

**MASSA NEUTRINO MASIF SEBAGAI
KANDIDAT MATERI GELAP DALAM MODEL
SIMETRI KIRI-KANAN MINIMAL BERDASAKAN
GRUP TERA $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_Y$
SKRIPSI**

Disusun untuk Memenuhi Sebagian Syarat
Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains
dalam Ilmu Fisika



Oleh:

Siti Munawaroh

NIM: 1508026008

**JURUSAN FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2020**

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Siti Munawaroh

NIM : 1508026008

Jurusan : Fisika

Menyatakan bahwa skripsi yang berjudul:

Massa Neutrino Masif Sebagai Kandidat Materi Gelap Dalam Model Simetri Kiri-Kanan Minimal Berdasarkan Grup Tera $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_Y$

Secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 18 Maret 2020



Siti Munawaroh

NIM. 1508026008



KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jalan Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telepon. 024-760129 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah Skripsi ini dengan:

Judul : **Massa Neutrino Masif Sebagai Kandidat Materi Gelap
Dalam Model Simetri Kiri-Kanan Minimal Berdasarkan
Grup Tera $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_Y$**

Nama : Siti Munawaroh

NIM : 1508026008

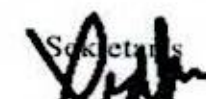
Jurusan : Fisika

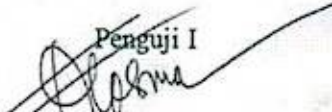
Telah diujikan dalam sidang *munaqosah* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam ilmu Fisika

Semarang, 23 Maret 2020


Agus Sudarmanto, M.Si
NIP. 197708232009121001

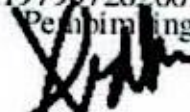



Sekretaris
M. Ardiyaningrat, M.Sc
NIP. 198100092011011010


Penguji I
Dr. Hamdan Hadi Kusuma, S.Pd. M.Sc
NIP. 197110211997031002


Penguji II
Hdi Daenuri Anwar, M.Si
NIP. 197907262009121002


Pembimbing I
Agus Sudarmanto, M.Si
NIP. 197708232009121001


Pembimbing II
M. Ardiyaningrat, M.Sc
NIP. 198100092011011010

NOTA DINAS

Semarang, 18 Maret 2020

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo
Di Semarang

Assalamu'alaikum wr. wb

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : **Massa Neutrino Masif Sebagai Kandidat Materi Gelap
Dalam Model Simetri Kiri-Kanan Minimal Berdasarkan
Grup Tera $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_Y$**

Penulis : Siti Munawaroh
NIM : 1508026008
Jurusan : Fisika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi untuk diujikan dalam Sidang *Munaqosah*.

Wassalamu'alaikum wr. wb

Pembimbing I



Agus Sudarmanto, M.Si
NIP.197708232009121001

NOTA DINAS

Semarang, 12 Maret 2020

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo
Di Semarang

Assalamu'alaikum wr. wb

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : **Massa Neutrino Masif Sebagai Kandidat Materi Gelap Dalam Model Simetri Kiri-Kanan Minimal Berdasarkan Grup Tera $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_Y$**

Penulis : Siti Munawaroh

NIM : 1508026008

Jurusan : Fisika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi untuk diujikan dalam Sidang *Munaqosah*.

Wassalamu'alaikum wr. wb

Pembimbing II



M. Ardhi Khalif, M.Sc

NIP.19820092011011010

ABSTRAK

Keberadaan materi gelap belum bisa dijelaskan oleh Model Standar Fisika Partikel, oleh karena itu dibangun model perluasan dari Model Standar Fisika Partikel yaitu model simetri kiri-kanan minimal berdasarkan grup tera $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_Y$. Partikel yang terdapat pada model ini dibagi menjadi dua sektor yaitu sektor kiri dan sektor kanan. Pada sektor kiri terdiri dari partikel Model Standar, neutrino ν_R dan triplet Higgs Δ_L , sedangkan pada sektor kanan terdiri dari fermion sektor kanan, doublet Higgs ϕ_R dan triplet Higgs Δ_R . Hasil dari penelitian ini didapatkan massa Higgs Δ_L lebih besar dari massa Higgs Δ_R , massa Higgs Δ_R lebih besar dari massa Higgs ϕ_R dan massa Higgs ϕ_R lebih besar dari massa Higgs ϕ_L ($m_{\Delta_L} > m_{\Delta_R} > m_{\phi_R} > m_{\phi_L}$). Massa neutrino dibangkitkan melalui mekanisme *seesaw*. Berdasarkan mekanisme *seesaw* ini didapatkan dua massa neutrino yaitu massa neutrino yang ringan $m_\nu = V_1^T \frac{G_\nu G_N^T \nu_R \nu_L}{G_{N\nu} \omega_R} V_1$ dan massa neutrino yang masif $m_N = V_3^T G_{N\nu} \omega_R V_3$. Neutrino masif inilah yang diharapkan akan menjadi kandidat materi gelap.

Kata Kunci : simetri kiri-kanan minimal, materi gelap, massa neutrino, mekanisme *seesaw*

KATA PENGANTAR

Syukur alhamdulillah peneliti panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, taufik, hidayah, serta inayah-Nya sehingga peneliti dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam senantiasa peneliti haturkan kepada Nabi Muhammad SAW, keluarga, sahabat, dan para pengikutnya dengan harapan semoga mendapat syafaatnya di hari kiamat nanti.

Dalam kesempatan ini, perkenankanlah penulis mengucapkan terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu baik dalam penelitian maupun dalam penyusunan skripsi ini. Ucapan terimakasih ini peneliti sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Taufiq, M. Ag selaku Rektor UIN Walisongo Semarang.
2. Dr. H. Ismial, M. Ag selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.
3. Agus Sudarmanto, M. Si. selaku Ketua Jurusan Fisika Fakultas Sains dan Tekonologi UIN Walisongo Semarang dan pembimbing I yang telah bersedia meluangkan waktu untuk bimbingan dan pengarahan kepada penulis.
4. M. Ardhi Khalif, M. Sc. selaku pembimbing II dan yang telah bersedia meluangkan waktu untuk bimbingan dan pengarahan kepada penulis.

5. Istikomah, M. Sc. selaku asisten pembimbing yang telah bersedia meluangkan waktu untuk bimbingan dan pengarahan kepada penulis.
6. Irman Said Prasetyo, M.Sc; Siti Wirdah, M.Sc; serta segenap dosen Fisika dan Pendidikan Fisika yang telah mencurahkan segenap ilmunya kepada penulis.
7. Keluarga tercinta, Bapak Nurhadi, Ibu Mukhayaroh dan kakak Ahmad Muallim yang selalu memberi semangat serta mencurahkan kasih dan sayang, nasihat, dukungan, serta doa setiap harinya.
8. Sahabat penulis Cici Wahyuningsih dan Ainun Fitri yang selalu memberi dukungan dan semangat dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Teman seperjuangan Fisika 2015 yang telah memberi warna di setiap kenangan bersama belajar di UIN Walisongo Semarang.
10. Segenap teman BMC yang telah memberi warna di setiap kenangan bersama belajar di UIN Walisongo Semarang.
11. Tim KKN Regular ke 70 posko 8 desa Karangayu Semarang Barat yang bersama mencari pengalaman dalam bermasyarakat.
12. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya penulisan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Tidak ada yang dapat peneliti berikan kepada mereka selain ucapan terima kasih dan iringan doa, semoga Allah SWT membalas

semua kebaikan mereka dengan sebaik-baiknya balasan. Kritik dan saran yang membangun demi sempurnanya skripsi ini sangat peneliti harapkan. Akhir kata peneliti berharap semoga skripsi ini bermanfaat khususnya bagi peneliti dan pembaca pada umumnya, *Aamiin Yaa Rabbal 'Alamiin*.

Semarang, Maret 2020

Penulis,

Siti Munawaroh

NIM. 1508026008

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iii
NOTA DINAS	iv
ABSTRAK	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
DAFTAR SIMBOL	xviii
BAB I PENDAHULUAN	
A. Latar Belakang	1
B. Rumusan Masalah	3
C. Tujuan Penelitian	3
D. Manfaat Penelitian	4
E. Batasan Masalah	5
F. Kajian Pustaka	5
G. Metode Penelitian	6
H. Sistematika Penulisan	7
BAB II SIMETRI DAN TRANSFORMASI TERA	
A. Simetri Lokal Abelian $U(1)$: QED	11

B. Simetri Lokal Non Abelian $SU(2)$:	
Model Yang-Mills	14
C. Perusakan Simetri Spontan	16
D. Massa Boson Higgs	19
BAB III MODEL STANDAR FISIKA PARTIKEL DAN	
MEKANISME <i>SEESAW</i>	
A. Teori Elektro-Lemah	22
B. Massa Boson Tera	25
C. Massa Fermion	28
D. Materi Gelap	30
E. Mekanisme <i>Seesaw</i>	34
F. Matriks Blok	37
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	
A. Model Simetri Kiri-Kanan Minimal	40
B. Potensial Higgs	40
C. Massa Medan Skalar	44
D. Lagrangian Yukawa	47
E. Massa Fermion Sektor Kiri dan Sektor Kanan	48
F. Massa Neutrino	51
G. Neutrino Masif Sebagai Kandidat Materi Gelap ..	54
BAB V PENUTUP	
A. Simpulan	56
B. Saran	58

DAFTAR PUSTAKA
RIWAYAT HIDUP

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul	Halaman
III.1	Klasifikasi Fermion	23
III.2	Fermion Generasi Pertama dan Bilangan Kuantum Hypercharge	24
	Partikel dan Medan Skalar Pada Model	
IV.1	Simetri Kiri-Kanan Minimal beserta wakilan fundamentalnya	41

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
II.1	Potensial Higgs untuk $\mu^2 > 0$	17
II.2	Potensial Higgs untuk $\mu^2 < 0$	18
III.1	Kurva Rotasi Galaksi NGC 6503	32
III.2	Bullet Cluster Cluster 1E0657-558	33

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran A : Pembuktian Persamaan Pada Bab II

Lampiran	Judul	Hlm
Lampiran A.I	Pembuktian pers.(2.4)	64
Lampiran A.II	Pembuktian pers.(2.7)	64
Lampiran A.III	Pembuktian pers.(2.8)	65
Lampiran A.IV	Pembuktian pers.(2.17)	65
Lampiran A.V	Pembuktian pers.(2.19)	66
Lampiran A.VI	Pembuktian pers.(2.21)	66
Lampiran A.VII	Pembuktian pers.(2.27)	67
Lampiran A.VIII	Pembuktian pers.(2.29)	67
Lampiran A.IX	Pembuktian pers.(2.30)	68
Lampiran A.X	Pembuktian pers.(2.32)	68

Lampiran B : Pembuktian Persamaan Pada Bab III

Lampiran	Judul	Hlm
Lampiran B.I	Pembuktian pers.(3.14)	69
Lampiran B.II	Pembuktian pers.(3.16)	70
Lampiran B.III	Pembuktian pers.(3.21)	71
Lampiran B.IV	Pembuktian pers.(3.22)	72

Lampiran B.V	Pembuktian pers.(3.27)	73
Lampiran B.VI	Pembuktian pers.(3.32)	73
Lampiran B.VII	Pembuktian pers.(3.37)	74
Lampiran B.VIII	Pembuktian pers.(3.42)	75
Lampiran B.IX	Pembuktian pers.(3.43)	76

Lampiran C : Pembuktian Persamaan Pada Bab IV

Lampiran	Judul	Hlm
Lampiran C.I	Pembuktian pers.(4.6)	78
Lampiran C.II	Pembuktian pers.(4.8) – pers.(4.11)	81
Lampiran C.III	Pembuktian pers.(4.16)	83
Lampiran C.IV	Pembuktian pers.(4.21) – pers.(4.24)	89
Lampiran C.V	Pembuktian suku lagrangian Yukawa	91
Lampiran C.VI	Pembuktian pers.(4.27)	92
Lampiran C.VII	Pembuktian pers.(4.31)	93
Lampiran C.VIII	Pembuktian pers.(4.37)	94
Lampiran C. IX	Pembuktian pers.(4.40)	95
Lampiran C. X	Pembuktian pers.(4.41)	95

Lampiran D : Surat Penunjukkan Pembimbing

DAFTAR SIMBOL

μ, ν, λ, ρ	indeks Yunani dimulai dari 0, 1, 2, 3
i, j, k	indeks Latin dimulai dari 1, 2, 3
ψ	medan Dirac
θ	parameter transformasi tera
∂_μ	derivatif
D_μ	derivatif kovarian
A_μ	medan tensor tera
$F_{\mu\nu}$	tensor kuat medan tera
g	konstanta kopling SU(2)
g'	konstanta kopling U(1)
W_μ	medan vektor tera SU(2)
B_μ	medan vektor tera U(1)
θ_W	sudut Weinburg
Y	hypercharge
ϕ	medan Higgs
$V(\phi)$	potensial Higgs
h	tetapan Planck
ϵ_{ijk}	= simbol Levi-Civita
σ^i	matriks Pauli
γ^μ	matriks Dirac
γ^0	$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}$
γ^i	$= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$
γ^5	$= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}$

This page intentionally left blank

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Telah diketahui adanya empat interaksi dasar yang terdapat di alam semesta yaitu interaksi gravitasi, interaksi elektromagnetik, interaksi kuat dan interaksi lemah (Collins, dkk, 1989). Interaksi-interaksi tersebut memerlukan adanya partikel pembawa interaksi. Interaksi gravitasi bersifat tarik-menarik dan termasuk interaksi berjangkauan panjang dengan partikel pembawa interaksinya graviton. Interaksi elektromagnetik merupakan interaksi tarik-menarik atau tolak-menolak dan hanya terjadi pada partikel yang bermuatan saja. Partikel pembawa interaksi elektromagnetik adalah foton. Interaksi kuat merupakan interaksi yang bertanggung jawab terhadap penggabungan quark menjadi baryon. Salah satu baryon adalah neutron dan yang bergabung menjadi inti atom. Partikel pembawa interaksi kuat adalah gluon. Interaksi lemah berperan dalam koreksi susunan inti atom ringan yang memiliki perbandingan proton dan neutron yang tidak sama (keadaan tidak stabil) untuk mendapatkan komposisi yang sama (keadaan stabil). Untuk melakukan hal tersebut inti atom ringan melakukan peluruhan beta dengan partikel pembawa interaksinya W^- (Griffith, 2008).

Model standar fisika partikel merupakan teori yang digunakan untuk menjelaskan interaksi antar partikel. Model standar menggambarkan tiga dari empat interaksi dasar yang ada, yaitu interaksi lemah, interaksi kuat dan interaksi elektromagnetik. Beberapa keberhasilan model standar antara lain dapat memprediksi partikel Higgs dan memprediksikan massa W^\pm sebesar 82 ± 2 GeV serta massa Z^0 sebesar

92 ± 2 GeV. Pada 1983, Carlo dengan grupnya Rubbia dalam eksperimennya telah menemukan massa dari W^\pm sebesar $80,403 \pm 0,029$ GeV dan massa Z^0 sebesar $91,188 \pm 0,002$ GeV dimana nilai massa tersebut mendekati nilai yang telah diprediksikan oleh model standar (Griffith, 2008). Keberadaan partikel Higgs dibuktikan dengan hasil eksperimen di LHC (Large Hadron Collider) oleh tim ATLAS pada tahun 2012 yang melaporkan adanya partikel baru dengan massa sekitar 125 GeV yang kemudian dikonfirmasi sebagai partikel Higgs (ATLAS Collaboration, 2012).

Meskipun model standar telah menunjukkan keberhasilan besar, model standar tidak mampu menjelaskan berbagai persoalan yang muncul. Beberapa persoalan tersebut antara lain, model standar tidak bisa menjelaskan konsep massa neutrino, adanya ketidakseimbangan antara jumlah partikel dan antipartikel di alam semesta, hirarki massa dari tiga generasi lepton dan quark. Selain itu, tidak ada partikel di model standar yang dapat menjelaskan keberadaan materi gelap (Panuluh dan Satriawan, 2016).

Salah satu kelemahan model standar yaitu tidak bisa menjelaskan tentang keberadaan materi gelap. Materi gelap merupakan salah satu materi pembentuk alam semesta sebesar 20 persen, 75 persen energi gelap dan 5 persen barion (Griffith, 2008). Untuk mendapatkan partikel kandidat materi gelap tersebut perlu dibangun model lain selain Model Standar, salah satunya adalah model simetri kiri-kanan. Dalam model standar hanya ada partikel sektor kiri saja dan pada model simetri kiri-kanan akan ditambahkan partikel sektor kanan.

Model simetri kiri-kanan dikenalkan pertama kali oleh Pati dan Salam (1974), Mohapatra dan Pati (1975) yang kemudian dikembangkan Senjanovic dan Mohapatra (1975). Terdapat beberapa mo-

del simetri kiri-kanan, salah satunya model simetri kiri-kanan minimal. Model ini berdasarkan pada grup tera $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_Y$. Oleh karena itu, pada skripsi ini akan dilakukan kajian tentang kandidat materi gelap pada model simetri kiri-kanan minimal dengan menambahkan partikel neutrino sektor kanan (ν_R), satu doublet Higgs (ϕ_R) dan triplet Higgs (Δ_L dan Δ_R). Adanya penambahan partikel sektor kanan diharapkan akan menjadi partikel masif sebagai kandidat materi gelap, sedangkan penambahan triplet Higgs bertujuan untuk membangkitkan massa neutrino ringan dan masif di dua sektor tersebut.

B. Rumusan Masalah

1. Bagaimana potensial Higgs pada Model Simetri Kiri-Kanan Minimal?
2. Bagaimana massa skalar doublet dan triplet Higgs pada Model Simetri Kiri-Kanan Minimal?
3. Bagaimana persamaan lagrangian Yukawa pada Model Simetri Kiri-Kanan Minimal?
4. Bagaimana massa partikel lepton bermuatan dan quark pada Model Simetri Kiri-Kanan Minimal?
5. Bagaimana massa partikel kandidat materi gelap yang dihasilkan pada Model Simetri Kiri-Kanan Minimal?

C. Tujuan Penelitian

1. Untuk mendapatkan potensial Higgs pada Model Simetri Kiri-Kanan Minimal
2. Untuk mendapatkan massa skalar doublet dan triplet Higgs

pada Model Simetri Kiri-Kanan Minimal

3. Untuk mendapatkan persamaan lagrangian Yukawa pada Model Simetri Kiri-Kanan Minimal
4. Untuk mendapatkan massa partikel lepton bermuatan dan quark pada Model Simetri Kiri-Kanan Minimal
5. Untuk mendapatkan massa partikel kandidat materi gelap yang dihasilkan pada Model Simetri Kiri-Kanan Minimal

D. Manfaat Penelitian

Penelitian ini di harapkan memberi manfaat sebagai berikut :

1. Bagi pembaca

Mampu memberikan gambaran analisis secara matematis terkait dengan massa dua doublet Higgs, massa dua triplet Higgs, massa elektron, massa quark-up, massa quark-down, bentuk lagrangian suku massa neutrino, serta massa neutrino ringan dan berat di dua sektor yang dihasilkan pada model simetri kiri-kanan minimal.

2. Bagi Institusi

Mampu menambah perbendaharaan ilmu pengetahuan dan sebagai sumber bacaan referensi terkait fisika teori di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.

3. Bagi Peneliti

- a. Mampu melatih konsep berfikir secara analisis dan sistematis terkait fisika teoritis khususnya bidang fisika partikel.
- b. Mampu memberikan motivasi belajar pada peneliti mengenai kajian fisika teoritis.

E. Batasan Masalah

Permasalahan yang dikaji dibatasi pada hal-hal berikut :

1. Menambahkan partikel neutrino sektor kanan (ν_R), satu doublet Higgs (ϕ_R) dan triplet Higgs (Δ_L dan Δ_R).
2. Menggunakan satuan alamiah ($\hbar = c = 1$).
3. Penelitian yang dilakukan hanya untuk generasi pertama pada Model Standar.

F. Kajian Pustaka

Pada pertengahan tahun 1960-an, Higgs memprediksi adanya partikel Higgs dalam Model Standar Fisika Partikel. Model Standar telah mencapai kesuksesan besar di fisika partikel, namun ada beberapa fenomena yang tidak dapat dijelaskan sehingga diperlukan model baru untuk menyelesaikan permasalahan ini.

Pati dan Mohapatra pada tahun 1975 dalam jurnalnya yang berjudul *Naturally Left-Right Symmetry* memperkenalkan model simetri kiri-kanan yang menjadi awal dari simetri kiri-kanan yang berkembang hingga saat ini.

Senjanovic pada tahun 2016 dalam jurnalnya yang berjudul *Is Left-Right Symmetry the Key* menjelaskan model simetri kiri-kanan berdasar grup tera $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B_L}$ dengan tambahan satu bidoublet Higgs dan dua triplet Higgs. Dalam makalah ini didapatkan massa Dirac dan massa Majorana dari neutrino.

Dev, Mohapatra dan Zhang pada tahun 2016 dalam jurnal yang berjudul *Naturally Stable Right-Handed Neutrino Dark Matter* menjelaskan mengenai matriks massa untuk tiap jenis fermion dengan model simetri kiri-kanan berdasar grup tera $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{Y_L} \times U(1)_{Y_R}$ dengan tambahan dua singlet Higgs, satu singlet Higgs dan dua triplet Higgs. Penambahan tersebut menghasilkan materi gelap yang bertahan lama dengan memberikan perusakan lemah diatas simetri Z_2 . Model ini juga memprediksi adanya partikel berwarna yang beumur panjang yang dapat dibuktikan pada eksperimen mendatang di LHC (Large Hadron Collider).

Setyadi dan Satriawan pada tahun 2017 dalam jurnalnya yang berjudul *Pembangkitan Massa Partikel Pada Model Simetri Kiri-Kanan Alami dengan Tambahan Bilangan Kuantum Global* menjelaskan mengenai matriks massa untuk tiap jenis fermion dengan model alami baru simetri kiri-kanan berdasar grup tera $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_I$ dengan tambahan dua singlet fermion dan bilangan kuantum global.

Adam, Ferdian dan Satriawan pada tahun 2019 dalam jurnalnya yang berjudul *A New Left-Right Symmetry Model* dengan menambahkan dua leptoquark dan L-R dualismenya untuk membangkitkan asimetri nomer barion dan memfasilitasi peluruhan partikel L-R. Didapatkan dua nilai yang berbeda dari massa neutrino.

