

**KONTROL OPTIMAL MODEL PENYEBARAN COVID-19
SHIQ DENGAN PEMBERIAN VAKSINASI DAN SUPLEMEN**

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat
Guna Memperoleh Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika



Diajukan oleh:

NUR INDAH RAHAYU

NIM : 1908046024

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO**

SEMARANG

2023

**KONTROL OPTIMAL MODEL PENYEBARAN COVID-19
SHIQ DENGAN PEMBERIAN VAKSINASI DAN SUPLEMEN**

SKRIPSI

Diajukan oleh:

NUR INDAH RAHAYU

NIM : 1908046024

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG**

2023

i

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Nur Indah Rahayu

NIM : 1908046024

Jurusan : Matematika

Menyatakan bahwa skripsi yang berjudul

**“KONTROL OPTIMAL MODEL PENYEBARAN COVID-19
SHIQ DENGAN PEMBERIAN VAKSINASI DAN SUPLEMEN”**

Secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 5 Juni 2023

Pembuat Pernyataan,



Nur Indah Rahayu

NIM. 1908046024



**KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jalan Prof. Dr. H. Hamka Kampus II Ngaliyan Semarang 50185
Telepon (024) 76433366, Website: fst.walisongo.ac.id

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini:

Judul : Kontrol Optimal Model Penyebaran Covid-19 SHIQ
dengan Pemberian Vaksinasi dan Suplemen

Penulis : Nur Indah Rahayu

NIM : 1908046024

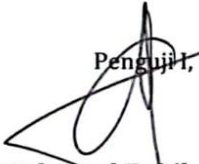
Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.


Semarang, 22 Juni 2023

DEWAN PENGUJI


Penguji I,

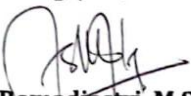

Mohamad Tajrikan, M.Si
NIP :198904172019031010
Penguji III,


Seftina Diyah Miasary, M.Sc
NIP :198709212019032010
Pembimbing I,


Yolanda Norasia, M.Si
NIP :199409232019032011

Penguji II,


Yolanda Norasia, M.Si
NIP :199409232019032011
Penguji IV,


Yulia Romadastri, M.Sc
NIP :198107152005012008
Pembimbing II,


Zulaikha, M.Si
NIP :199204092019032027

NOTA DINAS

Semarang, 5 Juni 2023

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo
di Semarang

Assalamualaikum wr. wb.

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan

Judul : **KONTROL OPTIMAL MODEL
PENYEBARAN Covid-19 SHIQ DENGAN
PEMBERIAN VAKSINASI DAN SUPLEMEN**

Nama : Nur Indah Rahayu

NIM : 1908046024

Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqosyah.

Wassalamualaikum wr. Wb

Pembimbing I,



Yolanda Norasia, M.Si

NIP. 199409232019032011

NOTA DINAS

Semarang, 15 Juni 2023

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo
di Semarang

Assalamu'alaikum. wr. wb.

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : **KONTROL OPTIMAL
PENYEBARAN COVID-19 SHIQ
DENGAN PEMBERIAN VAKSINASI
DAN SUPLEMEN**

Nama : Nur Indah Rahayu
NIM : 1908046024
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diujikan dalam Sidang Munaqosyah.

Wassalamu'alaikum. wr. wb.

Pembimbing II,



Zulaikha, M.Si.

NIP : 199204092019032027

ABSTRAK

Pada Skripsi ini dibahas mengenai kontrol optimal pada model penyebaran virus Covid-19 SHIQ (*Susceptible, Healthy, Infected, Quarantine*) dengan vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh. Pada model SHIQ ini terdapat dua kontrol yang digunakan yaitu kontrol vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh pada subpopulasi *Susceptible*. Tujuan kontrol optimal pada model penyebaran virus Covid-19 SHIQ ini adalah untuk meminimumkan jumlah subpopulasi *Susceptible*, terinfeksi, dan yang di karantina, serta memaksimumkan subpopulasi sehat. Kontrol optimal diperoleh dengan menggunakan prinsip minimum pentryagin, kemudian akan diselesaikan secara numerik menggunakan metode *sweep* maju mundur. Simulasi numerik menunjukkan bahwa pemberian kontrol vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh efektif untuk meminimumkan jumlah subpopulasi *Susceptible*, terinfeksi, dan yang di karantina, serta memaksimumkan subpopulasi sehat.

Kata Kunci: Kontrol Optimal, model penyebaran Covid-19, prinsip minimum pentryagin, metode *sweep* maju mundur.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil'alamin, puji syukur kehadiran Allah SWT atas limpahan rahmat, hidayah, dan inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul “Kontrol Optimal Model Penyebaran Covid-19 SHIQ dengan Pemberian Vaksinasi dan Suplemen”. Sholawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Skripsi ini disusun guna memenuhi dan melengkapi persyaratan dalam memperoleh gelar Sarjana Pendidikan (S-1) Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang Jurusan Matematika. Penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari hambatan dan kesulitan, berkat bimbingan, saran, dan bantuan dari berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung, sehingga dapat terselesaikan dengan baik. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada yang terhormat:

1. Dr. H. Ismail, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.
2. Hj. Emy Siswanah, M.Sc., selaku Ketua Jurusan Matematika Walisongo Semarang yang telah memberikan motivasi selama penulisan skripsi.
3. Yolanda Norasia M.Si., sebagai Dosen Pembimbing I, dan Zulaikha M.Si., sebagai Dosen Pembimbing II yang telah

meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran untuk memberikan bimbingan, arahan, serta motivasi selama penelitian dan penulisan skripsi.

4. Seftina Dyah Miasary, M.Sc., selaku Dosen Wali yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan motivasi kepada penulis selama belajar di UIN Walisongo.
5. Segenap dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang yang telah membekali ilmu pengetahuan kepada penulis selama belajar di UIN Walisongo hingga akhir penulisan skripsi. Semoga ilmu yang telah diajarkan berkah dan manfaat dunia akhirat.
6. Segenap Staf Tata Usaha UIN Walisongo Semarang yang telah membantu penulis selama perkuliahan dan penulisan skripsi.
7. Pengasuh PPPTQ Al-Hikmah, Al-mukarrom Romo KH. Ahmad Amnan Muqoddam dan Ibu Nyai Hj. Rofiqotul Makiyyah AH. yang telah memberikan do'a, bimbingan, dan motivasi penulis.
8. Orang tua teristimewa, Bapak Bukhori dan Ibu Wakini, yang telah memberikan do'a, semangat, kasih sayang, pengorbanan, dan ketulusannya dalam merawat,

membesarkan, serta memberikan yang terbaik.

9. Teman-temanku Matematika angkatan 2019 terkhusus MM-A, PPPTQ AL-Hikmah khususnya kamar As-Syarifah tercinta, dan Tim KKN Mandiri Inisiatif Terprogram (MIT) ke-15 posko 19.
10. Temanku tercinta Wahyu Nur Aeni, Febriyana Soviyanti, Fauziah Rohmi, Asiyatun, Avia, Fitria, Nala, Mila Hesti, Fatimah, Luluk, Tia, Pipit, dan Ma'adzah yang selalu memberikan semangat, mendoakan hal-hal baik, dan selalu menemani saat mengerjakan skripsi.
11. Segenap pihak yang telah membantu dan memberikan semangat tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis tidak dapat memberikan balasan selain ucapan terimakasih dan do'a semoga Allah membalas amal kebaikan yang telah diberikan dengan sebaik-baik balasan. Semoga karya ini dapat bermanfaat bagi semua pihak. Amin.

Semarang, 5 Juni 2023
Penulis,

Nur Indah Rahayu
NIM. 1908046024

DAFTAR ISI

SKRIPSI	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iii
NOTA DINAS	iv
NOTA DINAS	v
ABSTRAK.....	vi
KATA PENGANTAR.....	vii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR.....	xii
DAFTAR TABEL.....	xiv
DAFTAR SIMBOL.....	xv
DAFTAR LAMPIRAN.....	xvi
BAB I.....	1
PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang Masalah.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	6
1.3 Tujuan Penelitian.....	7
1.4 Manfaat Penelitian.....	7
1.5 Batasan Masalah.....	8
BAB II.....	9
LANDASAN TEORI.....	9
2.1. Persamaan Diferensial.....	9
2.2. Model Penyebaran Penyakit.....	11
2.2.1 Model SI (<i>Susceptible-Infectious</i>).....	13
2.2.2 Model SIR (<i>Susceptible-Infectious-Recovered</i>).....	14
2.2.3 Model SEIR (<i>Susceptible-Exposed-Infected-Recovered</i>).....	18
2.2.4 Model SHIQ (<i>Susceptible-Healthy-Infected-Quarantine</i>).....	20
2.3. <i>Coronavirus Disease-19</i> (Covid-19).....	28
2.4. Vaksin dan Suplemen Daya Tahan Tubuh.....	30
2.5. Sistem Kontrol Optimal.....	35
2.5.1. Syarat Perlu Kontrol Optimal.....	36

2.6. Penyelesaian Kontrol Optimal dengan Metode <i>Sweep</i> Maju-Mundur	38
2.7. Kajian Penelitian Terdahulu	42
BAB III	45
METODE PENELITIAN	45
3.1. Studi Literatur	46
3.2. Konstruksi Model	46
3.3. Analisis Kontrol Optimal	46
3.4. Penyelesaian Numerik dengan Metode <i>Sweep</i> Maju Mundur	47
3.5. Hasil dan Pembahasan	47
BAB IV	48
HASIL DAN PEMBAHASAN	48
4.1 Formulasi Model Kontrol Optimal Penyebaran Covid- 19	48
4.2 Analisis Kontrol Optimal	55
4.2.1 Kondisi Stasioner	57
4.2.2 Persamaan <i>State</i>	58
4.2.3 Persamaan <i>Costate</i>	59
4.3 Simulasi Numerik	62
B. Simulasi II	75
BAB V	88
KESIMPULAN DAN SARAN	88
DAFTAR PUSTAKA	90
LAMPIRAN	92
RIWAYAT HIDUP	107

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
Gambar 2. 1	Diagram Kompartemen Model SIR	16
Gambar 2. 2	Diagram Kompartemen Model SIRS	18
Gambar 2. 3	Diagram Kompartemen SEIR	20
Gambar 2. 4	Diagram Kompartemen Model SHIQ Sebelum dikontrol	24
Gambar 2. 5	Metode <i>Sweep</i> Maju Mundur	43
Gambar 3. 1	Peta Konsep Metode Penelitian	46
Gambar 4.1	Kontrol Optimal Covid-19	49
Gambar 4. 2	Diagram Kompartemen Model SHIQ Setelah dikontrol	51
Gambar 4.3	Simulasi Subpopulasi Susceptible Tanpa dan dengan Penambahan Kontrol u_1 dan u_2	68
Gambar 4.4	Simulasi Subpopulasi sehat (Healthy) Tanpa dan dengan Penambahan Kontrol u_1 dan u_2	69
Gambar 4.5	Simulasi Subpopulasi Terinfeksi (Infected) Tanpa dan dengan Penambahan Kontrol u_1 dan u_2	71
Gambar 4.6	Simulasi subpopulasi yang di karantina (<i>Quarantine</i>) tanpa dan dengan penambahan kontrol u_1 dan u_2	72
Gambar 4.7	Kontrol u_1^* dan u_2^* pada Simulasi Numerik Model Penyebaran Virus Covid-19	74
Gambar 4.8	Fungsi Tujuan (J) Penyebaran Virus Covid-19 dengan Penambahan Kontrol u_1 dan u_2	76

Gambar 4.9	Simulasi Subpopulasi <i>Susceptible</i> Tanpa dan dengan Penambahan Kontrol u_1 dan u_2	77
Gambar 4.10	Simulasi Subpopulasi Sehat (<i>Healthy</i>) Tanpa dan dengan Penambahan Kontrol u_1 dan u_2	79
Gambar 4.11	Simulasi Subpopulasi Terinfeksi (<i>Infected</i>) Tanpa dan dengan Penambahan Kontrol u_1 dan u_2	81
Gambar 4.12	Simulasi Subpopulasi yang di karantina (<i>Quarantine</i>) tanpa dan dengan Penambahan Kontrol u_1 dan u_2	83
Gambar 4.13	Simulasi Numerik dari Model Penyebaran Virus Covid-19 dengan Adanya Kontrol u_1^* dan u_2^*	85
Gambar 4.14	Fungsi tujuan (J) Penyebaran Virus Covid-19 dengan Penambahan Kontrol u_1 dan u_2	87

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul	Halaman
Tabel 2. 1	Definisi Variabel Model	22
Tabel 2. 2	Definisi Parameter Model	23
Tabel 2.3	Kajian Penelitian Terdahulu	44
Tabel 4. 1	Definisi Variabel Model	52
Tabel 4. 2	Definisi Parameter Model	52
Tabel 4.3	Nilai Awal yang digunakan dalam Simulasi Numerik	66
Tabel 4.4	Parameter yang akan digunakan	66

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Judul
ψ	Tingkat subpopulasi yang <i>Susceptible</i>
α	Tingkat subpopulasi yang sehat
d	Tingkat kematian alami
β	Laju perubahan subpopulasi yang sehat kemudian terinfeksi
γ	Tingkat penularan penyakit dari S ke I
μ	Angka kematian alami pada subpopulasi yang sudah terinfeksi
θ	Tingkat kesembuhan subpopulasi yang terinfeksi di kelas karantina
η	Laju perpindahan subpopulasi yang dicurigai terinfeksi untuk di karantina
t	Waktu perpindahan
δ	Laju perubahan dimana subpopulasi yang di karantina terkonfirmasi terinfeksi
t_0	Waktu awal
T	Waktu akhir

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Judul	Halaman
Lampiran 1	Program MATLAB2013a model penyebaran penyakit Covid-19 dengan tanpa kontrol	93
Lampiran 2	Program MATLAB2013a model penyebaran penyakit Covid-19 dengan kontrol	97
Lampiran 3	Riwayat Hidup	108

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Covid-19 (*Coronavirus disease-19*) merupakan penyakit pernapasan akut parah yang terjadi karena adanya *Severe Acute Respiratory Syndrome-Coronavirus-2* (SARS-Cov-2). Virus Covid-19 ini dapat tertular melalui pasien yang terinfeksi SARS-Cov-2 dengan gejala ringan, sedang, dan berat seperti kehilangan pada indra penciuman atau perasa, batuk kering, sesak pada napas, kelelahan, demam, mual, diare, pneumonia, dan gejala pernapasan. Adapun akibat dari terdampaknya penyakit Covid-19 yaitu penyakit medis kronis, disfungsi organ, dan bisa juga mengakibatkan kematian. Dari informasi yang telah beredar, pasien Covid-19 banyak diderita oleh usia lanjut dan subpopulasi yang memiliki imun rendah (Wintachai, 2020).

Pandemi Covid-19 adalah salah satu wabah yang pertama kali ditemukan di Wuhan, Provinsi Hubei, China pada 30 Desember 2019 (CDC, 2020). Di Indonesia sendiri, penyebaran Covid-19 ditemukan pada 2 maret 2020. Berdasarkan adanya informasi yang telah dipublikasikan oleh *World Health Organization* (WHO), Covid-19 diketahui muncul pada bulan Desember. Pada tahun 2019 sampai tanggal 3 Juni 2021 total jumlah akumulasi kasus Covid-19 di

Indonesia mencapai 1,8 juta kasus yang terkonfirmasi (CDC, 2020). Angka akumulasi kasus Covid-19 yang akan selalu bertambah, kewaspadaan masyarakat harus ditingkatkan agar dapat berperan aktif dalam mengurangi laju penyebaran penyakit Covid-19. Tetapi, pada Al-Qur'an surah Al-Anbiya' ayat 83 yang menerangkan bahwasannya Allah SWT tidak pernah membebani seseorang kecuali dengan kesanggupannya atas penyakit yang diterimanya.

وَأَيُّوبَ إِذْ نَادَىٰ رَبَّهُ أَنِّي مَسَّنِيَ الضُّرُّ وَأَنْتَ أَرْحَمُ الرَّاحِمِينَ

Artinya:

“dan (ingatlah kisah) Ayub, ketika ia menyeru Tuhannya: "(Ya Tuhanku), sesungguhnya aku telah ditimpa penyakit dan engkau adalah Tuhan Yang Maha Penyayang di antara semua penyayang” (Q.S. Al-Anbiya':83).

Ayat ini menggambarkan bahwasanya subpopulasi yang ditimpa penyakit itu bukanlah suatu siksaan atau cobaan yang diberikan oleh Allah SWT, tetapi justru penyakit tersebut adalah bukti dari sifat Allah SWT yaitu Yang Maha Penyayang.

Banyak ilmuwan yang telah melakukan penelitian dan pengujian untuk mendapatkan obat dan vaksin. Pada November 2020, para peneliti telah mendapatkan vaksin yang diyakini efektif untuk melawan Covid-19 (Gustavo, 2021). Vaksin disini bukanlah obat. Namun, vaksin hanya dapat

membantu membangun kekebalan spesifik untuk menghindari infeksi dan penyakit yang berpotensi serius yang disebabkan oleh Covid-19. Pada 6 Desember 2020, vaksin siap edar tiba di Indonesia dan menerima hingga 1,2 juta vaksin dosis merk Sinovac. Pada Januari 2021, Presiden Joko Widodo mendapatkan vaksin pertama yang kemudian diedarkan untuk seluruh rakyat Indonesia. Meskipun vaksin sudah beredar, Covid-19 belum hilang hingga saat ini, dan hampir setiap belahan dunia masih berjuang melawan Covid-19 (Wintachai, 2020).

Vaksinasi adalah salah satu cara yang paling efisien untuk mengurangi penyebaran penyakit yang menular (Gustavo, 2021). Individu yang sudah dicurigai terinfeksi dapat mengonsumsi suplemen yang dipercaya dapat memperkuat dan menjaga daya tahan tubuh. Pada pasien Covid-19, kandungan vitamin dan mineral dalam suplemen masih menjadi pencegahan utama. Salah satunya adalah pemberian Vitamin C, D, E, *sodium selenite*, dan *zinc picolinate* (Anggar, 2021).

Kontrol optimal merupakan salah satu ilmu yang bergerak dalam bidang teknik dan matematika. Pada umumnya, kontrol optimal adalah optimasi yang bekerja dalam sebuah proses sehingga mendapatkan suatu hasil yang paling terbaik (Saraswati et al., 2017). Analisis kontrol

optimal penyebaran penyakit sudah banyak diteliti oleh peneliti terdahulu. Pada Desember 2020 terdapat penelitian analisis kontrol optimal model matematika SURS (*Susceptible, Education, Recovered, Susceptible*) oleh Resmawan, Eka , Nurwan, N. Achmad di jurnalnya yang berjudul “ Analisis Kontrol Optimal Pada Model Matematika Penyebaran Pengguna Narkoba dengan Faktor Edukasi”. Adapun jurnal yang berjudul “ *Optimal Control of HIV-1 Spread in Combination with nutritional status and ARV-Treatment*” oleh Yolanda Norasia, dkk. yang memaparkan tentang analisis kontrol optimal penyakit HIV-1 dengan model SIPA (*Susceptible, Infection, Pre-AIDS, AIDS*) yang dimana dengan strategi kontrol penyebaran penyakit menggunakan pengobatan ARV (*Antiretrovirals*) dan perbaikan gizi. Pada Juli 2017, jurnal yang berjudul “Kontrol Optimal pada Model Epidemologi SEIQR dengan Tingkat Kejadian Standar” oleh Zulaikha, dkk juga membahas mengenai kontrol optimal pada penyebaran virus penyakit HFMD (*Hand, Foot, and Mouth Disease*) yang tertuju pada anak-anak menggunakan model matematika SEIQR.

Kontrol optimal juga digunakan saat terjadi penyebaran penyakit Covid-19. Pada jurnal yang dipaparkan oleh L.P. Sinaga, H Nasution, dan D Kartika tentang penelitian kestabilan Covid-19 dengan menggunakan model SEIR

(Susceptible-Exposed-Infected-Recovered) yang berjudul "*Stability analysis of the Corona Virus (Covid-19) Dynamics SEIR Model in Indonesia*" pada oktober 2020 yang kemudian dilanjutkan oleh Nailan Ni'mah dan L.P. Sinaga pada tahun 2021 dengan penambahan strategi kontrol vaksinasi dan pengobatan yang berjudul "Analisis Sensitivitas dan Kontrol Optimal Model SEIR Penyebaran Covid-19 di Indonesia".

Beberapa penelitian selanjutnya yaitu penelitian model matematika SHIQ (*Susceptible-Healthy-Infectious-Quarantine*) pada jurnal yang berjudul "*Mathematical Analysis of Covid-19 Via New Mathematical Model*" oleh Abdullah dkk pada tahun 2020 yang menganalisis kestabilan Covid-19. Populasi pada SHIQ dapat dibagi menjadi 4 kelas yang berbeda, yaitu individu rentan (*Susceptible cases*), individu sehat kembali (*Healthy cases*), individu terinfeksi (*Infectious cases*), dan individu di karantina (*Quarantine cases*). Dalam penelitian tersebut hanya membahas sistem dinamik, belum ada kontrol optimal pada penelitian tersebut.

