FUNGSI PEMBANGKIT POLINOMIAL CHEBYSHEV JENIS PERTAMA

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika

Oleh : **PUTRI ANJANI RUSTAM**
NIM : 1908046048

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2023

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	Putri Anjani Rustam
NIM	:	1908046048
Jurusan/Program Studi	:	Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

FUNGSI PEMBANGKIT POLINOMIAL CHEBYSHEV JENIS PERTAMA

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 19 Juni 2023

Pembuat pernyataan,

Putri Anjani Rustam
NIM. 1908046048

KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul	:	**FUNGSI PEMBANGKIT POLINOMIAL CHEBYSHEV JENIS PERTAMA**
Penulis	:	Putri Anjani Rustam
NIM	:	1908046048
Jurusan	:	Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 19 Juni 2023

DEWAN PENGUJI

Penguji I,	Penguji II,
Emy Siswanah M.Sc	**Eva Khoirun Nisa, M.Si**
NIP : 19870202 201101 2 014	NIP : 19870102 201903 2 010
Penguji III,	Penguji IV,
Seftina Diyah Miasary, M.Sc	**Yulia Romadiastri, M.Sc**
NIP : 19870921 201903 2 010	NIP : 19810715 200501 2 008
Pembimbing I,	Pembimbing II,
Yulia Romadiastri, M.Sc	**Nur Khasanah, M.Si**
NIP : 19810715 200501 2 008	NIP : 19911121 201903 2 017

KEMENTERIAN AGAMA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UIN WALISONGO
SEMARANG
REPUBLIK INDONESIA

NOTA DINAS

Semarang, 9 Juni 2023

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	FUNGSI PEMBANGKIT POLINOMIAL CHEBYSHEV JENIS PERTAMA
Nama	:	Putri Anjani Rustam
NIM	:	1908046048
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,

Yulia Romadiastri, M.Sc
NIP : 19810715 200501 2 008

NOTA DINAS

Semarang, 9 Juni 2023

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	FUNGSI PEMBANGKIT POLINOMIAL CHEBYSHEV JENIS PERTAMA
Nama	:	Putri Anjani Rustam
NIM	:	1908046048
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing II,

Nur Khasanah, M.Si
NIP : 19911121 201903 2 017

ABSTRAK

Polinomial Chebyshev merupakan polinomial orthogonal yang memiliki banyak jenis karena bentuknya rekursif. Salah satu dan paling mendasar adalah polinomial Chebyshev jenis pertama. Dalam hal fungsi pembangkit, polinomial Chebyshev sangat prospektif dan telah digunakan dalam berbagai aplikasi sehingga peneliti tergerak untuk meneliti fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis pertama. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis pertama $(T_n(x))$ serta mengetahui hubungan polinomial biasa dengan polinomial Chebyshev jenis pertama. Fungsi pembangkit yang akan dicari yaitu fungsi pembangkit biasa dan fungsi pembangkit eksponen. Hasil penelitian yang dilakukan dengan studi literatur menghasilkan bentuk fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis pertama dan hubungan polinomial biasa dengan polinomial Chebyshev jenis pertama yaitu polinomial biasa merupakan kombinasi linier dari polinomial Chebyshev jenis pertama yang dibuktikan dengan teorema pembuktian induksi matematika.

Kata kunci : polinomial Chebyshev $T_n(x)$, fungsi pembangkit, polinomial biasa.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, hidayah, dan karunia-Nya sehingga peneliti dapat dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini dengan judul "Fungsi Pembangkit Polinomial Chebyshev Jenis Pertama" tanpa suatu halangan yang berarti.

Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada baginda Nabi Agung Muhammad SAW. beserta keluarga dan para sahabatnya yang telah berjuang menegakkan agama Allah SWT. di alam semesta ini.

Skripsi ini dapat terselesaikan tidak lepas dari doa, dukungan, bantuan, bimbingan, motivasi, dan peran dari banyak pihak. Sehingga atas segala kerendahan hati peneliti mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. H. Ismail, M.Ag selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
2. Ibu Emy Siswanah, M.Sc selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
3. Ibu Yulia Romadiastri, M.Sc sebagai dosen pembimbing I yang telah bersedia memberikan bimbingan dan arahan selama penulisan skripsi.
4. Ibu Nur Khasanah, M.Si sebagai dosen pembimbing II yang telah bersedia memberikan dukungan, bimbingan dan arahan selama penulisan skripsi.

5. Ibu Ayus Riana Isnawati, M.Sc sebagai wali dosen yang telah mengarahkan dan membantu peniliti dalam melaksanakan proses studi.
6. Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika, terima kasih atas ilmu, nasehat, motivasi dan segala yang telah diberikan kepada peneliti selama peneliti menjalani perkuliahan di Program Studi Matematika UIN Walisongo Semarang.
7. Teruntuk orang tua, Ibu dan Ayah tercinta peneliti terima kasih telah memberikan segalanya kepada putri kalian. Terima kasih telah menjadi tempat terbaik untuk pulang peneliti ketika capek, lelah, dan letih serta terima kasih atas semua kasih sayang, kerja keras, dan panjatan doa yang telah diberikan kepada peneliti.
8. Kepada teman-teman seperjuangan bidang analisis (Saiful dan Annisa), terima kasih telah sekuat ini untuk bertahan dan melanjutkan apa yang telah kita mulai.
9. Teruntuk kalian teman-teman Matematika B 2019, khususnya untuk Vina, Winda, dan Ema terima kasih atas waktu dan dukungannya. Terima kasih kepada teman-teman telah membersamai peneliti selama perkuliahan mulai dari offline hingga online, membersamai peneliti selama peniliti merantau ke Semarang, terima kasih atas semuanya.
10. Dan teruntuk semua teman-teman yang peneliti kenal selama berkuliah di UIN Walisongo Semarang, peneliti mengucapkan banyak terima kasih telah mengenal dan dapat bersilaturrahmi. Semoga silaturrahmi ini dapat terus terjalin

sampai akhir hayat dan dapat menjadi amal ibadah kita semua di akhirat nanti.

11. Serta kepada semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah memberikan kontribusi hingga skripsi ini selesai.

Semoga kebaikan semuanya dapat menjadi amal yang dapat diterima dan mendapat pahala yang berlimpah dari Allah SWT. Aamiin.

Atas segala kekurangan dan kelemahan dalam skripsi ini penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun. Semoga karya tulis yang sederhana ini dapat menjadi bacaan yang bermanfaat dan dapat dikembangkan bagi peneliti-peneliti selanjutnya. Terima kasih.

Semarang, 19 Juni 2023

Putri Anjani Rustam

NIM: 1908046048

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Kebutuhan manusia di zaman sekarang semakin beragam seiring dengan perkembangan teknologi yang semakin canggih. Tidak bisa disangkal bahwa kedudukan ilmu pengetahuan berperan aktif dalam perkembangan dan kemajuan teknologi di zaman ini dan zaman yang akan datang. Menurut Reid (2007) dan Heaton (2017) "Ilmuwan berlomba-lomba melakukan penelitian untuk perkembangan ilmu pengetahuan masa kini termasuk bidang ilmu matematika". Allah swt., berfirman:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓا إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا فِى ٱلْمَجَٰلِسِ فَسَحُوا يَفْسَحِ
ٱللَّهُ لَكُمْ وَإِذَا قِيلَ ٱنشُزُوا فَشزُوا يَرْفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا مِنكُمْ وَذينَ
أُوتُوا ٱلْعِلْمَ دَرَجَٰت وَلَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ

Artinya: *"Hai orang-orang beriman apabila dikatakan kepadamu: 'Berlapang-lapanglah dalam majelis', maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberikan kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan: 'Berdirilah kamu', maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan."* (QS. Al-Mujadalah ayat: 11).

Kandungan ayat di atas menjelaskan bahwasannya Allah SWT akan meninggikan derajat orang-orang yang mencari ilmu karena mengharap ridha-Nya. Seluruh umat manusia hendaknya dapat mencerna dan mengimplementasikan kewajiban dalam menuntut ilmu serta mempelajarinya.

Pada era digitalisasi saat ini, fungsi pembangkit telah menjadi salah satu alat penting dalam berbagai bidang ilmu (Chattamvelli dan Shanmugam, 2019) diantaranya matematika, fisika, statistika, dan rekayasa. Nyatanya fungsi pembangkit memiliki kemampuan untuk menghasilkan fungsi matematis yang rumit juga efisien, sehingga sangat membantu dalam penyelesaian berbagai masalah dalam bidang-bidang ilmu matematika, fisika, statistika, dan rekayasa (Ismail, 2005). Fungsi pembangkit dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial (Chandra, 2001) dan melakukan aproksimasi numerik (Gupta, 1995). Selain itu, fungsi pembangkit juga memungkinkan diperoleh sifat-sifat penting dari polinomial orthogonal, dengan menggunakan fungsi pembangkit dapat diperoleh suatu polinomial orthogonal baru dengan mengambil turunan atau integral dari fungsi pembangkit (Askey, 1975).

Polinomial orthogonal adalah polinomial-polinomial yang memiliki sifat ortogonal terhadap suatu fungsi berbobot pada suatu interval tertentu (Szego, 1939). Dalam matematika, polinomial orthogonal dapat digunakan sebagai basis dari ruang fungsi, di mana setiap fungsi dalam ruang tersebut dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari polinomial orthogonal tersebut (Ismail, 2005).

Contoh polinomial orthogonal yang umum digunakan adalah polinomial Legendre (Abramowitz dan Stegun, 1964), polinomial Jacobi (Dunkl dan Yuan, 2014), polinomial Chebyshev, dan polinomial Hermite (Nevai, 1990; Borwein dan Erdelyi, 1995).

