KEKOMPAKAN SATU TITIK DI RUANG HAUSDORFF

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Sains dalam Ilmu Matematika

Oleh: **Dewi Maghfiroh**
NIM: 1708046004

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO SEMARANG
2021

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertandatangan dibawah ini:

Nama : Dewi Maghfiroh

NIM : 1708046004

Jurusan : Matematika

Menyatakan bahwa skripsi yang berjudul:

KEKOMPAKAN SATU TITIK DI RUANG HAUSDORFF

Secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 14 Juni 2021

Pembuat Pernyataan,

Dewi Maghfiroh

NIM: 1708046004

PENGESAHAN

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka Ngaliyan, Semarang 50185
Telp. 024-7601295, Fax. 024-7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini:
Judul : **Kekompakan Satu Titik di Ruang Hausdorff**
Penulis : Dewi Maghfiroh
NIM : 1708046004
Jurusan : Matematika
Telah diujikan dalam sidang tugas akhir oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 28 Juni 2021

DEWAN PENGUJI

Ketua Sidang,	Sekretaris Sidang,
Emy Siswanah, M.Sc NIP. 19870202 201101 2 014	Minhayati Shaleh, M.Sc NIP. 19760426 200604 2 001
Penguji Utama I,	Penguji Utama II,
Budi Cahyono, S.Pd., M.Si NIP. 19801215 200912 1 003	Siti Maslihah, M.Si NIP. 19770611 201101 2 004
Pembimbing I,	Pembimbing II,
Yulia Romadiastri, S.Si, M.Sc NIP. 19810715 200501 2 008	Juanda Kelana Putra, M.Sc NIP. 19880214 201903 1 001

KEMENTERIAN AGAMA FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI UIN WALISONGO SEMARANG REPUBLIK INDONESIA

NOTA DINAS

NOTA DINAS

Semarang, 10 Juni 2021

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum. wr. wb.

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	: Kekompakan Satu Titik di Ruang Hausdorff
Nama	: Dewi Maghfiroh
NIM	: 1708046004
Jurusan	: Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untukdiujikan dalam Sidang *Munaqsyah*.

Wassalamu'alaikum. wr. wb.

Pembimbing I,

Yulia Romadiastri, S.Si, M.Sc
NIP. 19810715 200501 2 008

NOTA DINAS

NOTA DINAS

Semarang, 14 Juni 2021

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum. wr. wb.

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	: Kekompakan Satu Titik di Ruang Hausdorff
Nama	: Dewi Maghfiroh
NIM	: 1708046004
Jurusan	: Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untukdiujikan dalam Sidang *Munaqsyah.*

Wassalamu'alaikum. wr. wb.

Pembimbing II,

Juanda Kelana Putra, M.Sc
NIP. 19880214 201903 1 001

ABSTRAK

Judul : Kekompakan Satu Titik di Ruang Hausdorff
Penulis : Dewi Maghfiroh
NIM : 1708046004

Ruang Topologi $(X, \mathcal{T})$ disebut sebagai ruang Hausdorff atau ruang Topologi terpisah jika untuk setiap $a, b \in X$ dengan a dan b adalah dua titik berbeda, masing-masing termasuk ke dalam himpunan-himpunan terbuka yang saling asing. Selanjutnya dengan memanfaatkan sifat kompak dan kompak lokal akan ditinjau karakteristik kekompakan satu titik (X^*) di ruang Hausdorff. Lebih lajut, sebuah ruang Hausdorff akan memiliki kekompakan satu titik jika memenuhi dua syarat yaitu, kompak lokal dan tidak kompak.

Kata kunci: Ruang Topologi, Ruang Hausdorff, Kompak Lokal, Kekompakan Satu Titik.

TRANSLITERASI ARAB-LATIN

Transliterasi Arab-Latin yang digunakan dalam skripsi ini berpedoman pada Surat Keputusan Bersama Menteri Agama dan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan RI Nomor: 158 Tahun 1987 dan Nomor: 0543b/U/1987 yang secara garis besar diuraikan sebagai berikut:

Huruf Arab	Nama	Huruf Latin	Nama
ا	Alif	Tidak Dilambangkan	Tidak Dilambangkan
ب	Ba	B	Be
ت	Ta	T	Te
ث	Ṡa	Ṡ	Es (dengan titik di atas)
ج	Jim	J	Je
ح	Ḥa	Ḥ	Ha (dengan titik di bawah)
خ	Kha	Kh	Ka dan Ha
د	Dal	D	De
ذ	Zal	Ż	Zet (dengan titik di atas)
ر	Ra	R	Er
ز	Zai	Z	Zet

س	Sin	S	Es
ش	Syin	Sy	Es dan Ye
ص	Ṣad	Ṣ	Es (dengan titik di bawah)
ض	Ḍad	Ḍ	De (dengan titik di bawah)
ط	Ṭa	Ṭ	Te (dengan titik di bawah)
ظ	Ẓa	Ẓ	Zet (dengan titik di bawah)
ع	Ain	‘-	Apostrof terbalik
غ	Gain	G	Ge
ف	Fa	F	Ef
ق	Qof	Q	Qi
ك	Kaf	K	Ka
ل	Lam	L	El
م	Mim	M	Em
ن	Nun	N	En
و	Wau	W	We
ه	Ha	Ḣ	Ha (dengan titik di atas)
ء	Hamzah	-‘	Apostrof
ى	Ya	Y	Ye

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmad-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Kekompakan Satu Titik di Ruang Hausdorff” ini sebagai salah satu syarat yang harus dipenuhi guna memperoleh gelar sarjana Strata Satu (S1). Selanjutnya shalawat kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah memberikan teladan dan sebagai motivasi umatnya untuk menjadi pribadi yang baik.

Skripsi ini, penulis persembahkan kepada orang tua yakni Bapak Sumino dan Ibu Supatmi, serta pengasuh penulis di Semarang yakni almarhumah Ibu Dra. Hj. Jauharotul Farida, M.Ag yang telah memberikan do’a, nasihat, serta dukungan. Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. H. Ismail, M.Ag, Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.
2. Ibu Emy Siswanah, M.Sc, Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.
3. Bapak Ahmad Aunur Rohman, M.Pd, Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.

4. Ibu Yulia Romadiastri, S.Si, M.Sc, Dosen Pembimbing I yang telah memberikan arahan, bimbingan, serta semangat dalam penulisan skripsi ini dengan penuh kesabaran dan ketelitian yang luar biasa.
5. Bapak Juanda Kelana Putra, M.Sc, Dosen Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan, serta semangat dalam penulisan skripsi ini dengan penuh kesabaran dan ketelitian yang luar biasa.
6. Ibu Eva Khoirun Nisa, M.Si, Wali Dosen yang telah memberikan saran, dukungan, dan perhatian dalam menyelesaikan skripsi ini.
7. Keluarga besar Dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang atas ilmu yang telah diberikan.
8. Adik penulis tercinta Muttaqin yang menjadi penyemangat dalam penulisan skripsi ini.
9. Sahabat-sahabat penulis yang tak bisa disebutkan satu persatu terima kasih atas dukungan, waktu, dan do'a sehingga skripsi ini selesai.
10. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2017 terima kasih atas dukungan dan do'anya.
11. Teman-teman Bidikmisi UIN Walisongo angkatan 2017 yang menjadi motivasi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

12. Teman-teman penulis setempat tinggal atas dukungan, waktu, dan do'a sehingga skripsi ini selesai.

Akhir kata semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi peneliti dan pembaca pada umumnya, *Aamiin Yaa Rabbal 'Alamin*.

Semarang, 14 Juni 2021

Penulis,

Dewi Maghfiroh

NIM: 1708046004

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Topologi merupakan cabang matematika yang bersangkutan dengan tata ruang, yang berasal dari bahasa yunani yaitu "*topos*" yang berarti tempat dan "*logos*" yang berarti ilmu. Penggunaaan kata topologi banyak dilakukan pada cabang matematika dan keluarga himpunan, khususnya untuk menjelaskan tentang himpunan-himpunan terbuka. Beberapa sifat dari ruang topologi X bergantung pada himpunan-himpunan terbuka dalam ruang topologi tersebut. Suatu topologi pada himpunan X adalah koleksi himpunan $\mathcal{T}$ yang memuat himpunan-himpunan bagian dari X yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\emptyset$ dan X adalah anggota dari $\mathcal{T}$;
2. Setiap gabungan anggota-anggota dari $\mathcal{T}$ merupakan anggota dari $\mathcal{T}$;
3. Setiap irisan anggota-anggota dari $\mathcal{T}$ yang jumlahnya berhingga merupakan anggota dari $\mathcal{T}$.

Menurut Luh Putu Ida Harini, munculnya definisi "kompak" terinspirasi dari sistem bilangan real. Sehingga, dalam pengembangan sifat kompak di ruang topologi banyak menggunakan himpunan tertutup dan terbatas pada garis bilangan real sebagai acuan model yang baik. Karena sifat terbatas di dalam ruang topologi sulit dipahami, maka dikembangkanlah sifat kompak untuk melihat sifat-sifat himpunan tanpa memperhatikan sifat terbatas. Pavel Alexandrov dan Pavel Urysohn mendefinisikan kekompakan sebagai adanya koleksi himpunan terbuka yang jumlahnya berhingga yang dapat menutupi himpunan suatu ruang topologi.

