MATRIKS KOMUTATIF PADA MATRIKS NORMAL ATAS ALJABAR MAX-PLUS

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat
Guna Memperoleh Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika

Oleh : **MUHAMMAD ULIL ALBAB**
NIM : 1908046028

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG

2023

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	Muhammad Ulil Albab
NIM	:	1908046028
Program Studi	:	Matematika

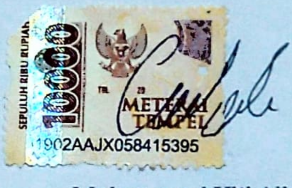
menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

MATRIKS KOMUTATIF PADA MATRIKS NORMAL ATAS ALJABAR MAX-PLUS

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 10 Mei 2023

Pembuat pernyataan,



Muhammad Ulil Albab

NIM : 1908046028

KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul	:	**MATRIKS KOMUTATIF PADA MATRIKS NORMAL ATAS ALJABAR MAX-PLUS**
Penulis	:	Muhammad Ulil Albab
NIM	:	1908046028
Jurusan	:	Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 25 Mei 2023

DEWAN PENGUJI

Penguji I,	Penguji II,
Any Muanalifah, M.Si., Ph.D.	**Prihadi Kurniawan, M.Sc.**
NIP : 19820113 201101 2 009	NIP : 19901226 201903 1 012
Penguji III,	Penguji IV,
Dinni Rahma Oktaviani, M.Si.	**Ayus Riana Isnawati, M.Sc.**
NIP : 19941009 201903 2 017	NIP : 19851019 201903 2 014
Pembimbing I,	Pembimbing II,
Any Muanalifah, M.Si., Ph.D.	**Ayus Riana Isnawati, M.Sc.**
NIP : 19820113 201101 2 009	NIP : 19851019 201903 2 014

KEMENTERIAN AGAMA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UIN WALISONGO SEMARANG
REPUBLIK INDONESIA

NOTA DINAS

Semarang, 9 Mei 2023

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	MATRIKS KOMUTATIF PADA MATRIKS NORMAL ATAS ALJABAR MAX-PLUS
Nama	:	Muhammad Ulil Albab
NIM	:	1908046028
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,

Any

Any Muanalifah, M.Si., Ph.D
NIP : 19820113 201101 2 009

NOTA DINAS

Semarang, 10 Mei 2023

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	MATRIKS KOMUTATIF PADA MATRIKS NORMAL ATAS ALJABAR MAX-PLUS
Nama	:	Muhammad Ulil Albab
NIM	:	1908046028
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing II,

Ayus Riana Isnawati, M.Sc
NIP : 19851019 201903 2 014

ABSTRAK

Pada penelitian ini, dipandang himpunan $\mathbb{R}^n_{nor}$ dari matriks normal $A = (a_{i,j})$ atas $\mathbb{R}_{\max}$ dengan $a_{i,i} = 0$ dan $\varepsilon = -\infty \leq a_{i,j} \leq 0$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan $\oplus = \max$ dan perkalian $\otimes = +$. Pada matriks $A \in \mathbb{R}^n_{nor}$ dapat ditemukan himpunan $K(A)$ dimana entrinya merupakan matriks $B \in \mathbb{R}^n_{nor}$ sedemikian sehingga $A \otimes B = B \otimes A$. Untuk matriks $T = A \oplus B$ dan A^* merupakan matriks *kleene star* dari matriks A, beberapa himpunan bagian dari $K(A)$ yang dapat terbentuk diantaranya adalah $K^T(A), K^{A^*}(A), K^A(A)$, dan $K^B(A)$ yang didefinisikan:

1. $K^T(A) = \{B \in \mathbb{R}^n_{nor} : A \otimes B = B \otimes A = T\}$
2. $K^{A^*}(A) = \{B \in \mathbb{R}^n_{nor} : A \otimes B = B \otimes A = A^*\}$
3. $K^A(A) = \{B \in \mathbb{R}^n_{nor} : A \otimes B = B \otimes A = A\}$
4. $K^B(A) = \{B \in \mathbb{R}^n_{nor} : A \otimes B = B \otimes A = B\}$.

Dari himpunan bagian tersebut, dapat diketahui bentuk-bentuk komutatif yang terbangun.

Kata kunci : Aljabar Max-plus, Matriks Normal atas Aljabar Max-Plus, Matriks Komutatif

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis haturkan kehadirat Allah Swt. atas semua rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul **"Matriks Komutatif pada Mariks Normal atas Aljabar Max-Plus"**. Shalawat dan salam semoga senantiasa terlimpah curahkan kepada Baginda Nabi Muhammad saw. beserta keluarga dan para sahabatnya hingga hari akhir zaman, amin.

Penyusunan skripsi ini dimaksudkan guna memenuhi persyaratan dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di UIN Walisongo Semarang. Penyelesaian skripsi ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Imam Taufiq, M.Ag. selaku rektor Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang

2. Bapak Dr. H. Ismail, M.Ag. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang

3. Ibu Emy Siswanah, M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika UIN Walisongo Semarang

4. Ibu Any Muanalifah, M.Si., Ph.D. selaku dosen pembimbing 1 yang senantiasa memberikan dorongan serta masukan dalam proses penyelesaian skripsi

5. Ibu Ayus Riana Isnawati, M.Sc. selaku dosen pembimbing 2 yang telah memberikan arahan dalam proses penyelesaian skripsi

6. Bapak Solekan dan Ibu Arofah selaku orang tua penulis

yang senantiasa memberikan dukungan dan do'a untuk kesuksesan penulis

7. Teman-teman seperjuangan mahasiswa matematika angkatan 2019
8. Semua pihak yang telah membantu proses penyelesaian skripsi.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini jauh dari sempurna. Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi pembaca.

Demak, 10 April 2023
Penulis,

Muhammad Ulil Albab
NIM : 1908046028

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini mengulas alasan kenapa penelitian ini dilakukan yang dituangkan dalam bentuk latar belakang. Selanjutnya, permasalahan yang muncul ditulis kedalam rumusan masalah yang kemudian disusul dengan tujuan, manfaat, batasan, metode serta sistematika penulisan penelitian.

A. Latar Belakang Masalah

Ilmu pengetahuan yang selalu berkembang merupakan anugrah sekaligus tantangan bagi manusia sebagai makhluk Allah Swt. yang diberi akal untuk berpikir. Perkembangan ilmu pengetahuan ini merupakan buah dari hasrat manusia yang selalu ingin tahu. Hasrat ingin tahu muncul akibat kebutuhan manusia yang terus meningkat untuk menjalani kehidupan. Dengan ilmu pengetahuan, manusia dapat mengambil manfaat dari semua ciptaan Allah Swt. untuk mencapai kesejahteraan umat manusia (Karim, 2014).

Berkembangnya ilmu pengetahuan tidak bisa dihindarkan dari perkembangan konsep matematika. Konsep matematika ini terbagi menjadi beberapa bidang kajian yang diantaranya adalah bidang aljabar, statistik, komputasi, matematika terapan, dan lain-lain. Aljabar merupakan salah satu ilmu percabangan matematika yang membahas terkait simbol serta aturan yang ada padanya. Dalam aljabar sendiri terdapat kajian tentang aljabar abstrak yang membahas mengenai struktur aljabar seperti grup, ring, dan masih banyak lagi (Majid, 2011). Secara garis besar, aljabar abstrak membahas mengenai himpunan-himpunan serta operasi yang ada di dalamnya. Konsep himpunan juga terdapat dalam Q.S. Al-Hujurat ayat 13 sebagai berikut:

يٰٓاَيُّهَا النَّاسُ اِنَّا خَلَقْنٰكُمْ مِّنْ ذَكَرٍ وَّاُنْثٰى وَجَعَلْنٰكُمْ شُعُوْبًا وَّقَبَاۤىِٕلَ لِتَعَارَفُوْا
اِنَّ اَكْرَمَكُمْ عِنْدَ اللّٰهِ اَتْقٰىكُمْ اِنَّ اللّٰهَ عَلِيْمٌ خَبِيْرٌ

Artinya: *"Wahai manusia, sesungguhnya Kami telah menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan perempuan. Kemudian, Kami menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku agar kamu saling mengenal. Sesungguhnya yang paling mulia di antara kamu di sisi Allah adalah orang yang paling bertakwa. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Mahateliti."*

Pada ayat ini dijelaskan bahwa Allah Swt. menciptakan manusia menjadi beberapa himpunan yang beraneka ragam agar saling mengenal dan bukan untuk saling menghina ataupun merendahkan. Allah Swt. juga tidak menyukai himpunan manusia yang memperlihatkan kesombongan atas kekayaan atau kepangkatan karena sesungguhnya yang paling mulia adalah orang yang paling bertaqwa kepada Allah Swt. (Anggraeni, 2018).

Dalam konsep matematika, himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa membentuk struktur aljabar Ring (Dummit dan Foot, 1991). Seiring berkembangnya penelitian terkait struktur aljabar, saat ini muncul struktur aljabar max-plus dimana himpunan dan operasi yang dimilikinya mempunyai perbedaan dengan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$. Farlow (2009) menjelaskan dalam karyanya, bahwa himpunan aljabar max-plus yang dinotasikan $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan dua operasi yang melekat yakni $\oplus$ yang didefinisikan sebagai maksimum dan $\otimes$ didefinisikan sebagai penjumlahan. Seperti pada aljabar linear klasik, dalam aljabar max-plus juga dipelajari tentang konsep matriks.

Penelitian terkait matriks atas aljabar max-plus diantaranya pernah dilakukan oleh Ariyanti (2011) yang membahas mengenai definisi dari aljabar max-plus serta perluasannya dalam matriks. Kemudian penelitian lainnya oleh Gyamerah dkk. (2016) dengan judul *"Max-plus Algebra and Application to Matrix Operations"*. Penelitian tersebut membahas mengenai pengaplikasian aljabar max-plus pada operasi matriks untuk mendapatkan solusi.

Pada penelitian yang dilakukan oleh Desi (2013) terkait matriks atas aljabar max-plus, diperoleh sifat bahwa himpunan matriks dengan operasi penjumlahan $\oplus$ membentuk semi-grup komutatif dan idempoten sedangkan himpunan matriks dengan operasi perkalian $\otimes$ merupakan semi-grup dan tidak bersifat komutatif. Suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ akan bersifat komutatif pada operasi perkalian dengan matriks $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times o}$ sedemikian sehingga berlaku $A \otimes B = B \otimes A$.

Penelitian terkait komutatif terhadap operasi perkalian pada matriks sendiri pernah dilakukan oleh Prasolov (1994) pada karyanya yang berjudul *"Problems and Theorems in Linear Algebra"*. Pada penelitian tersebut, terdapat kajian terkait bentuk matriks komutatif yang terjadi pada aljabar linear klasik. Peneliti tertarik dengan sifat komutatif yang terjadi pada matriks. Sehingga pada skripsi ini akan dibahas mengenai komutatif yang terjadi pada matriks atas aljabar max-plus.

