua matriks berbeda. Matriks $B$ dan $C$ juga tidak sama karena ukuran kedua matriks tersebut berbeda. Matriks $A$ dan $C$ sama jika dan hanya jika $x = 4$.*

2. Penjumlahan matriks

   Jika $A$ dan $B$ adalah dua matriks yang berordo sama $m \times n$. Maka penjumlahan matriks $A$ dan $B$ adalah penjumlahan setiap elemen-elemen yang bersesuaian dari matriks $A$ dan $B$, yang didefinisikan sebagai $A + B = a_{i,j} + b_{i,j}$ (Leon,2010).

   **Contoh 2.2.** *(Penjumlahan Matriks)*

   *Jika dipunyai tiga buah matriks sebagai berikut:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\ \textit{dan}\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

*Hitung nilai $A + C$, $A + B$, dan $B + C$*

***Penyelesaian***

$$\begin{aligned} A + C &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*sedangkan $A + B$ dan $B + C$ tidak dapat didefinisikan karena ukuran kedua matriks berbeda.*

3. Perkalian matriks dengan skalar

   Jika $A$ adalah sebuah matriks dan $c$ adalah sebuah skalar. Maka perkalian skalar $c$ dengan matriks $A$ adalah perkalian setiap elemen matriks $A$ dengan skalar $c$, yang didefinisikan sebagai $cA = ca_{i,j}$ (Leon,2010).

   **Contoh 2.3.** *(Perkalian skalar dengan matriks)*

   *Hitung nilai $2A - B$, jika dipunyai matriks $A$ dan $B$ sebagai berikut:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ \textit{dan}\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

***Penyelesaian***

$$\begin{aligned} 2A - B &= 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Perkalian Matriks

   Jika $A$ adalah matriks berordo $m \times p$ dan $B$ adalah matriks berordo $p \times n$, maka hasil perkalian matriks $A$ dan $B$ adalah sebuah matriks $C$ yang berordo $m \times n$ dan elemen-elemen matriks $C$ didefinisikan oleh $c_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} a_{i,r} b_{r,j}$ (Hoffman dan Kunze,1971).

**Contoh 2.4.** *(Perkalian Matriks)*

*Hitung $AB$ dan $BA$, jika dipunyai matriks $A$ dan $B$ sebagai berikut:*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{dan } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

***Penyelesaian***

$$AB = \begin{bmatrix} -2\cdot 3 + 1\cdot 2 + 3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$$

*dan*

$$BA = \begin{bmatrix} 3\cdot(-2) & 3\cdot 1 & 3\cdot 3 \\ 2\cdot(-2) & 2\cdot 1 & 2\cdot 3 \\ 1\cdot(-2) & 1\cdot 1 & 1\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 9 \\ -4 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Transpos Matriks

   Transpos dari sebuah matriks $A$ berordo $m \times n$ dapat dinyatakan dengan matriks $A^T$ berordo $n \times m$ yang elemen-elemennya diperoleh dari menukarkan baris pertama matriks $A$ menjadi kolom pertama matriks $A^T$, menukarkan baris kedua matriks $A$ menjadi kolom kedua matriks $A^T$, dan seterusnya. Elemen matriks $A^T$ didefinisikan oleh $a^t_{j,i} = a_{i,j}$ (Anton dan Rorres,2014).

   **Contoh 2.5.** *(Transpos Matriks)*
   *Tentukan transpos dari matriks-matriks berikut:*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \textit{dan } B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

   ***Penyelesaian***

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \textit{dan } B^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

## 2.2 Determinan

### 2.2.1 Determinan dengan Ekspansi Kofaktor

Determinan adalah suatu skalar yang diasosiasikan dengan matriks persegi $A$ dan dinyatakan sebagai $det(A)$, atau $|A|$ (Mathews dan Fink , 1999). Sebelum mendefinisikan determinan matriks dengan menggunakan ekspansi kofaktor, maka perlu didefinisikan mengenai minor dan kofaktor suatu matriks.

**Definisi 2.1.** *(Anton dan Rorres,2014)*
*Jika $A$ adalah sebuah matriks berordo $n \times n$, maka minor $M_{i,j}$ adalah determinan dari submatriks berordo $(n-1) \times (n-1)$ yang diperoleh dari penghapusan baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$ matriks $A$ yang berordo $n \times n$.*

**Contoh 2.6.** *Menentukan minor*
*Tentukan minor elemen $a_{1,1}$ dan $a_{3,2}$ matriks berikut*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

***Penyelesaian***
*Minor elemen $a_{1,1}$ diperoleh dengan menghapus*

*elemen matriks sepanjang baris pertama dan kolom pertama, sehingga diperoleh*

$$M_{1,1} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

*Demikian juga, minor elemen $a_{3,2}$ diperoleh dengan menghapus elemen matriks sepanjang baris ketiga dan kolom kedua, sehingga diperoleh*

$$M_{3,2} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

**Definisi 2.2.** *(Anton dan Rorres , 2014) Jika $A$ adalah sebuah matriks berordo $n \times n$, maka kofaktor $C_{i,j}$ yang diasosiasikan dengan minor $M_{i,j}$ dinyatakan sebagai:*

$$C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$$

**Contoh 2.7.** *Menentukan kofaktor*
*Tentukan kofaktor elemen $a_{1,1}$ dan $a_{3,2}$ matriks berikut*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

***Penyelesaian***

*Berdasarkan contoh 2.6, maka diperoleh minor elemen $a_{1,1}$ dan $a_{3,2}$ sebagai berikut:*

$$M_{1,1} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16 \text{ dan } M_{3,2} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

*sehingga kofaktor $C_{1,1}$ diperoleh*

$$C_{1,1} = (-1)^{1+1} M_{1,1} = M_{1,1} = 16$$

*demikian juga, kofaktor $C_{3,2}$ diperoleh*

$$C_{3,2} = (-1)^{3+2} M_{3,2} = -M_{3,2} = -26$$

Setelah mengetahui definisi mengenai minor dan kofaktor, maka selanjutnya akan didefinisikan mengenai determinan matriks dengan menggunakan ekspansi kofaktor.

**Definisi 2.3.** *(Anton dan Rorres,2014)*

*Jika $A$ adalah sebuah matriks berordo $n \times n$, dimana $n \geq 2$ maka $det(A)$ dapat dihitung sebagai*

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} C_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} M_{i,j}$$

*[ekspansi kofaktor sepanjang $i$ baris dengan $i = 1, 2, \ldots, n$]*

*atau*

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} C_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} M_{i,j}$$

*[ekspansi kofaktor sepanjang $j$ kolom dengan $j = 1, 2, \ldots, n$]*

**Contoh 2.8.** *Hitung determinan matriks berikut:*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

***Penyelesaian***

*Diperoleh kofaktor-kofaktor matriks $A$ sebagai berikut:*

$$C_{1,1} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

$$C_{1,2} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{1,3} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -16$$

$$C_{2,1} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{2,2} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{2,3} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 16$$

$$C_{3,1} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

$$C_{3,2} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

$$C_{3,3} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 16$$

*Misalnya akan dihitung* $det(A)$ *menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama sebagai berikut:*

$$\begin{aligned} det(A) &= 3C_{1,1} + 2C_{1,2} + (-1)C_{1,3} \\ &= 3(12) + 2(6) + (-1)(-16) \\ &= 36 + 12 + 16 = 64 \end{aligned}$$

*dan jika menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama diperoleh*

$$\begin{aligned} det(A) &= 3C_{1,1} + C_{2,1} + 2C_{3,1} \\ &= 3(12) + 1(4) + 2(12) \\ &= 36 + 4 + 24 = 64 \end{aligned}$$

### 2.2.2 Menghitung Determinan dengan Operasi Elementer

Menghitung determinan menggunakan operasi elementer dipengaruhi oleh teorema berikut:

**Teorema 2.1.** *(Anton dan Rorres,2014)*

1. *Jika* $B$ *adalah sebuah matriks berordo* $n \times n$ *yang berasal dari perkalian dari sebuah baris*

*(atau kolom) dari $A$ dengan sebuah skalar k, maka $det(B) = kdet(A)$.*

2. *Jika $B$ adalah sebuah matriks berordo $n \times n$ yang berasal dari mempertukarkan dua baris (atau dua kolom) dari $A$, maka $det(B) = -det(A)$.*
3. *Jika $B$ adalah sebuah matriks berordo $n \times n$ yang berasal dari menjumlahkan sebuah perkalian baris (atau kolom) pada baris (atau kolom) lain, maka $det(B) = det(A)$.*

*Bukti.* 1. Jika $A$ merupakan matriks awal dan $B$ adalah sebuah matriks berordo $n \times n$ yang berasal dari perkalian dari baris ke-$i$ dari $A$ dengan sebuah skalar $k$. Jika $i \geq 1$, maka