Adapun Jurnal yang meneliti tentang kontrol optimal vaksinasi pada Covid-19 dengan model matematika SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*) dalam jurnal yang berjudul "*Determination of an Optimal Control Strategy for Vaccine Administration in Covid-19 Pandemic Treatment*" oleh Gustavo Barbosa Libotte pada tahun 2020. Kemudian pada April

2021 ada juga penelitian yang membuktikan bahwa suplemen daya tahan tubuh dapat membantu pencegahan penyebaran penyakit Covid-19 oleh Ketut Tia Pran Anggar Yani dengan jurnal yang berjudul “Manfaat Suplemen dalam Meningkatkan Daya Tahan Tubuh Sebagai Upaya Pencegahan Covid-19”. Berdasarkan penelitian Gustavo (2020) dan Ketut Tian Pran Anggar Yani (2021). Sehingga pada skripsi ini dilakukan pengembangan model Abdullah dkk (2020) dengan menambahkan dua kontrol diantaranya yaitu vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh untuk subpopulasi yang *Susceptible* terhadap penyakit Covid-19 dengan judul skripsi “ **Kontrol Optimal Model Penyebaran Covid-19 SHIQ dengan Pemberian Vaksinasi dan Suplemen**”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pemaparan latar belakang masalah di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana model penyebaran Covid-19 SHIQ dengan dua strategi kontrol yaitu vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh?
2. Bagaimana analisis kontrol optimal model penyebaran Covid-19 SHIQ dengan diberi dua strategi kontrol yaitu vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik model penyebaran

Covid-19 SHIQ dengan diberi dua strategi kontrol yaitu vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh ?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dipaparkan di atas, maka akan diperoleh suatu tujuan penelitian ini yaitu:

1. Modifikasi model SHIQ pada penyebaran Covid-19 dengan dua strategi kontrol yaitu vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh.
2. Untuk mengetahui hasil penelitian dari model SHIQ pada penyebaran Covid-19 dengan dua strategi kontrol yaitu vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh.
3. Memperoleh simulasi numerik yang dihasilkan dari model SHIQ pada penyebaran Covid-19 dengan bantuan MATLAB R2013a.

1.4 Manfaat Penelitian

1. Memberikan inovasi yang baru
2. Analisis kontrol optimal dari model SHIQ dapat memberikan informasi atas hasil meminimumkan pada penyebaran Covid-19.
3. Simulasi numerik dari model SHIQ dapat mempresentasikan atas berkurangnya penyebaran Covid-19 ketika dilakukan sistem kontrol.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dari penelitian ini adalah:

1. Model yang digunakan pada penelitian ini adalah model SHIQ.
2. Penyakit yang akan diteliti adalah Covid-19 (*Coronavirus Disease-19*)
3. Penelitian ini dalam rangka meminimumkan atau mengurangi penyebaran penyakit Covid-19 akan diberikan sistem kontrol dengan cara yaitu vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan membahas mengenai definisi dan teori-teori yang dibutuhkan dalam pengembangan model matematika SHIQ penyakit Covid-19, diantaranya yaitu persamaan diferensial, penyebaran penyakit, Covid-19 (*Coronavirus Disease-19*), vaksinasi dan suplemen daya tahan tubuh, sistem kontrol optimal, penyelesaian kontrol optimal dengan metode *sweep* maju mundur, dan kajian penelitian terdahulu.

2.1. Persamaan Diferensial

Persamaan Diferensial (PD) merupakan persamaan yang memuat suatu fungsi yang tidak diketahui turunannya (*derivatif*). Persamaan diferensial jika dilihat dari jumlah variabelnya dapat dibedakan menjadi dua yaitu PDB (Persamaan Diferensial Biasa) dan PDP (Persamaan Diferensial Parsial). Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat turunan atau derivatif terdiri satu atau lebih variabel bebas dalam satu atau lebih variabel terikat. Sedangkan persamaan diferensial biasa hanya memuat satu variabel bebas (Kartono, 2012)

Berikut merupakan bentuk umum dari persamaan diferensial biasa orde satu:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (2.1)$$

Pada persamaan di atas memuat dua variabel yang dimana $f(t, y)$ mempresentasikan turunan dan setiap fungsi terdiferensial terhadap waktu (t) pada beberapa interval. Hal ini disebut solusi (Diprima dan Boyce, 2009). Berdasarkan kelinearannya persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial non-linear. Contoh dari persamaan diferensial linear adalah sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b \quad (2.2)$$

Dimana untuk variabel a dan b disini adalah koefisien yang konstan.

Persamaan diferensial non-linear merupakan persamaan diferensial yang bukan persamaan diferensial linear (Ross, 1984). Berikut bentuk umum dari persamaan persamaan diferensial non-linear:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dimana variabel x_1, x_2, \dots, x_n adalah variabel bebas sedangkan untuk variabel t adalah variabel terikat.

2.2. Model Penyebaran Penyakit

Model pada epidemi umumnya memiliki banyak persamaan matematika yang dapat digunakan, diantaranya yaitu SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*), SEIR (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered*), SEIRD (*Susceptible, Infected, Recovered, Death*), SEIQR (*Susceptible, Infected, Quarantine Recovered*), SEIHR (*Susceptible, Exposed, Infected, Hospitalized, Recovered*), SCIRA (*Susceptible, Carrier, Infected, Recovered, Asymptomatic*) (Xiang et al, 2021), SIPA (*Susceptible, Infection, Pre-AIDS, AIDS*) (Norasia, 2022), dan lain-lain. Penggunaan pada model-model tersebut bersifat fleksibel atau tergantung permasalahan dan tujuan penelitian menggunakan persamaan pemodelan yang di inginkan. Biasanya pemodelan juga bisa didapat dari perolehan data, model-model yang sudah pernah dipaparkan sebelumnya, selain itu dapat juga dimodifikasi atau dikombinasikan sesuai dengan kebutuhan dari peneliti sendiri. Dalam hal ini, berkontribusi untuk memperbaiki parameter yang kurang sesuai, belum terduganya parameter, atau kurang valid dan akuratnya hasil yang dikarenakan model yang sederhana (De-Camino-Beck, 2020).

Model matematika dapat diartikan sebagai suatu gambaran dari suatu masalah kehidupan sehari-hari yang diformulasikan secara sistematis. Pemodelan matematika

adalah suatu bidang ilmu yang mempresentasikan atau menggambarkan berbagai fenomena yang disimbolkan dalam pernyataan matematika. Contoh permasalahan yang dapat diterapkan dalam ilmu pemodelan matematika antara lain konduksi panas, model penyakit SIR model *prey-predator*, dan aliran fluida (Norasia, 2019). Dalam proses memodelkan matematika, langkah pertama yang harus dilakukan yaitu membentuk suatu permasalahan yang nyata ke dalam pengertian bahasa matematika. Pada langkah ini akan diidentifikasi variabel-variabel yang terdapat pada masalah dan pembentukan hubungan antar variabel-variabel tersebut. Variabel-variabel yang sudah terbentuk akan dijabarkan menjadi sebuah model matematika yang meliputi membuat asumsi-asumsi tentang model yang dipermasalahkan.

Asumsi dibuat melalui beberapa proses. Langkah yang pertama yaitu menggambarkan alur dari pemikiran, sehingga model yang akan dibuat harus dapat berjalan mengarah pada situasi fisik kompleks masalah yang akan diselesaikan. Langkah yang selanjutnya yaitu diformulasikannya sistem persamaan atau persamaan untuk menyatakan sebuah hubungan antar suatu variabel. Langkah ini merupakan salah satu langkah yang terpenting dan cukup sulit sehingga perlu diujikannya kembali asumsi-asumsi yang akan digunakan

agar dapat terselesaikan pembentukan formulasi persamaan dan realistik. Setelah formulasi persamaan terbentuk, langkah selanjutnya yaitu penyelesaian persamaan. Dalam proses penyelesaian persamaan ini perlu berhati-hati dalam proses memodelkan secara menyeluruh. Langkah yang terakhir yaitu interpretasi dari solusi yang menghubungkan formulasi matematika untuk kembali ke masalah yang solusinya nyata. Salah satu yang dapat dilakukan pada tahap ini salah satunya adalah dengan grafik untuk menggambarkan solusi numerik yang diperoleh (De-Camino-Beck, 2020). Untuk pemodelan kali ini merupakan model matematika mengenai penyebaran penyakit yakni sebagai berikut:

2.2.1 Model SI (*Susceptible-Infectious*)

Pada dinamika model rentan-terinfeksi yang terdiri dari populasi rentan (S) dan populasi infeksi (I) yang berbeda. Dimana populasi rentan (S) disini merupakan populasi individu yang belum melakukan vaksin, subpopulasi yang memiliki kekebalan tubuh rendah, dan bisa juga individu lansia (lanjut usia), sedangkan populasi infeksi (I) adalah populasi yang sudah terinfeksi suatu penyakit. Setelah terinfeksi, sesesubpopulasi menjadi anggota dari salah satu populasi terinfeksi yang memiliki bentuk klinis dengan infeksi yang berbeda. Selain itu, selama proses penyebaran penyakit, individu yang terinfeksi dalam suatu populasi dapat menular

ke populasi lain yang memiliki tingkat kematian lebih tinggi. Dari pernyataan di atas diperoleh sistem persamaan:

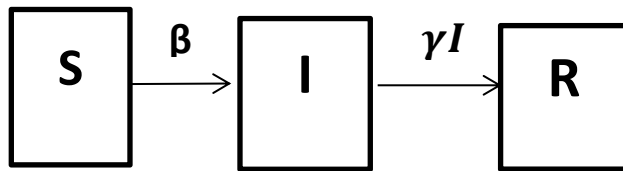
$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta S + \gamma I \\ \dot{I} = \beta S - \gamma I \end{cases} \quad (2.4)$$

Laju perubahan subpopulasi rentan (S) Dimana β disini merupakan parameter subpopulasi yang rentan (S) menjadi terinfeksi (I) akibat berinteraksi antara subpopulasi S dengan subpopulasi I sehingga subpopulasi S berkurang ($-\beta S$). Sedangkan γ dapat didefinisikan sebagai parameter subpopulasi yang sudah terinfeksi dapat rentan kembali yaitu subpopulasi I kembali ke subpopulasi S sehingga subpopulasi infeksi bertambah dari subpopulasi rentan (γI). Laju perubahan subpopulasi I diperoleh dari dimana β disini merupakan parameter subpopulasi yang rentan (S) menjadi terinfeksi (I) akibat berinteraksi antara subpopulasi S dengan subpopulasi I sehingga memiliki persamaan (βS), sedangkan γ dapat didefinisikan sebagai parameter subpopulasi yang sudah terinfeksi dapat rentan kembali yaitu subpopulasi I kembali ke subpopulasi S sehingga memiliki persamaan ($-\gamma I$).

2.2.2 Model SIR (*Susceptible-Infectious-Recovered*)

SIR merupakan salah satu model pada penyebaran penyakit yang dikenalkan oleh McKendrick dan Kermack pada tahun 1927. Model SIR dapat dipecah menjadi tiga kelas

subpopulasi, yaitu kelas *Susceptible* ($S(t)$), *Infected* ($I(t)$), dan *Recovered* ($R(t)$) berturut-turut menunjukkan banyaknya individu rentan, yang kemudian dapat terinfeksi, dan sembuh pada saat t (waktu yang kondisional). Berikut gambar diagram pemodelan SIR (McKendrick, 1927) :



Gambar 2. 1 Diagram Kompartemen Model SIR

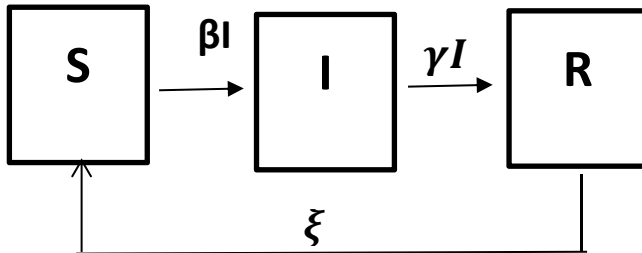
Pada model SIR tidak diasumsikan untuk adanya perpindahan yang sifatnya menetap (migrasi), tidak ada kelahiran atau kematian, dan merupakan penyakit yang tidak fatal. Individu dapat dikatakan sembuh jika individu tersebut mempunyai kekebalan tubuh terhadap suatu penyakit dan nantinya tidak mungkin kembali ke individu pada tahap kelas rentan. Selanjutnya akan diasumsikan untuk masa inkubasi yang terjadi begitu singkat, yang dapat diartikan pada saat individu tersebut terinfeksi oleh suatu penyakit yang pada akhirnya dapat menularkan penyakit tersebut secara sangat singkat. Hal ini berakibat pada individu yang belum lama atau baru terinfeksi penyakit dapat langsung menularkan penyakit pada individu tahap kelas rentan. Misalkan parameter-parameter positif β dan γ

berturut-turut merupakan laju dari penularan (*rate of transmission*) dan laju dari kesembuhan pada penyakit (*recovery rate*). Dari diagram kompartemen 2.1 dapat diperoleh sistem persamaan sebagai berikut:

$$\begin{cases} S = -\beta IS \\ I = \beta IS - \gamma I \\ R = -\gamma I \end{cases} \quad (2.5)$$

Menurut Hethcote (2002), dalam penyebaran penyakit menular, individu dibagi menjadi tiga populasi yaitu populasi individu dalam tahap rentan penyakit (*Susceptible*), populasi individu yang telah terkena infeksi penyakit dan juga dapat menularkan penyakitnya ke individu yang lain (*Infected*), dan populasi individu yang telah sembuh atau sudah bebas dari penyakit (*Recovered*). Model ini dikenal dengan model SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*). Penelitian lebih lanjut tentang model SIR dilakukan oleh Shulgin et al (2007) dengan menambahkan perlakuan vaksinasi pada model tersebut. Akan tetapi, model SIR kurang cocok untuk menyajikan penyebaran penyakit yang mempunyai masa inkubasi. Masa inkubasi adalah masa di saat individu menunjukkan gejala klinis, tetapi individu tersebut belum dapat menularkan penyakit ke individu lain. Dengan demikian, model SIR perlu dikembangkan, yaitu dengan penambahan kelompok *exposed* sebagai kelompok individu yang berada pada masa inkubasi.

Model sederhana SIR dapat dikembangkan lagi menjadi SIRS. Model ini didefinisikan oleh tahapan *Susceptible-Infection-Recover-Susceptible*. Berikut gambar diagram dari SIRS (Hethcote, 2002).



Gambar 2. 2 Diagram Kompartemen Model SIRS

Pada diagram kompartemen SIRS mempunyai laju pergerakan dimana dimulai dari S (*Susceptible*) menuju ke I (*Infectious*) lalu menuju R (*Recovered*) dan kembali ke subpopulasi S (*Susceptible*) lagi. Adanya hubungan antara subpopulasi S (*Susceptible*), I (*Infectious*) dan R (*Recovered*) mengakibatkan sistem persamaan sebagai berikut:

$$\begin{cases} S = -\beta IS + \xi SR \\ I = \beta IS - \gamma I \\ R = -\gamma I - \xi SR \end{cases} \quad (2.6)$$

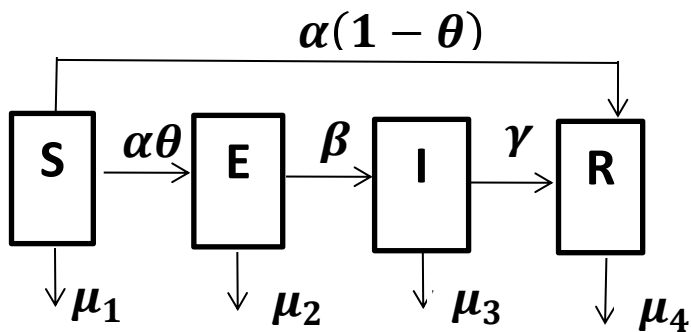
Dimana ξ disini merupakan variabel dari banyaknya subpopulasi yang sudah sembuh kembali lagi ke subpopulasi rentan, yang berarti individu yang sudah sembuh kembali lagi menjadi rentan.

2.2.3 Model SEIR (*Susceptible-Exposed-Infected-Recovered*)

Penularan penyakit dapat disebabkan oleh bakteri atau virus. Individu yang dirasa sehat tapi rentan (*Susceptible*) ketika terkena virus atau bakteri tersebut menunjukkan (*Exposed*) gejala-gejala penyakit seperti pusing, demam, dan batuk. Hal ini dapat dikatakan individu yang bersangkutan tersebut dalam masa inkubasi. Setelah melalui masa inkubasi, individu tersebut sudah dapat dipastikan terkena infeksi (*Infected*) dan penyakitnya dapat menular ke individu yang lain. Individu yang sudah terkena infeksi penyakit dapat sembuh (*Recovered*). Oleh karena itu, penyebaran penyakit menular dapat disajikan dengan model *SEIR* (*Susceptible-Exposed-Infected-Recovered*).

Pada model SEIR ini, banyaknya individu dalam kelompok *Susceptible*, *Exposed*, *Infected* dan *Recovered* pada waktu t secara berturut-turut dinyatakan dengan $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$, $R(t)$. Populasi N diasumsikan konstan, berarti $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N$. Dalam model SEIR terdapat kelahiran dan kematian. Disini laju kematian akan sama dengan laju kelahiran dikarenakan populasi konstan. Dalam setiap populasi terdapat individu yang meninggal dimisalkan dengan kelajuan sebesar μ . Sedangkan untuk kelahiran individu dapat dikategorikan ke dalam populasi *susceptible*.

Individu yang rentan *susceptible* dapat terkena infeksi setelah mengalami kontak secara langsung dengan individu yang sudah terinfeksi *infected* dimisalkan dengan kelajuan sebesar $\alpha\theta$. Namun, keterinfeksi individu tersebut tidak secara langsung. Biasanya individu tersebut terlebih dahulu menunjukkan gejala-gejala dan dalam masa inkubasi (*Exposed*) sebesar $\alpha(1 - \theta)$. Untuk parameter β ditunjukkan ketika populasi E (*Exposed*) berpindah ke populasi I (*Infected*), sedangkan untuk γ merupakan parameter laju perpindahan dari yang awalnya terinfeksi menjadi sembuh (*Recovered*). Berikut diagram model SEIR untuk situasi Covid-19 (L P Sinaga,2021):



Gambar 2. 3 Diagram Kompartemen SEIR

Model SEIR ini mempunyai empat model kompartemen yang terdiri dari $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$, dan $R(t)$ yaitu *Susceptible* merupakan individu rentan, *Exposed* yakni

individu yang terdeteksi rentan terinfeksi, *Infected* yakni individu yang sudah terinfeksi, *Recovered* yakni individu yang sudah pulih atau sembuh dari infeksi yang dimana masing-masing terhadap waktu (t). Dengan diagram skematik pada diagram adalah sebagai berikut (L P Sinaga,2021):

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu_1 S + \alpha S(1 - \theta)I + \theta E \\ \frac{dE}{dt} = \alpha S(1 - \theta)I + \theta E - (\mu_2 E + \beta((1 - \theta)I + \beta)) \\ \frac{dI}{dt} = \beta - (\gamma + \mu_3 I) \\ \frac{dR}{dt} = \gamma(1 - \theta)Q + \gamma - \mu_5 R \end{cases} \quad (2.7)$$

Kasus Covid-19 merupakan kasus penyebaran penyakit yang sedang berlangsung saat ini. Penelitian pemodelan Covid-19 ini mengalami perkembangan secara kontinu. Penelitian SEIR dikembangkan oleh Nailan dkk (2021) dengan pemberian kontrol optimal pada model menggunakan vaksinasi dan pengobatan.

2.2.4 Model SHIQ (*Susceptible-Healthy-Infected-Quarantine*)

Pada skripsi ini akan menggunakan sistem kontrol vaksinasi dan penambahan suplemen vitamin menggunakan model SHIQ (*Susceptible-Healthy-Infected-Quarantine*) yang sudah diketahui kestabilannya pada jurnal yang diteliti oleh Abdullah dkk (2020). Berikut diberikan definisi variabel

model SHIQ pada tabel 2.1. Model SHIQ ini terdiri atas empat kompartemen yaitu subpopulasi *Susceptible*, *Healthy*, *Infected*, dan *Quarantine* yang saling berinteraksi antara satu sama lain. Jumlah individu pada keempat subpopulasi ini akan berubah setiap waktu, sehingga jumlah pada individu dalam setiap waktu ini akan dinyatakan dengan $S(t)$, $H(t)$, $I(t)$, dan $Q(t)$.

