

# **KAJIAN GEODESIK DAN KELENGKUNGAN PADA RUANG WARNA RESNIKOFF**

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh  
Gelara Sarjana Fisika  
dalam Ilmu Fisika



Oleh : **MUKHAMMAD NURUL HUDA**  
NIM : 1608026012

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO  
SEMARANG  
**2023**

## PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Mukhammad Nurul Huda  
NIM : 1608026012  
Jurusan/Program Studi : Fisika/ Fisika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

### **KAJIAN GEODESIK DAN KELENGKUNGAN PADA RUANG WARNA RESNIKOFF**

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,  
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 16 Februari 2023  
Pembuat pernyataan,



Mukhammad Nurul Huda  
NIM : 1608026012



KEMENTERIAN AGAMA R.I.  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus III) Ngaliyan Semarang  
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

### PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **Kajian Geodesik dan Kelengkungan Pada Ruang  
Warna Resnikoff**  
Penulis : Mukhammad Nurul Huda  
NIM : 1608026012  
Jurusan : Fisika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji  
Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima  
sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu  
Fisika.

Semarang, 24 Februari 2023

### DEWAN PENGUJI

Penguji I,

**Irman Said Prastyo, M.Sc**  
NIP : 19911228 201903 1 009

Penguji II,

**Istikomah, M.Sc**  
NIP : 19901126 201903 2 021

Penguji III,

**Agus Sudarmanto, M.Sc**  
NIP : 19770823 200912 1 001

Penguji IV,

**Heni Sumarti, M.Si**  
NIP : 19871011 201903 2 009

Pembimbing I,

**Irman Said Prastyo, M.Sc**  
NIP : 19911228 201903 1 009



## NOTA DINAS

Semarang, 16 Februari 2023

Yth. Ketua Program Studi Fisika  
Fakultas Sains dan Teknologi  
UIN Walisongo Semarang

*Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh*

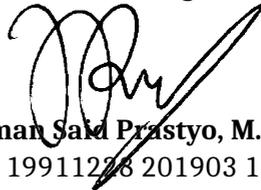
Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : Kajian Geodesik dan Kelengkungan Pada Ruang  
Warna Resnikoff  
Nama : Mukhammad Nurul Huda  
NIM : 1608026012  
Jurusan : Fisika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

*Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh*

Pembimbing I,



**Irman Sald Prastyo, M.Sc**  
NIP : 19911228 201903 1 009

## ABSTRAK

Penelitian ini mengkaji geodesik dan kelengkungan pada ruang warna Resnikoff. Kajian seperti ini diperlukan karena untuk diketahui cara paling efektif untuk berpindah dari suatu warna ke warna yang lain. Dengan mengkaji metrik modifikasi Resnikoff dari teori Stiles untuk himpunan  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , dapat dicari nilai dari simbol Christoffel yang digunakan untuk menentukan komponen tensor kelengkungan Riemannian tipe (1,3) dan juga kurva geodesik. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa kelengkungan pada ruang warna resnikoff bernilai nol yang berarti ruang warna Resnikoff bersifat datar. Didalam penelitian ini juga diperoleh persamaan kurva geodesik untuk ruang warna Resnikoff dalam penyelesaian umum.

**Kata kunci** : Ruang Warna Resnikoff, Kelengkungan, Geodesik

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala Puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul:

### KAJIAN GEODESIK PADA METRIK TEORI RUANG WARNA RESNIKOFF

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Fisika UIN Walisongo Semarang.

Proses penyusunan skripsi ini tidak lepas dari doa, bantuan, bimbingan, motivasi dan peran dari banyak pihak. Sehingga penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. Imam Taufiq, M. Ag, selaku Rektor UIN Walisongo Semarang.
2. Bapak Dr. H. Ismail, M. Ag, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.
3. Bapak Agus Sudarmanto, M. Si, selaku Ketua Jurusan Fisika UIN Walisongo Semarang
4. Bapak Irman Said Prastyo, M.Sc sebagai Pembimbing I yang telah memberikan waktu, tenaga, pemikiran, solusi serta kesabaran dalam membimbing dan mengarahkan penulis dalam menyusun skripsi ini.
5. Bapak dan ibu Dosen Fisika yang telah mencurahkan ilmu pengetahuan tentang fisika yang sangat luas kepada penulis.

6. Kedua Orang Tua yaitu Bapak Mukhaidi dan Ibu Suprapti yang terus memberikan cinta dan kasih sayang tiada hinggga kepada penulis
7. Adik-adik tercinta Inayah Fajriyatus Sabila, Najwa Mutiara Najikha dan Rahma Aulia As-Shifa yang menjadi penyemangat dan penghibur penulis
8. Untuk teman-teman fisika teori, Mas Try dan Mbak Ika yang menjadi teman diskusi dalam proses penulisan skripsi ini.
9. Untuk teman-teman fisika 2016 yang bersama-sama berjuang meraih gelar sarjana.
10. Untuk teman-teman Kang Sae, Mas Alip, Mbah Arip, Mas Amri, yang memotivasi dan teman diskusi penulis.
11. Semua Pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah memberikan kontribusi hingga selesainya skripsi ini.

Semoga semua kebaikan yang telah diberikan kepada penulis, mendapat balasan yang berkah, berlimpah dan menjadi amal ibadah yang diterima oleh Allah SWT. Aamiin.

Dengan segala kerendahan hati, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari segala kelemahan maupun kekurangan dalam penulisan karya tulis ini. Dan semoga karya tulis yang sederhana ini dapat menjadi bacaan yang bermanfaat dan dapat dikembangkan bagi peneliti-peneliti selanjutnya.

# DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	<b>i</b>
<b>PERNYATAAN KEASLIAN</b> .....	<b>ii</b>
<b>PENGESAHAN</b> .....	<b>iii</b>
<b>NOTA PEMBIMBING I</b> .....	<b>iv</b>
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	<b>vii</b>
<b>DAFTAR ISI</b> .....	<b>viii</b>
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	<b>x</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	<b>xi</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	<b>xii</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	<b>1</b>
A. Latar Belakang Masalah .....	1
B. Rumusan Masalah .....	4
C. Batasan Masalah .....	4
D. Tujuan Penelitian .....	4
E. Manfaat Penelitian .....	5
F. Metode Penelitian .....	5
G. Tinjauan Pustaka .....	6
H. Sistematika Penulisan .....	8
<b>BAB II LANDASAN PUSTAKA</b> .....	<b>10</b>
A. Gelombang .....	10
1. Definisi Gelombang .....	10
2. Macam-Macam Gelombang .....	12
B. Gelombang Elektromagnetik .....	14
1. Spektrum Gelombang Elektromagnetik .....	16
2. Cahaya .....	17
3. Sifat-Sifat Cahaya .....	22
C. Sistem Optik Pada Mata .....	24
D. Warna .....	26
E. Geometri Diferensial .....	30
1. Ruang Topologi .....	31
2. Keragaman .....	31

3.	Vektor . . . . .	33
4.	Tensor . . . . .	37
5.	Medan Tensor . . . . .	38
F.	Geometri Rimannian . . . . .	38
1.	Tensor Metrik . . . . .	38
2.	Koneksi affine . . . . .	39
3.	Kelengkungan . . . . .	40
4.	Geodesik . . . . .	45
G.	Ruang Warna . . . . .	46
	<b>BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN . . . . .</b>	<b>53</b>
A.	Tensor Kelengkungan Riemannian . . . . .	55
B.	Geodesik . . . . .	57
	<b>BAB IV SIMPULAN DAN SARAN . . . . .</b>	<b>60</b>
A.	Kesimpulan . . . . .	60
B.	Saran . . . . .	60
	<b>DAFTAR PUSTAKA . . . . .</b>	<b>62</b>
	<b>Lampiran-lampiran . . . . .</b>	<b>65</b>

## DAFTAR TABEL

<b>Tabel</b>	<b>Judul</b>	<b>Halaman</b>
Tabel 2.1	Warna untuk setiap panjang gelombang	22

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar</b>	<b>Judul</b>	<b>Halaman</b>
Gambar 2.1	Gelombang	10
Gambar 2.2	Spektrum Gelombang Elektromagnetik	17
Gambar 2.3	Gelombang Elektromagnetik	19
Gambar 2.4	Bagian-Bagian Pada Organ Mata	24
Gambar 2.5	Warna-Warna dari Cahaya Tampak	26
Gambar 2.6	Value(lightness/darkness)	27
Gambar 2.7	contoh saturasi warna merah	28
Gambar 2.8	Model Warna Munsell	29
Gambar 2.9	Model Warna RGB	29
Gambar 2.10	Model Warna CMYK	30
Gambar 2.11	Model Warna HSI	30
Gambar 2.12	fungsi pemetaan $f : M \rightarrow \mathbb{R}$	34
Gambar 2.13	kurva $c$ dan fungsi $f$ untuk mendefinisikan vektor singgung sepanjang kurva pada turunan berarah	35
Gambar 2.14	Kelengkungan berdasarkan Tensor Riemannian	45
Gambar 3.1	Ruang Warna RGB	56

## DAFTAR LAMPIRAN

	<b>Halaman</b>
Lampiran 1    Pembuktian Persamaan dan Penurunan Fungsi	65
Lampiran 2    Analisis Nilai	82

# BAB I

## PENDAHULUAN

### A. Latar Belakang Masalah

Warna yang kita kenal dalam keseharian, sesungguhnya adalah wakilan dari keberadaan gelombang elektromagnetik dalam rentang panjang gelombang tertentu. Rentang ini yang disebut wilayah cahaya tampak. Istilah wakilan dalam hal ini tidak bermakna bahwa warna sama dengan gelombang. Kemunculan warna melalui sederetan proses yang penjelasannya memerlukan keterlibatan berbagai disiplin ilmu, diantaranya adalah Fisika, biologi, dan psikologi (Berthier, 2019). Bahkan, ketiganya sesungguhnya masih belum benar-benar mampu untuk menjelaskan warna itu sendiri.

Warna disebutkan dalam Al-Quran surat Al-Fathir ayat-27:

الَّذِينَ أَنْزَلَ اللَّهُ مِنَ السَّمَاءِ مَاءً فَأَخْرَجْنَا بِهِ نُورًا مُخْتَلِفًا أَلْوَانًا  
وَمِنَ الْجِبَالِ جُدَدٌ بَيضٌ وَحُمْرٌ مُخْتَلِفٌ أَلْوَانًا وَغَرَابِيبُ سُودٌ

Artinya: "Tidakkah engkau melihat bahwa Allah menurunkan dari langit air lalu Kami mengeluarkan dengannya buah-buahan yang beraneka macam warnanya. Dan di antara gunung-gunung ada garis-garis putih dan merah yang beraneka macam warnanya dan ada (pula) yang pekat dan hitam.

Dalam ayat tersebut merupakan bukti-bukti kuasa Allah swt. Dalam kalimat "Tidakkah engkau melihat" (dalam hal ini menggunakan pola pertanyaan) yang dengan maksud bersyukur akan nikmat penglihatan yang Allah berikan. Kemudian Allah

menggunakan warna dalam menyebutkan macam-macam buah yang merupakan persepsi akan nikmat kelezatan dan juga penggunaan warna putih, merah dan hitam dengan penggunaan warna sebagai anomali-anomali sains pada alam semesta (Shihab, 2002).

Warna hanyalah persepsi otak, yakni cara otak menerjemahkan atau memproyeksikan energi atau sinyal yang dibawa oleh saraf dan berasal dari tangkapan indera penglihatan (mata) terhadap cahaya yang mengenainya dari luar (Berthier, 2019). Dikarenakan warna hanyalah persepsi dan terdapat kesulitan untuk membuktikan kesamaan persepsi setiap orang maka tidak mudah pula membuktikan kesamaan warna yang disaksikan satu orang dengan orang lain. Satu-satunya yang dapat kita pegang adalah keyakinan bahwa penyaksian warna setiap orang sama untuk jenis gelombang datang yang sama.

Meskipun terdapat kesulitan dalam penjelasan tentang warna, beberapa orang telah mencoba membuat model guna menjelaskan konsep warna tersebut. Beberapa model itu diantaranya model Munsell, model RGB, model CMYK dan model HSI (Ibraheem, 2012). Resnikoff tahun 1974 memodelkan warna secara matematis dengan Bahasa aljabar untuk yang pertama kalinya. Dalam permodelan ini, yang disebut dengan warna adalah segala sesuatu yang menjadi unsur atau anggota dalam suatu ruang warna. Sementara itu, ruang warna merupakan suatu objek matematis berupa himpunan dengan operasi-operasi yang berlaku didalamnya dan memenuhi sekumpulan aksioma (Resnikoff, 1974).

Telah ditunjukkan oleh Resnikoff bahwa ruang warna adalah suatu keragaman (manifold) Riemannian (Resnikoff, 1974).

Dengan menggunakan keragaman Riemannian pada ruang warna dapat ditentukan properti-properti yang menyertainya, seperti geodesik, tensor kelengkungan, skalar kelengkungan dan lain sebagainya.

Beberapa penelitian lanjutan terkait ruang warna Resnikoff telah dilakukan oleh beberapa pihak diantaranya adalah penerapan ruang warna resnikoff pada konsep untingan serat utama pertama kali dilakukan oleh Edoardo Provenzi (Provenzi, 2017). Kemudian Edoardo bersama Michel Berthier melakukan formalisasi matematis dan pengaplikasian aljabar jordan pada kolorimeter (Berthier, 2019). Dan yang baru ini, Edoardo dan Michel mengkaji warna yang dirasakan dan sifat-sifatnya menggunakan pendekatan teori pengukuran kuantum (Berthier, 2022).

Penentuan kurva geodesik dalam bentuk penyelesaian umum persamaan geodesik dan kelengkungan ruang warna Resnikoff belum dilakukan pihak lain sebelumnya. Penentuan geodesik dan kelengkungan ruang warna penting untuk dilakukan. Dengan mengetahui kurva geodesik dan kelengkungan, akan diketahui suatu cara paling efektif untuk “berpindah” dari suatu warna ke warna yang lain. Efektif dalam hal ini adalah dalam makna penggunaan energinya paling rendah dengan perubahan intensitas paling kecil yang mungkin. Di samping itu, penentuan geodesik dan kelengkungan juga bermanfaat untuk pengembangan teori ruang warna ke depannya. Oleh karena itu peneliti dalam hal ini ingin memberikan sumbangsih dengan melakukan penelitian guna menghasilkan persamaan umum kurva geodesik di ruang warna Resnikoff beserta tensor dan skalar kelengkungannya.

Penelitian ini berfokus untuk mengkaji kelengkungan dan

bentuk geodesik dari teori ruang warna Resnikoff. Kelengkungan yang dimaksud disini yaitu tensor kelengkungan Riemann yang menentukan bagaimana bentuk kelengkungan ruang yang digunakan Resnikoff pada teorinya, dan juga mencoba untuk menentukan geodesik dari teori ruang warna resnikoff yang akan menghasilkan sebuah kurva yang efisien dari sebuah ruang.

## **B. Rumusan Masalah**

1. Bagaimana kelengkungan dari ruang warna Resnikoff?
2. Bagaimana bentuk umum dari persamaan kurva geodesik ruang warna Resnikoff?

## **C. Batasan Masalah**

Penelitian ini dibatasi pada pengkajian kelengkungan dan geodesik pada ruang warna Resnikoff untuk himpunan  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

## **D. Tujuan Penelitian**

Tujuan dari penelitian ini adalah

1. Untuk mengetahui kelengkungan dari ruang warna Resnikoff.
2. Untuk mengetahui bentuk umum dari persamaan kurva geodesik ruang warna Resnikoff.

## E. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini antara lain:

### 1. Bagi Pembaca

Mampu memberikan gambaran terhadap konsep ruang warna dari Resnikoff dengan ditinjau menggunakan geometri diferensial.

### 2. Bagi Universitas

Diharapkan mampu menjadi bahan referensi terkait fisika teori di UIN Walisongo Semarang.

### 3. Bagi Peneliti

(a) menambah wawasan lebih mendalam terkait fisika teori secara khusus dalam kajian geometri diferensial serta melatih konsep berfikir secara analisis dan matematis pada teorema atau hal lainnya.

(b) mampu memberikan motivasi belajar pada peneliti mengenai kajian fisika teori.

## F. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan studi literatur dengan melakukan kajian pustaka fisika teori tentang kelengkungan dan juga geodesik dari ruang warna Resnikoff yang tahapannya sebagai berikut:

1. Mengkaji metrik yang terkait ruang warna Resnikoff.

2. Menentukan nilai dari  $g_{\mu\nu}$  dan juga  $g^{\mu\nu}$  dari metrik ruang warna Resnikoff.

3. Menentukan nilai dari simbol Christoffel.
4. Menghitung nilai tensor Riemannian tipe  $(1, 3)$  untuk menentukan kelengkungan ruang warna Resnikoff dengan menggunakan bekal simbol Christoffel dan basis-basis yang telah ditunjukkan pada metrik.
5. Menentukan bentuk umum dari geodesik dari ruang warna resnikoff dengan menggunakan bekal simbol Christoffel dan basis-basis yang telah ditunjukkan pada metrik.

## G. Tinjauan Pustaka

Isaac Newton (1704) mendefinisikan teori konvensional tentang perilaku cahaya. Newton mengungkapkan bahwa cahaya putih merupakan kombinasi dari semua warna yang ada pada spektrum cahaya. Newton juga mengungkapkan perpaduan warna-warna menghasilkan warna lain ditengah-tengah warna kombinasi tersebut yang juga terdapat pada spektrum cahaya berbentuk lingkaran.

Wolfgang von Goethe (1810) menganalisa persepsi warna pada manusia dengan mengukur respons mata manusia terhadap warna-warna tertentu. Penjelasan tentang warna Goethe bertentangan dengan Newton, karena Goethe mengungkapkan dalam penciptaan cahaya berasal dari prisma bukan cahaya. Pada tahun yang sama, seorang pelukis Jerman Philipp Otto Runge pada catatannya *Color Sphere* membuat wakilan dari spektrum warna dengan ruang bola.

Helmholtz (1866) membuat buku risalah tentang optik fisiologi. kemudian pada tahun 1891 mencoba menerapkan

hukum Fechner tentang hal-hal psikofisik untuk memperluas sistem warna dan juga menjelaskan tentang perbedaan warna pada mata trikromatik.

Stiles Walter Stanley (1946) memodelkan kembali element garis Helmholtz kedalam ruang kecerahan warna. Dia mengemukakan ketidak konsistenan ambang batas dengan meninjau ulang menggunakan pendekatan Schrödinger.