Sifat ortogonal dari polinomial orthogonal memungkinkan untuk mempercepat proses perhitungan dan analisis suatu fungsi pada interval tertentu, karena dengan menggunakan basis polinomial orthogonal dapat merepresentasikan fungsi tersebut sebagai suatu deret polinomial (Askey, 1975). Dalam aplikasinya polinomial orthogonal banyak digunakan dalam teori aproksimasi, statistik, fisika matematika, dan bidang matematika lainnya (Askey, 1975; Nevai, 1990; Ismail, 2005; Dunkl dan Yuan, 2014).

Salah satu jenis polinomial ortogonal yang sering digunakan sebagai alat pembangkit fungsi adalah polinomial Chebyshev (Borwein dan Erdelyi, 1995). Polinomial ini memiliki sifat-sifat khusus yang memungkinkannya dalam mengaproksimasi fungsi kontinu, caranya dengan mencoba untuk mendekati fungsi tersebut dengan fungsi lain yang lebih sederhana namun masih memenuhi syarat kesalahan yang kecil dalam proses pengaproksimasian.

Menurut Clemente (2010) Polinomial Chebyshev memiliki banyak jenis yaitu jenis pertama $T_n(x)$, jenis kedua $U_n(x)$, jenis ketiga $V_n(x)$, dan jenis keempat $W_n(x)$. Dalam polinomial Chebyshev jenis pertama memiliki banyak keunggulan salah satunya adalah sebagai bentuk rekursif pertama dalam polinomial Chebyshev. Telah terbukti bahwa polinomial Chebyshev jenis pertama menjadi alat berharga dalam pengaproksian dan analisis fungsi, serta memberikan kontribusi dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi di masa yang akan datang (Mason dan Handscomb, 2003).

Penggunaan polinomial Chebyshev jenis pertama dalam fungsi pembangkit sangat prospektif dan telah digunakan dalam berbagai aplikasi. Meskipun demikian, masih terdapat beberapa tantangan dalam penggunaan polinomial Chebyshev jenis pertama sebagai alat pembangkit fungsi. Salah satu tantangan tersebut adalah bagaimana mengoptimalkan penggunaannya untuk mempertimbangkan keakuratan dan efisiensinya. Dalam penelitian yang dilakukan oleh Nastiti (2012) ekspansi binomial $\left(1 - te^{i\theta}\right)^{-\mu}$ dapat digunakan untuk mencari fungsi pembangkit pada polinomial Chebyshev.

Sehubungan dengan itu, penelitian tentang fungsi pembangkit pada polinomial Chebyshev jenis pertama menjadi penting untuk dilakukan, terutama dalam rangka meningkatkan pemahaman tentang polinomial Chebyshev. Dari penjelasan di atas penelitian ini membahas mengenai fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev $T_n(x)$ serta hubungan polinomial biasa dengan polinomial Chebyshev jenis pertama.

1.2 Rumusan Masalah

Sesuai dengan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya, maka rumusan masalahnya ialah:

1. Bagaimana fungsi pembangkit biasa dan fungsi pembangkit eksponen pada polinomial Chebyshev jenis pertama?

2. Apakah hubungan polinomial biasa dengan polinomial Chebyshev jenis pertama?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah yang dipaparkan dapat diketahui tujuannya adalah sebagai berikut.

1. Mengetahui bentuk fungsi pembangkit biasa dan fungsi pembangkit eksponen pada polinomial Chebyshev jenis pertama.
2. Mengetahui hubungan polinomial biasa dengan polinomial Chebyshev jenis pertama.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah penilitian ini yaitu hanya mencari bentuk fungsi pembangkit biasa dan fungsi pembangkit eksponen polinomial Chebyshev jenis pertama, kemudian menelaah hubungan polinomial biasa dengan polinomial Chebyshev jenis pertama yang dibuktikan dengan teorema pembuktian induksi matematika.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penilitian ini ialah:

1. Manfaat Teoritis
   Penelitian ini diharapkan dapat menambah wawasan dan pengetahuan mengenai matematika analisis tentang polinomial Chebyshev jenis pertama, serta diharapkan dapat menjadi jembatan untuk pengembangan ilmu pengetahuan khususnya bidang matematika.
2. Manfaat Praktis
   (a) Penulis
   Menambah keilmuan dan pengetahuan tentang polinomial Chebyshev jenis pertama.

(b) Lembaga

Meningkat reputasi lembaga pada perkembangan ilmu matematika dan sebagai tambahan rujukan atau sumber untuk penelitian yang lebih mendalam atau dapat pula digunakan sebagai bahan ajar khususnya bidang matematika analisis.

(c) Pembaca

Dengan adanya penelitian ini diharapkan dapat menambah pengetahuan tentang polinomial Chebyshev, memberikan informasi yang dapat bermanfaat bagi pembaca dan bisa sebagai referensi atau rujukan sumber bagi pembaca.

1.6 Metodologi Penelitian

Metode yang dilakukan oleh peneliti adalah studi literatur yaitu dengan menelusuri sumber-sumber tulisan (jurnal dan buku) terkait topik yang akan dibahas. Dalam penyusunan skripsi ini langkah-langkah yang akan dilakukan peneliti diantaranya adalah:

1. Mencari jurnal-jurnal yang sesuai dengan bidang peneliti yaitu bidang matematika analisis.

2. Mengerucutkan pencarian jurnal dengan menemukan rumusan masalah yang akan dibahas peneliti, selanjutnya dijadikan sebagai topik judul.

3. Memperoleh judul, tujuan pembahasan, dan mengumpulkan jurnal sesuai dengan judul yaitu fungsi pembangkit pada polinomial Chebyshev jenis pertama dan sebagai tambahan

yaitu hubungan polinomial biasa dengan polinomial Chebyshev jenis pertama.

4. Menemukan kajian pustaka yang berkaitan dengan pembahasan fungsi pembangkit, polinomial Chebyshev jenis pertama, dan polinomial biasa.

5. Menganalisis definisi deret pangkat, formula Moivre dan Euler, fungsi pembangkit, polinomial biasa, dan Polinomial Chebyshev kemudian menelaah contoh dari definisi tersebut.

6. Menelaah pembuktian teorema fungsi pembangkit biasa dan fungsi pembangkit eksponen polinomial Chebyshev jenis pertama serta hubungan polinomial biasa dengan polinomial Chebyshev jenis pertama sehingga diperoleh hasil kemudian menyimpulkannya.

BAB 2

LANDASAN TEORI

Pada bab ini diberikan teori dasar yang digunakan sebagai landasan dalam bab selanjutnya atau bab pembahasan. Teori dasar ini mencakup definisi deret pangkat, formula Moivre dan Euler, fungsi pembangkit, serta polinomial Chebyshev.

2.1 Deret Pangkat

Deret pangkat atau deret kuasa merupakan deret yang suku-sukunya berkaitan dengan variabel real dan variabel kompleks (Widagdo, 2005). Jika variabelnya real disebut deret pangkat real, sedangkan jika deret yang suku-sukunya berhubungan dengan variabel kompleks disebut deret pangkat kompleks.

Definisi 2.1.0.1 (Purcell, 2004)
Jika $l_0, l_1, l_2, \cdots, l_n, \cdots$ adalah konstanta-konstanta kompleks dan m suatu variabel kompleks, maka deret

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n(m-m_0)^n = l_0+l_1(m-m_0)+l_2(m-m_0)^2+\cdots+l_n(m-m_0)^n \tag{2.1}$$

disebut deret pangkat kompleks dalam $(m-m_0)$, dengan m_0 adalah konstanta kompleks.
Apabila diambil $m_0 = 0$, sehingga deret ini menjadi deret pangkat

kompleks dalam m dan mempunyai bentuk umum

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n m^n = l_0 + l_1 m + l_2 m^2 + \cdots + l_n m^n + \cdots \tag{2.2}$$

Contoh 2.1.0.1

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

   Di mana $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ merupakan deret pangkat dalam x.
   Deret yang diperoleh yaitu $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$

   Di mana $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$ adalah deret pangkat dalam $(x-3)$.
   Dengan deretnya yaitu $1 + \frac{(x-3)}{2} + \frac{(x-3)^2}{4} + \cdots + \frac{(x-3)^n}{2^n} + \cdots$.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

   Di mana $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ adalah deret pangkat dalam x.
   Dengan deretnya yaitu $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$.

Definisi 2.1.0.2 (Purcell, 2004)
Deret pangkat kompleks $\sum\limits_{n=0}^{\infty} l_n m^n$ konvergen pada titik m jika dan hanya jika barisan jumlah parsial $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ mendekati suatu limit untuk n menjadi tak hingga dengan

$$S_n = l_0 + l_1 z + l_2 m^2 + \cdots + l_n m^n$$

Karena S_n adalah jumlah parsial ke-n dari deret pangkat kompleks, maka S_n dapat dipisahkan ke dalam bagian real dan bagian *imajiner menjadi $S_n = X_n + iY_n$, maka $S_n \to x + iy$ jika dan hanya jika $X_n \to x$ dan $Y_n \to y$. Oleh sebab itu*

$$|S_n - (x+iy)| = |(X_n - x) + i(Y_n - y)| \tag{2.3}$$

$$= \sqrt{(X_n - x)^2 + (Y_n - y)^2} \tag{2.4}$$

mendekati nol jika dan hanya jika $(X_n - x) \to 0$ dan $(Y_n - y) \to 0$. Dengan demikian barisan $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergen ke $x + iy$ jika dan hanya jika barisan bagian real $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergen ke x dan barisan bagian imajiner $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergen ke y.