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}C_{1,j} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1,j}M_{1,j}$$

dan

$$\begin{aligned} det(B) &= \sum_{j=1}^{n} ka_{1,j}C_{1,j} \\ &= k\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}C_{1,j} \\ &= k\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1,j}M_{1,j} = kdet(A) \end{aligned}$$

2. Jika $A$ merupakan matriks awal dan $B$ adalah sebuah matriks berordo $n \times n$ yang berasal dari mempertukarkan baris ke-$i$ dan ke-$j$ dari

$A$, maka

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} C_{1,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1,j} M_{1,j}$$

dan

$$det(B) = \sum_{j=1}^{n} b_{1,j} C^*_{1,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1,j} M^*_{1,j}$$

karena $b_{1,j} = a_{1,j}$, $C^*_{1,j}$ merupakan $C_{1,j}$ dan $M^*_{1,j}$ merupakan $M_{1,j}$ dengan baris ke-$i$ dan ke-$j$ dipertukarkan. Maka, diperoleh $M^*_{1,j} = -M_{1,j}$. Sehingga

$$\begin{aligned} det(B) &= -\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} C_{1,j} \\ &= -\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1,j} M_{1,j} = -det(A) \end{aligned}$$

3. Jika $A$ merupakan matriks awal dan $B$ adalah sebuah matriks berordo $n \times n$ yang berasal dari menjumlahkan sebuah perkalian baris (atau kolom) pada baris (atau kolom) lain. Maka diperoleh

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} C_{1,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1,j} M_{1,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1,j} (\sum_{j=2}^{n} (-1)^{1+j} a_{2,j} M_{1j,2j}) \end{aligned}$$

Sehingga

$$
\begin{aligned}
det(B) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1,j}(\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{2,j}M_{1j,2j}) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}(a_{1,j}+ca_{2,j})(\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{2,j}M_{1j,2j}) \\
&= det(A)+c\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{2,j}(\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{2,j}M_{1j,2j})
\end{aligned}
$$

Determinan $B$ sama dengan determinan $A$ ditambah dengan determinan suatu matriks yang baris pertama sama dengan baris kedua. Berdasarkan teorema 2.2, yaitu jika dua baris (atau kolom) pada sebuah matriks adalah sama, maka $det(A) = 0$. Sehingga diperoleh bahwa $det(B) = det(A)$.

□

**Teorema 2.2.** *(Ashley, 1977) Jika dua baris (atau kolom) pada sebuah matriks adalah sama, maka* $det(A) = 0$.

*Bukti.* Misalkan bahwa dua baris pada matriks $A$ adalah sama, dan misal $B$ adalah matriks baru yang sama dengan matriks $A$, maka kedua matriks yang sama tersebut harus memiliki determinan yang sama pula. Tetapi berdasarkan teorema 2.1 2, $det(B) = -det(A)$. Hal ini berlaku jika dan hanya jika $det(A) = 0$.

□

**Teorema 2.3.** *(Ashley,1977)*

*Jika $A$ adalah sebuah matriks segitiga ( segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal) berordo $n \times n$, maka $det(A)$ adalah hasil kali elemen-elemen diagonal dari $A$.*

$$det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}\ldots a_{n,n}$$

*Bukti.* Misal $A$ adalah sebuah matriks segitiga atas, maka

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{1,1}A_{1,1} \\ &= (-1)^{1+1}a_{1,1}M_{1,1} \\ &= a_{1,1}((-1)^{2+2}a_{2,2}M_{11,22}) \\ &= a_{1,1}(a_{2,2}(\ldots a_{n,n})) \\ &= a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n} \end{aligned}$$

□

Menghitung nilai determinan dengan operasi elementer dilakukan dengan cara membuat matriks awal menjadi matriks segitiga (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal), kemudian nilai determinan dihitung berdasarkan teorema 2.3.

**Contoh 2.9.** *Hitung determinan dari matriks berikut menggunakan operasi elementer.*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

***Penyelesaian***

*Dengan menggunakan operasi baris elementer akan dibuat sebuah mariks segitiga.*

1. *Pertukarkan baris pertama dengan baris kedua*

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

2. *Tambahkan baris kedua dengan (-2) kali baris pertama*

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

3. *Keluarkan faktor (-7) dari baris kedua*

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

4. *Tambahkan baris ketiga dengan (-1) kali baris kedua*

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

5. *Karena matriks segitiga sudah terbentuk maka dilanjutkan dengan menghitung determinan matriks sebagai berikut:*

$$det(A) = 7(1)(1)(-1) = -7$$

## 2.3 Invers Matriks

Jika setiap bilangan real $a$ bukan nol selalu memiliki elemen invers $a^{-1}$ $(= \frac{1}{a})$ yang berlaku

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

Berdasarkan definisi elemen invers bilangan real tersebut, maka dapat dinyatakan definisi invers matriks sebagai berikut:

**Definisi 2.4.** *(Ayres,1987)*
*Jika $A$ dan $B$ adlah sebuh matrik persegi sedemikian sehingga berlaku*

$$AB = BA = I$$

*dimana $I$ adalah matriks identitas, maka matriks $B$ disebut matriks balikan dari matriks $A$ dan ditulis $B = A^{-1}$. Matriks $A$ juga merupakan matriks balikan dari matriks $B$ dan ditulis $A = B^{-1}$.*

**Teorema 2.4.** *(Anton dan Rorres,2014)*
*Jika $B$ dan $C$ adalah invers dari matriks $A$, maka $B = C$.*

*Bukti.* Misal $B$ adalah invers dari matriks $A$ maka dipunyai

$$AB = BA = I$$

dan $C$ juga matriks balikan dari matriks $A$

$$AC = CA = I$$

Jika dipunyai $AB = I$ maka dengan memperkalikan kedua ruas dengan $C$ akan menjadi $C(AB) = CI$ memberikan $(CA)B = C$. Substitusi $CA = I$ sehingga diperoleh $IB = C$. Jadi, $B = C$.

□

**Contoh 2.10.** *Tunjukkan bahwa $B$ adalah invers dari matriks $A$*

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} dan B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

***Penyelesaian***

*Berdasarkan definisi 2.4 maka diperoleh*

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\cdot 3 - 5\cdot 1 & 2\cdot 5 - 5\cdot 2 \\ -1\cdot 3 + 3\cdot 1 & -1\cdot 5 + 3\cdot 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

*dan*

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3\cdot 2+5\cdot(-1) & 3\cdot(-5)+5\cdot 3 \\ 1\cdot 2+2\cdot(-1) & 1\cdot(-5)+2\cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

*Jadi, $A$ dan $B$ saling invers.*

Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menentukan invers suatu matriks, salah satunya dengan menggunakan adjoin matriks. Adjoin dari matriks $A$ dapat dicari dengan menggunakan ekspansi kofaktor.

**Definisi 2.5.** *(Anton dan Rorres,2014)*
*Jika $A$ suatu matriks $n \times n$ dan $C$ adalah matriks kofaktor dari matriks $A$, maka transpose $C^T$ dinamakan adjoin $A$.*

$$\begin{aligned} adj(A) &= \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,n} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \cdots & C_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n,1} & C_{n,2} & \cdots & C_{n,n} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{2,1} & \cdots & C_{n,1} \\ C_{1,2} & C_{2,2} & \cdots & C_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,n} & C_{2,n} & \cdots & C_{n,n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Contoh 2.11.** *Tentukan adjoin dari matriks berikut*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

*Langkah-langkah membuat adjoin matriks* $A$

1. *Hitung kofaktor matriks* $A$

$$\begin{array}{ccc} C_{1,1} = 12 & C_{1,2} = 6 & C_{1,3} = -16 \\ C_{2,1} = 4 & C_{2,2} = 2 & C_{2,3} = 16 \\ C_{3,1} = 12 & C_{3,2} = -10 & C_{3,3} = 16 \end{array}$$

2. *Buat matriks kofaktor*

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

3. *Transpos matriks kofaktor*

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Invers matriks dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier yang terdiri dari $n$ buah persamaan dan $n$ variabel dengan matriks koefisian merupakan matriks yang dapat dibalik.