Resnikoff (1974) mengemukakan konsep tentang ruang warna dengan disertai 8 aksioma tentang ruang warna. Konsep yang diusung Resnikoff ini berfokus pada tinjauan ruang pada warna dan terinspirasi pada kasus yang diungkapkan stiles tentang metrik warna. Pada teori ruang warna Resnikoff dibahas juga tentang homogenitas ruang warna, keinvariaan metrik warna dan lain sebagainya.

Edoardo Provenzi (2017) menerapkan konsep untingan serat utama pada ruang warna Resnikoff. Dia mencoba memodelkan ulang dari model ruang warna Resnikoff agar dapat bisa diterapkan konsep untingan serat utama.

Edoardo Provenzi dan Michel Berthier (2019) pada jurnalnya membahas tentang formalisasi matematis kolorimetri yang terinspirasi dari model ruang warna Resnikoff. Mereka juga mengaplikasikan aljabar Jordan pada pengkajian kolorimetri.

Edoardo dan Michel (2022) pada jurnalnya mengkaji warna yang dirasakan dengan pendekatan teori pengukuran kuantum dan menganalisa sifat-sifat dasar dari warna yang dirasakan.

## H. Sistematika Penulisan

Penulisan Skripsi ini terdiri dari 4 BAB yang dijabarkan sebagai berikut:

- BAB I PENDAHULUAN

Menyajikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, Tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan. Berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, tinjauan pustaka dan sistematika penulisan.

- BAB II LANDASAN PUSTAKA

Menjelaskan dari konsep awal gelombang. Kemudian gelombang elektromagnet berikut dengan spektrum cahaya dan juga sifat-sifatnya. Kemudian sistem optik pada manusia yang dilanjutkan konsep dasar warna yang kemudian konsep ruang warna Resnikoff, dilanjutkan dengan menjelaskan geometri diferensial tentang konsep keragaman, vektor, tensor dan juga medan tensor. Kemudian dilanjutkan dengan geometri Riemannian yang dijelaskan didalamnya simbol Christoffel, tensor Riemannian dan juga konsep Geodesik.

- BAB III ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Membahas tentang pengkajian metrik dari ruang warna kemudian di tentukan tensor  $g_{\mu\nu}$  yang digunakan untuk menentukan simbol Christoffel. Kemudian dilanjutkan dengan menentukan tensor kelengkungan Riemannian tipe (1,3). Kemudian dilanjutkan dengan menganalisa bentuk geodesik dari ruuang warna Resnikoff.

- BAB IV PENUTUP

Berisi kesimpulan dan saran untuk penelitian ini.

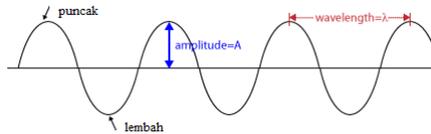
## BAB II

### LANDASAN PUSTAKA

#### A. Gelombang

##### 1. Definisi Gelombang

Istilah gelombang dalam kehidupan sehari-hari tidak asing kita dengar, seperti gelombang suara, gelombang dipermukaan air, gelombang radio dan lain sebagainya. Gelombang merupakan getaran yang merambat pada suatu medium tanpa disertai perambatan mediumnya yang ditunjukkan oleh gambar 2.1(Hirose, 2010). Dalam pembahasan gelombang, diketahui istilah-istilah berikut:



Gambar 2.1. Gelombang

##### 1. Simpangan

Simpangan merupakan jarak dari perpindahan titik getaran pada medium diukur saat titik kesetimbangannya. simpangan dari suatu titik pada medium nilainya tidak konstan, sehingga terdapat nilai minimum dan juga nilai maksimum pada simpangan tersebut. Simpangan bisa diperoleh dengan menggunakan persamaan umum

gelombang yang ditunjukkan oleh persamaan (2.1):

$$\nabla^2 y = \frac{1}{c_w} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

Simpangan  $y$  disini merupakan fungsi terhadap ruang waktu, dengan  $c_w$  merupakan cepat rambat gelombang.

## 2. Amplitudo

Amplitudo merupakan simpangan maksimum dari gelombang tersebut yang ditunjukkan oleh tanda panah biru pada gambar 2.1.

## 3. Periode

Periode merupakan waktu yang dibutuhkan suatu titik untuk satu getaran penuh.

## 4. Frekuensi

Frekuensi merupakan jumlah getaran yang dilakukan dalam kurun waktu satu sekon.

## 5. Panjang gelombang

Panjang gelombang merupakan jarak antar dua puncak atas atau puncak bawah yang berdekatan yang ditunjukkan oleh tanda panah merah pada gambar 2.1.

## 6. Kecepatan getaran

Kecepatan getaran merupakan kecepatan dari perubahan simpangan titik-titik pada medium.

## 7. Cepat rambat gelombang

Cepat rambat gelombang merupakan kecepatan yang dibutuhkan suatu titik untuk bergetar dari suatu titik ketitik yang lain.

## 2. Macam-Macam Gelombang

Berdasarkan arah rambatnya, gelombang terbagi menjadi dua macam yaitu:

### 1. Gelombang Transversal

Gelombang transversal yaitu gelombang yang arah dari getarannya tegak lurus dengan arah rambatnya.

### 2. Gelombang Longitudinal

Gelombang longitudinal yaitu gelombang yang arah getarannya sejajar dengan arah rambatnya.

Berdasarkan amplitudonya, gelombang terbagi menjadi dua macam, yaitu:

### 1. Gelombang berjalan

Gelombang berjalan yaitu gelombang yang nilai amplitudonya konstan pada setiap titik.

### 2. Gelombang stasioner

Gelombang stasioner yaitu gelombang dari perpaduan antara gelombang sumber dengan gelombang pantul dengan nilai amplitudo dan juga frekuensinya sama, tetapi arah dari rambatnya berlawanan.

Berdasarkan pola gelombang, gelombang terbagi menjadi dua macam yaitu:

### 1. Gelombang Sinusoidal

Gelombang sinusoidal yaitu gelombang dengan pola rambatnya berbentuk pola cosinus atau sinus, salah satu

bentuk persamaan gelombang sinusoidal yang ditunjukkan oleh persamaan (2.2)

$$y(x, t) = A \cos \left( 2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{x}{\lambda} - \varphi_0 \right) \quad (2.2)$$

Simpangan disini merupakan suatu fungsi terhadap titik ( $x$ ) dan waktu ( $t$ ), notasi  $A$  merupakan amplitudo gelombang, notasi  $T$  merupakan periode dari gelombang, notasi  $\lambda$  merupakan panjang dari gelombang, notasi  $\varphi_0$  merupakan fase awal gelombang. Dengan frekuensi sudut gelombang ( $\omega$ ) ditunjukkan oleh persamaan (2.3).

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.3)$$

dan juga konstanta gelombang ( $k$ ) ditunjukkan oleh persamaan (2.4)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.4)$$

maka didapat nilai cepat rambat gelombang  $c_w$  yang ditunjukkan oleh persamaan (2.5)

$$c_w = \frac{\omega}{k} \quad (2.5)$$

## 2. Gelombang Non-Sinusoidal

Gelombang non-sinusoidal merupakan gelombang dengan pola rambat gelombang secara acak diluar pola cosinus maupun sinus.

Menurut medium perantaranya, gelombang terbagi menjadi 2 macam yaitu:

### 1. Gelombang mekanik

Gelombang mekanik yaitu gelombang yang membutuhkan medium untuk merambat.

## 2. Gelombang elektromagnetik

gelombang elektromagnetik yaitu gelombang yang tidak membutuhkan medium dalam perambatannya.

## B. Gelombang Elektromagnetik

Gelombang elektromagnetik adalah gelombang yang terdiri dari gelombang vektor medan magnet dan medan listrik yang merambat tegak lurus arah medan tersebut. Arah rambat dari gelombang tersebut dari perkalian silang vektor  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  yang ditunjukkan oleh persamaan (2.6).

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (2.6)$$

dengan  $\mathbf{S}$  sebagai vektor poynting,  $\mu_0$  sebagai permeabilitas diruang hampa ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N/A^2$ ),  $\mathbf{E}$  sebagai medan listrik dan  $\mathbf{B}$  sebagai induksi magnetik (Sarojo, 2011).

Dalam gelombang elektromagnetik berlaku teori Maxwell yang merupakan gabungan dari teori Gauss, teori Biot-Savart, teori Faraday dan teori Ampere.

### 1. Hukum Gauss untuk medan listrik

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.7)$$

persamaan (2.7) menunjukkan bahwa besarnya fluks listrik yang menembus suatu luasan tertutup ( $\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ ) sama

dengan besarnya muatan ( $Q_{in}$ ) yang dilingkupi oleh luasan tersebut per permitivitas ruang hampa ( $\epsilon_0$ ) dengan  $Q_{in} = \int \rho dV$ .

## 2. Hukum Gauss untuk medan magnet

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.8)$$

persamaan (2.8) menunjukkan bahwa divergensi dari medan magnet ( $\mathbf{B}$ ) pada suatu titik disuatu ruang bernilai nol. Hal ini menunjukkan bahwa tidak ada suatu magnet yang hanya mempunyai satu kutub (monopole).

## 3. Hukum Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.9)$$

persamaan (2.9) menunjukkan bahwa gaya gerak listrik ( $\varepsilon = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ ) besarnya bergantung dengan perubahan fluks magnet terhadap waktu dimana  $\left(\frac{d\Phi_B}{dt} = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} da\right)$  dengan arah perubahan fluks yang berlawanan.

## 4. Hukum Ampere

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.10)$$

persamaan (2.10) menunjukkan bahwa besarnya kuat medan magnet pada suatu kawat lintasan tertutup ( $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l}$ ) bergantung pada besarnya rapat arus pada ruang  $\mathbf{J}$  dan juga bergantung pada besarnya perubahan medan listrik terhadap waktu  $\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$ .

dengan pembahasan persamaan untuk elektromagnetik lebih lanjutnya dapat dilihat pada lampiran A (Griffiths, 1999).

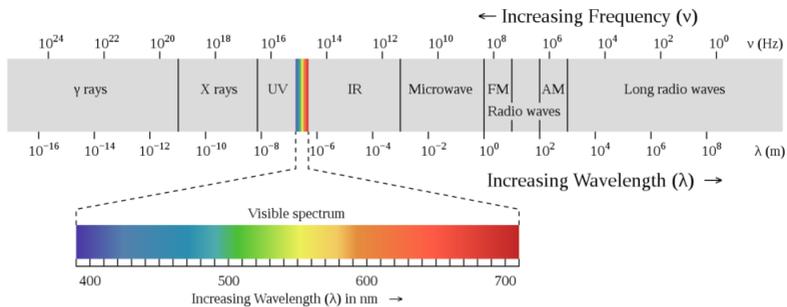
## 1. Spektrum Gelombang Elektromagnetik

Menurut James Clerk Maxwell, gelombang elektromagnetik terdiri dari medan listrik dan juga medan magnet yang berubah terhadap waktu. Gelombang elektromagnetik dihasilkan dengan mempercepat distribusi muatan, memuat energi dan menggunakan gaya yang bekerja pada suatu partikel yang bermuatan.

Gelombang elektromagnetik didalam ruang hampa merambat dengan kecepatan  $c$  dengan besar  $3 \times 10^8 m/s$  yang didapatkan dari persamaan Maxwell. Gangguan pada gelombang elektromagnetik yang merambat pada ruang hampa sebagai gelombang bergantung pada frekuensi (frekuensi dalam hal ini sama seperti halnya gelombang yang lain yaitu bergantung pada sumber gelombang) diwakili oleh frekuensi tunggal (monokromatik) maupun frekuensi ganda (polikromatik) yang diskrit maupun kontinu. Hubungan dari frekuensi dan panjang gelombang dengan cepat rambat gelombang ditunjukkan dengan persamaan (2.11)

$$c = \lambda f \quad (2.11)$$

Distribusi energi dalam gelombang elektromagnetik disebut dengan spektrum gelombang. Spektrum elektromagnetik mencakup rentang total panjang gelombang elektromagnetik dari yang terpendek hingga yang terpanjang yang ditunjukkan oleh gambar 2.2 (Pedrotti, 2017).



Gambar 2.2. Spektrum Gelombang Elektromagnetik

Cahaya dapat didefinisikan sebagai gelombang elektromagnetik yang memiliki frekuensi dalam rentang batas kemampuan mata manusia. Untuk selanjutnya, kita menggunakan istilah cahaya untuk gelombang elektromagnetik cahaya tampak.

## 2. Cahaya

Dalam kehidupan sehari-hari, cahaya merupakan satu dari sekian banyak hal yang sangat berpengaruh, seperti fotografi, sumber energi listrik sel surya, medis dan lain hal lainnya, UNESCO menetapkan tahun 2015 sebagai Tahun Cahaya Internasional dan Teknologi Pencahayaan (Zwinkels, 2015). Cahaya ketika digunakan untuk memodelkan radiasi optik, yang didefinisikan sebagai radiasi gelombang elektromagnetik yang memiliki panjang gelombang antara 10 nm sampai 1 mm yang mencakup daerah spektrum gelombang elektromagnetik yaitu sinar x, sinar gamma, ultraviolet, cahaya tampak dan inframerah.

Cahaya merupakan kesan (energi) yang diterima oleh indera

penglihatan. Cahaya juga dapat didefinisikan sebagai radiasi yang ditangkap dari sudut pandang kemampuan untuk merangsang sistem visual penglihatan, pada manusia sendiri terbatas pada panjang gelombang 380 sampai dengan 780 nanometer Para ilmuwan mengemukakan hakikat dari cahaya yaitu:

1. Teori kospukuler menurut Newton (*The cospucular theory of light*)(1650).

Newton mengemukakan bahwa cahaya merupakan partikel-partikel atau korpuskel-korpuskel yang dipancarkan oleh sumber cahaya dan merambat menurut garis lurus dengan kecepatan besar. Teori ini juga menjelaskan pemantulan dan pembiasan, akan tetapi, teori ini tidak dapat digunakan untuk menjelaskan interferensi. Interferensi dijelaskan oleh teori selanjutnya yaitu teori gelombang.

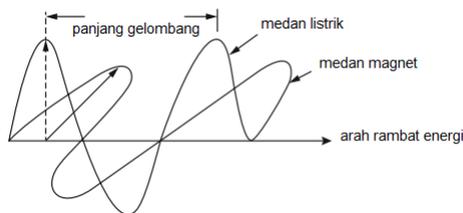
2. Teori gelombang menurut Christian Huygens(1678).

Huygen menjelaskan bahwa cahaya merupakan gelombang yang berasal dari sumber yang bergetar yang merambat dalam medium yang disebut dengan eter, yaitu zat yang mengisi seluruh ruangan termasuk ruang vakum. Dalam teori ini, eter sebenarnya tidak ada, akan tetapi hanya sebagai permodelan dari teori ini agar lebih mudah diterima. Teori yang dikemukakan oleh Huygens ini menjelaskan juga tentang interferensi, difraksi dan juga polarisasi dari cahaya.

3. Teori gelombang elektromagnetik menurut James clerk Maxwell (*The electromagnetic wave theory of light*)(1864).

Dalam teori Maxwell ini menjelaskan bahwa cahaya merupakan gelombang elektromagnetik (Sarojo, 2011).

Sebagai gelombang elektromagnetik, cahaya merupakan osilasi secara transversal dari medan listrik dan juga medan magnet yang saling terikat yang merambat pada ruang. Dalam gelombang elektromagnetik sendiri tidak diperlukan media perantara, Maxwell mengungkapkan bahwa medan listrik tegak lurus antara satu dengan yang lain dan juga tegak lurus terhadap arah rambat gelombang yaitu transversal, cahaya juga dapat terpolarisasi secara linier, elips maupun melingkar. Cahaya dikatakan terpolarisasi linier secara total jika vektor medan listrik secara keseluruhan berorientasi pada bidang yang sama dan juga sejajar dengan arah yang tetap, arah disini yaitu arah polarisasinya. Akan tetapi, cahaya tidak terpolarisasi ketika medan listriknya berosilasi secara acak kesegala arah. Cahaya ketika memiliki fase 0 sampai 180, maka cahaya tersebut terpolarisasi secara linier, jika derajat fasenya 90 sampai dengan 270 dengan disertai amplitudo yang seragam maka bisa dikatakan terpolarisasi secara sirkuler, akan tetapi jika derajat fasenya tidak 0, 90, 180 atau 270 dengan disertai atau tidak amplitudo yang berbeda-beda, maka bisa disebut terpolarisasi secara elips, dengan gelombang elektromagnetik ditunjukkan oleh gambar 2.3.



Gambar 2.3. Gelombang Elektromagnetik

Cahaya memiliki frekuensi, panjang gelombang, amplitudo dan intensitas. Intensitas pada cahaya menggambarkan jumlah energi yang mengalir pada gelombang elektromagnetik dan sebanding dengan kuadrat dari amplitudo, dari sini digunakan untuk menentukan arah perjalanan gelombang. Gelombang elektromagnetik dari semua panjang gelombang berjalan memiliki kecepatan yang sama didalam ruang hampa. Konstanta ini dikenal sebagai kecepatan cahaya dalam ruang hampa, dilambangkan dengan simbol  $c$  yang bernilai 299.792.458 meter per detik (Zwinkels, 2015).

Ketika Cahaya melalui suatu medium maka akan mengurangi nilai panjang gelombang dan juga cepat rambat rambatnya, hal ini disebabkan oleh indeks bias dari medium yang dilalui. Cahaya juga bereaksi ketika berpindah dari suatu medium ke medium yang lain, yaitu menimbulkan fenomena refleksi, transmisi dan juga refraksi.

Satuan terkecil dalam radiasi elektromagnetik disebut dengan foton, energi foton dirumuskan menjadi

$$E = h\nu \quad (2.12)$$

dimana,  $h$  merupakan konstanta *Planck* yaitu  $6.62606 \times 10^{-34} Js$ . Cahaya dapat diartikan menjadi aliran dari foton yang individu dengan energi tertentu dan dapat berinterferensi seperti gelombang dan juga berdifraksi disekitar sudut (Pedrotti, 2017).