Selain sifat kompak, di dalam ruang topologi dikenal juga sifat kompak lokal. Sebuah ruang topologi X dikatakan kompak lokal jika setiap titik $x \in X$ memiliki persekitaran yang kompak. Setiap ruang kompak merupakan ruang kompak lokal, namun ruang kompak lokal tidak selalu merupakan ruang kompak.

Selanjutnya, dalam ruang topologi juga dikenal aksioma pemisahan yang mengacu pada persebaran himpunan terbuka di ruang topologi tersebut. Aksioma ini diciptakan sebagai batasan-batasan saat seseorang hendak membuat ruang topologi. Terdapat beberapa ruang di dalam aksioma pemisahan salah satunya yaitu ruang Hausdorff. Ruang Topologi $(X, \mathcal{T})$ dikatakan sebagai ruang Hausdorff atau ruang Topologi terpisah jika untuk setiap $a, b \in X$ dengan a dan b adalah dua titik berbeda, masing-masing termasuk ke dalam himpunan-himpunan terbuka yang saling asing. Ruang Hausdorff memiliki sifat kompak apabila untuk setiap pasang $a, b \in X$ dengan dengan a dan b adalah dua titik berbeda, masing-masing termasuk ke dalam himpunan-himpunan terbuka yang saling asing dan setiap liput terbuka dari X mempunyai liput bagian yang banyaknya berhingga.

Berdasarkan latar belakang di atas, penelitian ini akan membahas sifat-sifat yang harus dipenuhi dari kekompakan satu titik di ruang hausdorff.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang penelitian di atas, maka muncul permasalahan sebagai berikut: Apakah setiap Ruang Hausdorff yang kompak lokal memiliki kekompakan satu titik?

C. Pembatasan Masalah

Berdasarkan permasalahan yang muncul akan ditinjau bagaimana sifat kekompakan satu titik dan aplikasinya di Ruang Hausdorff yang meliputi definisi, teorema, serta bukti yang terkait dengan materi tersebut.

D. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan penelitian ini adalah Untuk mengetahui apakah setiap Ruang Hausdorff yang kompak lokal memiliki kekompakan satu titik.

E. Manfaat Penelitian

1. Teoritis

a. Memperluas wawasan dalam matematika khususnya pada bidang analisis untuk menambah pengetahuan mengenai sifat kompak pada ruang hausdorff dan kekompakan satu titik.

b. Sebagai bahan pertimbangan untuk penelitian selanjutnya.

2. Praktis

a. Bagi penulis, untuk menambah pengetahuan tentang sifat-sifat kekompakan satu titik pada Ruang Hausdorff dan aplikasinya.

b. Bagi jurusan matematika, untuk menambah bahan studi kasus dan referensi tentang ilmu matematika.

F. Metodologi Penelitian

1. Menentukan Masalah

Pencarian sumber pustaka dilakukan di tahap ini. Kemudian, memilih suatu permasalahan dari beberapa bagian sumber pustaka yang selanjutnya akan diteliti.

2. Perumusan Masalah

Permasalahan yang muncul selanjutnya dirumuskan ke dalam suatu pertanyaan yang harus ditemukan jawabannya, yaitu: Apakah setiap Ruang Hausdorff yang kompak lokal memiliki kekompakan satu titik?

Perumusan masalah di atas berdasarkan pada beberapa sumber pustaka yang ada. Kemudian mencari jawaban dari pertanyaan yang ada dengan menggunakan pendekatan teoritis.

3. Studi Pustaka

Pada tahap ini akan dilakukan upaya untuk memperoleh bahan dasar pengembangan pemecahan masalah. Upaya tersebut adalah melakukan kajian sumber-sumber pustaka untuk mengumpulkan teori-teori dan informasi yang berkaitan dengan masalah guna menjawab pertanyaan.

4. **Analisis dan Pemecahan Masalah**

   Dari beberapa teori dan informasi yang dikumpulkan, diperoleh suatu bahan dasar pengembangan upaya pemecahan masalah. Kemudian dilakukan tahap-tahap pemecahan masalah sebagai berikut:

   a. Mencari teorema bahwa setiap Ruang Hausdorff yang kompak lokal memiliki kekompakan satu titik jika tidak kompak dan membuktikannya.
   b. Menuliskan penerapan kekompakan satu titik pada Ruang Hausdorff dalam aplikasi soal.

5. **Penarikan Kesimpulan**

   Tahap terakhir dalam penelitian ini adalah penarikan kesimpulan dari hasil pemecahan masalah yang telah dilakukan.

G. Sistematika Penulisan

Penelitian ini menggunakan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan permasalahan, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metodologi penelitian, dan sistematika penulisaan.

BAB II Landasan Pustaka

Bab ini berisi beberapa teori pendukung penelitian pada pembahasan seperi himpunan, Ruang Topologi, Ruang Husdorff, dan sifat-sifat himpunan kompak, serta beberapa jurnal penelitian yang berkaitan dengan penelitian ini.

BAB III Hasil Penelitian dan Pembahasan

Bab ini berisi hasil-hasil penelitian berupa pembuktian beberapa teorema tentang kekompakan satu titik beserta contoh soalnya.

BAB IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari hasil penelitian dan saran bagi peneliti selanjutnya.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

A. Kajian Teori

1. Himpunan

a. Definisi 2.1 (Kartono, 1995: 1)

Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang didefinisikan dengan baik, dinotasikan dengan huruf kapital. Anggota atau elemen dari suatu himpunan adalah semua objek yang termasuk di dalam himpunan tersebut, dinotasikan dengan huruf kecil. Suatu anggota dari himpunan diberi notasi $\in$ dan bukan menjadi anggota dari suatu himpunan diberi notasi $\notin$. Penulisan himpunan yang memiliki lebih dari satu anggota yaitu dengan memisahkan setiap anggota dengan tanda koma (,) dan dikurung dalam tanda { }.

b. Definisi 2.2 (G. Bartle dan R. Sherbert, 2000: 16)

Suatu himpunan yang memuat n anggota berbeda, dimana n adalah sembarang bilangan bulat positif disebut himpunan berhingga *(finite)*. Sedangkan, himpunan lainnya disebut tak hingga *(infinite)*.

c. Definisi 2.3 (M. Muslikh, 2012: 17)

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, maka

1) Untuk setiap $x \in A$ jika terdapat $u \in \mathbb{R}$ sehingga
$$x \leq u,$$
maka A disebut terbatas di atas, dan u disebut batas atas untuk A.
2) Untuk setiap $x \in A$ jika terdapat $v \in \mathbb{R}$ sehingga
$$x \geq v,$$
maka A disebut terbatas di bawah, dan v disebut batas bawah untuk A.
3) Jika A terbatas di atas dan terbatas di bawah maka A disebut terbatas.

Contoh 2.1

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, dengan $A = \{1,2,3,4,5,6\}$.

1) A terbatas di atas karena terdapat $u \in \mathbb{R}$, yaitu $u = 8$ sehingga
$$x \leq 8$$
untuk semua $x \in A$.

2) A terbatas di bawah karena terdapat $v \in \mathbb{R}$, yaitu $v = 0$ sehingga

$$x \geq 0$$

untuk semua $x \in A$.

3) Karena A terbatas di atas dan terbatas di bawah, maka A terbatas.

d. Definisi 2.4 (W. Rudin, 1976: 4)

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $A \neq \emptyset$.

1) u disebut sebagai supremum (batas atas terkecil) dari A jika memenuhi syarat-syarat berikut:
   a) A terbatas di atas.
   b) u adalah batas atas A.
   c) Untuk setiap batas atas A, misalkan v, maka $u \leq v$.

   Dinotasikan $u = \sup(A)$.

2) x disebut sebagai infimum (batas bawah terbesar) dari A jika memenuhi kondisi berikut:
   a) A terbatas di bawah.
   b) x adalah batas bawah A.
   c) Untuk setiap batas bawah A, misal y, maka $y \leq x$.

Dinotasikan $x = \inf(A)$.

e. **Definisi 2.5 (G. Bartle dan R. Sherbert, 2000: 44)**

Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dapat digambarkan dalam garis lurus yang disebut garis bilangan real. Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$, akan dibentuk himpunan-himpunan bilangan real sebagai berikut:

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\},$$
$$K_2 = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\},$$
$$K_3 = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\},$$
$$K_4 = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}.$$

Himpunan di atas menyatakan suatu interval, secara berurutan dinyatakan sebagai berikut:

1) $K_1 = (a, b)$ merupakan interval terbuka, kedua titik ujung tidak termasuk dalam anggota himpunan.
2) $K_2 = [a, b]$ merupakan interval tertutup, kedua titik ujung termasuk dalam anggota himpunan.
3) $K_3 = (a, b]$ merupakan interval buka-tutup, titik ujung a tidak termasuk dalam

anggota himpunan, tetapi ujung b termasuk dalam anggota himpunan.

