

**PENGARUH FRAKSI VOLUME TERHADAP PARTIKEL NANO
PADA ALIRAN FLUIDA NEWTONIAN YANG MELEWATI
SILINDER VERTIKAL**

SKRIPSI

Diajukan Guna Memenuhi Syarat Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika dalam Ilmu Matematika



Disusun oleh:

Muhammad Fikri Ardiansyah

NIM: 1908046049

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2023

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Muhammad Fikri Ardiansyah

Nim : 1908046049

Program Studi : Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

**PENGARUH FRAKSI VOLUME TERHADAP PARTIKEL NANO
PADA ALIRAN FLUIDA NEWTONIAN YANG MELEWATI
SILINDER VERTIKAL**

secara keseluruhan adalah hasil penelitian atau karya saya sendiri,
kecuali ada beberapa bagian tertentu yang dirujuk dari sumbernya.

Semarang, 07 Juni 2023

Pembuat pernyataan,



Muhammad Fikri Ardiansyah

NIM : 1908046049

LEMBAR PENGESAHAN



**KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jalan Prof. Dr. H. Hamka Kampus II Ngaliyan Semarang 50185
Telepon (024) 76433366, Website: fst.walisongo.ac.id

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini:

Judul : **PENGARUH FRAKSI VOLUME TERHADAP PARTIKEL NANO PADA ALIRAN FLUIDA NEWTONIAN YANG MELEWATI SILINDER VERTIKAL**

Penulis : Muhammad Fikri Ardiansyah

NIM : 1908046049

Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 22 Juni 2023

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

Mohamad Tafrikan, M.Si

NIP: 19890417 201903 1 010

Penguji III,

Seftina Diyah Miasary, M.Sc

NIP: 19870921 201903 2 010

Pembimbing I,

Yolanda Norasia, M.Si

NIP: 19940923 201903 2 000

Penguji II,

Yolanda Norasia, M.Si

NIP: 19940923 201903 2 000

Penguji IV,

Muhammad Romadiastri, M.Sc

NIP: 19810115 200501 2 008

Pembimbing II,

Mohamad Tafrikan, M.Si

NIP: 19890417 201903 1 010



NOTA DINAS

Semarang, 07 Juni 2023

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Walisongo
di Semarang

Assalamu'alaikum wr.wb.

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan, dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : Pengaruh Fraksi Volume Terhadap Partikel Nano Pada Aliran Fluida Newtonian Yang Melewati Silinder Vertikal

Penulis : **Muhammad Fikri Ardiansyah**

NIM : 1908046049

Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diajukan dalam sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum wr.wb

Pembimbing I



Yolanda Norasia, M.Si

NIP: 199409232019032000

NOTA DINAS

Semarang, 07 Juni 2023

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Walisongo
di Semarang

Assalamu'alaikum wr.wb.

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan, dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : Pengaruh Fraksi Volume Terhadap Partikel Nano Pada Aliran Fluida Newtonian Yang Melewati Silinder Vertikal

Penulis : **Muhammad Fikri Ardiansyah**

NIM : 1908046049

Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diajukan dalam sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum wr.wb

Pembimbing II



Mohamad Tafrikan, M.Si

NIP: 198904172019031010

ABSTRAK

Zat atau materi yang mampu mengalir disebut Fluida. Fluida yang digunakan dalam penelitian ini adalah fluida Newtonian. Fluida Newtonian merupakan cairan yang tidak mengalami perubahan pada sifat biofisiknya (viskositas) dan pada akhirnya bersifat permanen apabila diberikan gaya. sebagai contoh fluida Newtonian yaitu fluida nano. Penelitian ini membahas mengenai pengaruh fraksi volume terhadap partikel nano pada aliran fluida nano Newtonian yang melewati silinder vertikal. Model matematika diperoleh dari turunan hukum kekekalan massa dan hukum kedua Newton sehingga diperoleh persamaan pembangun dimensional yaitu persamaan kontinuitas dan persamaan momentum. Setelah itu, model matematika diselesaikan secara numerik dengan *Keller-Box* untuk mengidentifikasi pengaruh variasi parameter fraksi volume (χ) dan variasi parameter magnetik (M) terhadap profil kecepatan fluida. Hasil numerik diperoleh apabila variasi nilai parameter fraksi volume ditingkatkan maka kecepatan fluida akan menurun. Begitu juga dengan variasi nilai parameter magnetik (M) jika ditingkatkan maka kecepatan fluida akan menurun. Hasil perbandingan partikel pada variasi parameter fraksi volume, partikel *Li₂O-air murni* memiliki kecepatan gerak fluida yang lebih baik atau lebih efektif dibandingkan partikel *Li-air murni*, *Li-air laut*, dan *Li₂O-air laut*. Begitu juga dengan perbandingan partikel pada variasi parameter

magnetik, partikel Li_2O -air murni memiliki kecepatan gerak fluida yang lebih baik atau lebih efektif dibandingkan partikel Li -air murni, Li -air laut, dan Li_2O -air laut.

Kata kunci : Fluida Nano, Fraksi Volume, Metode Keller-Box, Lapisan Batas

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Pertama-tama mari kita ucapkan puji syukur kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat, karunia, taufik, hidayah dan juga nikmat kepada kita, baik berupa nikmat iman, islam, ataupun kesehatan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul *Pengaruh Fraksi Volume Terhadap Partikel Nano Pada Aliran Fluida Newtonian Yang Melewati Silinder Vertikal.*

Sholawat serta salam tidak lupa penulis curahkan kepada junjungan umat manusia yaitu baginda Nabi Muhammad SAW, beserta keluarganya, dan para sahabatnya. Semoga kita sebagai umatnya mendapatkan syafaatnya kelak di hari kiamat. Aamiin.

Adapun tujuan dari penulisan skripsi ini untuk memenuhi persyaratan dalam menyelesaikan Program Studi Strata 1 (S1) Matematika di Universitas Islam Negeri alisongo Semarang. Kelancaran dan keberhasilan penulisan skripsi ini tidak terlepas dari doa, bimbingan, dan dukungan dari banyak pihak yang membantu. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan rasa syukur dan terimakasih kepada :

1. Bapak Sanusi dan Ibu Kariyah selaku kedua orang tua penulis yang telah memberikan doa, dukungan, semangat, dan motivasi sampai skripsi ini terselesaikan.

2. Bapak Dr. H. Ismail, M.Ag selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
3. Ibu Hj. Emy Siswanah, M.Sc selaku Ketua Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
4. Ibu Ayus Riana Isnawati, M.Sc selaku Dosen Wali penulis yang telah memberikan arahan.
5. Ibu Yolanda Norasia, M.Si dan Bapak Mohamad Tafrikan, M.Si selaku dosen pembimbing penulis yang telah memberikan dukungan, arahan, motivasi, dan meluangkan waktunya untuk membimbing sampai skripsi ini terselesaikan.
6. Seluruh Dosen Matematika Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang yang telah memberikan ilmu selama perkuliahan.
7. Akbar Priyono, Agung Priyono, dan Indra Setiawan selaku saudara kandung penulis yang telah memberikan dukungan.
8. Ananik dan Hanifah Migunani selaku teman satu bimbingan yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi.
9. Seluruh teman-teman Program Studi Matematika angkatan 2019 Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
10. Semua pihak yang turut serta dalam membantu penulisan skripsi ini.

Penulis menyadari dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu, penulis berharap adanya kritik dan saran yang membangun sebagai perbaikan dalam

penelitian di masa yang akan datang. Semoga skripsi ini dapat menambah pengetahuan dan memberikan manfaat bagi pembaca.

Semarang, 07 Juni 2023

Penulis,

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Muhammad Fikri Ardiansyah', with a stylized flourish at the end.

Muhammad Fikri Ardiansyah

DAFTAR ISI

PERNYATAAN KEASLIAN	i
NOTA PEMBIMBING I	iii
NOTA PEMBIMBING II	iv
ABSTRAK	v
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR NOTASI	xv
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang.....	1
B. Rumusan Masalah.....	6
C. Tujuan Penelitian.....	6
D. Manfaat Penelitian.....	7
E. Batasan Masalah.....	8
BAB II LANDASAN PUSTAKA	9
A. Fluida Nano.....	9
1. Kerapatan Fluida Nano.....	11
2. Viskositas.....	11
3. Kalor Khusus Fluida Nano.....	12
4. Konduktivitas Termal.....	12
B. Fraksi Volume.....	13
C. Aliran Fluida.....	14

1. Aliran Konstan (Tunak).....	14
2. Aliran Tidak Konstan (Tak Tunak).....	14
D. Aliran Lapisan Batas.....	15
E. Bilangan Non-dimensi.....	16
1. Bilangan Reynold.....	16
F. Magnetohidrodinamik.....	17
G. Pemodelan Matematika.....	18
H. Metode Beda Hingga.....	18
I. Keller-Box.....	19
J. Penelitian Relevan.....	20
BAB III METODE PENELITIAN.....	28
A. Tahap Penelitian.....	28
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN.....	31
A. Pembentukan Persamaan Pembangun.....	31
1. Persamaan Kontinuitas.....	32
2. Persamaan Momentum.....	37
B. Model Matematika Non-dimensi.....	44
1. Persamaan Kontinuitas.....	46
2. Persamaan Momentum.....	46
C. Pendekatan Lapisan Batas.....	47
D. Fungsi Alir.....	52
1. Persamaan Kontinuitas.....	53
2. Persamaan Momentum.....	53
E. Persamaan Similaritas.....	54

1.	Persamaan Momentum.....	55
F.	Penyelesaian Model Matematika.....	56
1.	Pemisalan Notasi.....	57
2.	Diskritisasi Model.....	58
3.	Linierisasi Model.....	60
4.	Penyelesaian Linierisasi.....	64
G.	Analisis Hasil Simulasi Numerik.....	70
1.	Pengaruh Parameter Fraksi Volume Pada Partikel Nano Li.....	71
2.	Pengaruh Parameter Fraksi Volume Pada Partikel Nano Li ₂ O.....	73
3.	Pengaruh Parameter Magnetik Pada Partikel Nano Li.....	75
4.	Pengaruh Parameter Magnetik Pada Partikel Nano Li ₂ O.....	77
5.	Perbandingan Partikel Nano Li dan Li ₂ O terhadap Pengaruh Parameter Fraksi Volume.....	79
6.	Perbandingan Partikel Nano Li dan Li ₂ O terhadap Pengaruh Parameter Magnetik.....	80
	BAB V PENUTUP.....	82
A.	Kesimpulan.....	82
B.	Saran.....	84
	DAFTAR PUSTAKA.....	85
	LAMPIRAN.....	88

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Model Fisik Penelitian	5
Gambar 2.1 Klasifikasi Aliran Fluida	15
Gambar 2.2 Beda Hingga Skema <i>Keller-Box</i>	20
Gambar 4.1 Aliran Fluida Masuk dan Keluar Kontrol Volume.....	35
Gambar 4.2 Gaya Permukaan Pada Fluida.....	39
Gambar 4.3 Kurva Kecepatan Parameter Fraksi Volume Li-air murni.....	71
Gambar 4.4 Kurva Kecepatan Parameter Fraksi Volume Li-air laut.....	72
Gambar 4.5 Kurva Kecepatan Parameter Fraksi Volume Li ₂ O-air murni.....	73
Gambar 4.6 Kurva Kecepatan Parameter Fraksi Volume Li ₂ O-air laut.....	74
Gambar 4.7 Kurva Kecepatan Parameter Magnetik Li-air murni...	76
Gambar 4.8 Kurva Kecepatan Parameter Magnetik Li-air laut.....	76
Gambar 4.9 Kurva Kecepatan Parameter Magnetik Li ₂ O-airmurni	78
Gambar 4.10 Kurva Kecepatan Parameter Magnetik Li ₂ O-airlaut...	78
Gambar 4.11 Perbandingan Kecepatan Fluida <i>Li-air murni</i> , <i>Li-air laut</i> , <i>Li₂O-air murni</i> dan <i>Li₂O-air laut</i> Terhadap Parameter Fraksi Volume	80
Gambar 4.12 Perbandingan Kecepatan Fluida <i>Li-air murni</i> , <i>Li-air laut</i> , <i>Li₂O-air murni</i> dan <i>Li₂O-air laut</i> Terhadap Parameter Magnetik	81

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Properti Termofisika.....	13
Tabel 2.2 Jenis Aliran Fluida.....	17
Tabel 2.3 Persamaan dan Perbedaan Penelitian Relevan dengan Penelitian yang Dilakukan.....	20
Tabel 4.1 Variasi Parameter Magnetik.....	75

DAFTAR NOTASI

τ	: Tegangan geser fluida
μ_{fn}	: Viskositas fluida nano
μ_{fd}	: Viskositas fluida dasar
$\frac{\partial v}{\partial x}$: Laju perubahan kecepatan fluida
ρ_{fn}	: Kerapatan fluida nano
χ	: Fraksi volume partikel nano
ρ_{fd}	: Kerapatan fluida dasar
ρ_s	: Kerapatan partikel nano
M_{sys}	: Massa suatu system
M	: Parameter magnetik
u	: Kecepatan fluida arah sumbu x
v	: Kecepatan fluida arah sumbu y
t	: Waktu
a	: Panjang jari-jari silinder
k	: Konduktivitas termal
V	: Volume fluida
\vec{V}	: Komponen kecepatan fluida ($\vec{V} = u, v, 0$)
F	: Gaya yang bekerja pada sistem
g	: Gaya gravitasi
p	: Tekanan
E	: Medan listrik

- U_{∞} : Kecepatan bebas fluida
 J : Kerapatan arus listrik
 B : Total medan magnet
 b : Aliran fluida yang terinduksi
 B_0 : Medan magnet pada silinder
 σ : daya hantar listrik
 \hat{n} : Vektor normal keluar masuk elemen dA
 C_p : Kalor khusus fluida
 ψ : Fungsi alir
 u_e : Kecepatan di luar lapisan batas
 η : Koordinat aliran fluida menuju titik stagnansi terdekat

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang tidak pernah lepas dari perkembangan zaman. Matematika diibaratkan sebagai alat untuk membantu dalam berbagai persoalan tertentu. Matematika dibagi menjadi dua, yaitu matematika terapan dan matematika murni. Matematika terapan merupakan cabang dari ilmu matematika yang membahas mengenai penerapan ilmu matematika dalam ilmu lain. Matematika terapan identik dengan merumuskan dan mempelajari model matematika untuk mencari solusi dari permasalahan tertentu (Argo & Prasetyo, 2021). Penerapannya dilakukan dalam bidang fisika, kimia, biologi, sosiologi, dll. Matematika Fisika merupakan penerapan ilmu matematika yang membahas mengenai persoalan fisika serta formulasi model dalam teori fisika. Contoh penerapan dalam bidang fisika yaitu fluida (Anggraeni & Septian, 2019).

Fluida adalah suatu zat yang mengalir dan sesuai dengan bentuk wadahnya selama ada perbedaan tekanan yang dipengaruhi oleh tegangan geser (Widodo et al., 2017). Tegangan geser dihasilkan dari gesekan antara fluida dan permukaan media (benda) sehingga menyebabkan adanya suatu lapisan tipis yang terbentuk atau

disebut lapisan batas. Terbentuknya lapisan batas suatu fluida dapat dipengaruhi oleh faktor-faktor, seperti viskositas dan gaya inersia benda (Juliyanto, 2018). Fluida dapat dibedakan menjadi dua jenis, yaitu zat cair dan gas. Keduanya memiliki perbedaan dimana zat cair bersifat tak mampu mampat sedangkan zat gas bersifat mampu mampat. Selanjutnya, fluida menurut viskositas dikarakterisasikan menjadi dua bagian, yakni fluida Newtonian dan Non-Newtonian (Widodo et al., 2016). Fluida Newtonian merupakan fluida yang tidak mengalami perubahan pada sifat biofisiknya (viskositas) dan pada akhirnya bersifat permanen apabila diberikan gaya. Sebuah contoh ditemukan dalam fluida nano (Widodo et al., 2017).

Di dalam Al-Qur'an terdapat beberapa ayat yang menjelaskan tentang fluida. Hal ini sesuai dengan firman Allah dalam surat Al-Mu'minun ayat 18:

وَأَنْزَلْنَا مِنَ السَّمَاءِ مَاءً بِقَدَرٍ فَأَسْكَنَتْهُ فِي الْأَرْضِ وَإِنَّا عَلَىٰ ذَهَابٍ بِهِ لَاقِدْرُونَ ۝١٨

“Dan kami turunkan air dari langit dengan suatu ukuran, lalu kami jadikan air itu menetap di bumi, dan sungguh kami berkuasa melenyapkannya”.