Tabel 2. 1 Definisi Variabel Model

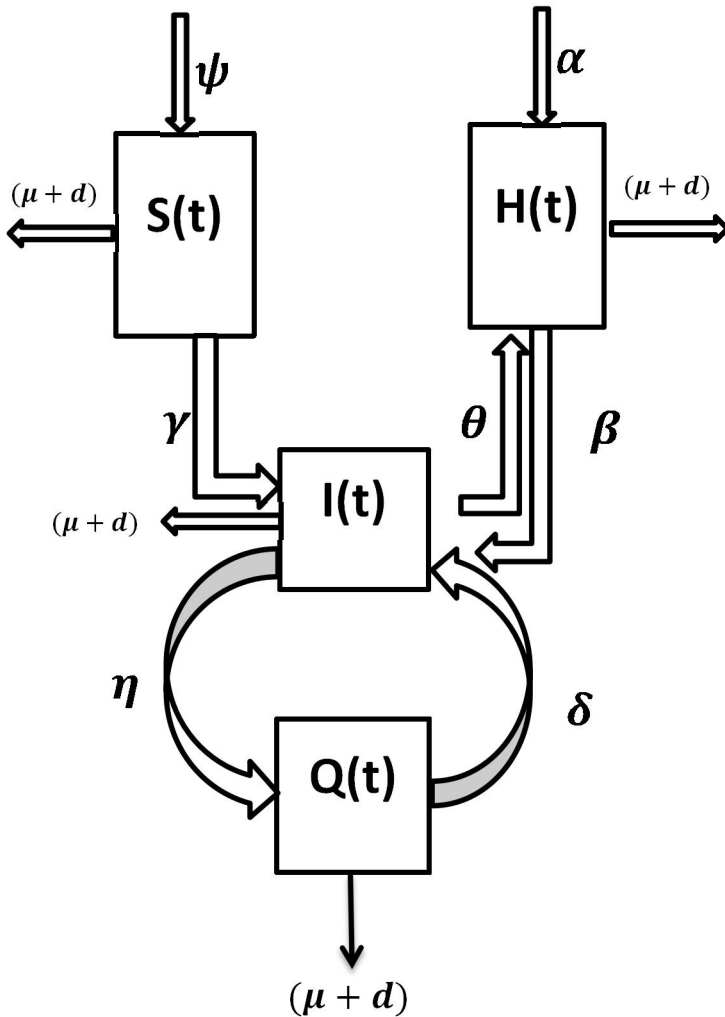
Variabel	Keterangan
$S(t)$	Subpopulasi yang <i>Susceptible</i> terhadap infeksi terhadap waktu
$H(t)$	Subpopulasi yang sehat dari alami maupun dari yang sudah terinfeksi terhadap waktu
$I(t)$	Subpopulasi yang masih dicurigai terinfeksi virus terhadap waktu
$Q(t)$	Subpopulasi yang sudah dicurigai terinfeksi kemudian di karantina terhadap waktu

Tabel 2. 2 Definisi Parameter Model

Parameter	Keterangan
ψ	Tingkat laju subpopulasi yang <i>Susceptible</i>
α	Tingkat laju subpopulasi yang sehat
d	Tingkat laju kematian alami
β	Laju perubahan subpopulasi yang sehat kemudian terinfeksi
γ	Tingkat laju penularan penyakit dari S ke I
μ	Angka kematian alami pada subpopulasi yang sudah terinfeksi
θ	Tingkat laju kesembuhan subpopulasi yang terinfeksi di kelas karantina
η	Laju perpindahan subpopulasi yang dicurigai terinfeksi untuk di karantina
t	Waktu perpindahan
δ	Laju perubahan dimana subpopulasi yang di karantina terkonfirmasi terinfeksi

Model penyebaran Covid-19 ini dapat dimodelkan dengan diagram kompartemen SHIQ, dengan S (*Susceptible*) menyatakan subpopulasi yang *Susceptible* terhadap penyakit Covid-19, H (*Healthy*) menyatakan subpopulasi yang sehat dari alami maupun dari yang sudah terinfeksi penyakit Covid-19, I (*Infected*) menyatakan subpopulasi yang masih dicurigai terinfeksi virus dan yang terkonfirmasi terinfeksi penyakit Covid-19, dan Q (*Quarantine*) menyatakan subpopulasi yang sudah dicurigai terinfeksi virus penyakit Covid-19 kemudian di karantina. Berikut adalah diagram kompartemen model

penyebaran penyakit SHIQ sebelum dikontrol (Abdullah, 2020).



Gambar 2. 4 Diagram Kompartemen Model SHIQ Sebelum dikontrol

Berdasarkan asumsi pada pembatasan masalah berupa model yang dibentuk berdasarkan penyebaran Covid-19 yang dimodelkan, subpopulasi *non-negative* atau belum terkonfirmasi terinfeksi, individu yang awalnya *Susceptible* (S) pindah ke subpopulasi terinfeksi (I) dengan laju konstan, subpopulasi yang terinfeksi masih tahap dicurigai, individu yang dicurigai terkonfirmasi terinfeksi dipindahkan ke subpopulasi karantina untuk pemeriksaan yang lebih lanjut, subpopulasi yang setelah di karantina terkonfirmasi terinfeksi, akan dipindahkan kembali ke kompartemen yang terinfeksi untuk perawatan lebih lanjut. Kemudian modifikasi model SHIQ tersebut akan dikontrol menggunakan sistem kontrol vaksinasi pada subpopulasi *Susceptible* (S) dan penambahan suplemen pada populasi *Infected* (I) atau subpopulasi yang dicurigai terinfeksi virus agar ketika di karantina tidak terkonfirmasi terinfeksi virus. Laju perubahan subpopulasi $S(t)$, $H(t)$, $I(t)$, dan $Q(t)$ terhadap waktu dapat dilihat pada diagram kompartemen gambar 2.4 dan definisi parameter pada tabel 2.2.

Laju perubahan subpopulasi *Susceptible* (S) terjadi akibat tingkat subpopulasi yang *Susceptible* (ψ) bertambah dan berkurangnya subpopulasi dari *Susceptible* akibat adanya interaksi antara subpopulasi *Susceptible* dengan subpopulasi terinfeksi ($-\gamma S(t)I(t)$), serta adanya tingkat kematian alami

$(-d)$ dan tingkat kematian akibat terinfeksi oleh penyakit Covid-19 $(-\mu)$. Pemaparan di atas dapat diformulasikan model penyebaran penyakit pada subpopulasi *Susceptible* (S) sebagai berikut.

$$\frac{dS(t)}{dt} = \psi - \gamma S(t)I(t) - (d + \mu) \quad (2.8)$$

Laju perubahan subpopulasi sehat (*Healthy*) terjadi akibat adanya penambahan jumlah populasi sehat (α), adanya interaksi antara subpopulasi sehat dan subpopulasi infeksi mengakibatkan subpopulasi sehat terinfeksi $(-\beta H(t)I(t))$, serta adanya tingkat kematian alam $(-d)$ dan tingkat kematian akibat terinfeksi oleh penyakit Covid-19 $(-\mu)$. Pemaparan di atas dapat diformulasikan model penyebaran penyakit pada subpopulasi sehat (*Healthy*) sebagai berikut.

$$\frac{dH(t)}{dt} = \alpha - \beta H(t)I(t) + \theta I(t) - (d + \mu)H(t) \quad (2.9)$$

Laju perubahan subpopulasi terinfeksi (*Infected*) terjadi akibat adanya interaksi antara subpopulasi *Susceptible* dan terinfeksi yang mengakibatkan subpopulasi *Susceptible* terinfeksi $(\gamma S(t)I(t))$. Subpopulasi sehat yang berinteraksi dengan subpopulasi yang terinfeksi mengakibatkan jumlah subpopulasi terinfeksi bertambah terhadap seiring berjalannya waktu $(\beta H(t)I(t))$, begitu pula dari subpopulasi yang di karantina kemudian terkonfirmasi terinfeksi penyakit Covid-19 terhadap waktu $(\delta Q(t))$. Kemudian subpopulasi

terinfeksi juga dapat diperoleh akibat adanya dari tingkat kematian alami ($-d$), tingkat kematian akibat terinfeksi oleh penyakit Covid-19 ($-\mu$), perpindahan subpopulasi yang dicurigai terinfeksi penyakit Covid-19 untuk di karantina ($-\eta$), dan tingkat kesembuhan subpopulasi yang terinfeksi ke subpopulasi karantina ($-\theta$). Pemaparan di atas dapat diformulasikan model penyebaran penyakit pada subpopulasi terinfeksi (*Infected*) sebagai berikut.

$$\frac{dI(t)}{dt} = \gamma S(t)I(t) + \beta H(t)I(t) + \delta Q(t) - (d + \mu + \eta + \theta)I(t) \quad (2.10)$$

Laju perubahan subpopulasi yang di karantina (*Quarantine*) terjadi akibat adanya laju perpindahan subpopulasi yang dicurigai terinfeksi untuk di karantina terhadap waktu ($\eta I(t)$). Subpopulasi yang di karantina (*Quarantine*) juga dapat diperoleh dari akibat adanya tingkat kematian alami ($-d$), tingkat kematian akibat terinfeksi oleh penyakit Covid-19 ($-\mu$), dan laju perubahan dimana subpopulasi yang di karantina terkonfirmasi terinfeksi ($-\delta$). Pemaparan di atas dapat diformulasikan model penyebaran penyakit pada subpopulasi yang di karantina (*Quarantine*) sebagai berikut.

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \eta I(t) - (d + \mu + \delta)Q(t) \quad (2.11)$$

Berdasarkan formulasi model penyebaran penyakit Covid-19 SHIQ yang sudah dipaparkan kestabilitasnya oleh Abdullah pada tahun 2020 ini akan diberikan kontrol optimal berupa vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh. Langkah selanjutnya yaitu mencari solusi numerik menggunakan metode *sweep* maju mundur untuk melihat merepresentasikan pengaruh dari kedua kontrol tersebut terhadap model penyebaran penyakit Covid-19 *Susceptible, Healthy, Infected, Quarantine* (SHIQ). Formulasi model matematika penyebaran Covid-19 tanpa kontrol dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \psi - \gamma S(t)I(t) - (d + \mu) \\ \frac{dH(t)}{dt} = \alpha - \beta H(t)I(t) + \theta I(t) - (d + \mu)H(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \gamma S(t)I(t) + \beta H(t)I(t) + \delta Q(t) - (d + \mu + \eta + \theta)I(t) \\ \frac{dQ(t)}{dt} = \eta I(t) - (d + \mu + \delta)Q(t) \end{cases} \quad (2.12)$$

Pada modifikasi model matematika SHIQ ini memiliki asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Subpopulasi *non-negative* atau semua subpopulasi belum dinyatakan terinfeksi
2. Individu yang awalnya *Susceptible* (S) pindah ke subpopulasi terinfeksi (*Infected*) dengan laju

konstan

3. Individu yang terinfeksi (*Infected*) masih tahap dicurigai
4. Individu yang dicurigai terkonfirmasi terinfeksi (*Infected*) dipindahkan ke populasi karantina untuk pemeriksaan yang lebih lanjut
5. Individu yang setelah di karantina terkonfirmasi terinfeksi, akan dipindahkan kembali ke kompartemen yang terinfeksi untuk perawatan lebih lanjut.
6. Modifikasi model SHIQ tersebut akan dikontrol menggunakan sistem kontrol vaksinasi dan penambahan suplemen pada subpopulasi *Susceptible (S)*.

2.3. Coronavirus Disease-19 (Covid-19)

Covid-19 (*Coronavirus disease-19*) adalah penyakit baru yang sebelumnya belum pernah terserang oleh manusia. Covid-19 ini disebabkan oleh virus SarsCoV-2. *Coronavirus* bisa disebut juga *zoonosis* atau penyakit yang dapat tertular dari hewan ke tubuh manusia. Pada penelitian Kemenkes, 2020 menjelaskan bahwa virus *Severe Acute Respiratory Syndrome (SARS)* ditransmisikan ke manusia melalui *civet cats* (kucing luwak) dan virus *Middle East Respiratory Syndrome (MERS)* ke manusia oleh unta. Sedangkan untuk hewan

sumber penularan penyebab Covid-19 ini masih belum ditemukan (Kemenkes, 2020).

Tanda dan gejala umum infeksi Covid-19 meliputi gejala gangguan pernapasan akut seperti demam, batuk, dan sesak napas. Inkubasi rata-rata adalah 5-6 hari dan inkubasi terlama adalah empat belas hari. Kasus Covid-19 yang parah dapat menyebabkan pneumonia, sindrom pernapasan akut, gagal ginjal, dan bahkan kematian. Tanda dan gejala klinis sebagian besar kasus adalah demam, sesak napas pada beberapa kasus, dan radiografi menunjukkan infiltrat paru yang luas di kedua paru (Kemenkes, 2020).

Secara tidak kasat mata, Covid-19 dapat dengan mudah tertular dari subpopulasi yang sudah terinfeksi ke subpopulasi yang *Susceptible*. Penularan Covid-19 terkadang dapat tertular melalui kegiatan yang mungkin teranggap remeh oleh manusia. Penularan Covid-19 dapat tertular pada kegiatan sehari-hari antara lain: lewat batuk yang menimbulkan percikan udara, bersin, ketika berkomunikasi lewat bicara langsung, serta kontak fisik langsung dengan subpopulasi yang sudah terinfeksi virus Covid-19 (Razi, et al, 2020). Dari sejarah Islam, pada zaman Nabi Muhammad dan setelahnya sudah banyak terjadi pandemi. Pelajaran atau hikmah yang akan mengarah pada solusi dalam menghadapi pandemi Covid-19, hal terpenting yang akan diajarkan sejarah

adalah kebijaksanaan, kebijaksanaan yang membuat menghadapi sesuatu untuk mencapai keadaan yang lebih baik (Bachtiar, 2018).

2.4. Vaksin dan Suplemen Daya Tahan Tubuh

Vaksin adalah metode yang sangat efektif untuk mencegah dan mengurangi infeksi virus. Meskipun tidak ada vaksin atau antivirus khusus untuk pengobatan pasien yang terinfeksi Covid-19 tersedia, beberapa vaksin untuk Covid-19 seperti vaksin hidup yang dilemahkan, vaksin yang tidak aktif, vaksin subunit, vaksin DNA dan RNA, dan vaksin vektor telah dikembangkan. Vaksinasi dan kontrol optimal adalah poin kunci untuk mengendalikan situasi epidemi. Para ilmuwan mengambil banyak pendekatan untuk mengembangkan vaksin (CDC, 2020). Pendekatan ini didasarkan pada informasi tentang penyakit yang akan dicegah oleh vaksin, seperti bagaimana kuman menginfeksi sel, bagaimana sistem kekebalan meresponsnya, wilayah di dunia tempat vaksin akan digunakan, jenis virus atau bakteri, dan kondisi lingkungan. Saat ini ada lima jenis vaksin utama yang diterima bayi dan anak kecil di Amerika Serikat (CDC, 2020):

1. Vaksin Hidup (*Live Vaccines*)

Vaksin ini mengandung virus atau bakteri hidup yang dilemahkan, sehingga tidak menyebabkan penyakit serius pada subpopulasi dengan sistem kekebalan tubuh yang

sehat. Karena vaksin hidup yang dilemahkan mendekati infeksi alami yang baik untuk sistem kekebalan tubuh. Contoh vaksin hidup yang dilemahkan adalah vaksin campak, gondok dan rubella (MMR) dan *varicella*. Walaupun vaksin ini sangat efektif, namun tidak semua subpopulasi dapat menerima vaksin ini. Misalnya, anak-anak dengan sistem kekebalan yang lemah dan mereka yang menerima kemoterapi tidak dapat menerima vaksin hidup.

2. Vaksin Non-Hidup (*Non-Live Vaccines*)

Vaksin ini dibuat dengan cara menonaktifkan atau membunuh bakteri selama proses pembuatan vaksin. Contoh dari vaksin semacam itu adalah vaksin polio yang tidak aktif. Beberapa dosis seringkali diperlukan untuk membangun dan mempertahankan kekebalan.

3. Vaksin Toksoid (*toxoid vaccines*)

Vaksin ini dapat mencegah penyakit dalam tubuh yang disebabkan oleh bakteri penghasil toksin (beracun). Selama pembuatan vaksin ini, toksin dilemahkan sehingga tidak lagi menimbulkan penyakit. Racun yang dilemahkan disebut toksoid. Ketika sistem kekebalan menerima vaksin yang mengandung toksoid, ia belajar melawan toksin alami. Vaksin DTaP mengandung toksoid difteri dan tetanus. Vaksin ini bertujuan untuk menutupi hanya

sebagian virus atau bakteri atau subunit, bukan seluruh embrio. Karena vaksin ini hanya mengandung antigen esensial dan tidak semua molekul lain yang menyusun embrio, efek sampingnya lebih jarang. Komponen pertusis dari vaksin DTaP adalah contoh vaksin subunit.

4. Vaksin Konjugat (*Conjugate Vaccines*)

Vaksin ini merupakan salah satu vaksin yang dapat bekerja melawan bakteri yang mengandung antigen. Bakteri ini memiliki antigen yang lapisan luarnya terbuat dari zat mirip gula yang disebut polisakarida. Jenis lapisan ini menutupi antigen, membuat sistem kekebalan anak yang belum matang sulit untuk mengenali dan meresponsnya. Vaksin terkonjugasi efektif melawan jenis bakteri ini karena menggabungkan (terkonjugasi) polisakarida dengan antigen yang sangat responsif oleh sistem kekebalan. Senyawa ini membantu sistem kekebalan yang belum matang merespons lapisan dan meningkatkan respons kekebalan. Contoh vaksin jenis ini adalah vaksin *Haemophilus influenzae* tipe B (Hib) dan vaksin Covid-19 mRNA (message RNA). Contoh vaksin mRNA adalah vaksin Sinovac dan vaksin astrazeneca yang nantinya akan digunakan sebagai model SHIQ untuk sistem pengendalian Covid-19. Vaksin *Sinovac* terdiri dari senyawa aluminium yang dicampur dengan virus Covid-19 yang sudah dilemahkan dan mati. Virus ini sudah tidak dapat melakukan

sistem replikasi yang dimana dapat membentuk vaksin *sinovac* yang mampu meningkatkan kekebalan tubuh. Sedangkan vaksin *astrazeneca* terbentuk dari hasil rekayasa genetik suatu vaksin yang berefek membentuk rangsangan antibody. Vaksin *astrazeneca* dipercaya sudah teruji klinis oleh WHO (*World Health Organization*).

Memperkuat pertahanan tubuh untuk mencegah infeksi Covid-19 bermanfaat bagi semua subpopulasi, termasuk mereka yang rentan terhadap infeksi. Imunitas adalah pertahanan terbaik yang mendukung kemampuan alami tubuh untuk melawan SARS-CoV-2. Namun, kelompok rentan seperti lansia, ibu hamil, anak-anak termasuk bayi dan subpopulasi dengan daya tahan tubuh yang lemah membutuhkan upaya ekstra untuk memperkuat daya tahan tubuh agar terhindar dari risiko kematian akibat Covid-19. Upaya tersebut berujung pada konsumsi suplemen makanan selama pandemi (Galanakis, 2020; Nurislaminingsih, 2020). Namun, tanpa informasi yang tepat, komersialisasi suplemen makanan yang meluas di media dapat menyebabkan penggunaan suplemen makanan yang tidak rasional oleh subpopulasi awam (Hamishehkar et al., 2016). Oleh karena itu, tujuan dari penelitian ini adalah untuk membahas kandungan dan peran suplemen makanan dalam meningkatkan daya tahan tubuh untuk mencegah risiko infeksi Covid-19, sehingga

informasi ini dapat digunakan dalam pekerjaan kesehatan terkait dengan konsumsi suplemen makanan yang memenuhi syarat. kebutuhan yang sesuai bagi masyarakat dapat bermanfaat. umumnya normal di masyarakat di era baru.

Berdasarkan peraturan yang berlaku, bahan tambahan pangan adalah produk yang dirancang untuk memenuhi kebutuhan gizi, mempertahankan, meningkatkan dan meningkatkan fungsi kesehatan, memiliki nilai gizi dan efek fisiologis, serta mengandung satu atau lebih komponen vitamin, mineral, asam amino dan mengandung komponen nonfisiologis lainnya. komponen. zat antiradang steroid, tumbuhan yang dapat berasosiasi dengan tumbuhan (BPOM RI, 2020). Dalam kondisi tertentu, penggunaan suplemen makanan untuk mencegah Covid-19 mengkompensasi kekurangan vitamin sehingga sistem kekebalan tubuh dapat berfungsi secara optimal. Suplemen yang digunakan mungkin termasuk vitamin C, probiotik, vitamin B kompleks, multivitamin, dan mineral. Pada saat yang sama, pasien Covid-19 yang dikonfirmasi tanpa gejala juga dapat menerima suplemen makanan untuk mencegah kondisinya memburuk sambil menunggu konfirmasi negatif secara definitif. Pasien dengan penyakit Covid-19 ringan hingga sedang tanpa gejala menerima vitamin C, D, E, *sodium selenite*, dan *zinc picolinate* (Mishra dan Patel, 2020); (Sahebnaugh et al., 2020).