**Teorema 2.5.** *(Larson, Edward, dan Falvo,2009)*
*Jika $A$ adalah sebuah matriks yang dapat dibalik berordo $n \times n$, dan $b$ adalah matriks berordo $n \times 1$, maka sistem persamaan linier $A\boldsymbol{x} = b$ mempunyai tepat satu penyelesaian yaitu $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.*

**Teorema 2.6.** *Invers Matriks Menggunakan Adjoin (Anton dan Rorres,2014)*
*Jika $A$ adalah matriks yang dapat dibalik, maka*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

**Contoh 2.12.** *Pada contoh 2.11 dapat ditentukan invers dari matriks $A$ sebagai berikut*

1. *Hitung $det(A)$*

$$\begin{aligned} det(A) &= 3C_{1,1} + 2C_{1,2} + (-1)C_{1,3} \\ &= 3(12) + 2(4) + (-1)(-16) \\ &= 36 + 12 + 16 \\ &= 64 \end{aligned}$$

2. *Buat $adj(A)$*

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

3. *Buat invers matriks $A$*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

$$= \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & -\frac{10}{64} \\ -\frac{16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix}$$

## 2.4 Sistem Persamaan Linier

Sebuah garis dalam ruang dimensi 2 ($R^2$) dapat dinyatakan dalam persamaan berbentuk

$$a_1 x + a_2 y = b$$

dengan $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ . Hal yang sama, pada sebuah bidang dalam ruang dimensi 3 ($R^3$) dapat dinyatakan dalam persamaan berbentuk

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = b$$

dengan $a_1$,$a_2$, $a_3$, $b \in \mathbb{R}$. Persamaan-persamaan tersebut dinamakan persamaan linier (Larson, Edward, dan Falvo ,2009). Secara umum, persamaan linier dapat dinyatakan dalam bentuk (Larson, Edward, dan Falvo,2009)

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$$

dengan $a_i, b \in \mathbb{R}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

**Contoh 2.13.** *Contoh dari persamaan linier dan persamaan tak linier*

*Perhatikan bahwa persamaan linier tidak pernah melibatkan hasil kali atau akar dari variabelnya dan semua variabel pada persamaan linier tidak terlibat dalam fungsi trigonometri, exponensial, atau logaritma. Berikut ini adalah persamaan-persamaan linier:*

1. $3x - 4y = -1$
2. $r - \frac{1}{2}s - \frac{15}{3}t = 9$
3. $\sqrt{2}x + \frac{\pi}{4}y - (\sin\frac{\pi}{5})z = 1$
4. $3.2x_1 - 0.01x_2 = 4.6$

*Berikut ini adalah persamaan tak linier:*

1. $xy + 2z = 1$
2. ${x_1}^2 - {x_2}^3 = 3$
3. $\sqrt{2x} + \frac{\pi}{4}y - (\sin\frac{\pi}{5}z) = 1$
4. $\sin x_1 - 3x_2 + 2^{x_3} = 0$

Suatu sistem yang terdiri dari $m$ buah persamaan linier disebut sistem persamaan linier. Sistem prsamaan linier dengan $m$ persamaan dan $n$ variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut (Conte dan Boor, 1980):

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2.1}$$

dengan $a_{i,j}, b \in \mathbb{R}$, ($i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$).

Sistem persamaan linier seperti pada sistem persamaan ( 2.1 ) dapat dinyatakan sebagai dua buah matriks yang sama sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriks yang berisi $m$ buah persamaan linier dari sistem persamaan dapat dinyatakan sebagai sebuah perkalian matriks yang diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sehingga sistem persamaan ( 2.1) dapat dinyatakan dalam persamaan matriks sebagai berikut(Anton dan Rorres,2014):

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dengan $A$ adalah matriks koefisien, **x** adalah vektor kolom dari variabel-variabel tidak diketahui, dan **b** adalah vektor kolom dari konstanta. Gabungan dari matriks $A$ dan vektor **b** disebut matriks *augmented* (Burden dan Faires,1997).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right]$$

Penyelesaian dari sistem persamaan linier dengan $n$ variabel dapat dinyatakan dalam sebuah urutan bilangan-bilangan $s_1, s_2, \ldots, s_n$ yang memenuhi:

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$$

pada semua persamaan linier dalam sistem persamaan linier tersebut. Penyelesaian sistem persamaan linier tersebut dinamakan sebagai himpunan penyelesaian(Anton dan Rorres,2014).

Kemungkinan penyelesaian dari sistem persamaan linier ada tiga, yaitu tepat satu penyelesaian, tidak ada penyelesaian, dan tak terhingga banyaknya penyelesaian. Suatu sistem persamaan linier yang tidak mempunyai penyelesaian, maka sistem tersebut dikatakan tidak konsisten (*inconsistent*). Namun, apabila

sistem persamaan tersebut mempunyai setidak-tidaknya satu penyelesaian, maka sistem tersebut dinamakan konsisten (*consistent*)(Larson, Edward, dan Falvo,2009).

## 2.5 Aturan Cramer

Metode yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier pada penelitian ini adalah menggunakan aturan Cramer. Suatu sistem persamaan linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan $n$ persamaan dan $n$ variabel yang memiliki penyelesaian tunggal dapat diselesaikan dengan menggunakan aturan Cramer, dengan syarat bahwa $det(A) \neq 0$. Penyelesaian tersebut adalah sebagai berikut(Anton dan Rorres,2014):

$$x_j = \frac{det(A_j)}{det(A)} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$A_j$ adalah matriks yang didapatkan dengan menggantikan elemen-elemen dari kolom ke-$j$ dari matriks $A$ dengan elemen-elemen dari vektor $b$.

*Bukti.* Jika $det(A) \neq 0$ maka $A$ mempunyai invers dan berdasarkan teorema 2.5 dimana $\mathbf{x} = A^{(-1)}\mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian tunggal dari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Berdasarkan teorema 2.6 maka dipunyai

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= A^{(-1)}\mathbf{b} \\ &= \frac{1}{det(A)} adj(A)\mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{2,1} & \cdots & C_{n,1} \\ C_{1,2} & C_{2,2} & \cdots & C_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,n} & C_{2,n} & \cdots & C_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Hasil kali matriks-matriks tersebut, sehingga diperoleh

$$\mathbf{x} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} b_1C_{1,1} + b_2C_{2,1} + \cdots + b_nC_{n,1} \\ b_1C_{1,2} + b_2C_{2,2} + \cdots + b_nC_{n,2} \\ \vdots \\ b_1C_{1,n} + b_2C_{2,n} + \cdots + b_nC_{n,n} \end{bmatrix}$$

Elemen baris ke-$j$ dari $X$ diberikan oleh

$$x_j = \frac{b_1C_{1,j} + b_2C_{2,j} + \cdots + b_nC_{n,j}}{det(A)} \tag{2.2}$$

Perhatikan bahwa

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{1,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Perbedaan antara $A_j$ dan $A$ adalah pada kolom ke-$j$. Jika dibuat ekspansi kofaktor sepanjang elemen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ yang merupakan korespodensi dari elemen kolom ke-$j$ matriks $A$. $det(A_j)$ dapat ditentukan sebagai

$$det(A_j) = b_1C_{1,j} + b_2C_{2,j} + \ldots + b_nC_{n,j}$$

jika disubstitusi pada persamaan 2.2 maka diperoleh

$$x_j = \frac{det(A_j)}{det(A)}$$

□

**Contoh 2.14.** *Gunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier berikut:*

$$2x - y = 5$$
$$3x + 2y = -4$$

***Penyelesaian***

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \textit{ maka } det(A) = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 = 7$$
$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \textit{ maka } det(A) = 5 \cdot 2 - (-1) \cdot (-4) = 6$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \textit{ maka } det(A) = 2 \cdot (-4) - 5 \cdot 3 = -23$$

*Diperoleh*

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{6}{7}$$
$$x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{-23}{7}$$

## 2.6 Metode Kondensasi Chio

Metode kondensasi Chio (Eves , 1966) diperkenalkan oleh F. Chio dalam sebuah tulisan pada tahun 1853, meskipun jejak awal dari metode ini dapat ditemukan dalam tulisan C. Hermite tahun 1849. Metode

kondensasi Chio (Cohen , 2011) adalah metode untuk menghitung nilai determinan suatu matriks dengan menurunkan ordo matriks $n \times n$ menjadi $(n-1) \times (n-1)$ dan menganjurkan menggunakan $a_{1,1} \neq 0$ sebagai elemen pivot.

Pivot atau elemen pivot adalah elemen bukan nol dari sejumlah besar elemen yang tersedia pada sebuah matriks atau himpuanan terbatas, yang di pilih pertama pada sebuah algoritma untuk dilakukan sebuah perhitungan tertentu (Burden dan Faires,1997).