4) $K_3 = [a, b)$ merupakan interval tutup-buka, titik ujung a termasuk dalam anggota himpunan, tetapi ujung b tidak termasuk dalam anggota himpunan.

f. Definisi 2.6 (J. Hernadi, 2015: 61)

Barisan I_n dengan $n \in \mathbb{N}$, disebut sebagai interval susut (*nested intervals*) jika

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots.$$

Contoh 2.2

Diberikan $I_n = [0, \frac{1}{n}]$ dengan $n \in \mathbb{N}$.

$$I_1 = [0,1], I_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right], I_3 = \left[0, \frac{1}{3}\right], \ldots$$

I_n merupakan interval susut karena

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots.$$

g. Teorema 2.1 (G. Bartle dan R. Sherbert, 2000: 47)

jika $I_n = [a_n, b_n]$ dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $I_n \supseteq I_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ (interval susut), maka

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$$

$$I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_\infty \neq \emptyset$$

terdapat $\beta \in \mathbb{R}$ sehingga $\beta \in I_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Selanjutnya, jika panjang

$$I_n = b_n - a_n$$

memenuhi

$$\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0,$$

maka anggota berserikat β tersebut adalah tunggal.

Bukti:

Misal himpunan $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Jelas bahwa $A \neq \emptyset$, karena $a_1 \in A$ dan $A \subset \mathbb{R}$.

A terbatas di atas, karena $I_n \supseteq I_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Sehingga diperoleh

$$a_n \leq b_n$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berarti b_1 adalah batas atas dari A.

Memanfaatkan sifat kelengkapan $\mathbb{R}$, maka didapat $\sup(A) = \beta$. Jelas bahwa

$$a_m \leq \beta$$

untuk setiap $m \in \mathbb{N}$. Kemudian untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ berlaku,

$$a_n \leq a_{n+m} \leq b_{n+m} \leq b_m$$

atau

$$a_n \leq b_m.$$

Hal ini berakibat

$$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leq b_m$$

atau

$$\beta \leq b_m.$$

Karena $a_m \leq \beta$ dan $\beta \leq b_m$, maka diperoleh $a_m \leq \beta \leq b_m$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$.

Dengan kata lain, $\beta \in I_n = [a_n, b_n]$ setiap $n \in \mathbb{N}$. Sehingga

$$\beta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

yang berakibat

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

Jika $\eta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, maka dengan menggunakan langkah yang sama seperti di atas, didapat $\eta \in I_m$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$. Sehingga diperoleh

$$\eta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Selanjutnya, akan dibuktikan ketunggalannya, yaitu $\xi = \eta$.

Diambil sembarang $\varepsilon > 0$.

Jika inf $\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, maka ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga,

$$0 \leq \eta - \beta \leq bn_0 - an_0 \leq \varepsilon$$

atau

$$0 \leq \eta - \beta \leq \varepsilon.$$

Karena berlaku untuk sembarang $\varepsilon > 0$, maka $\eta - \beta = 0$ atau $\eta = \beta$.

Sehingga terbukti bahwa

$$\eta = \beta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

tunggal.

h. Definisi 2.7 (G. Bartle dan R. Sherbert, 2000: 313)

1) Himpunan $A \in \mathbb{R}$ dikatakan sebagai himpunan terbuka dalam $\mathbb{R}$ jika untuk setiap $x \in A$, ada persekitaran $V_\delta(x)$ sehingga

$$V_\delta(x) \subseteq A.$$

2) Himpunan $B \in \mathbb{R}$ dikatakan sebagai himpunan tertutup dalam $\mathbb{R}$ jika komplemen B, yaitu B^c merupakan himpunan terbuka dalam $\mathbb{R}$.

Contoh 2.3

Himpunan $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ terbuka, karena untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ terdapat:

$$V_2(a) = (x-2, x+2) \subseteq \mathbb{R}.$$

Contoh 2.4

Himpunan $C = [1,3]$ tertutup, karena jika diambil $a = 1$ maka untuk setiap $\delta > 0$,

$$V_\delta(1) = (1-\delta, 1+\delta) \nsubseteq C$$

dan

$$1 - \delta \notin C.$$

i. Definisi 2.8 (H. Gunawan, 2016: 53)

Suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan yang memetakan setiap $x \in A$ dengan sebuah elemen tunggal $y \in B$, ditulis

$$f: A \to B.$$

Elemen y yang terkait dengan x disebut peta dari x dan ditulis $y = f(x)$.

j. Definisi 2.9 (J. R. Munkres, 2000: 18)

1) Diberikan suatu fungsi $f: A \to B$. Fungsi f disebut sebagai fungsi surjektif jika setiap $b \in B$ adalah bayangan dari sebarang $a \in A$ yaitu bila: $b \in B \Rightarrow a \in A$ sehingga $f(a) = b$.
2) Diberikan suatu fungsi $f: A \to B$. Fungsi f disebut sebagai fungsi injektif jika setiap $a_n \in A$ dengan $n \in \mathbb{N}$, mempunyai peta yang berbeda dalam B, yaitu apabila
$$a_1 \neq a_2$$
maka
$$f(a_1) \neq f(a_2).$$
3) Diberikan suatu fungsi $f: A \to B$. Fungsi f disebut sebagai fungsi bijektif jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi surjektif sekaligus fungsi injektif.

2. Ruang Topologi

a. Definisi 2.10 (S. Lipschutz, 1965: 66)

Dipunyai X sebuah himpunan tak kosong dan $\mathcal{T}$ adalah koleksi himpunan bagian dari X. Maka $\mathcal{T}$ disebut topologi terhadap X jika:

1) Setiap gabungan anggota-anggota dari $\mathcal{T}$ merupakan anggota dari $\mathcal{T}$.
2) Setiap irisan anggota-anggota dari $\mathcal{T}$ yang jumlahnya berhingga merupakan anggota dari $\mathcal{T}$.
3) $\emptyset$ dan X adalah anggota dari $\mathcal{T}$.

b. Definisi 2.11 (S. Lipschutz, 1965: 66)

Pasangan $(X, \mathcal{T})$ terdiri dari himpunan X dan topologi $\mathcal{T}$ terhadap X disebut ruang topologi (*topological space*).

Contoh 2.5

Misalkan:

$X = \{a, b, c\}$

$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset,\ \{a, b, c\},\ \{b\},\ \{a, b\},\ \{b, c\}\}$.

Tunjukkan $\mathcal{T}_1$ suatu topologi di X!

Bukti:

Akan ditunjukkan kondisi 1), 2), dan 3) dipenuhi:

1) Ambil sembarang $A, B \in \mathcal{T}$.

   Maka jelas bahwa $A \cup B \in \mathcal{T}$.

2) Ambil sembarang $A, B \in \mathcal{T}$.

   Maka jelas bahwa $A \cap B \in \mathcal{T}$.

3) Jelas $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

   Karena kondisi 1), 2), dan 3) terpnuhi, maka $\mathcal{T}_1$ merupakan suatu topologi di X.

Contoh 2.6

Misalkan:

$Y = \{a, b, c, d, e, f\}$

$\mathcal{T}_2 = \{Y, \emptyset, \{a\}, \{f\}, \{a, f\}, \{a, c, f\}, \{b, c, d, e, f\}\}$.

Tunjukkan $\mathcal{T}_2$ suatu topologi di Y!

$\mathcal{T}_2$ bukan suatu topologi di Y karena

$$\{a, f\} \cap \{a, c, f\} = \{c\} \notin \mathcal{T}_2.$$

Dengan kata lain, $\mathcal{T}_2$ tidak memenuhi kondisi 2).

c. Teorema 2.2 (S. Lipschutz, 1965: 67)

Irisan $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ merupakan topologi pada X, jika $\mathcal{T}_1$ dan $\mathcal{T}_2$ juga merupakan topologi pada X.

Bukti:

Akan ditunjukkan kondisi 1), 2), dan 3) dipenuhi:

1) Jika $A, B \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$, maka
$$A, B \in \mathcal{T}_1$$
dan
$$A, B \in \mathcal{T}_2.$$
Karena $\mathcal{T}_1$ dan $\mathcal{T}_2$ topologi pada X, maka
$$A \cup B \in \mathcal{T}_1$$
dan
$$A \cup B \in \mathcal{T}_2.$$
Sehingga
$$A \cup B \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2.$$

2) Jika $A, B \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$, maka
$$A, B \in \mathcal{T}_1$$
dan
$$A, B \in \mathcal{T}_2.$$
Karena $\mathcal{T}_1$ dan $\mathcal{T}_2$ topologi pada X, maka
$$A \cap B \in \mathcal{T}_1$$
dan
$$A \cap B \in \mathcal{T}_2.$$
Sehingga
$$A \cap B \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2.$$

3) Karena $\mathcal{T}_1$ dan $\mathcal{T}_2$ topologi pada X, maka

$$X, \emptyset \in \mathcal{T}_1$$

dan

$$X, \emptyset \in \mathcal{T}_2.$$

Sehingga

$$X, \emptyset \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2.$$

Karena kondisi 1), 2), dan 3) terpnuhi, maka $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ merupakan suatu topologi di X.

d. Definisi 2.12 (S. Lipschutz, 1965: 66)

Untuk sembarang ruang topologi $(X, \mathcal{T})$, anggota-anggota dari $\mathcal{T}$ adalah himpunan terbuka.

e. Teorema 2.3 (J. Hernadi, 2015: 70)

Diberikan ruang topologi $(X, \mathcal{T})$, maka:

1) X dan $\emptyset$ adalah himpunan terbuka,
2) Setiap gabungan dari himpunan-himpunan terbuka (berhingga atau tak hingga) merupakan himpunan terbuka,
3) Setiap irisan dari himpunan-himpunan terbuka yang jumlahnya berhingga merupakan himpunan terbuka.