2.5. Sistem Kontrol Optimal

Kontrol optimal merupakan salah satu ilmu yang bergerak dalam bidang teknik dan matematika. Pada umumnya, kontrol optimal adalah optimasi yang bekerja dalam sebuah proses sehingga mendapatkan suatu hasil yang paling terbaik (Saraswati et al., 2017). Seiring berkembangnya zaman, sistem kontrol optimal semakin bertambah maju dimana dimulai dari era pasca Perang Dunia ke-II yaitu pada tahun 1957 yang pertama kali ditemukan oleh Richard Bellmann dengan metode *dynamic programming*. Kemudian penelitian dilanjutkan pada tahun 1962 oleh Pontryagin yang menemukan metode *maximum principle* (Venkateswarlu, 1996).

Kontrol optimal biasanya digunakan sebagai solusi pencarian sebuah persamaan differensial suatu pengontrol yang biasanya ditulis dengan variabel $u(t)$ dimana dapat mewakili suatu indeks dari perilaku. Pengaruh dari variabel sistem kontrol $u(t)$ yang membawa dari keadaan awal $x(0)$ pada waktu x_0 ke keadaan akhir $x(T)$ pada waktu x_T . Berikut adalah masalah kontrol optimal yang dalam fungsi tujuannya untuk meminimumkan atau memaksimumkan sebuah persamaan :

$$J(x, u, t) = \int_0^T f(x(t), u(t), t) dt \quad (2.13)$$

Dengan kendala,

$$x_1 = g(x(t), u(t), t)$$

$x(t_0) = x_0$ dan $x(T) = x_T$ dan fungsi $u(t)$ bergantung waktu t . Untuk t_0 merupakan waktu awal dan T adalah waktu akhir setelah diberi kontrol.

Salah satu upaya untuk mencegah meluasnya penyebaran penyakit adalah dengan pemberian vaksin. Vaksin yang digunakan pada model SHIQ kali ini adalah vaksin *sinovac* dan *astrazeneca*. Untuk sistem kontrol selanjutnya adalah penambahan suplemen vitamin. Penambahan suplemen disini menggunakan beberapa macam vitamin diantaranya yaitu vitamin C, D, E, *sodium selenite*, dan *zinc picolinate*.

2.5.1. Syarat Perlu Kontrol Optimal

Salah satu teknik atau metode yang paling penting untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal adalah menentukan kondisi kontrol optimal sesuai dengan keadaan dan kondisi optimal. Pada tahun 1950, Pontryagin menemukan kondisi yang diperlukan untuk hidup berdampingan. Fungsi adjoint ini berfungsi sebagai penjumlahan persamaan diferensial pada fungsi tujuan (Lenhart dan Workman 2007).

Dapat didefinisikan u^* merupakan suatu kondisi optimal dan x^* adalah kondisi *state* yang sudah sesuai dengan kondisi optimal, sehingga dapat diasumsikan u^* dan x^* itu ada. Misal $h(t)$ adalah fungsi kontinu dan $e \in R$ merupakan konstanta maka dapat diperoleh bentuk kontrol sebagai berikut:

$$u^e(t) = u^*(t) + eh(t) \quad (2.14)$$

Ketika dimisalkan x^ϵ adalah *state* yang sesuai dengan u^e , maka akan diperoleh persamaan *state* sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}x^e(t) = g(t, x^e(t), u^e(t)) \quad (2.15)$$

Ketika x^e dan x^* dimulai dengan titik awal yang sama $x^e(t_0) = x_0$, maka akan berlaku $u^e(t) = u^*(t)$ untuk semua t ketika $\epsilon = 0$. Kemudian untuk setiap t juga berlaku:

$$\frac{\partial u^e(t)}{\partial e} \Big|_{e=0} = h(t) \quad (2.16)$$

Adapun juga fungsi variabel objektif u^e yaitu:

$$j(u^e) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^e(t), u^e(t)) dt \quad (2.17)$$

Fungsi *adjoint* dapat dinotasikan dengan $\sigma(t)$ pada $[t_0, t_1]$. Berdasarkan persamaan fungsi variabel objektif di atas akan diperoleh fungsi yang memenuhi kondisi optimal yaitu:

$$f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \sigma(t)g_u(t, x^*(t), u^*(t)) = 0 \quad (2.18)$$

2.6. Penyelesaian Kontrol Optimal dengan Metode Sweep Maju-Mundur

Masalah kontrol optimal pada penelitian ini akan diselesaikan dengan prinsip sistem pontryagin maksimum. Prinsip maksimum ini bertujuan untuk memperoleh sistem kontrol terbaik pada sistem dinamik dari *state* awal hingga *state* akhir. Yaitu dengan pemaksimalan fungsi objektif dengan kontrol $u(t)$ terbatas pada $u(t) \in U$. Pada tahun 1950 L.S. Pontryagin mengembangkan prinsip maksimum ini sehingga disebut prinsip pontryagin maksimum. Prinsip Pontryagin maksimum menyatakan secara informal bahwa persamaan Hamiltonian akan dimaksimalkan sepanjang U yang merupakan himpunan kontrol (Bryson & Ho, 1975). Langkah penyelesaian masalah kontrol optimal dengan menggunakan syarat perlu prinsip minimum pontryagin adalah sebagai berikut.

1. Membentuk fungsi Hamiltonian

$$Ha(t, \bar{x}, \bar{u}, \lambda) = f(t, \bar{x}, \bar{u}) + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t) g_i(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.19)$$

2. Menentukan persamaan *state* dan *costate*

$$x'_i(t) = \frac{\partial Ha}{\partial \sigma_i} = g_i(t, \bar{x}, \bar{u}), \quad (2.20)$$

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

$$\sigma'_i(t) = - \frac{\partial Ha}{\partial x_j}, \quad (2.21)$$

$$\sigma_j(t_1) = 0, \quad \forall_j = 1, \dots, n,$$

3. Menentukan u_k^* yang memenuhi kondisi stasioner

$$0 = \frac{\partial Ha}{\partial u_k}, \quad (2.22)$$

$$\forall_{u_k}, k = 1, \dots, m,$$

4. Menentukan kondisi sistem optimal dengan mensubstitusikan u_k^* pada persamaan *state* dan *costate*.

Selanjutnya yaitu terdapat metode *sweep* maju mundur dengan metode runge kutta orde-4 untuk menganalisis kontrol pada model penyebaran penyakit Covid-19 SHIQ guna memperoleh solusi numerik. Algoritma analisis metode *sweep* maju mundur agar optimal adalah sebagai berikut (Norasia, 2021).

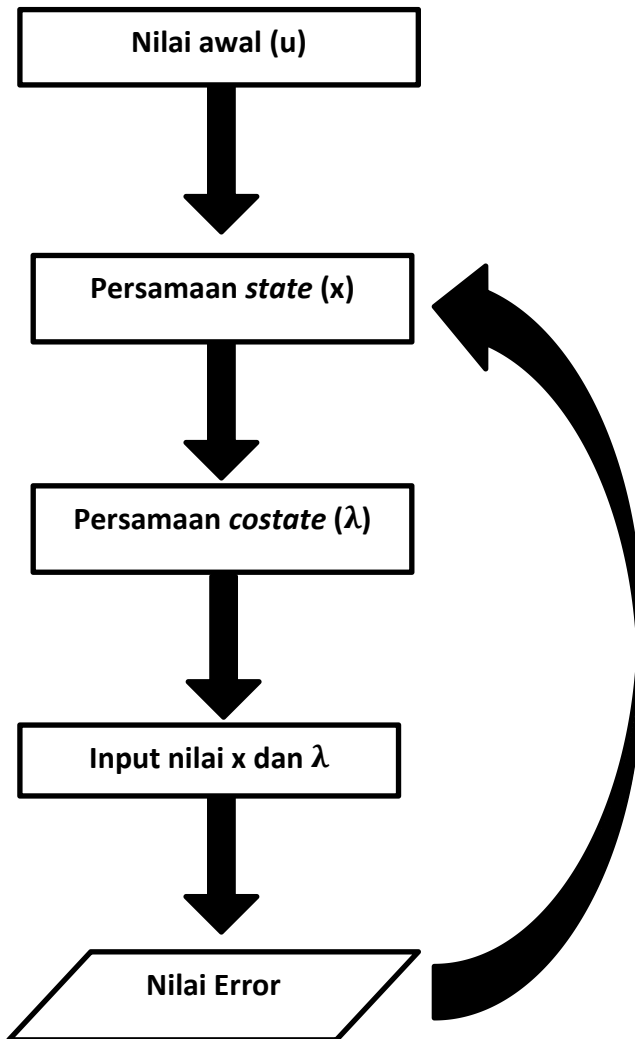
Langkah 1: Menentukan nilai awal u .

Langkah 2: Menentukan persamaan *state* menggunakan nilai awal u dan kondisi awal $x(0) = x_0$ dengan langkah maju metode runge kutta orde-4.

Langkah 3: Menentukan persamaan *costate* menggunakan nilai u , x , dan kondisi *transversality* $\lambda(T) = 0$ langkah mundur metode runge kutta orde-4.

Langkah 4: Memperbarui nilai kontrol u dengan memasukkan nilai x dan λ yang baru ke dalam karakteristik dari u .

Langkah 5: jika nilai error pada setiap iterasi saat ini dan sebelumnya sangat kecil yaitu 10^{-3} , maka cetak nilai-nilai saat ini sebagai solusi. Namun, jika nilai errornya tidak sangat kecil maka dikembalikan lagi ke langkah 2. Berikut adalah gambaran metode *sweep* maju mundur.



Gambar 2. 5 Metode *Sweep* Maju Mundur

2.7. Kajian Penelitian Terdahulu

Sudah banyak penelitian yang memaparkan tentang kontrol optimal penyebaran penyakit. Berikut ini beberapa penelitian terdahulu mengenai kontrol optimal penyebaran penyakit yang menjadi rujukan peneliti dalam melakukan penelitian.

Tabel 2.3 Kajian Penelitian Terdahulu

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
1	Adapun jurnal yang berjudul " <i>Optimal Control of HIV-1 Spread in Combination with nutritional status and ARV-Treatment</i> " oleh Yolanda Norasia, dkk (2022).	Pada penelitian ini sama-sama menggunakan kontrol optimal dengan pemodelan matematika	Pada penelitian ini menggunakan model SHIQ untuk Covid-19 sedangkan pada jurnal yang digunakan untuk referensi menggunakan pemodelan SIPA untuk HIV-1
2	Penelitian analisis kontrol optimal Covid-19 jurnal yang berjudul " <i>Deterination of an Optimal Control</i> "	Pada penelitian ini sama-sama menggunakan kontrol optimal pada Covid-19	Pada penelitian ini menggunakan model SHIQ sedangkan pada

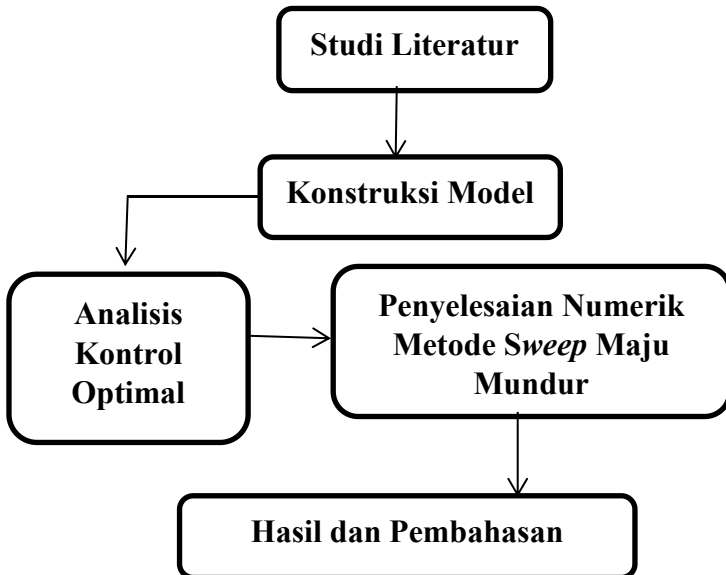
	<i>Strategy for Vaccine Administration in Covid-19 Pandemic Treatment</i> ” oleh Gustavo Barbossa Libotte, dkk (2020).	dengan vaksinasi	jurnal yang digunakan untuk referensi menggunakan pemodelan SIR
3	Pada oktober tahun 2021, L.P. Sinaga, H Nasution , dan D Kartika melakukan penelitian kestabilan Covid-19 dengan menggunakan model SEIR pada jurnal yang berjudul <i>“Stability analysis of the Corona Virus (Covid-19) Dynamics SEIR Model in Indonesia”</i> .	Pada penelitian ini sama-sama menggunakan topik pembahasan pencegahan pada Covid-19	Pada penelitian ini menggunakan kontrol optimal sedangkan pada jurnal yang digunakan untuk referensi analisis kestabilan
4	Kemudian dilanjutkan penelitian berikutnya Nailan Ni'mah dan L.P. Sinaga (2021) pada jurnal nasional yang berjudul “Analisis	Pada penelitian ini sama-sama menggunakan kontrol optimal pada Covid-19	Pada penelitian ini menggunakan model SHIQ sedangkan pada jurnal yang

	Sensitivitas dan Kontrol Optimal Model SEIR Penyebaran Covid-19 di Indonesia”.		digunakan untuk referensi menggunakan pemodelan SEIR
5	Pada desember 2020 Abdullah dkk melakukan penelitian model matematika SHIQ pada jurnal yang berjudul “ <i>Mathematical Analysis of Covid-19 Via New Mathematical Model</i> ”	Pada penelitian ini sama-sama menggunakan topik pembahasan pencegahan pada Covid-19	Pada penelitian ini menggunakan kontrol optimal pada model SHIQ sedangkan pada jurnal yang digunakan untuk referensi menggunakan analisis kestabilan model SHIQ

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai langkah-langkah dan prosedur yang akan dilaksanakan saat penelitian, antara lain: Studi literatur, konstruksi model, analisis kontrol optimal, penyelesaian numerik metode *sweep* maju mundur, dan terakhir adalah hasil dan kesimpulan. Berikut adalah peta konsep dalam metode penelitian analisis kontrol optimal penyebaran Covid-19 dengan pemodelan matematika SHIQ (*Susceptible-Healthy-Infected-Quarantine*).



Gambar 3. 1 Peta Konsep Metode Penelitian

3.1. Studi Literatur

Studi literatur ini merupakan langkah awal penulis dalam memahami dan mengumpulkan materi yang berkaitan dengan model matematika epidemiologi pada penyebaran Covid-19. Untuk proses selanjutnya yaitu mengumpulkan bahan-bahan referensi yang dapat mendukung dalam proses pengerjaan penelitian, seperti jurnal, *website*, dan buku yang berkaitan dengan model matematika epidemiologi tersebut.

3.2. Konstruksi Model

Langkah awal dalam penelitian ini adalah memodifikasi pemodelan penyebaran Covid-19 yang akan dilakukan dengan mengkonstruksi model. Model penyebaran yang akan di dimodifikasi kali ini yaitu model yang telah dipaparkan oleh Abdullah, dkk (2021).

3.3. Analisis Kontrol Optimal

Pada tahap analisis ini merupakan salah satu dari unsur utama yang pasti akan dilakukan ketika berlangsungnya proses penelitian. Proses analisis dimulai dari model awal secara keseluruhan yang kemudian dilanjutkan dengan mencari penentuan kondisi optimal dan nilai parameter kontrol optimal. Kondisi yang optimal dapat diperoleh ketika memenuhi kondisi pada prinsip minimum pontryagin. Berdasarkan prinsip pontryagin, kondisi optimal

akan dicapai jika memenuhi kondisi-kondisi seperti kondisi stationer, persamaan *state*, dan persamaan *costate*.

3.4. Penyelesaian Numerik dengan Metode Sweep Maju Mundur

Langkah awal untuk penyelesaian numerik adalah dengan menentukan nilai parameter-parameter dan variabel-variabel yang akan digunakan. Metode yang akan digunakan pada simulasi numerik model SHIQ ini adalah metode *sweep* maju mundur dengan metode runge kutta orde-4. Pada simulasi numerik ini akan mempresentasikan hasil berupa grafik. Kemudian akan dilakukan interpretasi hasil simulasi numerik yang akan membandingkan masing-masing subpopulasi S, H, I, dan Q hasil pengaruh sistem kontrol menggunakan software MATLABR2013a untuk mendapatkan hasil solusi grafiknya.

3.5. Hasil dan Pembahasan

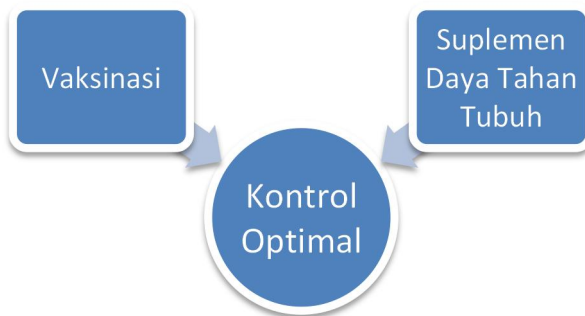
Langkah terakhir yang akan dilakukan adalah menentukan hasil simulasi numerik dari output program MATLABR2013a dan menarik kesimpulan dari hasil penelitian tersebut.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Formulasi Model Kontrol Optimal Penyebaran Covid-19

Pemodelan matematika kasus penyebaran penyakit Covid-19 ini akan diberikan kontrol yang bertujuan untuk meminimumkan subpopulasi *Susceptible* dan meningkatkan subpopulasi yang sehat. Kontrol Optimal pada model matematika ini sesuai dengan asumsi yang telah diambil dari permasalahan penyebaran penyakit Covid-19. Kontrol yang digunakan pemodelan matematika penyebaran penyakit Covid-19 ini yaitu vaksinasi (u_1) dan penambahan suplemen daya tahan tubuh (u_2) pada model SHIQ.



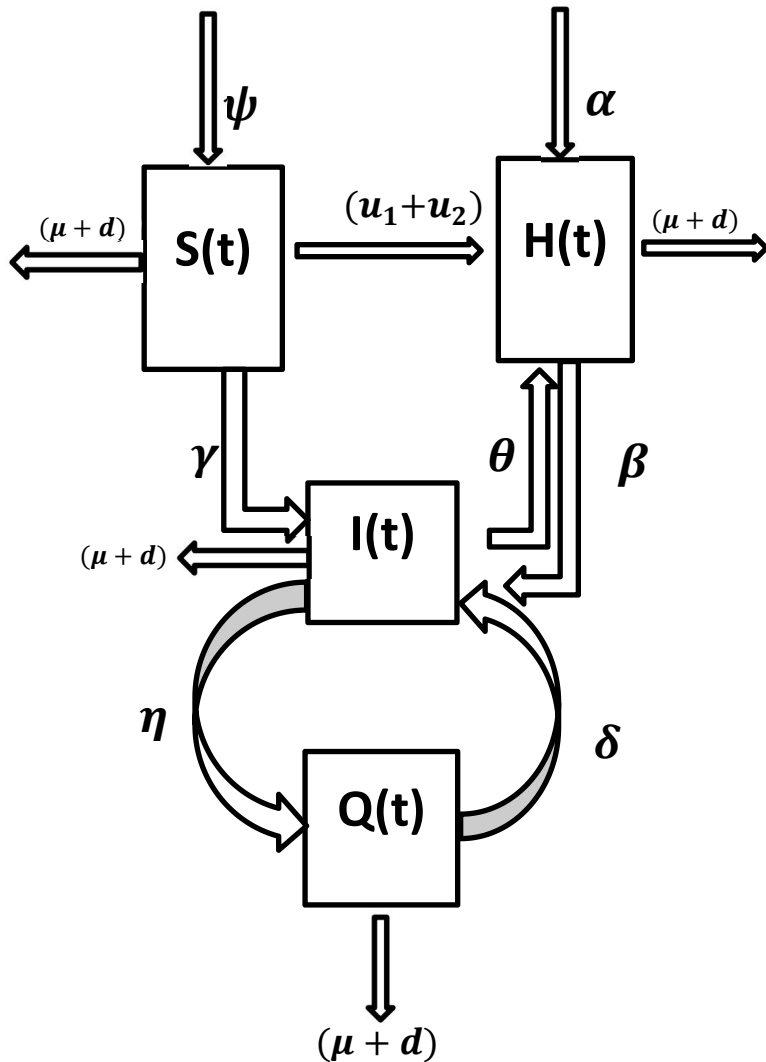
Gambar 4.1 Kontrol Optimal Covid-19

Persamaan 2.11 dapat dilihat bahwa terdapat perubahan subpopulasi *Susceptible* dipengaruhi oleh variabel

yaitu Subpopulasi *Susceptible* yang berinteraksi dengan subpopulasi terinfeksi, subpopulasi terinfeksi berinteraksi dengan subpopulasi *Susceptible*, subpopulasi sehat, dan subpopulasi yang di karantina, kemudian subpopulasi sehat yang berinteraksi dengan subpopulasi terinfeksi, dan subpopulasi yang di karantina berinteraksi dengan subpopulasi terinfeksi. Pada model persamaan tersebut terdapat interaksi langsung maupun tidak langsung antar subpopulasi. Contoh yang berinteraksi langsung yaitu subpopulasi yang terinfeksi dan subpopulasi yang sehat.