Di dalam himpunan matriks atas aljabar max-plus, terdapat suatu himpunan bagian yang bernama himpunan matriks normal. Menurut Puente (2012) menyatakan bahwa matriks normal adalah matriks persegi yang entri pada diagonal utamanya adalah nol sedangkan pada entri lainnya kurang dari atau sama dengan nol.

Himpunan matriks normal ini dinotasikan dengan $\mathbb{R}^n_{nor}$ dimana n menunjukkan ordo matriks.

Dari pemaparan di atas, peneliti tertarik untuk mengkaji lebih dalam terkait matriks-matriks normal yang bersifat komutatif atas aljabar max-plus yang terdapat dalam jurnal *"Matrices Commuting with a Given Normal Tropical Matrix"* oleh Linde dan Puente (2015). Sehingga penelitian ini diberi judul "Matriks Komutatif pada Matriks Normal atas Aljabar Max-Plus".

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dicantumkan sebelumnya, maka permasalahan yang akan dikaji adalah bagaimana bentuk-bentuk matriks yang bersifat komutatif pada matriks normal atas aljabar max-plus?

C. Tujuan Penelitian

Dari paparan rumusan masalah tersebut, adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui bentuk-bentuk matriks yang bersifat komutatif pada matriks normal atas aljabar max-plus.

D. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan memberi manfaat bagi:

1. Penulis

   Menambah pemahaman terkait aljabar max-plus pada umumnya serta mengetahui bentuk matriks-matriks normal yang komutatif dalam aljabar max-plus.

2. Lembaga

   Menambah pustaka sebagai rujukan bahan perkuliahan maupun penelitian dikemudian hari yang berkaitan tentang bentuk matriks yang saling komutatif pada matriks normal atas aljabar max-plus.

3. Pembaca

   Sebagai bahan ajar terkait materi tentang bentuk matriks komutatif pada matriks normal atas aljabar max-plus.

E. Batasan Masalah

Sebagai batas dari pembahasan dalam penelitian ini, himpunan matriks yang dibahas merupakan himpunan matriks normal atas aljabar max-plus saja $(\mathbb{R}^n_{nor}, \oplus, \otimes)$.

F. Metode Penelitian

Metode yang dilakukan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan. Dalam melakukan penelitian terkait komutatif matriks pada matriks normal atas aljabar max-plus ini, perlu diawali dengan mengkaji definisi aljabar max-plus serta matriks yang terbentuk atasnya. Kemudian dilanjutkan dengan melakukan kajian terkait matriks normal atas aljabar max-plus.

Adapun tahapan-tahapan penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Mencari dan mengumpulkan berbagai literatur dari beragam sumber diantaranya internet, artikel, jurnal, buku dan sumber lainnya yang berkaitan dengan penelitian ini.

2. Mempelajari serta mendalami konsep aljabar max-plus dan matriks yang terbentuk atasnya.
3. Mempelajari dan mengkaji lebih dalam tentang matriks normal atas aljabar max-plus.
4. Melakukan kajian dan membuktikan matriks-matriks normal atas aljabar max-plus yang saling komutatif.

G. Sistematika Penulisan

Penelitian ini ditulis dalam 4 bab serta beberapa sub-bab guna mempermudah dalam memahami keseluruhan isi di dalamnya. Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. BAB I PENDAHULUAN

   Dalam bab ini berisi latar belakang, yang kemudian disusul dengan rumusan masalah, tujuan, manfaat, batasan, metode serta sistematika penulisan penelitian.

2. BAB II LANDASAN PUSTAKA

   Pada bab ini diberikan dasar teori yang perlu diketahui. Yakni teori tentang aljabar max-plus dan matriks yang terbentuk atasnya, serta matriks normal atas aljabar max-plus.

3. BAB III MATRIKS KOMUTATIF PADA MATRIKS NORMAL ATAS ALJABAR MAX-PLUS

   Bab ini merupakan inti kajian yang membahas bentuk dari matriks normal yang saling komutatif atas aljabar max-plus.

4. BAB IV SIMPULAN DAN SARAN

   Bab ini berisikan kesimpulan dari kajian pada bab sebelumnya serta saran penelitian selanjutnya yang bisa dikaji.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

Bab ini berisi definsi yang mendasari pembahasan terkait matriks komutatif pada matriks normal atas aljabar max-plus. Teori dalam pembahasan ini meliputi tiga bagian, yakni aljabar max-plus, matriks-matriks yang terbentuk atasnya, dan matriks normal atas aljabar max-plus.

A. Aljabar Max-Plus

Definisi dasar dari aljabar max-plus yang dipaparkan oleh Bacelli dkk. (2001) adalah sebagai berikut

Definisi 2.1 *(Aljabar Max-Plus)*
Untuk himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$*, diberikan himpunan tak kosong* $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *yang dilengkapi dengan operasi biner ganda yakni penjumlahan* $\oplus$ *dan perkalian* $\otimes$*. Untuk setiap* $a, b \in \mathbb{R}_{\max}$ *didefinisikan:*

$$a \oplus b = \max(a, b)$$
$$a \otimes b = a + b$$

dimana $-\infty$ *berperan sebagai elemen netral terhadap penjumlahan* $\oplus$ *dan* 0 *berperan sebagai elemen netral terhadap perkalian* $\otimes$*. Lebih lanjut,* $-\infty$ *akan dilambangkan dengan* ε*. Struktur aljabar yang terbentuk* $(\mathbb{R}_{\max}, \oplus, \otimes)$ *dengan penotasian* $\mathbb{R}_{\max}$ *diberi nama aljabar max-plus.*

Seperti halnya struktur aljabar pada umumnya, aljabar max-plus juga memiliki sifat-sifat tertentu. Menurut Heidergott dkk. (2006) sifat-sifat pada aljabar max-plus adalah sebagai berikut.

Definisi 2.2 *(Sifat-sifat Aljabar Max-Plus)*
Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}_{\max}$*, berlaku:*

1. *Asosiatif*
   $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
   $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$

2. *Komutatif*
   $a \oplus b = b \oplus a$
   $a \otimes b = b \otimes a$

3. *Distributif* $\otimes$ *terhadap* $\oplus$
   $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

4. *Keberadaan Elemen Identitas*
   $a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$
   $a \otimes 0 = 0 \otimes a = a$

5. *Keberadaan Elemen Penyerap pada Operasi* $\otimes$
   $a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$

6. *Idempoten pada Operasi* $\oplus$
   $a \oplus a = a$*.*

Berdasarkan definisi serta sifat-sifat aljabar max-plus tersebut, diberikan contoh operasi aritmatika sederhana berikut

Contoh 2.1
Misalkan diketahui $a, b \in \mathbb{R}_{\max}$ *dengan* $a = 9$ *dan* $b = \varepsilon$*. Hasil*

penjumlahan $a \oplus b$ *dan hasil perkalian* $a \otimes b$ *adalah sebagai berikut*

$$\begin{aligned} a \oplus b &= 9 \oplus \varepsilon \\ &= \max(9, \varepsilon) \\ &= 9 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} a \otimes b &= 9 \otimes \varepsilon \\ &= 9 + \varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Seperti halnya operasi penjumlahan $+$ dan perkalian $\times$ pada aljabar konvensional, dimana $\times$ lebih prioritas daripada $+$, pada struktur aljabar max-plus, operasi perkalian $\otimes$ lebih prioritas daripada operasi penjumlahan $\oplus$. Diperhatikan contoh berikut:

Contoh 2.2

Misalkan dipunyai $a, b, c, d \in \mathbb{R}_{\max}$ *dengan* $a = 2, b = -5, c = 7, d = 3$. *Hasil operasi* $a \otimes b \oplus c \otimes d$ *adalah sebagai berikut*

$$\begin{aligned} a \otimes b \oplus c \otimes d &= (a \otimes b) \oplus (c \otimes d) \\ &= (2 \otimes -5) \oplus (7 \otimes 3) \\ &= (2 + (-5)) \oplus (7 + 3) \\ &= -3 \oplus 10 \\ &= \max(-3, 10) \\ &= 10. \end{aligned}$$

Pada struktur aljabar max-plus, perpangkatan dalam aljabar max-plus menurut Rudhito (2016) sebagai berikut

Definisi 2.3 *(Pangkat dalam Aljabar Max-Plus)*
Untuk $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dimana $\mathbb{N}$ merupakan himpunan bilangan asli dan $a \in \mathbb{R}_{max}$, a pangkat r dinotasikan $a^{\otimes r}$ didefinisikan:

$$\begin{aligned} a^{\otimes r} &= \underbrace{a \otimes a \otimes \cdots \otimes a}_{r} \\ &= \underbrace{a + a + \cdots + a}_{r} \\ &= r \times a. \end{aligned}$$

Contoh 2.3
Misalkan dipunyai $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan $a \in \mathbb{R}_{\max}$ dengan $r = 6$ dan $a = 3$. perpangkatan $a^{\otimes r}$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} a^{\otimes r} &= 3^{\otimes 6} \\ &= 6 \times 3 \\ &= 18. \end{aligned}$$

B. Matriks atas Aljabar Max-Plus

Aljabar max-plus dapat diperluas dalam bentuk matriks. Misalkan $[m] = \{1, 2, ..., m\}$ dan $[n] = \{1, 2, ..., n\}$, suatu matriks $A = (a_{i,j})$ dengan $a_{i,j} \in \mathbb{R}_{\max}$ dan $i \in [m]$ serta $j \in [n]$ merupakan matriks yang terbentuk atas aljabar max-plus. Matriks A yang terbentuk dituliskan sebagai

$$A = (a_{i,j}) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Untuk himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$, himpunan matriks dengan m baris dan n kolom atas $\mathbb{R}_{\max}$ tersebut dimana $m, n \in \mathbb{N}$ dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$. Matriks yang memiliki baris dan kolom dengan jumlah yang sama disebut matriks persegi yang dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\max}^{n}$ dimana n merupakan ukuran/ordo dari matriks.

Operasi aritmatika pada aljabar max-plus dapat diaplikasikan dalam bentuk matriks. Menurut Farlow (2009), operasi aritmatika pada matriks atas aljabar max-plus dijelaskan seperti berikut:

1. Penjumlahan matriks

   Misalkan dipunyai A dan B adalah matriks atas aljabar max-plus dengan ukuran yang sama. Penjumlahan matriks diperoleh dari penambahan entri yang bersesuaian pada kedua matriks tersebut. Misal dipunyai $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$, penjumlahan $A \oplus B$ didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A \oplus B)_{i,j} \\ &= a_{i,j} \oplus b_{i,j} \\ &= \max(a_{i,j}, b_{i,j}) \end{aligned}$$

   dengan $i \in [m]$ dan $j \in [n]$.

   Contoh 2.4

   Misalkan dipunyai matriks $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{2}$ dengan $A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$, penjumlahan dari $A \oplus B$ adalah sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
A \oplus B &= \begin{bmatrix} \varepsilon & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \varepsilon \oplus 2 & 5 \oplus 1 \\ 2 \oplus 8 & -3 \oplus 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(\varepsilon, 2) & \max(5, 1) \\ \max(2, 8) & \max(-3, 5) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

sehingga diperoleh penjumlahan $A \oplus B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$.