Ayat tersebut menjelaskan tentang air yang termasuk ke dalam fluida karena termasuk zat cair. Sehingga ketika air dari langit itu jatuh ke bumi maka air akan menyesuaikan dengan komponen yang ada di bumi. Jika air jatuh ke sungai maka akan mengalir sesuai dengan bentuk sungai.

Fluida Nano dijelaskan oleh Koblinski et al., (2002) yang menguji mekanisme aliran panas dalam suspensi partikel berukuran nano (nanofluida) serta nanotube karbon yang mengalami penyebaran secara merata dari beberapa fluida dengan hasil nilai hantaran panasnya mengalami peningkatan. Fluida nano terdiri dari campuran fluida cair sebagai fluida dasar dan partikel nano seperti logam atau oksida logam dengan ukuran berkisar antara 1 hingga 100 nanometer (Ramadhan et al., 2012). Fluida dasar yang dimaksud seperti air, alkohol, minyak, oli, dan sebagainya. Partikel nano yang tergolong ke dalam logam memiliki sifat dapat menghantarkan arus listrik dengan baik atau dengan cepat. beberapa contohnya yakni Litium (*Li*), tembaga (*Cu*), Seng (*Zn*), Emas (*Au*), Aluminium (*Al*), dan Perak (*Ag*). Partikel nano yang tergolong ke dalam oksida logam memiliki sifat tidak dapat menghantarkan arus listrik dengan baik seperti Al_2O_3 (Alumina), Li_2O (Litium Oksida), MgO (Magnesia), SO_2 (Sulfur dioksida) dan TiO_2 (Alumina).

Penggunaan partikel nano mulai banyak digunakan sebagai alternatif fluida kerja pengukur kalor dan aplikasi teknologi pendingin. Air atau fluida dasar biasanya kurang optimal dalam melakukan transfer panas, karena nilai konduktivitas termalnya yang rendah. Untuk menaikkan efisien dari fluida tersebut harus dipercepat alirannya. Oleh karena itu, Penentuan jumlah partikel nano dalam fluida sangatlah penting untuk mempengaruhi besarnya

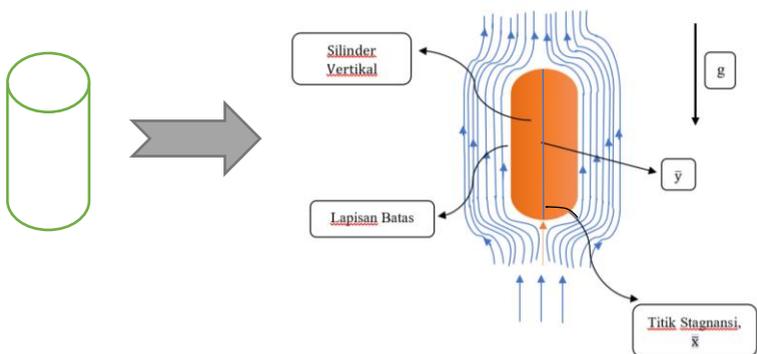
peningkatan nilai koefisien konveksi, karakteristik hantaran panas, dan kecepatan aliran pada fluida nano dengan fraksi volume rendah dan tinggi (Ramadhan et al., 2012).

Penelitian ini menggunakan fluida dasar air murni dan air laut dengan Partikel nano Li (Litium) dan Li_2O (Litium oksida). Li merupakan litium murni sedangkan Li_2O merupakan bentuk oksidasi dari litium murni. Partikel nano ini sering digunakan dalam bidang teknik industri dan mesin karena ketersediaannya masih sangat melimpah. Selain itu partikel nano Litium memiliki beberapa manfaat, yaitu untuk menjaga stabilitas pemanfaatan energi terbarukan yang prosesnya fluktuatif terhadap waktu, fleksibilitas, dan nilai emisi yang rendah (Salafudin, 2021).

Beberapa penelitian yang membahas fluida nano diantaranya: Sahaya et al., (2016) yang meneliti magnetohidrodinamik aliran fluida viskoelastik yang melalui pelat datar. Dharma Utama et al., (2018) meneliti aliran magnetohidrodinamik fluida kental tak tunak dengan pengaruh konveksi campuran dan medan magnet yang melewati bola teriris. Norasia & Zulaikha (2019) meneliti magnetohidrodinamik pada aliran fluida nano pada lapisan batas bola bermagnet yang dipengaruhi oleh konveksi campuran dengan mencari persamaan model matematikanya. Tafrikan & Ghani (2020) meneliti profil kecepatan dan temperatur pada aliran konveksi campuran yang melalui bola berpori dibawah pengaruh

hidrodinamika magnet. Eviloka & Widodo (2022) meneliti aliran konveksi campuran fluida viskoelastik melewati bola teriris dengan pengaruh medan magnet. Mayagrafinda & Widodo (2022) meneliti analisis profil kecepatan dan suhu pada sekitaran titik stagnasi terendah magnetohidrodinamika fluida nano melewati silinder berpori.

Pada penelitian tugas akhir ini, peneliti tertarik untuk mengkaji lebih dalam mengenai model matematika aliran fluida di bawah pengaruh fraksi volume terhadap partikel nano Li dan Li_2O untuk menentukan profil kecepatan fluida yang melewati silinder vertikal. Penelitian tugas akhir ini menggunakan bentuk benda silinder vertikal dengan mengasumsikan aliran fluida mengalir dari bawah ke atas dengan penyelesaian secara numerik menggunakan metode *Keller-Box*.



Gambar 1.1. Model Fisik Aliran Fluida Melewati Silinder Vertikal

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka dari uraian tersebut diperoleh rumusan masalah sebagai berikut.

1. Bagaimana perumusan model matematika berdasarkan aliran fluida nano newtonian melewati silinder vertikal dengan pengaruh fraksi volume ?
2. Bagaimana menyelesaikan model matematika aliran fluida nano newtonian yang melewati silinder vertikal di bawah pengaruh fraksi volume menggunakan penerapan metode beda hingga pusat skema *Keller-Box* ?
3. Bagaimana pengaruh variasi parameter fraksi volume (χ) dan variasi parameter magnetik (M) terhadap profil kecepatan pada aliran fluida nano yang melewati silinder vertikal ?

C. Tujuan Penelitian

Dari perumusan masalah yang telah diuraikan, maka dapat diketahui tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengkaji perumusan model matematika aliran fluida nano newtonian melewati silinder vertikal dengan pengaruh fraksi volume.
2. Menyelesaikan model matematika aliran fluida nano newtonian yang melewati silinder vertikal di bawah pengaruh

fraksi volume menggunakan penerapan metode beda hingga pusat skema *Keller-Box*.

3. Menganalisa pengaruh variasi parameter fraksi volume (χ) dan variasi parameter magnetik (M) terhadap profil kecepatan pada aliran fluida nano yang melewati silinder vertikal.

D. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut.

1. Bagi penulis diharapkan dapat menambah wawasan keilmuan dan pengetahuan tentang penelitian yang berkaitan dengan matematika terapan khususnya pada pemodelan aliran fluida nano.
2. Bagi bidang teknik industri diharapkan dapat dijadikan sebagai tambahan referensi khususnya tentang kecepatan fluida nano.
3. Bagi pembaca diharapkan dapat menjadi rujukan untuk dikembangkan pada penelitian yang akan datang.

E. Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Fluida yang digunakan adalah fluida nano dimana fluida ini terdiri dari campuran fluida dasar yaitu air murni dan air laut dengan partikel nano yaitu Li dan Li_2O .
2. Medium (benda) yang dilewati adalah silinder vertikal.
3. Aliran fluida dalam keadaan tak tunak dan aliran fluidanya tak mampu mampat (*incompressible*) karena fluida nano newtonian tidak mengalami perubahan ketika terdapat gaya atau tekanan.
4. Fluida terinduksi oleh magnet dari silinder yang mengandung magnet.
5. Bagian yang diteliti yaitu daerah lapisan batas dengan titik stagnasi terdekat ($x \approx 0$).
6. Menggunakan metode beda hingga skema *Keller-Box* untuk menyelesaikan persamaan.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa penelitian terdahulu yang dijadikan referensi dalam penelitian ini. Selain itu juga diberikan beberapa hal yang berkaitan dalam penelitian ini, diantaranya: fluida nano, fraksi volume, aliran fluida, lapisan batas, bilangan non-dimensi, *magnetohidrodinamik*, pemodelan matematika, metode beda hingga, dan *keller-box*.

A. Fluida Nano

Zat atau materi adalah sesuatu yang memiliki massa serta dapat menempati suatu ruang. Menempati ruang artinya zat selalu menempati ruang untuk keberadaannya, sedangkan memiliki massa artinya semua zat pasti memiliki massa (berat jenis) ketika ditimbang. Pada umumnya, zat atau materi dapat dibagi menjadi 3 wujud, yaitu wujud padat, cair, dan gas. Karakteristik wujud padat bentuknya tidak berubah dan volumenya tetap, sedangkan karakteristik wujud cair dan gas memiliki bentuk dan ukuran yang dapat berubah sehingga dapat mengalir (Afnidar, 2015). Zat atau materi yang mampu mengalir disebut Fluida. Menurut Widodo et al., (2017), fluida diartikan sebagai suatu zat yang mengalir dan sesuai dengan bentuk wadahnya selama ada perbedaan tekanan yang dipengaruhi oleh tegangan geser. Fluida diklasifikasikan menjadi dua bagian, yakni

fluida Newtonian dan Non-Newtonian. Fluida yang digunakan dalam penelitian ini adalah fluida Newtonian. Fluida Newtonian merupakan cairan yang tidak mengalami perubahan pada sifat biofisiknya (viskositas) dan pada akhirnya bersifat permanen apabila diberikan gaya. sebagai contoh fluida Newtonian yaitu fluida nano (Widodo et al., 2017). Tegangan geser fluida Newtonian dinyatakan secara matematis sebagai berikut (Widodo et al., 2017).

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial x} = \text{linear} \quad (2.1)$$

dengan:

τ : tegangan geser fluida

μ : viskositas fluida

$\frac{\partial v}{\partial x}$: laju perubahan kecepatan fluida

Fluida nano terdiri dari fluida cair sebagai fluida dasar dan partikel nano seperti logam atau oksida logam dengan ukuran berkisar antara 1 hingga 100 nanometer (Ramadhan et al., 2012). Secara teoritis, fluida nano lebih optimal melakukan transfer panas dibandingkan fluida kerja biasa, dimana fluida nano merupakan campuran dari fluida dasar air dan penambahan partikel nano yang mempengaruhi kenaikan temperatur, konduktivitas termal, dan koefisien perpindahan panas.

Menurut Mahdi et al., (2015), korelasi antara fluida nano dengan fluida dasar memiliki sifat-sifat sebagai berikut.

1. Kerapatan Fluida Nano

Kerapatan (densitas) adalah nama lain dari massa jenis, diartikan juga sebagai ukuran massa suatu zat per satuan volume.

$$\rho_{fn} = (1 - \chi)\rho_{fd} + \chi\rho_s \quad (2.2)$$

dengan:

ρ_{fn} : kerapatan fluida nano (kg/m^3)

χ : fraksi volume partikel nano

ρ_{fd} : kerapatan fluida dasar (kg/m^3)

ρ_s : kerapatan partikel nano (kg/m^3)

2. Viskositas

Viskositas merupakan sifat yang menentukan ketahanan suatu fluida terhadap tekanan atau tegangan, atau dengan kata lain viskositas (kekentalan) disebut sebagai ketebalan atau pergesekan internal. Apabila suatu fluida viskositasnya rendah maka pergerakan fluida akan semakin besar. Viskositas fluida nano akan berbanding lurus dengan viskositas fluida dasarnya seperti pada persamaan berikut.

$$\mu_{fn} = \frac{\mu_{fd}}{(1 - \chi)^{2.5}} \quad (2.3)$$

dengan:

μ_{fn} : kekentalan dinamik fluida nano

μ_{fd} : kekentalan dinamik fluida dasar

χ : fraksi volume partikel nano

3. Kalor Khusus Fluida Nano

Kalor khusus fluida nano merupakan banyaknya energi yang dibutuhkan agar suhu suatu zat mengalami kenaikan sebesar satu derajat celcius. Pada tekanan konstan $(\rho C_p)_{fn}$, kalor khusus fluida nano dapat diperkirakan dari korelasi antara partikel nano dan fluida dasar.

$$(\rho C_p)_{fn} = (1 - \chi) (\rho C_p)_{fd} + \chi (\rho C_p)_s \quad (2.4)$$

dengan:

$(C_p)_{fn}$: kalor khusus fluida nano

$(C_p)_{fd}$: kalor khusus fluida dasar

$(C_p)_s$: kalor khusus partikel (kJ/kg.K)

4. Konduktivitas Termal

Konduktivitas termal adalah jumlah materi yang menunjukkan kemampuan untuk menghantarkan panas. Konduktivitas termal fluida nano dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\frac{K_{fn}}{K_{fd}} = \frac{(k_s + 2k_{fd}) - 2\chi(k_{fd} - k_s)}{(k_s + 2k_{fd}) + \chi(k_{fd} - k_s)} \quad (2.5)$$

dengan:

K_{fn} : konduktivitas termal fluida nano

K_{fd} : konduktivitas termal fluida dasar

k_s : konduktivitas termal partikel

Berikut ini adalah sifat termofisika air murni, air laut, partikel Li , dan partikel Li_2O .

Tabel 2.1 *Properti Termofisika*

<i>Properti</i>	Air	Air Laut	Partikel Li	Partikel Li_2O
ρ (kg/m ³)	997.1	1024	516	2013
C_p (J/kg.k)	4179	3900	4169	2049
k (W/mK)	0.613	0.101325	44	11.29
$\beta \times 10^{-5}$ (1/K)	21	15	46	9.2

Sumber: Kandasamy et al., (2017), Davison (1968), (mit.edu, n.d.)

B. Fraksi Volume

Salah satu variabel penting dalam studi fluida nano adalah fraksi volume (χ). Fraksi volume didefinisikan sebagai volume konstituen dibagi dengan semua volume konstituen dari campuran sebelum pencampuran. Sifat termofisika fluida nano, seperti densitas, viskositas dinamis, konduktivitas termal, dan kapasitas panas, pada dasarnya bergantung pada fraksi volume yang diterapkan karena fraksi volume partikel nano dapat mempengaruhi nilai koefisien transfer termal fluida nano (Alade et al., 2019).

Berikut ini berlaku persamaan dari fraksi volume (Mahdi et al., 2015).

$$\chi = \frac{V_s}{V_{total}} \quad (2.6)$$

dengan χ adalah fraksi volume, V_s adalah volume suatu partikel nano dan V_{total} adalah volume keseluruhan.