Bukti:

1) Karena $(X, \mathcal{T})$ adalah ruang topologi, maka $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.

   Jelas $X, \emptyset$ terbuka.

2) Ambil sembarang himpunana terbuka $U_1, U_2, U_3, \ldots \in \mathcal{T}$.

   Karena $U_1, U_2, U_3, \ldots \in \mathcal{T}$, maka

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \in \mathcal{T}.$$

   Sehingga,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

   terbuka.

3) Ambil sembarang himpunan terbuka $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$.

   Karena $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$, maka

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}.$$

   Sehingga,

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i$$

   terbuka.

f. Definisi 2.13 (J. L. Kelley, 1955: 40)

Diberikan himpunan $K \subset X$ pada ruang topologi $(X, \mathcal{T})$. Himpunan K disebut sebagai himpunan tertutup jika himpunan $X - K$ terbuka.

Contoh 2.7

Diberikan ruang topologi $(X, \mathcal{T})$. Tunjukkan $X, \emptyset$ merupakan himpunan tertutup!

Bukti:

Jelas bahwa $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.

Karena $X, \emptyset \in \mathcal{T}$, maka $X, \emptyset$ terbuka.

Jelas bahwa $X^c = \emptyset \in \mathcal{T}$.

Karena $X^c \in \mathcal{T}$, maka X^c terbuka.

Akibatnya X tertutup.

Jelas bahwa $\emptyset^c = X \in \mathcal{T}$.

Karena $\emptyset^c \in \mathcal{T}$, maka $\emptyset^c$ terbuka.

Akibatnya $\emptyset$ tertutup.

g. Teorema 2.4 (Freiwald, 2014: 104)

Diberikan ruang topologi $(X, \mathcal{T})$, maka:

1) X dan $\emptyset$ adalah himpunan tertutup,

2) Setiap gabungan dari himpunan-himpunan tertutup yang jumlahnya berhingga merupakan himpunan tertutup,
3) Setiap irisan dari himpunan-himpunan tertutup (berhingga atau tak hingga) merupakan himpunan tertutup.

Bukti:

1) Terbukti di Contoh 2.5.
2) Misal V_i tertutup untuk $1 \leq i \leq n$.

   Jadi $X - V_i$ terbuka.

   Maka $\bigcap_{i=1}^{n}(X - V_i)$ terbuka.

   Sehingga,

$$X - \left(\bigcap_{i=1}^{n}(X - V_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{n} X - (X - V_i)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} V_i$$

   tertutup.

3) Misal V_i tertutup untuk setiap $i \in I$.

   Jadi $X - V_i$ terbuka.

   Maka $\bigcup_{i=1}^{\infty}(X - V_i)$ terbuka. Sehingga,

$$X - \left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(X - V_i)\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} X - (X - V_i)$$

$$= \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i$$

tertutup.

h. Definisi 2.14 (S. Lipschutz, 1965: 67)

Diberikan himpunan $A \subseteq X$ pada ruang topologi $(X, \mathcal{T})$. Titik $x \in X$ dikatakan sebagai titik limit dari A jika untuk setiap U terbuka dan $x \in U$, maka

$$(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Lebih lanjut, *derived set* dari A adalah himpunan dari titik-titik limit dari A, dinotasikan A'.

Contoh 2.8

Misalkan $(X, \mathcal{T})$ ruang topologi, dengan:

$X = \{a, b, c, d, e\}$,

$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$,

dan $A = \{a, b, c\} \subset X$.

Tunjukkan *derived set* dari A!

1) $a \in X$ bukan titik limit dari A, karena untuk himpunan terbuka yang memuat a, yaitu:

$$U = \{a\}$$

maka

$$(U - \{a\}) \cap A = \emptyset.$$

2) $b \in X$ merupakan titik limit dari A, karena semua himpunan terbuka yang memuat b yaitu:

$$U_1 = X = \{a, b, c, d, e\}$$

dan

$$U_2 = \{b, c, d, e\}$$

maka

$$(U_n - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

dengan $n = 1{,}2$.

3) $c \in X$ bukan titik limit dari A, karena untuk himpunan terbuka yang memuat c yaitu:

$$U = \{c, d\}$$

maka

$$(U - \{a\}) \cap A = \emptyset.$$

4) $d \in X$ adalah titik limit dari A, karena semua himpunan terbuka yang memuat d yaitu:

$$U_1 = X = \{a, b, c, d, e\},$$

$$U_2 = \{c, d\},$$

$$U_3 = \{a, c, d\},$$

dan

$$U_4 = \{b, c, d, e\},$$

maka

$$(U_n - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

dengan $n = 1,2,3,4$.

5) $e \in X$ adalah titik limit dari A, karena semua himpunan terbuka yang memuat e yaitu:

$$U_1 = X = \{a, b, c, d, e\}$$

dan

$$U_2 = \{b, c, d, e\},$$

maka

$$(U_n - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

dengan $n = 1,2$.

Jadi $A' = \{b, d, e\}$.

i. Definisi 2.15 (R. Engelking, 1989: 14)

Diberikan himpunan $A \subseteq X$ pada ruang topologi $(X, \mathcal{T})$. Jika $(U_i)_{i \in I}$ adalah koleksi semua himpunan bagian terbuka dari A, maka titik dalam *(Interior)* dari A, ditulis $Int(A)$ adalah

$$Int(A) = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Contoh 2.9

Misalkan $(X, \mathcal{T})$ ruang topologi, dengan:

$X = \{a, b, c, d, e\}$,

$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$,

dan $A = \{c, d, e\} \subset X$.

Tunjukkan *Interior* dari A!

Berdasarkan definisi di atas diperoleh:

$$Int(A) = \{c, d\}.$$

j. **Definisi 2.16 (J. Dixmier, 1984: 9)**

Diberikan himpunan $A \subseteq X$ pada ruang topologi $(X, \mathcal{T})$. Jika $(U_i)_{i \in I}$ adalah koleksi semua himpunan bagian tertutup dari X yang memuat A, maka penutup *(Closure)* dari A, ditulis $\bar{A}$ adalah

$$\bar{A} = \bigcap_{i \in I} U_i.$$

Contoh 2.10

Misalkan $(X, \mathcal{T})$ ruang topologi, dengan:

$X = \{a, b, c, d, e\}$,

$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$, dan koleksi himpunan bagian tertutup dari X adalah $\{X, \emptyset, \{a\}, \{b, e\}, \{a, b, e\}, \{b, c, d, e\}\}$.

Dari definisi di atas diperoleh:

1) $\{\overline{b}\} = \{b, e\}$,
2) $\{\overline{a, c}\} = X$,
3) $\{\overline{b, d}\} = \{b, c, d, e\}$.

k. Definisi 2.17 (Freiwald, 2014: 106)

Diberikan himpunan $A \subseteq X$ pada ruang topologi $(X, \mathcal{T})$. Titik batas *(Frontier* atau *Boundary)* dari A, ditulis $Fr(A)$ adalah

$$Fr(A) = \bar{A} \cap \overline{X - A}.$$

l. Definisi 2.18 (R. Engelking, 1989: 24)

Diberikan himpunan $A \subseteq X$ pada ruang topologi $(X, \mathcal{T})$. Himpunan A disebut *dense* di dalam X jika $\bar{A} = X$.

Contoh 2.11

Dalam topologi biasa di $\mathbb{R}$, setiap bilangan real

$$x \in \mathbb{R}$$

adalah titik limit dari $\mathbb{Q}$.

Jadi *Closure* dari $\mathbb{Q}$ adalah himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ atau

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

Dengan kata lain, dalam topologi biasa himpunan semua bilangan rasional $\mathbb{Q}$ *dense* di dalam $\mathbb{R}$.

m. Definisi 2.19 (Dugundji, 1978: 62)

Diberikan ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ dan $x \in X$. Himpunan $N(x) \subset X$ disebut persekitaran (*neighborhood*) titik x jika ada himpunan terbuka U sehingga

$$x \in U \subset N(x).$$

Contoh 2.12

Diberikan ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ dan U persekitaran dari titik x.