2. Perkalian matriks

   Misalkan dipunyai dua buah matriks atas aljabar max-plus. Perkalian dua buah matriks tersebut dapat dilakukan jika kolom pada matriks pertama jumlahnya sama dengan baris pada matriks kedua. Misal dipunyai $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times l}$ dan $B \in \mathbb{R}_{\max}^{l \times n}$, perkalian $A \otimes B$ didefinisikan sebagai

$$
\begin{aligned}
A \otimes B &= (A \otimes B)_{i,j} \\
&= \bigoplus_{k=1}^{l} (a_{i,k} \otimes b_{k,j}) \\
&= \max_{k=1}^{l} (a_{i,k} + b_{k,j})
\end{aligned}
$$

   dengan $i \in [m]$ dan $j \in [n]$.

Contoh 2.5

Misalkan dipunyai matriks $A, B \in \mathbb{R}^2_{\max}$ *dengan* $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ *dan* $B = \begin{bmatrix} 6 & \varepsilon \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$, *perkalian dari* $A \otimes B$ *adalah sebagai berikut*

$$\begin{aligned}
A \otimes B &= \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 & \varepsilon \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (9 \otimes 6) \oplus (1 \otimes 1) & (9 \otimes \varepsilon) \oplus (1 \otimes -6) \\ (2 \otimes 6) \oplus (0 \otimes 1) & (2 \otimes \varepsilon) \oplus (0 \otimes -6) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (9 + 6) \oplus (1 + 1) & (9 + \varepsilon) \oplus (1 + (-6)) \\ (2 + 6) \oplus (0 + 1) & (2 + \varepsilon) \oplus (0 + (-6)) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 15 \oplus 2 & \varepsilon \oplus -5 \\ 8 \oplus 1 & \varepsilon \oplus -6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(15, 2) & \max(\varepsilon, -5) \\ \max(8, 1) & \max(\varepsilon, -6) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 15 & -5 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh perkalian dari $A \otimes B = \begin{bmatrix} 15 & -5 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$.

3. Perkalian skalar dengan matriks

   Misalkan A adalah suatu matriks atas aljabar max-plus dan α adalah skalar. Perkalian matriks dengan skalar diperoleh dari mengalikan tiap-tiap entri dari matriks A dengan skalar α. Misal dipunyai $A \in \mathbb{R}^{m \times n}_{\max}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$, perkalian skalar dengan matriks didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\alpha \otimes A &= (\alpha \otimes A)_{i,j} \\ &= \alpha \otimes a_{i,j} \\ &= \alpha + a_{i,j}\end{aligned}$$

dengan $i \in [m]$ dan $j \in [n]$.

Contoh 2.6

Misalkan dipunyai matriks $A \in \mathbb{R}^2_{\max}$ *dan skalar* $\alpha = 6$ *dengan* $A = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ \varepsilon & 7 \end{bmatrix}$*, perkalian dari* $\alpha \otimes A$ *adalah sebagai berikut*

$$\begin{aligned}\alpha \otimes A = 6 \otimes &\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ \varepsilon & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 \otimes 3 & 6 \otimes -8 \\ 6 \otimes \varepsilon & 6 \otimes 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 + 3 & 6 + (-8) \\ 6 + \varepsilon & 6 + 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ \varepsilon & 13 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

sehingga diperoleh $\alpha \otimes A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ \varepsilon & 13 \end{bmatrix}$.

Perpangkatan pada matriks atas aljabar max-plus didefinisikan oleh Rudhito (2016) sebagai berikut

Definisi 2.4 *(Pangkat Matriks atas Aljabar Max-Plus)*

Untuk $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *dan matriks* $A \in \mathbb{R}^n_{\max}$, A *pangkat* r *dinotasikan*

$A^{\otimes r}$ *didefinisikan:*

$$\begin{aligned} A^{\otimes r} &= \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}_{r} \\ &= A \otimes A^{r-1} \end{aligned}$$

Contoh 2.7

Misalkan dipunyai matriks $A \in \mathbb{R}^2_{\max}$ *dengan* $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, *perpangkatan dari* $A^{\otimes 2}$ *adalah sebagai berikut*

$$\begin{aligned} A^{\otimes 2} &= \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^{\otimes 2} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (7 \otimes 7) \oplus (6 \otimes 3) & (7 \otimes 6) \oplus (6 \otimes -2) \\ (3 \otimes 7) \oplus (-2 \otimes 3) & (3 \otimes 6) \oplus (-2 \otimes -2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (7+7) \oplus (6+3) & (7+6) \oplus (6+(-2)) \\ (3+7) \oplus (-2+3) & (3+6) \oplus (-2+(-2)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 \oplus 9 & 13 \oplus 4 \\ 10 \oplus 1 & 9 \oplus -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(14,9) & \max(13,4) \\ \max(10,1) & \max(9,-4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 10 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $A^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 10 & 9 \end{bmatrix}$.

Berdasarkan dari pangkat matriks, terdapat suatu matriks yang disebut dengan matriks *Kleene Star* yang merupakan rangkaian seri maksimum dari perpangkatan matriks. Menurut Sergeev (2009) matriks *Kleene Star* didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.5 *(Matriks Kleene Star)*
Misalkan dipunyai suatu matriks $A \in \mathbb{R}^n_{\max}$, matriks Kleene Star $A^* = (a^*_{i,j})$ dari A didefinisikan sebagai berikut

$$A^* = I \oplus A \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^{n-1}.$$

Contoh 2.8
Misalkan dipunyai matriks $A \in \mathbb{R}^3_{\max}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -3 & -13 & -13 \\ -11 & -14 & -7 \end{bmatrix}$, matriks Kleene Star A^* adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} A^* &= I \oplus A \oplus A^2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -3 & -13 & -13 \\ -11 & -14 & -7 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -3 & -13 & -13 \\ -11 & -14 & -7 \end{bmatrix}^{\otimes 2} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -3 & -13 & -13 \\ -11 & -14 & -7 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \\ -11 & -9 & -7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -11 & -9 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh matriks Kleene Star $A^* = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -11 & -9 & 0 \end{bmatrix}$.

Pada himpunan matriks atas aljabar max-plus, elemen netral pada operasi penjumlahan disebut matriks epsilon. Sedangkan elemen netral pada operasi perkalian disebut matriks identitas. Menurut Heidergott dkk. (2006) matriks epsilon dan matriks identitas dalam aljabar max-plus adalah sebagai berikut

Definisi 2.6 *(Matriks Epsilon)*
Matriks A disebut matriks epsilon atas aljabar max-plus jika untuk setiap entri dari matriks A adalah ε. Lebih lanjut, matriks epsilon dinotasikan dengan E.

Contoh 2.9
Matriks $E = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$ *merupakan matriks epsilon pada* $\mathbb{R}_{\max}^{2\times 3}$.

Definisi 2.7 *(Matriks Identitas)*
Matriks persegi A disebut matriks identitas atas aljabar max-plus jika

$$A = (a_{i,j}) = \begin{cases} a_{i,j} = 0 & ; i = j \\ a_{i,j} = \varepsilon & ; i \neq j \end{cases}$$

Lebih lanjut, matriks identitas dinotasikan dengan I.

Contoh 2.10
Matriks $I = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix}$ *merupakan matriks identitas pada* $\mathbb{R}_{\max}^{3}$.

Menurut Linde dan Puente (2015) matriks *zero* atas aljabar max-plus didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.8 *(Matriks Zero)*
Matriks A disebut matriks zero atas aljabar max-plus jika untuk setiap entri dari matriks A adalah 0. Lebih lanjut, matriks zero dinotasikan dengan Z.

Contoh 2.11
Matriks $Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *merupakan matriks Z pada ordo 4.*

Relasi urutan pada matriks atas aljabar max-plus menurut Myšková (2016) adalah sebagai berikut

Definisi 2.9 *(Relasi Urutan Matriks atas Aljabar Max-Plus)*
Misalkan dipunyai $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$. $A \leq B$ jika untuk setiap $i \in [m]$ dan $j \in [n]$ berlaku $a_{i,j} \leq b_{i,j}$.

Contoh 2.12
Misalkan dipunyai matriks $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{4}$, dengan matriks $A = \begin{bmatrix} 8 & -10 & -9 & -20 \\ -11 & 5 & -9 & -15 \\ -8 & -12 & 10 & -12 \\ -14 & -10 & -9 & 2 \end{bmatrix}$ *dan matriks* $B = \begin{bmatrix} 9 & -2 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & -5 & -9 \\ -8 & -6 & 10 & -2 \\ -9 & -5 & -7 & 3 \end{bmatrix}$.
Diperhatikan bahwa karena untuk setiap $a_{i,j} \leq b_{i,j}$ untuk setiap $i \in [4]$ dan $j \in [4]$, maka matriks $A \leq B$.

C. Matriks Normal atas Aljabar Max-Plus

Dalam matriks atas aljabar max-plus, dikenal suatu matriks yang bernama matriks normal. Matriks normal adalah matriks persegi atas aljabar max-plus yang memiliki bentuk tertentu. Menurut Puente (2012), matriks normal atas aljabar max-plus didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.10 *(Matriks Normal atas Aljabar Max-Plus)*
Misalkan dipunyai matriks persegi $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^n_{\max}$, matriks A disebut matriks normal atas aljabar max-plus jika

$$A = (a_{i,j}) = \begin{cases} a_{i,j} = 0 & ; i = j \\ \varepsilon \leq a_{i,j} \leq 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

Himpunan matriks normal atas aljabar max-plus dinotasikan sebagai $\mathbb{R}^n_{nor}$, dengan n menunjukkan ukuran/ordo dari matriks.