G. Metode Penelitian

Penelitian dalam skripsi ini merupakan penelitian teori yang dilakukan menggunakan metode kajian teoritis mengenai massa kandidat materi gelap pada model simetri kiri-kanan minimal berdasarkan grup

tera $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_Y$. Adapun tahap-tahap yang dilakukan adalah sebagai berikut :

- a. Mempelajari teori model standar.
- b. Mempelajari model simetri kiri-kanan minimal.
- c. Mempelajari materi gelap.
- d. Mengkonstruksi partikel-partikel yang ada pada penelitian.
- e. Mengkonstruksi suku-suku yang mungkin muncul pada persamaan potensial Higgs.
- f. Menghitung massa doublet boson Higgs.
- g. Menghitung massa triplet boson Higgs.
- h. Mengkonstruksi suku-suku yang mungkin muncul pada persamaan lagrangian Yukawa.
- i. Menghitung massa elektron, up, down di dua sektor.
- j. Menghitung massa neutrino ringan dan berat.
- k. Menentukan kandidat materi gelap pada model simetri kiri-kanan minimal.

H. Sistematika Penulisan Skripsi

Skripsi ini ditulis dalam 5 Bab dengan penjelasan berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Mengemukakan latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, sistematika penulisan, serta penjelasan mengenai metode pelaksanaan penelitian.

BAB II KAJIAN TEORI

Mengemukakan penelitian terdahulu, landasan teori tentang si-

metri dan transformasi tera, perusakan simetri serta massa dari boson Higgs.

BAB III MODEL STANDAR FISIKA PARTIKEL DAN MATERI GE-LAP (DARK MATTER)

Menampilkan tinjauan model standar yang diawali dengan pengenalan partikel dasar, dilanjutkan teori elektro-lemah , massa boson tera hingga sampai pada massa lepton dan fermion serta dilanjutkan mekanisme *seesaw*.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Menampilkan tinjauan model simetri kiri-kanan minimal yang diawali dengan pengenalan partikel yang digunakan, pengkonstruksian suku-suku yang mungkin pada potensial Higgs, penghitungan massa boson Higgs, pengkonstruksian suku-suku yang mungkin pada lagrangian Yukawa, penghitungan massa elektron, up, down sektor kiri (ringan) dan sektor kanan (berat) serta penghitungan massa neutrino di dua sektor tersebut.

BAB V PENUTUP

Memberikan kesimpulan dan saran yang membangun untuk penelitian selanjutnya.

This page intentionally left blank

BAB II

SIMETRI DAN TRANSFORMASI TERA

Simetri secara umum memiliki arti proporsional, harmoni serta keindahan bentuk. Istilah simetri pertama kali dalam aljabar muncul pada akhir abad ke-18 yang berarti invariansi suatu fungsi terhadap pertukaran koefisien dalam persamaan tertentu (Setyoko, 2019). Makna simetri dalam matematika dan fisika diartikan sebagai invariansi suatu sistem terhadap berbagai macam transformasi (Rosyid, 2017). Simetri dibedakan menjadi dua, yaitu simetri eksternal dan simetri internal. Simetri eksternal berkaitan dengan invariansi hukum-hukum fisika terhadap perpindahan sembarang pengamat dalam ruang waktu. Sedangkan simetri internal berkaitan dengan invariansi hukum-hukum fisika terhadap transformasi yang tidak terkait ruang maupun waktu. Cara untuk membuat keinvarian teori fisika ini adalah dengan melakukan transformasi tera. Kumpulan dari beberapa transformasi tertentu umumnya akan membentuk suatu grup (Setyoko, 2019).

Kata tera menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia adalah perubahan panjang atau perubahan peneraan (kalibrasi). Teori tera merupakan teori medan yang mensyaratkan Lagrangian tera invarian terhadap transformasi lokal. Subjek yang ditransformasi merupakan besaran-besaran fisis tertentu yang menyebabkan lagrangiannya invarian sehingga dapat dikatakan bahwa penerapan besaran fisis tidak mengubah sistem lagrangian (Setyoko, 2019).

Transformasi tera ada yang bersifat global dan lokal. Transformasi tera global adalah transformasi yang parameternya tidak bergantung terhadap perubahan ruang-waktu, sedangkan transformasi tera lokal adalah transformasi yang parameternya bergantung terhadap perubah-

an ruang-waktu. Transformasi tera membentuk grup simetri. Teori tera memiliki banyak tampilan untuk menggambarkan interaksi fundamental di alam. Interaksi elektromagnetik dalam ruang waktu empat dimensi diwakili oleh grup simetri $U(1)$. Interaksi lemah dan interaksi kuat dalam ruang waktu empat dimensi diwakili oleh grup simetri $SU(2)$ dan $SU(3)$, kedua grup ini adalah grup uniter non-Abelian (Setyoko, 2019).

A. Simetri Lokal Abelian $U(1)$: QED

Grup uniter $U(1)$ merupakan grup Lie abelian yang dikelompokkan berdasarkan muatannya. Quantum Electrodynamics (QED) adalah teori kuantum tentang interaksi partikel bermuatan (Collins, dkk, 1989). Lagrangian untuk satu fermion bebas bermassa m yaitu :

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \quad (2.1)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (2.1) ke dalam persamaan Euler Lagrange diperoleh :

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) merupakan persamaan Dirac dengan $\psi(x)$ adalah medan spinor, $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, dan γ^μ adalah matriks Dirac.

Persamaan (2.1) akan dibuat invarian terhadap transformasi tera lokal $U(1)$ dengan cara mentransformasikan :

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i\theta(x)}\psi(x) \quad \text{dan} \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow e^{i\theta(x)}\bar{\psi}(x). \quad (2.3)$$

dimana $\theta(x)$ merupakan parameter transformasi tera yang bergantung

pada koordinat ruang-waktu. Jika persamaan (2.3) disubstitusikan ke persamaan (2.1) akan diperoleh hasil (Pembuktian pada lampiran A.I):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}' &= \bar{\psi}'(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi'(x) \\
 &= \mathcal{L} + \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \theta(x) \psi(x) \\
 &= \mathcal{L} + j^\mu(x) \partial_\mu \theta(x)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

dimana j_μ merupakan vektor arus *current vektor* yang dibawa oleh fermion. Suku kedua pada ruas kanan persamaan (2.4) menyebabkan lagrangian persamaan (2.1) tidak invarian. Agar menjadi invarian, suku derivatif ∂_μ harus diganti dengan suku derivatif kovarian D_μ dimana :

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu \tag{2.5}$$

dengan A_μ merupakan medan vektor tera berspin 1 yang disebut sebagai foton. Suku A_μ akan bertransformasi menjadi :

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x) \equiv A'_\mu(x) \tag{2.6}$$

sehingga suku derivatif kovariannya akan bertransformasi menjadi (Pembuktian pada lampiran A.II) :

$$D_\mu \psi(x) \rightarrow (D_\mu \psi(x))' = D'_\mu \psi'(x) \equiv U(D_\mu \psi(x)) \tag{2.7}$$

Apabila suku derivatif (∂_μ) diganti dengan suku derivatif kovarian (D_μ) dan persamaan (2.2) dan (2.6) disubstitusikan kedalam persamaan (2.1), maka persamaan lagrangiannya akan menjadi (Pembuktian pada lam-

piran A.III) :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= i\bar{\psi}(x)' \gamma^\mu D'_\mu \psi'(x) - m\bar{\psi}(x)' \psi'(x) \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi + e j^\mu A_\mu\end{aligned}\quad (2.8)$$

Suku kedua dari persamaan (2.8) merupakan suku interaksi dari medan boson tera A_μ (dikenal sebagai foton) dengan medan partikel Dirac (ψ). Agar medan tera A_μ memiliki arti fisis, maka persamaan (2.8) harus ditambahkan suku kinetik yang mengandung suku turunan A_μ untuk medan tera-nya. Suku yang paling sederhana adalah :

$$\mathcal{L}_{A_\mu} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.9)$$

dimana $F_{\mu\nu}$ merupakan tensor *field-strength* yang dapat dituliskan sebagai :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.10)$$

Jika persamaan (2.8) dan (2.9) digabungkan, maka akan diperoleh lagrangian untuk QED, yaitu :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}A_\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned}\quad (2.11)$$

Suku massa boson tera $\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$ tidak muncul dalam Lagrangian karena tidak invarian terhadap transformasi tera lokal dan ini menunjukkan bahwa medan tera yang dikenal dengan foton tidak bermassa (Hanzel dan Martin, 1984).

B. Simetri Lokal Non-Abelian $SU(2)$ -Model Yang-Mills

Tahun 1954, Yang dan Mills mengusulkan bahwa teori tera elektromagnetik $U(1)$ dapat digeneralisasikan menjadi teori tera untuk interaksi lemah dan Yang-Mills memilih grup $SU(2)$ sebagai perluasan grup $U(1)$ yang digeneralisasikan (Wijaya, 2012). Grup $SU(2)$ merupakan grup tera fisika partikel yang mewakili interaksi lemah. Istilah $SU(2)$ sendiri berarti bahwa grup tersebut Spesial (berdimensi 1) dan Uiter dengan matriks 2×2 (Setyoko, 2019). Sekarang dikenalkan ψ dan $\bar{\psi}$ yang merupakan doublet untuk medan Dirac.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Lagrangian persamaan (2.1) yang berisi doublet ψ dan $\bar{\psi}$ akan dibuat invarian terhadap transformasi tera lokal $SU(2)$ dengan cara mentransformasikan :

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i\frac{\sigma^j}{2}\theta^j(x)}\psi(x) = U\psi(x) \equiv \psi'(x) \quad (2.13)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow e^{i\frac{\sigma^j}{2}\theta^j(x)}\bar{\psi}(x) = U^{-1}\bar{\psi}(x) \equiv \bar{\psi}'(x) \quad (2.14)$$

dimana σ^j ($j = 1, 2, 3$) merupakan ketiga matriks Pauli 2×2 dan θ^j merupakan parameter transformasi tera pada grup $SU(2)$. Sama seperti pada simetri grup lokal $U(1)$, agar invarian terhadap simetri lokal $SU(2)$, suku derivatif harus diganti dengan suku derivatif kovarian yang didefinisikan :

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig\mathbf{A}_\mu \quad (2.15)$$

dengan $\mathbf{A}_\mu = \sum_{j=1}^3 A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2}$ adalah tiga medan vektor tera dan g adalah konstanta kopling grup $SU(2)$. Suku derivatif kovarian (2.14) harus

memenuhi sifat seperti derivatif kovarian pada QED sebagai berikut :

$$(D_\mu \psi(x))' = D'_\mu \psi'(x) = U(D_\mu \psi(x)) \quad (2.16)$$

Persamaan (2.13), (2.14), dan (2.16) digunakan untuk mencari transformasi \mathbf{A}_μ menjadi \mathbf{A}'_μ sebagai berikut (Pembuktian pada lampiran A.IV):

$$\mathbf{A}'_\mu = U\mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g_2}(\partial_\mu U)U^{-1} \quad (2.17)$$

Untuk kasus transformasi kecil sekali (*infinitesimal transformation*, $\theta \approx 0$) :

$$\begin{aligned} U &= e^{-i\theta} \approx 1 - i\theta + \dots \\ U^{-1} &= e^{i\theta} \approx 1 + i\theta + \dots \end{aligned} \quad (2.18)$$

dimana $\theta = \sum_{j=1}^3 \theta^j \frac{\sigma^j}{2} = \vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}$, sehingga persamaan (2.17) dapat dituliskan kembali menjadi (Pembuktian pada lampiran A.V) :

$$\mathbf{A}'_\mu = \mathbf{A}_\mu - i[\theta, \mathbf{A}_\mu] - \frac{1}{g_2} \partial_\mu \theta \quad (2.19)$$

Dengan menggunakan relasi $\left[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right] = i\epsilon_{jkl} \frac{\sigma^k}{2}$, dimana ϵ_{jkl} merupakan simbol Levi-Civita (permutasi), persamaan (2.19) dapat dituliskan kembali menjadi :

$$A'^i_\mu = A^i_\mu + \epsilon_{jkl} \theta^j A^l_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^i \quad (2.20)$$

Sama seperti kasus QED, harus didefinisikan suku kinetik untuk medan tera-nya. Suku yang paling sederhana adalah (Pembuktian pada

lampiran A.VI) :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{A_\mu} &= -\frac{1}{2}Tr(\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}^{\mu\nu}) \\ &= \sum_{i=1}^3 -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{j\mu\nu}\end{aligned}\quad (2.21)$$

Sehinga sekarang lagangian untuk model Yang-Mills dapat dituliskan sebagai :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Y-M} &= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi x - \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu}) \\ &= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi x - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{j\mu\nu}\end{aligned}\quad (2.22)$$

dengan $F_{\mu\nu}^i$ tensor *gauge field-strength* yang dituliskan sebagai :

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^j - \partial_\nu A_\mu^j + g_2\varepsilon_{jkl}A_\mu^k A_\nu^l \quad (2.23)$$

C. Perusakan Simetri Spontan

Perusakan simetri secara spontan pada model standar dilakukan dengan memperkenalkan medan Higgs sehingga partikel dapat memperoleh massa. Bentuk potensial skalar dalam model standar ditunjukkan sebagai berikut :

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \quad (2.24)$$

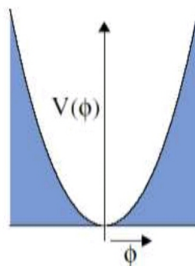
sehingga lagrangian diberikan oleh :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= T - V \\
 &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \left(\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4\right) \\
 &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

dengan $\lambda > 0$. Terdapat dua kemungkinan bentuk potensial untuk syarat massa μ^2 adalah positif dan negatif (Hanzel dan Martin, 1984), yaitu :

a. untuk $\mu^2 > 0$

Kasus ini menggambarkan medan skalar dengan massa μ dan suku ϕ^4 menunjukkan interaksi 4 partikel dengan konstanta ko-pling λ serta keadaan vakum berada pada $\phi = 0$ dan simetri di ϕ seperti yang ditunjukkan oleh gambar dibawah ini :



Gambar II.1: Potensial Higgs untuk $\mu^2 > 0$ (Sari, 2018)

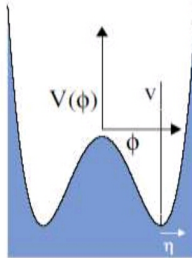
b. untuk $\mu^2 < 0$

Kasus ini, lagrangian (2.24) akan memiliki suku massa dengan tanda yang salah dimana tanda relatif suku ϕ^2 dan energi kinetik T positif (seharusnya negatif). Tidak seperti kasus (a), pada kasus (b) potensialnya memiliki dua nilai minimum yang memenuhi :

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0 \quad (2.26)$$

terletak pada (Pembuktian pada lampiran A.VII) :

$$\phi = \pm\nu \quad \text{dengan} \quad \nu = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \quad \text{atau} \quad \mu^2 = -\lambda\nu^2 \quad (2.27)$$



Gambar II.2: Potensial Higgs untuk $\mu^2 < 0$ (Sari, 2018)

Nilai $\phi = 0$ bukanlah keadaan dengan energi minimum, melainkan keadaan tidak stabil (gambar II.2). Keadaan tersebut dapat bergeser ke salah satu dari dua keadaan minimum lainnya, dimana $\phi = +\nu$ atau $\phi = -\nu$ merupakan keadaan dasar sebenarnya. Namun jika kita memilih satu dari keadaan ini akan merusak simetri.

D. Massa Boson Higgs

Massa boson Higgs dapat dibangkitkan dengan cara melakukan ekspansi disekitar nilai minimum $\phi = +\nu$ atau $\phi = -\nu$, bentuk ekspansinya sebagai berikut :

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + h \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

$$\text{dengan } \phi^+ = \frac{(\phi_1 + i\phi_2)}{\sqrt{2}}$$

$$\phi^0 = \frac{(\phi_3 + i\phi_4)}{\sqrt{2}}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.27) ke persamaan (2.25), potensial Higgs menjadi (Pembuktian pada lampiran A.VIII) :

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \\ &= \frac{1}{2}\mu^2\nu^2 + \mu^2\nu h + \frac{1}{2}\mu^2 h^2 + \frac{1}{4}\lambda\nu^4 + \lambda\nu^3 h + \frac{3}{2}\lambda\nu^2 h^2 \\ &\quad + \lambda\nu h^3 + \frac{1}{4}\lambda h^4 \end{aligned} \quad (2.29)$$

dengan $\mu^2 = -\lambda\nu^2$, persamaan (2.29) menjadi (Pembuktian pada lampiran A.IX) :

$$V(\phi) = -\frac{\lambda\nu^4}{2} + \lambda\nu^2 h^2 + \lambda\nu h^3 + \frac{1}{4}\lambda h^4 \quad (2.30)$$

Sehingga persamaan (2.25) menjadi :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{\lambda\nu^4}{2} - \lambda\nu^2 h^2 - \lambda\nu h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 \quad (2.31)$$

Dari persamaan (2.30) didapat suku-suku yang mengandung h^2 merupakan suku massa Higgs, suku-suku yang mengandung h^3 merupakan suku interaksi 3 partikel dengan konstanta kopling λ dan suku-suku yang mengandung h^4 merupakan suku interaksi 4 partikel dengan konstanta kopling λ . Setelah suku-suku yang mengandung h^2 pada persamaan (2.29) dibandingkan dengan suku massa $\frac{1}{2}m^2\phi^2$, diperoleh massa bagi boson Higgs sebagai berikut (Pembuktian pada lampira A.X) :

$$m_h = \sqrt{2\lambda\nu^2} = \sqrt{-2\mu^2} \quad (2.32)$$

This page intentionally left blank

BAB III

MODEL STANDAR FISIKA PARTIKEL DAN MATERI GELAP (DARK MATTER)

Glashow pada tahun 1961 telah menyatukan interaksi elektromagnetik dengan interaksi lemah berdasarkan grup tera $SU(2)_L \times U(1)_Y$, kemudian Weinberg dan Salam menunjukkan bagaimana boson tera lemah mendapatkan massanya (Collins, dkk, 1989) sehingga model ini dikenal dengan model GWS (Glashow-Weinberg-Salam). Model Standar Fisika Partikel adalah teori yang telah dapat menyatukan interaksi elektromagnetik dengan interaksi lemah ditambah dengan interaksi kuat berdasarkan grup tera $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Model ini didukung dengan eksperimen yang menemukan boson tera lemah yaitu W^\pm dan Z^0 pada tahun 1983.

A. Teori Elektro-Lemah $SU(2) \times U(1)$

Lagrangian Dirac pada persamaan (2.1) setelah disisipi operator proyeksi menjadi :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_D &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu(P_L + P_R)\psi - m\bar{\psi}(P_L + P_R)\psi \\ &= i\bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R - m\bar{\psi}_R\psi_L - m\bar{\psi}_L\psi_R\end{aligned}\quad (3.1)$$

dengan ψ_L mewakili fermion doublet dan ψ_R mewakili fermion singlet seperti ditunjukkan pada tabel III.1. Operator proyeksi didefinisikan sebagai berikut :

$$P_{R,L} \equiv \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5) \quad (3.2)$$

Tabel III.1: Klasifikasi Fermion

Partikel	Singlet	Doublet
Lepton	e_R^-	$l_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$
Quark	u_R, d_R	$q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R$

dengan R adalah partikel *right-handed* dan L adalah partikel *left-handed*. Operator proyeksi ini memiliki beberapa sifat yaitu :

$$\begin{aligned}
 P_L^2 &= 1 & P_R \psi &= \psi_R & \bar{\psi} P_R &= \bar{\psi}_L \\
 P_R^2 &= 1 & P_L \psi &= \psi_L & \bar{\psi} P_L &= \bar{\psi}_R
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Lagrangian Dirac persamaan (3.1) akan dibuat invarian terhadap transformasi tera lokal $SU(2)_L \times U(1)_Y$ dengan cara mentransformasikan :

$$\begin{aligned}
 \psi_L(x) &\rightarrow \psi'_L = e^{i\alpha(x)T_i + i\beta(x)Y} \psi_L \\
 \psi_R(x) &\rightarrow \psi'_R = e^{i\beta(x)Y} \psi_R \\
 \bar{\psi}_L(x) &\rightarrow \bar{\psi}'_L = e^{-i\alpha(x)T_i - i\beta(x)Y} \bar{\psi}_L(x) \\
 \bar{\psi}_R(x) &\rightarrow \bar{\psi}'_R = e^{i\beta(x)Y} \bar{\psi}_R(x)
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Suku derivatif ∂_μ pada persamaan (3.1) kemudian diganti dengan suku derivatif kovarian D_μ yang didefinisikan :

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + igT_i W_\mu^i + ig' B_\mu \frac{Y}{2}
 \tag{3.5}$$

dengan g dan g' adalah konstanta kopling untuk $SU(2)$ dan $U(1)$. W_μ^i dan B_μ adalah medan vektor tera untuk $SU(2)$ dan $U(1)$. T_i dan Y adalah generator dari $SU(2)$ dan $U(1)$. T_i didefinisikan sebagai $T_i = \frac{1}{2}\sigma_i$

Tabel III.2: Fermion Generasi Pertama dan Bilangan Kuantum Hypercharge

Lepton	T	T_3	Q	Y	Quark	T	T_3	Q	Y
ν_e	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	u_L	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
e_L^-	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	d_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
					u_R	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
e_R^-	0	0	-1	-2	d_R	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

dengan σ_i adalah tiga matriks Pauli. Perlu didefinisikan suatu persamaan yang menggabungkan generator U(1) dengan operator muatan Q. Persamaan tersebut yaitu persamaan Gelman - Nisijhima (Collins, dkk, 1989) :

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \quad (3.6)$$

denan Q , T_3 dan Y untuk medan fermion ditunjukkan pada tabel III.2.