**Teorema 2.7** (Proses Kondensasi Chio)**.** *(Eves,1966) Misal $A$ adalah matriks berordo $n \times n$ dan $a_{1,1} \neq 0$. Misal $B$ adalah matriks berordo $(n-1) \times (n-1)$ yang setiap elemen $b_{i,j}$ diperoleh dari $a_{1,1}a_{i,j} - a_{1,j}a_{i,1}$, kemudian dapat diperoleh bahwa $det(A) = \dfrac{det(B)}{a_{1,1}^{n-2}}$. Yaitu*

$$det(A) = \frac{1}{a_{1,1}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,n} \\ a_{3,1} & a_{3,n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{n,1} & a_{n,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{n,1} & a_{n,3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

*Bukti.* Jika diambil sembarang matriks $A$ sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

kemudian kalikan setiap elemen pada baris dengan elemen $a_{1,1}$ kecuali elemen baris pertama, sehingga diperoleh:

$$a_{1,1}^{n-1} det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1}a_{1,1} & a_{2,2}a_{1,1} & \cdots & a_{2,n}a_{1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}a_{1,1} & a_{n,2}a_{1,1} & \cdots & a_{n,n}a_{1,1} \end{vmatrix}$$

Lakukan operasi baris elementer untuk menjdikan semua elemen kolom pertama pada baris kedua ($B_2$), baris ketiga ($B_3$), hingga baris ke-$n$ ($B_n$) bernilai nol

$$a_{1,1}^{n-1} det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2}a_{1,1} - a_{1,2}a_{2,1} & \cdots & a_{2,n}a_{1,1} - a_{1,n}a_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}a_{1,1} - a_{1,2}a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}a_{1,1} - a_{1,n}a_{n,1} \end{vmatrix}$$

selanjutnya dilakukan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama

$$a_{1,1}^{n-1} det(A) = a_{1,1}(-1)^2 \begin{vmatrix} a_{2,2}a_{1,1} - a_{1,2}a_{2,1} & \cdots & a_{2,n}a_{1,1} - a_{1,n}a_{2,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2}a_{1,1} - a_{1,2}a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}a_{1,1} - a_{1,n}a_{n,1} \end{vmatrix}$$

$$a_{1,1}^{n-1} det(A) = a_{1,1} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{n,1} & a_{n,2} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$det(A) = \frac{1}{a_{1,1}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{n,1} & a_{n,2} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

□

Algoritma metode kondensasi Chio ditunjukkan sebagai berikut:

**Algoritma 2.1.** ***Algoritma Metode Kondensasi Chio***

*Input: Matriks* $A$ *ordo* $n \times n$

*Output:* $det(A)$

*Langkah-langkah:*

1. *Pilih* $a_{1,1} \neq 0$ *sebagai elemen pivot.*
2. *Bentuk matriks baru* $B$ *berordo* $(n-1) \times (n-1)$ *dengan elemennya dibangun oleh submatriks-submatriks dari* $A$ *yaitu* $a_{1,1}a_{i,j} - a_{1,j}a_{i,1}$
3. *Hitung* $det(A) = \dfrac{det(B)}{a_{1,1}^{n-2}}$

**Contoh 2.15.** *Hitung nilai determinan matriks berikut dengan menggunakan metode kondensasi Chio*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

*langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut:*

1. *Ambil elemen $a_{1,1}$ sebagai elemen pivot.*

$$\begin{aligned} det(A) &= \frac{1}{1^{4-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -9 & -18 & -27 \\ 6 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

2. *Ambil elemen $b_{1,1}$ sebagai elemen pivot.*

$$\begin{aligned} det(A) &= \frac{1}{-9^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -9 & -18 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -9 & -27 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -9 & -18 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -9 & -27 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{-9} \begin{vmatrix} 117 & 135 \\ 45 & 63 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{-9}(1296) = -144 \end{aligned}$$

# BAB III

# PEMBAHASAN

Bagian ini akan dibahas mengenai modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel untuk menghitung determinan dan penerapannya pada aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier.

## 3.1 Modifikasi Kondensasi Chio Pivot Fleksibel

Determinan adalah suatu skalar yang diasosiasikan dengan matriks persegi $A$ dan dinyatakan sebagai $det(A)$, atau $|A|$. Terdapat beberapa metode untuk mempermudah perhitungan determinan suatu matriks persegi $n \times n$, salah satunya adalah dengan menggunakan metode kondensasi pivot.

Metode kondensasi pivot adalah metode untuk menghitung determinan dengan mengambil sebarang elemen pivot, misal $a_{r,s}$, kemudian membuat semua elemen baris ke-$r$ bernilai nol kecuali elemen pivot $a_{r,s}$. Selanjutnya nilai determinan diperoleh dengan cara mengkalikan elemen pivot $a_{r,s}$ dengan kofaktornya (Gere , 1987). Kofaktor $a_{r,s}$ diperoleh dari $(-1)^{r+s}$ dikalikan dengan minor $a_{r,s}$. Minor elemen $a_{r,s}$ merupakan determinan dari submatriks berordo $(n-1) \times (n-1)$ yang diperoleh dari penghapusan baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$ matriks $A$, sehingga kofaktor $a_{r,s}$ merupakan determinan dengan ordo $(n-1) \times (n-1)$.

Metode kondensasi Chio merupakan salah satu dari metode kondensasi pivot. Pada Metode kondensasi pivot, dapat diambil sebarang elemen untuk dijadikan elemen pivot. Tetapi, pada metode kondensasi Chio hanya elemen $a_{1,1} \neq 0$ yang dapat dijadikan elemen pivot, sehingga ketika ditemukan elemen $a_{1,1} = 0$, maka metode kondensasi Chio dapat dimodifikasi sehingga sebarang elemen dapat dijadikan elemen pivot yang disebut pivot fleksibel.

Proses perhitungan determinan pada modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel dilakukan sebagai berikut:

Misal $A$ adalah matriks berordo $n \times n$ sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,s} & \cdots & a_{s,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \quad , \quad a_{1,1} = 0$$

untuk menghitung nilai determinan matriks $A$ dengan menggunakan metode modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel adalah sebagai berikut:

1. Ambil sebarang elemen $a_{r,s}$ pada matriks $A$ sebagai pivot fleksible, dengan $a_{r,s} \neq a_{1,1}$ dan $a_{r,s} \neq 0$.
2. Buat semua elemen baris ke-$r$ bernilai nol kecuali

elemen pivot $a_{r,s}$ dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE). Kemudian dengan penghapusan baris ke-$r$ dan kolom ke-$s$, maka diperoleh determinan matriks $B$ ordo $(n-1) \times (n-1)$ yang merupakan minor $a_{r,s}$ dari matriks $A$. Pada metode kondensasi Chio, setiap elemen $b_{i,j}$ pada matriks $B$ diperoleh dari $a_{1,1}a_{i,j} - a_{1,j}a_{i,1}$. Selanjutnya, karena elemen $a_{r,s}$ yang dijadikan sebagai elemen pivot pada metode modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel, maka setiap elemen $b_{i,j}$ pada matriks $B$ diperoleh dari $a_{r,s}a_{i,j} - a_{r,j}a_{i,s}$.

$$
\begin{aligned}
B &= \begin{bmatrix} a_{r,s}a_{1,1} - a_{r,1}a_{1,s} & \cdots & a_{r,s}a_{1,n} - a_{r,n}a_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,s}a_{n,1} - a_{r,1}a_{n,s} & \cdots & a_{r,s}a_{n,n} - a_{r,n}a_{n,s} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{r,s}a_{1,1} - a_{r,1}a_{1,s} & \cdots & -(a_{r,n}a_{1,s} - a_{r,s}a_{1,n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{r,1}a_{n,s} - a_{r,s}a_{n,1}) & \cdots & a_{r,s}a_{n,n} - a_{r,n}a_{n,s} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,s} \\ a_{r,1} & a_{r,s} \end{vmatrix} & \cdots & -\begin{vmatrix} a_{1,s} & a_{1,n} \\ a_{r,s} & a_{r,n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\begin{vmatrix} a_{r,1} & a_{r,s} \\ a_{n,1} & a_{n,s} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{r,s} & a_{r,n} \\ a_{n,s} & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

sehingga setiap elemen $b_{i,j}$ matriks $B$ juga dapat ditulis sebagai berikut:

$$b_{i,j} = \begin{cases} \begin{vmatrix} a_{i,j} & a_{i,s} \\ a_{r,j} & a_{r,s} \end{vmatrix} & \text{jika } i < r, j < s \\ -\begin{vmatrix} a_{i,s} & a_{i,j+1} \\ a_{r,s} & a_{r,j+1} \end{vmatrix} & \text{jika } i < r, j \geq s \\ -\begin{vmatrix} a_{r,j} & a_{r,s} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,s} \end{vmatrix} & \text{jika } i \geq r, j < s \\ \begin{vmatrix} a_{r,s} & a_{r,j+1} \\ a_{i+1,s} & a_{i+1,j+1} \end{vmatrix} & \text{jika } i \geq k, j \geq l \end{cases}$$

penandaan positif dan negatif pada setiap elemen $b_{i,j}$ tersebut mengikuti lokasinya terhadap elemen pivot fleksibel sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{c|c} + & - \\ \hline - & + \end{array}\right] \quad \textit{pivot}$$