Contoh 2.13
Matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -11 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ *merupakan matriks normal atas aljabar max-plus ordo* 3 *(*$A \in \mathbb{R}^3_{nor}$*).*

Definisi 2.11 *(Matriks Strictly Normal)*
Misalkan dipunyai matriks persegi $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^n_{nor}$, matriks A dikatakan strictly normal jika

$$A = (a_{i,j}) = \begin{cases} a_{i,j} = 0 & ; i = j \\ \varepsilon \leq a_{i,j} < 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

Contoh 2.14

Matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -10 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ *merupakan matriks strictly normal.*

BAB III

MATRIKS KOMUTATIF PADA MATRIKS NORMAL ATAS ALJABAR MAX-PLUS

Berdasarkan definisi (2.7), dengan $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, suatu matriks persegi $A = (a_{i,j})$ dengan $a_{i,i} = 0$ dan $-\varepsilon \leq a_{i,j} \leq 0$ untuk setiap $i, j \in [n]$ merupakan matriks normal. Himpunan semua matriks ini yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan $\oplus = maksimum$ dan perkalian $\otimes = +$ merupakan matriks normal atas aljabar max-plus dan dinotasikan $\mathbb{R}^n_{nor}$. Perkalian dua matriks normal tidak bersifat komutatif, berikut ini diberikan contoh perkalian matriks normal atas aljabar max-plus

Contoh 3.1

Misalkan dipunyai matriks $A, B \in \mathbb{R}^3_{nor}$*, dengan* $A = \begin{bmatrix} 0 & -11 & -2 \\ -13 & 0 & -1 \\ -6 & -7 & 0 \end{bmatrix}$ *dan* $B = \begin{bmatrix} 0 & -10 & -3 \\ -9 & 0 & -2 \\ -8 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. *Perkalian matriks* $A \otimes B$ *dan* $B \otimes A$ *adalah sebagai berikut*

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{bmatrix} 0 & -11 & -2 \\ -13 & 0 & -1 \\ -6 & -7 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -10 & -3 \\ -9 & 0 & -2 \\ -8 & -3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \oplus -20 \oplus -10 & -10 \oplus -11 \oplus -5 & -3 \oplus -13 \oplus -2 \\ -13 \oplus -9 \oplus -9 & -23 \oplus 0 \oplus -4 & -16 \oplus -2 \oplus -1 \\ -6 \oplus -16 \oplus -8 & -16 \oplus -7 \oplus -3 & -9 \oplus -9 \oplus 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(0, -20, -10) & \max(-10, -11, -5) & \max(-3, -13, -2) \\ \max(-13, -9, -9) & \max(-23, 0, -4) & \max(-16, -2, -1) \\ \max(-6, -16, -8) & \max(-16, -7, -3) & \max(-9, -9, 0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -5 & -2 \\ -9 & 0 & -1 \\ -6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 0 & -10 & -3 \\ -9 & 0 & -2 \\ -8 & -3 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -11 & -2 \\ -13 & 0 & -1 \\ -6 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \oplus -23 \oplus -9 & -11 \oplus -10 \oplus -10 & -2 \oplus -11 \oplus -3 \\ -9 \oplus -13 \oplus -8 & -20 \oplus 0 \oplus -9 & -11 \oplus -1 \oplus -2 \\ -8 \oplus -16 \oplus -6 & -19 \oplus -3 \oplus -7 & -10 \oplus -4 \oplus 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(0, -23, -9) & \max(-11, -10, -10) & \max(-2, -11, -3) \\ \max(-9, -13, -8) & \max(-20, 0, -9) & \max(-11, -1, -2) \\ \max(-8, -16, -6) & \max(-19, -3, -7) & \max(-10, -4, 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -10 & -2 \\ -8 & 0 & -1 \\ -6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Diperhatikan bahwa $A \otimes B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -2 \\ -9 & 0 & -1 \\ -6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ *dan* $B \otimes A = \begin{bmatrix} 0 & -10 & -2 \\ -8 & 0 & -1 \\ -6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. *Maka* $A \otimes B \neq B \otimes A$, *sehingga matriks* A *dan* B *tidak bersifat saling komutatif.*

Dari contoh di atas terlihat bahwa tidak semua matriks normal saling komutatif. Akan tetapi menurut Linde dan Puente (2015), matriks normal dengan ordo 2 bersifat komutatif seperti yang dijelaskan pada lema berikut.

Lema 3.1 *Untuk setiap matriks $A, B \in \mathbb{R}^2_{nor}$, berlaku $A \otimes B = B \otimes A = A \oplus B$.*

Bukti dari lema (3.1) adalah sebagai berikut

1. Diambil sembarang matriks A dan B pada $\mathbb{R}^2_{nor}$. Dimisalkan $A = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & -c \\ -d & 0 \end{bmatrix}$.
2. Akan dibuktikan bahwa $A \otimes B = B \otimes A = A \oplus B$.
   Diperhatikan $A \otimes B$ dan $B \otimes A$ serta $A \oplus B$ berikut

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -b & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -c \\ -d & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \oplus -(a \otimes d) & -c \oplus -a \\ -b \oplus -d & -(b \otimes c) \oplus 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & (-c \oplus -a) \\ (-b \oplus -d) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} B \otimes A &= \begin{bmatrix} 0 & -c \\ -d & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -b & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \oplus -(c \otimes b) & -a \oplus -c \\ -d \oplus -b & -(d \otimes a) \oplus 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & (-a \oplus -c) \\ (-d \oplus -b) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & (-c \oplus -a) \\ (-b \oplus -d) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

serta

$$\begin{aligned}
A \oplus B &= \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -b & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -c \\ -d & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & (-a \oplus -c) \\ (-b \oplus -d) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & (-c \oplus -a) \\ (-b \oplus -d) & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Hasil dari perhitungan tersebut menunjukkan bahwa $A \otimes B = B \otimes A = A \oplus B$.

3. Terbukti bahwa untuk setiap dua matriks $A, B \in \mathbb{R}^2_{nor}$ seperti lema tersebut, maka berlaku $A \otimes B = B \otimes A = A \oplus B$. ■

Contoh 3.2

Misalkan dipunyai matriks $A, B \in \mathbb{R}^2_{nor}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 0 & -11 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$. Akan ditunjukkan bahwa $A \otimes B = B \otimes A = A \oplus B$.

Diperhatikan perkalian dari $A \otimes B$ dan $B \otimes A$ serta penjumlahan $A \oplus B$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
A \otimes B &= \begin{bmatrix} 0 & -11 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -7 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (0 \otimes 0) \oplus (-11 \otimes -7) & (0 \otimes -5) \oplus (-11 \otimes 0) \\ (-2 \otimes 0) \oplus (0 \otimes -7) & (-2 \otimes -5) \oplus (0 \otimes 0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (0 + 0) \oplus (-11 + -7) & (0 + -5) \oplus (-11 + 0) \\ (-2 + 0) \oplus (0 + -7) & (-2 + -5) \oplus (0 + 0) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \oplus -18 & -5 \oplus -11 \\ -2 \oplus -7 & -7 \oplus 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \max(0,-18) & \max(-5,-11) \\ \max(-2,-7) & \max(-7,0) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -7 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -11 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (0 \otimes 0) \oplus (-5 \otimes -2) & (0 \otimes -11) \oplus (-5 \otimes 0) \\ (-7 \otimes 0) \oplus (0 \otimes -2) & (-7 \otimes -11) \oplus (0 \otimes 0) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (0 + 0) \oplus (-5 + -2) & (0 + -11) \oplus (-5 + 0) \\ (-7 + 0) \oplus (0 + -2) & (-7 + -11) \oplus (0 + 0) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \oplus -7 & -11 \oplus -5 \\ -7 \oplus -2 & -18 \oplus 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \max(0,-7) & \max(-11,-5) \\ \max(-7,-2) & \max(-18,0) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

serta

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 0 & -11 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 \oplus 0 & -11 \oplus -5 \\ -2 \oplus -7 & 0 \oplus 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(0,0) & \max(-11,-5) \\ \max(-2,-7) & \max(0,0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Jadi, diperoleh $A \otimes B = B \otimes A = A \oplus B = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Pada bab ini akan dibahas mengenai definisi dan teorema dari beberapa bentuk matriks normal yang bersifat komutatif atas aljabar max-plus pada ordo lebih dari 2. Berikut beberapa definisi awal yang perlu diperhatikan.

Definisi 3.1 *Untuk setiap matriks* $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^n_{nor}$, *didefinisikan*

$$m(A) = \min_{i \neq j \in [n]} a_{i,j}$$

dan

$$M(A) = \max_{i \neq j \in [n]} a_{i,j}.$$

Contoh 3.3

Misalkan dipunyai matriks $A \in \mathbb{R}^n_{nor}$ *dengan* $A = \begin{bmatrix} 0 & -19 & -7 \\ -5 & 0 & -10 \\ -9 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, *maka* $m(A) = -19$ *dan* $M(A) = -3$.

Definisi 3.2 *Untuk setiap* $A, B \in \mathbb{R}^n_{nor}$, *didefinisikan suatu matriks* $T = (t_{i,j}) := A \oplus B$.

Contoh 3.4

Misalkan dipunyai matriks $A, B \in \mathbb{R}^3_{nor}$ *dengan* $A = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -5 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ *dan* $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. *Akan ditunjukan matriks* T *yang terbentuk. Diperhatikan penjumlahan* $A \oplus B$ *berikut*

$$
\begin{aligned}
T &= A \oplus B \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -7 & -5 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \oplus 0 & -7 \oplus -2 & -5 \oplus 0 \\ -3 \oplus -1 & 0 \oplus 0 & 0 \oplus -4 \\ -2 \oplus -6 & -1 \oplus -1 & 0 \oplus 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(0,0) & \max(-7,-2) & \max(-5,0) \\ \max(-3,-1) & \max(0,0) & \max(0,-4) \\ \max(-2,-6) & \max(-1,-1) & \max(0,0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Jadi, Matriks T *yang terbentuk dari dua matriks* A *dan* B *tersebut adalah* $T = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Definisi 3.3 *Untuk setiap matriks* $A \in \mathbb{R}^n_{nor}$, *didefinisikan himpunan* $K(A)$ *dengan elemennya merupakan matriks pada* $\mathbb{R}^n_{nor}$

yang bersifat komutatif dengan A yakni

$$K(A) = \{B \in \mathbb{R}^n_{nor} : A \otimes B = B \otimes A\}.$$

A. Komutatif Matriks Normal dengan Matriks $E_{i,j}(-r)$

Berikut ini diberikan definisi matriks $E_{i,j}(r)$ menurut Linde dan Puente (2015) serta diberikan juga proposisi komutatif matriks normal dengan matriks $E_{i,j}(-r)$. Kemudian diberikan contoh yang berkaitan.

Definisi 3.4 *Untuk setiap bilangan real $r \leq 0$, dan $i, j \in [n]$ dimana $i \neq j$, matriks persegi $E_{i,j}(r) \in \mathbb{R}^n_{nor}$ didefinisikan sebagai matriks dengan (i, j) entrinya adalah r dan nol pada entri lainnya.*

Contoh 3.5

Matriks $E_{1,2}(-9) = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *merupakan matriks* $E_{i,j}(r)$ *dengan* $i, j = 1, 2$ *dan* $r = -9$.

Proposisi 3.1 *Untuk setiap matriks $A \in \mathbb{R}^n_{nor}$, terdapat $\epsilon > 0$ dan $i, j \in [n]$ dengan $i \neq j$ sedemikian sehingga $E_{i,j}(-\epsilon) \in K(A)$.*

Bukti dari proposisi (3.1) adalah sebagai berikut:

1. Diambil sembarang matriks $A \in \mathbb{R}^n_{nor}$ dan diambil $i, j \in [n]$ serta $\epsilon > 0$.

2. Akan dibuktikan terdapat $\epsilon > 0$ dan $i, j \in [n]$ sedemikian sehingga $E_{i,j}(-\epsilon) \in K(A)$ yakni $A \otimes E_{i,j}(-\epsilon) = E_{i,j}(-\epsilon) \otimes A$.