C. Aliran Fluida Berdasarkan Waktu

Aliran fluida didefinisikan sebagai suatu gerakan fluida yang membentuk arus pada kecepatan tertentu. Aliran fluida berdasarkan waktu umumnya dibagi menjadi dua, yaitu (Karyono, 2018):

1. Aliran Fluida Keadaan Konstan (Tunak)

Aliran di mana komponen aliran tidak terpengaruh oleh perubahan waktu. Untuk aliran tunak, berikut ini berlaku:

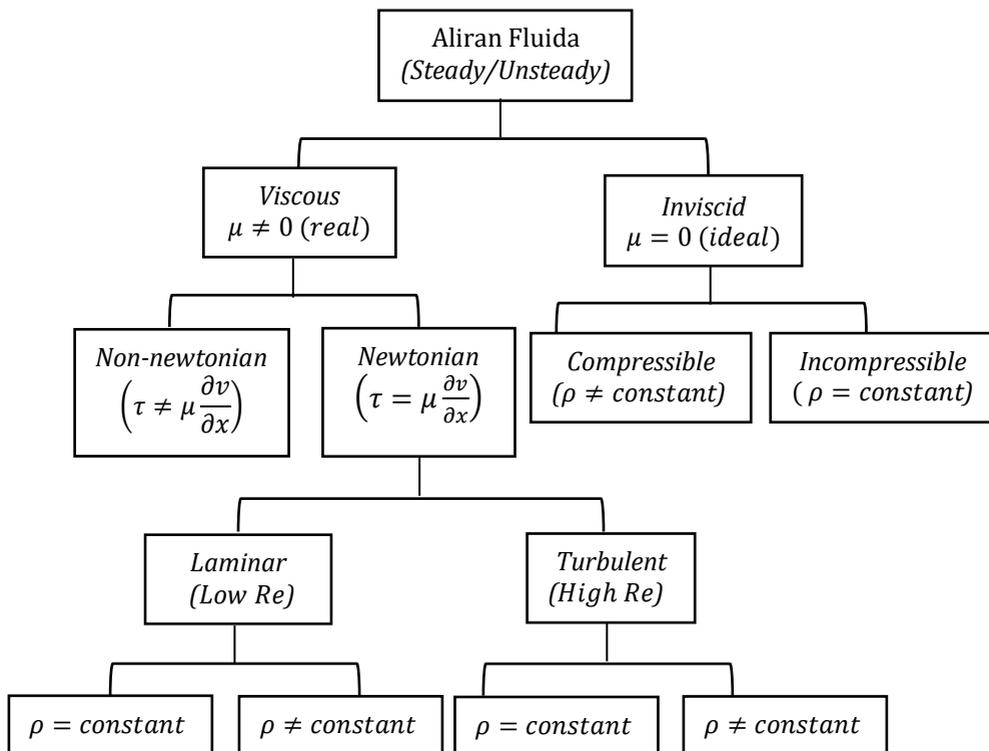
$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

2. Aliran Fluida Keadaan Tidak Konstan (Tak Tunak)

Aliran di mana komponen aliran dipengaruhi oleh perubahan dari waktu ke waktu. Untuk aliran tidak tunak, berlaku hal berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$$

Aliran fluida ini dapat diklasifikasikan sebagai berikut (Karyono, 2018).



Gambar 2.1. Klasifikasi Aliran Fluida

D. Aliran Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

Lapisan batas merupakan komponen dari lapisan tipis pada fluida yang letaknya disekitar permukaan pembatas. Lapisan batas terbentuk karena adanya gesekan atau tekanan antara aliran fluida dengan permukaan benda karena adanya pengaruh viskositas

maupun gaya inersia. Terdapat tiga jenis aliran fluida pada lapisan batas, antara lain: aliran laminar, aliran turbulen, dan aliran transisi (Karyono, 2018). Aliran laminar terjadi saat partikel zat cair bergerak sejajar atau beraturan pada lintasan. Aliran turbulen terjadi saat partikel zat cair bergerak secara acak atau tidak beraturan. Sedangkan aliran transisi terjadi karena adanya peralihan antara aliran laminar dan aliran turbulen.

E. Bilangan Non Dimensi

Parameter yang tidak berdimensi atau tidak memiliki satuan disebut bilangan non-dimensi. Kegunaan bilangan non-dimensi, yaitu dapat mengetahui karakteristik atau kondisi aliran fluida. Bilangan non-dimensi yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bilangan *Reynold* (*Re*)

Bilangan *Reynold* merupakan perbandingan antara gaya inersia relative terhadap gesekan yang disebabkan oleh viskositas. Bilangan *Reynold* juga dapat menentukan jenis aliran fluida (laminar, turbulen, atau transisi) di dalam pipa maupun lapisan batas. Bilangan *Reynold* dinyatakan secara matematis sebagai berikut (Rohani, 2021).

$$Re = \frac{\text{gaya inersia}}{\text{gaya viskositas}} = \frac{\rho UL}{\mu} \quad (2.7)$$

dengan:

Re : bilangan *Reynold*

ρ : kerapatan fluida (kg/m^3)

U : kecepatan aliran fluida (m/s)

L : panjang benda yang dilewati (m)

μ : viskositas fluida dinamis (Ns/m^2)

Tabel 2.2. Jenis Aliran Fluida (Rohani, 2021)

Jenis Aliran Fluida	Re (Dalam Pipa)
Laminar	$Re < 500$
Turbulen	$Re > 1000$
Transisi	$500 < Re < 1000$

F. Magnetohidrodinamik

Secara bahasa, *magnetohydrodynamic* terdiri dari kata *magnetisme* artinya medan elektromagnetik, *hydrolic* artinya cair (fluida), dan *dynamic* artinya gerak. sehingga secara keseluruhan, *Magnetohydrodynamic* memiliki arti suatu pergerakan dalam aliran fluida yang berinteraksi secara elektrik terhadap suatu medan magnet.

G. Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan proses membentuk bahasa matematika dari suatu realitas, fenomena, permasalahan, dan lain sebagainya. Untuk mengkaji model matematika aliran fluida nano Newtonian melewati silinder vertikal dengan pengaruh fraksi volume dilandaskan pada turunan dari hukum kekekalan massa dan hukum kedua Newton sehingga diperoleh persamaan pembangun dimensional dari penyederhanaan persamaan pada aliran fluida nano yang melewati silinder vertikal yaitu persamaan kontinuitas dan persamaan momentum.

H. Metode Beda Hingga

Metode beda hingga merupakan salah satu metode numerik pendekatan solusi persamaan diferensial. Terdapat tiga pendekatan pada metode beda hingga, (Maulidi, 2018) antaralain:

1. Pendekatan Beda Maju

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (2.12)$$

2. Pendekatan Beda Mundur

$$f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \quad (2.13)$$

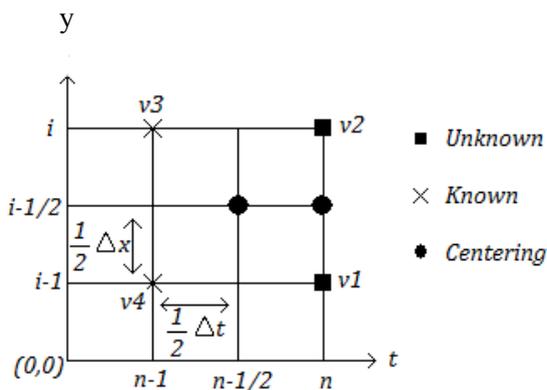
3. Pendekatan Beda Pusat

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \quad (2.14)$$

I. Metode *Keller-Box*

Metode numerik adalah metode pemecahan berbagai masalah matematika menggunakan operasi hitungan. Metode numerik secara umum dibagi menjadi dua jenis: metode *implisit* dan metode *eksplisit*. Dalam bidang matematika numerik, metode *Keller-Box* adalah salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan parabolik dengan lebih tepat dan efisien, terutama persamaan lapisan batas. Metode ini bersifat *implisit* dengan akurasi pada orde kedua terhadap ruang maupun waktu karena ukuran langkah dari ruang dan waktu tidak harus sama (Al-Shibani et al., 2012). Berikut merupakan tahap-tahap penyelesaian metode beda hingga *implisit* skema *Keller-Box* :

1. Persamaan orde kedua atau orde tertinggi diubah menjadi persamaan diferensial orde pertama.
2. Diskritisasi persamaan dengan menggunakan skema beda hingga pusat.
3. Melinierisasikan persamaan tersebut menggunakan metode newton ke dalam bentuk matriks.
4. Menyelesaikan persamaan linier yang diperoleh menggunakan eliminasi blok matriks tridiagonal yang elemen-elemennya berupa matriks blok.



Gambar 2.2 Beda Hingga Skema *Keller-Box*

J. Penelitian Relevan

Penelitian-penelitian yang berkaitan dengan penelitian ini adalah sebagai berikut.

Tabel 2.3 Persamaan dan Perbedaan Penelitian Relevan dengan Penelitian Yang Dilakukan

Penelitian Relevan	Persamaan	Perbedaan
Sahaya et al., (2016) <i>“Magnetohidrodinamik aliran fluida viskoelastik yang melalui pelat datar”</i>	<p>a. Cara penyelesaiannya menggunakan metode <i>Keller-Box</i>.</p> <p>b. Dipengaruhi oleh parameter magnetik</p>	<p>a. Penelitian terdahulu Menggunakan fluida viskoelastik, sedangkan penelitian ini menggunakan fluida nano.</p>

		<p>b. Penelitian terdahulu Menggunakan media pelat datar, sedangkan penelitian ini menggunakan media silinder vertikal.</p> <p>c. Penelitian terdahulu dipengaruhi oleh parameter magnetik, nilai densitas partikel, viskoelastik, dan bilangan <i>Prandtl</i>. sedangkan penelitian ini dipengaruhi oleh fraksi volume dan magnetik.</p> <p>d. Penelitian terdahulu melibatkan konveksi, sedangkan penelitian ini tidak melibatkan konveksi.</p>
--	--	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>Dharma Utama et al., (2018)</p> <p><i>“Aliran magnetohidrodinamik fluida kental tak tunak dengan pengaruh konveksi campuran dan medan magnet yang melewati bola teriris”.</i></p>	<p>a. Cara penyelesaiannya menggunakan metode <i>Keller-Box</i>.</p> <p>b. Dipengaruhi oleh parameter magnetik</p>	<p>a. Penelitian terdahulu menggunakan fluida kental, sedangkan penelitian ini menggunakan fluida nano</p> <p>b. Penelitian terdahulu Menggunakan media bola teriris, sedangkan penelitian ini menggunakan media silinder vertikal.</p> <p>c. Penelitian terdahulu dipengaruhi oleh parameter konveksi, magnetik, dan sudut irisan, sedangkan penelitian ini dipengaruhi oleh fraksi volume dan magnetik.</p> <p>d. Penelitian terdahulu melibatkan konveksi, sedangkan penelitian</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

		ini tidak melibatkan konveksi.
<p>Norasia & Zulaikha (2019)</p> <p><i>“magnetohidrodinamik aliran fluida nano Zn dan ZnO pada lapisan batas bola bermagnet yang dipengaruhi oleh konveksi campuran”.</i></p>	<p>a. Menggunakan fluida nano</p> <p>b. Dipengaruhi oleh parameter magnetik</p>	<p>a. Penelitian terdahulu menggunakan media bola bermagnet, sedangkan penelitian ini menggunakan media silinder vertikal.</p> <p>b. Penelitian terdahulu hanya dipengaruhi oleh magnetik sedangkan penelitian ini dipengaruhi oleh fraksi volume dan magnetik.</p> <p>c. Penelitian terdahulu menggunakan metode euler implisit, sedangkan penelitian ini menggunakan metode <i>keller-box</i>.</p>

		d. Penelitian terdahulu melibatkan konveksi, sedangkan penelitian ini tidak melibatkan konveksi.
<p>Tafrikan & Ghani (2020)</p> <p><i>“Profil kecepatan dan temperatur pada aliran konveksi campuran yang melalui bola berpori dibawah pengaruh hidrodinamika-magnet”</i>.</p>	<p>a. Cara penyelesaiannya menggunakan metode <i>Keller-Box</i>.</p> <p>b. Dipengaruhi oleh parameter magnetik</p>	<p>a. Penelitian terdahulu menggunakan fluida viskoelastik, sedangkan penelitian ini menggunakan fluida nano.</p> <p>b. Penelitian terdahulu menggunakan media bola berpori, sedangkan penelitian ini menggunakan media silinder vertikal.</p> <p>c. Penelitian terdahulu hanya dipengaruhi oleh parameter magnetik, sedangkan penelitian ini dipengaruhi oleh</p>

		<p>fraksi volume dan magnetik.</p> <p>d. Penelitian terdahulu melibatkan konveksi, sedangkan penelitian ini tidak melibatkan konveksi.</p>
<p><i>Eviloka & Widodo (2022)</i></p> <p><i>“Aliran konveksi campuran fluida viskoelastik melewati bola teriris dengan pengaruh medan magnet.</i></p>	<p>a. Cara penyelesaiannya menggunakan metode <i>Keller-Box</i>.</p> <p>b. Dipengaruhi oleh parameter magnetik.</p> <p>.</p>	<p>a. Penelitian terdahulu menggunakan fluida viskoelastik, sedangkan penelitian ini menggunakan fluida nano</p> <p>b. Penelitian terdahulu menggunakan media bola teriris, sedangkan penelitian ini menggunakan media silinder vertikal.</p> <p>c. Penelitian terdahulu dipengaruhi oleh parameter magnetik, sudut irisan,</p>

		<p>bilangan <i>Prandtl</i>, viskoelastik, dan konveksi, sedangkan penelitian ini dipengaruhi oleh fraksi volume dan magnetik.</p> <p>d. Penelitian terdahulu melibatkan konveksi, sedangkan penelitian ini tidak melibatkan konveksi.</p>
<p>Mayagrafinda & Widodo (2022)</p> <p><i>“Analisis profil kecepatan dan temperatur pada sekitaran titik stagnasi terendah magnetohidrodinamika fluida nano melewati silinder berpori”.</i></p>	<p>a. Menggunakan fluida nano</p> <p>b. Cara penyelesaiannya menggunakan metode <i>Keller-Box</i>.</p> <p>c. Dipengaruhi oleh parameter fraksi volume dan magnetik.</p>	<p>a. Penelitian terdahulu menggunakan media silinder berpori, sedangkan penelitian ini menggunakan media silinder vertikal.</p> <p>b. Penelitian terdahulu melibatkan pengaruh konveksi campuran dan porositas, sedangkan penelitian ini tidak.</p>

		<p>c. Penelitian terdahulu Menggunakan partikel nano Fe_2O_3 dan Li_2O, sedangkan penelitian menggunakan partikel nano Li dan Li_2O.</p>
--	--	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

BAB III

METODE PENELITIAN

A. Tahap Penelitian

Tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Tahap Literatur Jurnal

Pada tahap ini dikaji beberapa model aliran fluida nano Newtonian melewati silinder vertikal dipengaruhi oleh fraksi volume dengan mencari jurnal atau artikel terkait dalam penelitian ini.

2. Tahap Perumusan Model Matematika

Pada tahap ini terdapat langkah-langkah yang harus dilakukan:

- i. Mengkaji perumusan persamaan pembangun dimensional yang berkaitan dengan penelitian ini meliputi persamaan kontinuitas dan persamaan momentum.
- ii. Persamaan pembangun dimensional yang diperoleh kemudian dilakukan substitusi variabel dan parameter non dimensional menjadi bentuk persamaan non-dimensional.
- iii. Menyederhanakan persamaan non-dimensional pada langkah kedua dengan pendekatan lapisan batas, kemudian substitusikan dengan persamaan (2.2) - (2.5).
- iv. Persamaan non dimensional yang diperoleh pada langkah

ketiga kemudian disederhanakan menjadi persamaan satu variabel (similaritas) menggunakan fungsi alir atau lintasan partikel dalam aliran fluida.

3. Tahap Penyelesaian Model Matematika

Model persamaan similaritas atau satu variabel yang dihasilkan diselesaikan dengan metode beda hingga pusat skema *Keller-Box*. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

- i. Persamaan similaritas yang terbentuk diubah dari orde tinggi menjadi persamaan orde satu.
- ii. Persamaan orde satu yang diperoleh dari langkah pertama kemudian dilakukan proses diskritisasi dengan beda hingga pusat.
- iii. Persamaan yang diperoleh dari langkah kedua kemudian dilinierisasikan dengan menggunakan metode newton dalam bentuk matriks.
- iv. Hasil dari linierisasi persamaan pada langkah ketiga diselesaikan dengan teknik eliminasi blok.

4. Tahap Simulasi Numerik Berbantuan Matlab

- i. Membuat simulasi numerik berdasarkan model matematika yang diperoleh dari penyelesaian menggunakan metode *Keller-Box*.
- ii. Simulasi numerik yang didapat pada langkah pertama, kemudian diterapkan menggunakan software Matlab.

iii. Dengan menggunakan input program yang ditulis dalam Matlab, simulasi dilakukan dengan memasukkan variasi parameter fraksi volume dan variasi parameter magnetik. Hasilnya berupa grafik kecepatan aliran fluida.

5. Tahap Analisis dan Pembahasan Hasil Simulasi

Pada tahap ini membahas tentang analisis dan pembahasan berdasarkan simulasi terbaik secara numerik untuk mengetahui pengaruh variasi parameter yang dilibatkan terhadap profil kecepatan. Kemudian diambil kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan.

6. Pembuatan Laporan Penelitian

7. Publikasi Laporan Penelitian

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

A. Pembentukan Persamaan Pembangun

Pada sub bab ini peneliti akan membahas mengenai pembentukan persamaan pembangun pada aliran fluida nano melewati media silinder vertikal dengan adanya pengaruh fraksi volume terhadap partikel nano. Persamaan pembangun penelitian ini diperoleh dari dua persamaan dasar, yaitu turunan hukum kekekalan massa (kontinuitas) dan turunan hukum kedua Newton (momentum). Berikut ini peneliti mengutip persamaan pembangun dari (Widodo et al., 2017) pada keadaan tunak dan *incompressible* dalam bentuk persamaan dimensional, dimana persamaannya sebagai berikut.

1. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.1)$$

Peneliti merujuk persamaan kontinuitas di atas karena akan meneliti aliran fluida nano yang melewati silinder vertikal sehingga persamaannya tidak dipengaruhi oleh jari-jari.

2. Persamaan Momentum

Terhadap sumbu x, yaitu:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho_{fn}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\mu_{fn}}{\rho_{fn}} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right) - \frac{\sigma \bar{u} B_0^2}{\rho_{fn}} - \beta_{fn} (\bar{T} - T_\infty) g \sin \left(\frac{\bar{x}}{a} \right) - \frac{\mu_{fn}}{\rho_{fn} K^*} \bar{u} \quad (4.2)$$

Terhadap sumbu y, yaitu:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho_{fn}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\mu_{fn}}{\rho_{fn}} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \right) - \frac{\sigma \bar{v} B_0^2}{\rho_{fn}} - \beta_{fn} (\bar{T} - T_{\infty}) g \cos\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) - \frac{\mu_{fn}}{\rho_{fn} K^*} \bar{v} \quad (4.3)$$

Peneliti merujuk persamaan momentum di atas karena terdapat pengaruh magnetik yang terjadi pada aliran fluida nano. Namun dalam penelitian tugas akhir ini tidak melibatkan pengaruh konveksi campuran dan tidak melewati media berpori sehingga persamaan (4.1), (4.2), dan (4.3) menjadi.

i. **Persamaan Kontinuitas:**

Persamaan kontinuitas dibangun dari hukum kekekalan massa. Hukum kekekalan massa menyatakan bahwa laju perubahan massa terhadap waktu akan bernilai konstan atau tetap.

$$m = \text{konstan} \rightarrow \frac{dM_{sys}}{dt} = 0 \quad (4.4)$$

dengan M dalam system dinyatakan dalam.

$$M_{sys} = \int_{sys} \rho_{fn} dV \quad (4.5)$$

dengan

M_{sys} : massa suatu sistem

ρ_{fn} : densitas fluida nano

V : volume fluida

Selanjutnya, substitusikan persamaan (4.5) ke persamaan (4.4) sehingga diperoleh.

$$\frac{dM_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{sys} \rho_{fn} dV = 0 \quad (4.6)$$

Menurut teori pengangkut *Reynold* (Reynold Transport), laju perubahan massa terhadap waktu dari suatu sistem dituliskan menjadi.

$$\frac{dM_{sys}}{dt} = \int_{cv} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{fn} dV + \int_{cs} \rho_{fn} \bar{V} \cdot \hat{n} dA \quad (4.7)$$

atau

$$\frac{d}{dt} \int_{sys} \rho_{fn} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho_{fn} dV + \int_{cs} \rho_{fn} \bar{V} \cdot \hat{n} dA \quad (4.8)$$

dengan

\bar{V} : volume kendali kecepatan fluida

\hat{n} : vektor normal keluar masuk volume kendali

dA : luas bidang permukaan fluida

dari persamaan (4.8) dijelaskan bahwa.

$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho_{fn} dV$ adalah jumlah besaran dalam volume kendali

$\int_{cs} \rho_{fn} \bar{V} \cdot \hat{n} dA$ adalah jumlah besaran yang masuk dan keluar dari bidang permukaan kendali.

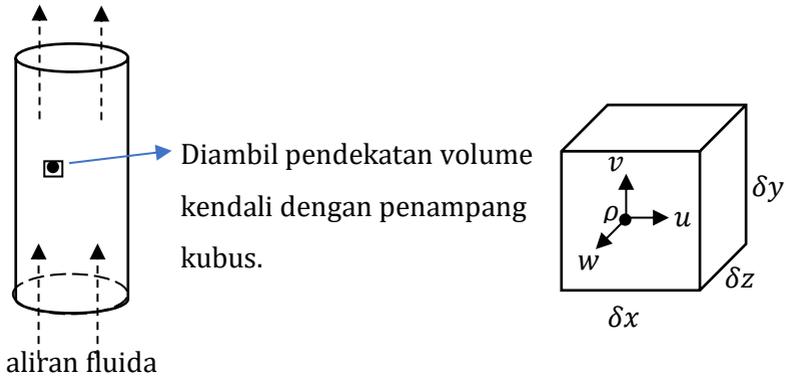
dengan mensubstitusikan persamaan (4.8) ke persamaan (4.6) didapatkan.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho_{fn} dV + \int_{cs} \rho_{fn} \bar{V} \cdot \hat{n} dA = 0 \quad (4.9)$$

dimana

$$\int_{cs} \rho_{fn} \bar{V} \cdot \hat{n} dA = \sum m_{keluar} - \sum m_{masuk} \quad (4.10)$$

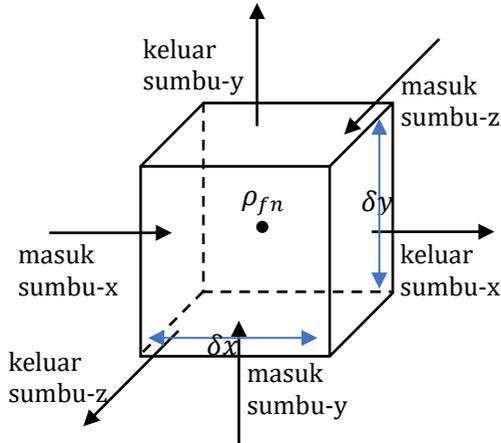
Menggunakan pendekatan volume kendali dengan penampang kubus untuk menggambarkan elemen-elemen kecil pada sistem. Maka persamaan kontinuitas dapat dimodelkan sebagai berikut.



laju perubahan massa terhadap waktu pada volume kendali suatu sistem dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho_{fn} dV = \frac{\partial \rho_{fn}}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \quad (4.11)$$

Sedangkan laju perubahan massa pada permukaan kendali diilustrasikan dengan pendekatan kubus pada sistem dengan ρ_{fn} sebagai pusat kubus dan komponen volume kendali kecepatan \bar{V} pada arah u, v, w terhadap sumbu x, y, z dapat digambarkan seperti gambar berikut.



Gambar 4.1. Aliran Fluida Masuk dan Keluar Volume Kendali

Jumlah aliran pada sumbu-x:

$$\begin{aligned}
 (m_{keluar} - m_{masuk})_{sumbu-x} &= \left(\rho_{fn} u + \frac{\partial}{\partial x} \rho_{fn} u \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z - \\
 &\quad \left(\rho_{fn} u - \frac{\partial}{\partial x} \rho_{fn} u \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z \\
 &= \rho_{fn} u + \frac{\partial}{\partial x} \rho_{fn} u \frac{\delta x}{2} \delta y \delta z - \\
 &\quad \rho_{fn} u + \frac{\partial}{\partial x} \rho_{fn} u \frac{\delta x}{2} \delta y \delta z \\
 &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \rho_{fn} u \frac{\delta x}{2} \delta y \delta z \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \rho_{fn} u \delta x \delta y \delta z \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

Jumlah aliran pada sumbu-y:

$$\begin{aligned}
 (m_{keluar} - m_{masuk})_{sumbu-y} &= \left(\rho_{fn} v + \frac{\partial}{\partial y} \rho_{fn} v \frac{\delta y}{2} \right) \delta x \delta z - \\
 &\quad \left(\rho_{fn} v - \frac{\partial}{\partial y} \rho_{fn} v \frac{\delta y}{2} \right) \delta x \delta z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \rho_{fn}v + \frac{\partial}{\partial y}\rho_{fn}v \frac{\delta y}{2} \delta x \delta z - \\
&\quad \rho_{fn}v + \frac{\partial}{\partial y}\rho_{fn}v \frac{\delta y}{2} \delta x \delta z \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial y}\rho_{fn}v \frac{\delta y}{2} \delta x \delta z \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\rho_{fn}v \delta x \delta y \delta z \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Jumlah aliran pada sumbu-z:

$$\begin{aligned}
(m_{keluar} - m_{masuk})_{sumbu-z} &= \left(\rho_{fn}w + \frac{\partial}{\partial z}\rho_{fn}w \frac{\delta z}{2} \right) \delta x \delta y - \\
&\quad \left(\rho_{fn}w - \frac{\partial}{\partial z}\rho_{fn}w \frac{\delta z}{2} \right) \delta x \delta y \\
&= \rho_{fn}w + \frac{\partial}{\partial z}\rho_{fn}w \frac{\delta z}{2} \delta x \delta y - \\
&\quad \rho_{fn}w + \frac{\partial}{\partial z}\rho_{fn}w \frac{\delta z}{2} \delta x \delta y \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial z}\rho_{fn}w \frac{\delta z}{2} \delta x \delta y \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\rho_{fn}w \delta x \delta y \delta z \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Total aliran di sumbu x, y, z.

$$\begin{aligned}
\sum m_{keluar} - \sum m_{masuk} &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\rho_{fn}u + \frac{\partial}{\partial y}\rho_{fn}v + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial}{\partial z}\rho_{fn}w \right] \delta x \delta y \delta z \quad (4.15)
\end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (4.11) dan persamaan (4.15) ke persamaan (4.9) didapatkan.

$$\frac{\partial \rho_{fn}}{\partial t} \delta x \delta y \delta z + \left[\frac{\partial}{\partial x}\rho_{fn}u + \frac{\partial}{\partial y}\rho_{fn}v + \frac{\partial}{\partial z}\rho_{fn}w \right] \delta x \delta y \delta z = 0 \quad (4.16)$$

Jika persamaan (4.16) dibagi dengan $\delta x \delta y \delta z$ maka diperoleh.

$$\frac{\partial \rho_{fn}}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \rho_{fn} u + \frac{\partial}{\partial y} \rho_{fn} v + \frac{\partial}{\partial z} \rho_{fn} w \right] = 0 \quad (4.17)$$

Persamaan (4.17) dapat ditulis dalam notasi vektor berikut.

$$\frac{\partial \rho_{fn}}{\partial t} + \nabla(\rho_{fn} \bar{V}) = 0 \quad (4.18)$$

Karena penelitian ini aliran fluida bersifat tidak mampu mampat (*incompressible*) sehingga densitas fluida sangat kecil

($\frac{\partial \rho}{\partial t}$ konstan) maka persamaan (4.18) menjadi.

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0 \quad (4.19)$$

atau dapat ditulis

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (4.20)$$

Karena penelitian ini hanya dilakukan pada dimensi dua sehingga

$\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$ diabaikan maka persamaan (4.20) menjadi.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (4.21)$$

ii. Persamaan Momentum:

Persamaan momentum dibangun dari hukum kedua newton. Hukum kedua newton menyatakan bahwa jumlah gaya yang bekerja pada system akan sama dengan laju perubahan momentumnya atau massa suatu sistem dikalikan dengan percepatan gerak. Dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\sum F = m \cdot a = m \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\bar{V}) \quad (4.22)$$

dengan $m\bar{V}$ dalam system dinyatakan dalam

$$m\bar{V}_{sys} = \int_{sys} \bar{V} dM_{sys} = \int_{sys} \rho_{fn} \bar{V} dV \quad (4.23)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (4.23) ke persamaan (4.22) maka diperoleh.

$$\Sigma F = \frac{d}{dt} \int_{sys} \rho_{fn} \bar{V} dV \quad (4.24)$$

Menurut teori pengangkut *Reynold* (Reynold Transport), laju perubahan momentum terhadap waktu dari suatu sistem dituliskan menjadi.

$$\Sigma F = \int_{cv} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{fn} \bar{V}) dV + \int_{cs} \rho_{fn} \bar{V} \cdot (\bar{V} \hat{n}) dA \quad (4.25)$$

Persamaan (4.25) dapat dinyatakan dengan teorema divergensi sehingga menjadi.

$$\begin{aligned} \Sigma F &= \int_{cv} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{fn} \bar{V}) dV + \int_{cs} \rho_{fn} \bar{V} \cdot (\bar{V} \hat{n}) dA \\ \Sigma F &= \rho_{fn} \left[\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} (\nabla \bar{V}) \right] \delta x \delta y \delta z \end{aligned} \quad (4.26)$$

dengan ΣF merupakan komponen gaya-gaya yang bekerja pada permukaan silinder vertikal. Komponen gaya-gaya tersebut yaitu gaya permukaan (F_p), gaya magnetik (F_m), dan gaya gravitasi (F_g). F_p merupakan gaya yang disebabkan oleh tekanan dan kekentalan. F_m merupakan gaya magnet yang bekerja langsung pada fluida. F_g merupakan gaya gravitasi.

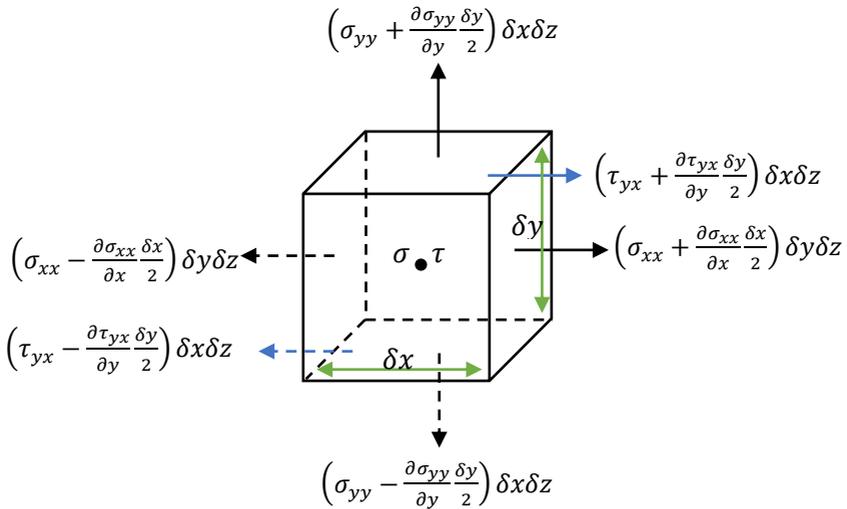
Sehingga persamaan (4.26) dapat ditulis.

$$\rho_{fn} \left[\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} (\nabla \bar{V}) \right] \delta x \delta y \delta z = F_p - F_m - F_g \quad (4.27)$$

Karena penelitian ini menggunakan dimensi dua (sumbu x dan y) maka persamaan (4.27) dapat ditulis.

$$\rho_{fn} \left[\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V}(\nabla \bar{V}) \right] \delta x \delta y = F_p - F_m - F_g \quad (4.28)$$

dengan menggunakan pendekatan volume kendali pada penampang kubus dengan (σ) sebagai tegangan normal dan (τ) sebagai tegangan geser maka persamaan momentum dapat dikonstruksikan sebagai berikut.



Gambar 4.2 Gaya Permukaan Elemen Fluida

Jumlah gaya pada sumbu-x:

$$(F_p)_{sumbu-x} = \left(\frac{\partial(\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (4.29)$$

Jumlah gaya pada sumbu-y:

$$(F_p)_{sumbu-y} = \left(\frac{\partial(\sigma_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (4.30)$$

Total gaya permukaan (F_p) sebagai berikut.

$$F_p = F_{px}i + F_{py}j$$

$$F_p = \left(\frac{\partial(\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} \right) i + \left(\frac{\partial(\sigma_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} \right) j \quad (4.31)$$

karena dalam penelitian ini menggunakan fluida nano sehingga alirannya tidak mampu mampat oleh karena itu tegangan-tegangannya sebanding dengan laju deformasi, dapat dinyatakan.

a. Tegangan Normal

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu_{fn} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.32)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu_{fn} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.33)$$

b. Tegangan Geser

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu_{fn} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4.34)$$

Substitusikan persamaan (4.32) - (4.34) ke persamaan (4.31), diperoleh.

$$F_p = \left(\frac{\partial(-p + 2\mu_{fn} \frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(\mu_{fn} (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}))}{\partial y} \right) i + \left(\frac{\partial(-p + 2\mu_{fn} \frac{\partial v}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(\mu_{fn} (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}))}{\partial x} \right) j$$

$$= \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu_{fn} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{fn} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right) i + \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu_{fn} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{fn} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right) j$$

$$= \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu_{fn} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right) i + \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + 2\mu_{fn} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right) j \quad (4.35)$$

Maka total tegangan geser dan normal sebagai berikut.

$$\begin{aligned} 2\mu_{fn} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) &= \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\ &= \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \mu_{fn} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \mu_{fn} \nabla^2 u + \mu_{fn} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \bar{V}) \\ &= \mu_{fn} \nabla^2 u \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan gaya permukaan (F_p), yaitu.

$$(F_p) = -\nabla p + \mu_{fn} \nabla^2 \bar{V} \quad (4.36)$$

karena pada penelitian ini terdapat pengaruh magnetik pada fluida nano. Gaya magnetik yang bekerja ini disebut juga sebagai gaya *Lorentz* dan dinyatakan.

$$F_m = J \times B \quad (4.37)$$

dengan J merupakan kerapatan arus listrik, B merupakan total medan magnet pada sistem.

$$J = \sigma(E + \bar{V} \times B) \quad (4.38)$$

dengan σ merupakan daya hantar listrik, E merupakan medan listrik dari luar dan ($E = 0$) karena tidak ada medan listrik dari luar pada aliran fluida.

$$B = b + B_0 \quad (4.39)$$

dengan b merupakan besarnya medan magnet dari fluida yang terinduksi oleh media, B_0 merupakan medan magnet dari media yang mengandung magnet.