Sehingga lagrangian invarian tera untuk interaksi elektro-lemah $SU(2)_L \times U(1)_Y$ adalah :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D = & \bar{\psi}_L \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g \frac{\sigma_i}{2} W_\mu^i - g' \frac{Y}{2} B_\mu \right) \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g' \frac{Y}{2} B_\mu \right) \psi_R \\ & - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.7)$$

dengan medan vektor baru $W_{\mu\nu}^i$ dan B_μ dituliskan sebagai berikut :

$$W_\mu^i \equiv \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g \epsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \quad (3.8)$$

$$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (3.9)$$

B. Massa Boson Tera

Pembangkitan massa boson tera pada teori elektro-lemah harus menggunakan mekanisme Higgs. Massa boson tera dapat diperoleh dengan meninjau suku pertama Lagrangian Klein-Gordon yang invarian terhadap simetri $SU(2)_L \times U(1)_Y$ berikut :

$$\mathcal{L}_{K-G} = \left| \left(\partial_\mu + ig\sigma_i W_\mu^i + ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) \phi \right|^2 - V(\phi) \quad (3.10)$$

dipilih nilai harap vakum ϕ_0 yaitu :

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Persamaan (3.11) disubstitusikan ke persamaan (3.10), sehingga \mathcal{L}_{K-G} menjadi :

$$\mathcal{L}_{K-G} \supset \left| \left(\partial_\mu + ig\sigma_i W_\mu^i + ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} \right|^2, \quad (3.12)$$

dengan hasil perkalian $\sigma^i W_\mu^i = \sigma^1 W_\mu^1 + \sigma^2 W_\mu^2 + \sigma^3 W_\mu^3$ adalah :

$$\sigma^i W_\mu^i = \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix}.$$

Sehingga persamaan (3.12) dituliskan kembali menjadi (Pembuktian pada lampiran B.I) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{K-G} \supset \frac{\nu^2}{8} (g^2 [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2]) + \frac{\nu^2}{8} (g^2 W^{3\mu} W_\mu^3 \\ - 2gg' W^{3\mu} B_\mu + g'^2 B^\mu B_\mu) \end{aligned} \quad (3.13)$$

dengan

$$((W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2) = 2(W_\mu^+ W_\mu^-). \quad (3.14)$$

Persamaan (3.14) disubstitusikan ke persamaan (3.13) dan dapat ditulis menjadi (Pembuktian pada lampiran B.II) :

$$\mathcal{L}_{K-G} \supset \left(\frac{g\nu}{2}\right)^2 (W_\mu^+ W_\mu^-) + \frac{\nu^2}{8} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

dengan matriks M yaitu :

$$M = \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Suku pertama persamaan (3.15) menunjukkan massa boson W sebagai berikut :

$$M_W = \frac{g\nu}{2} \quad (3.17)$$

Matriks M pada persamaan (3.16) akan diagonalisasi dengan cara transformasi similar :

$$S^\dagger M S \quad (3.18)$$

Kemudian dicari matriks pendagonal S , didapatkan :

$$S = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & g' \\ -g' & g \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Dengan demikian matriks yang sudah terdiagonalisasi adalah (Pembuktian pada lampiran B.III) :

$$S^\dagger M S = \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Agar suku kedua dari persamaan (3.15) tidak berubah, maka matriks $S^\dagger MS$ pada persamaan (3.20) harus dikalikan matriks S dari kiri dan matriks S^\dagger dari kanan, sehingga suku kedua persamaan (3.15) akan menjadi (Pembuktian pada lampiran B.IV) :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{K-G} &\supset \frac{\nu^2}{8(g^2 + g'^2)} \left(gW_\mu^3 - g'B_\mu \quad g'W_\mu^3 + gB_\mu \right) \\
 &\quad \left(\begin{array}{cc} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} gW^{3\mu} - g'B^\mu \\ g'W^{3\mu} + gB^\mu \end{array} \right) \\
 &\supset \frac{\nu^2}{8} \left(\begin{array}{cc} Z_\mu & A_\mu \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} Z^\mu \\ A^\mu \end{array} \right) \\
 &\supset \frac{\nu^2}{8} [(g^2 + g'^2)Z_\mu Z^\mu + 0A_\mu A^\mu]
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Persamaan (3.21) menunjukkan adanya basis baru berupa Z_μ dan A_μ , yaitu :

$$\begin{aligned}
 Z_\mu &= \frac{gW_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \\
 A_\mu &= \frac{g'W_\mu^3 + gB_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Berdasarkan suku pertama persamaan (3.21) didapatkan massa boson tera netral Z^0 sebagai berikut :

$$M_Z = \frac{\nu}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} \tag{3.23}$$

dan berdasarkan suku kedua persamaan (3.21) massa foton yaitu :

$$M_A = 0 \tag{3.24}$$

Hasil yang telah diperoleh dapat dituliskan kembali dengan notasi baru sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{g'}{g} &= \tan\theta_W \\ \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} &= \sin\theta_W \\ \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} &= \cos\theta_W \end{aligned} \quad (3.25)$$

dengan θ_W adalah sudut Weinberg (*Weinberg angle*). Ungkapan basis baru Z_μ dan A_μ pada persamaan (3.22) dapat dinyatakan dalam θ_W sebagai berikut (Pembuktian pada lampiran B.V) :

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \cos\theta_W W_\mu^3 - \sin\theta_W B_\mu \\ A_\mu &= \sin\theta_W W_\mu^3 + \cos\theta_W B_\mu. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Kemudian dari persamaan (3.17) dan (3.23) akan didapatkan rasio massa W dan Z sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{M_W}{M_Z} &= \frac{\frac{g\nu}{2}}{\frac{\nu\sqrt{g^2+g'^2}}{2}} \\ &= \frac{g}{g^2 + g'^2} \\ &= \cos\theta_W \end{aligned} \quad (3.27)$$

C. Massa Fermion

Lagrangian Dirac pada persamaan (3.7) tidak dapat membangkitkan massa fermion, sehingga dibangun Lagrangian Yukawa. Lagrangian Yukawa merupakan interaksi antara boson Higgs dengan dua

fermion. Bentuk Lagrangian Yukawa yang paling umum disajikan sebagai berikut :

$$\mathcal{L}_Y = -G \left(\bar{\psi}_L \phi \psi_R + \bar{\psi}_R \phi^\dagger \psi_L \right) \quad (3.28)$$

Pembangkitan massa elektron dilakukan dengan mensubstitusikan persamaan (2.28) ke persamaan (3.28) hingga lagrangian \mathcal{L}_Y menjadi :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y &= -G_e \left[\begin{pmatrix} \bar{\nu}_e & \bar{e} \end{pmatrix}_L \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + h \end{pmatrix} e_R \right. \\ &\quad \left. + \bar{e}_R \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \nu + h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \right] \quad (3.29) \\ &= -\frac{G_e}{\sqrt{2}} \nu (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) - \frac{G_e}{\sqrt{2}} h (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.29), didapatkan massa elektron :

$$m_e = \frac{1}{\sqrt{2}} G_e \nu \quad (3.30)$$

Pembangkitan massa quark dilakukan dengan cara yang sama. Hanya saja doublet Higgs ϕ diganti dengan doublet Higgs baru ϕ_c , yaitu :

$$\phi_c = -i\sigma_2 \phi^* = \begin{pmatrix} \bar{\phi}^0 \\ \phi^- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \nu + h \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Nilai ϕ_c disubstitusikan ke persamaan (3.28), sehingga lagrangian \mathcal{L}_Y menjadi (Pembuktian pada lampiran B.VI) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y &= -G_d \left(\bar{u} \quad \bar{d} \right)_L \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + h \end{pmatrix} d_R \\
&\quad - G_u \left(\bar{u} \quad \bar{d} \right)_L \begin{pmatrix} \nu + h \\ 0 \end{pmatrix} u_R + h.c \\
&= -\frac{G_d}{\sqrt{2}} \nu (\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) - \frac{G_d}{\sqrt{2}} h (\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) \\
&\quad - \frac{G_u}{\sqrt{2}} \nu (\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) - \frac{G_u}{\sqrt{2}} h (\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Massa quark *up* dan *down* berdasarkan persamaan (3.35) adalah :

$$m_u = \frac{1}{\sqrt{2}} G_u \nu \quad \text{dan} \quad m_d = \frac{1}{\sqrt{2}} G_d \nu \tag{3.33}$$

D. Materi Gelap

Salah satu kelemahan model standar yaitu tidak bisa menjelaskan tentang keberadaan materi gelap. Materi tersebut dikatakan "gelap" karena hampir tidak memancarkan maupun menyerap radiasi elektromagnetik sehingga sulit untuk dideteksi keberadaannya. Materi gelap merupakan salah satu materi pembentuk alam semesta sebesar 20 persen, 75 persen energi gelap dan 5 persen barion (Griffith, 2008). Sebagian besar materi di alam semesta hadir dalam bentuk yang tidak dapat dilihat sebagaimana telah dicantumkan sejak dulu dalam Al-Quran surat Ar-Ra'd (13):2 ;

Artinya : *“Allah-lah yang meninggikan langit tanpa tiang (sebagaimana) yang kamu lihat, kemudian Dia bersermayam di atas 'Arasy, dan*

اللَّهُ الَّذِي رَفَعَ السَّمَوَاتِ بِغَيْرِ عَمَدٍ تَرَوْنَهَا ثُمَّ أَسْتَوَىٰ عَلَى الْعَرْشِ وَسَخَّرَ
 الشَّمْسَ وَالْقَمَرَ كُلٌّ يَجْرِي لِأَجَلٍ مُّسَمًّى يُدَبِّرُ الْأَمْرَ يُفَصِّلُ الْآيَاتِ
 لَعَلَّكُمْ بِلِقَاءِ رَبِّكُمْ تُوقِنُونَ ﴿٢٠٠﴾

menundukkan matahari dan bulan. masing-masing beredar hingga waktu yang ditentukan. Allah mengatur urusan (makhluk-Nya), menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya), supaya kamu meyakini Pertemuan (mu) dengan Tuhanmu” (Q.S. Ar-Ra’d : 2)

Ayat diatas mengungkapkan bahwa sebenarnya langit diciptakan ada tiangnya, tetapi tidak dapat dilihat dengan mata kepala. Tiang tersebut adalah daya-daya dan materi-materi yang diciptakan Allah SWT dan hanya Allah SWT yang tahu maknanya. Dengan demikian ayat ini menegaskan tentang kekuasaan Allah SWT dalam mengatur dan mengendalikan alam raya (Shihab, 2002).

Beberapa bukti pendukung adanya materi gelap di alam semesta ini antara lain :

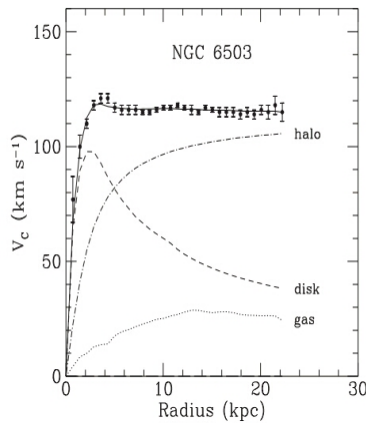
1. Pengamatan Zwicky

Pada tahun 1933, astronom dari Swiss bernama Fritz Zwicky mengukur kecepatan pergerakan galaksi-galaksi di gugus galaksi Coma (menggunakan pergeseran Doppler) dan menggunakan informasi tersebut untuk menentukan massa dari gugus galaksi Coma. Hasil penelitian Zwicky menyatakan bahwa massa gugus galaksi Coma 400 kali lebih besar dari jumlah keseluruhan massa bintang-bintang yang

dapat terlihat di gugus galaksi Coma. Hal ini mengindikasikan adanya materi yang tidak terlihat di gugus galaksi Coma (Griffith, 2008).

2. Pengamatan kurva rotasi galaksi

Kurva rotasi galaksi bisa didefinisikan sebagai kecepatan bintang-bintang mengorbit pusat galaksi sebagai fungsi dari jarak bintang tersebut terhadap pusat galaksi.

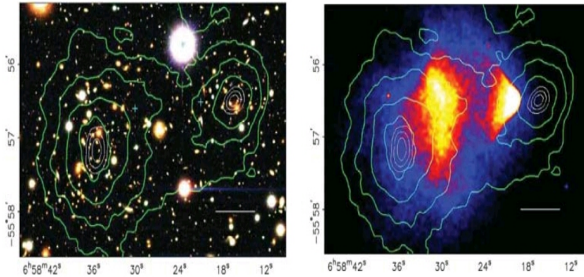


Gambar III.1: Kurva rotasi galaksi NCG 6503
(Gorbunov dan Rubakov, 2011)

Kurva diatas menunjukkan hubungan antara kecepatan dan jarak galaksi NCG 6503. Hukum gravitasi umum Newton mengatakan bahwa untuk bintang-bintang yang bergerak menjauhi pusat galaksi kecepatannya akan menurun, tetapi berdasarkan kurva diatas kecepatan bintang-bintang tersebut semakin meningkat (Griffith, 2008). Hal inilah yang mengindikasikan adanya sebuah materi bermassa diantara pusat galaksi dan bintang-bintang tersebut yang turut berkontribusi terhadap meningkatnya kecepatan bintang-bintang tersebut.

3. Pengamatan Bullet Cluster

Bullet Cluster terbentuk dari tumbukan dua gugus galaksi. Hasil penelitian setelah terjadi tumbukan antar galaksi ditunjukkan pada Gambar I.2.



Gambar III.2: Penelitian Bullet Cluster 1E0657-558
(Gorbunov dan Rubakov, 2011)

Gambar diatas menunjukkan persebaran gas panas dengan analisis sinar-X menggunakan teleskop Chandra. Gas tersebut berisi 90 persen baryon dari kedua gugus galaksi. Pusat massa galaksi setelah bertumbukan tidak berada pada tengah-tengah galaksi (warna kuning kemerahan), tetapi bergeser (warna biru)(Gorbunov dan Rubakov, 2011).

Beberapa hasil penelitian diatas telah menunjukkan bahwa materi gelap memang ada. Walaupun keberadaan materi gelap di alam semesta sudah didukung dari beberapa hasil pengamatan, sifat dan karakteristik dari materi gelap belum diketahui secara pasti. Ada beberapa pendapat mengenai kemungkinan sifat-sifat yang dimiliki materi gelap yaitu : partikel masif, sulit dideteksi, tidak berwarna dan tidak bermuatan (Dev, dkk, 2016).

Sebagian besar materi gelap diisi oleh partikel non-barionik. Kandidat materi gelap non-barionik dapat dibagi menjadi dua kategori ber-

dasarkan massa dan kecepatannya, yaitu : *Hot Dark Matter* (HDM) dan *Cold Dark Matter* (CDM). CDM tersusun oleh partikel masif yang diperkirakan bergerak dengan kecepatan relativistik, sedangkan HDM terdiri dari partiel yang bermassa nol atau mendekati nol yang diperkirakan bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya. Kandidat yang mungkin untuk HDM adalah neutron masif, sedangkan kandidat untuk CDM adalah partikel yang disebut WIMP (*Weakly Interacting Massive Particle*). Terdapat tiga partikel yang memungkinkan untuk menjadi WIMP (Nath, 2018), yaitu :

- 1) Neutralino, partikel yang diperkirakan menyerupai neutrino tetapi lebih berat dan lebih lambat.
- 2) Axion, partikel netral dengan massa 10^6 kali lebih ringan dari elektron yang dihipotesa muncul sebagai solusi atas pelanggaran CP kuat.
- 3) Photinos, partner dari photon, menyerupai photon tetapi dengan spin $\frac{1}{2}$ dengan massa 10 sampai 100 kali massa proton dan diprediksi oleh supersimetri.

Materi gelap mungkin berisi dari salah satu dari partikel diatas atau gabungannya bahkan dimungkinkan juga berisi banyak materi lain yang belum diketahui.

E. Mekanisme Seesaw

Mekanisme *seesaw* merupakan suatu mekanisme yang digunakan untuk membangkitkan massa neutrino. Dalam memunculkan massa neutrino, mekanisme *seesaw* mempunyai dua konsep massa, yaitu massa Dirac (ringan) dan massa Majorana (berat). Partikel Dirac adalah partikel yang antipartikelnya tidak sama dengan partikelnya, sedangkan partikel Majorana adalah partikel yang antipartikelnya sama dengan partikelnya. Karena neutrino bermuatan netral, antipartikel-

nya adalah neutrino itu sendiri sehingga neutrino menjadi anggota dari partikel Majorana (Purwanto, 2005). Adapun lagrangian suku massa Dirac untuk neutrino adalah

$$\mathcal{L}_D = -m_D(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L) \quad (3.34)$$

Sedangkan lagrangian suku massa Majorana untuk neutrino adalah

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2}m_M^L(\bar{\nu}_L\nu_L^c + \bar{\nu}_L^c\nu_L) - \frac{1}{2}m_M^R(\bar{\nu}_R\nu_R^c + \bar{\nu}_R^c\nu_R) \quad (3.35)$$

Jika suku massa Dirac dan Majorana digabungkan akan menjadi bentuk paling umum untuk lagrangian suku massa neutrino yaitu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{D+M} = & -m_D(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L) - \frac{1}{2}m_M^L(\bar{\nu}_L\nu_L^c \\ & + \bar{\nu}_L^c\nu_L) - \frac{1}{2}m_M^R(\bar{\nu}_R\nu_R^c + \bar{\nu}_R^c\nu_R) + h.c \end{aligned} \quad (3.36)$$

Persamaan (3.36) dapat ditulis kembali dalam bentuk matriks yaitu (Pembuktian pada lampiran B.VII) :

$$\mathcal{L}_{D+M} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_R^c \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + h.c \quad (3.37)$$

dengan matriks M adalah :

$$M = \begin{pmatrix} m_M^L & m_D \\ m_D & m_M^R \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Ide yang mendasari mekanisme *seesaw* ini adalah penggabungan suku massa Dirac dengan suku massa Majorana dengan asumsi sebagai berikut ini :

1. Tidak ada suku *left-handed* Majorana.

$$m_M^L = 0 \quad (3.39)$$

2. Karena suku massa *right-handed* Majorana merusak kelestarian bilangan lepton, diasumsikan bahwa bilangan lepton dilanggar pada skala lebih besar dari skala elektro-lemah :

$$m_M^R \equiv M_R \gg m_D \quad (3.40)$$

Berdasarkan kedua asumsi diatas, matriks massa kombinasi neutrino Dirac dan Majorana (3.38) menjadi

$$M^{D+M} = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & M_R \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Kemudian mencari swanilai dari matriks massa (3.41) dengan menggunakan $\det |M - mI| = 0$ dan memperoleh hasil (Pembuktian pada lampiran B.VIII)

$$m_{1,2} = \frac{M_R \pm \sqrt{M_R^2 + 4m_D^2}}{2} \quad (3.42)$$

dengan asumsi $M_R \gg m_D$, maka diperoleh dua swanilai yaitu (Pembuktian pada lampiran B.IX)

$$m_1 = M_R \quad , \quad m_2 = -\frac{m_D^2}{M_R} \quad (3.43)$$

dengan m_1 menunjukkan massa neutrino yang berat dan m_2 menun-

juukkan massa neutrino yang ringan.

Cara lain untuk mendapatkan swanilai yaitu dengan mencari matriks S untuk mendiagonalisasi matriks M^{D+M} persamaan (3.41), dengan matriks S sebagai berikut :

$$S = \frac{1}{\sqrt{M_R^2 + m_D^2}} \begin{pmatrix} m_D & M_R \\ M_R & -m_D \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

F. Matriks Blok

Matriks adalah susunan bilangan-bilangan (kompleks atau real) yang berbentuk persegi dan disusun berdasarkan aturan baris dan kolom. Selanjutnya bilangan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Entri dari suatu matriks yang berada pada kolom ke- i dan baris ke- j dinotasikan dengan a_{ij} (Ilhamsyah dan Fransiskus, 2017). Jenis-jenis matriks diantaranya matriks persegi, matriks nol, matriks identitas, matriks segitiga, matriks diagonal, matriks baris, matriks kolom, matriks blok dan lain sebagainya.

Matriks blok atau matriks partisi adalah matriks yang dipartisi atau diblok menjadi beberapa matriks yang ukurannya lebih kecil sehingga lebih mudah dioperasikan. Matriks-matriks yang ukurannya lebih kecil hasil blok matriks disebut submatriks. Matriks blok yang digunakan dalam skripsi ini adalah matriks persegi 4×4 yang diblok atas dua baris dan dua kolom sub-sub matriks yang disebut matriks

blok 2×2 . Misalkan P adalah matriks 4×4

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

dengan memisalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

matris P persamaan (3.47) dapat dituliskan kembali menjadi :

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

This page intentionally left blank

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Model Simetri Kiri-Kanan Minimal

Skripsi ini mengusulkan model simetri kiri-kanan minimal berdasarkan grup tera $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_Y$. Partikel yang terdapat pada model ini dibagi menjadi dua sektor yaitu sektor kiri dan sektor kanan seperti ditunjukkan pada tabel IV.1.

Pada sektor kiri terdiri dari partikel Model Standar, neutrino ν_R dan triplet Higgs Δ_L , sedangkan pada sektor kanan terdiri dari fermion sektor kanan, doublet Higgs ϕ_R dan triplet Higgs Δ_R . Tujuan dari penambahan dua triplet Higgs (Δ_L dan Δ_R) adalah untuk membangkitkan massa neutrino ringan dan masif, sedangkan penambahan fermion sektor kanan diharapkan akan menjadi kandidat materi gelap pada model ini (Dev, Mohapatra dan Zhang, 2016).