Diperhatikan $A \otimes E_{i,j}(-\epsilon) = E_{i,j}(\alpha)$ dan $E_{i,j}(-\epsilon) \otimes A = E_{i,j}(\beta)$ dengan α dan β sebagai berikut

$$\alpha = \max\{a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}, -\epsilon\}$$
$$\beta = \max\{a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{n,j}, -\epsilon\}.$$

Kemudian diperhatikan

- Jika $a_{i,j} = 0$ maka diperoleh $\alpha = \beta = a_{i,j} = 0$ sehingga $A \otimes E_{i,j}(-\epsilon) = E_{i,j}(-\epsilon) \otimes A = E_{i,j}(0) = Z$ dengan Z merupakan matriks *zero* yang semua entrinya nol.
- Jika matriks A ***strictly normal*** maka didapati $M(A) < 0$. Untuk setiap ϵ dengan $M(A) < -\epsilon < 0$ yang terletak di setiap $i \neq j$, diperoleh $\alpha = \beta = -\epsilon$. Sehingga $A \otimes E_{i,j}(-\epsilon) = E_{i,j}(-\epsilon) \otimes A = E_{i,j}(-\epsilon)$.

Sehingga diperoleh terdapat $\epsilon > 0$ dan $i, j \in [n]$ dengan $i \neq j$ sedemikian sehingga untuk setiap $A \in \mathbb{R}^n_{nor}$ berlaku $A \otimes E_{i,j}(-\epsilon) = E_{i,j}(-\epsilon) \otimes A$.

3. Terbukti bahwa untuk setiap matriks $A \in \mathbb{R}^n_{nor}$, terdapat $\epsilon > 0$ dan $i, j \in [n]$ dengan $i \neq j$ sedemikian sehingga berlaku $A \otimes E_{i,j}(-\epsilon) = E_{i,j}(-\epsilon) \otimes A$. Sehingga $E_{i,j}(-\epsilon) \in K(A)$. ■

Contoh 3.6

Misalkan dipunyai $A \in \mathbb{R}^3_{nor}$ *dengan* $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -8 & 0 & 0 \\ -13 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ *dan dipunyai* $i, j = 2, 3$ *serta* $r = -6$ *sehingga diperoleh matriks* $E_{i,j}(r) = E_{2,3}(-6) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Akan ditunjukkan* $E_{2,3}(-6) \in$

$K(A)$.

Diperhatikan perkalian $A \otimes E_{2,3}(-6)$ *dan* $E_{2,3}(-6) \otimes A$ *berikut*

$$
\begin{aligned}
A \otimes E_{2,3}(-6) &= \begin{bmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -8 & 0 & 0 \\ -13 & -1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \oplus -4 \oplus -6 & 0 \oplus -4 \oplus -6 & 0 \oplus -10 \oplus -6 \\ -8 \oplus 0 \oplus 0 & -8 \oplus 0 \oplus 0 & -8 \oplus -6 \oplus 0 \\ -13 \oplus -1 \oplus 0 & -13 \oplus -1 \oplus 0 & -13 \oplus -7 \oplus 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(0,-4,-6) & \max(0,-4,-6) & \max(0,-10,-6) \\ \max(-8,0,0) & \max(-8,0,0) & \max(-8,-6,0) \\ -13,-1,0 & \max(-13,-1,0) & \max(-13,-7,0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
E_{2,3}(-6) \otimes A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -8 & 0 & 0 \\ -13 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \oplus -8 \oplus -13 & -4 \oplus 0 \oplus -1 & -6 \oplus 0 \oplus 0 \\ 0 \oplus -8 \oplus -19 & -4 \oplus 0 \oplus -7 & -6 \oplus 0 \oplus -6 \\ 0 \oplus -8 \oplus -13 & -4 \oplus 0 \oplus -1 & -6 \oplus 0 \oplus 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(0,-8,-13) & \max(-4,0,-1) & \max(-6,0,0) \\ \max(0,-8,-19) & \max(-4,0,-7) & \max(-6,0,-6) \\ \max(0,-8,-13) & \max(-4,0,-1) & \max(-6,0,0) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $A \otimes E_{2,3}(-6) = E_{2,3}(-6) \otimes A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Maka $E_{2,3}(-6) \in K(A)$.

B. Komutatif Matriks Normal dengan Kondisi $a_{i,k} \otimes b_{k,j} \leq t_{i,j}$

Berikut ini diberikan definisi himpunan bagian $K^T(A)$ dan proposisi komutatif matriks $A = (a_{i,j})$ dan $B = (b_{i,j})$ serta matriks $T = (t_{i,j}) := A \oplus B$ dengan kondisi $a_{i,k} \otimes b_{k,j} \leq t_{i,j}$ untuk $i, j, k \in [n]$ menurut Linde dan Puente (2015). Kemudian diberikan contoh yang berkaitan.

Definisi 3.5 *Pada himpunan* $K(A)$, *suatu himpunan bagian* $K^T(A) \subseteq K(A)$ *didefinisikan untuk setiap* $A \in \mathbb{R}^n_{nor}$ *berlaku*

$$K^T(A) = \{B \in \mathbb{R}^n_{nor} : A \otimes B = B \otimes A = T\}$$

dimana $T = A \oplus B$.

Proposisi 3.2 *Untuk setiap* $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^n_{nor}$ *dan* $T = (t_{i,j}) := A \oplus B$, *jika* $a_{i,k} \otimes b_{k,j} \leq t_{i,j}$ *untuk* $i, j, k \in [n]$, *maka* $B \in K^T(A)$.

Bukti dari proposisi (3.2) adalah sebagai berikut:

1. Diambil sembarang $A, B \in \mathbb{R}^n_{nor}$ dengan $a_{i,k} \otimes b_{k,j} \leq t_{i,j}$ untuk $i, j, k \in [n]$.

2. Akan dibuktikan $B \in K^T(A)$, yakni $A \otimes B = B \otimes A = T$. Karena baik matriks A dan B merupakan matriks normal, maka dipunyai $I \leq A \leq Z$ dan $I \leq B \leq Z$. Dan karena matriks atas aljabar max-plus monoton naik sehingga perkalian tidak merubah pertidaksamaan. Pada persamaan pertama setiap ruasnya dikali dengan B dari kanan sehingga diperoleh

$$I \otimes B \leq A \otimes B \leq Z \otimes B \Leftrightarrow B \leq A \otimes B \leq Z.$$

Pada persamaan kedua setiap ruasnya dikalikan dengan A dari kanan sehingga diperoleh

$$I \otimes A \leq B \otimes A \leq Z \otimes A \Leftrightarrow A \leq B \otimes A \leq Z.$$

Kemudian kedua persamaan terakhir dijumlahkan $\oplus$ sehingga diperoleh

$$A \oplus B \leq A \otimes B \oplus B \otimes A \leq Z \oplus Z$$

sehingga didapati $T \leq A \otimes B$ dan $T \leq B \otimes A$.
Diawal kita juga punyai $a_{i,k} \otimes b_{k,j} \leq t_{i,j}$ untuk $i, j, k \in [n]$ yang mengakibatkan $A \otimes B \leq T$ dan $B \otimes A \leq T$. Dari penjelasan tersebut diperoleh $A \otimes B \leq T$ dan $T \leq A \otimes B$ sehingga $A \otimes B = T$ serta diperoleh $B \otimes A \leq T$ dan $T \leq B \otimes A$ sehingga $B \otimes A = T$. Maka hasil dari pembuktian di atas menunjukkan bahwa $A \otimes B = B \otimes A = T$.

3. Terbukti bahwa untuk setiap $A, B \in \mathbb{R}^n_{nor}$ dengan $a_{i,k} \otimes b_{k,j} \leq t_{i,j}$, maka $A \otimes B = B \otimes A = T$. Sehingga $B \in K^T(A)$. ■

Contoh 3.7

Misalkan dipunyai dua matriks $A, B \in \mathbb{R}^3_{nor}$ *dengan* $A = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -2 \\ -8 & 0 & -11 \\ -7 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ *dan* $B = \begin{bmatrix} 0 & -8 & -9 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \end{bmatrix}$. *Akan ditunjukkan bahwa* $a_{i,k} \otimes b_{k,j} \leq t_{i,j}$ *untuk setiap* $i, j, k \in [3]$ *sehingga* $B \in K^T(A)$. *Diperhatikan bahwa matriks* $T = A \oplus B$ *adalah sebagai berikut*

$$
\begin{aligned}
T = A \oplus B &= \begin{bmatrix} 0 & -6 & -2 \\ -8 & 0 & -11 \\ -7 & -3 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -8 & -9 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \oplus 0 & -6 \oplus -8 & -2 \oplus -9 \\ -8 \oplus -3 & 0 \oplus 0 & -11 \oplus 0 \\ -7 \oplus -1 & -3 \oplus -5 & 0 \oplus 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(0,0) & \max(-6,-8) & \max(-2,-9) \\ \max(-8,-3) & \max(0,0) & \max(-11,0) \\ \max(-7,-1) & \max(-3,-5) & \max(0,0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -6 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dari operasi penjumlahan $\oplus$ *di atas terlihat bahwa untuk setiap* $i, j, k \in [3]$ *berlaku* $a_{i,k} \otimes b_{i,k} \leq t_{i,k}$. *Sehingga hasil kali matriks* $A \otimes B$ *dan* $B \otimes A$ *adalah sebagai berikut*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -2 \\ -8 & 0 & -11 \\ -7 & -3 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -8 & -9 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \oplus -9 \oplus -3 & -8 \oplus -6 \oplus -7 & -9 \oplus -6 \oplus -2 \\ -8 \oplus -3 \oplus -12 & -16 \oplus 0 \oplus -16 & -17 \oplus 0 \oplus -11 \\ -7 \oplus -6 \oplus -1 & -15 \oplus -3 \oplus -5 & -16 \oplus -3 \oplus 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(0,-9,-3) & \max(-8,-6,-7) & \max(-9,-6,-2) \\ \max(-8,-3,-12) & \max(-16,0,-16) & \max(-17,0,-11) \\ \max(-7,-6,-1) & \max(-15,-3,-5) & \max(-16,-3,0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -6 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 0 & -8 & -9 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -6 & -2 \\ -8 & 0 & -11 \\ -7 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \oplus -16 \oplus -16 & -6 \oplus -8 \oplus -12 & -2 \oplus -19 \oplus -9 \\ -3 \oplus -8 \oplus -7 & -9 \oplus 0 \oplus -3 & -5 \oplus -11 \oplus 0 \\ -1 \oplus -13 \oplus -7 & -7 \oplus -5 \oplus -3 & -3 \oplus -16 \oplus 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(0,-16,-16) & \max(-6,-8,-12) & \max(-2,-19,-9) \\ \max(-3,-8,-7) & \max(-9,0,-3) & \max(-5,-11,0) \\ \max(-1,-13,-7) & \max(-7,-5,-3) & \max(-3,-16,0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -6 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh $A \otimes B = B \otimes A = T = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. *Maka* $B \in K^T(A)$.

C. Komutatif Matriks Normal dengan Entri *Non*-diagonal Matriks Berada pada Interval $[2r, r]$

Berikut ini diberikan teorema komutatif dengan entri *non-diagonal* matriks normal berada pada interval $[2r, r]$ menurut Linde dan Puente (2015). Kemudian diberikan contoh yang berkaitan.

Teorema 3.1 *Untuk setiap bilangan asli* n *dan setiap bilangan real* $r \leq 0$*, dua matriks* A, B *pada ordo* n *dengan entri pada diagonal matriks adalah nol dan entri pada non-diagonal matriks berada pada interval* $[2r, r]$ *akan memenuhi* $A \otimes B = B \otimes A = T$. *Sehingga* $B \in K^T(A)$.