Substitusikan persamaan (4.38) ke persamaan (4.37) maka menjadi.

$$F_m = \sigma(\bar{V} \times B) \times B \quad (4.40)$$

Substitusikan persamaan (4.40) ke persamaan (4.39) maka menjadi.

$$F_m = [\sigma(\bar{V} \times (b + B_0))] \times (b + B_0)$$

atau dapat ditulis.

$$F_m = [\sigma(\bar{V} \times b) + (\bar{V} \times B_0)] \times (b + B_0) \quad (4.41)$$

dengan

$$(\bar{V} \times b) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} = (vb)i - (ub)j + 0k \quad (4.42)$$

$$(\bar{V} \times B_0) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{bmatrix} = (vB_0)i - (uB_0)j + 0k \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} [(\bar{V} \times b) + (\bar{V} \times B_0)] &= [(vb)i - (ub)j + 0k] + [(vB_0)i - (uB_0)j + 0k] \\ &= [(vb)i + (vB_0)i - (ub)j - (uB_0)j + 0k] \\ &= [(v(b + B_0))i + (-u(b + B_0))j + 0k] \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} [(\bar{V} \times b) + (\bar{V} \times B_0)] \times (b + B_0) &= \begin{bmatrix} i & j & k \\ v(b + B_0) & -u(b + B_0) & 0 \\ 0 & 0 & b + B_0 \end{bmatrix} \\ &= -u(b + B_0)^2 i - v(b + B_0)^2 j + 0k \end{aligned} \quad (4.45)$$

atau dapat ditulis.

$$[(\bar{V} \times b) + (\bar{V} \times B_0)] \times (b + B_0) = (-u(b + B_0)^2, -v(b + B_0)^2, 0) \quad (4.46)$$

Substitusikan persamaan (4.46) ke persamaan (4.41) maka diperoleh.

$$F_m = (\sigma(-u(b + B_0)^2, -v(b + B_0)^2, 0)) \quad (4.47)$$

dinyatakan dalam bentuk vektor sebagai berikut.

$$F_m = -\sigma(b + B_0)^2 \bar{V} \quad (4.48)$$

Selanjutnya terdapat gaya gravitasi yang mempengaruhi aliran fluida nano yang melewati silinder vertikal. Gaya gravitasi didefinisikan.

$$F_g = \rho_{fn} g \quad (4.49)$$

Karena aliran fluida nano yang melewati silinder vertikal berlawanan arah dengan arah gravitasi, maka gaya gravitasi menjadi $(-g_x, -g_y, 0)$ sehingga diperoleh F_g berikut.

$$F_g = -\rho_{fn} g_x i, -\rho_{fn} g_y j \quad (4.50)$$

Pada persamaan (4.28), substitusikan total gaya yang bekerja dalam sistem sehingga diperoleh persamaan momentum sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \rho_{fn} \left[\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V}(\nabla \bar{V}) \right] \delta x \delta y &= F_p - F_m - F_g \\ &= -\nabla p + \mu_{fn} \nabla^2 \bar{V} + \sigma(b + B_0)^2 \bar{V} - \rho_{fn} g \end{aligned} \quad (4.51)$$

dengan

$$g = (g_x, g_y)$$

Selanjutnya persamaan (4.51) ditulis pada arah sumbu x dan y diperoleh persamaan momentum pada sumbu-x

$$\begin{aligned} \rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ &+ \sigma(b + B_0)^2 \bar{u} - \rho_{fn} g_x \end{aligned} \quad (4.52)$$

Terhadap sumbu-y

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

$$+\sigma(b + B_0)^2\bar{v} - \rho_{fn} g_{\bar{y}} \quad (4.53)$$

dengan kondisi batas:

jika $\bar{t} = 0$; $\bar{u} = \bar{v} = 0 \forall \bar{x}, \bar{y}$

jika $\bar{t} > 0$; $\bar{u} = \bar{v} = 0$, saat $\bar{y} = 0$

$\bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x})$, saat $\bar{y} \rightarrow \infty$

Persamaan (4.21), (4.52), dan (4.53) adalah model matematika dimensional. Tanda “ - ” merupakan simbol untuk persamaan dimensional.

dengan:

\bar{u} : komponen kecepatan arah sumbu-x

\bar{v} : komponen kecepatan arah sumbu-y

\bar{p} : tekanan

μ : viskositas fluida

σ : konduktivitas

b : besarnya medan magnet dari fluida yang terinduksi oleh media

B_0 : medan magnet dari media yang mengandung magnet

B. Model Matematika Non-dimensional

Model matematika dimensional yang diperoleh sebelumnya kemudian akan diubah ke dalam bentuk non-dimensional menggunakan variabel dan parameter non-dimensional. Variabel

dan parameter yang digunakan adalah sebagai berikut (Widodo et al., 2017).

Variabel non-dimensional:

$$x = \frac{\bar{x}}{a} ; y = Re^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\bar{y}}{a} \right) ; u_e(x) = \frac{\bar{u}_e(\bar{x})}{U_\infty} ; v = Re^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\bar{v}}{U_\infty} \right)$$

$$p = \frac{\bar{p}}{\rho_{fn} U_\infty^2} ; t = \frac{\bar{t} U_\infty}{a}$$

$Re = \frac{U_\infty a}{\nu_{fn}}$, viskositas kinematik fluida nano

$\nu_{fn} = \frac{\mu_{fn}}{\rho_{fn}}$, dan kecepatan aliran bebas $\bar{u}_e(\bar{x}) = U_\infty \sin \left(\frac{\bar{x}}{a} \right)$

dengan:

x : sumbu x non-dimensi

\bar{x} : sumbu x dimensi

a : panjang karakteristik

y : sumbu y non-dimensi

\bar{y} : sumbu y dimensi

u : komponen kecepatan arah sumbu x non-dimensi

\bar{u} : komponen kecepatan arah sumbu x dimensi

v : komponen kecepatan arah sumbu y non-dimensi

\bar{v} : komponen kecepatan arah sumbu y dimensi

U_∞ : kecepatan aliran bebas fluida

$u_e(x)$: kecepatan di luar lapisan batas non-dimensi

$\bar{u}_e(\bar{x})$: kecepatan di luar lapisan batas dimensi

p : tekanan

t : waktu

Parameter non-dimensional:

$$M = \frac{\sigma(B_0)^2 a}{\rho_{fn} U_\infty}$$

dengan:

M : parameter magnetik

Kemudian percepatan gravitasi didefinisikan sebagai berikut (Widodo et al., 2017).

$$g_{\bar{x}} : -g \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)$$

$$g_{\bar{y}} : g \cos\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)$$

dengan mensubstitusikan variabel non-dimensional dan parameter non-dimensional ke persamaan (4.21), (4.52), dan (4.53) serta diasumsikan bahwa besar medan magnet menginduksi fluida yang mengalir melalui silinder vertikal bermagnet sebesar $\frac{1}{4}$ dari besar medan magnet sumbernya ($b = \frac{1}{4} B_0$) (Palyama, 2017). Sehingga didapatkan model matematika non-dimensional (lampiran 1) sebagai berikut.

i. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.54)$$

ii. Persamaan Momentum sumbu x

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{fn}}{Re_{vf}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{v_{fn}}{v_f} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ &+ \frac{25}{16} M u + \left(\frac{a}{U_\infty^2}\right) g \sin x \end{aligned} \quad (4.55)$$

iii. Persamaan Momentum sumbu y

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{fn}}{v_f} \frac{1}{Re^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{v_{fn}}{v_f} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &+ \frac{25}{16} \frac{M}{Re} v - \left(\frac{a}{U_\infty^2} \right) \frac{g}{Re^{1/2}} \cos x \quad (4.56) \end{aligned}$$

dengan kondisi batas:

jika $t = 0$; $u = v = 0 \forall x, y$

jika $t > 0$; $u = v = 0$, saat $y = 0$

$u = u_e(x)$, saat $y \rightarrow \infty$

C. Pendekatan Lapisan Batas

Dengan menyederhanakan persamaan non-dimensional yang didapatkan sebelumnya dengan pendekatan lapisan batas dimana nilai Reynold mendekati tak terhingga ($Re \rightarrow \infty$) maka $\left(\frac{1}{Re} \rightarrow 0 \right)$. Oleh karena itu, persamaan non-dimensional dapat ditulis sebagai berikut.

i. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.57)$$

ii. Persamaan Momentum sumbu x

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{fn}}{Re_{v_f}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{v_{fn}}{v_f} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &+ \frac{25}{16} M u + \left(\frac{a}{U_\infty^2} \right) g \sin x \end{aligned}$$

menjadi

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + (0) \frac{v_{fn}}{v_f} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{v_{fn}}{v_f} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ &\quad + \frac{25}{16} Mu + \left(\frac{a}{U_\infty^2}\right) g \sin x \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{fn}}{v_f} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{25}{16} Mu \\ &\quad + \left(\frac{a}{U_\infty^2}\right) g \sin x \end{aligned} \quad (4.58)$$

iii. Persamaan Momentum sumbu y

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{fn}}{v_f} \frac{1}{Re^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{v_{fn}}{v_f} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\ &\quad + \frac{25}{16} \frac{M}{Re} v - \left(\frac{a}{U_\infty^2}\right) \frac{g}{Re^{1/2}} \cos x \end{aligned}$$

menjadi

$$\begin{aligned} (0) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{fn}}{v_f} (0) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{v_{fn}}{v_f} (0) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\ &\quad + \frac{25}{16} (0) Mv - \left(\frac{a}{U_\infty^2}\right) (0) g \cos x \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Karena penelitian ini menggunakan fluida nano, maka persamaan di atas akan disubstitusikan terhadap variabel yang berkaitan antara fluida nano dengan fluida dasar sebagai berikut(Widodo et al., 2017).

Densitas Fluida Nano

$$\rho_{fn} = (1 - \chi)\rho_{fd} + \chi\rho_s$$

dengan

ρ_{fn} : kerapatan fluida nano (kg/m^3)

χ : fraksi volume partikel nano

ρ_{fd} : kerapatan fluida dasar (kg/m^3)

ρ_s : kerapatan partikel nano (kg/m^3)

Viskositas

$$\mu_{fn} = \frac{\mu_{fd}}{(1 - \chi)^{2.5}}$$

dengan

μ_{fn} : kekentalan dinamik fluida nano

μ_{fd} : kekentalan dinamik fluida dasar

χ : fraksi volume partikel nano

Kalor Spesifik Fluida Nano

$$(\rho C_p)_{fn} = (1 - \chi)(\rho C_p)_{fd} + \chi(\rho C_p)_s$$

dengan

$(C_p)_{fn}$: kalor khusus fluida nano

$(C_p)_{fd}$: kalor khusus fluida dasar

$(C_p)_s$: kalor khusus partikel ($\text{kJ}/\text{kg.K}$)

Konduktivitas Termal

$$\frac{K_{fn}}{K_{fd}} = \frac{(k_s + 2k_{fd}) - 2\chi(k_{fd} - k_s)}{(k_s + 2k_{fd}) + \chi(k_{fd} - k_s)}$$

dengan

K_{fn} : konduktivitas termal fluida nano

K_{fd} : konduktivitas termal fluida dasar

k_s : konduktivitas termal partikel

Sehingga persamaan dengan pendekatan lapisan batas menjadi:

i. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.60)$$

ii. Persamaan Momentum sumbu x

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{fn}}{v_f} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{25}{16} \mu u + \left(\frac{a}{U_\infty^2} \right) g \sin x$$

dengan substitusi

$$v_{fn} = \frac{\mu_{fn}}{\rho_{fn}}$$

atau

$$v_{fn} = \frac{\mu_f}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{(1-\chi)\rho_f + \chi\rho_s}$$

$$v_{fn} = v_f \left(\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{(1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \right)$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_f}{v_f} \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &+ \frac{25}{16} Mu + \left(\frac{a}{U_\infty^2} \right) g \sin x \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &+ \frac{25}{16} Mu + \left(\frac{a}{U_\infty^2} \right) g \sin x \end{aligned} \quad (4.61)$$

iii. Persamaan Momentum sumbu y

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.62)$$

Dari penyederhanaan persamaan dengan lapisan batas menunjukkan bahwa tekanan (p) fluida nano tidak bergantung pada sumbu y (persamaan 4.62) sehingga tekanan (p) fluida nano hanya bergantung pada sumbu x. oleh karena itu, persamaan momentum yang tersisa di sistem yaitu pada sumbu x dengan persamaan momentum di luar lapisan batas (u_e) merupakan pengganti (u), u_e = kecepatan di luar lapisan batas, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \left(\frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} \right) \\ &+ \frac{25}{16} Mu_e + \left(\frac{a}{U_\infty^2} \right) g \sin x \end{aligned} \quad (4.63)$$

diasumsikan kecepatan aliran bebas dalam bentuk silinder (Widodo et al., 2017) yaitu $u_e(x) = \sin x$, sehingga:

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial u_e}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0 \quad (4.64)$$

Substitusikan persamaan (4.64) ke persamaan (4.63), maka diperoleh

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{25}{16} M u_e + \left(\frac{a}{U_\infty^2}\right) g \sin x$$

atau

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} - \frac{25}{16} M u_e - \left(\frac{a}{U_\infty^2}\right) g \sin x \quad (4.65)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (4.65) ke persamaan (4.61), maka diperoleh.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \left(u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} - \frac{25}{16} M u_e - \left(\frac{a}{U_\infty^2}\right) g \sin x\right) \\ &+ \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f}\right)\right)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ &+ \frac{25}{16} M u + \left(\frac{a}{U_\infty^2}\right) g \sin x \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f}\right)\right)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ &+ \frac{25}{16} M (u - u_e) \end{aligned} \quad (4.66)$$

D. Fungsi Alir

Fungsi alir (ψ) berfungsi untuk menyederhanakan persamaan multivariabel menjadi persamaan sederhana (satu variabel). Fungsi alir yang melewati silinder dinyatakan dengan (Widodo et al., 2017):

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Substitusikan u dan v pada persamaan (4.60) dan persamaan (4.66), sehingga diperoleh.

i. Persamaan Kontinuitas

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y} \right)}{\partial x} + \frac{\left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x} \right)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4.67)$$

ii. Persamaan Momentum

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &+ \frac{25}{16} M(u - u_e) \end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan u dan v didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial x} + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial y} &= \\ u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial y^2} + \frac{25}{16} M \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y}\right)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \frac{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y}\right)}{\partial x} + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \frac{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y}\right)}{\partial y} = \\
&\quad u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \frac{\left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial y}\right)}{\partial y^2} + \frac{25}{16} M \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right) \\
&\Leftrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \\
&\quad \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{25}{16} M \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right) \quad (4.68)
\end{aligned}$$

kondisi batas fungsi alir sebagai berikut.

$$\text{jika } t = 0 ; \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \forall x, y$$

$$\text{jika } t > 0 ; \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \text{ saat } y = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e(x), \text{ saat } y \rightarrow \infty$$

E. Persamaan Similaritas

Karena pada persamaan (4.67), yaitu fungsi alir memenuhi persamaan kontinuitas sehingga persamaan pembangunnya hanya persamaan momentum. Selanjutnya persamaan fungsi alir akan diubah ke dalam persamaan similaritas dengan variabel similaritas sebagai berikut.

$$\psi = t^{\frac{1}{2}} u_e(x) f(x, \eta, t) ; \quad \eta = \frac{y}{t^{1/2}} \quad (4.69)$$

dengan mensubstitusikan variabel similaritas (persamaan 4.69) terhadap persamaan (4.68) sehingga diperoleh (lampiran 2):

i. Persamaan Momentum

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + t u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - t \frac{\partial u_e}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \\
 & t u_e \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = t \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \\
 & \quad + \frac{25}{16} M t \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - 1 \right) \tag{4.70}
 \end{aligned}$$

atau dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\
 & = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + \frac{25}{16} M t \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right) \tag{4.71}
 \end{aligned}$$

Karena sudut pengamatan penelitian ini terletak di titik stagnansi terdekat yaitu ($x \approx 0$) sehingga kecepatan aliran bebas (u_e) pada aliran fluida yang melewati silinder yaitu $u_e = \sin x = 0$ dan $\frac{\partial u_e}{\partial x} = \cos x = 1$, maka dengan mensubstitusikan u_e dan $\frac{\partial u_e}{\partial x}$ terhadap persamaan (4.71) diperoleh.