Ketika cahaya berinteraksi dengan materi, fenomena yang berbeda dapat terjadi tergantung pada hubungan panjang gelombang (frekuensi) cahaya dengan ukuran frekuensi resonansi dari materi yang dilalui oleh cahaya. Materi ini terdiri dari atom, ion, dan molekul. Seperti disebutkan di atas, hanya cahaya di bagian spektrum yang terlihat dengan frekuensi  $10^{14}$  hingga

$10^{15}$  yang dapat merangsang reseptor visual dari mata manusia. Cahaya juga dapat menunjukkan sifat gelombang atau partikel tergantung pada interaksi antara ukuran (frekuensi) partikel. Untuk gelombang-gelombang cahaya yang jaraknya berdekatan dengan jarak dari materi yang dilaluinya, ini akan mengganggu muka gelombang primer, serta satu sama lain akan menghasilkan pola difraksi. Karena muka gelombang sekunder ini dihasilkan dari gelombang primer yang sama, fasenya akan berubah secara bertahap. Untuk setiap sumber cahaya yang tidak koheren, perilaku seperti gelombang yaitu difraksi dan interferensi dapat dilihat pada kondisi tertentu.

Banyak efek warna-warni yang dihasilkan oleh kombinasi difraksi dan interferensi cahaya. Di alam, hal ini dapat dilihat. Untuk gelombang cahaya yang sangat kecil dalam kaitannya dengan partikel pengganggu, seperti interaksi cahaya tampak dengan partikel debu atau molekul gas di atmosfer, terjadi hamburan Rayleigh yang menghasilkan warna biru langit. Namun, ketika cahaya berinteraksi dengan objek yang besar dalam hubungannya dengan panjang gelombangnya, seperti dinding bata atau panel kaca, cahaya berperilaku sebagai partikel dengan hukum geometri optik dapat diterapkan, Hal ini bergantung pada transparansi atau menembusnya cahaya pada bahan dan juga kualitas permukaannya, cahaya akan dipantulkan, dibiaskan, ditransmisikan, diserap, atau dihamburkan. Jenis interaksi cahaya yang mendominasi tergantung pada sifat materi.

Panjang gelombang yang berbeda dalam spektrum yang terlihat juga dapat secara langsung merangsang warna yang berbeda dalam sistem visual manusia. Dalam hal ini warna bergantung pada panjang gelombang pada tiap-tiap cahaya, daftar

warna untuk setiap panjang gelombang ditunjukkan pada tabel 2.1 (Zwinkels, 2015).

Tabel 2.1. Warna untuk setiap panjang gelombang

PANJANG GELOMBANG	WARNA
400 - 430 nm	Ungu
430 - 480 nm	Biru
480 - 560 nm	Hijau
560 - 590 nm	Kuning
590 - 620 nm	Orange
620 - 700 nm	Merah

### 3. Sifat-Sifat Cahaya

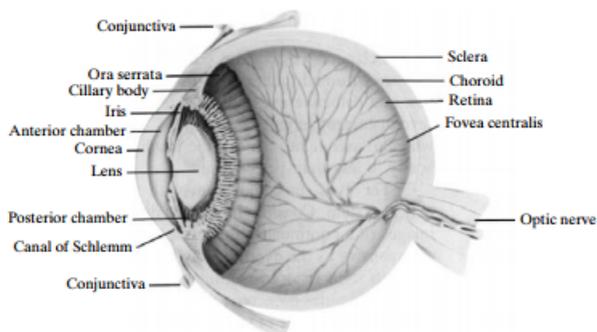
1. Materi yang di lewati cahaya dapat diklasifikasikan berdasarkan respon dari materi terhadap cahaya yaitu
  - (a) Materi buram: Materi buram atau gelap menyerap cahaya dan menyegah cahaya agar tidak diteruskan,
  - (b) Materi transparan: Cahaya dapat melewati materi tersebut tanpa memberikan efek apapun,
  - (c) Materi tembus cahaya: Cahaya dapat melewati materi tersebut akantetapi cahaya yang melalui materi tersebut akan mengalami distorsi.
2. Cahaya juga harus mengikuti hukum refleksi (pemantulan) yaitu perubahan arah rambat cahaya setelah menumbuk bidang pantul. Pemantulan cahaya dapat terjadi dengan dua cara, yaitu:

- (a) Pemantulan Baur (Refleksi difusi) terjadi ketika cahaya jatuh ke permukaan yang tidak rata, sehingga cahaya dipantulkan ke berbagai arah yang mengakibatkan sudut pantulnya tidak sama antara sinar pantul satu dengan sinar pantul yang lain,
  - (b) Pemantulan Teratur (Refleksi reguler) terjadi ketika cahaya jatuh ke permukaan yang rata, sehingga sinar-sinar pantulnya dipantulkan dengan arahnya sama yang mengakibatkan pembentukan sudut yang sama dengan cahaya datang.
3. Cahaya juga mengalami refraksi,yaitu pembelokan atau pembiasan pada cahaya, refraksi terjadi ketika cahaya mengalami perpindahan medium dan perubahan kecepatan yang bergantung pada setiap indeks bias dari tiap-tiap medium yang dilaluinya.
  4. Cahaya terdispersi atau tersebaran yang dimana cahaya dipisahkan menjadi warna-warna tertentu akibat dari perbedaan derajat dari refraksi.
  5. Cahaya terdifraksi yaitu pembelokan terhadap gelombang cahaya yang melewati celah kemudian gelombang cahaya yang melewati celah tersebut akan berperilaku sebagai sumber cahaya.
  6. Interferensi untuk cahaya yaitu dua buah gelombang yang saling bertemu yang menyebabkan kondisi gelombang tersebut masuk atau keluar dari fase tergantung dengan puncak atau palung dari garis gelombang tersebut yang bertemu, interferensi konstruktif yaitu dua buah garis

puncak gelombang saling bersilangan sehingga gelombang tersebut berada didalam fase, sedangkan interferensi destruktif yaitu dua buah gelombang yang keluar dari fase.

### C. Sistem Optik Pada Mata

Mata merupakan sistem bio-optik yang berhubungan pada otak. Secara anatomis, bola mata berbentuk globe hampir berbentuk bulat, dengan diameter 22 mm yang menempel pada jaringan lemak pada tengkorak yang ditunjukkan oleh gambar 2.4. Secara optik, mata dapat ibaratkan sebagai lensa positif yang membiaskan cahaya yang datang pada bagian permukaan belakang mata untuk mengambarkan suatu objek. Cahaya masuk ke mata



Gambar 2.4. Bagian-Bagian Pada Organ Mata

melalui kornea, sebuah sel saraf transparan tanpa pembuluh darah dengan diameter 12 mm dengan tebal di bagian tengahnya 0,6 mm, kornea juga memiliki indeks bias 1,376 yang berubah ketika dibagian airkornea menjadi 1,38, kornea memberikan sekitar 75% dari total indeks bias mata. Dibelakang kornea terdapat ruangan *anterior chamber* yang berisi cairan *aqueous humor*

sebagai nutrisi bagi kornea, bagian ini juga memiliki indeks bias yaitu 1,336 dan juga dibagian ini terjadi pembelokan cahaya. Diruang belakang kornea terdapat juga iris mata, bagian khas dari mata yang berwarna yang digunakan untuk mengontrol jumlah cahaya yang masuk, lubang bukaan yang dilalui cahaya pada iris disebut dengan pupil mata, dua pasang otot halus pada iris yang digunakan untuk mengatur ukuran pupil sebagai respon dari rangsangan cahaya, ketika terang berdiameter sekitar 2 mm dan sekitar 8 mm ketika gelap. Setelah dari pupil, cahaya kemudian melalui lensa mata, lensa mata disini untuk memproses fokus dari cahaya yang diterima oleh mata, bentuk dari lensa sendiri atur oleh otot siliaris, yang ketika dalam keadaan tegang lensa melengkung yang menyebabkan peningkatan pembiasan cahaya dan ketika otot dalam keadaan rileks lensa akan mendatar kemudian menyebabkan pembiasan cahaya berkurang, indeks bias pada lensa pada inti lensa 1,41 sedangkan untuk daerah pinggiran lensa 1,38. Setelah cahaya masuk ke lensa mata, cahaya akan diteruskan ke bilik posterior (*humor vitreus*), bagian ini berbentuk jelly dengan indeks biasnya 1,336. kemudian cahaya akan diteruskan ke retina, yang terletak dibagian dalam mata, retina disini untuk menerima energi cahaya yang akan diubah menjadi bentuk elektrokimia yang kemudian akan diteruskan ke saraf optik, saraf optik disini yaitu garis batang utama yang membawa informasi visual dari retina ke otak (Pedrotti, 2017).

Secara ringkasnya, melihat dapat terjadi saat ada cahaya datang dari suatu benda ke mata. Cahaya datang dari suatu benda itu baik bendanya sendiri memancarkan cahaya, bendanya memantulkan cahaya yang didapat dari sumber cahaya lain, benda tersebut membiaskan cahaya dari sumber cahaya lain atau kemungkinan

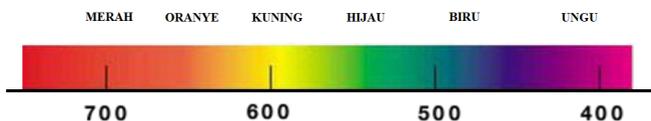
lainnya benda tersebut mendapatkan cahaya.

#### D. Warna

Warna yaitu satu dari sekian banyak hal yang unik dalam kehidupan, dari warna seseorang dapat meninjau berbagai masalah dengan warna, baik masalah persepsi, hubungan pikiran dengan anggota tubuh, anomali-anomali sains, skeptisisme, ketidakjelasan, meta-etika, estetika dan lain sebagainya. warna merupakan suatu bagian yang dimiliki oleh suatu objek untuk menghasilkan sensasi yang berbeda pada penglihatan sebagai efek dari cara objek memantulkan atau memancarkan cahaya. singkatnya warna itu kita bisa artikan sebagai sensasi atau rasa yang ditangkap oleh mata kemudian di proses oleh otak dengan karakteristik-karakteristik tertentu kemudian didefinisikan menjadi warna tertentu. kemudian dari warna diketahui istilah-istilah berikut:

##### 1. Hue

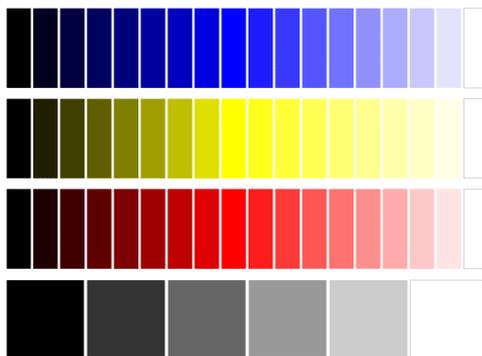
Hue merupakan identitas dari sebuah warna dari panjang gelombang yang mendominasi yang ditunjukkan oleh gambar 2.5. Panjang gelombang merupakan rentang panjang gelombang cahaya tampak.



Gambar 2.5. Warna-Warna dari Cahaya Tampak

## 2. Value (Lightness)

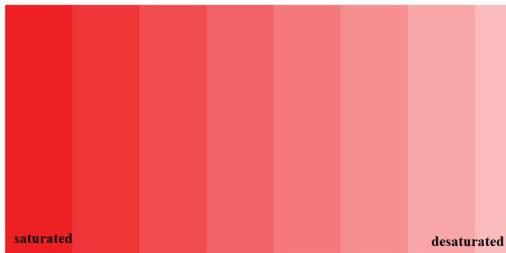
Value merupakan tingkat kecerahan suatu warna yang ditunjukkan oleh gambar 2.6. Ini menjadi salah satu hal mendasari akan adanya warna hitam, yaitu ketiadaan kecerahan akan setiap warna-warna. Akan tetapi banyak faktor lain yang menjadi sebab adanya warna hitam seperti lemahnya cahaya yang dipancarkan benda sehingga tidak sampai ke mata, cahaya dari benda diserap oleh benda lain sehingga mata tidak menerima cahaya tersebut, benda tersebut tidak menerima cahaya atau tidak memancarkan cahaya sendiri dan faktor-faktor lain sebagainya. Ketidadaan cahaya disini dimaksud dalam lingkup cahaya tampak, bukan berarti ketidadaan akan gelombang elektromagnetik.



Gambar 2.6. Value(lightness/darkness)

## 3. Saturasi(chroma)

Saturasi merupakan intensitas atau tingkat kemurnian suatu warna atau bisa disebut dengan nilai kepenuhan warna yang ditunjukkan oleh gambar 2.7.



Gambar 2.7. contoh saturasi warna merah

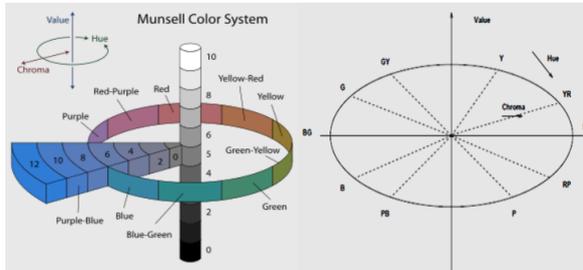
Dari sekian banyak warna, kita dapat menyederhanakan warna-warna tersebut menjadi suatu model warna. Model warna merupakan suatu sistem untuk mengukur warna yang dapat dirasakan oleh manusia, dan merupakan proses menggabungkan nilai-nilai yang berbeda sebagai satu set warna primer. Model warna tersebut antara lain:

1. Model Warna Munsell

Model paling dasar untuk model warna yaitu model Munsell yang dicetuskan Albert H Munsell. Model ini diwakilkan dengan silinder tiga dimensi dengan basis koordinatnya berupa Kecerahan(lightness), hue dan saturasi (kemurnian warna) yang ditunjukkan oleh gambar 2.8. Ide dasar dari model ini yaitu prinsip kesetaraan jarak antar komponen.

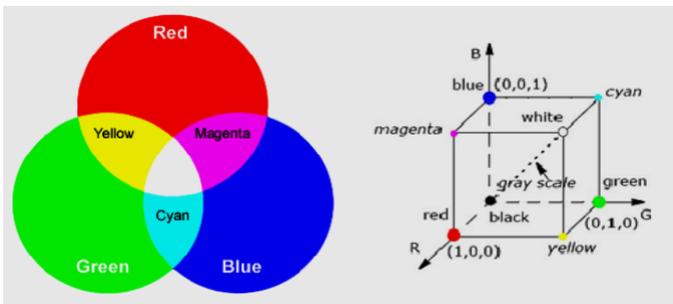
2. Model Warna RGB (Red-Green-Blue)

Model warna RGB merupakan sebuah model dengan warna primer yaitu merah, hijau dan biru. Model warna RGB diwakilkan dengan peta koordinat tiga dimensi yang hanya bernilai positif yang ditunjukkan oleh gambar 2.9. Warna merah ditunjukkan pada basis koordinat  $x$ , warna hijau pada basis koordinat  $y$  dan warna biru ditunjukkan pada basis



Gambar 2.8. Model Warna Munsell

koordinat  $z$ .



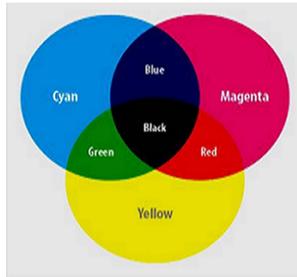
Gambar 2.9. Model Warna RGB

### 3. Model Warna CMYK (Cyan-Magenta-Yellow-Black)

Model warna CMYK merupakan turunan dari model warna RGB, model warna CMYK berdasarkan warna komplementer yaitu cyan, magenta, kuning dan hitam yang ditunjukkan oleh gambar 2.10.

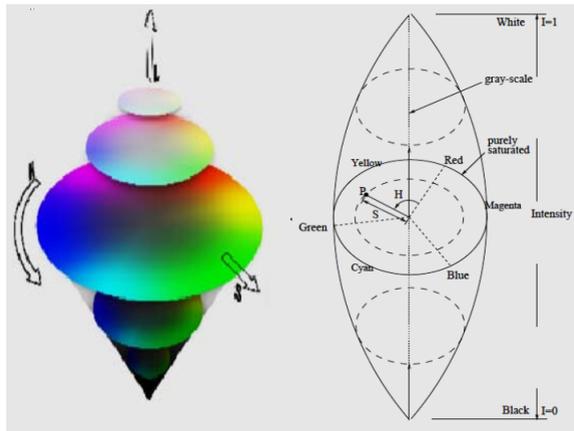
### 4. Model Warna HSI

Model warna HSI merupakan model warna dengan meninjau warna berdasarkan hue, saturasi dan intensitas. Model ini diwakilkan dengan kerucut ganda yang tersusun



Gambar 2.10. Model Warna CMYK

dari koordinat silinder sebagai wakilan titik RGB yang ditunjukkan oleh gambar 2.11 (Ibraheem, 2012).



Gambar 2.11. Model Warna HSI

## E. Geometri Diferensial

Pada subbab ini, dilakukan pembahasan pada salah satu cabang ilmu matematika yaitu geometri diferensial yang secara khusus berfokus ke arah geometri Riemannian pada subbab selanjutnya.

Yang dari sini dapat digunakan untuk memahami konsep dari ruang warna. Pembaca disini diasumsikan sudah paham akan konsep himpunan dan pemetaan.

## 1. Ruang Topologi

Topologi  $\tau$  didefinisikan sebagai daftar dari himpunan-himpunan terbuka dalam artian himpunan yang menjadi anggota  $\tau$  disebut dengan himpunan terbuka.

Andaikan  $X$  adalah suatu himpunan dan  $\mathcal{P}^X$  himpunan dari semua himpunan bagian di  $X$ .  $\tau \subseteq \mathcal{P}^X$  suatu topologi di  $X$  jika memenuhi syarat berikut:

1.  $\emptyset, X \in \tau$ .
2. untuk setiap  $U_i \in \tau$ , berlaku gabungan dari tiap  $U_i$  maupun irisan sejumlah berhingga dari  $U_i$  tetap anggota dari  $\tau$ .

dengan  $(X, \tau)$  disebut ruang topologis.

Dari definisi topologi ini dapat dilakukan pembahasan konsep barisan, konsep norma dan konsep jarak/metrik, kemudian dari konsep-konsep tersebut akan membentuk ruang topologis menjadi ruang bernorma dan ruang bermetrik (Zamakhsyari, 2014).

## 2. Keragaman

Pembahasan tentang Keragaman (*manifold*) berhubungan dengan kurva dan permukaan objek di sembarang dimensi. Konsep keragaman ini merupakan konsep dasar matematis dan paling pokok dalam bahasan geometri diferensial. Berbeda dengan ruang datar Euclidean yang titik-titik pada ruang dapat dilabeli dengan

satu sistem koordinat, pada keragaman yang secara umumnya berupa ruang lengkung diperlukan lebih dari satu sistem koordinat untuk melabeli titik-titik di suatu daerah di dalam keragaman dan pelabelan tersebut tidak berlaku pada daerah yang berbeda dengan keragaman yang sama.