Jika V adalah sembarang himpunan bagian dari X sedemikian hingga

$$U \subseteq V,$$

maka V adalah persekitaran dari x.

n. Definisi 2.20 (Wenner Ballmann, 2018: 5)

Diberikan dua ruang topologi $(X, \mathcal{T}_1)$ dan $(Y, \mathcal{T}_2)$. Fungsi $f: X \to Y$ disebut kontinu *(continuous)* di titik $x \in X$ jika untuk setiap persekitaran V dari $f(x)$ di Y, terdapat persekitaran U sehingga $f(U) \subseteq V$. Jika f kontinu di setiap titik anggota A, maka f kontinu pada $A \subset X$.

o. Definisi 2.21 (M. Reid dan B. Szendroii, 2005: 111)

Fungsi $f: X \to Y$ pada ruang topologi $(X, \mathcal{T}_1)$ dan $(Y, \mathcal{T}_2)$ dikatakan homomorfisma jika f adalah fungsi bijektif sedemikian hingga f dan f^{-1} kontinu.

3. Ruang Hausdorff

Definisi 2.22 (W. J. Pervin, 1964: 73)

Ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ disebut ruang Hausdorff atau ruang topologi terpisah apabila setiap titik $x, y \in X$ dengan $x \neq y$, terdapat persekitaran

$$U, V \subset X$$

yang saling asing, sehingga

$$x \in U$$

dan

$$y \in V.$$

Contoh 2.13

Diberikan ruang topologi $(X, \mathcal{T})$, dengan

$$X = \{a, b, c, d\}$$

dan

$$\mathcal{T} = 2^{x}.$$

Ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ adalah ruang Hausdorff, karena untuk setiap $x, y \in X$ terdapat

$$U = \{x\}, V = \{y\} \subset X$$

sedemikian sehingga $x \in U$, $y \in V$ dan

$$U \cap V = \emptyset.$$

Jadi $(X, \mathcal{T})$ ruang Hausdorff.

Contoh 2.14

Diberikan ruang topologi $(A, \mathcal{T})$, dengan

$$A = \{a, b, c, d\}$$

dan

$$\mathcal{T} = \big\{\{a, b\}, \{c, d\}, A, \emptyset\big\}.$$

Ruang topologi $(A, \mathcal{T})$ bukan Ruang Hausdorff, karena ada $a, b \in A$ sedemikian hingga untuk setiap persekitaran

$$U, V \subset X, a \in U, b \in V$$

tetapi $U \cap V = \{a, b\} \neq \emptyset$.

4. Kekompakan

a. Definisi 2.23 (S. Lipschutz, 1965: 151)

Koleksi himpunan $\mathcal{L} = \{U_i \in \mathcal{T}, i \in I\}$ disebut liput dari X jika

$$X \subset \bigcup_{U \in \mathcal{L}} U.$$

Liput $\mathcal{L}$ dikatakan berhingga jika I berhingga dan $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ dikatakan liput bagian jika

$$X \subset \bigcup_{U \in \mathcal{K}} U.$$

Pada ruang topologi $(X, \mathcal{T})$, liput $\mathcal{L}$ disebut terbuka jika U_i terbuka di $\mathcal{T}$ untuk setiap $i \in I$.

b. Definisi 2.24 (Wenner Ballmann, 2018: 15)

Diberikan ruang topologi $(X, \mathcal{T})$. Jika setiap liput terbuka $(U_i)_{i \in I}$ dari X berisi liput bagian yang jumlahnya berhingga, maka $(X, \mathcal{T})$ kompak.

Contoh 2.15

Diberikan ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ dan $K \subset X$ dengan $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$.

Jika $\mathcal{L} = \{U_i \in \mathcal{T}, i \in I\}$ adalah liput terbuka dari K, maka setiap titik yang berada di dalam K adalah anggota dari $\mathcal{L}$. Jadi,

$$k_1 \in U_{i_1}, k_2 \in U_{i_2}, \dots, k_n \in U_{i_n}.$$

Sehingga, $K \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_n}$. Dengan demikian K kompak.

c. **Teorema 2.5 (H. L. Royden dan P. M. Fitzpatrick, 2010: 234)**

Ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ kompak dan $K \subseteq X$ tertutup, maka K kompak.

Bukti:

Diambil sembarang liput terbuka dari K, yaitu:

$$\mathcal{L} = \{U_i \in \mathcal{T}, i \in I\}.$$

Diperoleh $K = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Karena K tertutup, maka K^c terbuka.

Jelas $X = K \cup K^c$. Sehingga,

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \cup K^c.$$

Jadi $\mathcal{L} \cup K^c$ merupakan liput terbuka dari X.

Karena X kompak, maka terdapat liput bagian berhingga dari $\mathcal{L} \cup K^c$ yakni:

$$\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \cup K^c.$$

Sehingga,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i \cup K^c.$$

Jadi diperoleh

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Dengan kata lain himpunan $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ adalah liput bagian dari $\mathcal{L}$, sehingga K kompak.

d. Teorema 2.6 (J. R. Munkres, 2000: 165)

Setiap himpunan kompak K dalam suatu Ruang Hausdorff $(X, \mathcal{T})$ adalah tertutup.

Bukti:

Diberikan Ruang Hausdorff $(X, \mathcal{T})$ dan K adalah himpunan bagian kompak dari X.

Misalkan $K \neq \emptyset$, maka terdapat $y \in K^c$.

Jelas $y \in U_y$. Jadi $y \in U_y \subset K^c$.

Dapat ditulis $K^c = \bigcup_{y \in K^c} U_y$.

Karena $K, \emptyset \in$ ruang topologi, maka $K, \emptyset$ terbuka.

Jelas bahwa $K^c = \emptyset$, sehingga K^c tebuka.

Karena K^c tebuka, maka K tertutup.

e. Teorema 2.7 (Tomasoa dkk, 2015: 86)

Jika K adalah suatu himpunan bagian kompak dari ruang Hausdorff $(X,\mathcal{T})$ dan $q \in K^c$, maka terdapat himpunan-himpunan terbuka

$$U, V \subset X$$

yang saling asing, sedemikian hingga $K \subset U$ dan $q \in V$.

Bukti:

Diberikan ruang Hausdorff $(X,\mathcal{T})$.

Diambil sembarang $K \subset X$, dimana K himpunan kompak.

Untuk sembarang $a \in K$ dan $q \in K^c$, karena $(X,\mathcal{T})$ adalah ruang Hausdorff maka terdapat himpunan-himpunan terbuka U_a dan V_a dari X sedemikian hingga

$$a \in U_a$$

dan

$$q \in V_a.$$

Misal $\mathcal{F} = \{U_a | a \in K\}$ dengan U_a himpunan terbuka dari X, maka $\mathcal{F}$ adalah liput terbuka dari K.

Perhatikan bahwa K kompak, maka $\mathcal{F}$ memiliki liput bagian berhingga dari K, yaitu

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

dari K sedemikian hingga K termuat dalam U, yaitu

$$K \subset U = U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_n},$$

sehingga U adalah himpunan terbuka.

Di lain pihak, misalkan $V = V_{n_1} \cap \dots \cap V_{n_n}$.

Karena q termuat dalam $V_{n_1}, \dots, V_{n_n}$ maka $V_{n_1}, \dots, V_{n_n}$ terbuka.

Sehingga V juga terbuka.

Diperoleh U dan V adalah himpunan-himpunan terbuka di X, sedemikian hingga $K \subset U$, $q \in V$, dan $U \cap V = \emptyset$.

f. Definisi 2.25 (Tomasoa dkk, 2015: 87)

Ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ disebut sebagai ruang Normal apabila semua himpunan tertutup $A, B \subset X$ yang saling asing terdapat himpunan terbuka U dan V sedemikian hingga

$$A \subset U,$$

$$B \subset V,$$

dan

$$U \cap V = \emptyset.$$

g. Teorema 2.8 (S. Lipschutz, 1965: 153)

Setiap ruang Hausdorff kompak $(X, \mathcal{T})$ adalah normal.

Bukti:

Ambil sembarang $A, B \subset X$, dimana A, B tertutup dan $A \cap B = \emptyset$.

Karena X kompak maka A dan B juga kompak.

Untuk setiap $b \in B$ terdapat dua himpunan terbuka yang saling asing yaitu U_b dan V_b sedemikian hingga $A \subset U_b$ dan $b \in V_b$.

Misal,

$$\mathcal{F} = \{V_b | b \in B\}$$

adalah koleksi himpunan-himpunan terbuka di X.

Karena $b \in B$ dan $b \in V_b$ maka $B \subseteq V_b$, sehingga $\mathcal{F}$ adalah liput dari B.

Karena B kompak, maka $\mathcal{F}$ memiliki liput bagian berhingga dari B.

Sehingga terdapat

$$b_1, b_2, \dots, b_n \in B$$

sedemikian hingga B termuat di dalam V dimana $V = V_{b_1} \cup \dots \cup V_{b_n}$.

Karena V_b terbuka maka gabukan dari V_b juga terbuka, sehingga V terbuka. Di lain pihak, misalkan $U = U_{b_1} \cap \ldots \cap U_{b_n}$.

Karena U_b terbuka maka irisan U_b juga terbuka. Karena U, V terbuka maka berdasarkan definisi ruang normal, maka $(X, \mathcal{T})$ adalah normal.

h. Definisi 2.26 (G. E. Bredon, 1993: 31)

Ruang Topologi $(X, \mathcal{T})$ dikatakan kompak lokal jika setiap titik $x \in X$ memiliki persekitaran yang kompak.

i. Proposisi 2.1 (S. Lipschutz, 1965: 155)

Setiap himpunan yang kompak adalah kompak lokal.