B. Potensial Higgs

Penambahan satu doublet Higgs sektor kanan (ϕ_R) dan dua triplet Higgs (Δ_L dan Δ_R) menyebabkan potensial Higgs model simetri kiri-kanan minimal berbeda dengan potensial Higgs pada Model Standar. Potensial Higgs model simetri kiri-kanan minimal dituliskan

Tabel IV.1: Fermion dan skalar sektor pada model simetri kiri-kanan minimal beserta wakilannya

Left-Handed	Wakilan	Right-Handed	Wakilan
$Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	$(2, 1, \frac{1}{3})$	$Q_R = \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_R$	$(1, 2, \frac{1}{3})$
u_R	$(1, 1, \frac{4}{3})$	U_L	$(1, 1, \frac{4}{3})$
d_R	$(1, 1, -\frac{2}{3})$	D_L	$(1, 1, -\frac{2}{3})$
$l_L = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L$	$(2, 1, -1)$	$l_R = \begin{pmatrix} N \\ E \end{pmatrix}_R$	$(1, 2, -1)$
ν_R	$(1, 1, 0)$	N_L	$(1, 1, 0)$
e_R	$(1, 1, -2)$	E_L	$(1, 1, -2)$
$\phi_L = \begin{pmatrix} \phi_L^+ \\ \phi_L^0 \end{pmatrix}$	$(2, 1, 1)$	$\phi_R = \begin{pmatrix} \phi_R^+ \\ \phi_R^0 \end{pmatrix}$	$(1, 2, 1)$
$\Delta_L = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_L^+}{\sqrt{2}} & \Delta_L^{-+} \\ \Delta_L^0 & \frac{-\Delta_L^+}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$(3, 1, 0)$	$\Delta_R = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_R^+}{\sqrt{2}} & \Delta_R^{++} \\ \Delta_R^0 & \frac{-\Delta_R^+}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$(1, 3, 0)$

sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 V = & \frac{1}{2}\mu_1^2(\phi_L^\dagger\phi_L) + \frac{1}{2}\mu_2^2(\phi_R^\dagger\phi_R) + \frac{1}{2}\mu_3^2(\Delta_L^\dagger\Delta_L) + \frac{1}{2}\mu_4^2(\Delta_R^\dagger\Delta_R) \\
 & + \frac{1}{4}\lambda_1(\phi_L^\dagger\phi_L)^2 + \frac{1}{4}\lambda_2(\phi_R^\dagger\phi_R)^2 + \frac{1}{4}\lambda_3(\Delta_L^\dagger\Delta_L)^2 + \frac{1}{4}\lambda_4(\Delta_R^\dagger\Delta_R)^2 \\
 & + \frac{1}{4}\lambda_5(\phi_L^\dagger\phi_L\phi_R^\dagger\phi_R) + \frac{1}{4}\lambda_6(\Delta_L^\dagger\Delta_L\Delta_R^\dagger\Delta_R) + \frac{1}{4}\lambda_7(\phi_L^\dagger\phi_L\Delta_L^\dagger\Delta_L) \\
 & + \frac{1}{4}\lambda_8(\phi_L^\dagger\phi_L\Delta_R^\dagger\Delta_R) + \frac{1}{4}\lambda_9(\phi_R^\dagger\phi_R\Delta_L^\dagger\Delta_L) + \frac{1}{4}\lambda_{10}(\phi_R^\dagger\phi_R\Delta_R^\dagger\Delta_R) \\
 & + \frac{1}{4}\lambda_{11}(\phi_L^\dagger\Delta_L\Delta_L^\dagger\phi_L) + \frac{1}{4}\lambda_{12}(\phi_R^\dagger\Delta_L\Delta_L^\dagger\phi_R) + \frac{1}{4}\lambda_{13}(\phi_L^\dagger\Delta_R\Delta_R^\dagger\phi_L) \\
 & + \frac{1}{4}\lambda_{14}(\phi_R^\dagger\Delta_R\Delta_R^\dagger\phi_R)
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Bentuk nilai harap vakum medan skalar ϕ_L , ϕ_R , Δ_L dan Δ_R masing-masing didefinisikan sebagai berikut (Senjanovic dan Mohapatra, 1979):

$$\phi_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_L \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$\phi_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_R \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$\Delta_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_L & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

$$\Delta_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_R & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

dengan ν_L , ν_R , ω_L dan ω_R masing-masing adalah nilai harap vakum bagi medan skalar ϕ_L , ϕ_R , Δ_L dan Δ_R . Dengan mensubstitusikan persamaan (4.2), (4.3), (4.4) dan (4.5) pada persamaan (4.1), maka potensial Higgs menjadi (Pembuktian pada lampiran C.I) :

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2}\mu_1^2\nu_L^2 + \frac{1}{2}\mu_2^2\nu_R^2 + \frac{1}{2}\mu_4^2\omega_R^2 + \frac{1}{2}\lambda_1\nu_L^4 + \frac{1}{2}\lambda_2\nu_R^4 + \frac{1}{2}\lambda_4^2\omega_R^4 \\ & + \frac{1}{2}\lambda_5^2\nu_L^2\nu_R^2 + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12})\nu_L^2\omega_R^2 + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\nu_R^2\omega_R^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nilai ekstremum dari masing-masing medan skalar didapatkan dengan cara menurunkan potensial Higgs pada persamaan (4.6) terha-

dap masing-masing medan skalar

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V}{\partial \nu_L} &= 0 \\
 \frac{\partial V}{\partial \nu_R} &= 0 \\
 \frac{\partial V}{\partial \omega_L} &= 0 \\
 \frac{\partial V}{\partial \omega_R} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

didapatkan nilai vakum dari masing-masing medan skalar (Pembuktian pada lampiran C.II) :

$$\nu_L = \sqrt{\frac{-(\mu_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_5\nu_R^2 + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12})\omega_R^2)}{\lambda_1}} \tag{4.8}$$

$$\nu_R = \sqrt{\frac{-(\mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_5\nu_L^2 + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\omega_R^2)}{\lambda_2}} \tag{4.9}$$

$$\omega_L = 0 \tag{4.10}$$

$$\omega_R = \sqrt{\frac{-(\mu_4^2 + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12})\nu_L^2 + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\nu_R^2)}{\lambda_4}} \tag{4.11}$$

C. Massa Medan Skalar

Massa medan skalar ϕ_L , ϕ_R , Δ_L dan Δ_R dapat dibangkitkan dengan cara melakukan ekspansi disekitar nilai harap vakum masing-masing medan skalar. Bentuk ekspansinya adalah sebagai berikut :

$$\phi_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_L + h_{\phi_L} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$$\phi_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_R + h_{\phi_R} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

$$\Delta_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{\Delta_L} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

$$\Delta_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_R + h_{\Delta_R} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Persamaan (4.12), (4.13), (4.14) dan (4.15) disubstitusi ke persamaan (4.1), sehingga potensial Higgs model simetri kiri-kanan minimal menjadi (Pembuktian pada lampiran C.III) :

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2}\mu_1^2\nu_L^2 + \mu_1^2\nu_L h_{\phi_L} + \frac{1}{2}\mu_1^2 h_{\phi_L}^2 + \frac{1}{2}\mu_2^2\nu_R^2 + \mu_2^2\nu_R h_{\phi_R} + \frac{1}{2}\mu_2^2 h_{\phi_R}^2 \\ & + \frac{1}{2}\mu_3^2 h_{\Delta_L}^2 + \frac{1}{2}\mu_4^2\omega_R^2 + \mu_4^2\omega_R h_{\Delta_R} + \frac{1}{2}\mu_4^2 h_{\Delta_R}^2 \\ & + \frac{1}{4}\lambda_1\nu_L^4 + \lambda_1\nu_L^3 h_{\phi_L} + \frac{3}{2}\lambda_1\nu_L^2 h_{\phi_L}^2 + \lambda_1\nu_L h_{\phi_L}^3 + \frac{1}{4}\lambda_1 h_{\phi_L}^4 \\ & + \frac{1}{4}\lambda_2\nu_R^4 + \lambda_2\nu_R^3 h_{\phi_R} + \frac{3}{2}\lambda_2\nu_R^2 h_{\phi_R}^2 + \lambda_2\nu_R h_{\phi_R}^3 + \frac{1}{4}\lambda_2 h_{\phi_R}^4 + \frac{1}{4}\lambda_3 h_{\Delta_L}^2 \\ & + \frac{1}{4}\lambda_4\omega_R^4 + \lambda_4\omega_R^3 h_{\Delta_R} + \frac{3}{2}\lambda_4\omega_R^2 h_{\Delta_R}^2 + \lambda_4\omega_R h_{\Delta_R}^3 + \frac{1}{4}\lambda_4 h_{\Delta_R}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4}\lambda_5\nu_L^2\nu_R^2 + \frac{1}{2}\lambda_5\nu_L^2\nu_R h_{\phi_R} + \frac{1}{4}\lambda_5\nu_L^2 h_{\phi_R}^2 + \frac{1}{2}\lambda_5\nu_L\nu_R^2 h_{\phi_L} \\
& + \lambda_5\nu_L\nu_R h_{\phi_L} h_{\phi_R} + \frac{1}{2}\lambda_5\nu_L h_{\phi_L} h_{\phi_R}^2 + \frac{1}{4}\lambda_5\nu_R^2 h_{\phi_L}^2 + \frac{1}{2}\lambda_5\nu_R h_{\phi_R} h_{\phi_L}^2 \\
& + \frac{1}{4}\lambda_5 h_{\phi_L}^2 h_{\phi_R}^2 + \frac{1}{4}\lambda_6\omega_R^2 h_{\Delta_L}^2 + \frac{1}{2}\lambda_6\omega_R h_{\Delta_R} h_{\Delta_L}^2 + \frac{1}{4}\lambda_6 h_{\Delta_R}^2 h_{\Delta_L}^2 \\
& + \frac{1}{4}(\lambda_7 + \lambda_{11})\nu_L^2 h_{\Delta_L}^2 + \frac{1}{2}(\lambda_7 + \lambda_{11})\nu_L h_{\phi_L} h_{\Delta_L}^2 + \frac{1}{4}(\lambda_7 + \lambda_{11})h_{\phi_L}^2 h_{\Delta_L}^2 \\
& + \frac{1}{4}(\lambda_8 + \lambda_{12})\nu_L^2\omega_R^2 + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12})\nu_L^2\omega_R h_{\Delta_R} + \frac{1}{4}(\lambda_8 + \lambda_{12})\nu_L^2 h_{\Delta_R}^2 \\
& + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12})\nu_L\omega_R^2 h_{\phi_L} + (\lambda_8 + \lambda_{12})\nu_L\omega_R h_{\phi_L} h_{\Delta_R} \\
& + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12})\nu_L h_{\phi_L} h_{\Delta_R}^2 \\
& + \frac{1}{4}(\lambda_8 + \lambda_{12})\omega_R^2 h_{\phi_L}^2 + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12})\omega_R h_{\Delta_R} h_{\phi_L}^2 + \frac{1}{4}(\lambda_8 + \lambda_{12})h_{\phi_L}^2 h_{\Delta_R}^2 \\
& + \frac{1}{4}(\lambda_9 + \lambda_{13})\nu_R^2 h_{\Delta_L}^2 + \frac{1}{2}(\lambda_9 + \lambda_{13})\nu_R h_{\phi_R} h_{\Delta_L}^2 + \frac{1}{4}(\lambda_9 + \lambda_{13})h_{\phi_L}^2 h_{\Delta_R}^2 \\
& + \frac{1}{4}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\nu_R^2\omega_R^2 + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\nu_R^2\omega_R h_{\Delta_R} + \frac{1}{4}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\nu_R^2 h_{\Delta_R}^2 \\
& + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\nu_R\omega_R^2 h_{\phi_R} + (\lambda_{10} + \lambda_{14})\nu_R\omega_R h_{\phi_R} h_{\Delta_R} \\
& + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\nu_R h_{\phi_R} h_{\Delta_R}^2 + \frac{1}{4}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\omega_R^2 h_{\phi_R}^2 \\
& + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\omega_R h_{\Delta_R} h_{\phi_R}^2 + \frac{1}{4}(\lambda_{10} + \lambda_{14})h_{\phi_R}^2 h_{\Delta_R}^2
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Berdasarkan persamaan (4.16) didapatkan suku yang mengandung h^2 merupakan suku massa medan skalar, suku-suku yang mengandung h^3 merupakan suku interaksi 3 partikel dengan konstanta kopling λ dan suku-suku yang mengandung h^4 merupakan suku interaksi 4 partikel dengan konstanta kopling λ . Setelah itu, dipilih suku-suku yang mengandung h^2 . Dari suku-suku yang mengandung h^2 hanya diambil suku yang mengandung $h_{\phi_L}^2$, $h_{\phi_R}^2$, $h_{\Delta_L}^2$, $h_{\Delta_R}^2$, sedangkan suku

massa campuran $h_{\phi_L} h_{\phi_R}$, $h_{\phi_L} h_{\Delta_L}$, $h_{\phi_L} h_{\Delta_R}$, $h_{\phi_R} h_{\Delta_L}$, $h_{\phi_R} h_{\Delta_R}$ dan $h_{\Delta_L} h_{\Delta_R}$ diabaikan. Suku-suku yang mengandung $h_{\phi_L}^2$, $h_{\phi_R}^2$, $h_{\Delta_L}^2$, $h_{\Delta_R}^2$ yaitu :

$$h_{\phi_L}^2 \left[\frac{1}{2} \mu_1^2 + \frac{3}{2} \lambda_1 \nu_L^2 + \frac{1}{4} \lambda_5 \nu_R^2 + \frac{1}{4} (\lambda_8 + \lambda_{12}) \omega_R^2 \right] \quad (4.17)$$

$$h_{\phi_R}^2 \left[\frac{1}{2} \mu_2^2 + \frac{3}{2} \lambda_2 \nu_R^2 + \frac{1}{4} \lambda_5 \nu_L^2 + \frac{1}{4} (\lambda_{10} + \lambda_{14}) \omega_R^2 \right] \quad (4.18)$$

$$h_{\Delta_L}^2 \left[\frac{1}{2} \mu_3^2 + \frac{1}{4} \lambda_6 \omega_R^2 + \frac{1}{4} (\lambda_7 + \lambda_{11}) \nu_L^2 + \frac{1}{4} (\lambda_9 + \lambda_{13}) \nu_R^2 \right] \quad (4.19)$$

$$h_{\Delta_R}^2 \left[\frac{1}{2} \mu_4^2 + \frac{3}{2} \lambda_4 \omega_R^2 + \frac{1}{4} (\lambda_8 + \lambda_{12}) \nu_L^2 + \frac{1}{4} (\lambda_{10} + \lambda_{14}) \nu_R^2 \right] \quad (4.20)$$

Massa medan skalar ϕ_L , ϕ_R , Δ_L dan Δ_R diperoleh dengan membandingkan suku massa partikel $\frac{1}{2} m^2 h^2$ dengan suku massa medan skalar persamaan (4.17), (4.18), (4.19), (4.20) dan didapatkan massa masing-masing medan skalar sebagai berikut (Pembuktian pada lampiran C.IV):

$$m_{\phi_L} = \sqrt{2\lambda_1 \nu_L^2} \quad (4.21)$$

$$m_{\phi_R} = \sqrt{2\lambda_2 \nu_R^2} \quad (4.22)$$

$$m_{\Delta_L} = \sqrt{\mu_3^2 + \frac{1}{2} \lambda_6 \omega_R^2 + \frac{1}{2} (\lambda_7 + \lambda_{11}) \nu_L^2 + \frac{1}{2} (\lambda_9 + \lambda_{13}) \nu_R^2} \quad (4.23)$$

$$m_{\Delta_R} = \sqrt{2\lambda_4 \omega_R^2} \quad (4.24)$$

Jika diasumsikan bahwa $\omega_L = 0$ dan $\nu_L \ll \nu_R \ll \omega_R$, maka massa medan skalar Δ_L lebih besar dari massa medan skalar Δ_R , massa medan skalar Δ_R lebih besar dari massa medan skalar ϕ_R dan mas-

sa medan skalar ϕ_R lebih besar dari massa medan skalar ϕ_L ($m_{\Delta_L} > m_{\Delta_R} > m_{\phi_R} > m_{\phi_L}$).

D. Lagrangian Yukawa

Suku yang memungkinkan pada Lagrangian Yukawa pada model simetri kiri-kanan minimal didapatkan dengan mengalikan wakil-an fundamental masing-masing partikel pada tabel IV.1. Contoh suku-suku yang mungkin muncul pada lagrangian Yukawa model simetri kiri-kanan minimal adalah sebagai berikut :

$$\bar{l}_L \phi_L e_R = (2^*, 1^*, 1)(2, 1, 1)(1, 1, -2) = (1, 1, 0)$$

Suku-suku yang lainnya dapat dilihat pada lampiran (C.V). Jika semua suku digabungkan akan diperoleh bentuk Lagrangian Yukawa pada model simetri kiri-kanan minimal sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & -G_1 \bar{l}_L \phi_L e_R - G_2 \bar{e}_R \phi_L^\dagger l_L - G_3 \bar{Q}_L \phi_L d_R - G_4 \bar{d}_R \phi_L^\dagger Q_L \\ & - G_5 \bar{Q}_R \phi_R D_L - G_6 \bar{D}_L \phi_R^\dagger Q_R - G_7 \bar{l}_R \phi_R E_L - G_8 \bar{E}_L \phi_R^\dagger l_R \\ & - G_9 \bar{Q}_L \phi_L^c u_R - G_{10} \bar{u}_R (\phi_L^c)^\dagger Q_L - G_{11} \bar{l}_L \phi_L^c \nu_R \\ & - G_{12} \bar{\nu}_R (\phi_L^c)^\dagger l_L - G_{13} \bar{Q}_R \phi_R^c U_L - G_{14} \bar{U}_L (\phi_R^c)^\dagger Q_R \\ & - G_{15} \bar{l}_R \phi_R^c N_L - G_{16} \bar{N}_L (\phi_R^c)^\dagger l_R - G_{17} \bar{\nu}_R \Delta_L N_L \\ & - G_{18} \bar{N}_L \Delta_L \nu_R - G_{19} \bar{\nu}_R \Delta_R N_L - G_{20} \bar{N}_L \Delta_R \nu_R \end{aligned} \quad (4.25)$$

dengan $G_i, i = 1, 2, 3, \dots, 20$ adalah tetapan kopling Yukawa.

E. Massa Fermion Sektor Kiri dan Sektor Kanan

Massa fermion diperoleh melalui suku-suku pada Lagrangian Yukawa. Pada model simetri kiri-kanan minimal ini, akan didapatkan massa fermion dalam dua sektor, yaitu sektor kiri dan sektor kanan. Pada sektor kiri didapatkan massa m_e, m_u dan m_d , sedangkan pada sektor kanan didapatkan massa m_E, m_U dan m_D .

Suku-suku yang dapat membangkitkan massa elektron berdasarkan persamaan (4.25) yaitu :

$$\mathcal{L}_{Ye} = -G_1 \bar{l}_L \phi_L e_R - G_2 \bar{e}_R \phi_L^\dagger l_L - G_7 \bar{l}_R \phi_R E_L - G_8 \bar{E}_L \phi_R^\dagger l_R \quad (4.26)$$

dengan $G_1 = G_2 = G_e$ dan $G_7 = G_8 = G_E$. Medan skalar ϕ_L dan ϕ_R mengambil nilai harap vakum seperti pada persamaan (4.2) dan (4.3). Kemudian nilai ekspansi disekitar VEV medan skalar ϕ_L dan ϕ_R yang bentuk ekspansinya seperti persamaan (4.12) dan (4.13) disubstitusikan, sehingga persamaan (4.26) berubah menjadi (Pembuktian pada lampiran C.VI) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Ye} = & -\frac{G_e}{\sqrt{2}} \nu_L (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) - \frac{G_e}{\sqrt{2}} h_{\phi_L} (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \\ & - \frac{G_E}{\sqrt{2}} \nu_R (\bar{E}_R E_L + \bar{E}_L E_R) - \frac{G_E}{\sqrt{2}} h_{\phi_R} (\bar{E}_R E_L + \bar{E}_L E_R) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Suku kedua persamaan (4.27) menunjukkan interaksi antara elektron sektor kiri dengan medan skalar ϕ_L dan suku keempat menunjukkan interaksi antara elektron sektor kanan dengan medan skalar ϕ_R . Sedangkan suku pertama persamaan (4.27) menunjukkan massa elektron pada sektor kiri (m_e) dan suku ketiga menunjukkan massa elektron

pada sektor kanan (m_E) sebagai berikut :

$$m_e = -\frac{G_e}{\sqrt{2}}\nu_L \quad (4.28)$$

$$m_E = -\frac{G_e}{\sqrt{2}}\nu_R \quad (4.29)$$

Diasumsikan bahwa $\nu_L < \nu_R$, maka massa elektron sektor kiri (m_e) lebih ringan dari massa elektron sektor kanan (m_E).

Berdasarkan persamaan (4.25), suku-suku yang dapat membangkitkan massa partikel *down* yaitu :

$$\mathcal{L}_{Yd} = -G_3\bar{Q}_L\phi_L d_R - G_4\bar{d}_R\phi_L^\dagger Q_L - G_5\bar{Q}_R\phi_R D_L - G_6\bar{D}_L\phi_R^\dagger Q_R \quad (4.30)$$

dengan $G_3 = G_4 = G_d$ dan $G_5 = G_6 = G_D$. Persamaan (4.12) dan (4.13) kemudian disubstitusikan pada persamaan (4.30), sehingga diperoleh lagrangian pembangkit massa *down* sebagai berikut (Pembuktian pada lampiran C.VII) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yd} = & -\frac{G_d}{\sqrt{2}}\nu_L(\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) - \frac{G_d}{\sqrt{2}}h_{\phi_L}(\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) \\ & - \frac{G_D}{\sqrt{2}}\nu_R(\bar{D}_R D_L + \bar{D}_L D_R) - \frac{G_D}{\sqrt{2}}h_{\phi_R}(\bar{D}_R D_L + \bar{D}_L D_R) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Interaksi antara partikel *down* sektor kiri dengan medan skalar ϕ_L dan interaksi antara partikel *down* sektor kanan dengan medan skalar ϕ_R masing-masing ditunjukkan oleh suku kedua dan suku keempat persamaan (4.31). Sedangkan massa partikel *down* sektor kiri (m_d) dan massa partikel *down* sektor kanan (m_D) ditunjukkan oleh suku pertama dan suku ketiga persamaan (4.31) dengan massanya sebagai

berikut :

$$m_d = -\frac{G_d}{\sqrt{2}}\nu_L \quad (4.32)$$

$$m_D = -\frac{G_D}{\sqrt{2}}\nu_R \quad (4.33)$$

Diasumsikan bahwa $\nu_L < \nu_R$, maka massa *down* sektor kiri (m_d) lebih ringan dari massa *down* sektor kanan (m_D).

Massa partikel *up* dapat dibangkitkan berdasarkan suku-suku pada persamaan (4.25) yaitu :

$$\mathcal{L}_{Yu} = -G_9\bar{Q}_L\phi_L^c u_R - G_{10}\bar{u}_R(\phi_L^c)^\dagger Q_L - G_{13}\bar{Q}_R\phi_R^c U_L - G_{14}\bar{U}_L(\phi_R^c)^\dagger Q_R \quad (4.34)$$

dengan $G_9 = G_{10} = G_u$ dan $G_{13} = G_{14} = G_U$. Pada pembangkitkan massa quark-up diperkenalkan medan ϕ_L^c dan ϕ_R^c yang didefinisikan dari medan ϕ_L dan ϕ_R , yaitu :

$$\phi_L^c = -i\sigma_2\phi^* = \begin{pmatrix} \bar{\phi}^0 \\ \phi^- \end{pmatrix}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \nu_L + h_{\phi_L} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

$$\phi_R^c = -i\sigma_2\phi^* = \begin{pmatrix} \bar{\phi}^0 \\ \phi^- \end{pmatrix}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \nu_R + h_{\phi_R} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Persamaan (4.35) dan (4.36) disubstitusikan ke persamaan (4.34), sehingga didapatkan pembangkit massa *up* sebagai berikut (Pembuktian pada lampiran C.VIII) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yu} = & -\frac{G_u}{\sqrt{2}}\nu_L(\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) - \frac{G_u}{\sqrt{2}}h_{\phi_L}(\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) \\ & - \frac{G_U}{\sqrt{2}}\nu_R(\bar{U}_R U_L + \bar{U}_L U_R) - \frac{G_U}{\sqrt{2}}h_{\phi_R}(\bar{U}_R U_L + \bar{U}_L U_R) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Suku kedua persamaan (4.37) menunjukkan interaksi antara partikel quark-up ringan dengan medan skalar ϕ_L dan suku keempat menunjukkan interaksi antara partikel quark-up berat dengan medan skalar ϕ_R . Berdasarkan suku pertama dan suku ketiga persamaan (4.37), massa partikel up sektor kiri (m_u) dan massa partikel up sektor kanan (m_U) sebagai berikut :

$$m_u = -\frac{G_u}{\sqrt{2}}\nu_L \quad (4.38)$$

$$m_U = -\frac{G_U}{\sqrt{2}}\nu_R \quad (4.39)$$

Diasumsikan bahwa $\nu_L < \nu_R$, maka massa up sektor kiri (m_u) lebih ringan dari massa up sektor kanan (m_U).