Persamaan momentum untuk waktu:

$$\frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \cos x \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)$$

$$= t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t \sin x \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + \frac{25}{16} M t \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right) \quad (4.72)$$

atau dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\ & = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + \frac{25}{16} M t \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.73)$$

dengan mengasumsikan $\frac{\partial f}{\partial \eta} = f'$ maka persamaan (4.73) dapat ditulis.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} f''' + \frac{\eta}{2} f'' + t(1 - (f')^2 + f f'') \\ & = t \frac{\partial f'}{\partial t} + \frac{25}{16} M t (1 - f') \end{aligned} \quad (4.74)$$

kondisi batas sebagai berikut.

$$\text{jika } t = 0 ; f = f' = 0 \quad \forall x, \eta$$

$$\text{jika } t > 0 ; f = f' = 0, \text{ saat } \eta = 0$$

$$f' = 1, \text{ saat } \eta \rightarrow \infty$$

F. Penyelesaian Model Matematika

Setelah memperoleh model matematika pada persamaan similaritas dari aliran fluida nano yang melewati silinder vertikal, kemudian akan dilakukan penyelesaian dengan metode *Keller-Box* yang diawali dengan mengubah persamaan similaritas orde tinggi

pada persamaan (4.74) menjadi persamaan orde satu, selanjutnya dilakukan proses dikritisasi model dengan beda hingga pusat, melinierisasikan dengan metode newton dalam bentuk matriks vektor, dan diselesaikan dengan eliminasi blok. Setelah itu, simulasi model matematika diinput menggunakan software Matlab dengan memunculkan output berupa profil kecepatan pada variasi parameter fraksi volume (χ) dan variasi parameter magnetik (M).

a. Pemisalan Notasi

Persamaan (4.74) merupakan persamaan orde tinggi yang akan diubah menjadi persamaan berorde satu karena dalam penyelesaian metode *Keller-Box* harus berbentuk orde satu. Oleh karena itu, dilakukan pemisalan notasi sebagai berikut.

$$f' = u \quad (4.75)$$

$$u' = v \quad (4.76)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (4.75), dan (4.76) ke persamaan (4.74) maka didapat persamaan orde satu berikut.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} v' + \frac{\eta}{2} v + t(1 - (u)^2 + fv) \\ & = t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{25}{16} Mt(1 - u) \end{aligned}$$

atau dapat ditulis.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} v' + \frac{\eta}{2} v + t(1 - (u)^2 + fv) \\ & - \frac{25}{16} Mt(1 - u) = t \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.77)$$

b. Diskritisasi Model

Diskritisasi model dapat diselesaikan dengan metode beda hingga pada persamaan (4.75) - (4.77). Untuk persamaan linier seperti pada persamaan (4.75) - (4.76), diskritisasi model terletak di titik tengah atau titik pusat garis V_1V_2 yaitu $(y_{i-1/2}, t_n)$. Sedangkan untuk persamaan non linier seperti persamaan (4.77), diskritisasi model terletak di titik tengah atau titik pusat garis $V_1V_2V_3V_4$ yaitu $(y_{i-1/2}, t_{n-1/2})$ seperti pada gambar 2.3. karena sudut pengamatan terletak di titik stagnansi terdekat ($x \approx 0$) sehingga diskritisasi terjadi pada sumbu y saja, maka diperoleh.

$$\frac{(f_j^n - f_{j-1}^n)}{h_j} = u_{j-\frac{1}{2}}^n \leftrightarrow \frac{1}{h_j} (f_j^n - f_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (4.78)$$

$$\frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{h_j} = v_{j-\frac{1}{2}}^n \leftrightarrow \frac{1}{h_j} (u_j^n - u_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (v_j^n + v_{j-1}^n) \quad (4.79)$$

dengan pemisalan koefisien pada persamaan momentum seperti di bawah ini.

$$A = \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \quad (4.80)$$

Kemudian substitusikan persamaan (4.80) ke persamaan (4.79) maka diperoleh.

$$Av' + \frac{\eta}{2}v + t(1 - (u)^2 + fv) - \frac{25}{16}Mt(1 - u) = t \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.81)$$

Persamaan (4.81) dapat didiskritisasi sebagai berikut.

$$\frac{1}{2} \left[(M_1)_{j-\frac{1}{2}}^n + (M_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = t^{n-\frac{1}{2}} \left[\frac{u_{j-\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{t^n} \right]$$

dengan

$$\begin{aligned} (M_1)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left[Av' + \frac{\eta}{2} v + t(1 - (u)^2 + fv) - \frac{25}{16} Mt(1 - u) \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \\ &= A \left(\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{hj} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{25}{16} Mt^n \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (M_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= \left[Av' + \frac{\eta}{2} v + t(1 - (u)^2 + fv) - \frac{25}{16} Mt(1 - u) \right]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\ &= A \left(\frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{hj} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + t^{n-1} \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \frac{25}{16} Mt^{n-1} \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} &A \left(\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{hj} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \\ &\frac{25}{16} Mt^n \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + A \left(\frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{hj} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \\ &t^{n-1} \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \frac{25}{16} Mt^{n-1} \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\ &= 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{t^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{t^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{aligned}
 & A \left(\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{h_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \\
 & \frac{25}{16} M t^n \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{t^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n = -A \left(\frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{h_j} \right) - \\
 & \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - t^{n-1} \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \\
 & \frac{25}{16} M t^{n-1} \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{t^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \tag{4.82}
 \end{aligned}$$

c. Linierisasi Model

Setelah mendapatkan hasil dari diskritisasi model, kemudian dilakukan linierisasi model pada persamaan (4.78), (4.79), dan (4.82) menggunakan metode newton. Bentuk iterasi (i) dari metode newton, yaitu.

$$\begin{aligned}
 f_j^{(i+1)} &= f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} \\
 u_j^{(i+1)} &= u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)} \\
 v_j^{(i+1)} &= v_j^{(i)} + \delta v_j^{(i)} \tag{4.83}
 \end{aligned}$$

Substitusikan persamaan (4.83) ke persamaan (4.78), (4.79), dan (4.82) sehingga diperoleh.

$$\begin{aligned}
 & (\delta f_j^n - \delta f_{j-1}^n) - \frac{h_j}{2} (\delta u_j^n + \delta u_{j-1}^n) = -(f_j^n - f_{j-1}^n) \\
 & + \frac{h_j}{2} (u_j^n + u_{j-1}^n) \tag{4.84}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta u_j^n - \delta u_{j-1}^n) - \frac{hj}{2} (\delta v_j^n + \delta v_{j-1}^n) = -(u_j^n - u_{j-1}^n) \\
& + \frac{hj}{2} (v_j^n + v_{j-1}^n) \tag{4.85}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A \left(\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{hj} \right) + \left(\frac{\delta v_j^n - \delta v_{j-1}^n}{hj} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(v_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta v_j^n - \delta v_{j-1}^n}{2} \right) + \\
& t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta u_j^n + \delta u_{j-1}^n}{2} \right)^2 + \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta f_j^n + \delta f_{j-1}^n}{2} \right) \left(v_{j-\frac{1}{2}}^n + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\delta v_j^n + \delta v_{j-1}^n}{2} \right) \right) - \frac{25}{16} M t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta u_j^n + \delta u_{j-1}^n}{2} \right) \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{t^n} \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n + \right. \\
& \left. \frac{\delta u_j^n + \delta u_{j-1}^n}{2} \right) = R1
\end{aligned}$$

atau bisa ditulis

$$\begin{aligned}
& A \left(\frac{\delta v_j^n - \delta v_{j-1}^n}{hj} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\delta v_j^n + \delta v_{j-1}^n}{2} \right) - t^n 2 u_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta u_j^n + \delta u_{j-1}^n}{2} \right) \\
& - t^n \left(\frac{\delta u_j^n + \delta u_{j-1}^n}{2} \right)^2 + t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta v_j^n + \delta v_{j-1}^n}{2} \right) + t^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta f_j^n + \delta f_{j-1}^n}{2} \right) \\
& + t^n \left(\frac{\delta f_j^n + \delta f_{j-1}^n}{2} \right) \left(\frac{\delta v_j^n + \delta v_{j-1}^n}{2} \right) - \frac{25}{16} M t^n \left(\frac{\delta u_j^n + \delta u_{j-1}^n}{2} \right) \\
& - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{t^n} \left(\frac{\delta u_j^n + \delta u_{j-1}^n}{2} \right) = -A \left(\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{hj} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^n - \\
& t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{25}{16} M t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \right) + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{t^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& + R1 \tag{4.86}
\end{aligned}$$

Selanjutnya sederhanakan persamaan (4.84) - (4.86) dengan cara menghilangkan orde tinggi pada $\delta f_j^{(i)}$, $\delta u_j^{(i)}$, dan $\delta v_j^{(i)}$ sehingga diperoleh.

$$\begin{aligned} (\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{hj}{2}(\delta u_j + \delta u_{j-1}) &= -(f_j^n - f_{j-1}^n) \\ + \frac{hj}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n) & \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} (\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{hj}{2}(\delta v_j + \delta v_{j-1}) &= -(u_j^n - u_{j-1}^n) \\ + \frac{hj}{2}(v_j^n + v_{j-1}^n) & \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} A \left(\frac{\delta v_j - \delta v_{j-1}}{hj} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) - t^n 2u_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) \\ - t^n \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right)^2 + t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) + t^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \\ + t^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) - \frac{25}{16} M t^n \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) \\ - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{t^n} \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) = -A \left(\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{hj} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^n - \\ t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{25}{16} M t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \right) + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{t^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n \\ + R1 \end{aligned} \quad (4.89)$$

Persamaan (4.87) - (4.89) dapat ditulis sebagai berikut.

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{hj}{2}(\delta u_j + \delta u_{j-1}) = (p_1)_j \quad (4.90)$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{hj}{2}(\delta v_j + \delta v_{j-1}) = (p_2)_j \quad (4.91)$$

$$(a_1)_j \delta v_j + (a_2)_j \delta v_{j-1} + (a_3)_j \delta f_j + (a_4)_j \delta f_{j-1} + (a_5)_j \delta u_j + (a_6)_j \delta u_{j-1} = (p_3)_j \quad (4.92)$$

dengan melakukan pemisalan pada $(p_1)_j$, $(p_2)_j$, dan $(p_3)_j$ sebagai berikut.

$$(p_1)_j = -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{hj}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n)$$

$$(p_2)_j = -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{hj}{2}(v_j^n + v_{j-1}^n)$$

$$(p_3)_j = -A \left(\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{hj} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^n - t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{25}{16} M t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \right) + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{t^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n - A \left(\frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{hj} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - t^{n-1} \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \frac{25}{16} M t^{n-1} \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{t^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$

$$(a_1)_j = \frac{A}{hj} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{1}{2} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_2)_j = -\frac{A}{hj} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{1}{2} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_3)_j = \frac{1}{2} t^n v_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_4)_j = (a_3)_j$$

$$(a_5)_j = -t^n u_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{25}{32} M t^n - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{t^n}$$

$$(a_6)_j = (a_5)_j$$

Berdasarkan kondisi batas pada persamaan similaritas, maka didapatkan kondisi batas sebagai berikut.

$$\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta u_N = 0$$

d. Penyelesaian Linierisasi Model

Persamaan linier (4.90) – (4.92) akan diselesaikan dengan teknik eliminasi blok. Dalam metode *Keller-Box*, elemen-elemen pada blok tridiagonal adalah matriks blok. Sehingga dalam penyelesaiannya perlu ditentukan elemen-elemen matriks blok tridiagonal pada persamaan (4.90) – (4.92) dengan membentuknya menjadi tiga kondisi, yaitu saat $J = 1$, $J = N - 1$, dan $J = N$

1. Kondisi saat $J = 1$, persamaan (4.90) – (4.92) menjadi

$$(\delta f_1 - \delta f_0) - \frac{h_1}{2}(\delta u_1 + \delta u_0) = (p_1)_1 \quad (4.93)$$

$$(\delta u_1 - \delta u_0) - \frac{h_1}{2}(\delta v_1 + \delta v_0) = (p_2)_1 \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned} & (a_1)_1 \delta v_1 + (a_2)_1 \delta v_0 + (a_3)_1 \delta f_1 + (a_4)_1 \delta f_0 + (a_5)_1 \delta u_1 \\ & + (a_6)_1 \delta u_0 = (p_3)_1 \end{aligned} \quad (4.95)$$

dari kondisi batas yang sudah diketahui yaitu $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta u_N = 0$ maka persamaan (4.93) – (4.95) dapat dibentuk ke dalam matriks di bawah ini.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{h_1}{2} & 0 & -\frac{h_1}{2} \\ (a_2)_1 & (a_3)_1 & (a_1)_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_0 \\ \delta f_1 \\ \delta v_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{h_1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ (a_5)_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta f_2 \\ \delta v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p_1)_1 \\ (p_2)_1 \\ (p_3)_1 \end{bmatrix}$$

Pada kondisi ini, matriks dapat ditulis sebagai berikut.

$$[A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [p_1]$$

2. Kondisi saat $J = N - 1$, persamaan (4.90) - (4.92) menjadi

$$(\delta f_{N-1} - \delta f_{N-2}) - \frac{h_{N-1}}{2}(\delta u_{N-1} + \delta u_{N-2}) = (p_1)_{N-1} \quad (4.96)$$

$$(\delta u_{N-1} - \delta u_{N-2}) - \frac{h_{N-1}}{2}(\delta v_{N-1} + \delta v_{N-2}) = (p_2)_{N-1} \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} & (a_1)_{N-1}\delta v_{N-1} + (a_2)_{N-1}\delta v_{N-2} + (a_3)_{N-1}\delta f_{N-1} \\ & + (a_4)_{N-1}\delta f_{N-2} + (a_5)_{N-1}\delta u_{N-1} + \\ & (a_6)_{N-1}\delta u_{N-2} = (p_3)_{N-1} \end{aligned} \quad (4.98)$$

Maka persamaan (4.96) - (4.98) dapat dibentuk ke dalam matriks di bawah ini.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{h_{N-1}}{2} \\ 0 & (a_4)_{N-1} & (a_2)_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_{N-3} \\ \delta f_{N-2} \\ \delta v_{N-2} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{h_{N-1}}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{h_{N-1}}{2} \\ (a_6)_{N-1} & (a_3)_{N-1} & (a_1)_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{N-2} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta v_{N-1} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{h_{N-1}}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ (a_5)_{N-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p_1)_{N-1} \\ (p_2)_{N-1} \\ (p_3)_{N-1} \end{bmatrix}$$

Pada kondisi ini, matriks dapat ditulis sebagai berikut.

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] + [C_j][\delta_{j+1}] = [p_j], \quad \forall J = 2, 3, \dots, N - 1$$

3. Kondisi saat $J = N$, persamaan (4.90) - (4.92) menjadi

$$(\delta f_N - \delta f_{N-1}) - \frac{h_N}{2}(\delta u_N + \delta u_{N-1}) = (p_1)_N \quad (4.99)$$

$$(\delta u_N - \delta u_{N-1}) - \frac{h_N}{2}(\delta v_N + \delta v_{N-1}) = (p_2)_N \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} & (a_1)_N \delta v_N + (a_2)_N \delta v_{N-1} + (a_3)_N \delta f_N + (a_4)_N \delta f_{N-1} \\ & + (a_5)_N \delta u_N + (a_6)_N \delta u_{N-1} = (p_3)_N \end{aligned} \quad (4.101)$$

Maka persamaan (4.99) - (4.101) dapat dibentuk ke dalam matriks di bawah ini.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{h_N}{2} & 0 & -\frac{h_N}{2} \\ 0 & (a_4)_N & (a_2)_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_{N-2} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta v_{N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{h_N}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{h_N}{2} \\ (a_6)_N & (a_3)_N & (a_1)_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p_1)_N \\ (p_2)_N \\ (p_3)_N \end{bmatrix}$$

Pada kondisi ini, matriks dapat ditulis sebagai berikut.