Contoh 2.1.0.2

Akan dibuktikan deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ merupakan deret konvergen. Mengingat suku-suku $x_n := \frac{1}{n^2}$ selalu positif maka barisan (w_n) dengan $w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ adalah monoton naik. Cukup dibuktikan dengan barisan (w_n) terbatas bahwa ditemukan adanya barisan bagian yang terbatas. Perhatikan suku-suku yang berbentuk $2^k - 1$, yaitu suku ke $1, 3, 7, \cdots$.

Untuk $k_1 = 2^1 - 1 = 1$ maka $w_{k1} = 1$. Untuk $k_2 = 2^2 - 1 = 3$ maka

$$w_{k_2} = \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) < 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2}$$

Untuk $k_3 = 2^3 - 1$ maka

$$w_{k_3} = w_{k_2} + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) < w_{k_2} + \frac{4}{4^2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}.$$

Dengan melihat pola ini, apabila prosesnya dilanjutkan maka akan diperoleh bentuk

$$0 < w_{k_j} < 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}.$$

Perhatikan bahwa suku-suku barisan (w_{k_j}) terdominasi dari atas oleh sebuah deret geometri sengan $a = 1$ dan rasio $r = \frac{1}{2}$. Jumlahan tak hingga deret geometri ini yaitu

$$w = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Jadi barisan bagian (w_{k_n}) dengan $k_n := 2^n - 1$ adalah terbatas, yaitu $0 < w_{k_j} < 2$. Dari penjelasan di atas maka barisan jumlah parsial konvergen dan dapat disimpulkan bahwa deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ merupakan deret konvergen.

Teorema 2.1.0.1 (Hernadi, 2015)
Jika deret $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |l_n m^n|$ *konvergen, maka deret pangkat kompleks* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} l_n m^n$ *konvergen.*

Bukti:
Diketahui deret $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |l_n m^n|$ konvergen, deret ini merupakan deret dengan suku-suku real positif. Misalkan $l_n m^n = x_n + iy_n$, dengan $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ dan x_n, y_n anggota bilangan real, maka diperoleh $|x_n| \leq \sqrt{{x_n}^2 + {y_n}^2} = |l_n m^n|$ dan $|y_n| \leq \sqrt{{x_n}^2 + {y_n}^2} = |l_n m^n|$
Karena deret $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |l_n m^n|$ konvergen, juga berlaku $|x_n| \leq |l_n m^n|$ dan $|y_n| \leq |l_n m^n|$ untuk semua n, karena $L_n m^n = x_n + iy_n$, maka

deret $\sum_{n=0}^{\infty} l_n m^n$ juga konvergen. Sehingga terbukti bahwa deret pangkat kompleks $\sum_{n=0}^{\infty} l_n m^n$ mutlak konvergen. ■

Contoh 2.1.0.3

Akan dibuktikan deret pangkat kompleks $\sum_{n=0}^{\infty} m^n$ merupakan deret konvergen. Dari deret tersebut terbentuk nilai mutlak deret berikut,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |m^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |m|^n$$

jumlahan parsialnya adalah

$$S_n = 1 + |m| + |m|^2 + |m|^3 + \cdots + |m|^n$$

dan

$$|m|S_n = |m| + |m|^2 + |m|^3 + \cdots + |m|^n + |m|^{n+1}.$$

Sehingga $S_n - |m|S_n = 1 - |m|^{n+1}$ atau $(1 - |m|)S_n = 1 - |m|^{n+1}$ maka

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1 - |m|^{n+1}}{1 - |m|} \\
&= \frac{1}{1 - |m|} - \frac{|m|^{n+1}}{1 - |m|} \\
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1 - |m|} - \frac{|m|^{n+1}}{1 - |m|} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - |m|} - \lim_{n\to\infty} \frac{|m|^{n+1}}{1 - |m|}
\end{aligned}$$

Dalam kasus semacam ini limit S_n untuk n menjadi luas tak hingga akan mendekati nilai $\frac{1}{1-|m|}$ jika diambil $|m| < 1$, maka barisan $\{S_n\}_{\infty}^{n=1}$ konvergen ke $\frac{1}{1-|m|}$. Berdasarkan Definisi 2.1.0.2, maka deret $\sum_{n=0}^{\infty} |m|^n$ konvergen ke $\frac{1}{1-|m|}$.

Karena deret $\sum_{n=0}^{\infty} |m|^n$ konvergen jika $|m| < 1$, maka berdasarkan Teorema 2.1.0.1 $\sum_{n=0}^{\infty} m^n$ juga konvergen atau dapat ditulis $|m| < 1$. Sehingga benar deret pangkat kompleks $\sum_{n=0}^{\infty} m^n$ merupakan deret konvergen.

Uji kekonvergenan deret dapat dilakukan dengan berbagai cara, salah satunya adalah uji rasio atau yang biasa dikenal sebagai kriteria d'Alembert.

Teorema 2.1.0.2 Uji Rasio (Bartle dan Sherbert, 2010)
Misalkan dipunyai $\sum m_n$ *adalah barisan bilangan real yang suku-sukunya tak negatif dan misalkan*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_{n+1}}{m_n} = \beta \tag{2.5}$$

maka berlaku pernyataan berikut

1. *Jika* $\beta < 1$ *maka deret konvergen.*
2. *Jika* $\beta > 1$ *maka deret divergen.*
3. *Jika* $\beta = 1$ *maka uji gagal, yaitu tidak dapat ditarik kesimpulan apapun.*

Bukti:

1. Berdasarkan definisi limit barisan maka terdapat A bilangan asli cukup besar sehingga

$\frac{m_{n+1}}{m_n} = \beta$ untuk setiap $n \geq A$.

Secara rekursif diperoleh hubungan sebagai berikut

$$m_{n+1} < \beta m_n < \beta^2 m_{n-1} < \beta^3 m_{n-2} < \cdots < \beta^n m_1.$$

Dengan mengambil deret geometri $\sum \beta^n$ sebagai pembanding maka diperoleh hubungan

$$\sum m_{n+1} < m_1 \sum \beta^n.$$

Diketahui bahwa $\beta < 1$ maka deret geometri tersebut adalah konvergen, sehingga deret $\sum m_{n+1}$ konvergen. Sehingga dapat disimpulkan bahwa deret $\sum m_n$ konvergen.

2. Dengan argumen yang sejalan maka diperoleh $\frac{m_{n+1}}{m_n} > \beta > 1$ untuk setiap $n \geq \beta$ sehingga diperoleh perbandingan

$$\sum m_{n+1} > m_1 \sum \beta^n.$$

Oleh karena deret geometri ini divergen maka deret $\sum m_{n+1}$ juga divergen.

3. Ketika $\beta = 1$ deret tidak tidak dapat dilakukan dengan perbandingan dengan deret geometri. Pada kasus ini tidak dapat membandingkan antara dua suku berurutan m_n dan m_{n+1}. Walaupun limitnya bernilai 1 namun kedua suku tersebut dapat saja saling mendominasi (kadang lebih besar, kadang lebih kecil) sehingga tidak dapat disimpulkan.

Maka teorema dengan tiga syarat tersebut terbukti. ■

Contoh 2.1.0.4

Akan dilakukan uji rasio sebagai berikut:

1. Akan ditunjukkan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ merupakan deret konvergen, maka diperoleh $m_n = \frac{n^3}{n!}$ dan $m_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{(n+1)!}$. Sehingga dengan menggunakan rasio didapat,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{m_{n+1}}{m_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{n!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 \cdot n!}{n! \cdot (n+1) \cdot n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{2n}{n^3} + \frac{1}{n^3}}{1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

   Dari penjelasan di atas diketahui bahwa deret tersebut merupakan deret konvergen karena setelah diuji rasio diperoleh nilai 0. Menurut Teorema 2.1.0.2 pernyataan nomor 1 *"Jika $\beta < 1$ maka deret konvergen"* sehingga deret tersebut merupakan deret konvergen.

2. Akan ditunjukkan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$ merupakan deret divergen. Maka dari uji rasio Teorema 2.1.0.2 diperoleh $m_n = \frac{n!}{n^2}$ dan $m_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^2}$.

Sehingga,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{m_{n+1}}{m_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^2}}{\frac{n!}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot n^2}{(n+1)^2 \cdot n!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot n^2 \cdot n!}{n! \cdot (n+1)^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot n^2}{(n+1)^2} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Dari penjelasan di atas menghasilkan kesimpulan yang sesuai dengan Teorema 2.1.0.2 pernyataan nomor 2 yaitu $\beta > 1$. Jadi, deret di atas merupakan deret divergen.

3. $\frac{m_{n+1}}{m_n} = \frac{2n-3}{2n-1}$.
   Maka
   $$\frac{m_{n+1}}{m_n} = \frac{\frac{1}{2(n+1)-3}}{\frac{1}{2n-3}} = \frac{2n-3}{2n-1}.$$
   Sehingga diperoleh
   $$\beta = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-3}{2n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2-\frac{3}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right) = 1.$$
   Uji rasio ternyata gagal karena tidak ada kesimpulan tentang kekonvergenan deret tersebut.

Dalam konteks deret pangkat, deret pangkat dapat digunakan untuk merepresentasikan fungsi-fungsi kompleks sebagai jumlah tak hingga dari suku-suku pangkat variabel. Jika deret pangkat terdiri dari suku-suku polinomial, maka deret tersebut dapat dikaitkan dengan polinomial. Misalnya, deret Taylor dapat digunakan untuk mendekati fungsi dengan polinomial atau deret pangkat polinomial terbatas.