F. Massa Neutrino

Suku-suku yang dapat membangkitkan massa neutrino berdasarkan persamaan (4.25) yaitu (Pembuktian pada lampiran C.IX) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -G_{11}\bar{l}_L\phi_L^c\nu_R - G_{12}\bar{\nu}_R(\phi_L^c)^\dagger l_L - G_{15}\bar{l}_R\phi_R^c N_L - G_{16}\bar{N}_L\phi_R^c l_R \\ &\quad - G_{17}\bar{\nu}_R\Delta_L N_L - G_{18}\bar{N}_L\Delta_L\nu_R - G_{19}\bar{\nu}_R\Delta_R N_L - G_{20}\bar{N}_L\Delta_R\nu_R \\ &= -\frac{G_\nu}{\sqrt{2}}\nu_L(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L) - \frac{G_\nu}{\sqrt{2}}h_{\phi_L}(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L) \\ &\quad - \frac{G_N}{\sqrt{2}}\nu_R(\bar{N}_R N_L + \bar{N}_L N_R) - \frac{G_N}{\sqrt{2}}h_{\phi_R}(\bar{N}_R N_L + \bar{N}_L N_R) \\ &\quad - \frac{G_{N\nu}}{\sqrt{2}}h_{\Delta_L}(\bar{\nu}_R N_L + \bar{N}_L\nu_R) \\ &\quad - \frac{G_{N\nu}}{\sqrt{2}}\omega_R(\bar{\nu}_R N_L + \bar{N}_L\nu_R) - \frac{G_{N\nu}}{\sqrt{2}}h_{\Delta_L}(\bar{\nu}_R N_L + \bar{N}_L\nu_R) \end{aligned} \quad (4.40)$$

dengan $G_{11} = G_{12} = G_\nu, G_{15} = G_{16} = G_N, G_{17} = G_{18} = G_{19} = G_{20} = G_{N\nu}$ yang merupakan konstanta kopling Yukawa. Persamaan (4.40) dapat dituliskan menjadi $\bar{\psi}M\psi$, dimana $\psi = (\nu_L, N_R, N_L, \nu_R)^T$ (Adam, Akmal dan Mirza, 2019) sehingga persamaan (4.40) menjadi (Pembuktian pada lampiran C.X) :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{N}_R & \bar{N}_L & \bar{\nu}_R \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_R \\ N_L \\ \nu_R \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

dengan matriks M adalah

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & G_\nu\nu_L \\ 0 & 0 & G_N\nu_R & 0 \\ 0 & G_N\nu_R & 0 & G_{N\nu}\omega_R \\ G_\nu\nu_L & 0 & G_{N\nu}\omega_R & 0 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

Persamaan matriks M persamaan (4.42) berisikan sub matriks 2x2 seperti pada persamaan (3.48), sehingga matriks M dapat dituliskan kembali menjadi

$$M = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & G_\nu\nu_L \\ G_N\nu_R & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & G_N\nu_R \\ G_\nu\nu_L & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & G_{N\nu}\omega_R \\ G_{N\nu}\omega_R & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

$$= \begin{pmatrix} [0] & [m_D] \\ [m_D^T] & [m_M] \end{pmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (3.45), akan didapatkan matriks diagonal ber-

ikut

$$\mathcal{M} = \nu^T \begin{pmatrix} \frac{G_N G_\nu^T \nu_R \nu_L}{G_{N\nu} \omega_R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{G_N G_\nu^T \nu_R \nu_L}{G_{N\nu} \omega_R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{N\nu} \omega_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_{N\nu} \omega_R \end{pmatrix} \nu \quad (4.44)$$

dengan ν adalah matriks yang akan mendiagonalisasi submatriks dari matriks \mathcal{M} persamaan (4.43)

$$\nu = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

V_1 akan mendiagonalisasi matriks $\frac{G_N G_\nu^T \nu_R \nu_L}{G_{N\nu} \omega_R}$. Karena dua matriks blok pertama sama, sehingga $V_1 = V_2$. Begitupun untuk dua matriks blok selanjutnya, sehingga $V_3 = V_4$ (Adam, Akmal dan Mirza, 2019). Berdasarkan matriks diagonal (4.44) didapatkan dua massa neutrino yaitu

$$m_\nu = V_1^T \frac{G_N G_\nu^T \nu_R \nu_L}{G_{N\nu} \omega_R} V_1 \quad (4.46)$$

$$m_N = V_3^T G_{N\nu} \omega_R V_3 \quad (4.47)$$

m_ν bernilai sangat kecil karena diasumsikan $\nu_L \ll \nu_R \ll \omega_R$ dan ini menunjukkan massa neutrino yang ringan. Sedangkan m_N bernilai sangat besar dan menunjukkan massa neutrino masif yang mencapai 10^{14} GeV (Purwanto, 2005) .

G. Neutrino Masif Sebagai Kandidat Materi Gelap

Terdapat beberapa partikel yang ditambahkan dalam model ini, yaitu $\phi_R, \Delta_L, \Delta_R, E, D, U$ dan N . Sifat suatu partikel sebagai kandidat materi gelap haruslah netral (tidak bermuatan). Berdasarkan tabel IV.1, diantara partikel-partikel yang ditambahkan tersebut hanya Δ_L, Δ_R dan N yang tidak bermuatan.

Selain tidak bermuatan, suatu partikel sebagai kandidat materi gelap juga harus masif. Massa dari masing-masing partikel yang netral tersebut bergantung pada nilai ν_L, ν_R dan ω_R . Berdasarkan asumsi $\nu_L \ll \nu_R \ll \omega_R$ dan $G_{N\nu}$ bernilai sangat besar, maka didapatkan bahwa massa neutrino (N) yang paling masif diantara partikel-partikel netral lainnya. Neutrino masif inilah yang diperkirakan menjadi kandidat dari materi gelap.

This page intentionally left blank

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang peneliti lakukan, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Bentuk persamaan potensial Higgs pada Model Simetri Kiri-Kanan Minimal adalah

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \\
 &= \frac{1}{2}\mu_1^2(\phi_L^\dagger\phi_L) + \frac{1}{2}\mu_2^2(\phi_R^\dagger\phi_R) + \frac{1}{2}\mu_3^2(\Delta_L^\dagger\Delta_L) + \frac{1}{2}\mu_4^2(\Delta_R^\dagger\Delta_R) \\
 &\quad + \frac{1}{4}\lambda_1(\phi_L^\dagger\phi_L)^2 + \frac{1}{4}\lambda_2(\phi_R^\dagger\phi_R)^2 + \frac{1}{4}\lambda_3(\Delta_L^\dagger\Delta_L)^2 + \frac{1}{4}\lambda_4(\Delta_R^\dagger\Delta_R)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{4}\lambda_5(\phi_L^\dagger\phi_L\phi_R^\dagger\phi_R) + \frac{1}{4}\lambda_6(\Delta_L^\dagger\Delta_L\Delta_R^\dagger\Delta_R) + \frac{1}{4}\lambda_7(\phi_L^\dagger\phi_L\Delta_L^\dagger\Delta_L) \\
 &\quad + \frac{1}{4}\lambda_8(\phi_L^\dagger\phi_L\Delta_R^\dagger\Delta_R) + \frac{1}{4}\lambda_9(\phi_R^\dagger\phi_R\Delta_L^\dagger\Delta_L) \\
 &\quad + \frac{1}{4}\lambda_{10}(\phi_R^\dagger\phi_R\Delta_R^\dagger\Delta_R) + \frac{1}{4}\lambda_{11}(\phi_L^\dagger\Delta_L\Delta_L^\dagger\phi_L) \\
 &\quad + \frac{1}{4}\lambda_{12}(\phi_R^\dagger\Delta_L\Delta_L^\dagger\phi_R) + \frac{1}{4}\lambda_{13}(\phi_L^\dagger\Delta_R\Delta_R^\dagger\phi_L) \\
 &\quad + \frac{1}{4}\lambda_{14}(\phi_R^\dagger\Delta_R\Delta_R^\dagger\phi_R)
 \end{aligned}$$

2. Massa doublet Higgs (ϕ_L dan ϕ_R) serta triplet Higgs (Δ_L dan Δ_R) pada Model Simetri Kiri-Kanan Minimal adalah

$$\begin{aligned}
m_{\phi_L} &= \sqrt{2\lambda_1\nu_L^2} \\
m_{\phi_R} &= \sqrt{2\lambda_2\nu_R^2} \\
m_{\Delta_L} &= \sqrt{\mu_3^2 + \frac{1}{2}\lambda_6\omega_R^2 + \frac{1}{2}\lambda_7\nu_L^2 + \frac{1}{2}\lambda_9\nu_R^2} \\
m_{\Delta_R} &= \sqrt{2\lambda_4\omega_R^2}
\end{aligned}$$

3. Bentuk Lagrangian Yukawa pada Model Simetri Kiri-Kanan Minimal adalah

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y &= \mathcal{L}_{Ye} + \mathcal{L}_{Yd} + \mathcal{L}_{Yu} + \mathcal{L}_{Y\nu} \\
&= -\frac{G_e}{\sqrt{2}}\nu_L(\bar{e}_Le_R + \bar{e}_Re_L) - \frac{G_E}{\sqrt{2}}\nu_R(\bar{E}_RE_L + \bar{E}_LE_R) \\
&\quad - \frac{G_d}{\sqrt{2}}\nu_L(\bar{d}_Ld_R + \bar{d}_Rd_L) - \frac{G_D}{\sqrt{2}}\nu_R(\bar{D}_RD_L + \bar{D}_LD_R) \\
&\quad - \frac{G_u}{\sqrt{2}}\nu_L(\bar{u}_Lu_R + \bar{u}_Ru_L) - \frac{G_U}{\sqrt{2}}\nu_R(\bar{U}_RU_L + \bar{U}_LU_R) \\
&\quad - \frac{G_\nu}{\sqrt{2}}\nu_L(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L) - \frac{G_N}{\sqrt{2}}\nu_R(\bar{N}_RN_L + \bar{N}_LN_R) \\
&\quad - \frac{G_{N\nu}}{\sqrt{2}}\omega_R(\bar{\nu}_RN_L + \bar{N}_L\nu_R)
\end{aligned}$$

4. Massa partikel lepton bermuatan dan quark generasi pertama pada Model Simetri Kiri-Kanan Minimal adalah

Jenis Partikel	Partikel	Massa Ringan	Massa Berat
Lepton	elektron (e)	$m_e = -\frac{G_e}{\sqrt{2}}\nu_L$	$m_E = -\frac{G_e}{\sqrt{2}}\nu_R$
Quark	up (u)	$m_u = -\frac{G_u}{\sqrt{2}}\nu_L$	$m_U = -\frac{G_u}{\sqrt{2}}\nu_R$
	down (d)	$m_d = -\frac{G_d}{\sqrt{2}}\nu_L$	$m_D = -\frac{G_d}{\sqrt{2}}\nu_R$

5. Massa neutrino yang dihasilkan dari mekanisme *seesaw* ada dua yaitu :

$$m_\nu = V_1^T \frac{G_N G_\nu^T \nu_R \nu_L}{G_{N\nu} \omega_R} V_1$$

$$m_N = V_3^T G_{N\nu} \omega_R V_3$$

m_ν bernilai sangat kecil karena diasumsikan $\nu_L \ll \nu_R \ll \omega_R$ dan ini menunjukkan massa neutrino yang ringan. Sedangkan m_N bernilai sangat besar dan menunjukkan massa neutrino masif yang mencapai 10^{14} GeV. Neutrino masif inilah yang diperkirakan menjadi kandidat dari materi gelap.

B. Saran

Skripsi ini terbatas dalam menyajikan massa kandidat materi gelap dalam Model Simetri Kiri-Kanan Minimal dan hanya pada partikel generasi pertama. Untuk pengembangan selanjutnya perlu juga di bahas massa kandidat materi gelap dalam model simetri yang lebih luas dan tidak hanya terbatas pada partikel generasi pertama.

This page intentionally left blank

DAFTAR PUSTAKA

- Adam, Apriadi Salam, Akmal Ferdian dan Mirza Satriawan. 2019. *A New Left-right Symmetry Model* . arXiv : 1903.03370v1[hep-ph]
- ATLAS Collaboration. 2012. *Observation of new particle in the search of the Standar Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*. Physics Letter B, Vol 716, Issue 1, 17 September 2012, pp. 1-29.
- Collins, P.D. B., dkk. 1889. *Particle Physics and Cosmology*. Inggris : John Wiley & Sons, Inc.
- Dev, P. S. B., R. N. Mohapatra dan Y. Zhang. 2016. *Naturally Stable Right-Handed Neutrino Dark Matter*. arXiv : 1608.06266v3 [hep-ph].
- Goncalves, Bernardo Lopes. 2017. *Higgs-Scale neutrino mass degeneracy in the two-Higgs doublet model*. Paper. Lisboa : Universidade de Lisboa.

Gorbunov, D.S. dan V.A. Rubakov. 2011. *Introduction To The Theory Of The Early Univers Hot Big Bang Theory*. British : World Scientifict Publising Co. Pte. Ltd.

Griffiths, David J. 2008. *Introduction to Elementary Particles*. Wheinheim : WILEY-VCH Verlag GmbH dan Co.KGaA.

Hanzel, F. dan Martin. 1984. *Quark and Lepton An Introduction Course in Modern Particle Physics*. Inggris : John Wiley & Sons, Inc.

Ilhamsyah, Helmi dan Fransiskus Fran. 2017. *Determinan dan Invers Matriks Blok 2x2*. Buletin Ilmiah Matematika Statistika dan Terapannya (Bimaster), Volume 06, No. 3.

Nath, Dipak. 2018. *The Darksness of Dark Matter and Dark Energy*. Iteratioal Jurnal of Engineering and Applied Sciences (IJEAS), Vol. 5, Issue 6, ISSN : 234 – 3661.

Panuluh, A. H. dan Mirza Striawan. 2016. *Pembangkitan Massa Neutrino dalam Model Korespondensi Spinor Skalar*. Risalah Fisika, Vol. 1, ISSN : 2548 - 9011.

- Pati, J. C. dan Abdus Salam. 1974. *Lepton Number As The Fourth "Color"*. Physics Review D, Volume 10, Issue 275.
- Rosyid, Muhammad Farchani. 2017. *Aljabar Abstrakdalam Fisika*. Yogyakarta : Gajah Mada University Press.
- Sari, Mona. 2018. *Perusakan Simetri Spontan dan Mekanisme Higgs dalam Teori Model Standar Fisika Patikel*. Diunduh di <https://www.researchgate.net/> tanggal 15 Desember 2019
- Sejanovic, Goran. 2016. *Is Left-Right Symmetry the Key?*. arXiv : 1610.04209v2 [hep-ph]
- Senjanovic, Goran dan Rabindra Mohapatra. 1975. *Exact Left-Right Symmetry and Spontaneous Violation of Parity*. Physics Review D, Volume 12, No. 275.
- Senjanovic, Goran dan Rabindra Mohapatra. 1979. *Neutrino Mass and Spontaneous Parity Nonconservation*. Physics Review Lettee, Volume 44, No. 14.

Setyadi, Chalis dan Mirza Striawan. 2017. *Pembangkitan Massa Partikel Pada Model Simetri Kiri-Kanan Alami Dengan Tambahan Bilangan Kuantum Global*. Yogyakarta : Pertemuan dan Presentasi Ilmiah Penelitian Dasar Ilmu Pengetahuan dan Teknologi Nuklir PSTA. Prosiding Jurnal, 28 November 2017. ISSN : 0216-3128.

Setyoko, A. T. 2019. *Teori Yang-Mills Kuaternionik*. Skripsi. Semarang : UIN Walisong.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah*. Volume 11. Jakarta : Lentera Hati.

Wijaya, Bundi Eko. 2012. *Massa Neutrino Setelah Perusakan Simetri GUT SU(6) Dimensi-5*. Depok : Universitas Indonesia.

LAMPIRAN A

Pembuktian Rumus di Bab II

Lampiran A.I

Pembuktian persamaan (2.4)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= ie^{i\theta(x)}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu(e^{-i\theta(x)}\psi(x)) - me^{i\theta(x)}\bar{\psi}(x)e^{-i\theta(x)}\psi(x) \\ &= i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) + \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\theta(x)\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \\ &= L + \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\theta(x)\psi(x) \\ &= L + j^\mu(x)\partial_\mu\theta(x)\end{aligned}$$

Lampiran A.II

Pembuktian persamaan (2.7)

$$\begin{aligned}D_\mu\psi(x) \rightarrow (D_\mu\psi(x))' &= D'_\mu\psi'(x) \\ &= (\partial_\mu - ieA'_\mu(x))(e^{-i\theta(x)}\psi(x)) \\ &= (\partial_\mu - ie(A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)))(e^{-i\theta(x)}\psi(x)) \\ &= (\partial_\mu - ieA_\mu(x) + i\partial_\mu\theta(x))e^{-i\theta(x)}\psi(x) \\ &= (\partial_\mu e^{-i\theta(x)}\psi(x)) - ieA_\mu(x)e^{-i\theta(x)}\psi(x) \\ &\quad + i(\partial_\mu\theta(x))e^{-i\theta(x)}\psi(x) \\ &= -ie^{-i\theta(x)}\psi(x)\partial_\mu\theta(x) + e^{-i\theta(x)}\partial_\mu\psi(x) \\ &\quad - ieA_\mu(x)e^{-i\theta(x)}\psi(x) + i(\partial_\mu\theta(x))e^{-i\theta(x)}\psi(x) \\ &= e^{-i\theta(x)}(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi(x) \\ &= e^{-i\theta(x)}(D_\mu\psi(x)) \equiv U(D_\mu\psi(x))\end{aligned}$$

Lampiran A.III

Pembuktian persamaan (2.8)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\bar{\psi}(x), D_\mu\psi(x), \psi(x)) &\rightarrow \mathcal{L}'(\bar{\psi}(x)', D'_\mu\psi'(x), \psi'(x)) \\
\mathcal{L}' &= i\bar{\psi}(x)' \gamma^\mu D'_\mu\psi'(x) - m\bar{\psi}(x)' \psi'(x) \\
&= ie^{i\theta(x)}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu e^{-i\theta(x)}D_\mu\psi(x) \\
&\quad - me^{i\theta(x)}\bar{\psi}(x)e^{-i\theta(x)}\psi(x) \\
&= ie^{i\theta(x)}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu e^{-i\theta(x)}(\partial_\mu - ie(A_\mu(x)))\psi(x) \\
&\quad - me^{i\theta(x)}\bar{\psi}(x)e^{-i\theta(x)}\psi(x) \\
&= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\
&= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + ej^\mu A_\mu
\end{aligned}$$

Lampiran A.IV

Pembuktian memperoleh transformasi \vec{A}'_μ menjadi \vec{A}_μ pada persamaan (2.17)

$$\begin{aligned}
D'_\mu\psi'(x) &= U(D_\mu\psi(x)) \\
(\partial_\mu - ig\mathbf{A}'_\mu)U\psi(x) &= U[(\partial_\mu - ig\mathbf{A}_\mu)\psi(x)] \\
(\partial_\mu U\psi(x)) - ig\mathbf{A}'_\mu U\psi(x) &= U(\partial_\mu\psi(x) - ig\mathbf{A}_\mu\psi(x)) \\
(\partial_\mu U)\psi(x) + U\partial_\mu\psi(x) - ig\mathbf{A}'_\mu U\psi(x) &= U\partial_\mu\psi(x) - ig_2U\mathbf{A}_\mu\psi(x)
\end{aligned}$$

Dengan mengalikan kedua ruas dengan U^{-1} dari kanan, persamaan menjadi :

$$\begin{aligned}
(\partial_\mu)U^{-1} - ig\mathbf{A}'_\mu UU^{-1} &= ig_2U\mathbf{A}_\mu U^{-1} \\
\mathbf{A}'_\mu &= U\mathbf{A}_\mu U^{-1} + \frac{1}{ig_2}(\partial_\mu U)U^{-1} \\
\mathbf{A}'_\mu &= U\mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g_2}(\partial_\mu U)U^{-1}
\end{aligned}$$

Lampiran A.V

Pembuktian memperoleh persamaan (2.19)

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}'_\mu &= U \mathbf{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g_2} (\partial_\mu U) U^{-1} \\
&= (1 - i\theta) \mathbf{A}_\mu (1 + i\theta) - \frac{i}{g_2} [\partial_\mu (1 - i\theta)] (1 + i\theta) \\
&= (\vec{A}_\mu - i\theta \vec{A}_\mu) (1 + i\theta) - \frac{i}{g_2} [(\partial_\mu (1) - i\partial_\mu \theta) (1 + i\theta)] \\
&= \mathbf{A}_\mu - i\theta \mathbf{A}_\mu + i\mathbf{A}_\mu \theta + \mathbf{A}_\mu \theta^2 - \frac{i}{g_2} [(-i\partial_\mu \theta) + (\theta \partial_\mu \theta)] \\
&= \mathbf{A}_\mu - i [\theta, \mathbf{A}_\mu] - \frac{1}{g_2} \partial_\mu \theta
\end{aligned}$$

Lampiran A.VI

Pembuktian memperoleh persamaan (2.21)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{A_\mu} &= -\frac{1}{2} Tr(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \\
&= -\frac{1}{2} Tr \left(\sum_{i,j=1}^3 \frac{\sigma^i}{2} F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^j}{2} F^{j\mu\nu} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (F_{\mu\nu}^i F^{j\mu\nu}) Tr \left(\frac{\sigma^i}{2} \frac{\sigma^j}{2} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (F_{\mu\nu}^i F^{j\mu\nu}) \left(\frac{1}{2} \delta^{ij} \right) \\
&= \sum_{i=1}^3 -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{j\mu\nu}
\end{aligned}$$