Dengan adanya interaksi kontak langsung antar subpopulasi sehat dan terinfeksi akan mengurangi subpopulasi yang sehat dan bertambahnya populasi yang terinfeksi akibat penyebaran penyakit Covid-19. Maka, pada permasalahan tersebut perlu adanya sistem kontrol optimal yang digunakan untuk mengatasi masalah penyebaran Covid-19 tersebut. Kontrol optimal yang akan ditambahkan pada permasalahan ini yaitu memberikan vaksinasi (u_1) pada subpopulasi yang sehat agar tidak terinfeksi dan penambahan suplemen vitamin daya tahan tubuh (u_2) pada subpopulasi yang terinfeksi dan subpopulasi yang di karantina.

Berikut adalah gambar kompartemen penyebaran Covid-19 setelah ditambah dengan kontrol.



Gambar 2. 4 Diagram Kompartemen Model SHIQ Sebelum dikontrol

Berikut adalah definisi variabel model dan parameter model penyebaran penyakit Covid-19 SHIQ.

Tabel 4. 1 Definisi Variabel Model

Variabel	Keterangan
S(t)	Subpopulasi yang rentan terhadap infeksi terhadap waktu (Subpopulasi <i>Susceptible</i>)
H(t)	Subpopulasi yang sehat dari alami maupun dari yang sudah terinfeksi terhadap waktu (Subpopulasi <i>Healthy</i>)
I(t)	Subpopulasi yang masih dicurigai terinfeksi virus terhadap waktu (Subpopulasi <i>Infected</i>)
Q(t)	Subpopulasi yang sudah dicurigai terinfeksi kemudian di karantina terhadap waktu (Subpopulasi <i>Quarantine</i>)

Tabel 4. 2 Definisi Parameter Model

Parameter	Keterangan
ψ	Tingkat laju subpopulasi yang <i>Susceptible</i>
α	Tingkat laju subpopulasi yang sehat
d	Tingkat laju kematian alami
β	Laju perubahan subpopulasi yang sehat kemudian terinfeksi
γ	Tingkat laju penularan penyakit dari S ke I
μ	Angka kematian alami pada subpopulasi yang sudah terinfeksi
θ	Tingkat laju kesembuhan subpopulasi yang terinfeksi di kelas karantina
η	Laju perpindahan subpopulasi yang dicurigai terinfeksi untuk di karantina
t	Waktu perpindahan
δ	Laju perubahan dimana subpopulasi yang di karantina terkonfirmasi terinfeksi

Laju perubahan subpopulasi *Susceptible* terhadap waktu dengan adanya pengaruh dua kontrol, yakni kontrol vaksinasi dan suplemen vitamin daya tahan tubuh. Laju perubahan subpopulasi S (*Susceptible*) terjadi akibat tingkat subpopulasi yang *Susceptible* (ψ) bertambah dan berkurangnya subpopulasi dari *Susceptible* akibat adanya interaksi antara subpopulasi *Susceptible* dengan subpopulasi terinfeksi ($-\gamma S(t)I(t)$), serta adanya tingkat kematian alami ($-d$) dan tingkat kematian akibat terinfeksi oleh penyakit Covid-19 ($-\mu$). Laju subpopulasi *Susceptible* terhadap waktu diberikan dua kontrol, yakni kontrol vaksinasi ($-u_1 S$) dan suplemen vitamin daya tahan tubuh ($-u_2 S$). Hal ini dikarenakan adanya interaksi kontak langsung antara subpopulasi yang *Susceptible* dengan subpopulasi terinfeksi. Pemberian kontrol ini bertujuan agar subpopulasi yang sehat akan bertambah dan subpopulasi yang *Susceptible* berkurang. Kontrol vaksinasi yang diberikan berupa vaksin *sinovac* dan *astrazeneca* dan penambahan suplemen daya tahan tubuh yang digunakan tersebut mengandung vitamin C, probiotik, vitamin B kompleks, multivitamin, dan mineral. Berikut adalah formulasi model penyebaran penyakit Covid-19 subpopulasi *Susceptible* dengan kontrol vaksinasi (u_1) dan suplemen daya tahan tubuh (u_2).

$$\frac{dS(t)}{dt} = \psi - \gamma S(t)I(t) - (d + \mu)S(t) - u_1S - u_2S \quad (4.1)$$

Laju perubahan subpopulasi sehat (*Healthy*) terjadi akibat adanya penambahan jumlah populasi sehat (α), adanya interaksi antara subpopulasi sehat dan subpopulasi terinfeksi mengakibatkan subpopulasi sehat terinfeksi sehingga berkurang sebesar $(-\beta H(t)I(t))$, serta berkurang akibat adanya tingkat kematian alami $(-d)$ dan tingkat kematian akibat terinfeksi oleh penyakit Covid-19 $(-\mu)$. Dengan pemaparan yang sudah dijelaskan pada persamaan subpopulasi *Susceptible* yang telah diberikan dua kontrol, yakni kontrol vaksinasi (u_1S) dan penambahan suplemen daya tahan tubuh (u_2S) ini, bertujuan untuk meningkatkan laju subpopulasi sehat dan mengurangi subpopulasi yang *Susceptible*, terinfeksi, dan di karantina. Kontrol vaksinasi yang diberikan berupa vaksin *sinovac* dan *astrazeneca* dan penambahan suplemen daya tahan tubuh yang digunakan tersebut mengandung vitamin C, probiotik, vitamin B kompleks, multivitamin, dan mineral. Berikut adalah formulasi model penyebaran penyakit Covid-19 subpopulasi sehat dengan kontrol vaksinasi (u_1) dan penambahan suplemen daya tahan tubuh (u_2) dari subpopulasi *Susceptible*.

$$\frac{dH(t)}{dt} = \alpha - \beta H(t)I(t) + \theta I(t) - (d + \mu)H(t) + u_1S + u_2S \quad (4.2)$$

Laju perubahan subpopulasi terinfeksi (*Infected*) terjadi akibat adanya interaksi antara subpopulasi *Susceptible* dan subpopulasi terinfeksi yang mengakibatkan subpopulasi *Susceptible* terinfeksi sebesar $(\gamma S(t)I(t))$. Subpopulasi sehat yang berinteraksi dengan subpopulasi yang terinfeksi mengakibatkan jumlah subpopulasi terinfeksi bertambah terhadap seiring berjalannya waktu sebesar $(\beta H(t)I(t))$, begitu pula dari subpopulasi yang di karantina kemudian terkonfirmasi terinfeksi penyakit Covid-19 terhadap waktu sebesar $(\delta Q(t))$. Kemudian subpopulasi terinfeksi juga berkurang akibat adanya dari tingkat kematian alam, tingkat kematian akibat terinfeksi oleh penyakit Covid-19 $(-\mu)$, perpindahan subpopulasi yang dicurigai terinfeksi penyakit Covid-19 untuk di karantina $(-\eta)$, dan tingkat kesembuhan subpopulasi yang terinfeksi ke subpopulasi karantina $(-\theta)$. Pemaparan di atas dapat diformulasikan model penyebaran penyakit pada subpopulasi yang terinfeksi (*Infected*) sebagai berikut.

$$\frac{dI(t)}{dt} = \gamma S(t)I(t) + \beta H(t)I(t) + \delta Q(t) - (d + \mu + \eta + \theta)I(t) \quad (4.3)$$

Laju perubahan subpopulasi yang di karantina (*Quarantine*) terjadi akibat adanya laju perpindahan subpopulasi yang dicurigai terinfeksi untuk di karantina

terhadap waktu ($\eta I(t)$). Subpopulasi yang di karantina (*Quarantine*) juga dapat diperoleh dari akibat adanya tingkat kematian alami ($-d$), tingkat kematian akibat terinfeksi oleh penyakit Covid-19 ($-\mu$), dan laju perubahan dimana subpopulasi yang di karantina terkonfirmasi terinfeksi ($-\delta$). Pemaparan di atas dapat diformulasikan model penyebaran penyakit pada subpopulasi yang di karantina (*Quarantine*) sebagai berikut.

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \eta I(t) - (d + \mu + \delta)Q(t) \quad (4.4)$$

Formulasi model matematika penyebaran Covid-19 dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = \psi - \gamma S(t)I(t) - (d + \mu)S(t) - u_1 S - u_2 S = f_1 \\ \frac{dH(t)}{dt} = \alpha - \beta H(t)I(t) + \theta I(t) - (d + \mu)H(t) + u_1 S \\ \quad + u_2 S = f_2 \\ \frac{dI(t)}{dt} = \gamma S(t)I(t) + \beta H(t)I(t) + \delta Q(t) - (d + \mu + \eta + \theta)I(t) = f_3 \\ \frac{dQ(t)}{dt} = \eta I(t) - (d + \mu + \delta)Q(t) = f_4 \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Dari formulasi model matematika penyebaran Covid-19 di atas akan dilakukan analisis kontrol optimal.

4.2 Analisis Kontrol Optimal

Analisis kontrol optimal digunakan untuk mengetahui bahwa formulasi model matematika yang telah dibentuk sudah memenuhi beberapa persyaratan tertentu. Kontrol optimal pada penelitian ini bertujuan untuk meminimumkan

subpopulasi terinfeksi Covid-19 dengan kontrol yaitu vaksinasi $u_1(t)$ dan suplemen vitamin daya tahan tubuh $u_2(t)$.

Dengan demikian, bentuk fungsi tujuan yang akan diminimumkan adalah sebagai berikut.

$$J(u_1, u_2) = \int_0^T I + Au_1^2 + Bu_2^2 dt \quad (4.6)$$

Selanjutnya yaitu menentukan kontrol optimal $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$, sedemikian sehingga berlaku

$$J(u_1^*(t), u_2^*(t)) = \min\{J(u_1(t), u_2(t)) | u_1(t) \in U\} \quad (4.7)$$

dengan,

$$U = \{u_1(t) | 0 \leq u_1(t) \leq 1\}$$

Masalah kontrol optimal dapat dipenuhi jika masalah tersebut memenuhi kondisi pada prinsip pontryagin. Langkah awal yaitu menemukan fungsi Hamiltonian yang bersesuaian dengan sistem persamaan (4.6), sehingga diperoleh

$$Ha = I + Au_1^2 + Bu_2^2 + \sum_{i=1}^4 \lambda_i f_i \quad (4.8)$$

Dengan substitusi persamaan $\sum_{i=1}^4 \lambda_i f_i$ diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \lambda_i f_i = & \lambda_1(\psi - \gamma S(t)I(t) - (d + \mu)S(t) - u_1S - u_2S) \\ & + \lambda_2(\alpha - \beta H(t)I(t) + \theta I(t) - (d + \mu)H(t) + u_1S + u_2S) \\ & + \lambda_3(\gamma S(t)I(t) + \beta H(t)I(t) + \delta Q(t) - (d + \mu + \eta + \theta)I(t)) \\ & + \lambda_4(\eta I(t) - (d + \mu + \delta)Q(t)) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} Ha = & \int_0^T I + Au_1^2 + Bu_2^2 \\ & + \lambda_1(\psi - \gamma S(t)I(t) - (d + \mu)S(t) - u_1S - u_2S) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_2(\alpha - \beta H(t)I(t) + \theta I(t) - (d + \mu)H(t) + u_1S + u_2S) \\
& + \lambda_3(\gamma S(t)I(t) + \beta H(t)I(t) + \delta Q(t) - (d + \mu + \eta + \theta)I(t)) \\
& + \lambda_4(\eta I(t) - (d + \mu + \delta)Q(t)) \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Dengan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sebagai variabel-variabel *costate*.

Berdasarkan prinsip minimum pontryagin terdapat solusi optimal fungsi Hamiltonian akan dicapai jika memenuhi kondisi-kondisi berikut, yaitu:

4.2.1 Kondisi Stasioner

Kondisi stasioner merupakan suatu kondisi dimana kontrol optimal $u_1(t)$, $u_2(t)$ harus dapat meminimumkan fungsi Hamiltonian dalam setiap waktu. Jika fungsi Hamiltonian dapat diturunkan terhadap variabel kontrol $u_1(t)$, $u_2(t)$, maka harus memenuhi kondisi sebagai berikut

A. Kondisi stasioner u_1

$$\frac{\partial H_a}{\partial u_1} = 0 \leftrightarrow 2Au_1 - \lambda_1S + \lambda_2S = 0$$

Sehingga diperoleh

$$2Au_1 - \lambda_1S + \lambda_2S = 0$$

Dengan menggunakan sifat distributif, diperoleh

$$2Au_1 = (\lambda_2 - \lambda_1)S$$

Nilai u_1 diperoleh sebagai berikut

$$u_1 = \left(\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)S}{2A} \right)$$

Dengan demikian diperoleh solusi untuk u_1^* adalah

$$u_1^* = \min \left\{ \max \left(\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)S}{2A} \right) \right\} \tag{4.11}$$

B. Kondisi stasioner u_2

$$\frac{\partial Ha}{\partial u_2} = 0 \leftrightarrow 2Bu_2 - \lambda_1 S + \lambda_2 S = 0$$

Sehingga diperoleh

$$2Bu_2 - \lambda_1 S + \lambda_2 S = 0$$

Dengan menggunakan sifat distributif, diperoleh

$$2Bu_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)S$$

Nilai u_2 diperoleh sebagai berikut

$$u_2 = \left(\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)S}{2B} \right)$$

Dengan demikian diperoleh solusi untuk u_2^* adalah

$$u_2^* = \min \left\{ \max \left(\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)S}{2B} \right) \right\} \quad (4.12)$$

4.2.2 Persamaan State

Persamaan *state* adalah persamaan yang menjadi kendala dalam penyelesaian kontrol optimal. Berdasarkan persamaan (4.5), maka persamaan *state* yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut

Turunan fungsi Hamiltonian terhadap λ_1

$$\frac{dHa}{d\lambda_1} = \frac{dS}{dt} = \psi - \gamma S(t)I(t) - (d + \mu)S(t) - u_1 S - u_2 S \quad (4.13)$$

Turunan fungsi Hamiltonian terhadap λ_2

$$\frac{dHa}{d\lambda_2} = \frac{dH}{dt} = \alpha - \beta H(t)I(t) + \theta I(t) - (d + \mu)H(t) + u_1 S + u_2 S \quad (4.14)$$

Turunan fungsi Hamiltonian terhadap λ_3

$$\frac{dHa}{d\lambda_3} = \frac{dI}{dt} = \gamma S(t)I(t) + \beta H(t)I(t) + \delta Q(t) - (d + \mu + \eta +$$

$$\theta)I(t) \quad (4.15)$$

Turunan fungsi Hamiltonian terhadap λ_4

$$\frac{dHa}{d\lambda_4} = \frac{dQ}{dt} = \eta I(t) - (d + \mu + \delta)Q(t) \quad (4.16)$$

Sehingga persamaan *state* diperoleh sebagai berikut

$$\begin{cases} \frac{dHa}{d\lambda_1} = \psi - \gamma S(t)I(t) - (d + \mu)S(t) - u_1S - u_2S \\ \frac{dHa}{d\lambda_2} = \alpha - \beta H(t)I(t) + \theta I(t) - (d + \mu)H(t) + u_1S + u_2S \\ \frac{dHa}{d\lambda_3} = \gamma S(t)I(t) + \beta H(t)I(t) + \delta Q(t) - (d + \mu + \eta + \theta)I(t) \\ \frac{dHa}{d\lambda_4} = \eta I(t) - (d + \mu + \delta)Q(t) \end{cases} \quad (4.17)$$

dengan kondisi awal

$$S(0) = S_0, H(0) = H_0, I(0) = I_0, Q(0) = Q_0$$

4.2.3 Persamaan *Costate*

Persamaan *costate* merupakan nilai negatif dari fungsi Hamiltonian yang diturunkan terhadap variabel-variabel *state*, yaitu

Turunan λ_1 terhadap waktu

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{dHa}{dS} = -\lambda_1(-\gamma I - d - \mu - u_1 - u_2) - \lambda_2(u_1 + u_2) - \lambda_3(\gamma I) \quad (4.18)$$

Turunan λ_2 terhadap waktu

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{dHa}{dH} = -\lambda_2(-\beta I - d - \mu) - \lambda_3(\beta I) \quad (4.19)$$

Turunan λ_3 terhadap waktu

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -\frac{dHa}{dI} = -\lambda_1(-\gamma S) - \lambda_2(-\beta H + \theta) - \lambda_3(\gamma S - \beta H - d - \mu - \eta - \theta) - \lambda_4(\eta) + 1 \quad (4.20)$$

Turunan λ_4 terhadap waktu

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -\frac{dHa}{dQ} = -\lambda_3(\delta) - \lambda_4(-d - \mu - \delta) \quad (4.21)$$

Sehingga persamaan costate diperoleh sebagai berikut

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\lambda_1}{dt} = -\lambda_1(-\gamma I - d - \mu - u_1 - u_2) - \lambda_2(u_1 + u_2) \\ \quad - \lambda_3(\gamma I) \\ \frac{d\lambda_2}{dt} = -\lambda_2(-\beta I - d - \mu) - \lambda_3(\beta I) \\ \frac{d\lambda_3}{dt} = -\lambda_1(-\gamma S) - \lambda_2(-\beta H + \theta) - \lambda_3(\gamma S - \beta H - d - \\ \quad \mu - \eta - \theta) - \lambda_4(\eta) + 1 \\ \frac{d\lambda_4}{dt} = -\lambda_3(\delta) - \lambda_4(-d - \mu - \delta) \end{array} \right. \quad (4.22)$$

dengan kondisi transversal yaitu

$$\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = \lambda_4(T) = 0$$

Langkah selanjutnya adalah mensubstitusikan nilai kontrol optimal u^* ke dalam sistem persamaan state (4.17) dan persamaan *costate* (4.22) diperoleh sistem yang optimal sebagai berikut

- **Persamaan State**

Turunan fungsi Hamiltonian terhadap λ_1

$$\frac{dHa}{d\lambda_1^*} = \frac{dS^*}{dt} = \psi - \gamma S^*(t)I^*(t) - (d + \mu)S^*(t) - u_1 S^* - u_2 S^* \quad (4.23)$$

Turunan fungsi Hamiltonian terhadap λ_2

$$\frac{dHa}{d\lambda_2^*} = \frac{dH^*}{dt} = \alpha - \beta H^*(t)I^*(t) + \theta I^*(t) - (d + \mu)H^*(t) + u_1 S^* + u_2 S^* \quad (4.24)$$

Turunan fungsi Hamiltonian terhadap λ_3

$$\frac{dHa}{d\lambda_3^*} = \frac{dI^*}{dt} = \gamma S^*(t)I^*(t) + \beta H^*(t)I^*(t) + \delta Q^*(t) - (d + \mu + \eta + \theta)I^*(t) \quad (4.25)$$

Turunan fungsi Hamiltonian terhadap λ_4

$$\frac{dHa}{d\lambda_4^*} = \frac{dQ^*}{dt} = \eta I^*(t) - (d + \mu + \delta)Q^*(t) \quad (4.26)$$

Sehingga persamaan *state* dengan nilai kontrol optimal u^* diperoleh sebagai berikut

$$\begin{cases} \frac{dHa}{d\lambda_1^*} = \psi - \gamma S^*(t)I^*(t) - (d + \mu)S^*(t) - u_1 S^* - u_2 S^* \\ \frac{dHa}{d\lambda_2^*} = \alpha - \beta H^*(t)I^*(t) + \theta I^*(t) - (d + \mu)H^*(t) + u_1 S^* + u_2 S^* \\ \frac{dHa}{d\lambda_3^*} = \gamma S^*(t)I^*(t) + \beta H^*(t)I^*(t) + \delta Q^*(t) - (d + \mu + \eta + \theta)I^*(t) \\ \frac{dHa}{d\lambda_4^*} = \eta I^*(t) - (d + \mu + \delta)Q^*(t) \end{cases} \quad (4.27)$$

● Persamaan *Costate*

Turunan λ_1^* terhadap waktu

$$\frac{d\lambda_1^*}{dt} = -\frac{dHa}{dS^*} = -\lambda_1^* (-\gamma I^* - d - \mu - u_1 - u_2) - \lambda_2^* (u_1 + u_2) - \lambda_3^* (\gamma I^*) \quad (4.28)$$

Turunan λ_2^* terhadap waktu

$$\frac{d\lambda_2^*}{dt} = -\frac{dHa}{dH^*} = -\lambda_2^* (-\beta I^* - d - \mu) - \lambda_3^* (\beta I^*) \quad (4.29)$$

Turunan λ_3^* terhadap waktu

$$\frac{d\lambda_3^*}{dt} = -\frac{dHa}{dI^*} = -\lambda_1^*(-\gamma S^*) - \lambda_2^*(-\beta H^* + \theta) - \lambda_3^*(\gamma S^* - \beta H^* - d - \mu - \eta - \theta) - \lambda_4^*(\eta) + 1 \quad (4.30)$$

Turunan λ_4^* terhadap waktu

$$\frac{d\lambda_4^*}{dt} = -\frac{dHa}{dQ^*} = -\lambda_3^*(\delta) - \lambda_4^*(-d - \mu - \delta) \quad (4.31)$$

Sehingga persamaan *costate* dengan nilai kontrol optimal u^* diperoleh sebagai berikut

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1^*}{dt} = -\lambda_1^*(-\gamma I^* - d - \mu - u_1 - u_2) - \lambda_2^*(u_1 + u_2) - \lambda_3^*(\gamma I^*) \\ \frac{d\lambda_2^*}{dt} = -\lambda_2^*(-\beta I^* - d - \mu) - \lambda_3^*(\beta I^*) \\ \frac{d\lambda_3^*}{dt} = -\lambda_1^*(-\gamma S^*) - \lambda_2^*(-\beta H^* + \theta) - \lambda_3^*(\gamma S^* - \beta H^* - d - \mu - \eta - \theta) - \lambda_4^*(\eta) + 1 \\ \frac{d\lambda_4^*}{dt} = -\lambda_3^*(\delta) - \lambda_4^*(-d - \mu - \delta) \end{cases} \quad (4.32)$$

Dengan kondisi batas berikut

$$\begin{aligned} S(0) = S_0, H(0) = H_0, I(0) = I_0, Q(0) = Q_0 \\ \lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = \lambda_4(T) = 0 \end{aligned}$$

4.3 Simulasi Numerik

Metode yang digunakan dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal pada penelitian ini adalah metode sweep maju mundur. Pada langkah ini dilakukan dikritisasi interval $[0, T]$ di titik-titik $t_1 = t_0 + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$), dengan h

merupakan ukuran langkah waktu sehingga $t_n = T$. Adapun variabel-variabel yang digunakan adalah $u_1, u_2, S, H, I, Q, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dan λ_4 dan dinyatakan dalam bentuk titik-titik sebagai berikut $u_1(i), u_2(i), S(i), H(i), I(i), Q(i), \lambda_1(i), \lambda_2(i), \lambda_3(i)$, dan $\lambda_4(i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Kemudian variabel-variabel *state* S, H, I , dan Q didekati dengan metode Runge Kutta orde 4 langkah maju, dengan nilai awal $S(0) = S_0, H(0) = H_0, I(0) = I_0, Q(0) = Q_0$, sedangkan variabel-variabel *costate* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dan λ_4 didekati dengan metode Runge Kutta orde 4 langkah(n) mundur, dengan nilai awal $\lambda_1(n) = 0, \lambda_2(n) = 0, \lambda_3(n) = 0$, dan $\lambda_4(n) = 0$. Selanjutnya, berikut adalah langkah-langkah algoritma *sweep* maju mundur sebagai berikut.