Misal $A$ adalah matriks berordo $4 \times 4$ dan diambil elemen $a_{2,2}$ sebagai elemen pivot, maka penandaan setiap elemen $b_{i,j}$ diperoleh sebagai berikut berdasarkan lokasinya terhadap posisi elemen pivot

$$\left[\begin{array}{c|cc} + & - & - \\ \hline - & + & + \\ - & + & + \end{array}\right] \quad \textit{pivot}$$

dan jika diambil elemen $a_{2,1}$ sebagai elemen pivot, maka penandaan setiap elemen $b_{i,j}$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} & | & - & - & - \\ \cancel{pivot} & \cancel{---} & \cancel{-} & \cancel{-} & \cancel{-} \\ & | & + & + & + \\ & | & + & + & + \end{bmatrix}$$

3. Perhitungan determinan pada metode modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel adalah sebagai berikut:

$$det(A) = \frac{(-1)^{\text{baris pivot} + \text{kolom pivot}}}{a_{r,s}^{n-2}} det(B)$$

Sebagai contoh penggunaan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel ini, akan dihitung nilai determinan matriks dibawah ini:

**Contoh 3.16.** *Hitung nilai determinan matriks berikut dengan menggunakan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

*langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut:*

1. *Ambil sembarang elemen sebagai elemen pivot dengan syarat bahwa elemen terebut tidak sama dengan nol, misalnya elemen* $a_{2,2}$.
2. *Hitung nilai elemen matriks baru hasil penurunan ordo matriks awal.*

$$\begin{aligned} det(A) &= \frac{(-1)^{2+2}}{(-2)^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{-2} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -5 & -14 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

3. *Karena bentuk determinan matriks* $A$ *sudah menunjukkan bentuk yang sederhana untuk dihitung nilai determinannya maka didapat:*

$$det(A) = \frac{1}{-2}(-6) = 3$$

**Contoh 3.17.** *Hitung nilai determinan matriks berikut dengan menggunakan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel.*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

*langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut:*

1. *Ambil sembarang elemen sebagai elemen pivot dengan syarat bahwa elemen terebut tidak sama dengan nol,*

*misalnya elemen* $b_{3,1}$.

2. *Hitung nilai elemen matriks baru hasil penurunan ordo matriks awal.*

$$det(B) = \frac{(-1)^{3+1}}{1^{3-2}} \begin{vmatrix} -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

3. *Karena bentuk determinan matriks* $A$ *sudah menunjukkan bentuk yang sederhana untuk dihitung nilai determinannya maka didapat:*

$$det(B) = 7$$

**Contoh 3.18.** *Hitung nilai determinan matriks berikut dengan menggunakan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel.*

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 8 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

*langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut:*

1. *Ambil sembarang elemen sebagai elemen pivot dengan syarat bahwa elemen terebut tidak sama dengan nol, misalnya elemen* $c_{3,2}$.
2. *Hitung nilai elemen matriks baru hasil penurunan ordo matriks awal.*

$$
\begin{aligned}
det(C) &= \frac{(-1)^{3+2}}{1^{4-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\
&= -1 \begin{vmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 7 & 14 & 7 \\ -6 & -11 & -8 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

3. *Ambil sembarang elemen sebagai elemen pivot dengan syarat bahwa elemen terebut tidak sama dengan nol, misalnya elemen $c_{2,3}$ dan membuat matriks baru dengan cara menurunkan ordo matriks awal*

$$
\begin{aligned}
det(C) &= -1\frac{(-1)^{2+3}}{7^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 14 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 14 & 7 \\ -11 & -8 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\
&= -1\frac{-1}{7} \begin{vmatrix} -21 & -7 \\ 14 & 35 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

4. *Karena bentuk determinan matriks $A$ sudah menunjukkan bentuk yang sederhana untuk dihitung nilai determinannya maka didapat:*

$$det(A) = \frac{1}{7}(-637) = -91$$

## 3.2 Penerapan Modifikasi Kondensasi Chio pada Aturan Cramer untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier

Aturan Cramer adalah aturan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan $det(A) \neq 0$. Berikut ini akan dijelaskan mengenai penyelesaian sistem persamaan linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan memanfaatkan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel pada aturan Cramer.

Misal sebuah sistem persamaan linier dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

maka penyelesaian sistem persamaan linier tersebut sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{det(A_j)}{det(A)} \\ &= \frac{\dfrac{(-1)^{\text{baris pivot} + \text{kolom pivot}}}{a_{r_j,s_j}^{n-2}} det(B_j)}{\dfrac{(-1)^{\text{baris pivot} + \text{kolom pivot}}}{a_{r,s}^{n-2}} det(B)} \end{aligned}$$

dengan $a_{r,s}$ adalah elemen baris ke-$r$ dan kolom ke-$s$ matriks $A$ dan $a_{r_j,s_j}$ adalah elemen bariks ke-$r$ dan kolom ke-$s$ matriks $A_j$.

Sebagai contoh penggunaan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel pada aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier adalah sebagai berikut:

**Contoh 3.19.** *Gunakan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel pada aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier berikut:*

$$\begin{aligned} 4x_2 + x_3 &= -15 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -16 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 21 \end{aligned}$$

*Langkah pertama adalah dinyatakan dengan perkalian matriks sebagai berikut:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -16 \\ 21 \end{bmatrix}$$

*Langkah kedua yaitu mencari nilai* $det(A)$ *dengan memanfaatkan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel sebagai berikut:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

*misalkan dengan pengambilan* $a_{2,2}$ *sebagai pivot fleksibel sehingga diperoleh*

$$
\begin{aligned}
det(A) &= \frac{(-1)^{2+2}}{3^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3}(3) = 1
\end{aligned}
$$

*Langkah ketiga yaitu mencari nilai* $det(A_1)$ *dengan memanfaatkan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel, sebagai berikut:*

$$
A_1 = \begin{bmatrix} -15 & 4 & 1 \\ -16 & 3 & -2 \\ 21 & -3 & 5 \end{bmatrix}
$$

*misalkan dengan pengambilan* $a_{2,2}$ *sebagai pivot fleksibel sehingga diperoleh*

$$
\begin{aligned}
det(A_1) &= \frac{(-1)^{2+2}}{3^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -15 & 4 \\ -16 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -16 & 3 \\ 21 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 19 & 11 \\ 15 & 9 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3}(6) = 2
\end{aligned}
$$

*Langkah keempat yaitu mencari nilai $det(A_2)$ dengan memanfaatkan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel, sebagai berikut:*

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -15 & 1 \\ -1 & -16 & -2 \\ 2 & 21 & 5 \end{bmatrix}$$

*misalkan dengan pengambilan $a_{1,2}$ sebagai pivot fleksibel sehingga diperoleh*

$$\begin{aligned} det(A_2) &= \frac{(-1)^{1+2}}{(-15)^{3-2}} \begin{vmatrix} -\begin{vmatrix} 0 & -15 \\ -1 & -16 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -15 & 1 \\ -16 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -15 \\ 2 & 21 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -15 & 1 \\ 21 & 5 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\ &= \frac{-1}{-15} \begin{vmatrix} 15 & 46 \\ -30 & -96 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{15}(-60) = -4 \end{aligned}$$

*Langkah kelima yaitu mencari nilai $det(A_3)$ dengan memanfaatkan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel, sebagai berikut:*

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -15 \\ -1 & 3 & -16 \\ 2 & -3 & 21 \end{bmatrix}$$

*misalkan dengan pengambilan $a_{3,1}$ sebagai pivot fleksibel sehingga diperoleh*

$$\begin{aligned} det(A_3) &= \frac{(-1)^{3+1}}{2^{3-2}} \begin{vmatrix} -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -15 \\ 2 & 21 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -16 \\ 2 & 21 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 8 & -30 \\ 3 & -11 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(2) = 1 \end{aligned}$$

*Langkah keenam akan dicari nilai $x_1$, $x_2$, dan $x_3$*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{2}{1} = 2 \\ x_2 &= \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{-4}{1} = -4 \\ x_3 &= \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

*Sehingga diperoleh $x_1 = 2$, $x_2 = -4$, dan $x_3 = 1$.*

**Contoh 3.20.** *Gunakan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel pada aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier berikut:*

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 4x_2 - 2x_3 + 7x_4 &= 7 \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 11 \\ -6x_2 + 6x_3 - 8x_4 &= 4 \end{aligned}$$