Sebelum membahas keragaman, terlebih dahulu perlu diketahui konsep peta koordinat. Jika diberikan ruang topologis  $M$  dan  $\mathbb{R}^m$  yang merupakan himpunan barisan sebanyak  $m$ -buah bilangan riil, sebuah peta koordinat lokal (bisa juga disebut dengan peta) merupakan pasangan  $(U, \phi)$  dengan  $U \subseteq M$  merupakan himpunan terbuka dan pemetaan  $\phi$  merupakan homeomorfisma ( $\phi, \phi^{-1}$  kontinu dan bijektif) yang diberikan oleh persamaan (2.13).

$$\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^m, \quad (2.13)$$

dengan  $\phi(U)$  merupakan subhimpunan terbuka di  $\mathbb{R}^m$ .

Andaikan terdapat dua peta  $(U, \phi)$  dan  $(V, \psi)$  dari topologis  $M$ . Keduanya dapat dikatakan  $C^k$ -kompatibel, jika memenuhi salah satu diantara berikut

1.  $U \cap V = \emptyset$  atau
2.  $\psi \circ \phi^{-1} \big|_{\phi(U \cap V)} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  adalah  $C^k$ -difeomorfisma (homeomorfisma dan diferensiabel)

dengan  $C^k$  ( $k \in \mathbb{N} \cup \infty$ ) adalah kelas pemetaan kontinu yang dapat diturunkan sebanyak  $k$ -kali.

Atlas  $\mathcal{A}$  dikatakan  $C^k$ -Atlas jika  $\mathcal{A} := (U_i, \phi_i)_{i \in I}$  dengan  $I = \mathbb{N}$  sehingga untuk setiap peta pada atlas  $\mathcal{A}$  di ruang topologis  $M$  memenuhi:

1.  $\cup_{i \in I} U_i = M$

2. Untuk semua peta  $(U_i, \phi_i)$  saling  $C^k$ -kompatibel satu sama lain. Dari sini berarti untuk setiap  $U_{ij} := U_i \cup U_j$  dan  $\phi_{ij} := \phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i(U_{ij})}$  berlaku pemetaan kelas  $C^k$  yang ditunjukkan pada persamaan (2.14)

$$\phi_{ji} : \phi_i(U_{ij}) \rightarrow \phi_j(U_{ij}). \quad (2.14)$$

Atlas  $\mathcal{A}$  dapat dikatakan sebagai atlas maksimal kelas  $C^k$ , jika atlas  $\mathcal{A}$  berisi seluruh peta yang  $C^k$ -kompatibel dengan seluruh peta anggota atlas  $\mathcal{A}$ . Atlas maksimal  $\mathcal{A}$  kelas  $C^k$  ini dapat juga disebut dengan struktur diferensial kelas  $C^k$  yang ditentukan oleh atlas  $\mathcal{A}$ . Untuk  $C^k$  dengan  $k = \infty$ , struktur diferensiabelnya disebut dengan struktur licin (*smooth structure*).

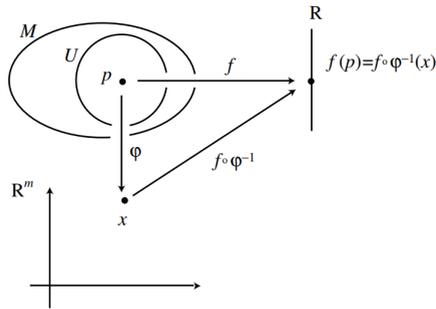
Keragaman pada kelas  $C^k$  merupakan pasangan ruang topologis  $M$  dengan atlas maksimal kelas  $C^k$   $\mathcal{A}$  yang dapat dituliskan sebagai  $(M, \mathcal{A})$ . Keragaman merupakan sebuah ruang topologis yang homeomorfisme secara lokal terhadap  $\mathbb{R}^n$  dan "boleh" menjadi berbeda secara global terhadap  $\mathbb{R}^n$  (Zamakhsyari, 2014).

### 3. Vektor

Didalam konsep keragaman, vektor dipandang sebagai vektor singgung pada suatu kurva di  $M$ . Dengan mengawali meninjau garis singgung suatu kurva pada bidang  $(x, y)$ , jika kurva tersebut diferensiabel, dapat kita perkirakan garis singgung di sepanjang  $x_0$  dengan yang ditunjukkan pada persamaan (2.15)

$$y - y(x_0) = a(x - x_0), \quad (2.15)$$

dimana  $a = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ . Vektor singgung pada keragaman  $M$  berhimpitan dengan garis singgung. Untuk mendefinisikan vektor singgung dibutuhkan sebuah pemetaan kurva  $c : (a, b) \rightarrow M$  dan juga sebuah fungsi pemetaan  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , dimana  $(a, b)$  merupakan interval terbuka yang terkandung didalamnya  $t = 0$  yang ditunjukkan pada gambar 2.12.



Gambar 2.12. fungsi pemetaan  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$

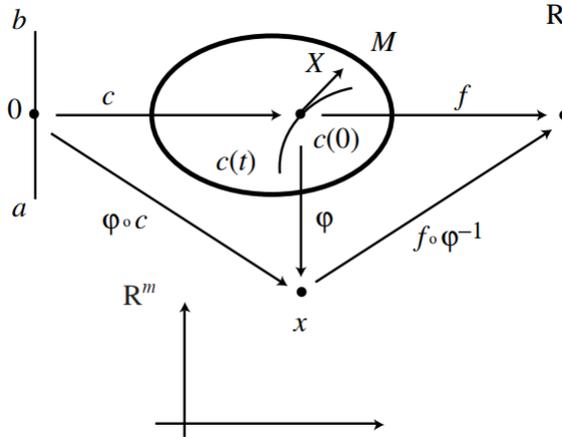
Vektor singgung pada titik  $c(0)$  dapat diperoleh dari turunan berarah fungsi  $f$  sejauh kurva  $c(t)$  saat  $t = 0$  yang digambarkan pada gambar 2.13.

Tingkat perubahan dari fungsi  $f(c(t))$  saat  $t = 0$  di sepanjang kurva yang ditunjukkan pada persamaan (2.16)

$$\left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0}, \quad (2.16)$$

secara koordinat lokal maka menjadi yang ditunjukkan pada persamaan (2.17)

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right|_{t=0}. \quad (2.17)$$



Gambar 2.13. kurva  $c$  dan fungsi  $f$  untuk mendefinisikan vektor singgung sepanjang kurva pada turunan berarah

Turunan  $\frac{\partial f}{\partial x^\mu}$  disini bermaksud  $\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1}(x))}{\partial x^\mu}$ . Andaikan  $\frac{df(c(t))}{dt}$  saat  $t = 0$  diperoleh dari penerapan operator diferensial  $X$  ke  $f$  dimana

$$X = X^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right), \text{ dengan : } X^\mu = \left. \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right|_{t=0}, \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (2.18)$$

( $\partial_\mu$  basis bagi ruang singgung). Maka dari yang telah ditentukan diatas dapat dituliskan sebagai yang ditunjukkan pada persamaan (2.19)

$$\left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right|_{t=0} = X^\mu \left( \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right) = X[f], \quad (2.19)$$

dari penyelesaian di atas, operator  $X$  dapat didefinisikan sebagai vektor singgung pada  $M$  saat  $p = c(0)$  disepanjang kurva  $c(t)$ . Jika

ditransformasikan ke sistem koordinat yang lain, kita ambil misal peta  $(V, \sigma)$  dengan koordinat lokalnya  $y^\nu$ , maka operator  $X$  akan menjadi yang ditunjukkan pada persamaan (2.20)

$$\begin{aligned} X &= \left( \frac{dy^\nu(c(t))}{dt} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right) \\ &= \left( \tilde{X}^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

kemudian didapatkan hubungan antar koordinat yang ditunjukkan pada persamaan (2.21)

$$\left( X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) = \left( \tilde{X}^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right), \quad (2.21)$$

yang secara tidak langsung dapat dituliskan pada persamaan (2.22)

$$\tilde{X}^\nu = X^\mu \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}, \quad (2.22)$$

Jika terdapat dua buah kurva  $c_1(t)$  dan  $c_2(t)$  di titik  $p$  pada keragaman  $M$ , maka kelas ekuivalen dapat didefinisikan sebagai berikut

1.  $c_1(0) = c_2(0) = p$ ,
2.  $\left. \frac{dx^\mu(c_1(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dx^\mu(c_2(t))}{dt} \right|_{t=0}$ .

Satu kelas ekuivalen dari kurva-kurva yang melalui titik  $p$  merupakan vektor-vektor singgung di titik  $p$ . Kumpulan vektor-vektor akan membentuk ruang vektor atau biasa disebut dengan ruang singgung pada  $M$  yang dapat dinotasikan sebagai  $T_p M$ . Kemudian dapat diketahui juga vektor jodoh (*dual vector*) yang merupakan wakil dari pemetaan secara linier

ruang singgung ke ruang rill yang dinotasikan sebagai  $w_p$ , yang ditunjukkan pada persamaan (2.23)

$$\begin{aligned} w_p : T_p M &\rightarrow \mathbb{R}, w_p \in T_p^* M \\ &: X_p \mapsto w_p(X_p) \equiv \langle w_p, X_p \rangle, \end{aligned} \quad (2.23)$$

dengan  $T_p^* M$  yaitu ruang jodoh (*dual space*) yang merupakan sekumpulan dari vektor-vektor jodoh.

Dengan mendefinisikan suatu inner produk yang ditunjukkan pada persamaan (2.24)

$$\langle, \rangle : T_p^* M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.24)$$

dan jika basis dari  $T_p M$  yaitu  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  maka basis bagi  $T_p^* M$  berupa  $dx^\mu$ , oleh karena itu berlaku hubungan yang ditunjukkan pada persamaan (2.25)

$$\langle dx^\nu, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \rangle \equiv \delta_\mu^\nu. \quad (2.25)$$

#### 4. Tensor

Tensor tipe  $(q, r)$  merupakan pemetaan multilinier dari sejumlah  $q$ -buah  $T_p^* M$  dan juga sejumlah  $r$ -buah  $T_p M$  ke bilangan rill  $\mathbb{R}$ , yang ditunjukkan pada persamaan (2.26),

$$T_p^{q,r} : T_p^* M \times \dots \times T_p^* M \times T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.26)$$

dapat dituliskan secara lokal sebagai yang ditunjukkan pada persamaan (2.27)(Nakahara, 2003).

$$T_p^{q,r} = T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_q} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_r}. \quad (2.27)$$

## 5. Medan Tensor

Kita melakukan pendekatan terlebih dahulu ke medan vektor. Medan vektor merupakan penyematan suatu vektor pada setiap titik di suatu keberagaman  $M$  yang dinotasikan sebagai  $X$  (Nakahara, 2003). Sama halnya dengan konsep medan pada medan vektor yang berupa "penyematan", maka medan tensor didefinisikan sebagai penyematan tensor dengan tipe  $(q, r)$  pada setiap titik di keragaman  $M$ .

### F. Geometri Rimannian

#### 1. Tensor Metrik

Andaikan suatu keragaman  $M$  merupakan keragaman diferensiabel, metrik Riemannian  $g$  pada keragaman  $M$  merupakan medan tensor pada  $M$  tipe  $(0, 2)$  yang untuk setiap  $p \in M$  memenuhi aksioma berikut:

1.  $g_p(U, V) = g_p(V, U)$  (menunjukkan kesimetrisan),
2.  $g_p(U, U) \geq 0$  (tidak pernah negatif),

dimana  $U, V \in T_p M$  dan  $g_p = g|_p$ . Tensor  $g_p$  merupakan bentuk simetris yang positif-definit bilinear. Medan tensor  $g$  secara lokal dapat dituliskan sebagai yang ditunjukkan pada persamaan (2.28).

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.28)$$

Medan tensor  $g$  tipe  $(0, 2)$  dikatakan sebagai metrik pseudo-Riemannian jika memenuhi syarat (1) dari metrik Riemannian dan juga

2\*. jika  $g_p(U, V) = 0$  untuk setiap  $U \in T_pM$ , maka  $V = 0$  (Nakahara, 2003).

## 2. Koneksi affine

Koneksi affine  $\nabla$  merupakan suatu pemetaan  $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  atau  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$  yang memenuhi kondisi yang ditunjukkan pada persamaan (2.29) sampai (2.32)

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z, \quad (2.29)$$

$$\nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z, \quad (2.30)$$

$$\nabla_{(fX)}Z = f\nabla_X Z, \quad (2.31)$$

$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y, \quad (2.32)$$

dimana  $f \in \mathcal{F}(M)$  dan  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  dengan  $\mathcal{F}(M)$  merupakan himpunan dari fungsi licin (*smooth function*) pada  $M$  dan  $\mathfrak{X}(M)$  merupakan himpunan dari medan vektor  $X$  di  $M$ .

Andaikan suatu peta  $(U, \varphi)$  dengan koordinat  $x = \varphi(p)$  pada keragaman  $M$ , dan dengan mendefinisikan fungsi  $m^3$  yaitu  $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ , maka dapat dituliskan yang ditunjukkan pada persamaan (2.33)

$$\nabla_\nu \partial_\mu = \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu = \partial_\lambda \Gamma_{\nu\mu}^\lambda, \quad (2.33)$$

dengan  $\{\partial_\mu\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\}$  merupakan basis koordinat pada  $T_pM$ . Persamaan (2.33) merupakan persamaan koefisien koneksi (Nakahara, 2003).

### 3. Kelengkungan

#### a. Simbol Christoffel

Dalam menentukan kelengkungan suatu ruang bergantung pada koneksi yang didefinisikan dari metrik. Koneksi dalam hal ini dapat juga di ungkapkan dengan keterlibatan metrik yang secara lokal disajikan dalam Simbol Christoffel. Simbol Christoffel didapatkan dengan mendefinisikan suatu turunan kovarian dari suatu tensor yang ditunjukkan pada persamaan (2.34)

$$\begin{aligned} \nabla_{\sigma} T_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l}^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k} \equiv & \partial_{\sigma} T_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l}^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k} \\ & + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l}^{\lambda, \mu_2, \dots, \mu_k} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2} T_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l}^{\mu_1, \lambda, \dots, \mu_k} + \dots \\ & - \Gamma_{\sigma\nu_1}^{\lambda} T_{\lambda, \nu_2, \dots, \nu_l}^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^{\lambda} T_{\nu_1, \lambda, \dots, \nu_l}^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k} - \dots, \end{aligned} \quad (2.34)$$

objek tensor disini yaitu metrik  $g_{\mu\nu}$  yang merupakan tensor tipe  $(0, 2)$ , oleh karena itu tensor  $T_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l}^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k}$  menjadi  $T_{\nu_1\nu_2}$  maka persamaan (2.34) menjadi

$$\nabla_{\sigma} T_{\nu_1\nu_2} = \partial_{\sigma} T_{\nu_1\nu_2} - \Gamma_{\sigma\nu_1}^{\lambda} T_{\lambda\nu_2} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^{\lambda} T_{\nu_1\lambda}, \quad (2.35)$$

dengan  $T_{\nu_1\nu_2} = g_{\mu\nu}$ ,

$$\nabla_{\sigma} g_{\mu\nu} = \partial_{\sigma} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} g_{\mu\lambda}, \quad (2.36)$$

Didefinisikan suatu koneksi unik pada keragaman yang di ungkapkan melalui metrik  $g_{\mu\nu}$ , diberikan syarat yaitu

1. Bebas torsi :  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = -\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$ ,
2. kekompatibilitas dari metrik:  $\nabla_{\sigma} g_{\mu\nu} = 0$ ,

berdasarkan sifat kekompatibilitasan metrik, dengan dilakukan permutasi pada ketiga index  $(\sigma, \mu, \nu)$  dari persamaan (2.36)

didapatkan persamaan (2.37), (2.38) dan (2.39),

$$\nabla_{\sigma} g_{\mu\nu} = \partial_{\sigma} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} g_{\nu\lambda}, \quad (2.37)$$

$$\nabla_{\nu} g_{\sigma\mu} = \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} g_{\sigma\lambda}, \quad (2.38)$$

$$\nabla_{\mu} g_{\nu\sigma} = \partial_{\mu} g_{\nu\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} g_{\lambda\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} g_{\nu\lambda}, \quad (2.39)$$

dengan melakukan operasi persamaan (2.37) dikurangi dengan persamaan (2.38) dan persamaan (2.39), dengan  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ , maka menjadi yang ditunjukkan pada persamaan (2.40)

$$\partial_{\sigma} g_{\mu\nu} - \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + 2\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} g_{\lambda\sigma} = 0, \quad (2.40)$$

kemudian untuk memperoleh simbol Christoffel, persamaan (2.40) diubah menjadi persamaan (2.41)

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} g_{\lambda\sigma} &= \frac{1}{2} (\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}) \\ g^{\kappa\sigma} g_{\lambda\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{1}{2} g^{\kappa\sigma} (\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (2.41)$$

dengan  $g^{\kappa\sigma} g_{\lambda\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \delta_{\lambda}^{\kappa} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}$ , kemudian didapatkan persamaan yang ditunjukkan pada persamaan (2.42)

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} = \frac{1}{2} g^{\kappa\sigma} (\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}), \quad (2.42)$$

persamaan untuk simbol Christoffel ditunjukkan pada persamaan (2.42). Notasi  $\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}$  terlihat seolah-olah tensor, akan tetapi simbol Christoffel bukanlah tensor, melainkan simbol Christoffel merupakan koefisien koneksi (Carol, 1997)(Nakahara, 2003).