Lampiran A.VII

Pembuktian memperoleh persamaan (2.27)

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{\partial \left(\frac{1}{2}\mu^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \right)}{\partial \phi} &= 0 \\ \phi\mu^2 + \lambda\phi^3 &= 0 \\ \phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) &= 0 \\ \mu^2 + \lambda\nu^2 &= 0 \\ -\lambda\nu^2 &= \mu^2\end{aligned}$$

$$\text{dengan } \nu = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Lampiran A.VIII

Pembuktian hasil pers.(2.29)

$$\begin{aligned}V(\phi) &= \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \\ &= \frac{1}{2}\mu^2(\phi^\dagger\phi) + \frac{1}{4}\lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu^2 \begin{pmatrix} 0 & \nu + h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + h \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\lambda \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu + h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + h \end{pmatrix} \right]^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu^2(\nu + h)^2 + \frac{1}{4}\lambda(\nu + h)^4 \\ &= \frac{1}{2}\mu^2(\nu^2 + 2\nu h + h^2) + \frac{1}{4}\lambda(\nu^4 + 4\nu^3 h + 6\nu^2 h^2 + 4\nu h^3 + h^4) \\ &= \frac{1}{2}\mu^2\nu^2 + \mu^2\nu h + \frac{1}{2}\mu^2 h^2 + \frac{1}{4}\lambda\nu^4 + \lambda\nu^3 h + \frac{3}{2}\lambda\nu^2 h^2 + \lambda\nu h^3 + \frac{1}{4}\lambda h^4\end{aligned}$$

Lampiran A.IX

Pembuktian hasil pers.(2.30)

$$\begin{aligned}
V(\phi) &= \frac{1}{2}\mu^2\nu^2 + \mu^2\nu h + \frac{1}{2}\mu^2 h^2 + \frac{1}{4}\lambda\nu^4 + \lambda\nu^3 h + \frac{3}{2}\lambda\nu^2 h^2 \\
&\quad + \lambda\nu h^3 + \frac{1}{4}\lambda h^4 \\
&= \frac{1}{2}(-\lambda\nu^2)\nu^2 + (-\lambda\nu^2)\nu h + \frac{1}{2}(-\lambda\nu^2)h^2 + \frac{1}{4}\lambda\nu^4 + \lambda\nu^3 h \\
&\quad + \frac{3}{2}\lambda\nu^2 h^2 + \lambda\nu h^3 + \frac{1}{4}\lambda h^4 \\
&= -\frac{\lambda\nu^4}{2} - \lambda\nu^3 h - \frac{\lambda\nu^2 h^2}{2} + \frac{1}{4}\lambda\nu^4 + \lambda\nu^3 h + \frac{3}{2}\lambda\nu^2 h^2 \\
&\quad + \lambda\nu h^3 + \frac{1}{4}\lambda h^4 \\
&= -\frac{\lambda\nu^4}{2} + \lambda\nu^2 h^2 + \lambda\nu h^3 + \frac{1}{4}\lambda h^4
\end{aligned}$$

Lampiran A.X

Pembuktian hasil pers.(2.32)

Dari persamaan (2.29) diambil suku-suku yang mengandung h^2 :

$$\begin{aligned}
&h^2\left(\frac{1}{2}\mu^2 + \frac{3}{2}\lambda\nu^2\right) \\
\frac{1}{2}m^2 h^2 &= h^2\left(\frac{1}{2}\mu^2 + \frac{3}{2}\lambda\nu^2\right) \\
m_h^2 &= \mu^2 + 3\lambda\nu^2 \\
&= -\lambda\nu^2 + 3\lambda\nu^2 \\
&= 2\lambda\nu^2 \\
m_h &= \sqrt{2\lambda\nu^2}
\end{aligned}$$

LAMPIRAN B

Pembuktian Rumus di Bab III

Lampiran B.1

Pembuktian hasil pers.(3.14)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{K-G} &\supset \left| \left(\partial_\mu + ig\sigma_i W_\mu^i + ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &\supset \left| \left(\partial_\mu + ig\sigma_i W_\mu^i + ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &\supset \left| \left[\begin{pmatrix} \partial_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu \end{pmatrix} + i \frac{g}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + i \frac{g'}{2} \begin{pmatrix} B_\mu & 0 \\ 0 & B_\mu \end{pmatrix} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &\supset \left| \left[\begin{pmatrix} \partial_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} gW_\mu^3 + g'B_\mu & gW_\mu^1 - igW_\mu^2 \\ gW_\mu^1 + igW_\mu^2 & -gW_\mu^3 + g'B_\mu \end{pmatrix} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &\supset \left| \left[\begin{pmatrix} \partial_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} gW_\mu^3 + g'B_\mu & gW_\mu^1 - igW_\mu^2 \\ gW_\mu^1 + igW_\mu^2 & -gW_\mu^3 + g'B_\mu \end{pmatrix} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &\supset \frac{\nu^2}{8} \begin{pmatrix} gW^{1\mu} + igW^{2\mu} & -gW^{3\mu} + g'B^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} gW_\mu^1 - igW_\mu^2 \\ -gW_\mu^3 + g'B_\mu \end{pmatrix} \\
 &\supset \frac{\nu^2}{8} [(gW^{1\mu} + igW^{2\mu})(gW_\mu^1 - igW_\mu^2) \\
 &\quad + (-gW^{3\mu} + g'B^\mu)(-gW_\mu^3 + g'B_\mu)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\supset \frac{\nu^2}{8} [(g^2 W^{1\mu} W_\mu^1 - ig^2 W^{1\mu} W_\mu^2 + ig^2 W^{2\mu} W_\mu^1 + g^2 W^{2\mu} W_\mu^2) \\
&\quad + (g^2 W^{3\mu} W_\mu^3 - gg' W^{3\mu} B_\mu - gg' B^\mu W_\mu^3 + g'^2 B^\mu B_\mu)] \\
&\supset \frac{\nu^2}{8} (g^2 [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2] + [g^2 W^{3\mu} W_\mu^3 - 2gg' W^{3\mu} B_\mu + g'^2 B^\mu B_\mu])
\end{aligned}$$

Lampiran B.II

Pembuktian hasil pers.(3.16)

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (gW_\mu^1 - igW_\mu^2)\nu \\ (-gW_\mu^3 + g'B_\mu)\nu \end{pmatrix} \right|^2 \\
&= \frac{\nu^2}{8} (g^2 [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2] + [g^2 W^{3\mu} W_\mu^3 - 2gg' W^{3\mu} B_\mu + g'^2 B^\mu B_\mu]) \\
&= \frac{\nu^2 g^2}{8} [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2] \\
&\quad + \frac{\nu^2}{8} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} \\
&= \frac{\nu^2 g^2}{8} [2(W_\mu^+ W_\mu^-)] + \frac{\nu^2}{8} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} \\
&= \frac{\nu^2 g^2}{4} (W_\mu^+ W_\mu^-) + \frac{\nu^2}{8} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{g\nu}{2}\right)^2 (W_\mu^+ W_\mu^-) + \frac{\nu^2}{8} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Lampiran B.III

Pembuktian hasil pers.(3.21)

$$\begin{aligned}
S^\dagger MS &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & -g' \\ g' & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & g' \\ -g' & g \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{g^2 + g'^2} \begin{pmatrix} g & -g' \\ g' & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^3 + gg'^2 & g^2g' - g^2g' \\ -g^2g' - g'^3 & -gg'^2 + gg'^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{g^2 + g'^2} \begin{pmatrix} g & -g' \\ g' & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^3 + gg'^2 & 0 \\ -g^2g' - g'^3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{g^2 + g'^2} \begin{pmatrix} g^4 + g^2g'^2 + g^2g'^2 + g'^4 & 0 \\ g^3g' + gg'^3 - g^3g' - gg'^3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{g^2 + g'^2} \begin{pmatrix} g^4 + g^2g'^2 + g^2g'^2 + g'^4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{g^2 + g'^2} \begin{pmatrix} (g^2 + g'^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Lampiran B.IV

Pembuktian hasil pers.(3.22)

$$\begin{aligned}
& \frac{\nu^2}{8} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} \\
&= \frac{\nu^2}{8} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} SS^\dagger MSS^\dagger \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} \\
&= \frac{\nu^2}{8} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & g' \\ -g' & g \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & -g' \\ g' & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} \\
&= \frac{\nu^2}{8(g^2 + g'^2)} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & g' \\ -g' & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} g & -g' \\ g' & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} \\
&= \frac{\nu^2}{8(g^2 + g'^2)} \begin{pmatrix} gW_\mu^3 - g'B_\mu & g'W_\mu^3 + gB_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} gW^{3\mu} - g'B^\mu \\ g'W^{3\mu} + gB^\mu \end{pmatrix} \\
&= \frac{\nu^2}{8} \begin{pmatrix} Z_\mu & A_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} \\
&= \frac{\nu^2}{8} [(g^2 + g'^2)Z_\mu Z^\mu + 0A_\mu A^\mu]
\end{aligned}$$

Lampiran B.V

Pembuktian hasil pers.(3.27)

$$\begin{aligned}
Z_\mu &= \frac{gW_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \\
&= \frac{gW_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}} - \frac{g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \\
&= \cos\theta_W W_\mu^3 - \sin\theta_W B_\mu \\
A_\mu &= \frac{g'W_\mu^3 + gB_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \\
&= \frac{g'W_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}} + \frac{gB_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \\
&= \sin\theta_W W_\mu^3 + \cos\theta_W B_\mu
\end{aligned}$$

Lampiran B.VI

Pembuktian hasil pers.(3.32)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y &= -G_d \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} d_R - G_u \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \bar{\phi}^0 \\ \phi^- \end{pmatrix} u_R + h.c \\
&= -G_d \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix}_L \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + h \end{pmatrix} d_R \\
&\quad - G_d \bar{d}_R \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \nu + h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \\
&\quad - G_u \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix}_L \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \nu + h \\ 0 \end{pmatrix} u_R \\
&\quad - G_u \bar{u}_R \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \nu + h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{G_d}{\sqrt{2}}\bar{d}_L(\nu+h)d_R - \frac{G_d}{\sqrt{2}}\bar{d}_R(\nu+h)d_L \\
&\quad - \frac{G_u}{\sqrt{2}}\bar{u}_L(\nu+h)u_R - \frac{G_u}{\sqrt{2}}\bar{u}_R(\nu+h)u_L \\
&= -\frac{G_d}{\sqrt{2}}\nu(\bar{d}_Ld_R + \bar{d}_Rd_L) - \frac{G_d}{\sqrt{2}}h(\bar{d}_Ld_R + \bar{d}_Rd_L) \\
&\quad - \frac{G_u}{\sqrt{2}}\nu_L(\bar{u}_Lu_R + \bar{u}_Ru_L) - \frac{G_u}{\sqrt{2}}h(\bar{u}_Lu_R + \bar{u}_Ru_L)
\end{aligned}$$

Lampiran B.VII

Pembuktian hasil pers.(3.37)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{D+M} &= -m_D(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L) - \frac{1}{2}m_M^L(\bar{\nu}_L\nu_L^c \\
&\quad + \bar{\nu}_L^c\nu_L) - \frac{1}{2}m_M^R(\bar{\nu}_R\nu_R^c + \bar{\nu}_R^c\nu_R) + h.c \\
&= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_R^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + h.c \\
&= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_R^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L^c & \bar{\nu}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_R^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}\nu_L^c & a_{12}\nu_R \\ a_{21}\nu_L^c & a_{22}\nu_R \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L^c & \bar{\nu}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}\nu_L & a_{12}\nu_R^c \\ a_{21}\nu_L & a_{22}\nu_R^c \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11}\nu_L^c \bar{\nu}_L & a_{12}\nu_R \bar{\nu}_L \\ a_{21}\nu_L^c \bar{\nu}_R^c & a_{22}\nu_R \bar{\nu}_R^c \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11}\nu_L \bar{\nu}_L^c & a_{12}\nu_R^c \bar{\nu}_L^c \\ a_{21}\nu_L \bar{\nu}_R & a_{22}\nu_R^c \bar{\nu}_R \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11}(\nu_L^c \bar{\nu}_L + \nu_L \bar{\nu}_L^c) & a_{12}(\nu_R \bar{\nu}_L + \nu_R^c \bar{\nu}_L^c) \\ a_{21}(\nu_L^c \bar{\nu}_R^c + \nu_L \bar{\nu}_R) & a_{22}(\nu_R \bar{\nu}_R^c + \nu_R^c \bar{\nu}_R) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Persamaan diatas dibandingkan dengan persamaan (3.36), maka akan didapatkan :

$$a_{11} = m_M^L, \quad a_{12} = m_D, \quad a_{21} = m_D, \quad a_{22} = m_M^R$$

sehingga didapatkan matriks M persamaan (3.38) sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
M &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m_M^L & m_D \\ m_D & m_M^R \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Lampiran B.VIII

Pembuktian hasil pers.(3.42)

$$\begin{aligned}
&\det |M - mI| = 0 \\
&\det \begin{pmatrix} 0 - m & m_D \\ m_D & M_R - m \end{pmatrix} = 0 \\
&-m(M_R - m) - m_D^2 = 0 \\
&m^2 - M_R m - m_D^2 = 0
\end{aligned}$$

Swanilai didapat dengan menggunakan rumus abc berikut :

$$\begin{aligned}
 m_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{-(-M_R) \pm \sqrt{(-M_R)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m_D^2}}{2 \cdot 1} \\
 &= \frac{M_R \pm \sqrt{M_R^2 + 4m_D^2}}{2}
 \end{aligned}$$

Lampiran B.IX

Pembuktian hasil pers.(3.43)

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \frac{1}{2}M_R + \frac{1}{2}\sqrt{M_R^2 + 4m_D^2} \\
 &= \frac{1}{2}M_R + \frac{1}{2}\sqrt{M_R^2 \left(1 + \frac{4m_D^2}{M_R^2}\right)} \\
 &= \frac{1}{2}M_R + \frac{1}{2}M_R\sqrt{1 + \frac{4m_D^2}{M_R^2}} \\
 &\approx \frac{1}{2}M_R + \frac{1}{2}M_R \left(1 + \frac{2m_D^2}{M_R^2} + \dots\right) \\
 &\approx \frac{1}{2}M_R + \frac{1}{2}M_R + \frac{m_D^2}{M_R} \\
 &\approx M_R + \frac{m_D^2}{M_R} \\
 &\approx M_R
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_2 &= \frac{1}{2}M_R - \frac{1}{2}\sqrt{M_R^2 + 4m_D^2} \\
&= \frac{1}{2}M_R - \frac{1}{2}\sqrt{M_R^2 \left(1 + \frac{4m_D^2}{M_R^2}\right)} \\
&= \frac{1}{2}M_R - \frac{1}{2}M_R\sqrt{1 + \frac{4m_D^2}{M_R^2}} \\
&\approx \frac{1}{2}M_R + \frac{1}{2}M_R \left(1 + \frac{2m_D^2}{M_R^2} + \dots\right) \\
&\approx \frac{1}{2}M_R - \frac{1}{2}M_R - \frac{m_D^2}{M_R} \\
&\approx -\frac{m_D^2}{M_R}
\end{aligned}$$

LAMPIRAN C

Pembuktian Rumus di Bab IV

Lampiran C.I

Pembuktian hasil pers. (4.6)

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \\
 &= \frac{1}{2}\mu_1^2(\phi_L^\dagger\phi_L) + \frac{1}{2}\mu_2^2(\phi_R^\dagger\phi_R) + \frac{1}{2}\mu_3^2(\Delta_L^\dagger\Delta_L) + \frac{1}{2}\mu_4^2(\Delta_R^\dagger\Delta_R) \\
 &\quad + \frac{1}{4}\lambda_1(\phi_L^\dagger\phi_L)^2 + \frac{1}{4}\lambda_2(\phi_R^\dagger\phi_R)^2 + \frac{1}{4}\lambda_3(\Delta_L^\dagger\Delta_L)^2 + \frac{1}{4}\lambda_4(\Delta_R^\dagger\Delta_R)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{4}\lambda_5(\phi_L^\dagger\phi_L\phi_R^\dagger\phi_R) + \frac{1}{4}\lambda_6(\Delta_L^\dagger\Delta_L\Delta_R^\dagger\Delta_R) + \frac{1}{4}\lambda_7(\phi_L^\dagger\phi_L\Delta_L^\dagger\Delta_L) \\
 &\quad + \frac{1}{4}\lambda_8(\phi_L^\dagger\phi_L\Delta_R^\dagger\Delta_R) + \frac{1}{4}\lambda_9(\phi_R^\dagger\phi_R\Delta_L^\dagger\Delta_L) + \frac{1}{4}\lambda_{10}(\phi_R^\dagger\phi_R\Delta_R^\dagger\Delta_R) \\
 &\quad + \frac{1}{4}\lambda_{11}(\phi_L^\dagger\Delta_L\Delta_L^\dagger\phi_L) + \frac{1}{4}\lambda_{12}(\phi_R^\dagger\Delta_R\Delta_R^\dagger\phi_R) + \frac{1}{4}\lambda_{13}(\phi_L^\dagger\Delta_R\Delta_R^\dagger\phi_L) \\
 &\quad + \frac{1}{4}\lambda_{14}(\phi_R^\dagger\Delta_R\Delta_R^\dagger\phi_R)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2}\mu_1^2(\phi_L^\dagger\phi_L) + \frac{1}{2}\mu_2^2(\phi_R^\dagger\phi_R) + \frac{1}{2}\mu_3^2(\Delta_L^\dagger\Delta_L) + \frac{1}{2}\mu_4^2(\Delta_R^\dagger\Delta_R) \\
 &\quad + \frac{1}{4}\lambda_1(\phi_L^\dagger\phi_L)^2 + \frac{1}{4}\lambda_2(\phi_R^\dagger\phi_R)^2 + \frac{1}{4}\lambda_3(\Delta_L^\dagger\Delta_L)^2 + \frac{1}{4}\lambda_4(\Delta_R^\dagger\Delta_R)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{4}\lambda_5(\phi_L^\dagger\phi_L\phi_R^\dagger\phi_R) + \frac{1}{4}\lambda_6(\Delta_L^\dagger\Delta_L\Delta_R^\dagger\Delta_R) + \frac{1}{4}\lambda_7(\phi_L^\dagger\phi_L\Delta_L^\dagger\Delta_L) \\
 &\quad + \frac{1}{4}\lambda_8(\phi_L^\dagger\phi_L\Delta_R^\dagger\Delta_R) + \frac{1}{4}\lambda_9(\phi_R^\dagger\phi_R\Delta_L^\dagger\Delta_L) + \frac{1}{4}\lambda_{10}(\phi_R^\dagger\phi_R\Delta_R^\dagger\Delta_R) \\
 &\quad + \frac{1}{4}\lambda_{11}(\phi_L^\dagger\Delta_L\Delta_L^\dagger\phi_L) + \frac{1}{4}\lambda_{12}(\phi_R^\dagger\Delta_R\Delta_R^\dagger\phi_R) + \frac{1}{4}\lambda_{13}(\phi_L^\dagger\Delta_R\Delta_R^\dagger\phi_L) \\
 &\quad + \frac{1}{4}\lambda_{14}(\phi_R^\dagger\Delta_R\Delta_R^\dagger\phi_R)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\mu_1^2 \begin{pmatrix} 0 & \nu_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_L \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\mu_2^2 \begin{pmatrix} 0 & \nu_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_R \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{2}\mu_3^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\mu_4^2 \begin{pmatrix} 0 & \omega_R \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_R & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{4}\lambda_1 \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_L \end{pmatrix} \right]^2 + \frac{1}{4}\lambda_2 \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_R \end{pmatrix} \right]^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}\lambda_3 \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]^2 + \frac{1}{4}\lambda_4 \left[\begin{pmatrix} 0 & \omega_R \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_R & 0 \end{pmatrix} \right]^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}\lambda_5 \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \nu_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_R \end{pmatrix} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4}\lambda_6 \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_R \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_R & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4}\lambda_7 \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4}\lambda_8 \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_R \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_R & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4}\lambda_9 \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4}\lambda_{10} \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_R \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_R & 0 \end{pmatrix} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4}\lambda_{11} \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_L \end{pmatrix} \right] \\
& + \frac{1}{4}\lambda_{12} \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_R \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_L \end{pmatrix} \right] \\
& + \frac{1}{4}\lambda_{13} \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_R \end{pmatrix} \right] \\
& + \frac{1}{4}\lambda_{14} \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_R \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_R \end{pmatrix} \right] \\
= & \frac{1}{2}\mu_1^2\nu_L^2 + \frac{1}{2}\mu_2^2\nu_R^2 + \frac{1}{2}\mu_3^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\mu_4^2 \begin{pmatrix} \omega_R^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2}\lambda_1\nu_L^4 + \frac{1}{2}\lambda_2\nu_R^4 + \frac{1}{2}\lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\lambda_4^2 \begin{pmatrix} \omega_R^4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2}\lambda_5^2\nu_L^2\nu_R^2 + \frac{1}{2}\lambda_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\lambda_7 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\lambda_8 \begin{pmatrix} \nu_L^2\omega_R^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2}\lambda_9 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\lambda_{10} \begin{pmatrix} \nu_R^2\omega_R^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\lambda_{12}\nu_L^2\omega_R^2 + \frac{1}{2}\lambda_{14}\nu_R^2\omega_R^2 \\
= & \frac{1}{2}\mu_1^2\nu_L^2 + \frac{1}{2}\mu_2^2\nu_R^2 + \frac{1}{2}\mu_4^2\omega_R^2 + \frac{1}{2}\lambda_1\nu_L^4 + \frac{1}{2}\lambda_2\nu_R^4 + \frac{1}{2}\lambda_4^2\omega_R^4 \\
& + \frac{1}{2}\lambda_5^2\nu_L^2\nu_R^2 + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12})\nu_L^2\omega_R^2 + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\nu_R^2\omega_R^2
\end{aligned}$$

Lampiran C.II

Pembuktian hasil nilai VEV boson Higgs

- Pembuktian persamaan (4.8)