Langkah 1

Tentukan nilai awal untuk nilai-nilai berikut. $S(0), H(0), I(0), Q(0), \lambda_1(n), \lambda_2(n), \lambda_3(n), \lambda_4(n)$, dan error toleransi.

Langkah 2

Untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$ buat tebakan awal $u_1(t)$ dan $u_2(t)$.

Langkah 3

Untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, hitung nilai $S(i + 1), H(i + 1), I(i + 1), Q(i + 1)$ dengan nilai awal pada langkah 1 menggunakan Runge Kutta orde 4 langkah maju.

Langkah 4

Untuk $k = n, (n - 1), \dots, 1$, hitung nilai-nilai $\lambda_1 (k-1)$, $\lambda_2 (k-1)$, $\lambda_3 (k-1)$, $\lambda_4 (k-1)$ dengan kondisi transversal menggunakan Runge Kutta orde 4 langkah mundur.

Langkah 5

Untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$ hitung nilai kontrol

$$u_1(i) = \min \left\{ \max \left(\frac{(\lambda_2(i) - \lambda_1(i))S(i)}{2A} \right) \right\}$$

Dan

$$u_2(i) = \min \left\{ \max \left(\frac{(\lambda_2(i) - \lambda_1(i))S(i)}{2B} \right) \right\}$$

Langkah 6

Hitung nilai error dari variabel-variabel $u_1, u_2, S, H, I, Q, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dan λ_4 berdasarkan nilai iterasi pada saat ini dan nilai iterasi sebelumnya. Jika nilai error lebih besar dari toleransi maka kembali ke langkah 3.

Langkah 7

Cetak

$$S^* = S,$$

$$H^* = H,$$

$$I^* = I,$$

$$Q^* = Q,$$

$$u_1^* = u_1,$$

$$u_2^* = u_2$$

Terdapat dua kontrol yang digunakan yaitu u_1 dan u_2 yang

menyatakan vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh digunakan untuk mempresentasikan model penyebaran Covid-19 dengan menggunakan nilai awal dan parameter yang digunakan sebagai berikut.

Tabel 4.3 Nilai Awal yang digunakan dalam Simulasi Numerik

Populasi Awal	Nilai Awal
S_0	100
H_0	20
I_0	43
Q_0	1

Tabel 4.4 Parameter yang akan digunakan (Abdullah, 2020).

Parameter	Nilai
ψ	0.125
α	0.535
d	0.002
β	0.0056
γ	0.0125
μ	0.08
θ	0.35
η	0.025
δ	0.29

Akan ditunjukkan pengaruh kontrol pada penyebaran Covid-19 berdasarkan nilai awal pada tabel 4.2 dan parameter pada tabel 4.3 pada simulasi I. Pada simulasi I menggunakan waktu awal yaitu $t=0$ dan waktu akhir $t=80$ serta menggunakan bobot $u_1=0.5$ dan $u_2=1.5$. Uraian berikut ini merupakan beberapa kasus hasil simulasi numerik model

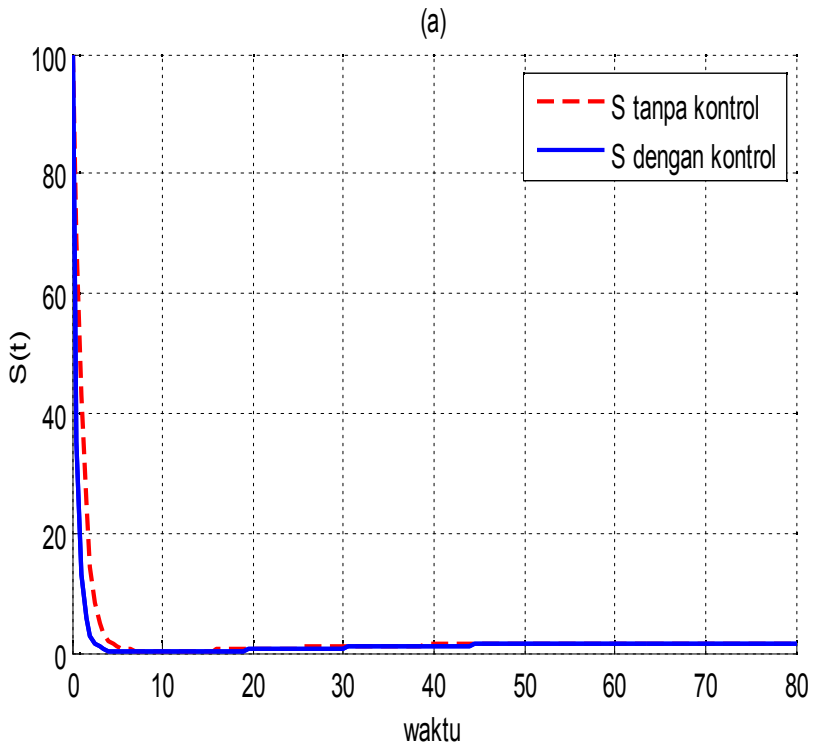
penyebaran Covid-19 .

4.4.1 Hasil Simulasi Penyebaran Covid-19 Setelah dikontrol Menggunakan Vaksinasi dan Suplemen Daya Tahan Tubuh

Dalam mengendalikan suatu penyebaran virus penyakit akan dilakukan upaya kontrol dengan perepresentasian simulasi model. Simulasi model akan ditunjukkan pada software MATLAB2013a dengan menggunakan metode *sweep* maju mundur. Pada skripsi ini akan disimulasikan perubahan jumlah subpopulasi model penyebaran virus Covid-19 dimana sebelum dan setelah adanya penambahan kontrol vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh sebagai berikut.

A. Simulasi I

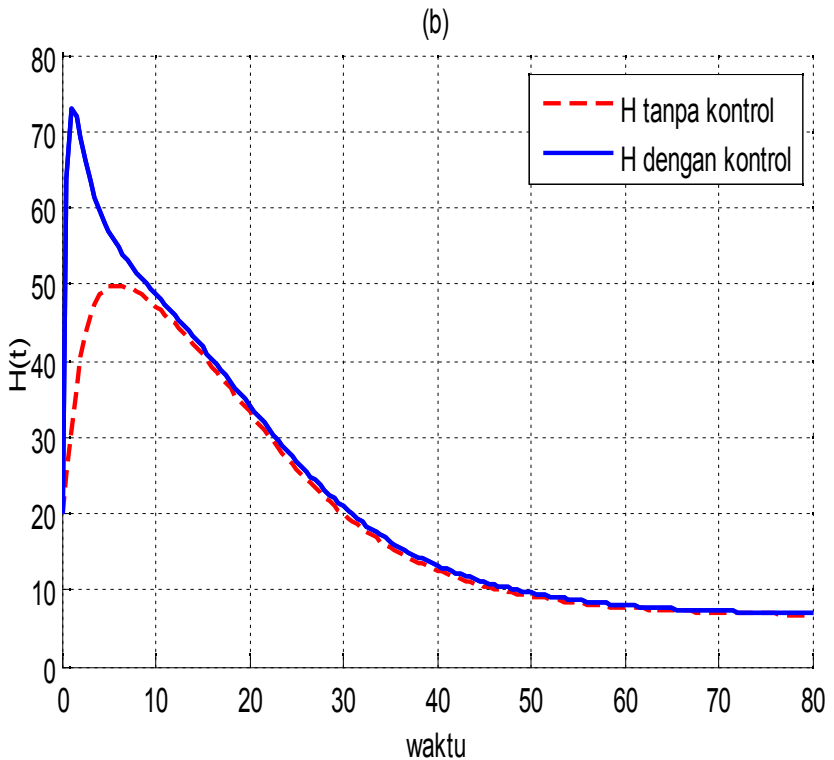
Pada gambar 4.3 menggunakan parameter $\psi = 0.125$, $\gamma = 0.125$, $d = 0.002$, dan $\mu = 0.08$ dengan bobot $u_1 = 0.5$ dan $u_2 = 1.5$ pada subpopulasi *Susceptible* diperoleh simulasi numerik sebagai berikut



Gambar 4.3 Simulasi Subpopulasi *Susceptible* Tanpa dan dengan Penambahan Kontrol u_1 dan u_2

Gambar 4.3 menunjukkan bahwa subpopulasi *Susceptible* setelah diberikan kontrol vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh mengalami penurunan dimana dari $t=0$ sampai $t=4.5$. Kemudian secara berangsur-angsur dari $t=4.5$ tersebut menuju suatu titik tertentu sampai $t=80$. Penambahan kontrol vaksinasi dapat berguna untuk mengurangi penyebaran Covid-19 serta

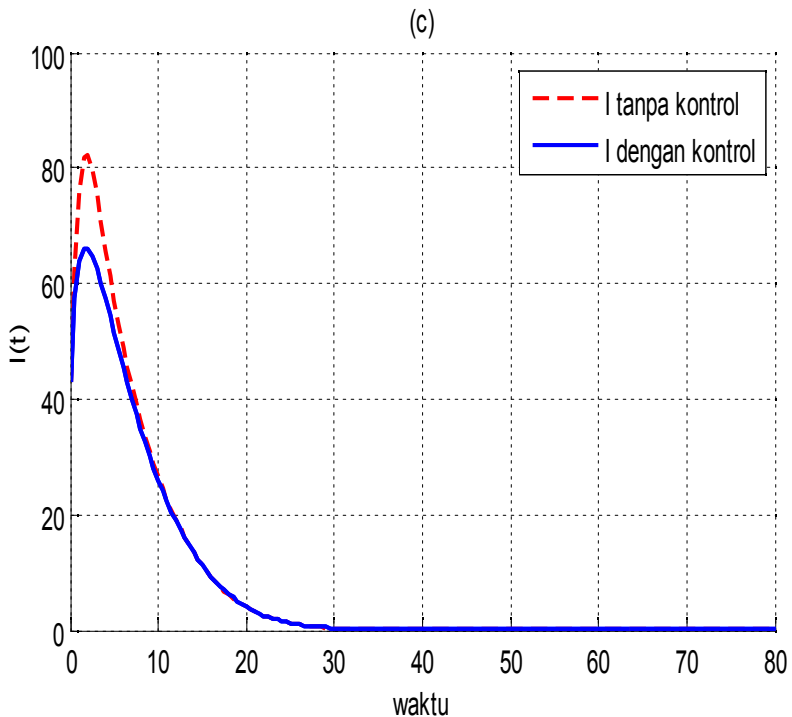
mengantisipasi terkena gejala akibat Covid-19. Dengan adanya kontrol vaksinasi ini mampu menurunkan presentase subpopulasi *Susceptible*. Begitu pula dengan kontrol penambahan suplemen daya tahan tubuh yaitu berupa vitamin C, probiotik, vitamin B kompleks, multivitamin, dan mineral mampu menurunkan penyebaran Covid-19 pada subpopulasi *Susceptible*.



Gambar 4.4 Simulasi Subpopulasi sehat (*Healthy*) Tanpa dan dengan Penambahan Kontrol u_1 dan u_2

Pada gambar 4.4 menggunakan parameter $\alpha = 0.535$, $\beta = 0.056$, $\theta = 0.35$, $d = 0.002$, dan $\mu = 0.08$ dengan bobot $u_1 = 0.5$ dan $u_2 = 1.5$ pada subpopulasi sehat diperoleh simulasi numerik pada gambar 4.4. Gambar 4.4 menunjukkan bahwa subpopulasi sehat (*Healthy*) setelah diberikan kontrol vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh mengalami pertumbuhan jumlah populasi secara signifikan dari $t = 0$ sampai $t = 2$. Kemudian dari $t = 2$ turun secara berangsur-angsur hingga $t = 80$ tetapi masih mengalami peningkatan dari model tanpa kontrol. Penambahan kontrol vaksinasi dapat berguna untuk mengurangi penyebaran Covid-19 serta mengantisipasi terkena gejala akibat Covid-19. Dengan adanya kontrol vaksinasi ini mampu menambah jumlah subpopulasi sehat. Begitu pula dengan kontrol penambahan suplemen daya tahan tubuh yaitu berupa vitamin C, probiotik, vitamin B kompleks, multivitamin, dan mineral mampu menyebabkan bertambahnya jumlah subpopulasi sehat pada penyebaran Covid-19.

Pada gambar 4.5 menggunakan parameter $\gamma = 0.125$, $\beta = 0.056$, $\delta = 0.29$, $d = 0.002$, $\mu = 0.08$, $\eta = 0.025$, dan $\theta = 0.35$ dengan bobot $u_1 = 0.5$ dan $u_2 = 1.5$ pada subpopulasi terinfeksi sehingga diperoleh simulasi numerik sebagai berikut

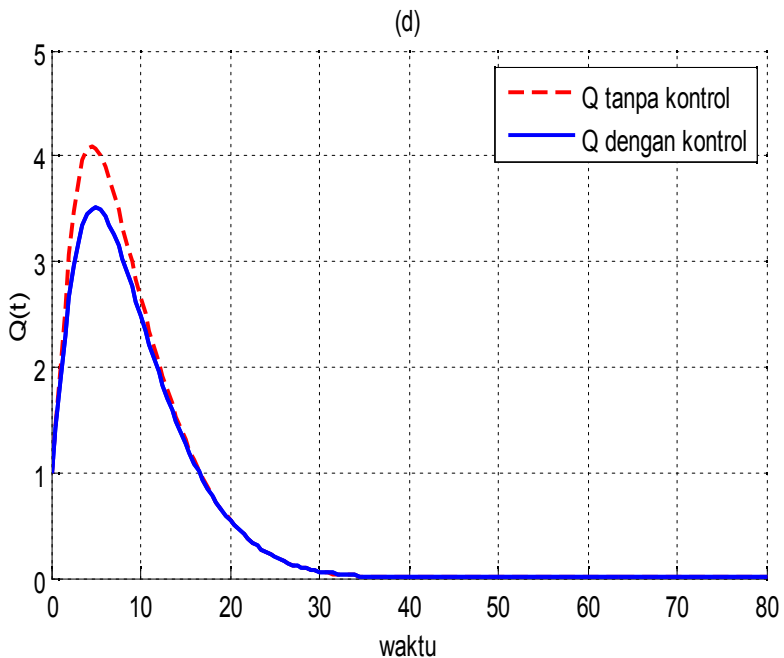


Gambar 4.5 Simulasi Subpopulasi Terinfeksi (*Infected*)

Tanpa dan dengan Penambahan Kontrol u_1 dan u_2

Gambar 4.5 menunjukkan bahwa subpopulasi terinfeksi setelah diberikan kontrol vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh mengalami kenaikan populasi secara signifikan dari $t = 0$ sampai $t = 2$. Kemudian dari $t = 2$ sampai $t = 30$ hingga stabil pada $t = 80$ juga masih mengalami penurunan dari model tanpa kontrol. Penambahan kontrol vaksinasi dapat berguna untuk

mengurangi penyebaran Covid-19 serta mengantisipasi terkena gejala akibat Covid-19. Dengan adanya kontrol vaksinasi ini mampu menurunkan jumlah subpopulasi yang terinfeksi Covid-19. Begitu pula dengan kontrol penambahan suplemen daya tahan tubuh yaitu berupa vitamin C, probiotik, vitamin B kompleks, multivitamin, dan mineral mampu menyebabkan menurunnya jumlah subpopulasi yang terinfeksi penyakit Covid-19.

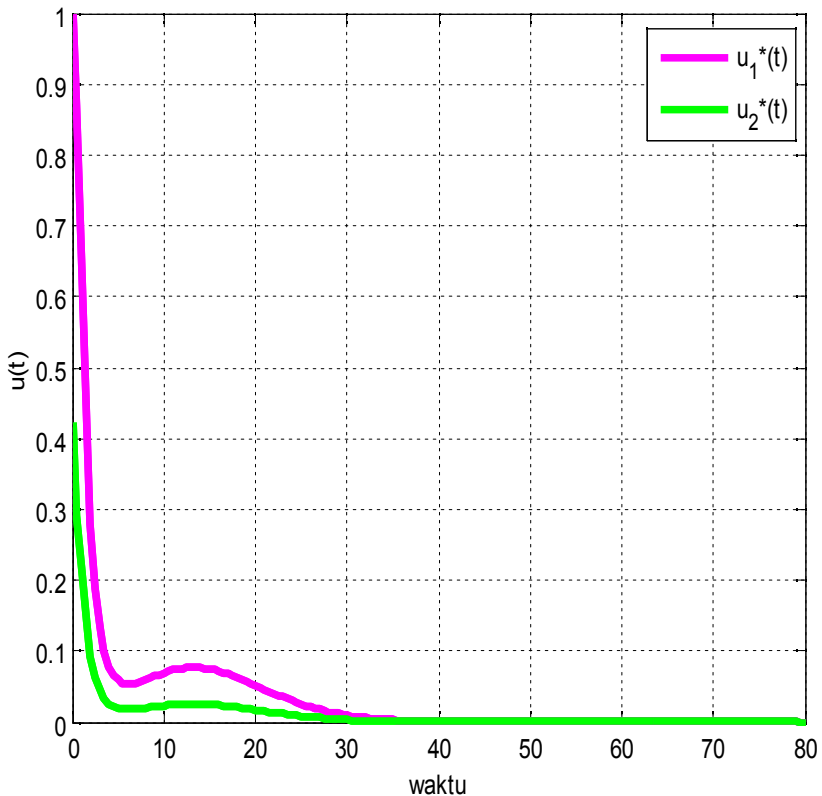


Gambar 4.6 Simulasi Subpopulasi yang di karantina (*Quarantine*) Tanpa dan dengan Penambahan Pontrol u_1 dan

u_2

Pada gambar 4.6 menggunakan parameter $\eta=0.025$, $\gamma=0.125$, $d=0.002$, $\mu=0.08$, dan $\delta = 0.29$ dengan bobot $u_1=0.5$ dan $u_2 = 1.5$. Gambar 4.6 menunjukkan bahwa subpopulasi *Quarantine* setelah diberikan kontrol vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh mengalami penurunan populasi secara signifikan dari sebelum dikontrol. Subpopulasi *Quarantine* mengalami kenaikan dari $t = 0$ sampai $t = 5$. Kemudian dari $t = 5$ sampai $t = 35$ hingga menuju suatu titik tertentu pada $t = 80$ juga masih mengalami penurunan dari model tanpa kontrol. Penambahan kontrol vaksinasi dapat berguna untuk mengurangi penyebaran Covid-19 serta mengantisipasi terkena gejala akibat Covid-19. Dengan adanya kontrol vaksinasi ini mampu menambah jumlah presentase subpopulasi yang di karantina akibat dicurigai terkena penyakit Covid-19. Begitu pula dengan kontrol penambahan suplemen daya tahan tubuh yaitu berupa vitamin C, probiotik, vitamin B kompleks, multivitamin, dan mineral mampu menyebabkan berkurangnya jumlah subpopulasi yang di karantina akibat dicurigai terkena penyakit Covid-19.