Bukti dari teorema (3.1) adalah sebagai berikut

1. Diambil sembarang bilangan asli n dan sembarang bilangan real $r \leq 0$ serta sembarang dua matriks A, B dengan entri diagonal matriks adalah nol dan entri *non*-diagonal matriks berada pada interval $[2r, r]$.

2. Akan dibuktikan $B \in K^T(A)$ yakni $A \otimes B = B \otimes A = T$. Diperhatikan $A \otimes B$ berikut

    - pada $a_{i,i} = 0$ dan $b_{i,j} \leq r$ untuk setiap $i, j \in [n]$, diperoleh $a_{i,i} \otimes b_{i,j} \leq r \leq a_{i,i}$ sehingga $(A \otimes B)_{i,j} = a_{i,i}$.

- pada $a_{i,j} \leq r$ dan $b_{i,i} = 0$ untuk setiap $i, j \in [n]$, diperoleh $a_{i,j} \otimes b_{i,i} \leq r \leq b_{i,i}$ sehingga $(A \otimes B)_{i,j} = b_{i,i}$.
- pada $a_{i,j} \leq r$ dan $b_{i,j} \leq r$ untuk $i \neq j \in [n]$, diperoleh untuk $k \in [n]$ sedemikian sehingga $a_{i,k} \otimes b_{k,j} \leq 2r \leq a_{i,j}, b_{i,j}$ sehingga $(A \otimes B)_{i,j} = a_{i,j} \oplus b_{i,j}$.

Sehingga untuk setiap $i, j, k \in [n]$, berlaku $a_{i,k} \otimes b_{k,j} = a_{i,j} \oplus b_{i,j} \Leftrightarrow (A \otimes B)_{i,j} = (A \oplus B)_{i,j} \Leftrightarrow A \otimes B = A \oplus B \Leftrightarrow A \otimes B = T$.
Diperhatikan juga $B \otimes A$ berikut

- pada $b_{i,i} = 0$ dan $a_{i,j} \leq r$ untuk setiap $i, j \in [n]$, diperoleh $b_{i,i} \otimes a_{i,j} \leq r \leq b_{i,i}$ sehingga $(B \otimes A)_{i,j} = b_{i,i}$.
- pada $b_{i,j} \leq r$ dan $a_{i,i} = 0$ untuk $i, j \in [n]$, diperoleh $b_{i,j} \otimes a_{i,i} \leq r \leq a_{i,i}$ sehingga $(B \otimes A)_{i,j} = a_{i,i}$.
- pada $b_{i,j} \leq r$ dan $a_{i,j} \leq r$ untuk $i \neq j \in [n]$, diperoleh untuk $k \in [n]$ sedemikian sehingga $b_{i,k} \otimes a_{k,j} \leq 2r \leq a_{i,j}, b_{i,j}$ sehingga $B \otimes A_{i,j} = a_{i,j} \oplus b_{i,j}$.

Sehingga untuk setiap $i, j, k \in [n]$, berlaku $b_{i,k} \otimes a_{k,j} = a_{i,j} \oplus b_{i,j} \Leftrightarrow (B \otimes A)_{i,j} = (A \oplus B)_{i,j} \Leftrightarrow B \otimes A = A \oplus B \Leftrightarrow B \otimes A = T$.
Dari pembuktian di atas, diperoleh $A \otimes B = B \otimes A = T$.

3. Terbukti bahwa jika untuk setiap A, B dengan entri diagonal matriks adalah nol dan entri *non*-diagonal matriks berada pada interval $[2r, r]$, maka berlaku $A \otimes B = B \otimes A = T$. Sehingga $B \in K^T(A)$. $\blacksquare$

Contoh 3.8

Misalkan dipunyai $r = -5$ *dan matriks pada ordo* $n = 3$*. Dan* *dipunyai dua matriks A, B dengan entri diagonal matriks adalah nol dan entri non-diagonal matriks berada pada interval* $[-10, -5]$ *yakni* $A = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -7 \\ -8 & 0 & -9 \\ -6 & -9 & 0 \end{bmatrix}$ *dan* $B = \begin{bmatrix} 0 & -9 & -8 \\ -5 & 0 & -10 \\ -7 & -9 & 0 \end{bmatrix}$. *Akan ditunjukkan bahwa* $B \in K^T(A)$.

Diperhatikan hasil kali dari $A \otimes B$ dan $B \otimes A$ berikut

$$
\begin{aligned}
A \otimes B &= \begin{bmatrix} 0 & -6 & -7 \\ -8 & 0 & -9 \\ -6 & -9 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -9 & -8 \\ -5 & 0 & -10 \\ -7 & -9 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \oplus -11 \oplus -14 & -9 \oplus -6 \oplus -16 & -8 \oplus -16 \oplus -7 \\ -8 \oplus -5 \oplus -16 & -17 \oplus 0 \oplus -18 & -16 \oplus -10 \oplus -9 \\ -6 \oplus -14 \oplus -7 & -15 \oplus -9 \oplus -9 & -14 \oplus -19 \oplus 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(0, -11, -14) & \max(-9, -6, -16) & \max(-8, -16, -7) \\ \max(-8, -5, -16) & \max(-17, 0, -18) & \max(-16, -10, -9) \\ \max(-6, -14, -7) & \max(-15, -9, -9) & \max(-14, -19, 0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -6 & -7 \\ -5 & 0 & -9 \\ -6 & -9 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
B \otimes A &= \begin{bmatrix} 0 & -9 & -8 \\ -5 & 0 & -10 \\ -7 & -9 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -6 & -7 \\ -8 & 0 & -9 \\ -6 & -9 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \oplus -17 \oplus -14 & -6 \oplus -9 \oplus -17 & -7 \oplus -18 \oplus -8 \\ -5 \oplus -8 \oplus -16 & -11 \oplus 0 \oplus -19 & -12 \oplus -9 \oplus -10 \\ -7 \oplus -17 \oplus -6 & -13 \oplus -9 \oplus -9 & -14 \oplus -18 \oplus 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{bmatrix} \max(0,-17,-14) & \max(-6,-9,-17) & \max(-7,-18,-8) \\ \max(-5,-8,-16) & \max(-11,0,-19) & \max(-12,-9,-10) \\ \max(-7,-17,-6) & \max(-13,-9,-9) & \max(-14,-18,0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -6 & -7 \\ -5 & 0 & -9 \\ -6 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

diperhatikan pula matriks $T = A \oplus B$ berikut

$$T = A \oplus B = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -7 \\ -8 & 0 & -9 \\ -6 & -9 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -9 & -8 \\ -5 & 0 & -10 \\ -7 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \oplus 0 & -6 \oplus -9 & -7 \oplus -8 \\ -8 \oplus -5 & 0 \oplus 0 & -9 \oplus -10 \\ -6 \oplus -7 & -9 \oplus -9 & 0 \oplus 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(0,0) & \max(-6,-9) & \max(-7,-8) \\ \max(-8,-5) & \max(0,0) & \max(-9,-10) \\ \max(-6,-7) & \max(-9,-9) & \max(0,0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -6 & -7 \\ -5 & 0 & -9 \\ -6 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh bahwa $A \otimes B = B \otimes A = T = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -7 \\ -5 & 0 & -9 \\ -6 & -9 & 0 \end{bmatrix}$.

Maka $B \in K^T(A)$.

D. Komutatif Matriks Normal di Antara Matriks A^{n-2} dan A^*

Berikut ini diberikan definisi himpunan bagian $K^{A^*}(A)$ dan proposisi komutatif yang berhubungan dengan matriks *Kleene Star* (A^*) menurut Linde dan Puente (2015) serta diberikan contoh yang sesuai.

Definisi 3.6 *Pada himpunan $K(A)$, suatu himpunan bagian $K^{A^*}(A) \subseteq K(A)$ didefinisikan untuk setiap $A \in \mathbb{R}^n_{nor}$ berlaku*

$$K^{A^*}(A) = \{B \in \mathbb{R}^n_{nor} : A \otimes B = B \otimes A = A^*\}.$$

Proposisi 3.3 *Untuk setiap $A, B \in \mathbb{R}^n_{nor}$, jika $A^{n-2} \leq B \leq A^*$ maka $B \in K^{A^*}(A)$.*

Bukti dari proposisi (3.3) adalah sebagai berikut:

1. Diambil sembarang $A, B \in \mathbb{R}^n_{nor}$ dengan $A^{n-2} \leq B \leq A^*$.
2. Akan dibuktikan $B \in K^{A^*}(A)$, yakni $A \otimes B = B \otimes A = A^*$.
   Diperhatikan $A \otimes B$ berikut
   Karena dipunyai $A^{n-2} \leq B \leq A^*$ dan perkalian matriks normal monoton naik maka perkalian tidak merubah tanda sehingga persamaan tersebut dikalikan dengan matriks A dari kiri diperoleh

   $$\begin{aligned} A \otimes A^{n-2} &\leq A \otimes B \leq A \otimes A^* \\ \Leftrightarrow A^{n-1} &\leq A \otimes B \leq A^*. \end{aligned}$$

   Berdasarkan definisi *Klenee star* pada matriks normal yakni $A^{n-1} = A^n = A^{n+1} = \cdots = A^*$, maka diperoleh $A^* \leq A \otimes B \leq A^*$ sehingga mengakibatkan $A \otimes B = A^*$.

Diperhatikan pula $B \otimes A$ berikut

Karena dipunyai $A^{n-2} \leq B \leq A^*$ dan perkalian matriks normal monoton naik maka perkalian tidak merubah tanda sehingga persamaan tersebut dikalikan dengan matriks A dari kanan diperoleh

$$\begin{aligned} & A^{n-2} \otimes A \leq B \otimes A \leq A^* \otimes A \\ \Leftrightarrow & A^{n-1} \leq B \otimes A \leq A^*. \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi *Klenee star* yakni $A^{n-1} = A^n = A^{n+1} = \cdots = A^*$, maka diperoleh $A^* \leq B \otimes A \leq A^*$ sehingga mengakibatkan $B \otimes A = A^*$.

Sehingga hasil dari pembuktian di atas menunjukkan bahwa $A \otimes B = B \otimes A = A^*$.

3. Terbukti bahwa untuk setiap $A, B \in \mathbb{R}^n_{nor}$ dengan $A^{n-2} \leq B \leq A^*$, maka berlaku $A \otimes B = B \otimes A = A^*$. Sehingga $B \in K^{A^*}(A)$. ■

Contoh 3.9

Misal dipunyai suatu matriks $A, B \in \mathbb{R}^4_{nor}$ *dengan* $A = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -2 & -8 \\ -4 & 0 & -6 & 0 \\ -9 & -6 & 0 & -4 \\ -1 & -8 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ *dan* $B = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & -4 & 0 \\ -5 & -6 & 0 & -4 \\ -1 & -8 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. *Akan ditunjukkan* $B \in K^{A^*}(A)$.