Sebagai lanjutan deret pangkat yang , terdapat dua buah deret penting dalam kalkulus (Wilfred, 1952) yaitu deret Taylor dan deret Maclaurin.

2.1.1 Deret Taylor

Deret Taylor dapat didefinisikan melalui pendekatan fungsi dengan polinomial kompleks. Untuk mendekati nilai fungsi pada sebuah titik $m = m_0$ dapat dilakukan dengan pendekatan polinomial kompleks dalam $m-m_0$, maka dapat dinyatakan bahwa polinomial kompleks ke dalam bentuk

$$P(m) = l_0 + l_1(m - m_0) + l_2(m - m_0)^2 + \cdots + l_n(m - m_0)^n$$

dengan $l_0, l_1, l_2, \cdots, l_n$ adalah kostanta kompleks. Dimisalkan n turunan pertama dari f yang terdapat di $m = m_0$ dan diberikan syarat sebagai berikut

$$\begin{aligned} f(m_0) &= P(m_0), \\ f'(m_0) &= P'(m_0), \\ f''(m_0) &= P''(m_0), \\ &\cdots, \\ f^{(n)}(m_0) &= P^{(n)}(m_0). \end{aligned}$$

Dengan adanya syarat ini, maka nilai $P(m)$ dan n turunan pertamanya bersesuaian dengan $f(m)$ dan n turunan pertamanya di $m = m_0$. Apabila ditambahkan syarat bahwa turunan tingkat tinggi dari $P(m)$ dan $f(m)$ tetap bersesusaian, maka $P(m)$ dan $f(m)$ akan tetap cukup dekat di sekitar $m = m_0$, hal ini disebabkan

$$\begin{aligned}
&P(m) = l_0 + l_1(m - m_0) + l_2(m - m_0)^2 + \cdots + l_n(m - m_0)^n \\
&P'(m) = l_1 + 2l_2(m - m_0) + 3l_3(m - m_0)^2 + \cdots + nl_n(m - m_0)^{n-1} \\
&P''(m) = 2l_2 + 3 \cdot 2l_3(m - m_0) + \cdots + n(n-1)l_n(m - m_0)^{n-2} \\
&P'''(m) = 3 \cdot 2l_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)l_n(m - m_0)^{n-3} \\
&\vdots \\
&P^{(n)}(m) = n(n-1)(n-2)(n-3)1 \cdot l_n = n!l_n
\end{aligned}$$

Pada titik $m = m_0$ diperoleh

$$\begin{aligned}
P(m_0) &= l_0 \\
P'(m_0) &= l_1 \\
P''(m_0) &= 2l_2 = 2!l_2 \\
P'''(m_0) &= 3 \cdot 2l_3 = 3!l_3 \\
&\vdots \\
P^{(n)}(m_0) &= n(n-1)(n-2)(n-3)1 \cdot l_n \\
&= n!l_n.
\end{aligned}$$

Sehingga berdasarkan syarat yang diberikan, maka

$$\begin{aligned}
f(m_0) &= l_0 \\
f'(m_0) &= l_1 \\
f''(m_0) &= 2!l_2 \\
f'''(m_0) &= 3!l_3
\end{aligned}$$

$$\cdots,$$
$$f^{(n)}(m_0) = n! l_n.$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} l_0 &= f(m_0), & l_1 &= f'(m_0), \\ l_2 &= \frac{f''(m_0)}{2!}, & l_3 &= \frac{f'''(m_0)}{3!}, \\ &\cdots, & &\cdots, \end{aligned}$$

$$l_n = \tfrac{f^{(n)}(m_0)}{n!}$$

Dengan mensubstitusi nilai-nilai $l_0, l_1, l_2, \cdots, l_n$ ke dalam polinomial di atas, maka diperoleh definisi dari polinomial Taylor.

Definisi 2.1.1.1 Polinomial Taylor (Wilfred, 1952)
Jika $f(m)$ *diferensial dari* n *kali pada* $m = m_0$*, maka dapat didefinisikan polinomial Taylor ke-n di sekitar* $m = m_0$*, sebagai berikut*

$$P_n(m) = f(m_0) + f'(m_0)(m - m_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(m_0)}{n!}(m - m_0)^n \tag{2.6}$$

Definisi polinomial Taylor ini dapat dituliskan dalam bentuk yang lebih sederhana dengan menggunakan notasi sigma yaitu

$$P_n(m) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(m_0)}{k!}(m - m_0)^k \tag{2.7}$$

Karena nilai dari f dan n turunan pertamanya bersesuaian dengan polinomial Taylor dan n turunan pertama pada $m = m_0$.

Maka jika n naik, polinomial Taylor untuk f pada $m = m_0$ akan mendekati nilai $f(m)$ setidak-tidaknya di sekitar $m = m_0$. Sehingga diperoleh definisi deret Taylor sebagai berikut.

Definisi 2.1.1.2 Deret Taylor (Wilfred, 1952)

Jika $f(m)$ diferensial pada semua tingkat untuk $m = m_0$, maka didefinisikan deret Taylor untuk fungsi f di sekitar titik $m = m_0$, yaitu

$$f(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(m_0)}{n!}(m - m_0)^n \tag{2.8}$$

Apabila diamati deret Taylor ini merupakan suatu deret pangkat kompleks dalam $(m - m_0)$, dengan konstanta-konstanta kompleks $l_n = \frac{f^{(n)}(m_0)}{n!}$, dengan $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$.

Contoh 2.1.1.1

Dipandang bahwa $f(m) = \frac{1}{m}$, maka deret Taylor di sekitar $m = 2$ ialah

$$\begin{aligned}
f(m) &= \frac{1}{m} = \frac{0!}{m} & f(2) &= \frac{1}{2} \\
f'(m) &= -\frac{1}{m^2} = -\frac{1!}{m^2} & f'(2) &= -\frac{1}{2^2} \\
f''(m) &= \frac{2}{m^3} = \frac{2!}{m^3} & f''(2) &= \frac{2!}{2^3} \\
f'''(m) &= -\frac{3 \cdot 2}{m^4} = -\frac{3!}{m^4} & f'''(2) &= -\frac{3!}{2^4} \\
f^{(4)}(m) &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{m^5} = \frac{4!}{m^5} & f^{(4)}(2) &= \frac{4!}{2^5} \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

$$f^{(n)}(m) = (-1)^n \frac{n!}{m^{(n+1)}} \qquad f^{(n)}(2) = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$$

Sehingga deret Taylor $f(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(m-2)^n$.

Contoh 2.1.1.2

Dimisalkan bahwa $f(m) = e^m$ maka deret Taylor di sekitar $m = 3i$ ialah

$$f(m) = f'(m) = f''(m) = f'''(m) = f^{(4)}(m) = \cdots = f^{(n)}(m) = e^m$$

Sehingga $f^{(n)}(3i) = e^{3i}$.
Dengan demikian diperoleh deret Taylor

$$f(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{3i}}{n!}(m-3i)^n.$$

2.1.2 Deret Maclaurin

Polinomial Maclaurin merupakan kejadian khusus dari polinomial Taylor yang mana pada $m = 0$. Untuk memperoleh polinomial Maclaurin nilai $m = m_0$ pada polinomial Taylor diganti dengan $m = 0$, sehingga diperoleh definisi berikut

Definisi 2.1.2.1 (Polinomial Maclaurin) (Wilfred, 1952)
Jika $f(m)$ berdiferensial n kali pada $m = 0$, maka didefinisikan polinomial Maclaurin ke-n di sekitar $m = 0$ untuk f yaitu

$$P_n(m) = f(0) + f'(0)m + \frac{f''(0)}{2!}m^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}m^n \quad (2.9)$$

Seperti halnya deret Taylor karena nilai dari f dan n pada deret Maclaurin turunan pertamanya bersesuaian dengan polinomial Maclaurin dan n turunan pertama pada $m = m_0$. Maka jika n naik, polinomial Maclaurin untuk f pada $m = m_0$ akan mendekati nilai $f(m)$ setidak-tidaknya di sekitar $m = m_0$. Sehingga diperoleh definisi deret Maclaurin sebagai berikut.

Definisi 2.1.2.2 (Deret Maclaurin) (Wilfred, 1952)
Jika $f(m)$ berdiferensial pada semua tingkat n kali untuk $m = 0$, maka didefinisikan deret Maclaurin untuk fungsi f di sekitar titik $m = 0$ yaitu

$$f(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} m^n \tag{2.10}$$

Contoh 2.1.2.1
Dimisalkan deret Maclaurin untuk $f(m) = e^m$.
Seperti pada Contoh 2.1.1.2, nilai $m = 3i$ dapat diubah dengan $m = 0$, maka diperoleh $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Sehingga diperoleh deret Maclaurin

$$f(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} = 1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^2}{3!} + \cdots + \frac{m^n}{n!} + \cdots$$

Contoh 2.1.2.2
Akan dicari deret Maclaurin untuk $f(m) = \sin z$ dan $f(m) = \cos m$ ialah sebagai berikut.