*Langkah pertama adalah dinyatakan dengan perkalian matriks sebagai berikut:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 7 \\ 5 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

*Langkah kedua yaitu mencari nilai* $det(A)$ *dengan memanfaatkan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel, sebagai berikut:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 7 \\ 5 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

*misalkan dengan pengambilan* $a_{3,3}$ *sebagai pivot fleksibel sehingga diperoleh*

$$\begin{aligned} det(A) &= \frac{(-1)^{3+3}}{4^{4-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 13 \\ 10 & 10 & 30 \\ -30 & -6 & -38 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

*kemudian dengan pengambilan, misalnya* $a_{3,2}$ *sebagai pivot fleksibel sehingga diperoleh*

$$
\begin{aligned}
det(A) &= \frac{1}{16}\frac{(-1)^{3+2}}{(-6)^{3-2}}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -30 & -6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 5 & 13 \\ -6 & -38 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 10 & 10 \\ -30 & -6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 10 & 30 \\ -6 & -38 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{16}\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 120 & 112 \\ 240 & 200 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{96}(-2880) = -30
\end{aligned}
$$

*Langkah ketiga yaitu mencari nilai* $det(A_1)$ *dengan memanfaatkan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel, sebagai berikut:*

$$
A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -2 & 7 \\ 11 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -6 & 6 & -8 \end{bmatrix}
$$

*misalkan dengan pengambilan* $a_{3,3}$ *sebagai pivot fleksibel sehingga diperoleh*

$$
\begin{aligned}
det(A_1) &= \frac{(-1)^{3+3}}{4^{4-2}}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\
det(A_1) &= \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 23 & 5 & 13 \\ 50 & 10 & 30 \\ -50 & -6 & -38 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

*kemudian dengan pengambilan, misalnya* $a_{3,2}$ *sebagai pivot fleksibel sehingga diperoleh*

$$
\begin{aligned}
det(A_1) &= \frac{1}{16}\frac{(-1)^{3+2}}{(-6)^{3-2}}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 23 & 5 \\ -50 & -6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 5 & 13 \\ -6 & -38 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 50 & 10 \\ -50 & -6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 10 & 30 \\ -6 & -38 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{16}\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 112 & 112 \\ 200 & 200 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{96}(0) = 0
\end{aligned}
$$

*Langkah keempat yaitu mencari nilai* $det(A_2)$ *dengan memanfaatkan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel, dan diperoleh:*

$$
A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -2 & 7 \\ 5 & 11 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & -8 \end{bmatrix}
$$

*misalkan dengan pengambilan* $a_{3,3}$ *sebagai pivot fleksibel sehingga diperoleh*

$$
\begin{aligned}
det(A_2) &= \frac{(-1)^{3+3}}{4^{4-2}}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 5 & 23 & 13 \\ 10 & 50 & 30 \\ -30 & -50 & -38 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

*kemudian dengan pengambilan, misalnya $a_{3,1}$ sebagai pivot fleksibel sehingga diperoleh*

$$
\begin{aligned}
det(A_2) &= \frac{1}{16}\frac{(-1)^{3+1}}{(-30)^{3-2}}\begin{vmatrix} -\begin{vmatrix} 5 & 23 \\ -30 & -50 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 13 \\ -30 & -38 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 10 & 50 \\ -30 & -50 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 10 & 30 \\ -30 & -38 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{16}\frac{1}{-30}\begin{vmatrix} -440 & -200 \\ -1000 & -520 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{-480}(28800) = -60
\end{aligned}
$$

*Langkah kelima yaitu mencari nilai $det(A_3)$ dengan memanfaatkan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel, dan diperoleh:*

$$
A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & -3 & 11 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & -8 \end{bmatrix}
$$

*misalkan dengan pengambilan $a_{3,2}$ sebagai pivot fleksibel sehingga diperoleh*

$$
det(A_3) = \frac{(-1)^{3+2}}{(-3)^{4-2}}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 11 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} \end{vmatrix}
$$

$$det(A_3) = \frac{-1}{9}\begin{vmatrix} -10 & -31 & -11 \\ -20 & -65 & -25 \\ 30 & 54 & 30 \end{vmatrix}$$

*kemudian dengan pengambilan, misalnya* $a_{3,1}$ *sebagai pivot fleksibel sehingga diperoleh*

$$\begin{aligned} det(A_3) &= \frac{-1}{9}\frac{(-1)^{3+1}}{30^{3-2}}\begin{vmatrix} -\begin{vmatrix} -10 & -31 \\ 30 & 54 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -10 & -11 \\ 30 & 30 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -20 & -65 \\ 30 & 54 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -20 & -25 \\ 30 & 30 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\ &= \frac{-1}{9}\frac{1}{30}\begin{vmatrix} -390 & -30 \\ -870 & -150 \end{vmatrix} \\ &= \frac{-1}{270}(32400) = -120 \end{aligned}$$

*Langkah keenam yaitu mencari nilai* $det(A_4)$ *dengan memanfaatkan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel, dan diperoleh:*

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 7 \\ 5 & -3 & 4 & 11 \\ 0 & -6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

*misalkan dengan pengambilan* $a_{3,2}$ *sebagai pivot fleksibel sehingga diperoleh*

$$
\begin{aligned}
det(A_4) &= \frac{(-1)^{3+2}}{(-3)^{4-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 11 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\
&= \frac{-1}{9} \begin{vmatrix} -10 & -5 & -31 \\ -20 & -10 & -65 \\ 30 & 6 & 54 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

*kemudian dengan pengambilan, misalnya $a_{3,1}$ sebagai pivot fleksibel sehingga diperoleh*

$$
\begin{aligned}
det(A_4) &= \frac{-1}{9} \frac{(-1)^{3+1}}{30^{3-2}} \begin{vmatrix} - \begin{vmatrix} -10 & -5 \\ 30 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -10 & -31 \\ 30 & 54 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -20 & -10 \\ 30 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -20 & -65 \\ 30 & 54 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\
&= \frac{-1}{9} \frac{1}{30} \begin{vmatrix} -90 & -390 \\ -180 & -870 \end{vmatrix} \\
&= \frac{-1}{270}(8100) = -30
\end{aligned}
$$

*Langkah ketujuh akan dicari nilai $x_1$, $x_2$, $x_3$, dan $x_4$*

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{0}{-30} = 0 \\
x_2 &= \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{-60}{-30} = 2 \\
x_3 &= \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{-120}{-30} = 4
\end{aligned}
$$

$$x_4 = \frac{det(A_4)}{det(A)} = \frac{-30}{-30} = 1$$

*Sehingga diperoleh* $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, *dan* $x_4 = 1$.

Modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel pada aturan Cramer dapat juga digunakan untuk menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang memerlukan penggunaan matematika. Berikut ini permasalahan sehari-hari yang diselesaikan dengan menggunakan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel pada aturan Cramer.

**Contoh 3.21.** *Perusahaan Yogurt membuat tiga campuran yogurt: LimeOrange, menggunakan 2 liter yogurt jeruk nipis dan 2 liter yogurt oranye per galon; LimeLemon, menggunakan 3 liter yogurt jeruk nipis dan 1 liter yogurt lemon per galon; dan OrangeLemon, menggunakan 3 liter yogurt jeruk dan 1 liter yogurt lemon per galon. Setiap hari perusahaan memiliki 350 liter yogurt lemon, 800 liter yogurt jeruk nipis, dan 650 liter yogurt jeruk tersedia. Berapa banyak galon setiap campuran yang harus dibuat setiap hari jika ingin menggunakan semua persediaan dimiliki?*

***Penyelesaian***

*Langkah pertama adalah dinyatakan dalam sistem persamaan linier sebagai berikut:*

$$x_2 + x_3 = 350$$
$$2x_1 + 3x_2 = 800$$
$$2x_1 + 3x_3 = 650$$

*Langkah kedua adalah dinyatakan dengan perkalian matriks sebagai berikut:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 350 \\ 800 \\ 650 \end{bmatrix}$$

*Langkah ketiga yaitu mencari nilai* $det(A)$ *dengan memanfaatkan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel sebagai berikut:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

*misalkan dengan pengambilan* $a_{2,2}$ *sebagai pivot fleksibel sehingga diperoleh*

$$\begin{aligned} det(A) &= \frac{(-1)^{2+2}}{3^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{3}(-36) = -12 \end{aligned}$$

*Langkah keempat yaitu mencari nilai* $det(A_1)$ *dengan memanfaatkan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel, sebagai berikut:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 350 & 1 & 1 \\ 800 & 3 & 0 \\ 650 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