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] = [p_j]$$

Sehingga untuk $J = 1, 2, 3, N-1, N$ secara sederhana dapat ditulis.

$$J = 1 \quad \rightarrow [A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [p_1]$$

$$J = 2 \quad \rightarrow [B_2][\delta_1] + [A_2][\delta_2] + [C_2][\delta_3] = [p_2]$$

$$J = 3 \quad \rightarrow [B_3][\delta_2] + [A_3][\delta_3] + [C_3][\delta_4] = [p_3]$$

⋮

Substitusikan persamaan (4.103) ke persamaan (4.102) sehingga diperoleh.

$$LU\delta = p \quad (4.104)$$

didefinisikan bahwa

$$U\delta = W \quad (4.105)$$

Maka persamaan (4.104) menjadi

$$LW = p \quad (4.106)$$

dengan

$$W = \begin{bmatrix} [W_1] \\ [W_2] \\ \vdots \\ [W_{N-1}] \\ [W_N] \end{bmatrix}$$

$[W_j]$ adalah matriks berukuran 3×1 yang penentuan elemennya dari persamaan (4.106), yaitu.

$$[\alpha_1][W_1] = [p_1]$$

$$[\alpha_j][W_j] = [p_j] - [B_j][W_{j-1}], \quad 2 \leq j \leq N$$

Setelah itu, akan dilakukan penentuan untuk mencari penyelesaian (δ) dari persamaan (4.105), yaitu.

$$[\delta_j] = [W_j]$$

$$[\delta_j] = [W_j] - [\Gamma_j][\delta_{j+1}], \quad 1 \leq j \leq N - 1$$

Ketika nilai (δ) sudah diperoleh, maka untuk persamaan (4.90) – (4.92) dapat digunakan sebagai penyelesaian persamaan (4.83) sampai iterasi pada konvergen terpenuhi. Menurut Alwawi et al.,

(2020) parameter $v(0,t)$ dianggap sebagai kriteria konvergen sehingga perhitungan diulang sampai kriteria konvergen terpenuhi dan iterasi berhenti ketika $[\delta v_0^{(i)}] < \varepsilon_1$, penelitian ini menggunakan nilai $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ (Alwawi et al., 2020).

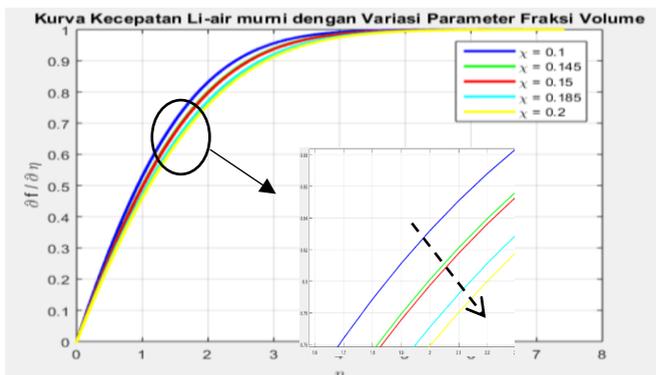
G. Analisis Hasil Simulasi Numerik

Setelah memperoleh hasil penyelesaian model matematika secara numerik dengan metode *Keller-Box*. Langkah selanjutnya yaitu melakukan simulasi menggunakan software MATLAB R2015a dengan menginputkan hasil penyelesaian model matematika pada *Keller-Box* serta memberikan variasi parameter fraksi volume (χ) dan variasi parameter magnetik (M) yang bertujuan untuk mengetahui pengaruh parameter tersebut terhadap profil kecepatan pada aliran fluida nano yang melewati silinder vertikal. Simulasi yang dilakukan menggunakan banyaknya partisi eta sebanyak 75 ($\eta = 75$) dengan $\Delta\eta = h_j = 0.1$ dan partisi waktu sebanyak 25 ($t = 25$) dengan $\Delta t = 0.01$. Penelitian ini menggunakan fluida nano sehingga terdiri dari fluida dasar dan partikel nano. Partikel nano yang digunakan yaitu Li dan Li_2O dengan fluida dasar air murni dan air laut. Masing-masing dari partikel nano dan fluida dasar mempunyai nilai kerapatan (ρ), kapasitas kalor (c_p), koefisien muai panas (β), dan konduktivitas termal (k) seperti tabel 2.1.

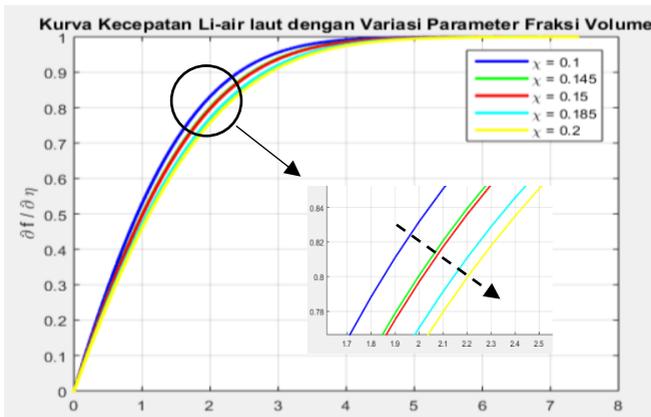
Analisis simulasi masing-masing variasi parameter dengan fluida nano sebagai berikut.

a. Pengaruh Parameter Fraksi Volume (χ) pada Partikel Nano *Li*

Tujuan simulasi ini yaitu untuk mengetahui pengaruh parameter fraksi volume terhadap profil kecepatan aliran fluida dengan partikel nano *Li* serta fluida dasar air murni dan air laut. Variasi nilai parameter fraksi volume yang diberikan pada penelitian ini, yaitu (χ) = 0.1, 0.145, 0.15, 0.185, 0.2 dengan nilai awal dari parameter magnetik sebesar $M = 1$. Menurut Kandasamy, Zailani, et al., (2017), variasi parameter fraksi volume berkisar antara 0.1 sampai 0.2 ($0.1 \leq \chi \leq 0.2$). Profil kecepatan dengan variasi parameter fraksi volume ditunjukkan pada gambar 4.3 dan 4.4 berikut.



Gambar 4.3 Kurva Kecepatan Parameter Fraksi Volume *Li-air murni*

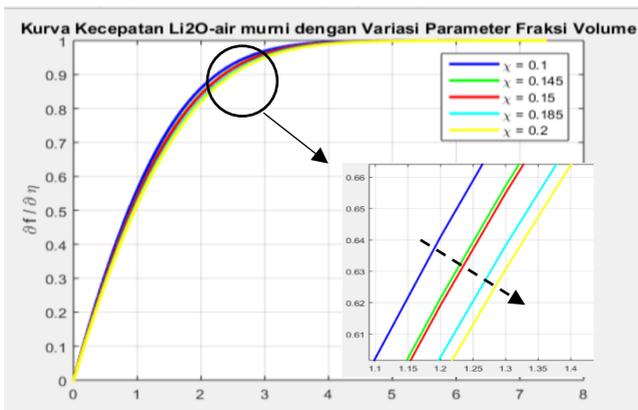


Gambar 4.4 Kurva Kecepatan Parameter Fraksi Volume *Li-air laut*

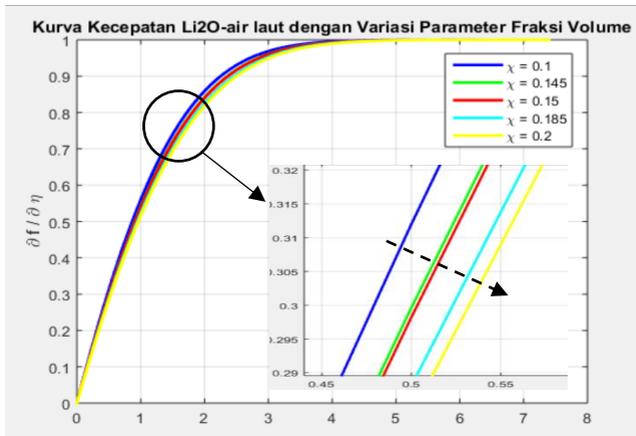
Hasil dari gambar 4.3 dan gambar 4.4 menunjukkan bahwa kecepatan aliran fluida mengalami kenaikan pada saat $f' = 0$ sampai dengan $f' \approx 1$. Saat divariasikan dengan peningkatan parameter fraksi volume, kecepatan aliran fluida mengalami penurunan. Hal ini terjadi karena adanya pengaruh dari banyaknya jumlah fraksi volume partikel nano yang bertambah pada fluida. Jika nilai fraksi volume partikel nano semakin besar maka gesekan antar partikel yang terjadi juga semakin besar. Dari gesekan antar partikel ini yang mengakibatkan kecepatan mengalami penurunan seiring dengan meningkatnya nilai fraksi volume.

b. Pengaruh Parameter Fraksi Volume (χ) pada Partikel Nano Li_2O

Tujuan simulasi ini yaitu untuk mengetahui pengaruh parameter fraksi volume terhadap profil kecepatan aliran fluida dengan partikel nano Li_2O serta fluida dasar air murni dan air laut. Variasi nilai parameter fraksi volume yang diberikan pada penelitian ini, yaitu (χ) = 0.1, 0.145, 0.15, 0.185, 0.2 dengan nilai awal dari parameter magnetik sebesar $M = 1$. Menurut Kandasamy, Zailani, et al., (2017), variasi parameter fraksi volume berkisar antara 0.1 sampai 0.2 ($0.1 \leq \chi \leq 0.2$). Profil kecepatan dengan variasi parameter fraksi volume ditunjukkan pada gambar 4.5 dan 4.6 berikut.



Gambar 4.5 Kurva Kecepatan Parameter Fraksi Volume Li_2O -air murni



Gambar 4.6 Kurva Kecepatan Parameter Fraksi Volume *Li₂O-air laut*

Hasil dari gambar 4.5 dan gambar 4.6 menunjukkan bahwa kecepatan aliran fluida mengalami kenaikan pada saat $f' = 0$ sampai dengan $f' \approx 1$. Saat divariasikan dengan peningkatan parameter fraksi volume, kecepatan aliran fluida mengalami penurunan. Hal ini terjadi karena adanya pengaruh dari banyaknya jumlah fraksi volume partikel nano yang bertambah pada fluida. Jika nilai fraksi volume partikel nano semakin besar maka gesekan antar partikel yang terjadi juga semakin besar. Dari gesekan antar partikel ini yang mengakibatkan kecepatan mengalami penurunan seiring dengan meningkatnya nilai fraksi volume.

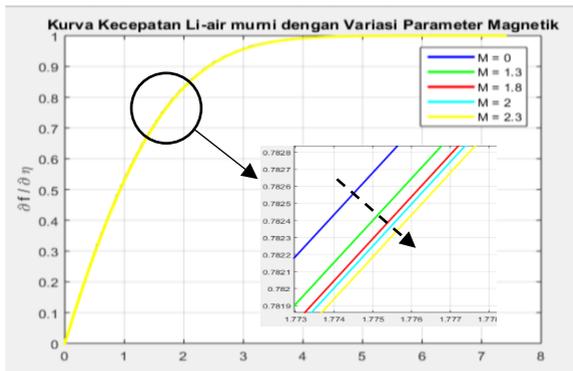
c. Pengaruh Parameter Magnetik (M) pada Partikel Nano Li

Tujuan simulasi ini yaitu untuk mengetahui pengaruh medan magnet pada silinder dengan memvariasikan parameter magnetik terhadap profil kecepatan aliran fluida dengan partikel nano Li serta fluida dasar air murni dan air laut dengan merujuk pada nilai variasi parameter magnetik pada tabel 4.1 berikut.

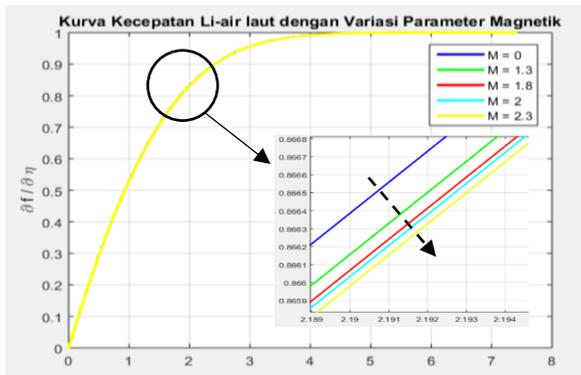
Tabel 4.1 *Variasi Parameter Magnetik*

Benda Bermagnet	Nilai Variasi Magnetik
Besi	1.3
Kobalt	1.8
Baja	2
Seng	2.3

Variasi nilai parameter magnetik (M) = 0, 1.3, 1.8, 2, 2.3 dengan nilai awal dari parameter fraksi volume sebesar $\chi = 0.1$. Profil kecepatan dengan variasi parameter magnetik ditunjukkan pada gambar 4.7 dan 4.8 berikut.



Gambar 4.7 Kurva Kecepatan Parameter Magnetik *Li-air murni*



Gambar 4.8 Kurva Kecepatan Parameter Magnetik *Li-air laut*

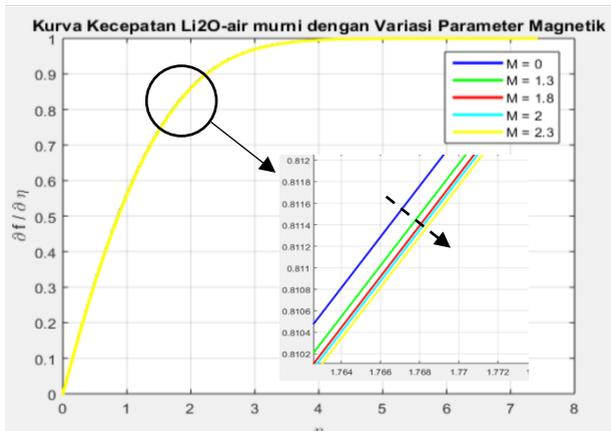
Hasil dari gambar 4.7 dan gambar 4.8 menunjukkan bahwa kecepatan aliran fluida mengalami kenaikan pada saat $f' = 0$ sampai dengan $f' \approx 1$. Saat divariasikan dengan peningkatan variasi parameter magnetik, kecepatan aliran fluida mengalami penurunan. Hal ini terjadi karena adanya pengaruh medan magnet dari gaya

Lorentz pada silinder sehingga aliran fluida tersebut menerima gaya Lorentz atau dapat dilihat secara matematis bahwa parameter magnetik berbanding lurus dengan gaya Lorentz sesuai dengan rumus $M = \frac{\sigma(B_0)^2 a}{\rho_{fn} U_\infty}$ yang artinya M berbanding lurus dengan B_0 sehingga meningkatnya parameter magnetik dan medan magnet dari gaya Lorentz mengakibatkan kecepatan fluida semakin menurun.

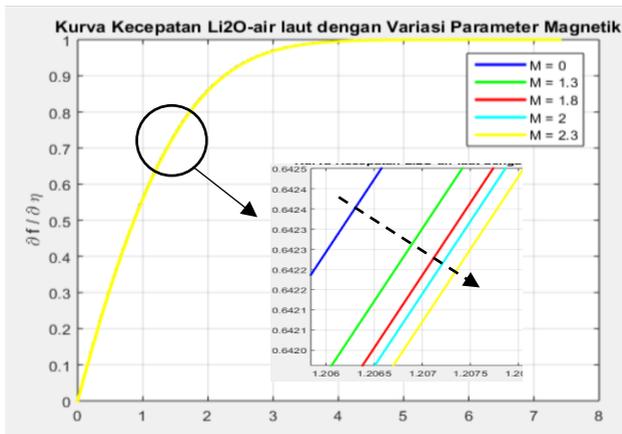
d. Pengaruh Parameter Magnetik (M) pada Partikel Nano Li_2O

Tujuan simulasi ini yaitu untuk mengetahui pengaruh medan magnet pada silinder dengan memvariasikan parameter magnetik terhadap profil kecepatan aliran fluida dengan partikel nano Li_2O serta fluida dasar air murni dan air laut dengan merujuk pada nilai variasi parameter magnetik pada tabel 4.1.