### b. Tensor Riemannian

Tensor Riemannian atau bisa juga disebut dengan tensor kelengkungan Riemannian merupakan tensor dengan tipe  $(1, 3)$  yang memetakan tiga buah himpunan medan vektor pada suatu keragaman ke suatu himpunan medan vektor, yang secara matematis dapat dituliskan pada persamaan (2.43),

$$R : \mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (2.43)$$

dengan

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad (2.44)$$

$R(X, Y, Z)$  dapat dituliskan menjadi  $R(X, Y)Z$ , operator  $R$  terlihat seperti beraksi pada  $Z$ , sehingga memenuhi

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z, \quad (2.45)$$

yang dapat dibuktikan dengan

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= -(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z) \\ &= -(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y, X]} Z). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Tensor  $R$  harus memenuhi pemetaan multilinear

1.

$$R(fX, gY)hZ = fghR(X, Y)Z, \quad (2.47)$$

2.

$$\begin{aligned}
R(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2, Z_1 + Z_2) &= R(X_1, Y_1, Z_1) + R(X_1, Y_1, Z_2) \\
&\quad + R(X_1, Y_2, Z_1) + R(X_1, Y_2, Z_2) \\
&\quad + R(X_2, Y_1, Z_1) + R(X_2, Y_1, Z_2) \\
&\quad + R(X_2, Y_2, Z_1) + R(X_2, Y_2, Z_2),
\end{aligned} \tag{2.48}$$

dengan pembuktian syarat pemetaan linier dapat dilihat pada lampiran B. Dari pemetaan multilinier yang ditunjukkan persamaan (2.47), dapat diketahui bahwa  $R$  memenuhi.

$$R(X, Y)Z = X^\mu Y^\nu Z^\lambda R(\partial_\mu, \partial_\nu) \partial_\lambda. \tag{2.49}$$

$R$  merupakan medan tensor tipe  $(1, 3)$  dikarenakan  $R$  memetakan tiga medan vektor ke sebuah medan vektor

$$R(\partial_\mu, \partial_\nu) \partial_\lambda = R_{\lambda\mu\nu}^\gamma \partial_\gamma, \tag{2.50}$$

dengan menggunakan konsep inner produk  $\langle, \rangle$  pada persamaan (2.50)

$$\begin{aligned}
\langle dx^\kappa, R(\partial_\mu, \partial_\nu) \partial_\lambda \rangle &= \langle dx^\kappa, R_{\lambda\mu\nu}^\gamma \partial_\gamma \rangle \\
&= R_{\lambda\mu\nu}^\gamma \langle dx^\kappa, \partial_\gamma \rangle \\
&= R_{\lambda\mu\nu}^\gamma \delta_\gamma^\kappa \\
&= R_{\lambda\mu\nu}^\kappa,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

dengan menghitung nilai medan tensor  $R_{\lambda\mu\nu}^\kappa$  disertai definisi dari tensor kelengkungan Riemannian, didapatkan persamaan tensor

kelengkungan Riemannian ditunjukkan pada persamaan (2.52).

$$R_{\lambda\mu\nu}^{\kappa} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\lambda}^{\kappa} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\eta}^{\kappa} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\kappa}. \quad (2.52)$$

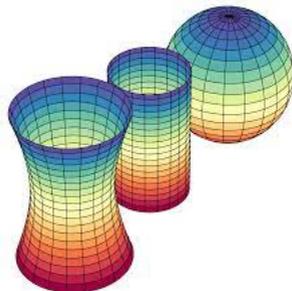
dengan pembuktian persamaan tensor kelengkungan Riemannian diatas dapat dilihat di lampiran C (Nakahara, 2003).

Kelengkungan ruang sebagaimana yang dikenal dalam keseharian (untuk ruang 1 dimensi dan 2 dimensi) tidak dapat langsung terlihat dari nilai tensor kelengkungan Riemannian, hal ini dikarenakan tensor kelengkungan Riemannian berlaku lebih umum untuk sembarang dimensi. Akan tetapi, ketika tensor kelengkungan Riemannian  $R_{\lambda\mu\nu}^{\kappa} = 0$  dapat dipastikan bahwa ruang tersebut datar, karena kelengkungan tersebut bernilai nol seragam di segala sisi. Sebagai contoh bentuk ruang datar 2 dimensi adalah seperti selimut silinder yang ditunjukkan oleh gambar 2.14 atau bidang datar biasa. Ketika nilai tensor kelengkungan  $R_{\lambda\mu\nu}^{\kappa} \neq 0$ , "bentuk" ruang salah satunya dapat diketahui dari kelengkungan bagiannya (*sectional curvature*) atau yang lebih dikenal dengan nama kelengkungan Gaussian  $K(X, Y)$  yang dapat diperoleh dari persamaan (2.53)

$$\begin{aligned} K(X, Y) &= \frac{Rm(X, Y, X, Y)}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= \frac{Rm(X, Y, X, Y)}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} \end{aligned} \quad (2.53)$$

dengan  $X, Y \in T(M)$  dan  $Rm(X, Y, X, Y)$  merupakan tensor kelengkungan Riemannian yang kovarian dengan 4 medan tensor,  $|X|, |Y|$  merupakan norma dari medan vektor  $X$  dan  $Y$  dan  $\langle X, Y \rangle$  merupakan produk skalar. Kemudian ketika  $K(\mu, \nu) > 0$  kelengkungan ruang secara dua dimensi dapat diwakilkan oleh

permukaan bola, ketika  $K(\mu, \nu) < 0$  kelengkungan ruang secara dua dimensi dapat diwakilkan oleh permukaan hiperbolik yang ditunjukkan oleh gambar 2.14. (Lee, 1997)



Gambar 2.14. Kelengkungan berdasarkan Tensor Riemannian

#### 4. Geodesik

Di ambil suatu kurva yang terdapat pada suatu keragaman, kemudian dapat didefinisikan suatu transport paralel dari suatu vektor sepanjang kurva.

$$c : (a, b) \rightarrow M. \quad (2.54)$$

Andaikan dari suatu peta tunggal  $(U, \varphi)$  dengan koordinatnya berupa  $x = \varphi(p)$ , dengan  $X$  merupakan suatu medan vektor (setidaknya) sepanjang kurva  $c(t)$ .

$$X|_{c(t)} = X^\mu(c(t))\partial_\mu|_{c(t)}, \quad (2.55)$$

dengan  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  merupakan basis pada koordinat.

Andaikan  $X$  pada kondisi  $\nabla_V X = 0$  untuk setiap  $t \in (a, b)$ . maka  $X$  merupakan transport paralel sepanjang kurva  $c(t)$  dimana

$V = \frac{d(\varphi(c(t)))}{dt} = \left( \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right) \partial_\mu \Big|_{c(t)}$  yang merupakan vektor singgung pada kurva  $c(t)$ , dikarenakan kondisi  $\nabla_V X = 0$  maka dapat dituliskan yang ditunjukkan persamaan (2.56).

$$\frac{dX^\mu}{dt} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu(c(t))}{dt} X^\lambda = 0. \quad (2.56)$$

Namun, jika medan vektor  $X$  dalam hal ini daigantikan  $V(t)$  dengan kondisi ini ( $\nabla_V V = 0$ ), maka kurva  $c(t)$  adalah geodesik yang merupakan kurva paling memungkinkan ter lurus pada keragaman Riemannian. Secara umum, persamaan geodesik ditunjukkan pada persamaan (2.57)

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0, \quad (2.57)$$

dengan  $\{x^\mu\}$  koordinat dari  $c(t)$  (Nakahara, 2003).

## G. Ruang Warna

Salah satu faktor kita dianggap melihat, yaitu kita bisa menyadari keberadaan cahaya. Dalam hal ini cahaya merupakan gelombang elektromagnetik yang dapat tertangkap oleh mata manusia pada frekuensi tertentu. karena cahaya merupakan gelombang, maka didalam cahaya terdapat frekuensi, amplitudo dan panjang gelombang. Dengan indera kita yaitu mata, kita menginterpretasikan untuk setiap frekuensi dan panjang gelombang tertentu dengan warna. Semua hal tersebut masih terbatas yang manusia dapat lihat, yaitu warna di cahaya tampak.

Banyak warna di alam semesta yang kita ketahui, model RGB (red green blue) menjadi salah satu model untuk

menyederhanakan warna-warna tersebut dengan warna merah, hijau dan biru sebagai warna dasar. Jika kita menarik 3 warna dasar tersebut menjadi sebuah sistem koordinat, maka terciptalah sebuah sistem koordinat 3 dimensi dengan warna merah, hijau dan biru menjadi basisnya.

Dengan sistem koordinat yang digunakan berupa himpunan dari suatu model warna RGB, dengan ditarik kelilingkup yang lebih luas yaitu kemodel ruang, dalam hal ini disebut ruang warna  $\mathcal{P}$ . Ruang warna yaitu himpunan-himpunan yang memenuhi aksioma-aksioma yang berlaku. Resnikoff telah merumuskan aksioma-aksioma untuk membatasi suatu himpunan itu berlaku untuk ruang warna. Resnikoff menganalisa sifat geometris dan topologi dari ruang warna  $\mathcal{P}$  dengan mengacu pada aksioma *schrodinger*.

Aksioma 1 Jika  $x \in \mathcal{P}$  dan  $\alpha > 0$ , maka  $\alpha x \in \mathcal{P}$ .

aksioma ini menyatakan bahwa  $\alpha$  yang merupakan intensitas dari suatu warna, selalu bernilai positif yang menjadikan warna tersebut dapat kita rasakan keberadaannya.

Aksioma 2 Jika  $x \in \mathcal{P}$ , maka tidak akan ada suatu  $y \in \mathcal{P}$  yang sedemikian rupa sehingga  $x + y = 0$ .

Aksioma ini menyatakan tidak ada superposisi dari suatu cahaya yang dapat menghilangkan cahaya itu sendiri. Sebagai contohnya, jika dibuat suatu ruangan menjadi gelap, maka kita tidak dapat menambahkan cahaya (warna) dengan intensitas tertentu untuk menutupi cahaya (warna) yang sudah ada di ruangan tersebut dan menjadikannya gelap. Maka dari itu, dari aksioma ini dapat dinyatakan bahwa untuk setiap  $x \in \mathcal{P}$ , dengan  $x$  tidak memiliki invers, maka  $\mathcal{P}$

bukan ruang vektor.

Aksioma 3 Untuk setiap  $x, y \in \mathcal{P}$  dan  $\alpha \in [0, 1]$ , maka  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \mathcal{P}$ . Aksioma ini menyatakan bahwa kombinasi dari beberapa warna menjadikan kombinasi warna masih dalam lingkup ruang warna dan juga himpunan yang berlaku di ruang warna merupakan himpunan yang bersifat cembung (*convex*).

Aksioma 4 Setiap himpunan 4 warna, himpunan itu merupakan himpunan yang gayut linier. Oleh karena itu, jika ada  $x_k \in \mathcal{P}, k = 1, \dots, 4$ , maka terdapat  $\alpha_k \in \mathbb{R}$  dan  $\alpha_k \neq 0$  sedemikian rupa sehingga

$$\sum_{k=1}^4 \alpha_k x_k = 0 \quad (2.58)$$

dari aksioma 4 ini, dapat ditarik kesimpulan bahwa dimensi dari ruang vektor yang merupakan *span* dari ruang warna kurang atau sama dengan 3 dimensi.

Aksioma 5 Suatu ruang warna  $\mathcal{P}$  homogen secara lokal dengan mengikuti perubahan warna latar belakang

Aksioma ini menjelaskan tentang homogenitas lokal dari ruang warna  $\mathcal{P}$  terhadap perubahan latar belakang. Jika kita menembakkan suatu cahaya dengan warna tertentu di suatu titik, maka warna yang dirasakan oleh pengamat bergantung pada warna dari latar belakangnya, dan ketika warna dari latar belakang diubah, maka persepsi pengamat terhadap warna berubah dari cahaya asal. Transformasi

latar belakang  $B$  oleh Resnikoff diwakili dengan grup:

$$GL_+(\mathcal{P}) := \{B \in GL(\mathcal{V}) : \det(B) > 0 \wedge B(x) \in \mathcal{P}, \forall x \in \mathcal{P}\} \quad (2.59)$$

dimana  $GL(\mathcal{V})$  grup operator linier di  $\mathcal{V}$  yang memiliki invers, dengan syarat determinan dari perubahan transformasi pada latar belakang  $B$  lebih besar daripada 0 dan juga perubahan transformasi latar belakang disetiap titik ruang warna  $B(x)$  masih dalam lingkup dalam ruang warna, dan oleh sebab itu transformasi ini mempertahankan warna yang dikenainya untuk tetap berada di ruang warna  $\mathcal{P}$  dan stabil didalam tindakannya.

$GL(\mathcal{P})$  merupakan grup transformasi yang mempertahankan kelinieran dari ruang vektor  $\mathcal{V}$ . Dengan memperhatikan  $\mathcal{P}$  sebagai ruang topologis biasa, dari aksioma 5 ini menunjukkan bahwa untuk setiap  $x \in \mathcal{P}$  terdapat himpunan terbuka  $U \subset \mathcal{P}$  sehingga setiap  $y \in U$  dapat dinyatakan sebagai  $y = gx$  untuk beberapa  $g \in GL(\mathcal{P})$ .

Dari pengamatan perubahan transformasi latar belakang, dapat dikatakan bahwa  $\mathcal{P}$  merupakan homogen secara lokal terhadap  $GL_+(\mathcal{P})$ , akan tetapi,  $\mathcal{P}$  bersifat cembung sesuai dengan aksioma 3. Oleh sebab itu, perubahan latar belakang bisa dinyatakan homogen secara global.

$GL(\mathcal{P})$  merupakan subgrup dari  $GL(\mathcal{V})$  yang termasuk kedalam grup lie. Oleh karena itu, dalam teori kehomogenan ruang,  $\mathcal{P}$  dapat diidentifikasi sebagai ruang homogen  $GL(\mathcal{P})/K$ , dengan  $K$  isomorfis terhadap subgrup  $GL(\mathcal{P})$  yang menyisakan beberapa bagian di  $\mathcal{P}$  yang berupa subgrup

tertutup dari grup ortogonal yang berdampak pada subgrup kompak  $GL(\mathcal{P})$ . Dalam pemetaan  $x \mapsto \alpha x$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  dengan mempertahankan  $\mathcal{P}$ , maka disetiap  $g \in GL(\mathcal{P})$  dapat dinyatakan dalam bentuk  $g = \alpha \circ h$  dimana  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  dan  $h \in SL(\mathcal{P}) = GL(\mathcal{P}) \cap SL(\mathcal{V})$ ,  $SL(\mathcal{V})$  merupakan bagian dari  $GL(\mathcal{V})$  yang matrixnya mewakili basis dari  $\mathcal{V}$  dengan determinan +1. Maka dari itu,  $GL(\mathcal{P}) = \mathbb{R}^+ \times SL(\mathcal{P})$  dengan  $K$  sebagai subgrup kompak dari  $SL(\mathcal{P})$ .

Resnikoff terinspirasi dari model kasus Helmholtz dalam memodelkan  $\mathcal{P}$  serta memodifikasi model Stiles dari model Helmholtz. Didapatkan model ruang homogen

$$\mathcal{P} = GL(\mathcal{P})/K \simeq \mathbb{R}^+ \times SL(\mathcal{P}) \simeq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \quad (2.60)$$

Resnikoff juga menggunakan ruang homogen lain berikut untuk model ruang warnanya.

$$\mathcal{P} = GL(\mathcal{P})/K \simeq \mathbb{R}^+ \times SL(\mathcal{P}) \simeq \mathbb{R}^+ \times SL(2, \mathbb{R})/SO(2), \quad (2.61)$$

namun peneliti disini lebih berfokus pada himpunan  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  untuk mengkaji ruang warna resnikoff.

**Aksioma 6** Metrik Riemannian di  $\mathcal{P}$  yang mengukur perbedaan persepsi yaitu  $GL(\mathcal{P})$  merupakan metrik invarian.

Dalam aksioma ini dapat ditentukan metrik dari persepsi ruang warna yaitu berupa metrik invarian dan juga metrik riemannian. Oleh karena itu, jika terdapat  $x, y \in \mathcal{P}$  dan juga  $g \in GL(\mathcal{P})$  maka terdapat didalamnya pemetaan  $x \mapsto gx = y$ , dan jika terdapat  $G_x$  yang berupa metrik

didalam ruang singgung  $\mathcal{T}_x$  terhadap  $\mathcal{P}$  di  $x$  yang berakibat menghasilkan metrik Riemannian di  $\mathcal{P}$ , maka differensial  $dg$  terhadap  $g$  mengakibatkan isomorfisme dari  $\mathcal{T}_x$  di  $\mathcal{T}_{gx}$  dan  $G_{gx}$  didefinisikan menjadi

$$G_{gx}(dgX) = G_x(X), X \in \mathcal{T}_x \quad (2.62)$$

$GL(\mathcal{P})$  beraksi transitif pada  $\mathcal{P}$ , penentuan metriknya berdasarkan metrik dari  $G_x$  di  $\mathcal{T}_x$  tertentu tetapi untuk sembarang  $x \in \mathcal{P}$ . Dengan mengidentifikasi  $x$  dengan koset  $K$  dalam merealisasikan  $\mathcal{P}$  sebagai ruang homogen  $GL(\mathcal{P})/K$ . kemudian ternyata  $gx = x$  jika  $g \in K$  dan karenanya metrik  $G_x$  pada ruang singgung  $\mathcal{T}_x$  harus  $K$  invarian, yaitu  $G_x(dgX) = G_x(X)$  untuk  $g \in K$  dan  $X \in \mathcal{T}_x$ .

Jika  $\mathcal{P} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , dari sini  $K = \emptyset$  dan  $K$  secara invarian tidak memberikan batasan dalam metrik. Namun, metrik invarian  $GL(\mathcal{P})$  harus berupa penjumlahan metrik pada setiap faktor yang invarian pada  $\mathbb{R}^+$ . Karena metrik invarian  $\mathbb{R}^+$  ditentukan oleh konstanta positif pada ruang singgung disuatu titik, secara jelas disini bahwa semua metrik  $\mathbb{R}^+$  invarian di  $\mathbb{R}^+$ ,  $ds^2 = \left(\frac{dx}{x}\right)^2$  merupakan metrik invarian  $\mathbb{R}^+$  pada  $\mathbb{R}^+$ . Maka dari itu, secara umum metrik invarian  $GL(\mathcal{P})$  pada  $\mathcal{P} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  yaitu

$$ds^2 = \alpha_1 \left(\frac{dx_1}{x_1}\right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{dx_2}{x_2}\right)^2 + \alpha_3 \left(\frac{dx_3}{x_3}\right)^2, \quad (2.63)$$

dimana  $\alpha_k$  merupakan konstanta positif. Metrik ini merupakan bentuk umum dari teori Stiles dari metrik

Helmholtz (Resnikoff, 1974).