5. Kekompakan Satu Titik

a. Definisi 2.27 (Freiwald, 2014: 418)

$h: X \to X^*$ adalah homomorfisma X pada X^*, dengan X^* ruang hausdorff kompak. Jika $h[X]$ dense pada X^*, maka pasangan (X^*, h) disebut pengkompak dari X.

b. **Definisi 2.28 (J. R. Munkres, 1983: 183)**

Diberikan $(X, \mathcal{T})$ ruang hausdorff yang kompak lokal. Diambil sembarang objek yang tak menjadi anggota X, untuk lebih mudah dinotasikan dengan ∞, dan dibentuk himpunan

$$X^* = X \cup \{\infty\}.$$

Topologi pada X^* dibentuk sebagai berikut: $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \alpha$ dengan α merupakan koleksi sembarang himpunan $N \subset X^*$ sehingga $X^* - N$ merupakan himpunan tertutup dan kompak di dalam X. Sehingga X^* disebut kekompakan satu titik pada X.

B. Kajian Pustaka

1. Jurnal University of Oxford 2018 oleh Arnold Tan Junhan yang berjudul "A Report on Hausdorff Compactification of R". Hasil yang diperoleh peneliti menunjukkan bahwa terdapat kekompakan lain yang berbeda dengan kekompakan satu titik, kekompakan dua titik, dan kekompakan Stone Cech. Persamaan isi jurnal dengan skripsi ini adalah pembahasan mengenai kekompakan satu titik. Namun, isi dari skripsi ini fokus membahas salah satu jenis kekompakan

yaitu kekompakan satu titik dan sifat suatu himpunan yang memiliki kekompakan satu titik.

2. Jurnal Barekeng 2015 oleh M. Tomasoa dkk yang berjudul "Karakteristik Ruang Hausdorff Kompak". Hasil yang diperoleh oleh peneliti menunjukkan bahwa di dalam Ruang Hausdorff kompak, jika suatu himpunan kompak maka himpuanan tersebut tertutup dan sebaliknya. Selain itu, pada penelitian ini juga dibahas bahwa setiap Ruang Hausdorff kompak adalah normal. Persamaan isi jurnal dengan skripsi ini adalah pembahasan mengenai ruang Hausdorff dan sifat kompak. Sedangkan, perbedaannya adalah adanya pembahasan mengenai sifat kompak lokal di ruang Hausdorff serta dikaji pula salah satu jenis kekompakan yaitu kekompakan satu titik.
3. Electronic Journal of Undergraduate Mathematics 1996 oleh Jay Blankespoor dan John Krueger yang berjudul "Compactifications of Topological Spaces". Hasil yang diperoleh oleh peneliti di jurnal ini adalah kekompakan yang dimiliki oleh Ruang Hausdorff yang kompak lokal yaitu kekompakan satu titik dan kekompakan Stone Cech. Persamaan isi jurnal dengan skripsi ini adalah pembahasan

mengenai kekompakan satu titik. Namun, isi dari skripsi ini fokus membahas salah satu jenis kekompakan yaitu kekompakan satu titik dan sifat suatu himpunan yang memiliki kekompakan satu titik.

4. Journal of The Australian Mathematical Society 2015 oleh M.R. Koushesh yang berjudul "The Existence of One Point Connectifications". Hal dibahas pada jurnal ini adalah analogi keterhubungan satu titik dengan Teorema Alexandrof. Persamaan isi jurnal dengan skripsi ini adalah pembahasan sifat satu titik yang terjadi pada sifat keterhubungan. Sedangkan pada skripsi ini berisi kekompakan satu titik di ruang Hausdorff beserta contohnya.
5. Jurnal Silogisme Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya 2018 oleh Dewanti Inesia Putri dan Arta Ekayanti yang berjudul "Sifat Kelengkapan dan Kekompakan pada Ruang Metrik Hausdorff". Hasil yang diperoleh peneliti di jurnal ini adalah ruang metrik Hausdorff adalah pasangan berurut $(\mathcal{K}, h)$ dengan $\mathcal{K}(X) = \{A | A \subseteq X, A \neq \emptyset, A\ kompak\}$ dan h metrik Hausdorff pada $\mathcal{K}$, ruang metrik Hausdorff $\mathcal{K}$ lengkap jika ruang

metrik X lengkap, serta ruang metrik Hausdorff $\mathcal{K}$ kompak jika ruang metrik X kompak. Persamaan isi jurnal dengan skripsi adalah pembahasan sifat kekompakan. Sedangkan, perbedaannya adalah pembahasan tentang sifat kekompakan yang diaplikasikan pada ruang Hausdorff dan salah satu jenis kekompakan yaitu kekompakan satu titik. Selain itu, pada skripsi ini dikaji pula sifat suatu himpunan yang memiliki kekompakan satu titik.

6. Jurnal Ilmiah Program Studi Matematika STKIP Siliwangi Bandung 2012 oleh Cece Kustiawan yang berjudul “Himpunan Kompak pada Ruang Metrik”. Hasil yang diperoleh peneliti adalah cara menentukan kekompakan suatu himpunan menggunakan teorema Heine-Borel. Persamaan isi jurnal dengan skripsi adalah pembahasan sifat kekompakan. Sedangkan, perbedaannya adalah adanya pembahasan tentang sifat kompak lokal serta pengaplikasiannya dilakukan di ruang Hausdorff. Selain itu, skripsi ini juga membahas salah satu jenis kekompakan yaitu kekompakan satu titik dan sifat suatu himpunan yang memiliki kekompakan satu titik.

7. Jurnal International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 1994 oleh Shing S. So yang berjudul “One Point Compactification on Convergence Spaces”. Hal yang dibahas dalam jurnal ini adalah pembentukan kekompakan satu titik di ruang konvergen nonkompak dan beberapa sifat kekompakan satu titik. Persamaan isi jurnal dengan skripsi adalah pembahasan sifat kekompakan satu titik. Sedangkan pada skripsi ini pengaplikasian kekompakan satu titik dilakukan di ruang Hausdorff.
8. Journal of The Chungcheong Mathematical Society 1995 oleh Hyun Jung Kim dan Kyung Bok Lee yang berjudul “One Point Compactification in Semiflows”. Hasil dari penelitian ini adalah pembentukan kekompakan satu titik di ruang dinamis yang digunakan untuk memperluas cakupan ruang kompak lokal. Persamaan isi jurnal dengan skripsi adalah pembahasan sifat kekompakan satu titik. Sedangkan pada skripsi ini pengaplikasian kekompakan satu titik dilakukan di ruang Hausdorff.

BAB III

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

A. Ruang Hausdorff

1. Ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ disebut ruang Hausdorff atau ruang topologi terpisah apabila setiap titik $x, y \in X$ dengan $x \neq y$, terdapat persekitaran
$$U, V \subset X$$
yang saling asing, sehingga
$$x \in U$$
dan
$$y \in V.$$
2. Diberikan ruang topologi $(X, \mathcal{T})$. Jika setiap liput terbuka $(U_i)_{i \in I}$ dari X berisi liput bagian yang jumlahnya berhingga, maka $(X, \mathcal{T})$ kompak.
3. Ruang Topologi X dikatakan kompak lokal jika setiap titik $x \in X$ memiliki persekitaran yang kompak.

B. Kekompakan Satu Titik

1. Teorema 3.1 (Freiwald, 2014: 420)

Jika Ruang Hausdorff X kompak lokal dan tidak kompak maka X memiliki kekompakan satu titik.

Bukti:

a. Dipilih $p \notin X$ dan misalkan $X^* = X \cup \{p\}$.

   Jika N adalah himpunan terbuka yang memuat p dalam X^*, maka

$$K = X^* - N \subseteq X$$

   dan K kompak.

   Sehingga N adalah komplemen dari himpunan bagian kompak di X.

   Dibentuk basis persekitaran p yang menjadi komplemen dari himpunan bagian kompak di X.

$$B_p = \{N \subseteq X^* : p \in N \ dan \ X^* - N \ kompak\}.$$

b. Diambil sembarang liput terbuka $\mathcal{L}$ dari X^*.

   Diperoleh $p \in U \in \mathcal{L}$, sehingga terdapat $N \in B_p$ dengan $p \in N \subseteq U$.

   Karena $X^* - N$ kompak, maka terdapat

$$U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{L}$$

   sehingga

$$X^* - N = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

   yang berakibat

$$X^* \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Dengan kata lain X^* kompak.

c. Misalkan $a, b \in X^*$.

Jika $a, b \in X$, maka ada dua himpunan terbuka U dan V yang saling asing.

Ambil sembarang $a \in X$.

Dipilih himpunan bagian kompak K yang memuat persekitaran U dari a.

Jelas $p \in X^* - N$.

Sehingga U dan $X^* - N$ adalah himpunan terbuka saling asing di X^*.

Dengan kata lain X^* adalah ruang hausdorff.