Turunan potensial terhadap ϕ_L :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \nu_L} &= 0 \\ \mu_1^2 \nu_L + \lambda_1 \nu_L^3 + \frac{1}{2} \lambda_5 \nu_L \nu_R^2 + \frac{1}{2} (\lambda_8 + \lambda_{12}) \nu_L \omega_R^2 &= 0 \\ \nu_L (\mu_1^2 + \lambda_1 \nu_L^2 + \frac{1}{2} \lambda_5 \nu_R^2 + \frac{1}{2} (\lambda_8 + \lambda_{12}) \omega_R^2) &= 0 \\ \mu_1^2 + \lambda_1 \nu_L^2 + \frac{1}{2} \lambda_5 \nu_R^2 + \frac{1}{2} (\lambda_8 + \lambda_{12}) \omega_R^2 &= 0 \\ -\mu_1^2 - \frac{1}{2} \lambda_5 \nu_R^2 - \frac{1}{2} (\lambda_8 + \lambda_{12}) \omega_R^2 &= \lambda_1 \nu_L^2 \\ -(\mu_1^2 + \frac{1}{2} \lambda_5 \nu_R^2 + \frac{1}{2} (\lambda_8 + \lambda_{12}) \omega_R^2) &= \lambda_1 \nu_L^2 \\ \frac{-(\mu_1^2 + \frac{1}{2} \lambda_5 \nu_R^2 + \frac{1}{2} (\lambda_8 + \lambda_{12}) \omega_R^2)}{\lambda_1} &= \nu_L^2 \\ \sqrt{\frac{-(\mu_1^2 + \frac{1}{2} \lambda_5 \nu_R^2 + \frac{1}{2} (\lambda_8 + \lambda_{12}) \omega_R^2)}{\lambda_1}} &= \nu_L \end{aligned}$$

- Pembuktian persamaan (4.9)

Turunan potensial terhadap ϕ_R :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \nu_R} &= 0 \\ \mu_2^2 \nu_R + \lambda_2 \nu_R^3 + \frac{1}{2} \lambda_5 \nu_R \nu_L^2 + \frac{1}{2} \lambda_{10} \nu_R \omega_R^2 &= 0 \\ \nu_R (\mu_2^2 + \lambda_2 \nu_R^2 + \frac{1}{2} \lambda_5 \nu_L^2 + \frac{1}{2} (\lambda_{10} + \lambda_{14}) \omega_R^2) &= 0 \\ \mu_2^2 + \lambda_2 \nu_R^2 + \frac{1}{2} \lambda_5 \nu_L^2 + \frac{1}{2} (\lambda_{10} + \lambda_{14}) \omega_R^2 &= 0 \\ -\mu_2^2 - \frac{1}{2} \lambda_5 \nu_L^2 - \frac{1}{2} (\lambda_{10} + \lambda_{14}) \omega_R^2 &= \lambda_2 \nu_R^2 \\ -(\mu_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_5 \nu_L^2 + \frac{1}{2} (\lambda_{10} + \lambda_{14}) \omega_R^2) &= \lambda_2 \nu_R^2 \\ \frac{-(\mu_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_5 \nu_L^2 + \frac{1}{2} (\lambda_{10} + \lambda_{14}) \omega_R^2)}{\lambda_2} &= \nu_R^2 \\ \sqrt{\frac{-(\mu_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_5 \nu_L^2 + \frac{1}{2} (\lambda_{10} + \lambda_{14}) \omega_R^2)}{\lambda_2}} &= \nu_R \end{aligned}$$

- Pembuktian persamaan (4.10)

Turunan potensial terhadap Δ_L :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \Delta_L} &= 0 \\ \omega_L &= 0 \end{aligned}$$

- Pembuktian persamaan (4.11)

Turunan potensial terhadap Δ_R :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \Delta_R} &= 0 \\ \mu_4^2 \omega_R + \lambda_4 \omega_R^3 + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12}) \nu_L^2 \omega_R + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14}) \nu_R^2 \omega_R &= 0 \\ \omega_R (\mu_4^2 + \lambda_4 \omega_R^2 + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12}) \nu_L^2 + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14}) \nu_R^2) &= 0 \\ \mu_4^2 + \lambda_4 \omega_R^2 + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12}) \nu_L^2 + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14}) \nu_R^2 &= 0 \\ -(\mu_4^2 + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12}) \nu_L^2 + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14}) \nu_R^2) &= \lambda_4 \omega_R^2 \\ \frac{-(\mu_4^2 + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12}) \nu_L^2 + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14}) \nu_R^2)}{\lambda_4} &= \omega_R^2 \\ \sqrt{\frac{-(\mu_4^2 + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12}) \nu_L^2 + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14}) \nu_R^2)}{\lambda_4}} &= \omega_R \end{aligned}$$

Lampiran C.III

Pembuktian persamaan (4.16)

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \\ &= \frac{1}{2} \mu_1^2 (\phi_L^\dagger \phi_L) + \frac{1}{2} \mu_2^2 (\phi_R^\dagger \phi_R) + \frac{1}{2} \mu_3^2 (\Delta_L^\dagger \Delta_L) + \frac{1}{2} \mu_4^2 (\Delta_R^\dagger \Delta_R) \\ &\quad + \frac{1}{4} \lambda_1 (\phi_L^\dagger \phi_L)^2 + \frac{1}{4} \lambda_2 (\phi_R^\dagger \phi_R)^2 + \frac{1}{4} \lambda_3 (\Delta_L^\dagger \Delta_L)^2 + \frac{1}{4} \lambda_4 (\Delta_R^\dagger \Delta_R)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \lambda_5 (\phi_L^\dagger \phi_L \phi_R^\dagger \phi_R) + \frac{1}{4} \lambda_6 (\Delta_L^\dagger \Delta_L \Delta_R^\dagger \Delta_R) + \frac{1}{4} \lambda_7 (\phi_L^\dagger \phi_L \Delta_L^\dagger \Delta_L) \\ &\quad + \frac{1}{4} \lambda_8 (\phi_L^\dagger \phi_L \Delta_R^\dagger \Delta_R) + \frac{1}{4} \lambda_9 (\phi_R^\dagger \phi_R \Delta_L^\dagger \Delta_L) + \frac{1}{4} \lambda_{10} (\phi_R^\dagger \phi_R \Delta_R^\dagger \Delta_R) \\ &\quad + \frac{1}{4} \lambda_{11} (\phi_L^\dagger \Delta_L \Delta_L^\dagger \phi_L) + \frac{1}{4} \lambda_{12} (\phi_R^\dagger \Delta_L \Delta_L^\dagger \phi_R) + \frac{1}{4} \lambda_{13} (\phi_L^\dagger \Delta_R \Delta_R^\dagger \phi_L) \\ &\quad + \frac{1}{4} \lambda_{14} (\phi_R^\dagger \Delta_R \Delta_R^\dagger \phi_R) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\mu_1^2 \begin{pmatrix} 0 & \nu_L + h_{\phi_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_L + h_{\phi_L} \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{2}\mu_2^2 \begin{pmatrix} 0 & \nu_R + h_{\phi_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_R + h_{\phi_R} \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{2}\mu_3^2 \begin{pmatrix} 0 & h_{\Delta_L} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{\Delta_L} & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{2}\mu_4^2 \begin{pmatrix} 0 & \omega_R + h_{\Delta_R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_R + h_{\Delta_R} & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{4}\lambda_1 \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_L + h_{\phi_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_L + h_{\phi_L} \end{pmatrix} \right]^2 \\
&+ \frac{1}{4}\lambda_2 \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_R + h_{\phi_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_R + h_{\phi_R} \end{pmatrix} \right]^2 \\
&+ \frac{1}{4}\lambda_3 \left[\begin{pmatrix} 0 & h_{\Delta_L} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{\Delta_L} & 0 \end{pmatrix} \right]^2 \\
&+ \frac{1}{4}\lambda_4 \left[\begin{pmatrix} 0 & \omega_R + h_{\Delta_R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_R + h_{\Delta_R} & 0 \end{pmatrix} \right]^2 \\
&+ \frac{1}{4}\lambda_5 \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_L + h_{\phi_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_L + h_{\phi_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \nu_R + h_{\phi_R} \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_R + h_{\phi_R} \end{pmatrix} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \lambda_6 \left[\begin{pmatrix} 0 & h_{\Delta_L} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{\Delta_L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_R + h_{\Delta_R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
& \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_R + h_{\Delta_R} & 0 \end{pmatrix} \right] \\
& + \frac{1}{4} \lambda_7 \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_L + h_{\phi_L} \\ 0 & \nu_L + h_{\phi_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_L + h_{\phi_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & h_{\Delta_L} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{\Delta_L} & 0 \end{pmatrix} \right] \\
& + \frac{1}{4} \lambda_8 \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_L + h_{\phi_L} \\ 0 & \nu_L + h_{\phi_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_L + h_{\phi_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_R + h_{\Delta_R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
& \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_R + h_{\Delta_R} & 0 \end{pmatrix} \right] \\
& + \frac{1}{4} \lambda_9 \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_R + h_{\phi_R} \\ 0 & \nu_R + h_{\phi_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_R + h_{\phi_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & h_{\Delta_L} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{\Delta_L} & 0 \end{pmatrix} \right] \\
& + \frac{1}{4} \lambda_{10} \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_R + h_{\phi_R} \\ 0 & \nu_R + h_{\phi_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_R + h_{\phi_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_R + h_{\Delta_R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
& \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_R + h_{\Delta_R} & 0 \end{pmatrix} \right] \\
& + \frac{1}{4} \lambda_{11} \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_L + h_{\phi_L} \\ 0 & \nu_L + h_{\phi_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{\Delta_L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & h_{\Delta_L} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_L + h_{\phi_L} \end{pmatrix} \right] \\
& + \frac{1}{4} \lambda_{12} \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_L + h_{\phi_L} \\ 0 & \nu_L + h_{\phi_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_R + h_{\Delta_R} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_R + h_{\Delta_R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
& \left. \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_L + h_{\phi_L} \end{pmatrix} \right] \\
& + \frac{1}{4} \lambda_{13} \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_R + h_{\phi_R} \\ 0 & \nu_R + h_{\phi_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{\Delta_L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & h_{\Delta_L} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
& \left. \begin{pmatrix} 0 & \omega_R + h_{\Delta_R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4}\lambda_{14} \left[\begin{pmatrix} 0 & \nu_R + h_{\phi_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_R + h_{\Delta_R} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_R + h_{\Delta_R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
& \left. \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_R + h_{\phi_R} \end{pmatrix} \right] \\
= & \frac{1}{2}\mu_1^2(\nu_L + h_{\phi_L})^2 + \frac{1}{2}\mu_2^2(\nu_R + h_{\phi_R})^2 + \frac{1}{2}\mu_3^2 \begin{pmatrix} h_{\Delta_L}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2}\mu_4^2 \begin{pmatrix} [\omega_R + h_{\Delta_R}]^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\lambda_1(\nu_L + h_{\phi_L})^4 + \frac{1}{2}\lambda_2(\nu_R + h_{\phi_R})^4 \\
& + \frac{1}{2}\lambda_3 \begin{pmatrix} h_{\Delta_L}^4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\lambda_4^2 \begin{pmatrix} [\omega_R + h_{\Delta_R}]^4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2}\lambda_5^2(\nu_L + h_{\phi_L})^2(\nu_R + h_{\phi_R})^2 \\
& + \frac{1}{2}\lambda_6 \begin{pmatrix} h_{\Delta_L}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\omega_R + h_{\Delta_R}]^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2}\lambda_7(\nu_L + h_{\phi_L})^2 \begin{pmatrix} h_{\Delta_L}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2}\lambda_8(\nu_L + h_{\phi_L})^2 \begin{pmatrix} [\omega_R + h_{\Delta_R}]^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2}\lambda_9(\nu_R + h_{\phi_R})^2 \begin{pmatrix} h_{\Delta_L}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2}\lambda_{10}(\nu_R + h_{\phi_R})^2 \begin{pmatrix} [\omega_R + h_{\Delta_R}]^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2}\lambda_{11}(\nu_L + h_{\phi_L})^2 \begin{pmatrix} h_{\Delta_L}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2}\lambda_{12}(\nu_L + h_{\phi_L})^2 \begin{pmatrix} [\omega_R + h_{\Delta_R}]^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \lambda_{13} (\nu_R + h_{\phi_R})^2 \begin{pmatrix} h_{\Delta_L}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2} \lambda_{14} (\nu_R + h_{\phi_R})^2 \begin{pmatrix} [\omega_R + h_{\Delta_R}]^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
= & \frac{1}{2} \mu_1^2 (\nu_L^2 + 2\nu_L h_{\phi_L} + h_{\phi_L}^2) + \frac{1}{2} \mu_2^2 (\nu_R^2 + 2\nu_R h_{\phi_R} + h_{\phi_R}^2) \\
& + \frac{1}{2} \mu_3^2 h_{\Delta_L}^2 + \frac{1}{2} \mu_4^2 (\omega_R^2 + 2\omega_R h_{\Delta_R} + h_{\Delta_R}^2) \\
& + \frac{1}{4} \lambda_1 (\nu_L^4 + 4\nu_L^3 h_{\phi_L} + 6\nu_L^2 h_{\phi_L}^2 + 4\nu_L h_{\phi_L}^3 + h_{\phi_L}^4) \\
& + \frac{1}{4} \lambda_2 (\nu_R^4 + 4\nu_R^3 h_{\phi_R} + 6\nu_R^2 h_{\phi_R}^2 + 4\nu_R h_{\phi_R}^3 + h_{\phi_R}^4) + \frac{1}{4} \lambda_3 h_{\Delta_L}^2 \\
& + \frac{1}{4} \lambda_4 (\omega_R^4 + 4\omega_R^3 h_{\Delta_R} + 6\omega_R^2 h_{\Delta_R}^2 + 4\omega_R h_{\Delta_R}^3 + h_{\Delta_R}^4) \\
& + \frac{1}{4} \lambda_5 (\nu_L^2 \nu_R^2 + 2\nu_L^2 \nu_R h_{\phi_R} + \nu_L^2 h_{\phi_R}^2 + 2\nu_L \nu_R^2 h_{\phi_L} + 4\nu_L \nu_R h_{\phi_L} h_{\phi_R} \\
& + 2\nu_L h_{\phi_L} h_{\phi_R}^2 + \nu_R^2 h_{\phi_L}^2 + 2\nu_R h_{\phi_R} h_{\phi_L}^2 + h_{\phi_L}^2 h_{\phi_R}^2) \\
& + \frac{1}{4} \lambda_6 (\omega_R^2 h_{\Delta_L}^2 + 2\omega_R h_{\Delta_R} h_{\Delta_L}^2 + h_{\Delta_R}^2 h_{\Delta_L}^2) \\
& + \frac{1}{4} (\lambda_7 + \lambda_{11}) (\nu_L^2 h_{\Delta_L}^2 + 2\nu_L h_{\phi_L} h_{\Delta_L}^2 + h_{\phi_L}^2 h_{\Delta_L}^2) \\
& + \frac{1}{4} (\lambda_8 + \lambda_{12}) (\nu_L^2 \omega_R^2 + 2\nu_L^2 \omega_R h_{\Delta_R} + \nu_L^2 h_{\Delta_R}^2 + 2\nu_L \omega_R^2 h_{\phi_L} \\
& + 4\nu_L \omega_R h_{\phi_L} h_{\Delta_R} + 2\nu_L h_{\phi_L} h_{\Delta_R}^2 + \omega_R^2 h_{\phi_L}^2 + 2\omega_R h_{\Delta_R} h_{\phi_L}^2 + h_{\phi_L}^2 h_{\Delta_R}^2) \\
& + \frac{1}{4} (\lambda_9 + \lambda_{13}) (\nu_R^2 h_{\Delta_L}^2 + 2\nu_R h_{\phi_R} h_{\Delta_L}^2 + h_{\phi_R}^2 h_{\Delta_L}^2) \\
& + \frac{1}{4} (\lambda_{10} + \lambda_{14}) (\nu_R^2 \omega_R^2 + 2\nu_R^2 \omega_R h_{\Delta_R} + \nu_R^2 h_{\Delta_R}^2 + 2\nu_R \omega_R^2 h_{\phi_R} \\
& + 4\nu_R \omega_R h_{\phi_R} h_{\Delta_R} + 2\nu_R h_{\phi_R} h_{\Delta_R}^2 + \omega_R^2 h_{\phi_R}^2 + 2\omega_R h_{\Delta_R} h_{\phi_R}^2 + h_{\phi_R}^2 h_{\Delta_R}^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\mu_1^2\nu_L^2 + \mu_1^2\nu_L h_{\phi_L} + \frac{1}{2}\mu_1^2 h_{\phi_L}^2 + \frac{1}{2}\mu_2^2\nu_R^2 + \mu_2^2\nu_R h_{\phi_R} + \frac{1}{2}\mu_2^2 h_{\phi_R}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\mu_3^2 h_{\Delta_L}^2 + \frac{1}{2}\mu_4^2\omega_R^2 + \mu_4^2\omega_R h_{\Delta_R} + \frac{1}{2}\mu_4^2 h_{\Delta_R}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}\lambda_1\nu_L^4 + \lambda_1\nu_L^3 h_{\phi_L} + \frac{3}{2}\lambda_1\nu_L^2 h_{\phi_L}^2 + \lambda_1\nu_L h_{\phi_L}^3 + \frac{1}{4}\lambda_1 h_{\phi_L}^4 \\
&\quad + \frac{1}{4}\lambda_2\nu_R^4 + \lambda_2\nu_R^3 h_{\phi_R} + \frac{3}{2}\lambda_2\nu_R^2 h_{\phi_R}^2 + \lambda_2\nu_R h_{\phi_R}^3 + \frac{1}{4}\lambda_2 h_{\phi_R}^4 + \frac{1}{4}\lambda_3 h_{\Delta_L}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}\lambda_4\omega_R^4 + \lambda_4\omega_R^3 h_{\Delta_R} + \frac{3}{2}\lambda_4\omega_R^2 h_{\Delta_R}^2 + \lambda_4\omega_R h_{\Delta_R}^3 + \frac{1}{4}\lambda_4 h_{\Delta_R}^4 \\
&\quad + \frac{1}{4}\lambda_5\nu_L^2\nu_R^2 + \frac{1}{2}\lambda_5\nu_L^2\nu_R h_{\phi_R} + \frac{1}{4}\lambda_5\nu_L^2 h_{\phi_R}^2 + \frac{1}{2}\lambda_5\nu_L\nu_R^2 h_{\phi_L} \\
&\quad + \lambda_5\nu_L\nu_R h_{\phi_L} h_{\phi_R} + \frac{1}{2}\lambda_5\nu_L h_{\phi_L} h_{\phi_R}^2 + \frac{1}{4}\lambda_5\nu_R^2 h_{\phi_L}^2 + \frac{1}{2}\lambda_5\nu_R h_{\phi_R} h_{\phi_L}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}\lambda_5 h_{\phi_L}^2 h_{\phi_R}^2 + \frac{1}{4}\lambda_6\omega_R^2 h_{\Delta_L}^2 + \frac{1}{2}\lambda_6\omega_R h_{\Delta_R} h_{\Delta_L}^2 + \frac{1}{4}\lambda_6 h_{\Delta_R}^2 h_{\Delta_L}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}(\lambda_7 + \lambda_{11})\nu_L^2 h_{\Delta_L}^2 + \frac{1}{2}(\lambda_7 + \lambda_{11})\nu_L h_{\phi_L} h_{\Delta_L}^2 + \frac{1}{4}(\lambda_7 + \lambda_{11})h_{\phi_L}^2 h_{\Delta_L}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}(\lambda_8 + \lambda_{12})\nu_L^2\omega_R^2 + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12})\nu_L^2\omega_R h_{\Delta_R} + \frac{1}{4}(\lambda_8 + \lambda_{12})\nu_L^2 h_{\Delta_R}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12})\nu_L\omega_R^2 h_{\phi_L} + (\lambda_8 + \lambda_{12})\nu_L\omega_R h_{\phi_L} h_{\Delta_R} \\
&\quad + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12})\nu_L h_{\phi_L} h_{\Delta_R}^2 + \frac{1}{4}(\lambda_8 + \lambda_{12})\omega_R^2 h_{\phi_L}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12})\omega_R h_{\Delta_R} h_{\phi_L}^2 + \frac{1}{4}(\lambda_8 + \lambda_{12})h_{\phi_L}^2 h_{\Delta_R}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}(\lambda_9 + \lambda_{13})\nu_R^2 h_{\Delta_L}^2 + \frac{1}{2}(\lambda_9 + \lambda_{13})\nu_R h_{\phi_R} h_{\Delta_L}^2 + \frac{1}{4}(\lambda_9 + \lambda_{13})h_{\phi_L}^2 h_{\Delta_R}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\nu_R^2\omega_R^2 + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\nu_R^2\omega_R h_{\Delta_R} + \frac{1}{4}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\nu_R^2 h_{\Delta_R}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\nu_R\omega_R^2 h_{\phi_R} + (\lambda_{10} + \lambda_{14})\nu_R\omega_R h_{\phi_R} h_{\Delta_R} \\
&\quad + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\nu_R h_{\phi_R} h_{\Delta_R}^2 + \frac{1}{4}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\omega_R^2 h_{\phi_R}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\omega_R h_{\Delta_R} h_{\phi_R}^2 + \frac{1}{4}(\lambda_{10} + \lambda_{14})h_{\phi_R}^2 h_{\Delta_R}^2
\end{aligned}$$

Lampiran C.IV

Pembuktian massa medan skalar

- Pembuktian persamaan (4.21)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_{\phi_L}^2 h_{\phi_L}^2 &= h_{\phi_L}^2 \left[\frac{1}{2}\mu_1^2 + \frac{3}{2}\lambda_1\nu_L^2 + \frac{1}{4}\lambda_5\nu_R^2 + \frac{1}{4}(\lambda_8 + \lambda_{12})\omega_R^2 \right] \\ m_{\phi_L}^2 &= \mu_1^2 + 3\lambda_1\nu_L^2 + \frac{1}{2}\lambda_5\nu_R^2 + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12})\omega_R^2 \\ &= -\lambda_1\nu_L^2 + 3\lambda_1\nu_L^2 \\ &= 2\lambda_1\nu_L^2 \\ m_{\phi_L} &= \sqrt{2\lambda_1\nu_L^2}\end{aligned}$$

dengan

$$\mu_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_5\nu_R^2 + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12})\omega_R^2 = -\lambda_1\nu_L^2$$

- Pembuktian persamaan (4.22)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_{\phi_R}^2 h_{\phi_R}^2 &= h_{\phi_R}^2 \left[\frac{1}{2}\mu_2^2 + \frac{3}{2}\lambda_2\nu_R^2 + \frac{1}{4}\lambda_5\nu_L^2 + \frac{1}{4}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\omega_R^2 \right] \\ m_{\phi_R}^2 &= \mu_2^2 + 3\lambda_2\nu_R^2 + \frac{1}{2}\lambda_5\nu_L^2 + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\omega_R^2 \\ &= -\lambda_2\nu_R^2 + 3\lambda_2\nu_R^2 \\ &= 2\lambda_2\nu_R^2 \\ m_{\phi_R} &= \sqrt{2\lambda_2\nu_R^2}\end{aligned}$$

dengan

$$\mu_2^2 + 3\lambda_2\nu_R^2 + \frac{1}{2}\lambda_5\nu_L^2 + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\omega_R^2 = -\lambda_2\nu_R^2$$