- Untuk $f(m) = \sin m$, maka $f(0) = \sin 0 = 0$

$$\begin{aligned} f'(m) &= \cos m & f'(0) &= \cos 0 = 1 \\ f''(m) &= -\sin m & f'(0) &= -\sin 0 = 0 \\ f'''(m) &= -\cos m & f'(0) &= -\cos 0 = -1 \\ f^{(4)}(m) &= \sin z & f^{(4)}(0) &= \sin 0 = 0 \end{aligned}$$

  Karena $f^{(4)}(m) = f(m) = \sin m$, maka nilai $f^{(n)}(0)$ akan berulang $0, 1, 0, -1$.
  Oleh sebab itu, diperoleh deret Maclaurin

$$\begin{aligned} f(m) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= m - \frac{m^3}{3!} + \frac{m^5}{5!} - \frac{m^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \end{aligned}$$

- Untuk memperoleh deret Maclaurin dari $f(m) = \cos m$, dapat dilakukan dengan menurunkan suku demi suku dari deret Maclaurin untuk $f(m) = \sin m$. Dan hasilnya juga akan berulang.
  Sehingga diperoleh deret Maclaurin sebagai berikut

$$\begin{aligned} f(m) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 - \frac{m^2}{2!} + \frac{m^4}{4!} - \frac{m^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{m^{2n}}{(2n)!} + \cdots \end{aligned}$$

Contoh 2.1.2.3

Misalkan deret Maclaurin $f(m) = \frac{1}{1-m}$, maka $f(0) = \frac{1}{1-0} = 1$

$$
\begin{aligned}
f'(m) &= \frac{1}{(1-m)^2} & f(0) &= \frac{1}{(1-0)^2} = 1 \\
f''(m) &= \frac{2!}{(1-m)^3} & f(0) &= \frac{2!}{(1-0)^3} = 2! \\
f'''(m) &= \frac{3!}{(1-m)^4} & f(0) &= \frac{3!}{(1-0)^4} = 3! \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(n)}(m) &= \frac{n!}{(1-m)^{n+1}} & f^{(n)}(0) &= \frac{n!}{(1-0)^{n+1}} = n!
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh deret Maclaurin untuk $f(m) = \frac{1}{1-m}$, yaitu

$$f(m) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 + m + m^2 + m^3 + \cdots + m^n + \cdots$$

2.2 Rumus Moivre dan Euler

Rumus Moivre dan Euler adalah dua rumus matematika yang sangat erat hubungannya dengan trigonometri dan bilangan kompleks. Kedua rumus ini digunakan untuk menghubungkan bilangan kompleks dengan fungsi trigonometri eksponensial. Berikut akan disajikan materi tentang rumus Moivre dan Euler.

2.2.1 Rumus Moivre

Salah satu kontribusi terkenal dari Abraham de Moivre adalah perumusannya yang menghubungkan sifat bilangan kompleks dengan fungsi trigonometri. Formula yang dihasilkan tersebut saat ini dikenal sebagai rumus Moivre. Rumus Moivre merupakan suatu rumus yang digunakan untuk menghitung hasil pangkat dari suatu bilangan kompleks dalam bentuk trigonometri.

Definisi 2.2.1 Rumus Moivre (Spiegel, 1964; Schneider, 2011)
Secara umum rumus Moivre berbentuk

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{2.11}$$

dimana i *adalah unit imajiner* $(i^2 = -1)$ *dan* n *adalah bilangan asli. Ekspresi* $\cos\theta + i\sin\theta$ *terkadang disingkat menjadi* $cis\theta$*.*

Contoh 2.2.1.1
Misalkan terdapat persamaan

$$g = (\cos 0^\circ + i\sin 90^\circ)^3$$

maka dengan menggunakan Definisi 2.2.1 diperoleh hasil

$$\begin{aligned} g &= (3\cos 0^\circ + i3\sin 90^\circ) \\ &= (3\cdot 1 + i3\cdot 1) \\ &= (3 + i3) \end{aligned}$$

Teorema 2.2.1 (De Moivre) (Spiegel, 1964; Schneider, 2011)
Untuk setiap bilangan kompleks $m = r(\cos\theta + i\sin\theta)$*, dan setiap bilangan bulat positif (bilangan asli)* n*, berlaku*

$$m^n = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{2.12}$$

$$m^n = r^n cis(n\theta) \tag{2.13}$$

Bukti:
Pembuktian ini dengan menggunakan induksi matematika.
Jika $n = 1$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} m^1 &= r^1(\cos(1)\theta + i\sin(1)\theta) \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}$$

Akan dibuktikan bahwa untuk $n = k + 1$ benar, maka

$$\begin{aligned} m^{k+1} &= m^k \cdot m^1 \\ &= (r^k(\cos(k)\theta + i\sin(k)\theta)) \cdot (r(\cos\theta + i\sin\theta)) \\ &= r^k \cdot r(\cos(k)\theta\cos\theta + i\cos(k)\theta(\sin\theta) \\ &+ i\sin(k)\theta\cos\theta - \sin(k)\theta\sin\theta) \\ &= r^k \cdot r(\cos(k)\theta\cos\theta - \sin(k)\theta\sin\theta) \\ &+ i(\sin(k)\theta\cos\theta + \cos(k)\theta(\sin\theta)) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan identitas trigonometri, maka persamaan tersebut menjadi

$$\begin{aligned} m^{k+1} &= r^k \cdot r(\cos(k+1)\theta) + i(\sin(k+1)\theta) \\ m^{k+1} &= r^{k+1}(\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta) \end{aligned}$$

sehingga benar untuk $n = k + 1$ ketika $n = k$ benar.
Dengan menggunakan prinsip induksi matematika, maka terbukti benar untuk setiap bilangan bulat positif $(n \geq 1)$ berlaku

$$m^n = r^n cisn\theta. \qquad \blacksquare$$

Contoh 2.2.1.2
Dimisalkan $m = (1+i)^4$ dan $\pi = 180°$.
Maka

$$|m| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} = r$$
$$\tan\theta = 1$$

sehingga $\theta = \frac{\pi}{4}$. Dengan menggunakan Definisi 2.2.1 dan Teorema 2.2.1 diperoleh

$$\begin{aligned} m &= (\sqrt{2})^4\left(\cos(4\cdot\frac{\pi}{4}) + i\sin(4\cdot\frac{\pi}{4})\right) \\ &= 4(\cos\pi + i\sin\pi) \\ &= 4((-1)+0) = -4 \end{aligned}$$

2.2.2 Formula Euler

Rumus Moivre dapat diturunkan dengan menggunakan rumus Euler. Rumus Euler merupakan rumus matematika dalam analisis kompleks yang menghubungkan antara fungsi trinogometri dan fungsi eksponensial.

Definisi 2.2.2 Rumus Euler (Spiegel, 1964; Schneider, 2011)
Secara umum rumus Euler menyatakan bahwa, untuk setiap bilangan real θ

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{2.14}$$

di mana e *adalah basis logaritma natural,* i *adalah unit imajiner atau satuan imajiner,* $\sin$ *dan* $\cos$ *adalah fungsi trigonometri.*

Dari rumus Moivre pada persamaan (2.11) dapat dengan mudah diturunkan dengan menggunakan rumus Euler (Mahmudi, 2008). Berdasarkan hukum Euler berlaku

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \tag{2.15}$$

Kemudian dengan menggunakan rumus Euler pada persamaan (2.14) diperoleh

$$e^{in\theta} = (\cos n\theta + i \sin n\theta) \tag{2.16}$$

Persamaan ini akan menjadi dasar teori untuk mendapatkan fungsi pembangkit eksponensial polinomial Chebyshev jenis pertama yang selanjutnya akan dibahas di bab 3.

Contoh 2.2.2.1

Misalkan persamaan $e^{i(\frac{\pi}{2})}$ dengan menggunakan rumus Euler pada Definisi 2.2.2 maka persamaan tersebut akan membentuk $(x + iy)$ yaitu

$$\begin{aligned} e^{i(\frac{\pi}{2})} &= \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} \\ &= 0 + i \cdot 1 = i \end{aligned}$$

dengan $\pi = 180°$. Jadi dari persamaan $e^{i(\frac{\pi}{2})}$ terbentuk i.

Contoh 2.2.2.2

Misalkan persamaan $3e^{5i}$ dengan menggunakan rumus Euler pada Definisi 2.2.2 maka persamaan tersebut akan membentuk $(x + iy)$ yaitu

$$3e^{5i} = 3(\cos 5 + i \sin 5).$$

Jadi dari persamaan $3e^{5i}$ terbentuk $3(\cos 5 + i \sin 5)$.

2.3 Fungsi Pembangkit

Penggunaan fungsi pembangkit merupakan salah satu metode yang digunakan dalam menyelesaikan permasalahan. Dengan mentranslasi permasalahan dalam dunia fungsi pembangkit, maka dapat digunakan sifat-sifat khusus dari fungsi pembangkit sebagai cara untuk memecahkan masalah.

Metode fungsi pembangkit berakar dari karya De Moivre tahun 1720 untuk memecahkan masalah rekursif secara umum yang kemudian dikembangkan oleh Euler tahun 1748. Wilf (1990) menganalogikan "fungsi pembangkit adalah sebuah tali jemuran tempat menggantungkan barisan bilangan-bilangan yang ditampilkan". Fungsi pembangkit memiliki berbagai macam, dua diantaranya adalah fungsi pembangkit biasa dan fungsi pembangkit eksponensial.

Definisi 2.3.1 Fungsi Pembangkit (Wilf, 1990)
Misalkan $l_n = (l_0, l_1, l_2, \cdots)$ adalah suatu barisan.

1. *Fungsi pembangkit biasa dari l_n didefinisikan sebagai*

$$P(m) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n(m)^n = l_0 + l_1(m) + l_2(m)^2 + \ldots \qquad (2.17)$$

2. *Fungsi Pembangkit Eksponen dari l_n didefinisikan sebagai*

$$P(m) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n \frac{m^n}{n!} = l_0 + l_1(m) + l_2\frac{m^2}{2!} + \ldots \qquad (2.18)$$

Hasil sederhana fungsi pembangkit dapat dilihat dari Contoh 2.1.2.3 untuk barisan $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ menghasilkan

$$\sum_{n=0}^{\infty} m^n = \frac{1}{1-m}$$

dengan $|m| \leq 1$.