### BAB III

#### HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam menentukan geodesik dari metrik model ruang warna Resnikoff, disini digunakan metrik dari wakilan model ruang warna Resnikoff untuk  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  yang ditunjukkan pada persamaan (2.63), dari metrik tersebut kemudian ditentukan matriks  $g_{\mu\nu}$  yang diambil dari koefisien tiap-tiap suku dari metriks, setelah itu dicari nilai invers dari  $g_{\mu\nu}$  dalam hal ini disimbolkan sebagai  $g^{\mu\nu}$ . Setelah itu dihitung komponen simbol Christoffel yang dalam hal ini terdapat 27 komponen. Hasil yang didapatkan dari penghitungan simbol Christoffel kemudian dapat digunakan untuk menghitung tensor kelengkungan Riemannian. Dengan ditentukannya tensor kelengkungan Riemannian, kemudian dapat diketahui "bentuk" dari model ruang warna Resnikoff.

Dalam menentukan geodesik dengan bekal yang didapat dari komponen simbol Christoffel dan kemudian diterapkan pada persamaan umum geodesik tiap-tiap komponen simbol Christoffel, maka didapatkan persamaan kurva geodesik untuk ruang warna Resnikoff.

Seperti halnya sebelumnya disampaikan, Resnikoff memodifikasi ruang warna  $\mathcal{P}$  dari model Stiles dan Helmholtz. Kemudian didapatkan metrik ruang warna Resnikoff untuk  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  yang ditunjukkan pada persamaan (2.63). Dengan tetapan  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^+$  dan  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{P}$ . Persamaan (2.63) dapat diubah bentuk yang ditunjukkan pada persamaan (3.1) yaitu:

$$ds^2 = \left(\frac{\alpha_1}{x_1^2}\right) dx_1^2 + \left(\frac{\alpha_2}{x_2^2}\right) dx_2^2 + \left(\frac{\alpha_3}{x_3^2}\right) dx_3^2 \quad (3.1)$$

dari metrik diatas, bisa didapatkan matriks dari  $g_{\mu\nu}$  yang diambil dari konstanta tiap-tiap suku pada persamaan (3.2),

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{x_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2}{x_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_3}{x_3^2} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

kemudian dicari invers terhadap matriks  $g_{\mu\nu}$  (untuk mendapatkan  $g^{\mu\nu}$ ) yaitu:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{x_1^2}{\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_2^2}{\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x_3^2}{\alpha_3} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

dari kedua matriks tersebut, dapat diketahui bahwa komponen  $g_{\mu\nu}$  dan  $g^{\mu\nu}$  sama dengan nol ketika berlaku  $\mu \neq \nu$ . Kemudian diperoleh komponen-komponen matriks diagonalnya yaitu

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{\alpha_1}{x_1^2}, g^{11} = \frac{x_1^2}{\alpha_1} \\ g_{22} &= \frac{\alpha_2}{x_2^2}, g^{22} = \frac{x_2^2}{\alpha_2} \\ g_{33} &= \frac{\alpha_3}{x_3^2}, g^{33} = \frac{x_3^2}{\alpha_3} \end{aligned} \quad (3.4)$$

dari sini didapatkan nilai komponen dari matriks  $g_{\mu\nu}$  dan  $g^{\mu\nu}$  yang dapat digunakan untuk mencari nilai dari simbol Christoffel.

Nilai dari simbol Christoffel dapat diperoleh dari persamaan

(3.5) yaitu sebagai berikut:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda} (\partial_{\mu}g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}) \quad (3.5)$$

dengan  $\mu, \nu, \kappa, \alpha = 1, 2, 3$ . Dengan memasukkan nilai  $g_{\mu\nu}$  dan juga  $g^{\mu\nu}$ , didapatkan 27 komponen simbol Christoffel yaitu

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -x_1^{-1}, & \Gamma_{12}^1 &= 0, & \Gamma_{13}^1 &= 0 \\ \Gamma_{21}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^1 &= 0, & \Gamma_{23}^1 &= 0 \\ \Gamma_{31}^1 &= 0, & \Gamma_{32}^1 &= 0, & \Gamma_{33}^1 &= 0 \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, & \Gamma_{21}^2 &= 0, & \Gamma_{31}^2 &= 0 \\ \Gamma_{21}^2 &= 0, & \Gamma_{22}^2 &= -x_2^{-1}, & \Gamma_{32}^2 &= 0 \\ \Gamma_{31}^2 &= 0, & \Gamma_{23}^2 &= 0, & \Gamma_{33}^2 &= 0 \\ \Gamma_{11}^3 &= 0, & \Gamma_{21}^3 &= 0, & \Gamma_{31}^3 &= 0 \\ \Gamma_{21}^3 &= 0, & \Gamma_{22}^3 &= 0, & \Gamma_{32}^3 &= 0 \\ \Gamma_{31}^3 &= 0, & \Gamma_{23}^3 &= 0, & \Gamma_{33}^3 &= -x_3^{-1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

yang perhitungannya lebih jelasnya dapat dilihat di lampiran D.

Kemudian dari simbol Christoffel yang telah diketahui dapat digunakan untuk menentukan tensor kelengkungan Riemannian dan juga untuk menentukan persamaan kurva geodesik.

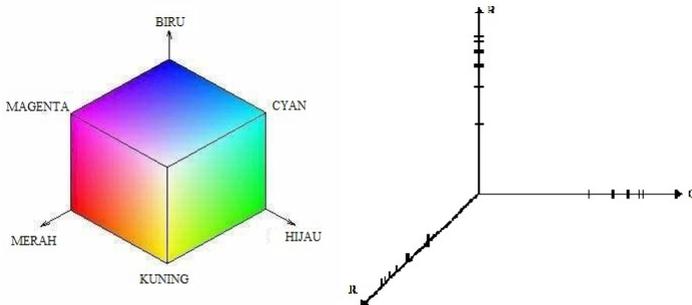
### A. Tensor Kelengkungan Riemannian

Persamaan dari tensor kelengkungan Riemannian yaitu:

$$R_{\lambda\mu\nu}^{\kappa} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\lambda}^{\kappa} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\eta}^{\kappa} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\kappa} \quad (3.7)$$

Pada penghitungan nilai tensor kelengkungan Riemannian,  $\partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa = 0$  dan  $\Gamma_{\nu\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\eta}^\kappa - \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\kappa = 0$  karena  $\partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa, \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa, \Gamma_{\nu\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\eta}^\kappa$  dan  $\Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\kappa$  akan memiliki nilai tidak sama dengan nol saat  $\kappa = \lambda = \mu = \nu$  dan oleh karena itu  $\partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa = \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$  dan  $\Gamma_{\nu\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\eta}^\kappa = \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\kappa$ .

Maka tensor kelengkungan Riemann untuk semua komponen  $R_{\lambda\mu\nu}^\kappa = 0$ , dengan kelengkungan menurut tensor Riemannian berbentuk datar (*flat*). Datar yang dimaksud disini yaitu keseragaman perubahan intensitas ke arah radial, dengan ditinjau dari metrik pada persamaan (2.63) menunjukkan bahwa pada ruang warna Resnikoff, perubahan warna yang terjadi akan sulit dibedakan oleh manusia jika semakin menjauhi titik pangkal seperti ditunjukkan gambar 3.1. Hal ini yang menjadi sebab jarak antar dua titik dengan selisih yang sama tiap sumbunya mengecil secara seragam ketika menjauhi titik pangkal.



Gambar 3.1. Ruang Warna RGB

## B. Geodesik

Dalam menentukan kurva paling lurus yang memungkinkan dalam hal ini disebut geodesik, secara umum dapat menggunakan persamaan berikut:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0 \quad (3.8)$$

dari sebelumnya diketahui, bahwa  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$  jika tidak berlaku  $\lambda = \mu = \nu$ . Oleh karena itu, digunakan tiga simbol Christoffel yang tidak bernilai nol yaitu  $\Gamma_{11}^1$ ,  $\Gamma_{22}^2$  dan  $\Gamma_{33}^3$  yang kemudian digunakan kedalam persamaan geodesik

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{1}{x_1} \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{1}{x_2} \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} - \frac{1}{x_3} \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

dari 3 persamaan diatas, kurva  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  dan  $x_3(t)$  memiliki bentuk yang serupa. Dalam menentukan komponen kurva diatas,  $x_\mu(t)$  memiliki syarat yaitu komponen kurva tersebut jika diturunkan dua kali terhadap waktu harus bernilai sama dengan kuadrat dari turunan terhadap waktu fungsi kurva tersebut kemudian dibagi dengan komponen kurva tersebut. Dari berbagai kemungkinan, fungsi exponential yang dapat memenuhi syarat

kurva geodesik dari model ruang warna Resnikoff

$$\begin{aligned}
 x_\mu(t) &= e^t \\
 \frac{d^2(e^t)}{dt^2} - \frac{1}{e^t} \left( \frac{d(e^t)}{dt} \right)^2 &= 0 \\
 e^t - \frac{1}{e^t} (e^t)^2 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

kemudian dicoba memasukkan konstanta pada waktu

$$\begin{aligned}
 x_\mu(t) &= e^{k_\mu t} \\
 \frac{d^2(e^{k_\mu t})}{dt^2} - \frac{1}{e^{k_\mu t}} \left( \frac{d(e^{k_\mu t})}{dt} \right)^2 &= 0 \\
 k_\mu^2 e^{(k_\mu t)} - \frac{1}{e^{k_\mu t}} k_\mu^2 (e^{k_\mu t})^2 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

fungsi tersebut memenuhi persamaan geodesik diatas, dan terakhir dicoba memasukkan konstanta yang dikalikan fungsi eksponensial yang sudah ada.

$$\begin{aligned}
 x_\mu(t) &= A_\mu e^{k_\mu t} \\
 \frac{d^2(A_\mu e^{k_\mu t})}{dt^2} - \frac{1}{A_\mu e^{k_\mu t}} \left( \frac{d(A_\mu e^{k_\mu t})}{dt} \right)^2 &= 0 \\
 A_\mu k_\mu^2 e^{k_\mu t} - \frac{1}{A_\mu e^{k_\mu t}} A_\mu^2 k_\mu^2 (e^{k_\mu t})^2 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Diperoleh persamaan kurva geodesik dari ruang warna Resnikoff sebagai berikut

$$(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (A_1 e^{k_1 t}, A_2 e^{k_2 t}, A_3 e^{k_3 t}) \tag{3.13}$$

Solusi pada persamaan (3.13) merupakan solusi umum karena

solusi ini masing-masing komponen mengandung 2 tetapan untuk persamaan diferensial orde 2.

Dalam jurnal Resnikoff, geodesik untuk suatu kasus khusus dapat berbentuk  $x(\tau) = e^{\tau a}$  dengan  $\tau$  sebagai parameter dan  $a$  sebagai tetapan. Kasus khusus yang dimaksud yaitu bahwa kurva tersebut berpangkal di  $(1, 1, 1) \in \mathcal{P}$ , yaitu suatu warna putih dengan intensitas tertentu.

Persamaan kurva geodesik yang telah diperoleh dari perhitungan di atas telah sesuai dengan kasus khusus untuk kurva geodesik yang telah diberikan oleh Resnikoff dan persamaan kurva geodesik yang didapatkan merupakan bentuk umumnya. Bentuk umum yang dimaksud adalah bahwa kurva tidak harus berpangkal di warna putih, tetapi disembarang warna  $(x_1, x_2, x_3) = (A_1, A_2, A_3)$ . Selanjutnya  $k_1$ ,  $k_2$  dan  $k_3$  dapat ditentukan oleh dua titik warna yang dilalui kurva.

Dari persamaan kurva geodesik yang telah didapatkan, akhirnya diketahui cara paling efektif dan efisien untuk "berpindah" dari satu titik warna ke titik warna yang lain, yaitu perpindahan itu sepanjang perubahan nilai parameternya (misal waktu), harus mengikuti lintasan dari kurva geodesik tersebut. Konsep efektif dan efisien dalam hal ini adalah penggunaan energi dan perubahan intensitasnya paling kecil.

Perubahan energi (terkait frekuensi dan jenis warna) di ruang warna ditentukan oleh "gerakan" yang ada pada permukaan bola (berjarak sama dari pangkal koordinat). Sementara itu perubahan intensitas ditentukan oleh "gerakan" menjauh atau mendekat (secara radial) terhadap pangkal koordinat.

## BAB IV

### SIMPULAN DAN SARAN

#### A. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil berdasarkan dari pengkajian yang telah dilakukan yaitu:

1. Kelengkungan pada ruang warna Resnikoff pada himpunan  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  ditinjau dari tensor kelengkungan Riemannian yaitu menghasilkan nilai tensor kelengkungan Riemannian  $R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = 0$  yang memiliki arti bahwa ruang warna Resnikoff itu datar. Datar disini bermakna keseragaman perubahan intensitas warna ke arah radial.
2. Persamaan kurva geodesik dari ruang warna Resnikoff dalam bentuk selesaian umum yaitu:

$$(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (A_1 e^{k_1 t}, A_2 e^{k_2 t}, A_3 e^{k_3 t})$$

Persamaan kurva geodesik diatas merupakan bentuk umum untuk ruang warna Resnikoff, yang dari persamaan kurva geodesik tersebut penentuan titik pangkal dapat ditentukan disembarang warna.

#### B. Saran

Penelitian selanjutnya yang dapat dilakukan adalah pengkajian secara matematis untuk wakilan himpunan untuk ruang warna

Resnikoff yang lainnya yang homogen terhadap  $GL(\mathcal{P})/K$  yaitu:

$$\mathcal{P} = GL(\mathcal{P})/K \simeq \mathbb{R}^+ \times SL(\mathcal{P}) \simeq \mathbb{R}^+ \times SL(2, \mathbb{R})/SO(2),$$

yang dari ruang homogen ini, selanjutnya dapat dikaji untuk properti-properti matematis yang terkait didalamnya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdullah, Mikrajuddin. 2006. *Diktat Kuliah Fisika Dasar 2 Tahap Persiapan Bersama ITB*. Bandung: Institut Teknologi Bandung
- Berthier dan Provenzi. 2019. *When Geometry Meets Psycho-Physics and Quantum Mechanics: Modern Perspectives on the Space of Perceived Colors*. France: 4th conference on Geometric Science of Information.
- Berthier dan Edoardo. 2022. *Quantum Measurement and Color Perception: Theory and Applications*. France
- Carroll, Sean M. 1997. *Lecture Notes on General Relativity*. California: Santa Barbara.
- Carrol, Sean. 2014. *Spacetime and Geometry An Introduction to General Relativity*. USA: Pearson
- Griffiths, David. 1999. *Introduction to Electrodynamics*. New Jersey: Prentice Hall
- Hirose, Akira. 1985. *Introduction to Wave Phenomena* : Wiley-Interscience Publication
- Hirose, Akira. 2010. *Fundamental of Wave Phenomena*: SciTech Publishing
- Hubel, David H. 2017. *Eye, Brian and Vision*. the EPub version, Phoenix, USA.
- Ibraheem, Hasan, Khan dan Mishra.2012. *Understanding Color Model: A Review*. India: Aligarh Muslim University

- Lee, John M. 1997. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. New York: Springer-Verlag
- Macpherson dan Brown. 2021. *Introduction to the Philosophy of Colour*. The Routledge Handbook of Philosophy of Colour, Oxford.
- Nakahara, Mikio. 2003. *Geometry, Topology and Physics*. London: Institute of Physics Publishing
- Pedrotti, F. 2017. *Introduction to Optics, Third edition*. New Jersey: Prentice Hall
- Provenzi, Edoardo. 2017. *Principal Fiber Bundles and Geometry of Color Space*. Universite Paris Descartes.
- Resnikoff, H.L. 1974. *Differential Geometry and Color perception*. Journal of Mathematical Biology 1, 97-131.
- Rosyid, Muhammad Farchani. 2006. *Mekanika Kuantum*. Yogyakarta: Jurusan Fisika FMIPA UGM Yogyakarta.
- Rosyid, Muhammad Farchani, 2013, *Aljabar Abstrak Dalam Fisika*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press
- Sarojo, GA. 2011. *Gelombang dan Optika*. Penerbit Salemba Teknika
- Shihab, M Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah: Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.
- Siberstein, Ludwik, 1946, *Notes on W. S. Stiles' Paper Entitled, "A Modified Helmholtz Line-Element in Brightness-Colour Space"*. Journal of the Optical Society of America.

Vandergriff, Linda J. 2018. *Nature and Properties of Light*.  
Photonics System Engineering Science Applications  
International Corporation McLean, Virginia.

Walker, Resnick dan Halliday. 2007. *Fundamentals of Physics*. 10th  
edition. Wiley, USA.

Zamakhsyari, Lalu M Abdi. 2014. *Fondasi Matematis Teori Tera:  
Kajian Tentang Untingan Serat, Koneksi dan Kelengkungan*.  
Yogyakarta: Jurusan Fisika FMIPA UGM Yogyakarta.

Zwinkels, Joanne. 2015. *Light, Electromagnetic Spectrum*. National  
Research Council Canada, Canada.

## Lampiran 1. Pembuktian Persamaan dan Penurunan Fungsi

### A. Teori Maxwell Gelombang Elektromagnetik

Dalam gelombang elektromagnetik berlaku teori Maxwell yang merupakan gabungan dari teori Gauss, teori Biot-Savart, teori Faraday dan teori Ampere.