Diperhatikan bahwa hasil pangkat A^{n-2} *sebagai berikut*

$$A^{n-2} = A^{4-2} = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & -5 & 0 \\ -5 & -6 & 0 & -4 \\ -1 & -8 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

serta matriks kleene star A^* *adalah sebagai berikut*

$$A^* = A^{n-1} = A^{4-1} = A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ -5 & -6 & 0 & -4 \\ -1 & -8 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas dapat dilihat bahwa $A^2 \leq B \leq A^*$*. Sehingga hasil kali* $A \otimes B$ *dan* $B \otimes A$ *adalah sebagai berikut*

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{bmatrix} 0 & -7 & -2 & -8 \\ -4 & 0 & -6 & 0 \\ -9 & -6 & 0 & -4 \\ -1 & -8 & -5 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -7 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & -4 & 0 \\ -5 & -6 & 0 & -4 \\ -1 & -8 & -3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -7 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ -5 & -6 & 0 & -4 \\ -1 & -8 & -3 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dan

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & -4 & 0 \\ -5 & -6 & 0 & -4 \\ -1 & -8 & -3 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -7 & -2 & -8 \\ -4 & 0 & -6 & 0 \\ -9 & -6 & 0 & -4 \\ -1 & -8 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -7 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ -5 & -6 & 0 & -4 \\ -1 & -8 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, diperoleh $A \otimes B = B \otimes A = A^* = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ -5 & -6 & 0 & -4 \\ -1 & -8 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

Maka $B \in K^{A^*}(A)$.

E. Komutatif Matriks Normal di Antara Matriks I dan $P(m(A))$

Berikut ini diberikan definisi himpunan bagian $K^A(A)$ dan definisi matriks $P(r)$ serta proposisi komutatif matriks normal di antara matriks I dan $P(m(A))$ menurut Linde dan Puente (2015). Kemudian diberikan contoh yang berkaitan.

Definisi 3.7 *Pada himpunan* $K(A)$*, suatu himpunan bagian* $K^A(A) \subseteq K(A)$ *didefinisikan untuk setiap* $A \in \mathbb{R}^n_{nor}$ *berlaku*

$$K^A(A) = \{B \in \mathbb{R}^n_{nor} : A \otimes B = B \otimes A = A\}.$$

Definisi 3.8 *Untuk setiap* $r \in \mathbb{R}_{\max}$*, suatu matriks* $P(r) = (p_{i,j}) \in \mathbb{R}^n_{nor}$ *didefinisikan sebagai*

$$P(r) = (p_{i,j}) = \begin{cases} p_{i,j} = 0 & ; i = j \\ p_{i,j} = r & ; i \neq j \end{cases}$$

Contoh 3.10

Matriks identitas $I = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix}$ *merupakan matriks* $P(\varepsilon)$*.*

Proposisi 3.4 *Untuk setiap* $A, B \in \mathbb{R}^n_{nor}$*, jika* $I \leq B \leq P(m(A))$*, maka* $B \in K^A(A)$*.*

Bukti dari proposisi (3.4) adalah sebagai berikut:

1. Diambil sembarang $A, B \in \mathbb{R}^n_{nor}$ dengan $I \leq B \leq P(m(A)$ sehingga dipunyai $b_{i,j} \leq m(A)$ untuk setiap $i, j \in [n]$ dan $i \neq j$.

2. Akan dibuktikan $B \in K^A(A)$, yakni $A \otimes B = B \otimes A = A$. Diperhatikan $A \otimes B$ berikut

   - pada $(A \otimes B)_{i,i}$, terdapat $a_{i,i} = 0$ dan $b_{i,i} = 0$ sehingga $a_{i,i} \otimes b_{i,i} = 0 \otimes 0 = 0 = a_{i,i}$. Jelas bahwa 0 merupakan entri maksimal sehingga $(A \otimes B)_{i,i} = a_{i,i}$
   - pada $(A \otimes B)_{i,j}$, untuk $i, j, k \in [n]$ dan $i \neq k \neq j$ diperoleh $a_{i,k} \otimes b_{k,j} \leq a_{i,k} \otimes m(A) \leq m(A) \leq a_{i,j}$, dan ketika $k = j$ diperoleh $a_{i,j}$ dan $b_{j,j} = 0$ maka $a_{i,j} \otimes b_{j,j} \leq a_{i,j} \otimes 0 \leq a_{i,j}$, serta ketika $i = j$ diperoleh $a_{i,i} = 0$ dan $b_{i,j} \leq m(A)$ maka $a_{i,i} \otimes b_{i,j} \leq 0 \otimes m(A) \leq m(A) \leq a_{i,j}$. Sehingga $(A \otimes B)_{i,j} = \max_{k \in [n]} a_{i,k} \otimes b_{k,j} = a_{i,j}$. Sehingga diperoleh $(A \otimes B)_{i,j} = a_{i,j}$.

Maka didapati untuk setiap $i, j, k \in [n]$, berlaku $(A \otimes B)_{i,j} = a_{i,k} \otimes b_{k,j} = a_{i,j}$. Sehingga $A \otimes B = A$.
Diperhatikan juga $B \otimes A$ berikut

- pada $(B \otimes A)_{i,i}$, terdapat $b_{i,i} = 0$ dan $a_{i,i} = 0$ sehingga $b_{i,i} \otimes a_{i,i} = 0 \otimes 0 = 0 = a_{i,i}$. Jelas bahwa 0 merupakan entri maksimal sehingga $(B \otimes A)_{i,i} = a_{i,i}$
- pada $(B \otimes A)_{i,j}$, untuk $i, j, k \in [n]$ dan $i \neq k \neq j$ diperoleh $b_{i,k} \otimes a_{k,j} \leq m(A) \otimes a_{k,j} \leq m(A) \leq a_{i,j}$, dan ketika $k = j$ diperoleh $b_{i,j}$ dan $a_{j,j} = 0$ maka $b_{i,j} \otimes a_{j,j} \leq m(A) \otimes 0 \leq m(A) \leq a_{i,j}$, serta ketika $i = j$ diperoleh $b_{i,i} = 0$ dan $a_{i,j}$ maka $b_{i,i} \otimes a_{i,j} \leq 0 \otimes a_{i,j} \leq a_{i,j}$. Sehingga $(B \otimes A)_{i,j} = \max_{k \in [n]} b_{i,k} \otimes a_{k,j} = a_{i,k}$ Sehingga diperoleh $(B \otimes A)_{i,j} = a_{i,j}$.

Maka didapati untuk setiap $i, j, k \in [n]$, berlaku $(B \otimes A)_{i,j} = b_{i,k} \otimes a_{k,j} = a_{i,j}$. Sehingga $B \otimes A = A$.
Hasil dari pembuktian di atas menunjukkan bahwa $A \otimes B = B \otimes A = A$.

3. Terbukti bahwa untuk setiap $A, B \in R^n_{nor}$ dengan $I \leq B \leq P(m(A))$, maka berlaku $A \otimes B = B \otimes A = A$. Sehingga $B \in K^A(A)$. ■

Contoh 3.11

Misalkan dipunyai matriks $A, B \in R^3_{nor}$ *dengan* $A = \begin{bmatrix} 0 & -8 & -4 \\ -2 & 0 & -6 \\ -9 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ *dan* $B = \begin{bmatrix} 0 & -10 & -13 \\ -16 & 0 & -9 \\ -9 & -10 & 0 \end{bmatrix}$. *Akan ditunjukkan bahwa* $B \in K^A(A)$.

Diperhatikan bahwa $m(A) = -9$ *sehingga diperoleh*

$P(m(A)) = \begin{bmatrix} 0 & -9 & -9 \\ -9 & 0 & -9 \\ -9 & -9 & 0 \end{bmatrix}$. *Dari sini dapat dilihat bahwa* $I \leq B \leq P(m(A))$. *Sehingga hasil kali* $A \otimes B$ *dan* $B \otimes A$ *adalah sebagai berikut*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 0 & -8 & -4 \\ -2 & 0 & -6 \\ -9 & -5 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -10 & -13 \\ -16 & 0 & -9 \\ -9 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \oplus -24 \oplus -13 & -10 \oplus -8 \oplus -14 & -13 \oplus -17 \oplus -4 \\ -2 \oplus -16 \oplus -15 & -12 \oplus 0 \oplus -16 & -15 \oplus -9 \oplus -6 \\ -9 \oplus -21 \oplus -9 & -19 \oplus -5 \oplus -10 & -22 \oplus -14 \oplus 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(0, -24, -13) & \max(-10, -8, -14) & \max(-13, -17, -4) \\ \max(-2, -16, -15) & \max(-12, 0, -16) & \max(-15, -9, -6) \\ \max(-9, -21, -9) & \max(-19, -5, -10) & \max(-22, -14, 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -8 & -4 \\ -2 & 0 & -6 \\ -9 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 0 & -10 & -13 \\ -16 & 0 & -9 \\ -9 & -10 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -8 & -4 \\ -2 & 0 & -6 \\ -9 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \oplus -12 \oplus -22 & -8 \oplus -10 \oplus -18 & -4 \oplus -16 \oplus -13 \\ -16 \oplus -2 \oplus -18 & -24 \oplus 0 \oplus -14 & -20 \oplus -6 \oplus -9 \\ -9 \oplus -12 \oplus -9 & -17 \oplus -10 \oplus -5 & -13 \oplus -16 \oplus 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(0,-12,-22) & \max(-8,-10,-18) & \max(-4,-16,-13) \\ \max(-16,-2,-18) & \max(-24,0,-14) & \max(-20,-6,-9) \\ \max(-9,-12,-9) & \max(-17,-10,-5) & \max(-13,-16,0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -8 & -4 \\ -2 & 0 & -6 \\ -9 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $A \otimes B = B \otimes A = A = \begin{bmatrix} 0 & -8 & -4 \\ -2 & 0 & -6 \\ -9 & -5 & 0 \end{bmatrix}$. *Maka* $B \in K^A(A)$.

F. Komutatif Matriks Normal di Antara Matriks $P(M(A))$ dan Z

Berikut ini diberikan definisi himpunan bagian $K^B(A)$. Kemudian diberikan juga proposisi komutatif matriks normal di antara matriks $P(M(A))$ dan Z menurut Linde dan Puente (2015). Selanjutnya diberikan contoh yang relevan.

Definisi 3.9 *Pada himpunan* $K(A)$, *suatu himpunan bagian* $K^B(A) \subseteq K(A)$ *didefinisikan untuk setiap* $A \in \mathbb{R}^n_{nor}$ *berlaku*

$$K^B(A) = \{B \in \mathbb{R}^n_{nor} : A \otimes B = B \otimes A = B\}.$$

Proposisi 3.5 *Untuk setiap matriks* $A, B \in \mathbb{R}^n_{nor}$, *jika* A *matriks strictly normal dan* $P(M(A)) \leq B \leq Z$, *maka* $B \in K^B(A)$.

Bukti dari proposisi (3.5) adalah sebagai berikut:

1. Diambil sembarang $A, B \in \mathbb{R}^n_{nor}$ dengan A merupakan matriks normal dan $P(M(A)) \leq B \leq Z$ sehingga dipunyai $M(A) < 0$ dan $M(A) \leq b_{i,j}$ untuk setiap $i, j \in [n]$ dan $i \neq j$.