Contoh 2.3.1 (Li, 2007)

Dipandang rekursif $l_0 = 1$, dan untuk $n \geq 1$, $l_n = 2l_{n-1} + 1$.

Sesuai dengan Definisi 2.3.1 fungsi pembangkit biasa maka dapat dituliskan

$$P(m) = l_0 + l_1 m + l_2 m^2 + \cdots + l_n m^n + \cdots$$

Kemudian dengan memandang relasi rekursi yang diberikan disadari bahwa untuk semua nilai n kejadian dari $l_n - 2l_{n-1}$ dapat diganti dengan 1. Untuk menggunakan sifat ini maka dengan mengalikan $P(m)$ dengan $2m$ dan menggurangkannya dari $P(m)$, yaitu

$$2P(m) = 2l_0 m + 2l_1 m^2 + 2l_2 m^3 + \cdots + 2l_{n-1} m^n + \cdots$$

dipunyai

$$(1-2m)P(m) = 1 + 1m + 1m^2 + 1m^3 + \cdots + 1m^n + \cdots$$

Dapat dilihat bahwa persamaan di atas seperti pada Contoh 2.1.2.3, sehingga dipunyai

$$\begin{aligned}(1-2m)A(m) &= 1+m+m^2+m^3+\cdots+1m^n+\cdots\\ &= \frac{1}{1-m}\end{aligned}$$

Karena $l_0 = 1$, akibatnya

$$\begin{aligned}A(m) &= \frac{1}{(1-2m)(1-m)}\\ &= \frac{2}{1-2m} + \frac{-1}{1-m}\end{aligned}$$

Diketahui bahwa $\frac{2}{1-2m} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2\cdot 2^n m^n$ dan $\frac{-1}{1-m} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)\cdot m^n$, dengan demikian fungsi pembangkitnya adalah

$$\begin{aligned}P(m) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot 2^n m^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)\cdot m^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1}-1)m^n\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $l_n = 2^{n+1} - 1$.

Contoh 2.3.2

$P(m) = \frac{e^{3m}}{1+5m}$ adalah fungsi pembangkit eksponensial barisan (l_n).

Untuk menentukan nilai l_n, berdasarkan definisi $P(m)$ adalah fungsi pembangkit eksponensial barisan (l_n), maka

$$P(m) = \sum_{n=0}^{n} l^n \frac{m^n}{n!}$$

sehingga l_n adalah koefisien $\frac{m^n}{n!}$ dalam $P(m)$.

$$\begin{aligned}
P(m) &= \frac{e^{3m}}{1+5m} = e^{3m} \cdot \frac{1}{1+5m} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{0} (3)^n \frac{m^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{n} (-5)^n m^n \right) \\
&= \sum_{n=0}^{n} \left(\sum_{n=0}^{n} \frac{3^n}{k!} (-5)^{n-k} \right) m^n \\
&= \sum_{n=0}^{n} \left(\sum_{n=0}^{n} \frac{3^k}{k!} (-5)^{n-k} \right) n! \cdot \frac{m^n}{n!}
\end{aligned}$$

dengan demikian diperoleh

$$l_n = \sum_{n=0}^{n} \left(\sum_{n=0}^{n} \frac{3^k}{k!} (-5)^{n-k} \right) n!,$$

dengan $n \geq 0$.

2.4 Polinomial Chebyshev

Polinomial Chebyshev dan sifatnya memungkinkan digunakan dalam teori aproksimasi atau teori pendekatan, aturan kuadrat, dan sebagainya. Polinomial Chebyshev memiliki berbagai macam jenisnya (Clemente, 2010), salah satunya polinomial Chebyshev jenis pertama $T_n(x)$. Polinomial Chebyshev jenis pertama biasanya digunakan untuk fungsi yang didefinisikan dalam interval $[-1, 1]$.

Definisi 2.4.1 Polinomial Chebyshev (Mason dan Handscomb, 2003)
Polinomial Chebyshev $T_n(x)$ *jenis pertama merupakan polinomial*

dalam x dengan derajat n dan dinyatakan dalam bentuk

$$T_n(x) = \cos n(\theta) \tag{2.19}$$

ketika $x = \cos\theta$ Jika nilai x berada pada interval $[-1, 1]$ maka nilai variabel θ berada di dalam interval $[0, \pi]$.

Berdasarkan persamaan (2.17) maka dapat dipandang empat polinomial Chebyshev jenis pertama sebagai berikut

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Jika dilihat dari persamaan (2.19) polinomial Chebyshev juga dapat didefinisikan dalam bentuk rekursif yaitu sebagai berikut

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \qquad n = 2, 3, \cdots \tag{2.20}$$

dengan nilai awal

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x$$

Polinomial Chebyshev jenis pertama dapat direpresentasikan di dalam kuantitas kompleks yang didefinisikan oleh formula

Moivre pada Definisi 2.2.1, yaitu

$$
\begin{aligned}
T_n(x) &= exp(in \arccos{(x)}) && (2.21)\\
&= \cos(n \arccos{(x)}) + i \sin{(n \arccos{(x)})} && (2.22)
\end{aligned}
$$

dimana

$$Re(T_n(x)) = \cos{(n \arccos{(x)})} \tag{2.23}$$

Berdasarkan persamaan (2.23) dapat disimpulkan bahwa

$$T_n(x) = Re(T_n(x)) \tag{2.24}$$

BAB 3

PEMBAHASAN

Pada bab ini membahas beberapa teorema tentang fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis pertama, khususnya penurunan fungsi pembangkit biasa dan fungsi pembangkit eksponen. Selain itu juga membahas mengenai hubungan polinomial biasa dengan polinomial Chebyshev jenis pertama yang akan dibuktikan dengan menggunakan teorema pembuktian induksi matematika.

3.1 Fungsi Pembangkit Polinomial Chebyshev Jenis Pertama

Fungsi pembangkit memiliki berbagai macam bentuk, yang paling familiar adalah fungsi pembangkit biasa dan fungsi pembangkit eksponensial. Dalam subab ini akan diberikan teorema sebagai bukti bahwa fungsi pembangkit berlaku pada polinomial Chebyshev jenis pertama secara diferensial (penurunan). Sebelum membuktikan teorema disajikan lemma sebagai penunjang pembuktian teorema selanjutnya,

Lemma 3.1.1

Suatu bilangan real x di mana $-1 \leq x \leq 1$ dengan $\psi = \arccos(x)$, memenuhi persamaan berikut

$$\frac{1}{1-\xi e^{i\psi}} = \frac{1-\xi x + i\xi\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi x+\xi^2} \tag{3.1}$$

Bukti:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\xi e^{i\psi}} &= \frac{1}{1-\xi(\cos\psi + i\sin\psi)} \\
&= \frac{1}{(1-\xi\cos\psi) - i\xi\sin\psi} \cdot \frac{(1-\xi\cos\psi) + i\xi\sin\psi}{(1-\xi\cos\psi) + i\xi\sin\psi} \\
&= \frac{(1-\xi\cos\psi) + i\xi\sin\psi}{(1-\xi\cos\psi)^2 + i^2\xi^2\sin^2\psi} \\
&= \frac{(1-\xi\cos\psi) + i\xi\sin\psi}{1-2\xi\cos\psi + \xi^2\cos^2\psi + \xi^2\sin^2\psi} \\
&= \frac{(1-\xi\cos\psi) + i\xi\sin\psi}{1-2\xi\cos\psi + \xi^2(\cos^2\psi + \sin^2\psi)} \\
&= \frac{(1-\xi\cos\psi) + i\xi\sin\psi}{1-2\xi\cos\psi + \xi^2}
\end{aligned}$$

Kemudian substitusikan $\psi = \arccos(x)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\xi e^{i\psi}} &= \frac{(1-\xi\cos(\arccos(x))) + i\xi\sin(\arccos(x))}{1-2\xi\cos(\arccos(x)) + \xi^2} \\
&= \frac{1-\xi x + i\xi\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi x + \xi^2}
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjelasan di atas, terbukti bahwa

$$\frac{1}{1-\xi e^{i\psi}} = \frac{1-\xi x + i\xi\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi x + \xi^2} \qquad \blacksquare$$

Menurut Lemma 3.1.1 dapat ditunjukkan fungsi pembangkit biasa dari besaran kompleks polinomial Chebyshev $T_n(x)$ yang akan dinyatakan pada Teorema 3.1.2.