#### 1. Hukum Gauss

Pada hukum ini dibagi menjadi dua, yaitu dalam tinjauan elektik dan dalam tinjauan magnetik. Secara elektrik, disini menggunakan kerangka untuk ruang dengan permukaan tertutup

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{enc} \quad (\text{L1.1})$$

$Q_{enc}$  merupakan muatan total terbatas dibagian permukaan bidang. Dengan menerapkan *teorema difergensi*, maka menjadi:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) d\tau \quad (\text{L1.2})$$

dengan  $Q_{enc}$  merupakan kerapatan muatan  $\rho$ , maka didapatkan:

$$Q_{enc} = \int_V \rho d\tau \quad (\text{L1.3})$$

hukum *Gauss* dapat disederhanakan menjadi:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) d\tau = \int_V \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) d\tau \quad (\text{L1.4})$$

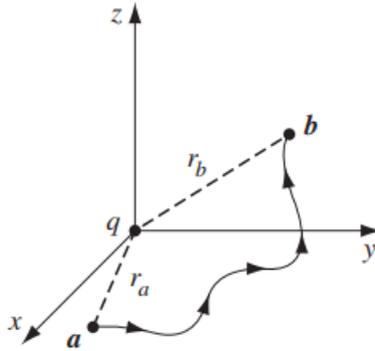
kemudian didapatkan hukum *Gauss* dalam bentuk

differensial

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{L1.5})$$

sedangkan untuk *curl* dari  $\mathbf{E}$  dengan  $\mathbf{E}$  yaitu

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (\text{L1.6})$$



kemudian mencari intergral garis dari titik a ke titik b

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr, \quad d\mathbf{l} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r \sin\theta d\phi\hat{\phi} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{q}{r^2} dr \\ &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \Big|_{r_a}^{r_b} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_a} - \frac{q}{r_b} \right) \end{aligned} \quad (\text{L1.7})$$

dikarenakan  $r_a$  merupakan jarak titik awal ke titik a dan  $r_b$  merupakan jarak titik awal ketitik b, maka integral tertutup bernilai 0 dikarenakan  $r_a = r_b$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{L1.8})$$

kemudian digunakan teorema stokes

$$\begin{aligned} \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} &= \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{L1.9})$$

## 2. Hukum Biot-Savart

Muatan yang stasioner menghasilkan medan listrik yang konstan tiap waktu, teori ini disebut dengan elektrostatik. Arus yang tunak menghasilkan medan listrik yang konstan tiap waktu, teori ini disebut dengan magnetostatik. Arus tunak yang dimaksud disini yaitu aliran yang kontinu yang berlangsung lama tanpa adanya perubahan dan juga tanpa adanya muatan yang menumpuk.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, (\text{Elektrostatik}), \quad \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0, (\text{Magnetostatik}) \quad (\text{L1.10})$$

$\mathbf{J}$  merupakan kerapatan arus dalam bidang yang dilalui oleh aliran arus tersebut.

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{I}}{da_{\perp}} \quad (\text{L1.11})$$

dalam hal ini, arus total yang mengalir di permukaan  $S$  dapat

dituliskan menjadi:

$$\mathbf{I} = \int_S \mathbf{J} da_{\perp} = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{a} \quad (\text{L1.12})$$

dengan menggunakan teorema difergensi, didapatkan persamaan muatan (per satuan waktu) yang mengalir dalam volume

$$\oint_S \mathbf{J} d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) d\tau \quad (\text{L1.13})$$

dikarenakan muatan harus konservatif, muatan yang mengalir keluar melalui permukaan harus mengorbankan muatan yang tertinggal didalam permukaan tersebut

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) d\tau = -\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau = -\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau \quad (\text{L1.14})$$

simbol negatif persamaan diatas dapat diartikan bahwa muatan yang mengalir keluar dari suatu bidang mengurangi muatan yang tersisa dibidang tersebut. Kemudian persamaan diatas dapat disederhanakan menjadi persamaan kontinuitas yang menyatakan kekalnya muatan secara lokal.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{L1.15})$$

Karena dalam elektrostatika  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , maka persamaan kontinuitas menjadi:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{L1.16})$$

Medan magnet dari arus tunak yang mengalir pada suatu

garis dirumuskan dalam *Biot-Savart* menjadi:

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{z}}}{r^2} dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{I} \int \frac{d\mathbf{l}' \times \hat{\mathbf{z}}}{r^2} \quad (\text{L1.17})$$

dengan konstanta  $\mu_0$  merupakan permeabilitas dari ruang hampa

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2 \quad (\text{L1.18})$$

dalam kasus kawat tak hingga, digunakan persamaan medan

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \quad (\text{L1.19})$$

integral dari  $\mathbf{B}$  dengan lintasan kawat melingkar dengan jari-jari  $s$  yaitu:

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi s} dl \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \oint dl \\ &= \mu_0 I \end{aligned} \quad (\text{L1.20})$$

di karenakan nilai  $\mathbf{B}$  tidak bergantung pada  $s$ , maka dengan menggunakan koordinat silinder  $s, \phi, z$  dengan arus yang mengikuti sumbu  $z$  dengan  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$  dan  $d\mathbf{l} = ds\hat{s} + sd\phi\hat{\phi} + dz\hat{z}$

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint \frac{1}{s} s d\phi \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \mu_0 I \end{aligned} \quad (\text{L1.21})$$

jika kita batasi dengan mengabaikan kondisi luar, dengan  $I_{enc}$  yang merupakan arus total yang tertutup pada jalur medan

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc} \quad (\text{L1.22})$$

Kita mewakili aliran muatan dengan rapat arus volume

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}, \quad I_{enc} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (\text{L1.23})$$

kemudian aplikasikan teorema *Stokes*

$$\begin{aligned} \int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} &= \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \end{aligned} \quad (\text{L1.24})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Untuk Biot-savart untuk kasus arus dalam ruang volume

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{z}}}{r^2} d\tau' \quad (\text{L1.25})$$

medan magnet disini berada dititik  $r = (x, y, z)$  dengan distribusi arus  $\mathbf{J}(x', y', z')$  dan juga  $\mathbf{r} = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z}$ . Kemudian aplikasikan divergensi

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \cdot (\nabla \times \mathbf{J}) - \mathbf{J} \cdot \left( \nabla \times \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) \right) d\tau' \end{aligned} \quad (\text{L1.26})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Untuk penerapan curl

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( \mathbf{J} \times \left( \nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) - (\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) d\tau' \quad (\text{L1.27}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(r') 4\pi \delta^3(r - r') d\tau'\end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}(r)$$

dari penerapan *curl* ini menghasilkan hukum Ampere

### 3. Hukum Faraday

Michael Faraday pada tahun 1831 melakukan serangkaian percobaan yaitu

- Faraday mengambil kawat kemudian membentuk sebuah lingkaran (*loop*) dengan magnet yang berada di kanan. Dari percobaan ini diketahui bahwa arus mengalir mengikuti lingkaran (*loop*),
- Magnet dipindahkan di sebelah kiri *loop*, dari sini diketahui arus tetap mengalir mengikuti *loop*,
- lingkaran (*loop*) dan magnet keadaan diam, sedangkan Faraday mengvariasikan nilai kekuatan medan magnet. Dari percobaan tersebut, arus tetap mengalir mengikuti lingkaran (*loop*) kawat tersebut.

Pada percobaan pertama yang merupakan salah satu kasus dari gaya gerak listrik (*electromotive force*), maka harus sesuai dengan aturan *fluks*

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{L1.28})$$

Dari percobaan kedua, Faraday mengungkapkan bahwa medan magnet yang berubah menginduksi pada medan listrik, hal ini menyebabkan gaya gerak listrik nilainya sama dengan laju perubahan fluks

$$\varepsilon = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{L1.29})$$

dengan medan listrik  $\mathbf{E}$  berhubungan dengan perubahan pada medan magnet  $\mathbf{B}$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}, \quad \frac{d\Phi}{dt} = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (\text{L1.30})$$

kemudian digunakan teorema stokes untuk menghasilkan teori Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{L1.31})$$

dari percobaan ketiga, medan magnet berubah, akan tetapi menurut Faraday medan listrik dapat di induksi kembali menghasilkan gaya gerak listrik  $-\frac{d\Phi}{dt}$ . Ketiga percobaan Faraday tersebut menghasilkan aturan universal fluks: Setiap ada fluks magnet yang berubah melalui loop, maka akan menghasilkan gaya gerak listrik di sekitar loop.

#### 4. Hukum Ampere

Pada penjelasan *Biot-Savart* kita sudah ketahui persamaan

hukum Ampere dari operasi *curl*

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) d\tau' \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( \mathbf{J} \times \left( \nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) - (\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^2} \right) d\tau' \quad (\text{L1.32}) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(r') 4\pi \delta^3(r - r') d\tau'
 \end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}(r)$$

akan tetapi, terjadi ketidak konsitenan pada divergensi curl harus selalu bernilai nol

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{J}) \quad (\text{L1.33})$$

pada sisi kiri disini harus bernilai nol, sedangkan sisi kanan tidak konsisten. Ketika arus tunak, divergensi dari  $\mathbf{J}$  bernilai nol, sedangkan dalam magnetostatika tidak nol. Maka dari itu, kita susun ulang divergensi dari  $\mathbf{J}$  agar konsisten

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\
 &= -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) \quad (\text{L1.34}) \\
 &= -\nabla \cdot \left( \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)
 \end{aligned}$$

dari sini didapatkan persamaan ampere

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{L1.35})$$

## B. Pemetaan Multilinier pada Tensor Kelengkungan Riemannian

### 1. Pembuktian persamaan (2.47)

$$\begin{aligned}
 R(fX, gY)hZ &= \nabla_{fX}\nabla_{gY}(hZ) - \nabla_{gY}\nabla_{fX}(hZ) - \nabla_{[fX, gY]}(hZ) \\
 &= f\nabla_X(\nabla_{gY}(hZ)) - g\nabla_Y(\nabla_{fX}(hZ)) - \nabla_{[fX, gY]}(hZ)
 \end{aligned}
 \tag{L1.36}$$

dengan dijabarkan untuk tiap suku

(a)

$$\begin{aligned}
 f\nabla_X(\nabla_{gY}(hZ)) &= f\nabla_X((g(\nabla_Y h)Z) + gh(\nabla_Y Z)) \\
 &= f(\nabla_X g)(\nabla_Y h)Z + fg(\nabla_X \nabla_Y h)Z \\
 &\quad + fg(\nabla_Y h)(\nabla_X Z) + fh(\nabla_X g)(\nabla_Y Z) \\
 &\quad + fg(\nabla_X h)(\nabla_Y Z) + fgh(\nabla_X \nabla_Y Z)
 \end{aligned}
 \tag{L1.37}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 g\nabla_Y(\nabla_{fX}(hZ)) &= g\nabla_Y(f(\nabla_X h)Z) + fh(\nabla_X Z) \\
 &= g(\nabla_Y f)(\nabla_X h)Z + fg(\nabla_Y \nabla_X h)Z \\
 &\quad + fg(\nabla_X h)(\nabla_Y Z) + gh(\nabla_Y f)(\nabla_X Z) \\
 &\quad + fg(\nabla_Y h)(\nabla_X Z) + fgh(\nabla_Y \nabla_X Z)
 \end{aligned}
 \tag{L1.38}$$

(c)

$$\begin{aligned}
& \nabla_{[fX, gY]}(hZ) \\
&= \nabla_{(fX[gY] - gY[fX])}(hZ) \\
&= \nabla_{(f(\nabla_X g)Y + fgX[Y] - g(\nabla_Y f)X - fgY[X])}(hZ) \\
&= \nabla_{(f(\nabla_X g)Y - g(\nabla_Y f)X + fgX[Y] - fgY[X])}(hZ) \\
&= \nabla_{(f(\nabla_X g)Y - g(\nabla_Y f)X + fg[X, Y])}(hZ) \\
&= \nabla_{f(\nabla_X g)Y}(hZ) - \nabla_{g(\nabla_Y f)X}(hZ) + \nabla_{fg[X, Y]}(hZ) \\
&= f(\nabla_X g)\nabla_Y(hZ) - g(\nabla_Y f)\nabla_X(hZ) + fg\nabla_{[X, Y]}(hZ) \\
&= f(\nabla_X g)(\nabla_Y h)Z + fh(\nabla_X g)(\nabla_Y Z) \\
&\quad - g(\nabla_Y f)(\nabla_X h)Z - gh(\nabla_Y f)(\nabla_X Z) \\
&\quad + fg(\nabla_{[X, Y]}h)Z + fgh(\nabla_{[X, Y]}Z)
\end{aligned} \tag{L1.39}$$

masukan kembali hasil penjabaran tiap-tiap suku (L1.37), (L1.38) dan (L1.39) ke persamaan (L1.36)

$$\begin{aligned}
& R(fX, gY)hZ \\
&= f(\nabla_X g)(\nabla_Y h)Z + fg(\nabla_X \nabla_Y h)Z + fg(\nabla_Y h)(\nabla_X Z) \\
&\quad + fh(\nabla_X g)(\nabla_Y Z) + fg(\nabla_X h)(\nabla_Y Z) + fgh(\nabla_X \nabla_Y Z) \\
&\quad - g(\nabla_Y f)(\nabla_X h)Z - fg(\nabla_Y \nabla_X h)Z - fg(\nabla_X h)(\nabla_Y Z) \\
&\quad - gh(\nabla_Y f)(\nabla_X Z) - fg(\nabla_Y h)(\nabla_X Z) - fgh(\nabla_Y \nabla_X Z) \\
&\quad - f(\nabla_X g)(\nabla_Y h)Z - fh(\nabla_X g)(\nabla_Y Z) + g(\nabla_Y f)(\nabla_X h)Z \\
&\quad + gh(\nabla_Y f)(\nabla_X Z) - fg(\nabla_{[X, Y]}h)Z - fgh(\nabla_{[X, Y]}Z) \\
&= fg(\nabla_X \nabla_Y h)Z + fgh(\nabla_X \nabla_Y Z) - fg(\nabla_Y \nabla_X h)Z \\
&\quad - fgh(\nabla_Y \nabla_X Z) - fg(\nabla_{[X, Y]}h)Z - fgh(\nabla_{[X, Y]}Z)
\end{aligned} \tag{L1.40}$$

dengan

$$\begin{aligned}
fg(\nabla_{[X,Y]}h)Z &= fg(\nabla_{(XY-YX)}h)Z \\
&= fg((\nabla_{XY} - \nabla_{YX})h)Z \\
&= fg(\nabla_{XY}h - \nabla_{YX}h)Z \\
&= fg(XY[h] - YX[h])Z \\
&= fg(X\nabla_Yh - Y\nabla_Xh)Z \\
&= fg(\nabla_X\nabla_Yh - \nabla_Y\nabla_Xh)Z \\
&= fg(\nabla_X\nabla_Yh)Z - fg(\nabla_Y\nabla_Xh)Z
\end{aligned}
\tag{L1.41}$$

kemudian masukkan hasil dari (L1.41) ke persamaan (L1.40), yang menghasilkan:

$$\begin{aligned}
R(fX, gY)hZ &= fg(\nabla_X\nabla_Yh)Z + fgh(\nabla_X\nabla_YZ) - fg(\nabla_Y\nabla_Xh)Z \\
&\quad - fgh(\nabla_Y\nabla_XZ) - fg(\nabla_X\nabla_Yh)Z \\
&\quad + fg(\nabla_Y\nabla_Xh)Z - fgh(\nabla_{[X,Y]}Z) \\
&= fgh(\nabla_X\nabla_YZ) - fgh(\nabla_Y\nabla_XZ) - fgh(\nabla_{[X,Y]}Z) \\
&= fgh((\nabla_X\nabla_YZ) - (\nabla_Y\nabla_XZ) - (\nabla_{[X,Y]}Z)) \\
&= fghR(X, Y)Z
\end{aligned}
\tag{L1.42}$$

## 2. Pembuktian persamaan (2.48)

$$\begin{aligned}
R(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2, Z_1 + Z_2) &= \nabla_{X_1+X_2}\nabla_{Y_1+Y_2}(Z_1 + Z_2) \\
&\quad - \nabla_{Y_1+Y_2}\nabla_{X_1+X_2}(Z_1 + Z_2) \\
&\quad - \nabla_{[X_1+X_2, Y_1+Y_2]}(Z_1 + Z_2)
\end{aligned}
\tag{L1.43}$$

dengan dijabarkan untuk tiap-tiap suku

(a)

$$\begin{aligned}
 & \nabla_{X_1+X_2} \nabla_{Y_1+Y_2} (Z_1 + Z_2) \\
 = & \nabla_{X_1+X_2} \nabla_{Y_1+Y_2} (Z_1) + \nabla_{X_1+X_2} \nabla_{Y_1+Y_2} (Z_2) \\
 = & \nabla_{X_1} \nabla_{Y_1} (Z_1) + \nabla_{X_2} \nabla_{Y_1} (Z_1) \\
 & + \nabla_{X_1} \nabla_{Y_2} (Z_1) + \nabla_{X_2} \nabla_{Y_2} (Z_1) \\
 & + \nabla_{X_1} \nabla_{Y_1} (Z_2) + \nabla_{X_2} \nabla_{Y_1} (Z_2) \\
 & + \nabla_{X_1} \nabla_{Y_2} (Z_2) + \nabla_{X_2} \nabla_{Y_2} (Z_2)
 \end{aligned} \tag{L1.44}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 & \nabla_{Y_1+Y_2} \nabla_{X_1+X_2} (Z_1 + Z_2) \\
 = & \nabla_{Y_1+Y_2} \nabla_{X_1+X_2} (Z_1) + \nabla_{Y_1+Y_2} \nabla_{X_1+X_2} (Z_2) \\
 = & \nabla_{Y_1} \nabla_{X_1} (Z_1) + \nabla_{Y_2} \nabla_{X_1} (Z_1) \\
 & + \nabla_{Y_1} \nabla_{X_2} (Z_1) + \nabla_{Y_2} \nabla_{X_2} (Z_1) \\
 & + \nabla_{Y_1} \nabla_{X_1} (Z_2) + \nabla_{Y_2} \nabla_{X_1} (Z_2) \\
 & + \nabla_{Y_1} \nabla_{X_2} (Z_2) + \nabla_{Y_2} \nabla_{X_2} (Z_2)
 \end{aligned} \tag{L1.45}$$