*misalkan dengan pengambilan* $a_{2,2}$ *sebagai pivot fleksibel sehingga diperoleh*

$$det(A_1) = \frac{(-1)^{2+2}}{3^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 350 & 1 \\ 800 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 800 & 3 \\ 650 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$det(A_1) = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 250 & 3 \\ 1950 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}(-3600) = -1200$$

*Langkah kelima yaitu mencari nilai* $det(A_2)$ *dengan memanfaatkan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel, sebagai berikut:*

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 350 & 1 \\ 2 & 800 & 0 \\ 2 & 650 & 3 \end{bmatrix}$$

*misalkan dengan pengambilan $a_{1,2}$ sebagai pivot fleksibel sehingga diperoleh*

$$\begin{aligned} det(A_2) &= \frac{(-1)^{1+2}}{350^{3-2}} \begin{vmatrix} -\begin{vmatrix} 0 & 350 \\ 2 & 800 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 350 & 1 \\ 800 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 350 \\ 2 & 650 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 350 & 1 \\ 650 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\ &= \frac{-1}{350} \begin{vmatrix} 700 & -800 \\ 700 & 400 \end{vmatrix} \\ &= \frac{-1}{350}(840000) = -2400 \end{aligned}$$

*Langkah keenam yaitu mencari nilai $det(A_3)$ dengan memanfaatkan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel, sebagai berikut:*

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 350 \\ 2 & 3 & 800 \\ 2 & 0 & 650 \end{bmatrix}$$

*misalkan dengan pengambilan $a_{3,1}$ sebagai pivot fleksibel sehingga diperoleh*

$$\begin{aligned} det(A_3) &= \frac{(-1)^{3+1}}{2^{3-2}} \begin{vmatrix} -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 350 \\ 2 & 650 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 800 \\ 2 & 650 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 700 \\ 6 & 300 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(-3600) = -1800 \end{aligned}$$

*Langkah keenam akan dicari nilai* $x_1$, $x_2$, *dan* $x_3$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{-1200}{-12} = 100 \\ x_2 &= \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{-2400}{-12} = 200 \\ x_3 &= \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{-1800}{-12} = 150 \end{aligned}$$

*Sehingga diperoleh* $x_1 = 100$, $x_2 = 200$, *dan* $x_3 = 150$.

# BAB IV

# PENUTUP

## 4.1 Kesimpulan

Metode kondensasi Chio adalah metode untuk menghitung nilai determinan dengan menurunkan ordo matriks $n \times n$ menjadi ordo $(n-1) \times (n-1)$ yang menganjurkan menggunakan $a_{1,1} \neq 0$ sebagai elemen pivot. Jika elemen $a_{1,1} = 0$, maka metode kondensasi Chio dapat dimodifikasi sehingga sebarang elemen dapat dijadikan elemen pivot yang disebut pivot fleksibel.

Proses perhitungan nilai determinan dengan memanfaatkan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Ambil sebarang elemen $a_{r,s}$ sebagai pivot fleksibel.
2. Buat sebuah matriks $B$ ordo $(n-1) \times (n-1)$ yang merupakan minor $a_{r,s}$, dengan setiap elemen $b_{i,j}$ diperoleh dari:

$$b_{i,j} = \begin{cases} \begin{vmatrix} a_{i,j} & a_{i,s} \\ a_{r,j} & a_{r,s} \end{vmatrix} & \text{jika } i < r, j < s \\ -\begin{vmatrix} a_{i,s} & a_{i,j+1} \\ a_{r,s} & a_{r,j+1} \end{vmatrix} & \text{jika } i < r, j \geq s \\ -\begin{vmatrix} a_{r,j} & a_{r,s} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,s} \end{vmatrix} & \text{jika } i \geq r, j < s \\ \begin{vmatrix} a_{r,s} & a_{r,j+1} \\ a_{i+1,s} & a_{i+1,j+1} \end{vmatrix} & \text{jika } i \geq k, j \geq l \end{cases}$$

3. Hitung determinan $A$ dengan

$$det(A) = \frac{(-1)^{\text{baris pivot} + \text{kolom pivot}}}{a_{r,s}^{n-2}} det(B)$$

kemudian penerapan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel pada aturan Cramer memberikan penyelesai sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$x_j = \frac{\frac{(-1)^{\text{baris pivot} + \text{kolom pivot}}}{a_{r_j,s_j}^{n-2}} det(B_j)}{\frac{(-1)^{\text{baris pivot} + \text{kolom pivot}}}{a_{r,s}^{n-2}} det(B)}$$

## 4.2 Saran

Saran yang dapat diberikan untuk penelitian selanjutnya adalah menerapkan modifikasi metode kondensasi Chio pivot fleksibel pada bidang lain seperti bidang teknik, ekonomi dan sains.

## DAFTAR PUSTAKA


Anton, H. dan C. Rorres. 2014. *Elementary Linear Algebra: Application Version*. Edisi 11. USA: John Willey dan Sons Inc.

Armistead, R. B. 2010. *MPI-Based Parallel Solution of Sparse Linear Systems Using Chio's Condensation Algorthm and Test Data from Power Flow-Analysis*. Tesis. Knoxville: Program Pascasarjana Universitas Tennessee. tersedia di `http://trace.tennessee.edu/utk_gradthes/601`

Ashley, J. P. 1977. *Intermedian Algebra*. Encino, California: Benziger Bruce dan Glencoe Inc.

Ayres, F. 1987. *Theory and Problems of Matrices*. Singapura: McGraw-Hill.

Bareiss, E. H. 1968, *Sylvester's Identity and multistep integer-preserving Gaussian elimination*. Mathematics of Computation, 22 (102): 565–578, doi:10.2307/2004533 tersedia di `http://www.ams.org/journal-terms-of-use`

Barnett, R. A., dkk. 2005. *College Algebra: Graphs and Models*. Edisi 2. New York: ARS.

Burden, R. L. dan Faires, J. D. 1997. *Numerical Analysis*. Edisi 6. California: Pacific Grove.

Cohen, H. 2011. *Numerical Appoximation Methods*. New York: Springer Science and Business Media.

Conte, S. D. dan Boor, C. 1980. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. Edisi 6. New York: McGraw-Hill.

Eves, H. 1966. *Elementary Matrix Theory*. New York: Dover Publication.

Gere, J. M. dan Weaver, W. 1987. *Aljabar Matriks untuk Para Insinyur*. Jakarta: Erlangga.

Habgood, K. C. 2011. *A Low Communication Condensation-based Linear System Solver Utilizing Cramer's Rule*. Disertasi. Knoxville: Program PhD Universitas Tennessee. tersedia di `http://trace.tennessee.edu/utk_graddiss/1080`

Habgood, K., dan Arel, I. 2012. A Condensation-Based Application of Cramer's Rule for Solving Large-Scale Linear System. *Journal of Discrete Algorithms*. 10: 98-109. doi:10.1016/j.jda.2011.06.007

Hoffman. J. D. 2001. *Numerical Methods for Engineer and Scientists*. Edisi 2. New York: Marcel Dekker.

Hoffman, K. dan Kunze, R. 1971. *Linear Algebra*. Edisi 2. Englewood Cliffs, New Jersey: Prestice-Hall Inc.

Hou-biao Li, dkk. 2014. *From Sylvester's Determinant Identity to Cramer's Rule*. arVix:1407.1412v1.[math.NA]

Karris, S. T. 2007. *Numerical Analysis Using MATLAB and Excel*. Edisi 3. USA: Orchard Publications.

Lancaster, P. Dan Tismenetsky, M. 1984. *The Theory of Matrices: with Applications*. Edisi 2. San Diego, California: Academic Press.

Larson, R., Edward, dan Falvo, D.C. 2009. *Elementary Linear Algebra*. Edisi 6. New York: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.

Leon, S. J. 2010. *Linear Algebra with Application*. Edisi 8. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall.

Mathews, J. H. dan Fink, K. D. 1999. *Numerical Methods Using MATLAB*. Edisi 3. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall Inc.

Nagari, A. 2009. *Parallel Processing Architecture for Solving Large Scale Linear Systems*. Tesis. Knoxville: Program Pascasarjana Universitas Tennessee. tersedia di http://trace.tennessee.edu/utk_gradthes/53

Poole, D. 2003. *Linear Algebra: A Modern Introduction*. USA : Books/Cole.

Rice, A. dan E. Torrence. 2006. *Lewis Carroll's: Condensation Method for Evaluating Determinants*. MATH HORIZONS. pp 12-15. tersedia di www.maa.org/mathhorizons

Ufuoma, O. 2013. *A New and Simple Method of Solving Large Linear System: Based on Cramer's Rule but Employing Dodgson's Condensation*. Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science. San Fransisco, USA. 23-25 Oktober 2013.