Teorema 3.1.2 (Cesarano, 2010)

Suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga untuk $|\xi| < 1$, fungsi *pembangkit dari besaran kompleks polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n T_n(x) = \frac{1 - \xi x + i\xi\sqrt{1-x^2}}{1 - 2\xi x + \xi^2}, \qquad -1 \leq x \leq 1 \tag{3.2}$$

Bukti:
Berdasarkan definisi dari polinomial Chebyshev $T_n(x)$ pada persamaan (2.21), fungsi pembangkit dari $T_n(x)$ dapat diturunkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n T_n(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\xi^n e^{in \arccos{(x)}}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\xi e^{i \arccos{(x)}}\right)^n \\ &= 1 + \xi e^{i \arccos{(x)}} + \xi^2 e^{i2 \arccos{(x)}} + \cdots\end{aligned}$$

Sehingga menurut deret Maclaurin pada Contoh 2.1.2.3 membentuk formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n T_n(x) = \frac{1}{1 - \xi e^{i \arccos{(x)}}}$$

Agar deret di atas konvergen, sesuai dengan Teorema 2.1.0.2 maka rasio dari deret geometri tak hingga adalah $|\xi e^{i \arccos{(x)}}| < 1$. Berdasarkan Lemma 3.1.1 dapat ditarik kesimpulan bahwa

$$\frac{1}{1 - \xi e^{i \arccos{(x)}}} = \frac{1}{1 - \xi e^{i\psi}} = \frac{1 - \xi x + i\xi\sqrt{1-x^2}}{1 - 2\xi x + \xi^2}$$

Jadi, terbukti bahwa fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev

$T_n(x)$ adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n T_n(x) = \frac{1 - \xi x + i\xi\sqrt{1-x^2}}{1 - 2\xi x + \xi^2} \qquad \blacksquare$$

Akibat dari Teorema 3.1.2 menghasilkan Teorema 3.1.3 dimana akan ditunjukkan persamaan fungsi pembangkit biasa dari polinomial Chebyshev $T_n(x)$.

Teorema 3.1.3 (Cesarano, 2010)
Suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga untuk $|\xi| < 1$, fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n T_n(x) = \frac{1 - \xi x}{1 - 2\xi x + \xi^2} \tag{3.3}$$

Bukti:
Akan ditunjukkan bahwa fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dapat dinyatakan sebagai

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n T_n(x) = \frac{1 - \xi x}{1 - 2\xi x + \xi^2}$$

Berdasarkan sifat keterhubungan polinomial Chebyshev jenis pertama terhadap $T_n(x)$ pada persamaan (2.24), maka fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dapat diturunkan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n T_n(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n Re(T_n(x)) \\ &= Re \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n T_n(x) \\ &= Re \left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n (T_n(x)) \right)\end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 3.1.2 maka diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n T_n(x) &= Re \left(\frac{1 - \xi x + i\xi\sqrt{1-x^2}}{1 - 2\xi x + \xi^2} \right) \\ &= \frac{1 - \xi x}{1 - 2\xi + \xi^2}\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa fungsi pembangkit biasa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n T_n(x) = \frac{1 - \xi x}{1 - 2\xi x + \xi^2} \qquad \blacksquare$$

Kemudian akan ditunjukkan penurunan fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev $T_n(x)$. Seperti halnya pada penurunan fungsi pembangkit sebelumnya, sifat keterhubungan polinomial Chebyshev $T_n(x)$ terhadap besaran kompleks $T_n(x)$ dapat pula digunakan di dalam penurunan fungsi pembangkit eksponensial. Oleh sebab itu, sebelum menurunkan fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dibutuhkan lemma berikut ini.

Lemma 3.1.4

Suatu bilangan real x di mana $-2 \leq x \leq 1$ dengan $\psi = \arccos(x)$ yaitu berlaku persamaan berikut:

$$exp\left(\xi e^{1i\psi}\right) = e^{\xi x}\left(\cos(\xi\sqrt{1-x^2}) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right) \quad (3.4)$$

Bukti:

Sesuai dengan definisi formula Euler pada persamaan (2.14) maka

$$\begin{aligned} exp\left(\xi e^{i\psi}\right) &= e^{\xi(\cos\psi + i\sin\psi)} \\ &= e^{\xi\cos\psi}e^{i\xi\sin\psi} \\ &= e^{\xi\cos\psi}\left(\cos(\xi\sin\psi) + i\sin(\xi\sin\psi)\right) \end{aligned}$$

Kemudian substitusikan $\psi = \arccos(x)$, sehingga diperoleh hasil dari $exp\left(\xi e^{i\psi}\right)$ yaitu

$$\begin{aligned} &= e^{\xi\cos(\arccos(x))}\left(\cos(\xi\sin(\arccos(x))) + i\sin(\xi\sin(\arccos(x)))\right) \\ &= e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas terbukti bahwa

$$exp\left(\xi e^{i\psi}\right) = e^{\xi x}\left(\cos(\xi\sqrt{1-x^2}) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right) \qquad \blacksquare$$

Menurut Lemma 3.1.4 dapat ditunjukkan penurunan fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev $T_n(x)$ yang dinyatakan di dalam Teorema 3.1.5.

Teorema 3.1.5 (Cesarano, 2010)

Suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga untuk $|\xi| < 1$, fungsi pembangkit eksponensial polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dapat *diturunkan menjadi sebagai berikut*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}T_n(x) &= exp(\xi e^{i\arccos(x)})\\ &= e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)+i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right)\\ &\qquad -1\leq x\leq 1 \end{aligned}\tag{3.5}$$

Bukti:

Berdasarkan definisi $T_n(x)$ pada persamaan (2.21), fungsi pembangkit eksponensial $T_n(x)$ dapat diturunkan menjadi

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}T_n(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\xi e^{i\arccos(x)}\right)^n\\ &= 1+\xi e^{i\arccos(x)}+\frac{1}{2!}\left(\xi e^{i\arccos(x)}\right)^2+\cdots\end{aligned}$$

Misal $\xi e^{i\arccos(x)} = y$, maka persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}1+\xi e^{i\arccos(x)}+\frac{1}{2!}\left(\xi e^{i\arccos(x)}\right)^2+\cdots &= 1+y+\frac{1}{2!}y^2+\cdots\\ &= e^0+e^0y+\frac{e^0}{2!}y^2+\cdots\end{aligned}$$

Karena bagian kanan dari deret di atas merupakan ekspansi fungsi e^y dalam deret Maclaurin, maka diperoleh

$$1+\xi e^{i\arccos(x)}+\frac{1}{2!}\left(\xi e^{i\arccos(x)}\right)^2+\cdots = exp\left(\xi e^{i\arccos(x)}\right)$$

Berdasarkan 3 deret di atas dan Lemma 3.1.4, dapat disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}T_n(x) &= exp\left(\xi e^{i\,\arccos{(x)}}\right)\\ &= e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)+i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right)\end{aligned}$$

Dengan demikian terbukti bahwa

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}T_n(x) &= exp(\xi e^{i\,\arccos{(x)}})\\ &= e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)+i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right) \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Berdasarkan Lemma 3.1.5 dan Teorema 3.1.6 akan dibuktikan penurunan fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev $T_n(x)$. Teorema 3.1.6 merupakan akibat dari Teorema 3.1.5.

Teorema 3.1.6 (Cesarano, 2010)
Suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga untuk $|\xi| < 1$, fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}T_n(x) = e^{\xi x}\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) \tag{3.6}$$

Bukti:
Berdasarkan Teorema 3.1.5 diperoleh penurunan fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev $T_n(x)$,

yaitu

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} T_n(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} Re\left(T_n(x)\right) \\
&= Re\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} T_n(x)\right) \\
&= Re\left(e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right)\right) \\
&= e^{\xi x}\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa fungsi pembangkit eksponen polinomial Chebyshev $T_n(x)$ yaitu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} T_n(x) = e^{\xi x}\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) \qquad \blacksquare$$

Fungsi pebangkit sangat berguna dalam simulasi, pemodelan statistik, pengujian perangkat lunak, dan berbagai aplikasi lainnya di mana diperlukan dalam bilangan acak dengan sifat tertentu.

Fungsi pembangkit polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dapat digunakan dalam berbagai aplikasi, terutama dalam analisis numerik simulasi. Selain bidang analisis, fungsi pembangkit polinomial Chebyshev juga digunakan dalam bidang statistik.

3.2 Hubungan Polinomial Biasa dengan Polinomial Chebyshev Jenis Pertama

Polinomial biasa adalah polinomial yang terdiri dari suku-suku dengan pangkat-pangkat tertentu yang terdiri dari variabel tunggal, misalnya x, umumnya polinomial biasa memiliki bentuk

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Polinomial di atas ternyata dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari polinomial Chebyshev jenis pertama.

Aturan untuk menentukan polinomial biasa berdasarkan Definisi 2.4.1 dapat diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned}
T_0 = 1 &\Longleftrightarrow 1 = T_0 \\
T_1 = x &\Longleftrightarrow x = T_1 \\
T_2 = 2x^2 - 1 &\Longleftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}(1 + T_2) = \frac{1}{2}(T_0 + T_2) \\
T_3 = 4x^3 - 3x &\Longleftrightarrow x^3 = \frac{1}{4}(T_3 + 3x) = \frac{1}{4}(3T_1 + T_3) \\
T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1 &\Longleftrightarrow x^4 = \frac{1}{8}(3T_0 + 4T_2 + T_4)
\end{aligned}$$

dan seterusnya.
Dengan mengganti polinomial $1, x, x^2, x^3, \cdots$ dapat menuliskan polinomial biasa sebagai kombinasi linier dari polinomial Chebyshev jenis pertama. Hubungan itu berupa
Misalnya polinomial $P(x) = 3x^2 + 2x - 1$ memiliki nilai $a_0 = -1$; $a_1 = 2$; $a_2 = 3$, sehingga

$$P(x) = \left(-1 + \frac{3}{2}\right) T_0 + 2T_1 + \frac{3}{2} T_2.$$

Pada umumnya diberikan solusi secara eksplisit hubungan antara polinomial biasa dan polinomial Chebyshev jenis pertama dalam teorema berikut