(c)

$$\begin{aligned}
& \nabla_{[X_1+X_2, Y_1+Y_2]}(Z_1 + Z_2) \\
&= \nabla_{[X_1+X_2, Y_1+Y_2]}(Z_1) + \nabla_{[X_1+X_2, Y_1+Y_2]}(Z_2) \\
&= \nabla_{(X_1+X_2)(Y_1+Y_2) - (Y_1+Y_2)(X_1+X_2)}(Z_1) \\
&\quad + \nabla_{(X_1+X_2)(Y_1+Y_2) - (Y_1+Y_2)(X_1+X_2)}(Z_2) \\
&= \nabla_{(X_1+X_2)(Y_1+Y_2)}(Z_1) - \nabla_{(Y_1+Y_2)(X_1+X_2)}(Z_1) \\
&\quad + \nabla_{(X_1+X_2)(Y_1+Y_2)}(Z_2) - \nabla_{(Y_1+Y_2)(X_1+X_2)}(Z_2) \\
&= \nabla_{(X_1+X_2)} \nabla_{(Y_1+Y_2)}(Z_1) - \nabla_{(Y_1+Y_2)} \nabla_{(X_1+X_2)}(Z_1) \\
&\quad + \nabla_{(X_1+X_2)} \nabla_{(Y_1+Y_2)}(Z_2) - \nabla_{(Y_1+Y_2)} \nabla_{(X_1+X_2)}(Z_2) \\
&= \nabla_{X_1} \nabla_{Y_1}(Z_1) + \nabla_{X_2} \nabla_{Y_1}(Z_1) + \nabla_{X_1} \nabla_{Y_2}(Z_1) + \nabla_{X_2} \nabla_{Y_2}(Z_1) \\
&\quad - \nabla_{Y_1} \nabla_{X_1}(Z_1) - \nabla_{Y_2} \nabla_{X_1}(Z_1) - \nabla_{Y_1} \nabla_{X_2}(Z_1) - \nabla_{Y_2} \nabla_{X_2}(Z_1) \\
&\quad + \nabla_{X_1} \nabla_{Y_1}(Z_2) + \nabla_{X_2} \nabla_{Y_1}(Z_2) + \nabla_{X_1} \nabla_{Y_2}(Z_2) + \nabla_{X_2} \nabla_{Y_2}(Z_2) \\
&\quad - \nabla_{Y_1} \nabla_{X_1}(Z_2) - \nabla_{Y_2} \nabla_{X_1}(Z_2) - \nabla_{Y_1} \nabla_{X_2}(Z_2) - \nabla_{Y_2} \nabla_{X_2}(Z_2) \\
&= (\nabla_{X_1} \nabla_{Y_1}(Z_1) - \nabla_{Y_1} \nabla_{X_1}(Z_1)) \\
&\quad + (\nabla_{X_2} \nabla_{Y_1}(Z_1) - \nabla_{Y_1} \nabla_{X_2}(Z_1)) \\
&\quad + (\nabla_{X_1} \nabla_{Y_2}(Z_1) - \nabla_{Y_2} \nabla_{X_1}(Z_1)) \\
&\quad + (\nabla_{X_2} \nabla_{Y_2}(Z_1) - \nabla_{Y_2} \nabla_{X_2}(Z_1)) \\
&\quad + (\nabla_{X_1} \nabla_{Y_1}(Z_2) - \nabla_{Y_1} \nabla_{X_1}(Z_2)) \\
&\quad + (\nabla_{X_2} \nabla_{Y_1}(Z_2) - \nabla_{Y_1} \nabla_{X_2}(Z_2)) \\
&\quad + (\nabla_{X_1} \nabla_{Y_2}(Z_2) - \nabla_{Y_2} \nabla_{X_1}(Z_2)) \\
&\quad + (\nabla_{X_2} \nabla_{Y_2}(Z_2) - \nabla_{Y_2} \nabla_{X_2}(Z_2)) \\
&= \nabla_{[X_1, Y_1]}(Z_1) + \nabla_{[X_2, Y_1]}(Z_1) + \nabla_{[X_1, Y_2]}(Z_1) + \nabla_{[X_2, Y_2]}(Z_1) \\
&\quad + \nabla_{[X_1, Y_1]}(Z_2) + \nabla_{[X_2, Y_1]}(Z_2) + \nabla_{[X_1, Y_2]}(Z_2) + \nabla_{[X_2, Y_2]}(Z_2)
\end{aligned} \tag{L1.46}$$

masukan kembali hasil penjabaran tiap-tiap suku (L1.44), (L1.45) dan (L1.46) ke persamaan (L1.43)

$$\begin{aligned}
& R(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2, Z_1 + Z_2) \\
&= \nabla_{X_1} \nabla_{Y_1}(Z_1) + \nabla_{X_2} \nabla_{Y_1}(Z_1) \\
&\quad + \nabla_{X_1} \nabla_{Y_2}(Z_1) + \nabla_{X_2} \nabla_{Y_2}(Z_1) \\
&\quad + \nabla_{X_1} \nabla_{Y_1}(Z_2) + \nabla_{X_2} \nabla_{Y_1}(Z_2) \\
&\quad + \nabla_{X_1} \nabla_{Y_2}(Z_2) + \nabla_{X_2} \nabla_{Y_2}(Z_2) \\
&\quad - \nabla_{Y_1} \nabla_{X_1}(Z_1) - \nabla_{Y_2} \nabla_{X_1}(Z_1) \\
&\quad - \nabla_{Y_1} \nabla_{X_2}(Z_1) - \nabla_{Y_2} \nabla_{X_2}(Z_1) \\
&\quad - \nabla_{Y_1} \nabla_{X_1}(Z_2) - \nabla_{Y_2} \nabla_{X_1}(Z_2) \\
&\quad - \nabla_{Y_1} \nabla_{X_2}(Z_2) - \nabla_{Y_2} \nabla_{X_2}(Z_2) \\
&\quad - \nabla_{[X_1, Y_1]}(Z_1) - \nabla_{[X_2, Y_1]}(Z_1) \\
&\quad - \nabla_{[X_1, Y_2]}(Z_1) - \nabla_{[X_2, Y_2]}(Z_1) \\
&\quad - \nabla_{[X_1, Y_1]}(Z_2) - \nabla_{[X_2, Y_1]}(Z_2) \\
&\quad - \nabla_{[X_1, Y_2]}(Z_2) - \nabla_{[X_2, Y_2]}(Z_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla_{X_1} \nabla_{Y_1} (Z_1) - \nabla_{Y_1} \nabla_{X_1} (Z_1) - \nabla_{[X_1, Y_1]} (Z_1) \\
&\quad + \nabla_{X_2} \nabla_{Y_1} (Z_1) - \nabla_{Y_1} \nabla_{X_2} (Z_1) - \nabla_{[X_2, Y_1]} (Z_1) \\
&\quad + \nabla_{X_1} \nabla_{Y_2} (Z_1) - \nabla_{Y_2} \nabla_{X_1} (Z_1) - \nabla_{[X_1, Y_2]} (Z_1) \\
&\quad + \nabla_{X_2} \nabla_{Y_2} (Z_1) - \nabla_{Y_2} \nabla_{X_2} (Z_1) - \nabla_{[X_2, Y_2]} (Z_1) \\
&\quad + \nabla_{X_1} \nabla_{Y_1} (Z_2) - \nabla_{Y_1} \nabla_{X_1} (Z_2) - \nabla_{[X_1, Y_1]} (Z_2) \\
&\quad + \nabla_{X_2} \nabla_{Y_1} (Z_2) - \nabla_{Y_1} \nabla_{X_2} (Z_2) - \nabla_{[X_2, Y_1]} (Z_2) \\
&\quad + \nabla_{X_1} \nabla_{Y_2} (Z_2) - \nabla_{Y_2} \nabla_{X_1} (Z_2) - \nabla_{[X_1, Y_2]} (Z_2) \\
&\quad + \nabla_{X_2} \nabla_{Y_2} (Z_2) - \nabla_{Y_2} \nabla_{X_2} (Z_2) - \nabla_{[X_2, Y_2]} (Z_2) \\
&= R(X_1, Y_1, Z_1) + R(X_2, Y_1, Z_1) + R(X_1, Y_2, Z_1) + R(X_2, Y_2, Z_1) \\
&\quad + R(X_1, Y_1, Z_2) + R(X_2, Y_1, Z_2) + R(X_1, Y_2, Z_2) + R(X_2, Y_2, Z_2) \\
&\hspace{15em} (L1.47)
\end{aligned}$$

### C. Tensor Kelengkungan Riemaannian

$$\begin{aligned}
R_{\lambda\mu\nu}^{\kappa} &= \langle dx^{\kappa}, R(\partial_{\mu}, \partial_{\nu})\partial_{\lambda} \rangle \\
&= \langle dx^{\kappa}, \nabla_{\partial_{\mu}}\nabla_{\partial_{\nu}}\partial_{\lambda} - \nabla_{\partial_{\nu}}\nabla_{\partial_{\mu}}\partial_{\lambda} - \nabla_{[\partial_{\mu}, \partial_{\nu}]} \partial_{\lambda} \rangle, \quad \nabla_{[\partial_{\mu}, \partial_{\nu}]} \partial_{\lambda} = 0 \\
&= \langle dx^{\kappa}, \nabla_{\partial_{\mu}}\nabla_{\partial_{\nu}}\partial_{\lambda} - \nabla_{\partial_{\nu}}\nabla_{\partial_{\mu}}\partial_{\lambda} \rangle \\
&= \langle dx^{\kappa}, \nabla_{\partial_{\mu}}(\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}\partial_{\eta}) - \nabla_{\partial_{\nu}}(\Gamma_{\mu\lambda}^{\beta}\partial_{\beta}) \rangle \\
&= \langle dx^{\kappa}, ((\nabla_{\partial_{\mu}}\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta})\partial_{\eta} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}(\nabla_{\partial_{\mu}}\partial_{\eta}) \\
&\quad - (\nabla_{\partial_{\nu}}\Gamma_{\mu\lambda}^{\beta})\partial_{\beta} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\beta}(\nabla_{\partial_{\nu}}\partial_{\beta})) \rangle \\
&= \langle dx^{\kappa}, ((\nabla_{\partial_{\mu}}\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta})\partial_{\eta} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}(\Gamma_{\mu\eta}^{\xi}\partial_{\xi}) \\
&\quad - (\nabla_{\partial_{\nu}}\Gamma_{\mu\lambda}^{\beta})\partial_{\beta} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\beta}(\Gamma_{\nu\beta}^{\zeta}\partial_{\zeta})) \rangle \\
&= (\nabla_{\partial_{\mu}}\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta})\langle dx^{\kappa}, \partial_{\eta} \rangle + \Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}\langle dx^{\kappa}, (\Gamma_{\mu\eta}^{\xi}\partial_{\xi}) \rangle \\
&\quad - (\nabla_{\partial_{\nu}}\Gamma_{\mu\lambda}^{\beta})\langle dx^{\kappa}, \partial_{\beta} \rangle - \Gamma_{\mu\lambda}^{\beta}\langle dx^{\kappa}, (\Gamma_{\nu\beta}^{\zeta}\partial_{\zeta}) \rangle \\
&= (\nabla_{\partial_{\mu}}\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta})\langle dx^{\kappa}, \partial_{\eta} \rangle + \Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\eta}^{\xi}\langle dx^{\kappa}, \partial_{\xi} \rangle \\
&\quad - (\nabla_{\partial_{\nu}}\Gamma_{\mu\lambda}^{\beta})\langle dx^{\kappa}, \partial_{\beta} \rangle - \Gamma_{\mu\lambda}^{\beta}\Gamma_{\nu\beta}^{\zeta}\langle dx^{\kappa}, \partial_{\zeta} \rangle \\
&= \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}\delta_{\eta}^{\kappa} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\eta}^{\xi}\delta_{\xi}^{\kappa} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\beta}\delta_{\beta}^{\kappa} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\beta}\Gamma_{\nu\beta}^{\zeta}\delta_{\zeta}^{\kappa} \\
&= \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\lambda}^{\kappa} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\eta}^{\kappa} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\beta}\Gamma_{\nu\beta}^{\kappa} \\
&= \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\lambda}^{\kappa} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\eta}^{\kappa} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\kappa}
\end{aligned}$$

(L1.48)

## Lampiran 2. Analisis Nilai

### D. Simbol Christoffel

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} (\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) \\
 &= \frac{1}{2}g^{11} (\partial_1 g_{11}) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{x_1^2}{\alpha_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \alpha_1 x_1^{-2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{x_1^2}{\alpha_1} (-2\alpha_1 x_1^{-3}) \\
 &= -x_1^{-1} \\
 \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} (\partial_1 g_{12} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{x_1^2}{\alpha_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} 0 + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\alpha_1}{x_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} 0 \right) = 0 \\
 \Gamma_{13}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} (\partial_1 g_{13} + \partial_3 g_{11} - \partial_1 g_{13}) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{x_1^2}{\alpha_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} 0 + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\alpha_1}{x_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} 0 \right) = 0 \\
 \Gamma_{21}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} (\partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{12} - \partial_1 g_{21}) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{x_1^2}{\alpha_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\alpha_1}{x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} 0 - \frac{\partial}{\partial x_1} 0 \right) = 0 \\
 \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} (\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{x_1^2}{\alpha_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} 0 + \frac{\partial}{\partial x_2} 0 - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\alpha_2}{x_2^2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{23}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2g_{13} + \partial_3g_{12} - \partial_1g_{23}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x_1^2}{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}0 + \frac{\partial}{\partial x_3}0 - \frac{\partial}{\partial x_1}0\right) = 0 \\
\Gamma_{31}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3g_{11} + \partial_1g_{13} - \partial_1g_{31}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x_1^2}{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\alpha_1}{x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_1}0 - \frac{\partial}{\partial x_1}0\right) = 0 \\
\Gamma_{32}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3g_{12} + \partial_2g_{13} - \partial_1g_{32}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x_1^2}{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}0 + \frac{\partial}{\partial x_2}0 - \frac{\partial}{\partial x_1}0\right) = 0 \\
\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3g_{13} + \partial_3g_{13} - \partial_1g_{33}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x_1^2}{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}0 + \frac{\partial}{\partial x_3}0 - \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\alpha_3}{x_3^2}\right) = 0 \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1g_{21} + \partial_1g_{21} - \partial_2g_{11}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x_2^2}{\alpha_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}0 + \frac{\partial}{\partial x_1}0 - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\alpha_1}{x_1^2}\right) = 0 \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1g_{22} + \partial_2g_{21} - \partial_2g_{12}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x_2^2}{\alpha_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\alpha_2}{x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_2}0 - \frac{\partial}{\partial x_2}0\right) = 0 \\
\Gamma_{13}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1g_{23} + \partial_3g_{21} - \partial_2g_{13}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x_2^2}{\alpha_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}0 + \frac{\partial}{\partial x_3}0 - \frac{\partial}{\partial x_2}0\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2g_{21} + \partial_1g_{22} - \partial_2g_{21}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x_2^2}{\alpha_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}0 + \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\alpha_2}{x_2^2} - \frac{\partial}{\partial x_2}0\right) = 0 \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2g_{22} + \partial_2g_{22} - \partial_2g_{22}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 2g_{22}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x_2^2}{\alpha_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\alpha_2 x_2^{-2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x_2^2}{\alpha_2}(-2\alpha_2 x_2^{-3}) \\
&= -x_2^{-1} \\
\Gamma_{23}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2g_{23} + \partial_3g_{22} - \partial_2g_{23}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x_2^2}{\alpha_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}0 + \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\alpha_2}{x_2^2} - \frac{\partial}{\partial x_2}0\right) = 0 \\
\Gamma_{31}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3g_{21} + \partial_1g_{23} - \partial_2g_{31}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x_2^2}{\alpha_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}0 + \frac{\partial}{\partial x_1}0 - \frac{\partial}{\partial x_2}0\right) = 0 \\
\Gamma_{32}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3g_{22} + \partial_2g_{23} - \partial_2g_{32}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x_2^2}{\alpha_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\alpha_2}{x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_2}0 - \frac{\partial}{\partial x_2}0\right) = 0 \\
\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3g_{23} + \partial_3g_{23} - \partial_2g_{33}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x_2^2}{\alpha_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}0 + \frac{\partial}{\partial x_3}0 - \frac{\partial}{\partial x_2}0\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1g_{31} + \partial_1g_{31} - \partial_3g_{11}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x_3^2}{\alpha_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}0 + \frac{\partial}{\partial x_1}0 - \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\alpha_1}{x_1^2}\right) = 0 \\
\Gamma_{12}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1g_{32} + \partial_2g_{31} - \partial_3g_{12}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x_3^2}{\alpha_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}0 + \frac{\partial}{\partial x_2}0 - \frac{\partial}{\partial x_3}0\right) = 0 \\
\Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1g_{33} + \partial_3g_{31} - \partial_3g_{13}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x_3^2}{\alpha_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\alpha_3}{x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_3}0 - \frac{\partial}{\partial x_3}0\right) = 0 \\
\Gamma_{21}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2g_{31} + \partial_1g_{32} - \partial_3g_{21}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x_3^2}{\alpha_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}0 + \frac{\partial}{\partial x_1}0 - \frac{\partial}{\partial x_3}0\right) = 0 \\
\Gamma_{22}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2g_{32} + \partial_2g_{32} - \partial_3g_{22}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x_3^2}{\alpha_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}0 + \frac{\partial}{\partial x_2}0 - \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\alpha_2}{x_2^2}\right) = 0 \\
\Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2g_{33} + \partial_3g_{32} - \partial_3g_{23}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x_3^2}{\alpha_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\alpha_3}{x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_3}0 - \frac{\partial}{\partial x_3}0\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} (\partial_3 g_{31} + \partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{31}) \\
&= \frac{1}{2} \frac{x_3^2}{\alpha_3} \left( \frac{\partial}{\partial x_3} 0 + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\alpha_3}{x_3^2} - \frac{\partial}{\partial x_3} 0 \right) = 0 \\
\Gamma_{32}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} (\partial_3 g_{32} + \partial_2 g_{33} - \partial_3 g_{32}) \\
&= \frac{1}{2} \frac{x_3^2}{\alpha_3} \left( \frac{\partial}{\partial x_3} 0 + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\alpha_3}{x_3^2} - \frac{\partial}{\partial x_3} 0 \right) = 0 \\
\Gamma_{33}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} (\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) \tag{L2.49} \\
&= \frac{1}{2} g^{33} (\partial_3 g_{33}) \\
&= \frac{1}{2} \frac{x_3^2}{\alpha_3} \left( \frac{\partial}{\partial x_3} \alpha_3 x_3^{-2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{x_3^2}{\alpha_3} (-2\alpha_3 x_3^{-3}) \\
&= -x_3^{-1}
\end{aligned}$$

## RIWAYAT HIDUP

### DATA PRIBADI

---

---

Nama : Mukhammad Nurul Huda  
Tempat, Tanggal Lahir : Kendal, 26 September 1998  
Jenis Kelamin : Laki-laki  
Agama: : Islam  
Alamat : Jl. Pahlawan Timur. Gang  
Tugusari/Durian No. 6 RT 08 RW 02 Kelurahan Kebondalem,  
Kecamatan Kendal, Kabupaten Kendal  
No. Handphone : 085601125428  
Email : nurmuhammadhuda69@gmail.com

### DATA PENDIDIKAN

---

---

#### PENDIDIKAN FORMAL

Sekolah Dasar : MIN Kalibuntu Wetan Kendal  
SMP : MTs Al-Masyhud Weleri Kendal  
SMA : MAN 2 Pekalongan  
Perguruan Tinggi : Universitas Islam Negeri Walisongo  
Semarang

## PENDIDIKAN NON FORMAL

1. Pondok Pesantren Salafiyah Al-Masyhud Weleri Kendal
2. Pondok Pesantren Modern Al-Quran Buaran Pekalongan