# LAMPIRAN

## LAMPIRAN

Berikut ini adalah listing program perhitungan determinan menggunakan modifikasi kondensasi Chio pivot fleksibel dan penerapannya pada aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dengan bantuan software MatLab R2013a.

### Program 1. Pencari $det(A)$

```
function detA=pivot1(A)
Z=[];
for k=1:size(A,1)-2
    n=size(A,1);
    pq=input('Pilih baris dan kolom elemen
pivot[p;q]= ');
    p=sort(pq(1,:));
    q=sort(pq(2,:));
    pivot=A(p,q); %menampilkan elemen pivot
yang dipilih
    while pivot == 0 %untuk berjaga-jaga
jika elemen pivot yang dipilih = 0
        disp('Pivot tidak boleh 0')
        disp('Pilih pivot ulang');
        pq=input('Pilih baris dan kolom
elemen pivot[p;q]= ');
        p=sort(pq(1,:));
        q=sort(pq(2,:));
        pivot=A(p,q);
    end
    dP=pivot^(2-n);
    e=(-1)^sum(pq(:));
    Z=[Z,dP*e];
```

```
    M=A(setdiff(1:n,p),setdiff(1:n,q));
%Minor dari elemen pivot
    V=A(setdiff(1:n,p),q); %elemen selain
elemen pivot pada kolom tempat elemen pivot
dipilih
    U=A(p,setdiff(1:n,q)); %elemen selain
elemen pivot pada baris tempat elemen pivot
dipilih
    %menampilkan matrik baru hasil
kondensasi
    A=pivot*M-V*U;
    elpivot=prod(Z); %menghitung total
elemen pivot
    %menampilkan perhitungan
    A
    if n==2
        break;
    end;
    %proses kondensasi berakhir ketika
matriks sudah berordo 2 x 2
    B=A(1,1)*A(2,2)-A(1,2)*A(2,1);
    %menampilkan hasil
    detA=elpivot*B;
end
```

**Program 2. Pencari $det(A_j)$**

```
function detQ=pivot2(Q)
Z=[];
for k=1:size(Q,1)-2
    n=size(Q,1);
    pq=input('Pilih baris dan kolom elemen
pivot[p;q]= ');
    p=sort(pq(1,:));
    q=sort(pq(2,:));
    pivot=Q(p,q); %menampilkan elemen pivot
yang dipilih
```

```
    while pivot == 0 %untuk berjaga-jaga
jika elemen pivot yang dipilih = 0
        disp('Pivot tidak boleh 0')
        disp('Pilih pivot ulang');
        pq=input('Pilih baris dan kolom
elemen pivot[p;q]= ');
        p=sort(pq(1,:));
        q=sort(pq(2,:));
        pivot=Q(p,q);
    end
    dP=pivot^(2-n);
    e=(-1)^sum(pq(:));
    Z=[Z,dP*e];
    M=Q(setdiff(1:n,p),setdiff(1:n,q));
%Minor dari elemen pivot
    V=Q(setdiff(1:n,p),q); %elemen selain
elemen pivot pada kolom tempat elemen pivot
dipilih
    U=Q(p,setdiff(1:n,q)); %elemen selain
elemen pivot pada baris tempat elemen pivot
dipilih
    %menampilkan matrik baru hasil
kondensasi
    Q=pivot*M-V*U;
    elpivot=prod(Z); %menghitung total
elemen pivot
    %menampilkan perhitungan
    Q
    if n==2
        break;
    end;
    %proses kondensasi berakhir ketika
matriks sudah berordo 2 x 2
    R=Q(1,1)*Q(2,2)-Q(1,2)*Q(2,1);
    %menampilkan hasil
    detQ=elpivot*R;
end
```

**Program 3. Aturan Cramer**

```
function X=cramer
%::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::
%Program untuk Menyelesaikan Sistem
Persamaan Linier
%Menggunakan Aturan Cramer Berdasarkan
%Modifikasi Kondensasi Chio Pivot Fleksibel
%Sebagai Pendukung Skripsi
%Oleh Yuli Sagita (133511010)
%Program Studi S1 Pendidikan Matematika
%Fakultas Sains dan Teknologi
%Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang
%::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::
N = input('Masukkan matriks A ordo nxn : ');
A = N
detA = pivot1(A)
B = input('Masukkan vektor b ordo nx1 : ');
n=size(N,1);
X=zeros(size(B));
for j=1:n
    Q=N;
    Q(:,j)=B;
    disp(['Q(', num2str(j) ')= ']);
        disp(Q)
    detQ=pivot2(Q);
    disp(['det(Q(', num2str(j) '))= ']);
        disp(detQ)
    X(j)=detQ/detA;
end
disp('Solusi SPLnya adalah ');
for i = 1 :n
    disp(['X(', num2str(i), ')= ',
num2str(X(i))])
end
```

**Program 4. Progam Modifikasi Kondensasi Chio Pivot Fleksibel dan Penerapannya pada Aturan Cramer**

```
clc;
disp('::::::::::::::::::::::::::::::::::::')
disp(' Program Modifikasi Kondensasi Chio ')
disp('           Pivot Fleksibel          ')
disp('untuk menghitung determinan matriks ')
disp('          dan menyelesaikan         ')
disp('       sistem persamaan linier      ')
disp('     Sebagai Pendukung Skripsi      ')
disp('    Oleh Yuli Sagita (133511010)    ')
disp('Program Studi Pendidikan Matematika ')
disp('    Fakultas Sains dan Teknologi    ')
disp('        UIN Walisongo Semarang      ')
disp('::::::::::::::::::::::::::::::::::::')
pilih = 1;
while pilih == 1
    disp('1: Menghitung Determinan Matriks')
    disp('2: Menyelesaikan Sistem Persamaan
Linier Ax=b')
    pil=input ('Masukkan pilihan anda : ');
    switch pil
        case 1
            N = input('Masukkan matriks A
ordo nxn : ');
            disp(N)
            detN = pivot1(N)
        case 2
            cramer;
    end
    pilih = input('Tekan 1 untuk mengulang
program, tekan 0 untuk mengakhiri :    ');
end
```

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan (024) 7601295 Fax. 7615387 Semarang 50185

Nomor : Un.10.08/J.5/PP.00.9/ 1791 /2016 Semarang, 25 Oktober 2016

Hal : **Penunjukan Pembimbing Skripsi**

Kepada Yth:

1. Any Mu'analifah, M.Si
2. Aini Fitriyah, M.Sc

*Assalamu'alaikum Wr. Wb.*

Berdasarkan hasil pembahasan usulan judul penelitian jurusan Pendidikan Matematika, maka Fakultas Sains dan Teknologi menyetujui judul skripsi mahasiswa:

Nama : Yuli Sagita

NIM : 133511010

Judul : **MODIFIKASI KONDENSASI CHIO PIVOT FLEKSIBEL PADA ATURAN CRAMER UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINIER**

dan menunjuk Saudari:

1. Any Mu'analifah, M.Si sebagai pembimbing I.
2. Aini Fitriyah, M.Sc sebagai pembimbing II.

Demikian penunjukan pembimbing skripsi ini disampaikan. Atas kerjasamanya, kami sampaikan terimakasih.

*Wassalamu'alaikum Wr. Wb.*

A.n. Dekan,
Ketua Jurusan Pendidikan Matematika

**Yulia Romadiastri, S.Si. M.Sc**
NIP. 19810715 200501 2 008

Tembusan:

1. Dekan Fakultas Saintek uin walisongo sebagai laporan
2. Mahasiswa yang bersangkutan
3. Arsip

**RIWAYAT HIDUP**

## A. Identitas Diri

1. Nama Lengkap : Yuli Sagita
2. Tempat & Tgl. Lahir : Surabaya, 11 Juli 1995
3. Alamat Rumah : Dsn. Tanggungan RT. 05 RW. 02 Ds. Wringinanom Kec. Wringinanom Kab. Gresik Jawa Timur
4. HP : 085733839950
5. E-mail : yulisagita1995@gmail.com

## B. Riwayat Pendidikan

1. Pendidikan Formal:
   a. SD Negeri 1 Wringinanom Gresik (2001-2007)
   b. SMP Negeri 1 Wringinanom Gresik (2007-2010)
   c. SMA Negeri 1 Wringinanom Gresik (2010-2013)
   d. UIN Walisongo Semarang (2013-2017)
2. Pendidikan Non-Formal:
   a. Kursus Bahasa Arab Al-Azhar Pare Kediri (2014)
   b. Kursus Toefl Asterdam Englist Club (AEC) Pare Kediri (2015)

## C. Karya Ilmiah

a. Modification Flexible Pivot of Chio Condensation Method for Compute the Determinant of $4 \times 4$ Matrix (2017)

Semarang, 12 Juni 2017

**Yuli Sagita**

NIM : 133511010