Tabel 3.1. Kombinasi Linier Polinomial Chebyshev

$P(x)$	Kombinasi Linier $T_n(x)$
a_0	a_0T_0
$a_0 + a_1x$	$a_0T_0 + a_1T_1$
$a_0 + a_1x + a_2x^2$	$\left(a_0 + \frac{a_2}{2}\right) T_0 + a_1T_1 + \left(\frac{a_2}{2}\right) T_2$
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$	$\left(a_0 + \frac{a_2}{2}\right) T_0 + \left(a_1 + \frac{3a_3}{4}\right) T_1$ $+ \left(\frac{a_2}{2}\right) T_2 + \left(\frac{a_3}{4}\right) T_3$
$a_0 + a_1x + a_2x^2$ $+a_3x^3 + a_4x^4$	$\left(a_0 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{8}\right) T_0 + \left(a_1 + \frac{3a_3}{4}\right) T_1$ $\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_4}{2}\right) T_2 + \left(\frac{a_3}{8}\right) T_3 + \left(\frac{a_4}{8}\right) T_4$

Teorema 3.2.1 (Maulidi dkk., 2021)
Polinomial $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ *dengan* $a_n \neq 0$ *dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari polinomial Chebyshev jenis pertama*

$$P_n(x) = b_0T_0 + b_1T_1 + b_2T_2 + b_3 + T_3 + \cdots + b_nT_n \tag{3.7}$$

Bukti:
Teorema ini dapat dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.
untuk $n = 0$ dikatakan benar $P(x) = a_0 = a_0T_0$

a) Dimisalkan $n = k$ adalah benar, sehingga

$$\begin{aligned} P_k(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_kx^k \\ &= b_0T_0 + b_1T_1 + b_2T_2 + b_3T_3 + \cdots + b_kT_k \end{aligned}$$

b) Untuk $n = k + 1$
Akan dibuktikan untuk $n = k+1$ adalah benar, misalkan $n = k+1$,

maka

$$P_{k+1}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{k+1}x^{k+1}$$

karena T_{k+1} adalah polinomial dengan derajat $k+1$, dipunyai

$$a_{k+1}x^{k+1} = a'_{k+1}T_{k+1} + q_k(x)$$

dengan $q_k(x)$ adalah polinomial berderajat k.
Selanjutnya diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} P_{k+1}(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a'_{k+1}T_{k+1} + q_k(x) \\ &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_kx^k + a'_{k+1}T_{k+1} \end{aligned}$$

maka dimiliki

$$P_{k+1}(x) = b_0T_0 + b_1T_1 + b_2T_2 + b_3T_3 + \cdots + b_kT_k + a'_{k+1}T_{k+1}$$

juga terbukti benar untuk $n = k+1$ adalah benar.

Karena dari syarat a) dan b) benar sehingga terbukti bahwa polinomial $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ dengan $a_n \neq 0$ dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari polinomial Chebyshev jenis pertama $P_n(x) = b_0T_0 + b_1T_1 + b_2T_2 + b_3 + T_3 + \cdots + b_nT_n$ ■

Terdapat hubungan matematis antara polinomial biasa dengan polinomial Chebyshev jenis pertama yaitu setiap polinomial biasa dengan derajat n dapat diekspresikan sebagai kombinasi linier dari polinomial Chebyshev jenis pertama dengan derajat yang sama. Hubungan ini dikenal sebagai ekspansi Chebyshev atau transformasi Chebyshev. Pernyataan tersebut juga didukung dengan pembuktian meggunakan induksi matematika pada

Teorema 3.2.1.

Dalam konteks ini, polinomial Chebyshev jenis pertama berfungsi sebagai basis orthogonal yang berguna dalam representasi polinomial lainnya yang dapat berguna dalam berbagai aplikasi seperti aproksimasi fungsi, pengolahan sinyal, dan analisis numerik.

BAB 4

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari penelitian yang dilakukan, dapat ditarik kesimpulan bahwa:

1. Terdapat dua macam fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis pertama, yaitu fungsi pembangkit biasa dan fungsi pembangkit eksponensial. Fungsi pembangkit biasa polinomial Chebyshev jenis pertama yaitu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n T_n(x) = \frac{1-\xi x}{1-2\xi x+\xi^2},$$

   sedangkan bentuk fungsi pembangkit ekponensial polinomial Chebyshev jenis pertama yaitu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} T_n(x) = e^{\xi x} \cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right).$$

2. Polinomial biasa merupakan kombinasi linier dari polinomial Chebyshev jenis pertama, di mana dibuktikan dengan cara teorema pembuktian induksi matematika $(n \neq 0)$.

4.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian hanya membahas pembuktian dengan teorema yang ada, semoga dapat menjadi jembatan dan rujukan untuk membahas atau mengembangkan materi matematika analisis khususnya polinomial Chebyshev, beberapa saran dari peneliti yaitu:

1. Sekiranya peneliti selanjutnya dapat meneliti fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis selanjutnya yaitu jenis kedua $U_n(x)$ atau seterusnya.

2. Polinomial Chebyshev jenis pertama memiliki karakteristik seperti orthogonalitasnya, bentuk rekursifnya, atau lainnya yang dapat menjadi topik untuk penelitian selanjutnya.

3. Penelitian selanjutnya hendaknya dapat membahas lebih mendetail hubungan polinomial biasa dengan polinomial Chebyshev jenis pertama.

DAFTAR PUSTAKA

Abramowitz, Milton., Stegun, Irene. 1964. *Handbook of Mathematical Functions*. United States: Courier Corporation.

Askey, Richard. 1975. *Orthogonal Polynomials and Specials Functions*. United States: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Ayres, Frank., dan Mendelson, Elliot. 2006. *Kalkulus Fourth Edition (Terjemahan Bahasa Indonesia)*. Penerbit Erlangga.

Bartle, R. G., dan Sherbert, D. R. 2010. *Introduction to Real Analysis Fourth Edition*. University of Illinois, Urbana-Champaign.

Borwein, Peter., Erdelyi, Tamas. 1995. *Polynomials and Polynomial Inequalities*. New York, Springer-Verlag New York, Inc.

Chandra, T. 2001. *A First Course in Probability*. New Delhi: Narosa Publishing House.

Chattamvelli, Rajan., Shanmugam, R. 2019. *Generating Functions in Engineering and the Applied Sciences*. Switzerland: Springer Nature Switzerland AG.

Cesarano, Clemente. 2010. *Identities and Generating Functions on Chebyshev Polynomials*. Georgian Mathematical Journal, 19(3): 427-440.

Dattoli, G., Cesarano, Clemente., dan Saccheti, D. 2001. *A Note on Chebyshev Polinomials*. Ann. University Ferrara, 7(47): 107-115.

Dunkl, Charles F., dan Xu, Yuan. 2014. *Orthogonal Polynomials of Several Variables*. United Kingdom: CPI Group Ltd.

Gupta, Santosh. 1995. *Numerical Methods for Engineers*. New Delhi: New Age International (P) Ltd., Publishers.

Heaton, Luke. 2017. *A Brief History History of Mathematical Thought*. New York: Oxford University Press.

Hernadi, Julan. 2015. *Analisis Real Elementer*. Yogjakarta: Penerbit Erlangga.

Ismail, Mourad. 2005. *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*. Cambridge, Cambridge University Press.

Li, Chung C. 2007. *Problem and Discrite Mathematic*. New York: Syracuse University.

Mahmudi, Kamal. 2008. *Penjabaran Rumus de Moivre Menggunakan Koefisien Binomial*. Bandung: Jurusan Teknik Informatika STEI ITB.

Mason, J C., dan Handscomb, D C. 2003. *Chebyshev Polynomials*. London: CRC Press LLC.

Maulidi, Ikhsan., Wibowo, Bonno A., Apriliani, Vina., dan Umam, Rofiqul. 2021. *The Characteristics of the First Kind of Chebyshev Polynimials and its Relationship to the Ordinary Polynomials*. Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika, 5(2): 323-331.

Nastiti, Siti A. 2012. *Fungsi Pembangkit dari Polinomial Chebyshev Berdasarkan Ekspansi Binomial* $(1-te^{i\theta})^{-\mu}$. Depok: Fakultas

Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Nevai, Paul. 1990. *Orthogonal Polynomials: Theory and Practice*. Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

Purcell, E. J., Varberg, D., dan Rigdon, S. E., 2004. *Kalkulus Edisi Kedelapan*. Jakarta: Erlangga.

Rainville, Earl D. 1960. *Special Functions*. Canada: Brett-Macmillan Ltd.

Reid, Constance. 2007. *From Zero to Infinity: What Makes Numbers Interesting*. United States: Taylor & Francis Group, LLC.

Schneider, Cynthia. 2011. *De Moivre's Theorem*. Portland State University: Departement of Mathematics and Statistics.

Spiegel, Murray. R. 1968. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*. McGraw-Hill Companies.

Szego, Gabor. 1939. *Orthogonal Polynomials*. Rodhe Island: American Mathematical Society Providence.

Widagdo, Driyanto. 2005. *Deret Pangkat Kompleks*. Yogjakarta: Universitas Sanata Dharma.

Wilf, Herbert S. 1990. *Generating Functionology*. Pennsylvania: Academic Press, Inc.

Wilfred, Kaplan. 1952. *Advance Calculus*. Addison Wesley Company, Inc.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

1. Identitas Diri

1. Nama Lengkap	:	Putri Anjani Rustam
2. Tempat & Tgl. Lahir	:	Batang, 17 September 2001
3. Alamat Rumah	:	Madugowongjati RT 09/RW 1 Kec. Gringsing Kab. Batang
4. HP	:	085748946387
5. E-mail	:	rst.anjaniputri@gmail.com

2. Riwayat Pendidikan

1. MIS Madugowongjati
2. MTs NU 01 Banyuputih
3. SMA N 1 Subah
4. UIN Walisongo Semarang

Semarang, 19 Juni 2023

Putri Anjani Rustam
NIM: 1908046048