- Pembuktian persamaan (4.23)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_{\Delta_L}^2 h_{\Delta_L}^2 &= h_{\Delta_L}^2 \left[\frac{1}{2}\mu_3^2 + \frac{1}{4}\lambda_6\omega_R^2 + \frac{1}{4}(\lambda_7 + \lambda_{11})\nu_L^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4}(\lambda_9 + \lambda_{13})\nu_R^2 \right] \\ m_{\Delta_L}^2 &= \mu_3^2 + \frac{1}{2}\lambda_6\omega_R^2 + \frac{1}{2}(\lambda_7 + \lambda_{11})\nu_L^2 + \frac{1}{2}(\lambda_9 + \lambda_{13})\nu_R^2 \\ m_{\Delta_L} &= \sqrt{\mu_3^2 + \frac{1}{2}\lambda_6\omega_R^2 + \frac{1}{2}(\lambda_7 + \lambda_{11})\nu_L^2 + \frac{1}{2}(\lambda_9 + \lambda_{13})\nu_R^2}\end{aligned}$$

- Pembuktian persamaan (4.24)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_{\Delta_R}^2 h_{\Delta_R}^2 &= h_{\Delta_R}^2 \left[\frac{1}{2}\mu_4^2 + \frac{3}{2}\lambda_4\omega_R^2 + \frac{1}{4}(\lambda_8 + \lambda_{12})\nu_L^2 + \frac{1}{4}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\nu_R^2 \right] \\ m_{\Delta_R}^2 &= \mu_4^2 + 3\lambda_4\omega_R^2 + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12})\nu_L^2 + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\nu_R^2 \\ &= 3\lambda_4\omega_R^2 - \lambda_4\omega_R^2 \\ &= 2\lambda_4\omega_R^2 \\ m_{\Delta_R} &= \sqrt{2\lambda_4\omega_R^2}\end{aligned}$$

dengan

$$\mu_4^2 + 3\lambda_4\omega_R^2 + \frac{1}{2}(\lambda_8 + \lambda_{12})\nu_L^2 + \frac{1}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{14})\nu_R^2 = -\lambda_4\omega_R^2$$

Lampiran C.V

Suku-suku yang muncul pada Lagrangian Yukawa model simetri kiri-kanan minimal

1. $\bar{l}_L \phi_L e_R = (2^*, 1^*, 1)(2, 1, 1)(1, 1, -2) = (1, 1, 0)$
2. $\bar{e}_R \phi_L^\dagger l_L = (1^*, 1^*, 2)(2^*, 1^*, -1)(2, 1, -1) = (1, 1, 0)$
3. $\bar{Q}_L \phi_L d_R = (2^*, 1^*, 1/3)(2, 1, 1)(1, 1, -2/3) = (1, 1, 0)$
4. $\bar{d}_R \phi_L^\dagger Q_L = ((1^*, 1^*, 2/3)(2^*, 1^*, -1)(2, 1, 1/3) = (1, 1, 0)$
5. $\bar{Q}_R \phi_R D_L = (1^*, 2^*, -1/3)(1, 2, 1)(1, 1, -2/3) = (1, 1, 0)$
6. $\bar{D}_L \phi_R^\dagger Q_R = (1^*, 2^*, 2/3)(1^*, 2^*, -1)(1, 2, 1/3) = (1, 1, 0)$
7. $\bar{l}_R \phi_R E_L = (1^*, 2^*, 1)(1, 2, 1)(1, 1, -2) = (1, 1, 0)$
8. $\bar{E}_L \phi_R^\dagger l_R = (1^*, 1^*, 2)(1^*, 2^*, -1)(1, 2, -1) = (1, 1, 0)$
9. $\bar{Q}_L \phi_L^c u_R = (2^*, 1^*, -1/3)(2, 1, -1)(1, 1, 4/3) = (1, 1, 0)$
10. $\bar{u}_R (\phi_L^c)^\dagger Q_L = (1^*, 1^*, -4/3)(2^*, 1^*, 1)(2, 1, 1/3) = (1, 1, 0)$
11. $\bar{l}_L \phi_L^c \nu_R = (2^*, 1^*, 1)(2, 1, -1)(1, 1, 0) = (1, 1, 0)$
12. $\bar{\nu}_R (\phi_L^c)^\dagger l_L = (1^*, 1^*, 0)(2^*, 1^*, 1)(2, 1, -1) = (1, 1, 0)$
13. $\bar{Q}_R \phi_R^c U_L = (1^*, 2^*, -1/3)(1, 2, -1)(1, 1, 4/3) = (1, 1, 0)$
14. $\bar{U}_L (\phi_R^c)^\dagger Q_R = (1^*, 1^*, -4/3)(1^*, 2^*, 1)(1, 2, 1/3) = (1, 1, 0)$
15. $\bar{l}_R \phi_R^c N_L = (1^*, 2^*, 1)(1, 2, -1)(1, 1, 0) = (1, 1, 0)$
16. $\bar{N}_L (\phi_R^c)^\dagger l_R = (1^*, 1^*, 0)(1^*, 2^*, 1)(1, 2, -1) = (1, 1, 0)$
17. $\bar{\nu}_R \Delta_L N_L = (1^*, 1^*, 0)(3, 1, 0)(1, 1, 0) = (3, 1, 0)$
18. $\bar{N}_L \Delta_L \nu_R = (1^*, 1^*, 0)(3, 1, 0)(1, 1, 0) = (3, 1, 0)$
19. $\bar{\nu}_R \Delta_R N_L = (1^*, 1^*, 0)(1, 3, 0)(1, 1, 0) = (1, 3, 0)$
20. $\bar{N}_L \Delta_R \nu_R = (1^*, 1^*, 0)(1, 3, 0)(1, 1, 0) = (1, 3, 0)$

Lampiran C.VI

Pembuktian persamaan (4.27)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_e} &= -G_1 \bar{l}_L \phi_L e_R - G_2 \bar{e}_R \phi_L^\dagger l_L - G_7 \bar{l}_R \phi_R E_L - G_8 \bar{E}_L \phi_R^\dagger l_R \\
&= -G_1 \begin{pmatrix} \bar{\nu} & \bar{e} \end{pmatrix}_L \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_L + h_{\phi_L} \end{pmatrix} e_R \\
&\quad - G_2 \bar{e}_R \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \nu_L + h_{\phi_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L \\
&\quad - G_7 \begin{pmatrix} \bar{N} & \bar{E} \end{pmatrix}_R \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_R + h_{\phi_R} \end{pmatrix} E_L \\
&\quad - G_8 \bar{E}_L \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \nu_R + h_{\phi_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ E \end{pmatrix}_R \\
&= -\frac{G_1}{\sqrt{2}} \bar{e}_L (\nu_L + h_{\phi_L}) e_R - \frac{G_2}{\sqrt{2}} \bar{e}_R (\nu_L + h_{\phi_L}) e_L - \frac{G_7}{\sqrt{2}} \bar{E}_R (\nu_R + h_{\phi_R}) E_L \\
&\quad - \frac{G_8}{\sqrt{2}} \bar{E}_L (\nu_R + h_{\phi_R}) E_R \\
&= -\frac{G_1}{\sqrt{2}} \bar{e}_L \nu_L e_R - \frac{G_1}{\sqrt{2}} \bar{e}_L h_{\phi_L} e_R - \frac{G_2}{\sqrt{2}} \bar{e}_R \nu_L e_L - \frac{G_2}{\sqrt{2}} \bar{e}_R h_{\phi_L} e_L \\
&\quad - \frac{G_7}{\sqrt{2}} \bar{E}_R \nu_R E_L - \frac{G_7}{\sqrt{2}} \bar{E}_R h_{\phi_R} E_L - \frac{G_8}{\sqrt{2}} \bar{E}_L \nu_R E_R - \frac{G_8}{\sqrt{2}} \bar{E}_L h_{\phi_R} E_R \\
&= -\frac{G_e}{\sqrt{2}} \nu_L (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) - \frac{G_e}{\sqrt{2}} h_{\phi_L} (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \\
&\quad - \frac{G_E}{\sqrt{2}} \nu_R (\bar{E}_R E_L + \bar{E}_L E_R) - \frac{G_E}{\sqrt{2}} h_{\phi_R} (\bar{E}_R E_L + \bar{E}_L E_R)
\end{aligned}$$

Lampiran C.VII

Pembuktian persamaan (4.31)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Yd} &= -G_3 \bar{Q}_L \phi_L d_R - G_4 \bar{d}_R \phi_L^\dagger Q_L - G_5 \bar{Q}_R \phi_R D_L - G_6 \bar{D}_L \phi_R^\dagger Q_R \\
&= -G_3 \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix}_L \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_L + h_{\phi_L} \end{pmatrix} d_R \\
&\quad - G_4 \bar{d}_R \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \nu_L + h_{\phi_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \\
&\quad - G_5 \begin{pmatrix} \bar{U} & \bar{D} \end{pmatrix}_R \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_R + h_{\phi_R} \end{pmatrix} d_L \\
&\quad - G_6 \bar{D}_L \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \nu_R + h_{\phi_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_R \\
&= -\frac{G_3}{\sqrt{2}} \bar{d}_L (\nu_L + h_{\phi_L}) d_R - \frac{G_4}{\sqrt{2}} \bar{d}_R (\nu_L + h_{\phi_L}) d_L \\
&\quad - \frac{G_5}{\sqrt{2}} \bar{D}_R (\nu_R + h_{\phi_R}) D_L - \frac{G_6}{\sqrt{2}} \bar{D}_L (\nu_R + h_{\phi_R}) D_R \\
&= -\frac{G_3}{\sqrt{2}} \bar{d}_L \nu_L d_R - \frac{G_3}{\sqrt{2}} \bar{d}_L h_{\phi_L} d_R - \frac{G_4}{\sqrt{2}} \bar{d}_R \nu_L d_L - \frac{G_4}{\sqrt{2}} \bar{d}_R h_{\phi_L} d_L \\
&\quad - \frac{G_5}{\sqrt{2}} \bar{D}_R \nu_R D_L - \frac{G_5}{\sqrt{2}} \bar{D}_R h_{\phi_R} D_L - \frac{G_6}{\sqrt{2}} \bar{D}_L \nu_R D_R - \frac{G_6}{\sqrt{2}} \bar{D}_L h_{\phi_R} D_R \\
&= -\frac{G_d}{\sqrt{2}} \nu_L (\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) - \frac{G_d}{\sqrt{2}} h_{\phi_L} (\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) \\
&\quad - \frac{G_D}{\sqrt{2}} \nu_R (\bar{D}_R D_L + \bar{D}_L D_R) - \frac{G_D}{\sqrt{2}} h_{\phi_R} (\bar{D}_R D_L + \bar{D}_L D_R)
\end{aligned}$$

Lampiran C.VIII

Pembuktian persamaan (4.37)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_u} &= -G_9 \bar{Q}_L \phi_L^c u_R - G_{10} \bar{u}_R (\phi_L^c)^\dagger Q_L - G_{13} \bar{Q}_R \phi_R^c U_L - G_{14} \bar{U}_L (\phi_R^c)^\dagger Q_R \\
&= -G_9 \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix}_L \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \nu_L + h_{\phi_L} \\ 0 \end{pmatrix} u_R \\
&\quad - G_{10} \bar{u}_R \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \nu_L + h_{\phi_L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \\
&\quad - G_{13} \begin{pmatrix} \bar{U} & \bar{D} \end{pmatrix}_R \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \nu_R + h_{\phi_R} \\ 0 \end{pmatrix} U_L \\
&\quad - G_{14} \bar{U}_L \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \nu_R + h_{\phi_R} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_R \\
&= -\frac{G_9}{\sqrt{2}} \bar{u}_L (\nu_L + h_{\phi_L}) u_R - \frac{G_{10}}{\sqrt{2}} \bar{u}_R (\nu_L + h_{\phi_L}) u_L \\
&\quad - \frac{G_{13}}{\sqrt{2}} \bar{U}_R (\nu_R + h_{\phi_R}) U_L - \frac{G_{14}}{\sqrt{2}} \bar{U}_L (\nu_R + h_{\phi_R}) U_R \\
&= -\frac{G_9}{\sqrt{2}} \bar{u}_L \nu_L u_R - \frac{G_9}{\sqrt{2}} \bar{u}_L h_{\phi_L} u_R - \frac{G_{10}}{\sqrt{2}} \bar{u}_R \nu_L u_L - \frac{G_{10}}{\sqrt{2}} \bar{u}_R h_{\phi_L} u_L \\
&\quad - \frac{G_{13}}{\sqrt{2}} \bar{U}_R \nu_R U_L - \frac{G_{13}}{\sqrt{2}} \bar{U}_R h_{\phi_R} U_L - \frac{G_{14}}{\sqrt{2}} \bar{U}_L \nu_R U_R - \frac{G_{14}}{\sqrt{2}} \bar{U}_L h_{\phi_R} U_R \\
&= -\frac{G_u}{\sqrt{2}} \nu_L (\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) - \frac{G_u}{\sqrt{2}} h_{\phi_L} (\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) \\
&\quad - \frac{G_U}{\sqrt{2}} \nu_R (\bar{U}_R U_L + \bar{U}_L U_R) - \frac{G_U}{\sqrt{2}} h_{\phi_R} (\bar{U}_R U_L + \bar{U}_L U_R)
\end{aligned}$$

Lampiran C.IX

Pembuktian persamaan (4.40)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -G_{11}\bar{l}_L\phi_L^c\nu_R - G_{12}\bar{\nu}_R(\phi_L^c)^\dagger l_L - G_{15}\bar{l}_R\phi_R^c N_L - G_{16}\bar{N}_L\phi_R^c l_R \\
&\quad - G_{17}\bar{\nu}_R\Delta_L N_L - G_{18}\bar{N}_L\Delta_L\nu_R - G_{19}\bar{\nu}_R\Delta_R N_L - G_{20}\bar{N}_L\Delta_R\nu_R \\
&= -G_{11}\begin{pmatrix} \bar{\nu} & \bar{e} \end{pmatrix}_L \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \nu_L + h_{\phi_L} \\ 0 \end{pmatrix} \nu_R \\
&\quad - G_{12}\bar{\nu}_R \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \nu_L + h_{\phi_L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L \\
&\quad - G_{15}\begin{pmatrix} \bar{N} & \bar{E} \end{pmatrix}_R \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \nu_R + h_{\phi_R} \\ 0 \end{pmatrix} N_L \\
&\quad - G_{16}\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{N}_L \begin{pmatrix} \nu_R + h_{\phi_R} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ E \end{pmatrix}_R \\
&\quad - G_{17}\bar{\nu}_R \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{\Delta_L} & 0 \end{pmatrix} N_L - G_{18}\bar{N}_L \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{\Delta_L} & 0 \end{pmatrix} \nu_R
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -G_{19}\bar{\nu}_R \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_R + h_{\Delta_L} & 0 \end{pmatrix} N_L \\
& -G_{20}\bar{N}_L \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_R + h_{\Delta_L} & 0 \end{pmatrix} \nu_R \\
= & -\frac{G_{11}}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_L(\nu_L + h_{\phi_L})\nu_R - \frac{G_{12}}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_R(\nu_L + h_{\phi_L})\nu_L \\
& -\frac{G_{15}}{\sqrt{2}}\bar{N}_R(\nu_R + h_{\phi_R})N_L - \frac{G_{16}}{\sqrt{2}}\bar{N}_L(\nu_R + h_{\phi_R})N_R \\
& -\frac{G_{17}}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_R h_{\Delta_L} N_L - \frac{G_{18}}{\sqrt{2}}\bar{N}_L h_{\Delta_L} \nu_R \\
& -\frac{G_{19}}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_R(\omega_R + h_{\Delta_L})N_L - \frac{G_{20}}{\sqrt{2}}\bar{N}_L(\omega_R + h_{\Delta_L})\nu_R \\
= & -\frac{G_{11}}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_L\nu_L\nu_R - \frac{G_{11}}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_L h_{\phi_L}\nu_R - \frac{G_{12}}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_R\nu_L\nu_L - \frac{G_{12}}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_R h_{\phi_L}\nu_L \\
& -\frac{G_{15}}{\sqrt{2}}\bar{N}_R\nu_R N_L - \frac{G_{15}}{\sqrt{2}}\bar{N}_R h_{\phi_R} N_L - \frac{G_{16}}{\sqrt{2}}\bar{N}_L\nu_R N_R - \frac{G_{16}}{\sqrt{2}}\bar{N}_L h_{\phi_R} N_R \\
& -\frac{G_{17}}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_R h_{\Delta_L} N_L - \frac{G_{18}}{\sqrt{2}}\bar{N}_L h_{\Delta_L} \nu_R \\
& -\frac{G_{19}}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_R \omega_R N_L - \frac{G_{19}}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_R h_{\Delta_L} N_L - \frac{G_{20}}{\sqrt{2}}\bar{N}_L \omega_R \nu_R - \frac{G_{20}}{\sqrt{2}}\bar{N}_L h_{\Delta_L} \nu_R \\
= & -\frac{G_\nu}{\sqrt{2}}\nu_L(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L) - \frac{G}{\sqrt{2}}h_{\phi_L}(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L) \\
& -\frac{G_N}{\sqrt{2}}\nu_R(\bar{N}_R N_L + \bar{N}_L N_R) - \frac{G_N}{\sqrt{2}}h_{\phi_R}(\bar{N}_R N_L + \bar{N}_L N_R) \\
& -\frac{G_{N\nu}}{\sqrt{2}}h_{\Delta_L}(\bar{\nu}_R N_L + \bar{N}_L \nu_R) \\
& -\frac{G_{N\nu}}{\sqrt{2}}\omega_R(\bar{\nu}_R N_L + \bar{N}_L \nu_R) - \frac{G_{N\nu}}{\sqrt{2}}h_{\Delta_L}(\bar{\nu}_R N_L + \bar{N}_L \nu_R)
\end{aligned}$$

Lampiran C.X

Pembuktian persamaan (4.41)

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\mathcal{M}\psi &= \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{N}_R & \bar{N}_L & \bar{\nu}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_R \\ N_L \\ \nu_R \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{N}_R & \bar{N}_L & \bar{\nu}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}\nu_L + a_{12}N_R + a_{13}N_L + a_{14}\nu_R \\ a_{21}\nu_L + a_{22}N_R + a_{23}N_L + a_{24}\nu_R \\ a_{31}\nu_L + a_{32}N_R + a_{33}N_L + a_{34}\nu_R \\ a_{41}\nu_L + a_{42}N_R + a_{43}N_L + a_{44}\nu_R \end{pmatrix} \\
&= a_{11}\nu_L\bar{\nu}_L + a_{12}N_R\bar{\nu}_L + a_{13}N_L\bar{\nu}_L + a_{14}\nu_R\bar{\nu}_L \\
&\quad + a_{21}\nu_L\bar{N}_R + a_{22}N_R\bar{N}_R + a_{23}N_L\bar{N}_R + a_{24}\nu_R\bar{N}_R \\
&\quad + a_{31}\nu_L\bar{N}_L + a_{32}N_R\bar{N}_L + a_{33}N_R\bar{N}_L + a_{34}\nu_R\bar{N}_L \\
&\quad + a_{41}\nu_L\bar{\nu}_R + a_{42}N_R\bar{\nu}_R + a_{43}N_L\bar{\nu}_R + a_{44}\nu_R\bar{\nu}_R
\end{aligned}$$

Persamaan diatas dibandingkan dengan persamaan (4.44), maka akan didapatkan :

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 0, & a_{12} &= 0, & a_{13} &= 0, & a_{14} &= G_\nu\nu_L \\
a_{21} &= 0, & a_{22} &= 0, & a_{23} &= G_N\nu_R, & a_{24} &= 0 \\
a_{31} &= 0, & a_{32} &= G_N\nu_R, & a_{33} &= 0, & a_{34} &= G_{N\nu}\omega_R \\
a_{41} &= G_\nu n u_L, & a_{42} &= 0, & a_{43} &= G_{N\nu}\omega_R, & a_{44} &= 0
\end{aligned}$$

sehingga didapatkan matriks M sebagai berikut :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & G_{\nu\nu_L} \\ 0 & 0 & G_{N\nu_R} & 0 \\ 0 & G_{N\nu_R} & 0 & G_{N\nu\omega_R} \\ G_{\nu\nu_L} & 0 & G_{N\nu\omega_R} & 0 \end{pmatrix}$$



KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO SEMARANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Alamat: Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan, Semarang
Tlp (024) 7601295 Fax 7615387

No : B-4876/Un.10.8/J6/PP.009/11/2019 Semarang, 2 Desember 2019
Lamp : -
Hal : Penunjukan Pembimbing Skripsi

Yth,

1. Agus Sudarmanto, M.Si
2. M. Ardhi Khalif, M.Sc

Assalamu'alaikum Wr. Wb

Berdasarkan hasil pembahasan usul judul penelitian pada Program Studi Fisika Fakultas Sains dan Teknologi, maka disetujui judul skripsi mahasiswa :

Nama : Siti Munawaroh

NIM : 1508026008


Judul : MASSA NEUTRINO MASIF SEBAGAI KANDIDAT MATERI GELAP DALAM
MODEL SIMETRI KIRI-KANAN MINIMAL BERDASARKAN GRUP TERA
 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_Y$

Dan menunjuk :

1. Agus Sudarmanto, M.Si sebagai pembimbing I
2. M. Ardhi Khalif, M.Sc sebagai pembimbing II

Demikian penunjukan pembimbing skripsi ini disampaikan, atas perhatian yang diberikan kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb


Kepala Program Studi Fisika,
Agus Sudarmanto, M.Si
NIP. 197708232009121001

Tembusan

1. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo (sebagai laporan)
2. Mahasiswa yang bersangkutan
3. Arsip

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

1. Nama : Siti Munawaroh
2. TTL : Demak, 29 Agustus 1997
3. Alamat : Ds. Katonsari Rt 03 Rw 02 Demak
4. No. Hp : 085875234896
5. E-mail : simunmuna07@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. TK Mekar Sari Katonsari Demak
2. SD Nederi 2 Katonsari Demak
3. MTs Negeri Karangtengah Demak
4. MA Negeri Demak
5. UIN Walisongo Semarang

Semarang, 18 Maret 2020

Siti Munawaroh
1508016008