Berikut adalah gambar simulasi kontrol optimal u_1^* dan u_2^* pada model penyebaran virus Covid-19 SHIQ dengan pemberian vaksinasi dan suplemen daya tahan tubuh.

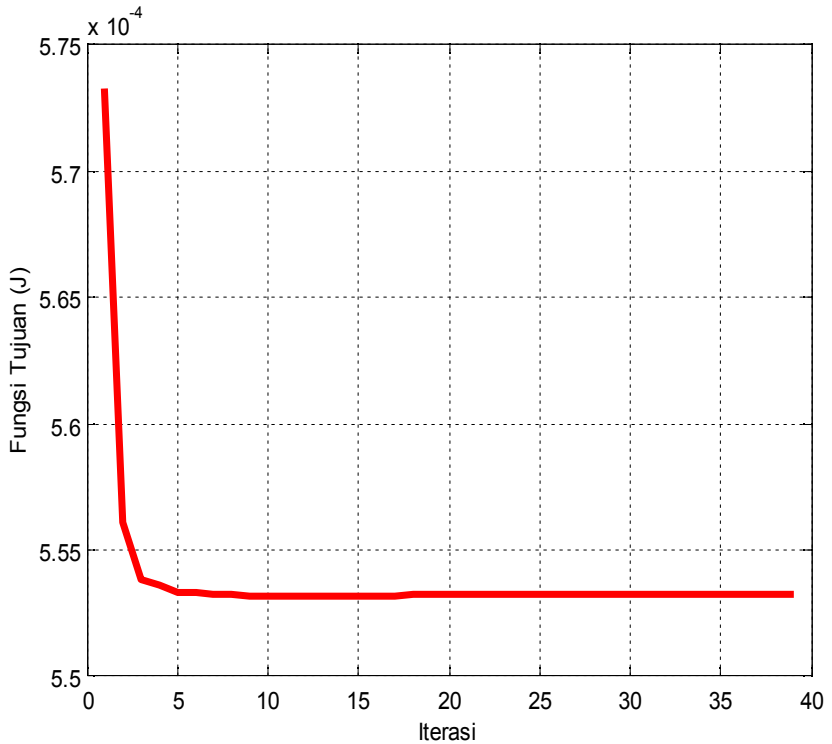


Gambar 4.7 Kontrol u_1^* dan u_2^* pada Simulasi Numerik Model Penyebaran Virus Covid-19

Gambar 4.7 menunjukkan simulasi numerik dari model penyebaran virus Covid-19 dengan adanya kontrol u_1^* dan u_2^* . Pemberian kontrol vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh yang akan ditunjukkan pada gambar 4.7 pada tingkat maksimum yaitu 1. Pada awal periode kontrol u_1

diberikan sebesar 1. Selanjutnya menurun secara berangsur-angsur hingga menuju ke 0.05 pada sekitar $t = 5$ kemudian mengalami kenaikan yang cukup signifikan pada $t = 15$. Setelah itu turun kembali pada $t = 35$ yang berangsur-angsur hingga mencapai angka nol pada periode $t = 80$. Sementara itu, pemberian kontrol u_2 pada awal periode diberikan sebesar 0.4. Selanjutnya menurun secara berangsur-angsur hingga menuju ke 0.018 pada sekitar $t = 4$ kemudian mengalami kenaikan yang cukup signifikan pada $t = 15$. Setelah itu turun kembali pada $t = 30$ yang berangsur-angsur hingga mencapai angka nol pada periode $t = 80$. Karena kontrol sudah mencapai angka nol hingga $t = 80$, maka pemberian kontrol vaksinasi (u_1) dan penambahan suplemen daya tahan tubuh (u_2) dihentikan.

Simulasi numerik selanjutnya yaitu profil yang menunjukkan fungsi tujuan (J) pada model penyebaran Covid-19 dengan pemberian kontrol u_1 (vaksinasi) dan u_2 (penambahan suplemen daya tahan tubuh). Dengan adanya kombinasi kontrol kontrol u_1 (vaksinasi) dan u_2 (penambahan suplemen daya tahan tubuh) dalam pengendalian penyebaran virus Covid-19 diperoleh hasil optimal fungsi tujuan (J) dengan nilai 5.5321 pada akhir simulasi.



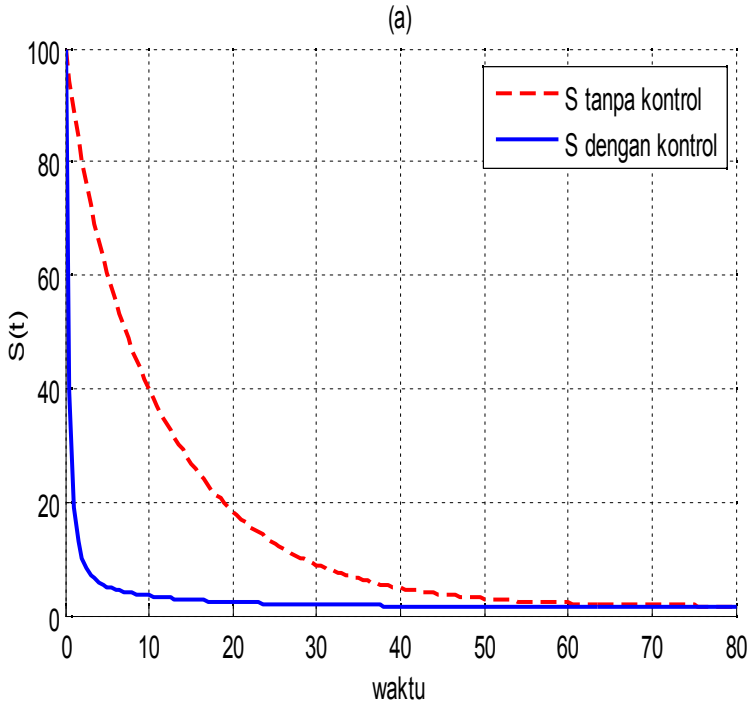
Gambar 4.8 Fungsi Tujuan (J) Penyebaran Virus Covid-19 dengan Penambahan Kontrol u_1 dan u_2

B. Simulasi II

Akan ditunjukkan pengaruh kontrol pada penyebaran Covid-19 berdasarkan nilai awal pada tabel 4.2 dan parameter pada tabel 4.3 pada simulasi II. Pada simulasi II menggunakan waktu awal yaitu $t = 0$ dan waktu akhir $t = 80$ serta menggunakan bobot $u_1 = 1$ dan $u_2 = 5$ serta perubahan pada parameter $\beta = 0.000234$ dan $\gamma = 0.001$. Uraian berikut

ini merupakan beberapa kasus hasil simulasi numerik penyebaran Covid-19 dengan kontrol terhadap subpopulasi SHIQ.

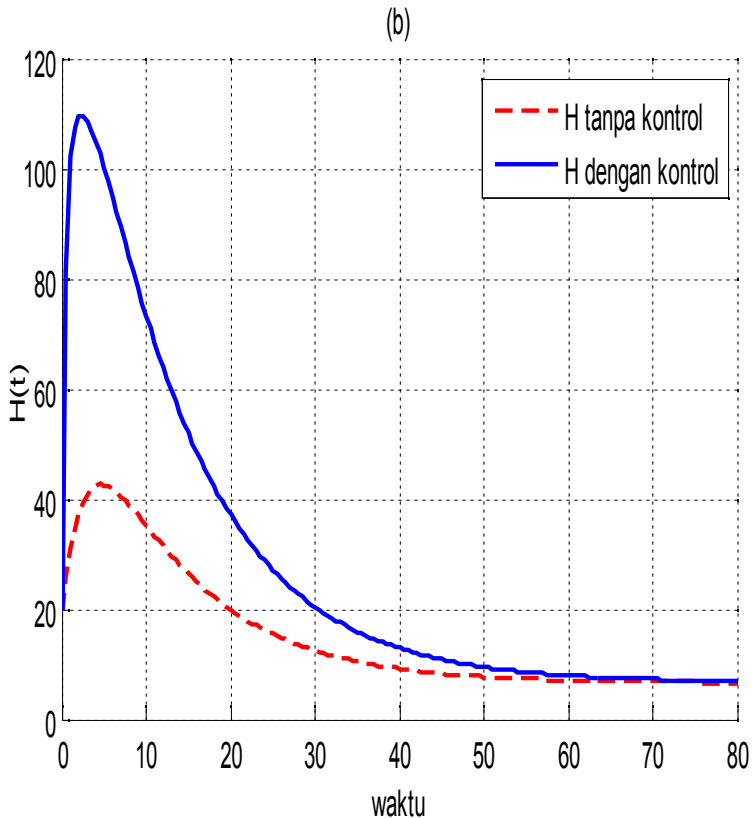
Pada gambar 4.9 menggunakan parameter $\psi=0.125$, $\gamma=0.001$, $d=0.002$, dan $\mu=0.08$ dengan bobot $u_1=1$ dan $u_2=5$ pada subpopulasi *Susceptible* diperoleh simulasi numerik sebagai berikut



Gambar 4.9 Simulasi Subpopulasi *Susceptible* Tanpa dan dengan Penambahan Kontrol u_1 dan u_2

Gambar 4.9 menunjukkan bahwa subpopulasi *Susceptible* setelah diberikan kontrol vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh mengalami penurunan dimana dari $t = 0$ sampai $t = 25$. Kemudian secara berangsur-angsur dari $t = 25$ tersebut menuju ke suatu titik tertentu sampai $t = 80$. Penambahan kontrol vaksinasi dapat berguna untuk mengurangi penyebaran Covid-19 serta mengantisipasi terkena gejala akibat Covid-19. Dengan adanya kontrol vaksinasi ini mampu menurunkan presentase subpopulasi *Susceptible*. Begitu pula dengan kontrol penambahan suplemen daya tahan tubuh yaitu berupa vitamin C, probiotik, vitamin B kompleks, multivitamin, dan mineral mampu menurunkan penyebaran Covid-19 pada subpopulasi *Susceptible*.

Pada gambar 4.10 menggunakan parameter $\alpha = 0.535$, $\beta = 0.000234$, $\theta = 0.35$, $d = 0.002$, dan $\mu = 0.08$ dengan bobot $u_1 = 1$ dan $u_2 = 5$ pada subpopulasi sehat diperoleh simulasi numerik sebagai berikut.

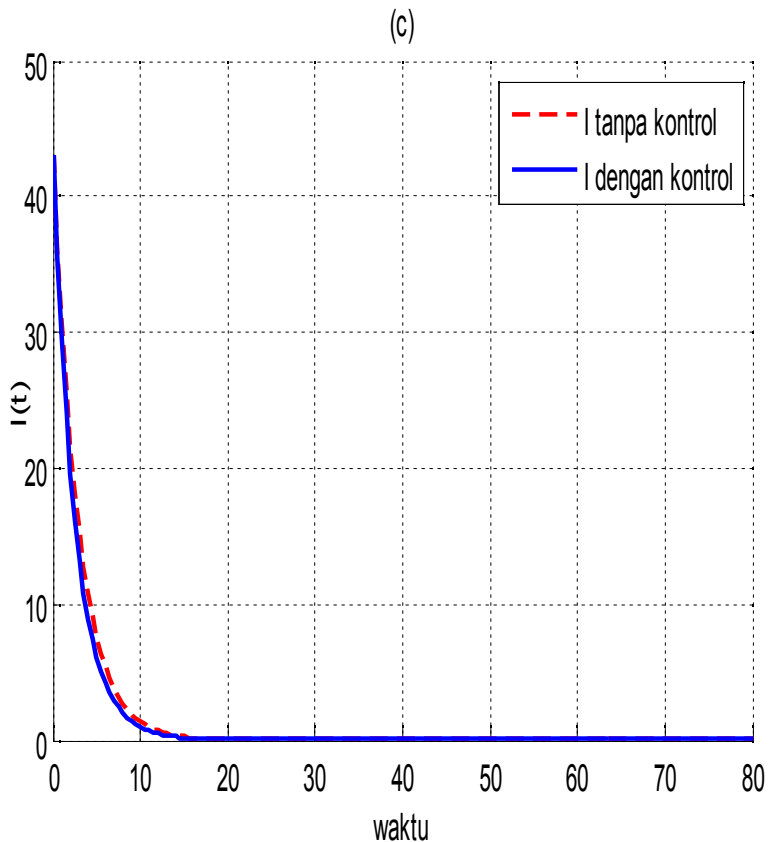


Gambar 4.10 Simulasi Subpopulasi Sehat (*Healthy*) Tanpa dan dengan Penambahan Kontrol u_1 dan u_2

Gambar 4.10 menunjukkan bahwa subpopulasi sehat (*Healthy*) setelah diberikan kontrol berupa vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh mengalami pertumbuhan jumlah populasi secara signifikan dari $t = 0$ sampai $t = 3$. Kemudian dari $t = 2$ turun secara berangsur-

angsur hingga $t = 65$ dan menuju suatu titik tertentu pada $t = 80$ tetapi masih mengalami peningkatan dari model tanpa kontrol. Penambahan kontrol vaksinasi dapat berguna untuk mengurangi penyebaran Covid-19 serta mengantisipasi terkena gejala akibat Covid-19. Dengan adanya kontrol vaksinasi ini mampu menambah jumlah subpopulasi sehat. Begitu pula dengan kontrol penambahan suplemen daya tahan tubuh yaitu berupa vitamin C, probiotik, vitamin B kompleks, multivitamin, dan mineral mampu menyebabkan bertambahnya jumlah subpopulasi sehat pada penyebaran Covid-19.

Pada gambar 4.11 menggunakan parameter $\gamma=0.001$, $\beta = 0.000234$, $\delta = 0.29$, $d=0.002$, $\mu=0.08$, $\eta=0.025$, dan $\theta = 0.35$ dengan bobot $u_1 = 1$ dan $u_2 = 5$ pada subpopulasi terinfeksi sehingga diperoleh simulasi numerik sebagai berikut



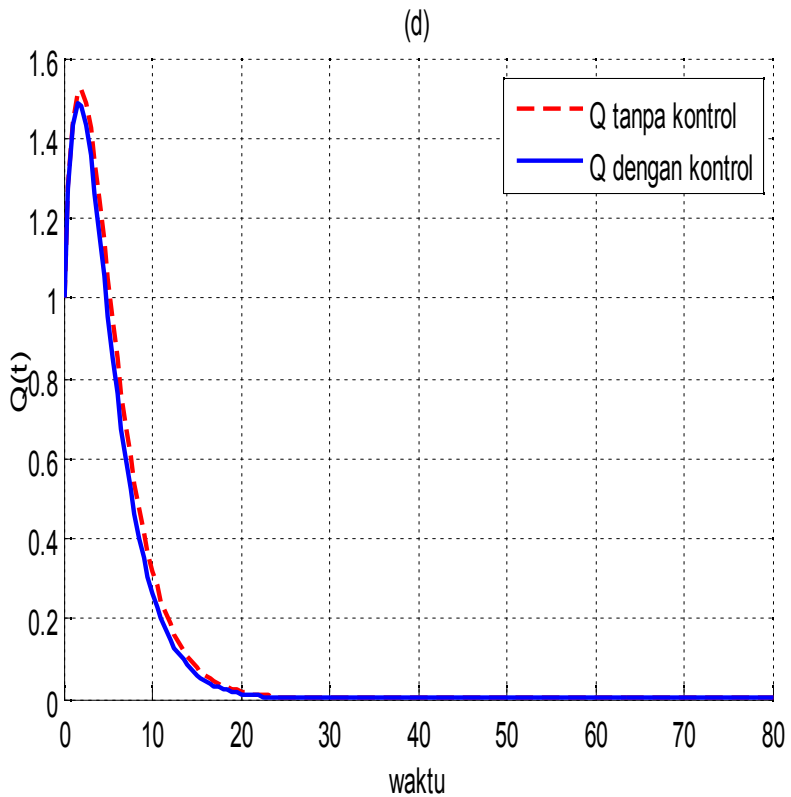
Gambar 4.11 Simulasi Subpopulasi Terinfeksi (*Infected*)

Tanpa dan dengan Penambahan Kontrol u_1 dan u_2

Gambar 4.11 menunjukkan bahwa subpopulasi terinfeksi setelah diberikan kontrol berupa vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh mengalami kenaikan populasi secara signifikan dari $t = 0$ sampai $t = 18$. Kemudian dari $t = 18$ menuju suatu titik tertentu sampai

$t = 80$ juga masih mengalami penurunan dari model tanpa kontrol. Penambahan kontrol vaksinasi dapat berguna untuk mengurangi penyebaran Covid-19 serta mengantisipasi terkena gejala akibat Covid-19. Dengan adanya kontrol vaksinasi ini mampu menurunkan jumlah subpopulasi yang terinfeksi Covid-19. Begitu pula dengan kontrol penambahan suplemen daya tahan tubuh yaitu berupa vitamin C, probiotik, vitamin B kompleks, multivitamin, dan mineral mampu menyebabkan menurunnya jumlah subpopulasi yang terinfeksi penyakit Covid-19.

Pada gambar 4.12 menggunakan parameter $\eta=0.025$, $\gamma=0.001$, $d=0.002$, $\mu=0.08$, dan $\delta = 0.29$ dengan bobot $u_1=1$ dan $u_2 = 5$ pada subpopulasi *Quarantine* diperoleh simulasi numerik pada gambar sebagai berikut.

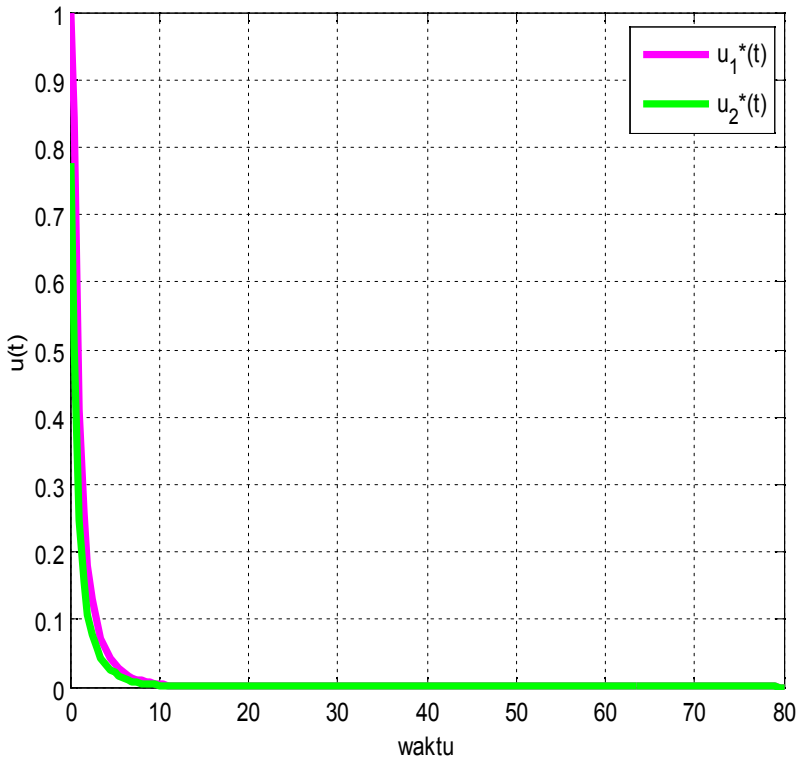


Gambar 4.12 Simulasi Subpopulasi yang di karantina (*Quarantine*) Tanpa dan dengan Penambahan Kontrol u_1 dan u_2

Gambar 4.12 menunjukkan bahwa subpopulasi *Quarantine* setelah diberikan kontrol vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh mengalami penurunan populasi secara signifikan dari sebelum dikontrol. Subpopulasi yang di karantina (*Quarantine*) mengalami

kenaikan dari $t = 0$ sampai $t = 1$. Kemudian dari $t = 1$ sampai $t = 24$ hingga menuju suatu titik tertentu pada $t = 80$ juga masih mengalami penurunan dari model tanpa kontrol. Penambahan kontrol vaksinasi dapat berguna untuk mengurangi penyebaran Covid-19 serta mengantisipasi terkena gejala akibat Covid-19. Dengan adanya kontrol vaksinasi ini mampu menambah jumlah presentase subpopulasi yang di karantina akibat dicurigai terkena penyakit Covid-19. Begitu pula dengan kontrol penambahan suplemen daya tahan tubuh yaitu berupa vitamin C, probiotik, vitamin B kompleks, multivitamin, dan mineral mampu menyebabkan berkurangnya jumlah subpopulasi yang di karantina akibat dicurigai terkena penyakit Covid-19.

Berikut adalah gambar simulasi kontrol optimal u_1^* dan u_2^* pada model penyebaran virus Covid-19 SHIQ dengan pemberian vaksinasi dan suplemen daya tahan tubuh.