Teorema di atas menyatakan bahwa suatu ruang hausdorff X dapat memiliki kekompakan satu titik dengan syarat X kompak lokal dan tidak kompak. Selanjutnya akan ditunjukkan apakah ruang hausdorff X tetap memiliki kekompakan satu titik jika hanya memiliki salah satu syarat.

a. Ruang Hausdorff X tidak kompak lokal dan tidak kompak.

Bukti:

Menurut Definisi 2.28, jelas Ruang Hausdorff X tidak memiliki kekompakan satu titik.

b. Ruang Hausdorff X kompak lokal dan kompak.

Bukti:

Dipilih $p \notin X$ dan misalkan $X^* = X \cup \{p\}$.

Karena X kompak, maka terdapat liput terbuka

$$U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{L}$$

sehingga

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Jelas,

$$X \cup \{p\} \supset \bigcup_{i=1}^{n} U_i,$$

atau

$$X^* \supset \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Dengan kata lain, X^* tidak kompak karena tidak terliput oleh libut bagian berhingga. Sehingga Ruang Hausdorff X tidak memiliki kekompakan satu titik.

2. **Teorema 3.2 (Wenner Ballmann, 2018: 17)**

   Misal K himpunan bagian dari $\mathbb{R}^n$. Himpunan K kompak jika dan hanya jika tertutup dan terbatas.

Bukti:

a. Akan ditunjukkan jika K kompak di $\mathbb{R}^n$, maka K tertutup.

Ambil sembarang $a \in K^c$.

Untuk setiap $x \in K$ dibentuk persekitaran U_x dengan pusat x dan persekitan V_a dengan pusat a dengan jari-jari masing-masing $r < \frac{1}{2} \parallel a - x \parallel$. Dengan demikian diperoleh

$$U_x \cap V_a = \emptyset$$

untuk setiap $x \in K$.

Koleksi himpunan $\{U_x\}$ adalah liput terbuka dari K. Karena K kompak maka terdapat titik-titik $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ sehingga

$$K \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n} = U.$$

Untuk setiap $a_1, a_2, a_3, \dots \in K^c$, misalkan

$$V = V_{a_1} \cup V_{a_2} \cup V_{a_3} \cup \dots,$$

maka V merupakan persekitaran dari titik a dan $V \subset V_{a_i}$.

Karena $U_{x_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$, maka $V \cap U_{x_i} = \emptyset$.

Hal ini berakibat

$$V \cap (U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n}) = V \cap U = \emptyset.$$

Karena $K \subset U$, jelas $V \cap K = \emptyset$ atau $V \subset K^c$.

Sehingga a adalah titik interior himpunan K^c. Jadi K^c terbuka.

Karena K^c terbuka, maka K tertutup.

b. Akan ditunjukkan jika K kompak di $\mathbb{R}^n$, maka K terbatas.

Untuk setiap $x \in K$ dibentuk himpunan terbuka $G_x = (-x, x)$.

Koleksi himpunan $\{G_x\}$ adalah liput terbuka dari K, karena G_x terbuka untuk setiap $x \in K$. Sehingga,

$$K = \bigcup_{x=1}^{\infty} G_x.$$

Karena K kompak maka terdapat titik-titik $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ sehingga

$$K \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n}.$$

Namakan,

$$m = maks\,\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Diperoleh

$$K \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n} = U_m = (-m, m),$$

sehingga K terbatas.

c. Akan ditunjukkan jika K tertutup dan terbatas, maka K kompak di $\mathbb{R}^n$.

Asumsikan K tidak kompak, artinya K tidak memiliki liput bagian berhingga dari $\mathcal{L}$.

Karena K terbatas maka terdapat interval tertutup

$$I_1 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$$

untuk setiap $i = 1,2,3, \dots, n$ sedemikian hingga $K \subset I_1$.

Karena K tidak memiliki liput bagian berhingga dari $\mathcal{L}$, maka

$$K \cap I_1$$

juga tidak memiliki liput bagian berhingga dari $\mathcal{L}$.

Kemudian bagi interval I_1 menjadi I_2, dengan $i = 1,2,3, \dots, n$ interval $[a_1, b_1]$ dibagi menjadi interval

$$[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}].$$

Dengan demikian, terdapat interval

$$I_2 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq \frac{a_1 + b_1}{2}\}$$

untuk setiap $i = 1,2,3, \dots, n$.

Karena K tidak memiliki liput bagian berhingga dari $\mathcal{L}$, maka

$$K \cap I_2$$

juga tidak memiliki liput bagian berhingga dari $\mathcal{L}$.

Kemudian bagi interval I_2 menjadi I_3, dengan $i = 1,2,3, \dots, n$ interval

$$[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}]$$

dibagi menjadi interval

$$[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2^2}].$$

Akibatnya dengan alasan yang sama, diperoleh

$$K \cap I_3$$

tidak memiliki liput bagian berhingga dari $\mathcal{L}$.

Kemudian interval I_3 dibagi kembali menjadi dua bagian, sehingga akan membentuk interval susut

$$I_1, I_2, I_3, \dots, I_n, \dots.$$

Berdasarkan Teorema 2.1, terdapat titik β yang berada pada setiap I_n untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Misalkan $V_\varepsilon(\beta)$ persekitaran dari titik β, maka untuk n yang sangat besar berlaku

$$I_n \subset V_\varepsilon(\beta).$$

Karema $K \cap I_n$ tidak memiliki liput bagian berhingga dari $\mathcal{L}$, maka I_n memuat himpunan bagian dari K yang tidak memiliki liput bagian berhingga dari $\mathcal{L}$.

Jadi $V_\varepsilon(\beta)$ memuat K.

Perhatikan bahwa β merupakan titik limit dari K.

Karena K tertutup, maka $\beta \in K$ dan terdapat $U_i \in \mathcal{L}$ sedemikian hingga $\beta \in U_i$.

Sehingga terdapat persekitaran $V_{\varepsilon_i}(\beta)$ sedemikian hingga $V_{\varepsilon_i}(\beta) \in U_i$.

Untuk n yang sangat besar, maka

$$I_n \subset V_{\varepsilon_i}(\beta).$$

Sehingga $I_n \subset U_i$. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan dimana I_n tidak memiliki liput bagian berhingga dari $\mathcal{L}$.

Jadi haruslah K memiliki liput bagian berhingga dari $\mathcal{L}$. Dengan kata lain, K kompak.

3. **Contoh 3.1**

Diberikan $X = [a, b)$ dan $\mathcal{T} = \{A | A \subset [a, b)\}$. Ruang hausdorff $(X, \mathcal{T})$ kompak lokal dan tak kompak memiliki kekompakan satu titik, yaitu $X^* = [a, b]$.

Bukti:

a. Akan ditunjukkan $X^* = [a, b]$ merupakan ruang hausdorff.

Ambil sembarang $x, y \in [a, b]$, dengan $x > y$.

Dipilih $\delta = \frac{(x-y)}{1000}$.

Dibentuk

$$A_x = [x - \delta, x + \delta]$$

dan

$$B_y = [y - \delta, y + \delta].$$

Dipilih

$$U_x = [x - \delta, x + \delta] \in \mathcal{T}$$

dan

$$U_y = [y - \delta, y + \delta] \in \mathcal{T}.$$

Jadi $\exists U_x, U_y \in \mathcal{T}$ sehingga,

$$x \in U_x \subset A_x$$

dan

$$y \in U_y \subset B_y.$$

Dengan kata lain, $A_x \in N(x)$ dan $B_y \in N(y)$.

Jelas,

$$A_x \cap B_y = [x - \delta, x + \delta] \cap [y - \delta, y + \delta].$$

$$\begin{aligned} \text{Maks } A_x - \text{Min } B_y &= x + \delta - y + \delta \\ &= x - y + 2\delta \end{aligned}$$

$$= x - y + 2(\frac{(x-y)}{1000})$$
$$= \frac{499}{500}(x - y)$$
$$< 0.$$

Karena Maks $A_x -$ Min $B_y < 0$ maka dapat disimpulkan $A_x \cap B_y = \emptyset$.

Sehingga X^* adalah ruang hausdorff karena terdapat $A_x, B_y \subset X^*$ yang saling asing sehingga $x \in A_x$ dan $y \in B_y$ dengan $x \neq y$.

b. Akan ditunjukkan Ruang hausdorff $(X^*, \mathcal{T}^*)$ kompak, dengan

$$X^* = [a, b]$$

dan

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \alpha$$

dengan α merupakan koleksi sembarang himpunan $N \subset X^*$ sehingga $X^* - N$ merupakan himpunan tertutup dan kompak di dalam X.

Bukti:

1) Akan dibuktikan $X^* \subseteq \mathbb{R}$ terbatas.

X^* terbatas di atas karena terdapat

$$b + 1 \in \mathbb{R}$$

sehingga

$$x \leq b + 1$$

untuk semua $x \in X^*$.

X^* terbatas di bawah karena terdapat

$$a - 1 \in \mathbb{R}$$

sehingga

$$y \geq a - 1$$

untuk semua $y \in X^*$.

Karena X^* terbatas di atas dan terbatas di bawah maka X^* terbatas.

2) Akan dibuktikan $X^* \subseteq \mathbb{R}$ tertutup.