2. Akan dibuktikan $B \in K^B(A)$, yakni $A \otimes B = B \otimes A = B$. Diperhatikan $A \otimes B$ berikut

   - pada $(A \otimes B)_{i,i}$ terdapat $a_{i,i} = 0$ dan $b_{i,i} = 0$ sehingga $a_{i,i} \otimes b_{i,i} = 0 \otimes 0 = 0 = b_{i,i}$. Jelas bahwa 0 merupakam entri maksimal sehingga $(A \otimes B)_{i,i} = b_{i,i}$
   - pada $(A \otimes B)_{i,j}$, untuk $i, j, k \in [n]$ dan $i \neq j \neq k$ diperoleh $a_{i,k} \otimes b_{k,j} \leq M(A) \otimes b_{k,j} \leq M(A) \leq b_{i,j}$, dan ketika $k = j$ diperoleh $a_{i,j}$ dan $b_{j,j} = 0$ maka $a_{i,j} \otimes b_{j,j} \leq M(A) \otimes 0 \leq M(A) \leq b_{i,j}$. Sehingga $(A \otimes B)_{i,j} = \max_{k \in [n]} a_{i,k} \otimes b_{k,j} = b_{i,j}$. Sehingga diperoleh $(A \otimes B)_{i,j} = b_{i,j}$

   Maka didapati untuk setiap $i, j, k \in [n]$, berlaku $(A \otimes B)_{i,j} = a_{i,k} \otimes b_{k,j} = b_{i,j}$. sehingga $A \otimes B = B$.
   Diperhatikan juga $B \otimes A$ berikut

   - pada $(B \otimes A)_{i,i}$ terdapat $b_{i,i} = 0$ dan $a_{i,i} = 0$ sehingga $b_{i,i} \otimes a_{i,i} = 0 \otimes 0 = 0 = b_{i,i}$. Jelas bahwa 0 merupakam entri maksimal sehingga $(B \otimes A)_{i,i} = b_{i,i}$
   - pada $(B \otimes A)_{i,j}$, untuk $i, j, k \in [n]$ dan $i \neq j \neq k$ diperoleh $b_{i,k} \otimes a_{k,j} \leq b_{i,k} \otimes M(A) \leq M(A) \leq b_{i,j}$, dan ketika $i = j$ diperoleh $b_{j,j} = 0$ dan $a_{j,k}$ maka $b_{j,j} \otimes a_{j,k} \leq 0 \otimes M(A) \leq M(A) \leq b_{i,j}$. Sehingga $(B \otimes A)_{i,j} = \max_{k \in [n]} b_{i,k} \otimes a_{k,j} = b_{i,j}$. Sehingga diperoleh $(B \otimes A)_{i,j} = b_{i,j}$

Maka didapati untuk setiap $i, j, k \in [n]$, berlaku $(B \otimes A)_{i,j} = b_{i,k} \otimes a_{k,j} = b_{i,j}$. sehingga $B \otimes A = B$.
Hasil dari pembuktian diatas menunjukkan bahwa $A \otimes B = B \otimes A = B$.

3. Terbukti bahwa untuk setiap $A, B \in \mathbb{R}^n_{nor}$ dengan A merupakan matriks *strictly normal* dan $P(M(A)) \leq B \leq Z$, maka berlaku $A \otimes B = B \otimes A = B$. Sehingga $B \in K^B(A)$. ■

Contoh 3.12 *Misalkan dipunyai matriks* $A, B \in \mathbb{R}^3_{nor}$ *dengan* $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -3 \\ -3 & 0 & -4 \\ -7 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ *dan* $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. *Akan ditunjukkan bahwa* $B \in K^B(A)$.
Diperhatikan bahwa M(A)=-3 sehingga diperoleh matriks $P(M(A)) = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. *Dari sini dapat dilihat bahwa* $P(M(A)) \leq B \leq Z$. *sehingga hasil kali* $A \otimes B$ *dan* $B \otimes A$ *adalah sebagai berikut*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -3 \\ -3 & 0 & -4 \\ -7 & -6 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \oplus -8 \oplus -5 & -2 \oplus -5 \oplus -6 & -3 \oplus -5 \oplus -3 \\ -3 \oplus -3 \oplus -6 & -5 \oplus 0 \oplus -7 & -6 \oplus 0 \oplus -4 \\ -7 \oplus -9 \oplus -2 & -9 \oplus -6 \oplus -3 & -10 \oplus -6 \oplus 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(0, -8, -5) & \max(-2, -5, -6) & \max(-3, -5, -3) \\ \max(-3, -3, -6) & \max(-5, 0, -7) & \max(-6, 0, -4) \\ \max(-7, -9, -2) & \max(-9, -6, -3) & \max(-10, -6, 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -5 & -3 \\ -3 & 0 & -4 \\ -7 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \oplus -5 \oplus -10 & -5 \oplus -2 \oplus -9 & -3 \oplus -6 \oplus -3 \\ -3 \oplus -3 \oplus -7 & -8 \oplus 0 \oplus -6 & -6 \oplus -4 \oplus 0 \\ -2 \oplus -6 \oplus -7 & -7 \oplus -3 \oplus -6 & -5 \oplus -7 \oplus 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(0,-5,-10) & \max(-5,-2,-9) & \max(-3,-6,-3) \\ \max(-3,-3,-7) & \max(-8,0,-6) & \max(-6,-4,0) \\ \max(-2,-6,-7) & \max(-7,-3,-6) & \max(-5,-7,0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $A \otimes B = B \otimes A = B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. *Maka* $B \in K^B(A)$.

BAB IV

SIMPULAN DAN SARAN

A. Simpulan

Dari kajian skripsi ini dapat diberikan beberapa kesimpulan bahwa matriks normal atas aljabar max-plus mempunyai beberapa bentuk matriks komutatif sebagai berikut:

1. Komutatif matriks normal dengan matriks $E_{i,j}(-r)$.
2. Komutatif matriks normal dengan kondisi $a_{i,k} \otimes b_{k,j} \leq t_{i,j}$.
3. Komutatif matriks normal dengan entri *non*-diagonal matriks berada pada interval $[2r, r]$.
4. Komutatif matriks normal di antara matriks A^{n-2} dan A^*.
5. Komutatif matriks normal di antara matriks I dan $P(m(A))$.
6. Komutatif matriks normal di antara matriks $P(M(A))$ dan Z.

Contoh dari masing-masing bentuk matriks komutatif tersebut ditambahkan pada skripsi ini sebagai pelengkap yang tidak didapati pada jurnal *"Matrices Commuting with a Given Normal Tropical Matrix"* oleh Linde dan Puente (2015).

B. Saran

Pada skripsi ini ruang lingkup yang dibahas masih sempit, yakni hanya pada himpunan matriks normal saja. Oleh karena itu, peneliti memberi saran untuk penelitian yang akan datang dapat mencari bentuk komutatif matriks pada himpunan lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Anggraeni, T.M. 2018. *Pengmbangan Perangkat Pembelajaran Himpunan yang Diintegrasikan dengan Al-Quran*. Skrispi. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim.

Ariyanti, Greoria. 2011. *Aljabar Max Plus: Suatu Kajian Teori dan Aplikasi Fundamentalnya*. Widya Warta: 35(2).

Anisianti, D.A. 2013. *Matriks atas Aljabar Max-Plus*. Skripsi. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim.

Bacelli,F., Cohen, Olsder, & Quadrat. 2001. *Sunchronization and Linearity, An Algebra for Discrete Event Systems*. Paris: INDRIA.

Dummit, David S., dan Foot, Richard M. 1991. *Abstract Algebra*. New York: Prentice-Hall International, Inc.

Farlow, G. Kasie. 2009. *Max-Plus Algebra*. Tesis. Virginia: Universitas Negeri dan Institut Politeknik Virginia.

Gyamerah, Samuel A., Boateng, dan Harvim. 2016. *Max-Plus Algebra and Application to Matrix Operations*. British Journal of Mathematics & Computer Science. 12(3): 1–14.

Helena, M. 2016. *Interval Max-Plus Matrix Equations*. Linear Algebra and its Applications. 492 : 111–127.

Heidergott, B., Olsder, G.J., & Van Der Woude J.W. 2006. *Max Plus at Work*. Amsterdam: Princeton University Press.

Kandasamy. 2002. *Smarandache Semirings, Semifilds, dan Semivector Spaces*. USA: American Research Press.

Karim, Abdul. 2014. *Sejarah Perkembangan Ilmu Pengetahuan*. Fikrah. 2(1): 273–289.

Linde, J dan Puente. 2015. *Matrices Commuting with A Given Normal Tropical Matrix*. Linear Algebra and its Applications. 482: 101–121.

Lipschutz, dkk. 2001. *Seri Penyelesaian Soal Schaum Jilid 1 Matematika Diskrit*. Jakarta: Salemba Teknika.

Majid, Abdul. 2011. *Aljabar Max-Plus dan Sifat-sifatnya*. Skripsi. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim.

Muanalifah, A.,Sergeev, Sergeĭ. 2022. *On The Tropical Discrete Logarithm Problem and Security of a Protocol Based on Tropical Semidirect Product*. Communications in Algebra. 50(2): 861–879.

Prasolov, V.V. 1994. *Problems and Theorems in Linear Algebra*. American Mathematical Soc. 134.

Puente, María Jesús. 2012. *On tropical Kleene Star Matrices and Alcoved Polytopes*. arXiv preprint arXiv:1210.1735.

Rachmantika, A.R. 2019. *Peran Kemampuan Berpikir Kritis Siswa pada Pembelajaran Matematika dengan Pemecahan Masalah*. Prisma. 2: 439–443.

Rudhito, M. Andy. 2016. *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya*. Yogyakarta: Program Studi Matematika Universitas Sanata Dharma.

Sergeev, S., Hans, Butkovič Peter. 2009. *On Visualization Scaling, Subeigenvectors and Kleene Stars in Max Algebra*. Linear Algebra and its Applications. 432(12): 2395–2406.

Suroto. 2012. *Semi Ring Polinom atas Aljabar Max-plus*. Purwokerto: Jurusan Matematika Universitas Jendral Soedirman.

Yoeli, Michael. 1961. *A Note on a Generalization of Boolean Matrix Theory*. *The American Mathematical Monthly*. 68: 552–557.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. **Identitas Diri**

1. Nama Lengkap	:	Muhammad Ulil Albab
2. Tenpat & Tgl. Lahir	:	Demak, 6 Juni 2001
3. Alamat Rumah	:	JL. Brumbungan No. 261 Kel. Mranggen Kec. Mranggen Kab. Demak
4. HP	:	085701087137
5. E-mail	:	muhammadulilalbab35@gmail.com

B. **Riwayat Pendidikan**

1. Pendidikan Formal:
   a. SD Negeri 1 Mranggen (2007-2013)
   b. SMP Ky Ageng Giri (2013-2016)
   c. SMA Negeri 2 Mranggen (2016-2019)
2. Pendidikan Non-Formal:
   a. TPQ Futuhiyyah (2007-2013)
   b. Pesantren Girikesumo (2013-2016)

Demak, 10 April 2023

Muhammad Ulil Albab

NIM : 1908046028