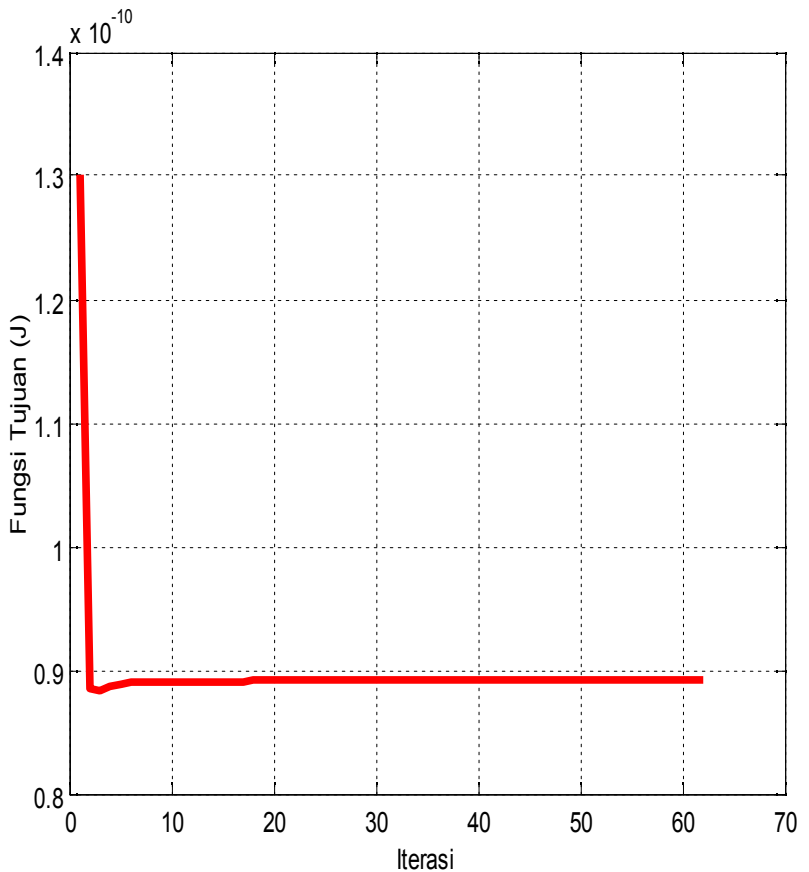


Gambar 4.13 Simulasi Numerik dari Model Penyebaran Virus Covid-19 dengan Adanya Kontrol u_1^* dan u_2^* .

Pemberian kontrol vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh yang akan ditunjukkan pada gambar 4.13 pada tingkat maksimum yaitu 1. Pada awal periode kontrol u_1 diberikan sebesar 1. Selanjutnya menurun secara berangsur-angsur hingga menuju ke 0.02 pada sekitar $t = 13$ kemudian secara berangsur-angsur hingga mencapai angka nol pada

periode $t = 80$. Sementara itu, pemberian kontrol u_2 pada awal periode diberikan sebesar 0.79. Selanjutnya menurun secara berangsur-angsur hingga menuju ke 0 pada sekitar $t = 9$ kemudian secara berangsur-angsur hingga mencapai angka nol pada periode $t = 80$. Karena kontrol sudah mencapai angka nol hingga $t = 80$, maka pemberian kontrol vaksinasi (u_1) dan penambahan suplemen daya tahan tubuh (u_2) dihentikan.

Simulasi numerik selanjutnya yaitu profil yang menunjukkan fungsi tujuan (J) pada model penyebaran Covid-19 dengan pemberian kontrol u_1 (vaksinasi) dan u_2 (penambahan suplemen daya tahan tubuh). Dengan adanya kombinasi kontrol kontrol u_1 (vaksinasi) dan u_2 (penambahan suplemen daya tahan tubuh) dalam pengendalian penyebaran virus Covid-19 diperoleh hasil optimal fungsi tujuan (J) dengan nilai 0.895 pada akhir simulasi.



Gambar 4.14 Fungsi tujuan (J) Penyebaran Virus Covid-19 dengan Penambahan Kontrol u_1 dan u_2

Kontrol u_1 dan u_2 yang telah diberikan memberikan dampak pada perubahan jumlah subpopulasi model penyebaran virus Covid-19. Subpopulasi rentan, terinfeksi, di karantina mengalami penurunan jumlah subpopulasi yang

cukup signifikan dibandingkan sebelum diberikan kontrol u_1 dan u_2 . Hasil simulasi numerik pada MATLAB2013a ini menunjukkan bahwa kontrol vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh efektif untuk mengendalikan penyebaran penyakit Covid-19.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.2 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada skripsi ini, dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Telah dibentuk masalah kontrol optimal dengan fungsi tujuan yang meminimumkan jumlah subpopulasi yang *Susceptible*, subpopulasi terinfeksi, dan subpopulasi yang di karantina akibat penyakit Covid-19 pada model SHIQ dengan pemberian kontrol vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh.
2. Kontrol optimal diselesaikan dengan membentuk fungsi Hamiltonian untuk mendapatkan sistem yang optimal yang memenuhi persamaan *state*, *costate*, dan kondisi stasioner sesuai dengan Prinsip Minimum Pontryagin.
3. Hasil simulasi numerik menunjukkan terdapat perbedaan yang signifikan dari masing-masing pemberian bobot u_1 (kontrol vaksinasi) dan u_2 (kontrol penambahan suplemen daya tahan tubuh). Dengan menggunakan kontrol vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh efektif dalam mengendalikan penyebaran penyakit Covid-19.

5.2 Saran

Pada skripsi ini hanya dikaji masalah kontrol optimal

menggunakan dua kontrol yaitu vaksinasi dan penambahan suplemen daya tahan tubuh. Untuk penelitian selanjutnya, disarankan penambahan tindakan kontrol agar didapatkan hasil yang lebih efektif seperti adanya edukasi kepada masyarakat tentang pencegahan penularan virus Covid-19.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdullah, Ahmad, S., Owyed, S., Abdel-Aty, A. H., Mahmoud, E. E., Shah, K., & Alrabaiah, H. (2021). Mathematical analysis of COVID-19 via new mathematical model. *Chaos, Solitons and Fractals*, 143(April 2020), 110585. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110585>
- Nailan Ni'mah Nasution, L. P. S. (2021). Analisis Sensitivitas Dan Kontrol Optimal Model Seir Penyebaran Covid-19. *Karismatika*, 7(3), 25–40.
- Norasia, Y., Zulaikha, Z., Tafrikan, M., Ghani, M., & Mukama, D. S. (2022). Optimal Control of HIV-1 Spread in Combination with Nutritional Status and ARV-Treatment. *International Journal of Computing Science and Applied Mathematics*, 8(2), 66. <https://doi.org/10.12962/j24775401.v8i2.13764>
- Sinaga, L. P., Nasution, H., & Kartika, D. (2021). Stability Analysis of the Corona Virus (Covid-19) Dynamics SEIR Model in Indonesia. *Journal of Physics: Conference Series*, 1819(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1819/1/012043>
- Wintachai, P., & Prathom, K. (2020). *Since January 2020 Elsevier has created a COVID-19 resource centre with free information in English and Mandarin on the novel coronavirus COVID- 19 . The COVID-19 resource centre is hosted on Elsevier Connect , the company ' s public news and information.* (January).
- Resmawan, Eka, M., Nurwan, & Achmad, N. (2020). Analisis Kontrol Optimal Pada Model Matematika Penyebaran Pengguna Narkoba Dengan Faktor Edukasi. *Jurnal Ilmiah Matematika Dan Terapan*, 17(2), 238–248.

<https://doi.org/10.22487/2540766x.2020.v17.i2.15201>

- Ahmad, W., Abbas, M., Rafiq, M., & Baleanu, D. (2021). Mathematical analysis for the effect of voluntary vaccination on the propagation of Corona virus pandemic. *Results in Physics*, 31(October), 104917. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2021.104917>
- Side, S., Alimuddin, & Bani, A. (2018). Modifikasi Model SIR pada Penyebaran Penyakit Demam Berdarah. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, 1(2), 169–182.
- Ahmed, N., Elsonbaty, A., Raza, A., Rafiq, M., & Adel, W. (2021). Numerical simulation and stability analysis of a novel reaction–diffusion COVID-19 model. *Nonlinear Dynamics*, 106(2), 1293–1310. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06623-9>
- Andini, R., & Astuti, Y. P. (2021). MATH unesa. *Jurnal Ilmiah Matematika*, 9(2), 437–446. Retrieved from <https://media.neliti.com/media/publications/249234-model-infeksi-hiv-dengan-pengaruh-percoba-b7e3cd43.pdf>
- Fathoni, M. I. A. (2015). *Analisis Sistem Dinamik Dan Kontrol Optimal Pada Model Epidemi Tipe Seit Dengan Perbedaan Periode Exposed Dan Tingkat Kejadian Tersaturasi*. 122. Retrieved from <http://repository.its.ac.id/51787/>
- Biji, P., Stelechocarpus, K., Secara, T., Vitro, I. N., & Ex, D. A. N. (2014). *Jurnal MIPA*. 37(2), 105–114.
- Reggi First Trasia. (2021). Tinjauan Biomedis Antiparasit Ivermectin Dalam Pengobatan COVID-19. *Tirtayasa Medical Journal*, 1(1), 1–7.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Program MATLAB2013a Model Penyebaran Penyakit Covid-19 dengan Tanpa Kontrol

```
function
[dy]=tanpakontrol(y,psi,alpha,de,beta,gamm
a,mu,teta,eta,delta)

%y(1)=S; y(2)=H; y(3)=I; y(4)=Q;

% y(5)=y(1)+y(2)+y(3)+y(4);

x(1)=psi-gamma*y(1)*y(3)-(de+mu)*y(1);

x(2)=alpha-beta*y(2)*y(3)+teta*y(3)-
(de+mu)*y(2);

x(3)=gamma*y(1)*y(3)+beta*y(2)*y(3)+delta*
y(4)-(de+mu+teta+teta)*y(3);

x(4)=eta*y(3)-(de+mu+delta)*y(4);

%y(1)=S; y(2)=H; y(3)=I; y(4)=Q;

%X=S+H+I+Q

dy=[x(1) x(2) x(3) x(4)];

end
```

```
clear all;

clc;

psi=0.125;

alpha=0.535;

de=0.002;

beta=0.000234;

%beta=0.000156;

gamma=0.001;

%gamma=0.00125;

mu=0.08;

teta=0.35;

eta=0.025;

delta=0.29;

S0=100; H0=20; I0=43; Q0=1;

%S0=0.493; H0=0.0035; I0=0.0035; Q0=0.007;

h=0.5;

t=0:h:80;
```

```
S=zeros(N,1); Sold=zeros(N,1);  
H=zeros(N,1); Hold=zeros(N,1);  
I=zeros(N,1); Iold=zeros(N,1);  
Q=zeros(N,1); Qold=zeros(N,1);  
S(1)=S0; H(1)=H0; I(1)=I0; Q(1)=Q0;  
for i=1:N-1  
y=[S(i) H(i) I(i) Q(i)];  
k1=h*tanpakontrol(y,psi,alpha,de,beta,gamma,mu  
,teta,eta,delta);  
k2=h*tanpakontrol(y+0.5*k1,psi,alpha,de,beta,g  
amma,mu,teta,eta,delta);  
k3=h*tanpakontrol(y+0.5*k2,psi,alpha,de,beta,g  
amma,mu,teta,eta,delta);  
k4=h*tanpakontrol(y+k3,psi,alpha,de,beta,gamma  
,mu,teta,eta,delta);  
y=y+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);  
S(i+1)=y(1);  
H(i+1)=y(2);  
I(i+1)=y(3);  
Q(i+1)=y(4);
```

```
figure(1)

subplot (2,2,1); grid on; hold on;

plot(t,S,'r--','linewidth',2);

legend('S tanpa kontrol', 'S dengan kontrol')

xlabel('waktu'); ylabel('S(t)');

title('(a)');

subplot(2,2,2); grid on; hold on;

plot(t,H,'r--','linewidth',2);

legend('H tanpa kontrol', 'H dengan kontrol')

xlabel('waktu'); ylabel('H(t)');

title('(b)');

subplot(2,2,3); grid on; hold on;

plot(t,I,'r--','linewidth',2);

legend('I tanpa kontrol', 'I dengan kontrol')

xlabel('waktu'); ylabel('I(t)');

title('(c)');

subplot(2,2,4); grid on; hold on;

plot(t,Q,'r--','linewidth',2);
```



```
xlabel('waktu'); ylabel('Q(t)');  
  
title('(d)');
```

Lampiran 2. Program MATLAB2013a Model Penyebaran
Penyakit Covid-19 dengan Kontrol

```

function [ dy ] =
STATE( y,u1,u2,psi,gamma,de,mu,alpha,beta,teta,
delta,eta )

% y(5)=y(1)+y(2)+y(3)+y(4);

x(1)=psi-(gamma*y(1)*y(3))-(de+mu)*y(1)-
u1*y(1)-u2*y(1);

x(2)=alpha-(beta*y(2)*y(3))+(teta*y(3))-
(de+mu*y(2))+(u1*y(1))+(u2*y(1));

x(3)=gamma*y(1)*y(3)+(beta*y(2)*y(3))+delta*y(4)
)-(de+mu+eta+teta)*y(3);

x(4)=eta*y(3)-(de+mu+delta)*y(4);

%y(1)=S; y(2)=E; y(3)=I; y(4)=C;

%X=S+E+I+C

dy=[x(1) x(2) x(3) x(4)];

end

```

```

function [ dt ] =
COST(y,S,H,I,u1,u2,de,beta,gamma,mu,teta,eta,d
elta)

lambda1=y(1); lambda2=y(2); lambda3=y(3);
lambda4=y(4);

x(1)=-lambda1*((-gamma*I)-de-mu-u1-u2)-
lambda2*(u1+u2)-lambda3*(gamma*I);

x(2)=-lambda2*((-beta*I)-de-mu)-
lambda3*(beta*I);

x(3)=-lambda1*(-gamma*S)-lambda2*((-
beta*H)+teta)-lambda3*((gamma*S)-(beta*H)-de-
mu-eta-teta)-(lambda4*(eta))+1;

x(4)=(-lambda3*delta)-lambda4*(-de-mu-delta);

dt=[x(1) x(2) x(3) x(4)];

end

```

```
clear all;

clc;

psi=0.125;

alpha=0.535;

de=0.002;

beta=0.000234;

%beta=0.0056;

%beta=0.0156;

gamma=0.001;

%gamma=0.0125;

%gamma=0.0025;

mu=0.08;

teta=0.35;

eta=0.025;

delta=0.29;

S0=100; H0=20; I0=43; Q0=1;

%S0=0.493; H0=0.0035; I0=0.0035; Q0=0.007;
```

```
A1=1;

%A1=0.5;

A2=5;

%A2=1.5;

u1max=1;

u2max=1;

h=0.5;

t=0:h:80;

N=length(t);

u1=zeros(N,1); u1old=zeros(N,1);

u2=zeros(N,1); u2old=zeros(N,1);

S=zeros(N,1); Sold=zeros(N,1);

H=zeros(N,1); Hold=zeros(N,1);

I=zeros(N,1); Iold=zeros(N,1);

Q=zeros(N,1); Qold=zeros(N,1);

lambda1=zeros(N,1); lambda2=zeros(N,1);
lambda3=zeros(N,1); lambda4=zeros(N,1);
```

```

lambda1old=zeros(N,1); lambda2old=zeros(N,1);
lambda3old=zeros(N,1); lambda4old=zeros(N,1);

tes=1;

it=0;

while tes>0.001

u1old=u1; u2old=u2;

Sold=S; Hold=H; Iold=I; Qold=Q;

lambda1old=lambda1;

lambda2old=lambda2;

lambda3old=lambda3;

lambda4old=lambda4;

S(1)=S0; H(1)=H0; I(1)=I0; Q(1)=Q0;

J(it+1)=0;

for i=1:N-1

y=[S(i) H(i) I(i) Q(i)];

k11=h*STATE(y,u1old(i),u2old(i),psi,gamma,de,mu,
alpha,beta,teta,delta,eta);

k12=h*STATE(y+0.5*k11,u1old(i),u2old(i),psi,gamma,
mu,alpha,beta,teta,delta,eta);

```

```

k13=h*STATE(y+0.5*k12,u1old(i),u2old(i),psi,gamma,de,mu,alpha,beta,teta,delta,eta);

k14=h*STATE(y+k13,u1old(i),u2old(i),psi,gamma,de,mu,alpha,beta,teta,delta,eta);

y=y+(1/6)*(k11+2*k12+2*k13+k14);

S(i+1)=y(1); H(i+1)=y(2);

I(i+1)=y(3); Q(i+1)=y(4);

end

J(it+1)=J(it+1)+h*(I(i)+A1*(u1old(i)*u1old(i))+A2*(u2old(i)*u2old(i)));

lambda1(N)=0; lambda3(N)=0;

lambda2(N)=0; lambda4(N)=0;

for i=1:N-1

j=N-i;

y=[lambda1(j+1) lambda2(j+1) lambda3(j+1) lambda4(j+1)];

k21=h*COST(y,S(j+1),H(j+1),I(j+1),u1old(j+1),u2old(j+1),de,beta,gamma,mu,teta,eta,delta);

k22=h*COST(y+0.5*k21,S(j+1),H(j+1),I(j+1),u1old(j+1),u2old(j+1),de,beta,gamma,mu,teta,eta,delta);

```

```

k23=h*COST(y+0.5*k22,S(j+1),H(j+1),I(j+1),u1old(j+1),u2old(j+1),de,beta,gamma,mu,teta,eta,delta);

k24=h*COST(y+k23,S(j+1),H(j+1),I(j+1),u1old(j+1),u2old(j+1),de,beta,gamma,mu,teta,eta,delta);

y=y-(1/6)*(k21+2*k22+2*k23+k24);

lambda1(j)=y(1);

lambda2(j)=y(2);

lambda3(j)=y(3);

lambda4(j)=y(4);

temp1=min([(lambda2(j)-lambda1(j))*S(j)]/(2*A1) u1max]);

u1(j)=max([0 temp1]);

temp2=min([(lambda2(j)-lambda1(j))*S(j)]/(2*A2) u2max]);

u2(j)=max([0 temp2]);

end

errS=sum(abs(S-Sold));

errH=sum(abs(H-Hold));

```



```
errI=sum(abs(I-Iold));  
errQ=sum(abs(Q-Qold));  
  
errlambda1=sum(abs(lambda1-lambda1old));  
errlambda2=sum(abs(lambda2-lambda2old));  
errlambda3=sum(abs(lambda3-lambda3old));  
errlambda4=sum(abs(lambda4-lambda4old));  
  
erru1=sum(abs(u1-u1old));  
erru2=sum(abs(u2-u2old));  
  
tes=errS+errH+errI+errQ+errlambda1+errlambda2+  
errlambda3+errlambda4+erru1+erru2;  
  
it=it+1;  
  
u1=(0.5*u1+0.5*u1old);  
u2=(0.5*u2+0.5*u2old);  
  
end  
  
u1;  
u2;  
  
figure(1)  
subplot(2,2,1);
```

```
plot(t,S,'b','linewidth',2);

legend('S tanpa kontrol','S dengan kontrol')

xlabel('waktu'); ylabel('S(t)');

title('(a)');

hold on; grid on;

subplot(2,2,2);

plot(t,H,'b','linewidth',2);

legend('H tanpa kontrol','H dengan kontrol')

xlabel('waktu'); ylabel('H(t)');

title('(b)');

hold on; grid on;

subplot(2,2,3);

plot(t,I,'b','linewidth',2);

legend('I tanpa kontrol','I dengan kontrol')

xlabel('waktu'); ylabel('I(t)');

title('(c)');

hold on; grid on;

subplot(2,2,4);
```

```
plot(t,Q,'b','linewidth',2);

legend('Q tanpa kontrol','Q dengan kontrol')

xlabel('waktu'); ylabel('Q(t)');

title('(d)');

hold on; grid on;

figure(2)

plot(t,u1,'m',t,u2,'g','linewidth',3);

legend('u_1*(t)','u_2*(t)');

xlabel('waktu'); ylabel('u(t)');

hold on; grid on;

figure(3)

plot(1:it,J,'r','Linewidth',3);

ylabel('Fungsi Tujuan (J)');

xlabel('Iterasi');

grid on;
```

Lampiran 3. Riwayat Hidup**RIWAYAT HIDUP****A. Identitas Diri**

1. Nama Lengkap : Nur Indah Rahayu
2. Tempat, Tanggal Lahir : Pati, 08 Februari 2002
3. Alamat : Desa Kedalingan 06/II
Kec. Tambakromo Kab. Pati
4. No. Hp. : 083843064358
5. Email : nurindahrahayu23@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. Pendidikan Formal
 - a. SD Negeri 02 Kedalingan : lulus tahun 2013
 - b. SMP Negeri 01 Tambakromo : lulus tahun 2016
 - c. SMA Negeri 01 Kayen : lulus tahun 2019
2. Pendidikan Non-Formal
 - a. TPQ I'Anatul Huda Angkatan Lor
 - b. PPPTQ Al-Hikmah Tugurejo Tugu Semarang