$X^* \subseteq \mathbb{R}$ tertutup jika $(X^*)^c$ terbuka. Karena $X^* = [a, b]$, maka

$$(X^*)^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty).$$

Diambil sembarang $n \in X^c$ maka

$$n \in (-\infty, a)$$

atau

$$n \in (b, \infty).$$

a) Kasus 1

Apabila $n \in (-\infty, a)$, dipilih

$$\delta < a - n,$$

sehingga diperoleh

$$V_\delta(n) \subseteq (X^*)^c.$$

b) Kasus 2

Apabila $n \in (b, \infty)$, dipilih

$$\delta < n - b,$$

sehingga diperoleh

$$V_\delta(n) \subseteq (X^*)^c.$$

Jadi diperoleh $(X^*)^c$ terbuka. Akibatnya X^* tertutup.

Jelas X^* adalah himpunan terbatas dan tertutup.

Menurut teorema 3.2, jelas bahwa X^* kompak.

Karena X^* kompak, maka X memiliki kekompakan satu titik yaitu X^*.

4. **Contoh 3.2**

Diberikan $X = [u, v]$ dan $\mathcal{T} = \{A | A \subset [u, v]\}$. Apakah Ruang hausdorff $(X, \mathcal{T})$ memiliki kekompakan satu titik?

Bukti:

X tidak memiliki kekompakan satu titik, karena X kompak.

Akan ditunjukkan X kompak:

a. $X = [u, v]$ terbatas di atas karena terdapat

$$v + 1 \in \mathbb{R}$$

sehingga

$$x \leq v + 1$$

untuk semua $x \in X$.

X terbatas di bawah karena terdapat

$$u - 1 \in \mathbb{R}$$

sehingga

$$y \geq u - 1$$

untuk semua $y \in X$.

Karena X terbatas di atas dan terbatas di bawah maka X terbatas.

b. Akan dibuktikan $X \subseteq \mathbb{R}$ tertutup.

$X \subseteq \mathbb{R}$ tertutup jika X^c terbuka.

Karena $X = [u, v]$, maka

$$X^c = (-\infty, u) \cup (v, \infty).$$

Diambil sembarang $m \in X^c$ maka

$$m \in (-\infty, u)$$

atau

$$m \in (v, \infty).$$

1) Kasus 1

Apabila $m \in (-\infty, u)$, dipilih

$$\delta < u - m,$$

sehingga diperoleh

$$V_\delta(m) \subseteq X^c.$$

2) Kasus 2

Apabila $m \in (v, \infty)$, dipilih

$$\delta < m - v,$$

sehingga diperoleh

$$V_\delta(m) \subseteq X^c.$$

Jadi diperoleh X^c terbuka. Akibatnya X tertutup.

Jelas X adalah himpunan terbatas dan tertutup.

Menurut teorema 3.2, jelas bahwa X kompak.

Karena X kompak, maka X tidak memiliki kekompakan satu titik.

BAB IV
SIMPULAN DAN SARAN

A. Simpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian di atas adalah tidak semua ruang Hausdorff yang kompak lokal memiliki kekompakan satu titik. Namun, ruang Hausdorff yang kompak lokal tersebut akan memiliki kekompakan satu titik jika tidak kompak.

B. Saran

Perlu diadakan pengkajian lebih lanjut mengenai teorema "Jika Ruang Hausdorff X kompak lokal dan tidak kompak maka X memiliki kekompakan satu titik", untuk mengetahui apakah teorema yang berbentuk implikasi tersebut berlaku sebaliknya.

DAFTAR PUSTAKA

Ballmann, Werner. 2018. *Introduction to Geometry and Topology*. Bonn: Birkhauser.

Bartle, R. G., dan Donald R. S. 2000. *Introduction to Real Analysis.* Third Edition. United States of America: John Wiley & Sons.

Blankespoor, Jay, dan John Krueger. 1996. Compactifications of Topological Spaces. *Electronic Journal of Undergraduate Mathematics*. 2(1): 2.

Bredon, G. E. 1993. *Topology and Geometry*. New York: Springer Verlag New York Inc.

Dixmier, Jacques. 1984. *General Topology*. New York: Springer Verlag New York Inc.

Dugundji, James. 1966. *Topology*. Boston: Allyn & Bacon.

Engelking, Ryszard. 1989. *General Topology*. Berlin: Heldermann.

Gunawan, Hendra. 2016. *Pengantar Analisis Real*. Edisi Kedua. Bandung: Penerbit ITB.

Hernadi, Julan. 2015. *Analisis Real Elementer dengan Ilustrasi Grafis dan Numeris*. Jakarta: Erlangga.

Junhan, Arnold Tan. 2019. A Report on Hausdorff Compactifications of $\mathbb{R}$. *Journal University of Oxford*. 1(1): 4.

Kartono, dan Nurwiyati F. W. 1995. *Pengantar Topologi*. Yogyakarta: Andi Offset.

Kelley, J. L. 1955. *General Topology*. Canada: D. Van Nostrand Company Ltd.

Kim, Hyun Jung, dan Kyung Bok Lee. 1995. One Point Compactification in Semiflows. *Journal of The Chungcheong Mathematical Society*. 8(1): 168.

Koushesh, M. R. 2015. The Existence of One Point Connectifications. *Journal of The Australian Mathematical Society*. 99(1): 78.

Kustiawan, Cece. 2012. Himpunan Kompak pada Ruang Metrik. *Jurnal Ilmiah Program Studi Matematika STKIP Siliwangi Bandung*. 1(2): 140.

Lipschultz, S. (1965) 'Schaum's Outline - Theory and problems of general topology', p. 254.

Munkres, J. R. 1983. *Topology A First Course*. New Delhi: Prentice Hall of India Private Limited.

_ _ _ _ _. 2000. *Topology*. Second Edition. Upper Saddle River: Prentice Hall.

Muslikh, Mohamad. 2012. *Analisis Real*. Malang: Universitas Brawijaya Press.

Putri, Dewanti Inesia, dan Arta Ekayanti. 2018. Sifat Kelengkapan dan Kekompakan pada Ruang Metrik Hausdorff. *Jurnal Silogisme: Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya*. 3(2): 79.

Reeve, J. E. and Csaszar, A. (1964) 'Foundations of General Topology', *British Journal of Educational Studies*, 13(1), p. 112. doi: 10.2307/3118415.

Reid, Miles, dan Balazs Szendroi. 2005. *Geometry and Topology*, United States of America: Cambridge University Press.

Royden, H. L., dan P. M. Fitzpatrick. 2010. *Real Analysis*. Fourth Edition. London: Pearson Education.

Rudin, Walter. 1976. *Principles of Mathematical Analysis*. Third Edition. United States of America: McGraw-Hill Inc.

So, Shing S. 1994. One Point Compactification on Convergence Spaces. *Jurnal International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 17(2): 279.

Tomasoa, Muhammad. dkk. 2015. Karakteristik Ruang Hausdorff Kompak. *Barekeng*. 9(2): 87.

Ursell, H. D. and Kuratowski, K. (1964) *Introduction to Set Theory and Topology*, *The Mathematical Gazette*. doi: 10.2307/3613583.

RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

1. Nama Lengkap : Dewi Maghfiroh
2. TTL : Rembang, 5 Agustus 1999
3. Alamat Rumah : Ds. Bendo 001/003, Kec. Sluke, Kab. Rembang
4. Nomor HP : 088227737599
5. Email : dewimagh234@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. Pendidikan Formal:
   a. SD Negeri 1 Bendo
   b. SMPN 2 Satu Atap Sluke
   c. SMA Negeri 1 Lasem
2. Pendidikan Non-Formal:
   a. Madrasah Diniah Hidayatul Muttaqin
   b. Pondok Pesantren AL-Wahdah Lasem

Semarang, 14 Juni 2021

Dewi Maghfiroh

NIM: 1708046004

SURAT PENUNJUKAN PEMBIMBING

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka Ngaliyan, Semarang 50185 Telp. 024-7601295, Fax. 024-7615387

Semarang, 17 Februari 2020

Nomor : B.633/Un.10.8/J1/PP.009/02/2020
Hal : Penunjukan Pembimbing Skripsi

Kepada Yth:
1. Yulia Romadiastri, S.Si, M.Sc
2. Juanda Kelana Putra, M.Sc

di Semarang

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Berdasarkan hasil pembahasan usulan judul penelitian di Program Studi Matematika, maka Fakultas Sains dan Teknologi menyetujui judul skripsi mahasiswa:

Nama : Dewi Maghfiroh
NIM : 1708046004
Judul : **Kekontinuan pada Ruang Hausdorff**

Sehubungan dengan hal tersebut kami menunjuk saudara:
1. Yulia Romadiastri, S.Si, M.Sc sebagai Pembimbing I
2. Juanda Kelana Putra, M.Sc sebagai Pembimbing II

Demikian penunjukan pembimbing skripsi ini disampaikan dan atas kerjasama yang diberikan kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

A.n Dekan
Ketua Program Studi Matematika

Emy Siswanah, M.Sc
NIP. 19870202 201101 2 014

Tembusan:
1. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo sebagai laporan
2. Mahasiswa yang bersangkutan
3. Arsip