Variasi nilai parameter magnetik (M) = 0, 1.3, 1.8, 2, 2.3 dengan nilai awal dari parameter fraksi volume sebesar $\chi = 0.1$. Profil kecepatan dengan variasi parameter magnetik ditunjukkan pada gambar 4.9 dan 4.10 berikut.



Gambar 4.9 Kurva Kecepatan Parameter Magnetik *Li₂O-air murni*



Gambar 4.10 Kurva Kecepatan Parameter Magnetik *Li₂O-air laut*

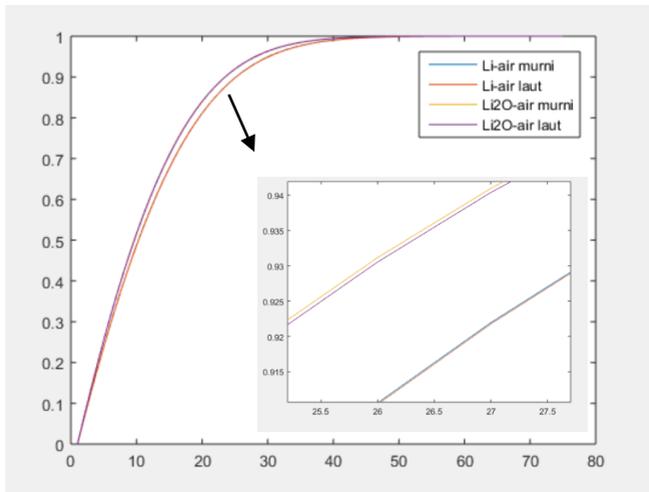
Hasil dari gambar 4.9 dan gambar 4.10 menunjukkan bahwa kecepatan aliran fluida mengalami kenaikan pada saat $f' = 0$ sampai dengan $f' \approx 1$. Saat divariasikan dengan peningkatan variasi

parameter magnetik, kecepatan aliran fluida mengalami penurunan. Hal ini terjadi karena adanya pengaruh medan magnet dari gaya Lorentz pada silinder sehingga aliran fluida tersebut menerima gaya Lorentz atau dapat dilihat secara matematis bahwa parameter magnetik berbanding lurus dengan gaya Lorentz sesuai dengan rumus $M = \frac{\sigma(B_0)^2 a}{\rho_{fn} U_\infty}$ yang artinya M berbanding lurus dengan B_0 sehingga meningkatnya parameter magnetik dan medan magnet dari gaya Lorentz mengakibatkan kecepatan fluida semakin menurun.

e. Perbandingan Partikel Nano Li dan Li_2O Terhadap Pengaruh Parameter Fraksi Volume (χ)

Pada tahap ini dilakukan perbandingan antara partikel nano *Li-air murni*, *Li-air laut*, *Li₂O-air murni*, dan *Li₂O-air laut* terhadap variasi parameter fraksi volume untuk memperoleh partikel mana yang paling efektif dan baik terhadap profil kecepatan fluida.

Hasil dari gambar 4.11 menunjukkan bahwa pada variasi parameter fraksi volume, partikel *Li₂O-air murni* memiliki kecepatan gerak fluida yang lebih baik atau lebih efektif dibandingkan partikel *Li-air murni*, *Li-air laut*, dan *Li₂O-air laut* karena pada saat $0 < \eta < 45$, kecepatan partikel *Li₂O-air murni* selalu meningkat dari 0.55 sampai 0.98 dan berada paling atas dari partikel lainnya sesuai dari gambar tersebut.



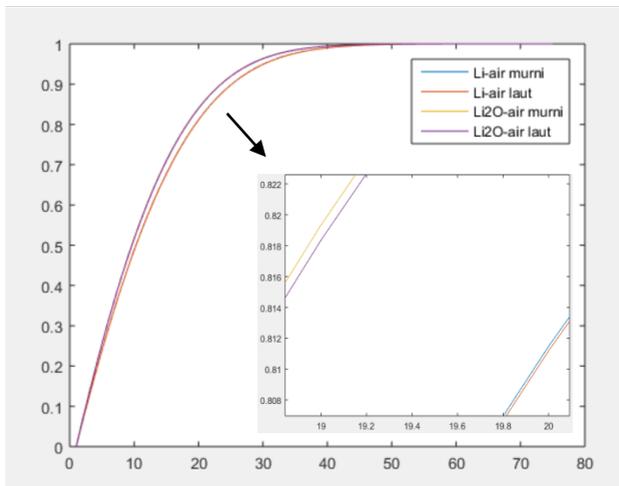
Gambar 4.11 Perbandingan Kecepatan Fluida *Li-air murni*, *Li-air laut*, *Li₂O-air murni* dan *Li₂O-air laut* Terhadap Parameter Fraksi Volume

f. Perbandingan Partikel Nano *Li* dan *Li₂O* Terhadap Pengaruh Parameter Magnetik (M)

Pada tahap ini dilakukan perbandingan antara partikel nano *Li-air murni*, *Li-air laut*, *Li₂O-air murni*, dan *Li₂O-air laut* terhadap variasi parameter magnetik untuk memperoleh partikel mana yang paling efektif dan baik terhadap profil kecepatan fluida.

Hasil dari gambar 4.12 menunjukkan bahwa pada variasi parameter magnetik, partikel *Li₂O-air murni* memiliki kecepatan gerak fluida yang lebih baik atau lebih efektif dibandingkan partikel *Li-air murni*, *Li-air laut*, dan *Li₂O-air laut* karena saat $0 < \eta < 40$,

kecepatan partikel Li_2O -air murni selalu meningkat dari 0.5 sampai 0.96 dan berada paling atas dari partikel lainnya sesuai dari gambar tersebut.



Gambar 4.12 Perbandingan Kecepatan Fluida *Li-air murni*, *Li-air laut*, *Li₂O-air murni* dan *Li₂O-air laut* Terhadap Parameter Magnetik

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan mengenai pengaruh fraksi volume terhadap partikel nano pada aliran fluida nano Newtonian, dapat diambil kesimpulan dan saran sebagai berikut.

1. Model matematika aliran fluida nano Newtonian melewati silinder vertikal dilandaskan pada turunan dari hukum kekekalan massa dan hukum kedua Newton sehingga diperoleh persamaan pembangun dimensional dari penyederhanaan persamaan pada aliran fluida nano yaitu persamaan kontinuitas dan persamaan momentum. Setelah itu, Persamaan pembangun dimensional dikonversikan menjadi bentuk persamaan non-dimensional dan disederhanakan menjadi persamaan satu variabel (similaritas) menggunakan fungsi alir.
2. Hasil persamaan similaritas yang didapatkan kemudian diselesaikan menggunakan metode *Keller-Box* dengan melakukan pemisalan notasi, diskritisasi model, linierisasi model, kemudian melakukan penyelesaian linierisasi dengan eliminasi matriks blok.

3. Hasil simulasi secara numerik melibatkan variasi parameter fraksi volume dan variasi parameter magnetik dengan partikel nano Li dan Li_2O dan fluida dasar air murni serta air laut. Sehingga didapatkan:
- a. Apabila variasi nilai parameter fraksi volume ditingkatkan (χ) = 0.1, 0.145, 0.15, 0.185, 0.2 maka kecepatan aliran fluida akan menurun.
 - b. Apabila variasi nilai parameter magnetik ditingkatkan (M) = 0, 1.3, 1.8, 2, 2.3 maka kecepatan aliran fluida akan menurun.
 - c. Pada variasi parameter fraksi volume, partikel Li_2O -air murni memiliki kecepatan gerak fluida yang lebih baik atau lebih efektif dibandingkan partikel Li -air murni, Li -air laut, dan Li_2O -air laut karena pada saat $0 < \eta < 45$, kecepatan partikel Li_2O -air murni selalu meningkat dari 0.55 sampai 0.98 dan berada paling atas dari partikel lainnya.
 - d. Pada variasi parameter magnetik, partikel Li_2O -air murni memiliki kecepatan gerak fluida yang lebih baik atau lebih efektif dibandingkan partikel Li -air murni, Li -air laut, dan Li_2O -air laut karena pada saat $0 < \eta < 40$, kecepatan partikel Li_2O -air murni selalu meningkat dari

0.5 sampai 0.96 dan berada paling atas dari partikel lainnya.

B. Saran

Penelitian ini dilakukan pada titik stagnansi terdekat yaitu ketika nilai $x = 0$ serta tidak melibatkan pengaruh dari konveksi campuran. Diharapkan untuk penelitian selanjutnya dilakukan pada titik stagnasi $x \neq 0$ tanpa melibatkan pengaruh konveksi.

DAFTAR PUSTAKA

- Afnidar. (2015). Materi dan Sifatnya, serta Kegunaan Bahan Kimia dalam Kehidupan. *Kurikuler SMP Dan SMA*, 1–45.
- Al-Shibani, F. S., Ismail, A. I., & Abdullah, F. A. (2012). The Implicit Keller Box method for the one dimensional time fractional diffusion equation. *Journal of Applied Mathematics & Bioinformatics*, 2(3), 1792–6939.
- Alade, I. O., Abd Rahman, M. A., & Saleh, T. A. (2019). Modeling and prediction of the specific heat capacity of Al₂O₃/water nanofluids using hybrid genetic algorithm/support vector regression model. *Nano-Structures and Nano-Objects*, 17, 103–111.
- Alwawi, F. A., Alkawasbeh, H. T., Rashad, A. M., & Idris, R. (2020). A numerical approach for the heat transfer flow of carboxymethyl cellulose-water based casson nanofluid from a solid sphere generated by mixed convection under the influence of Lorentz force. *Mathematics*, 8(7).
- Anggraeni, I., & Septian, D. (2019). *Pengembangan Modul Fisika Berbasis Inkuiri Terbimbing Materi Fluida Dinamis*. 2(2), 86–96.
- Argo, B. D., & Prasetyo, J. (2021). No Title. In B. D. Argo (Ed.), *Matematika Terapan* (Pertama, p. 180). Tim UB Press.
- Davison, H. W. (1968). Compilation of thermophysical properties of liquid lithium. *National Aeronautics and Space Administration, July 1968*.
- Dharma Utama, M. S., Widodo, B., & Adzkiya, D. (2018). Magnetohidrodinamik Tak Tunak pada Konveksi Campuran yang Mengalir Melalui Bola Teriris Dalam Fluida Kental Di Bawah Pengaruh Medan Magnet. *Jurnal Sains Dan Seni POM ITS*, 7(1), 7–12.

- Eviloka, T., & Widodo, B. (2022). Analisis Aliran Konveksi Campuran Fluida Viskoelastik Melewati Bola Teriris yang Dipengaruhi Medan Magnet. *Jurnal Sains Dan Seni ITS*, 11(2).
- Juliyanto, B. (2018). *Pengaruh Pembangkitan Panas Pada Aliran Konveksi Campuran Fluida Nano Melalui Permukaan Silinder Sirkular Horizontal*. Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Kandasamy, R., Atikah, N., & Mohammad, R. (2017). Nanoparticle shape effects on squeezed MHD flow of water based Cu, Al₂O₃ and SWCNTs over a porous sensor surface. *Alexandria Engineering Journal*.
- Kandasamy, R., Zailani, N. A. B. M., & Jaafar, F. N. B. (2017). Impact of nanoparticle volume fraction on squeezed MHD water based Cu, Al₂O₃ and SWCNTs flow over a porous sensor surface. *St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics*.
- Karyono, I. Y. (2018). *Analisa Aliran Berkembang Penuh Dalam Pipa*. 5–18.
- Kebllinski, P., Phillpot, S. R., Choi, S. U. S., & Eastman, J. A. (2002). Mechanisms of heat flow in suspensions of nano-sized particles (nano fluids). *International Journal of Heat and Mass Transfer* 45, 45, 855–863.
- Mahdi, R. A., Mohammed, H. A., Munisamy, K. M., & Saeid, N. H. (2015). Review of convection heat transfer and fluid flow in porous media with nanofluid. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 41, 715–734.
- Maulidi, I. (2018). *Metode Beda Hingga untuk Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Masalah Nilai Batas dan Masalah Nilai Awal*. 2(1), 1–10.
- Mayagrafinda, I., & Widodo, B. (2022). Analisis Kecepatan dan Temperatur di Sekitar Titik Stagnasi Terendah pada Magnetohidrodinamika Fluida Nano. 11(2), 25–30.

mit.edu. (n.d.). *Sea Water*. 20 Februari 2017.

Norasia, Y., & Zulaikha, Z. (2019). Pengaruh Partikel Nano Zn dan ZnO terhadap Aliran MHD Fluida Nano Pada Lapisan Batas Bola Bermagnet. *Square: Journal of Mathematics and Mathematics Education*, 1(2), 133.

Palyama, P. A. M. (2017). *Melalui Bola di Dalam Fluida Nano di Unsteady Magnetohydrodynamics Nano Fluid in Boundary Layer Flow Past a Sphere Under The Influence Of*.

Ramadhan, A. I., Diniardi, E., & Sutowo, C. (2012). Studi Literatur Pengembangan Nano Fluida Untuk Aplikasi Pada Bidang Teknik di Indonesia. *Simposium Nasional Teknologi Terapan (SNTT)*, 35–40.

Rohani, I. (2021). *Mekanika Fluida Untuk Bidang Ilmu Rekayasa Lanjut (Pertama)*. Graha Ilmu.

Sahaya, R., Widodo, B., & Imron, C. (2016). Aliran Fluida Magnetohidrodinamik Viskoelatis Tersuspensi yang Melewati Pelat Datar. *Jurnal Sains Dan Seni ITS*, 5(2), 78–82.

Salafudin, S. (2021). Sumberdaya Alam Lithium Indonesia. *Jurnal Rekayasa Hijau*, 5(2), 178–187.

Tafrikan, M., & Ghani, M. (2020). Profil Kecepatan dan Temperatur Pada Aliran Konveksi Campuran Yang Melalui Bola Berpori Dengan Pengaruh Hidrodinamika Magnet. *Postulat: Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika*, 1(2), 132.

Widodo, B., Anggriani, I., Khalimah, D. A., Zainal, F. D. S., & Imron, C. (2016). Unsteady Boundary Layer Magnetohydrodynamics in Micropolar Fluid Past a Sphere. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 100(2), 291–299.

Widodo, B., Arif, D. K., Aryany, D., Asiyah, N., Widjajati, F. A., & Kamiran, K. (2017). The Effect Of Magnetohydrodynamic Nano Fluid Flow Through Porous Cylinder. *AIP Conference Proceedings*, 1867(August 2017).

LAMPIRAN

Lampiran 1 Mengubah Persamaan Dimensional ke Persamaan non-dimensional

Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

Dengan substitusi variabel

$$x = \frac{\bar{x}}{a} ; y = Re^{1/2} \left(\frac{\bar{y}}{a} \right) ; u = \frac{\bar{u}}{U_\infty} ; v = Re^{1/2} \left(\frac{\bar{v}}{U_\infty} \right)$$

Sehingga diperoleh persamaan kontinuitas non-dimensional berikut.

$$\frac{\partial (u U_\infty)}{\partial (xa)} + \frac{\partial (v U_\infty Re^{-1/2})}{\partial (ya Re^{-1/2})} = 0$$

$$\frac{U_\infty}{a} \frac{\partial (u)}{\partial (x)} + \frac{U_\infty Re^{-1/2}}{a Re^{-1/2}} \frac{\partial (v)}{\partial (y)} = 0$$

$$\frac{U_\infty}{a} \frac{\partial (u)}{\partial (x)} + \frac{U_\infty}{a} \frac{\partial (v)}{\partial (y)} = 0$$

$$\frac{U_\infty}{a} \left(\frac{\partial (u)}{\partial (x)} + \frac{\partial (v)}{\partial (y)} \right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial (u)}{\partial (x)} + \frac{\partial (v)}{\partial (y)} \right) = 0$$

Persamaan Momentum Sumbu-x

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + \sigma(b + B_0)^2 \bar{u} - \rho_{fn} g_x$$

Perhitungan pada ruas kiri:

$$\begin{aligned} \rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) &= \rho_{fn} \left(\frac{\partial(uU_\infty)}{\partial \left(\frac{at}{U_\infty} \right)} + (uU_\infty) \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(xa)} + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{vU_\infty}{Re^{1/2}} \right) \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(ayRe^{-1/2})} \right) \\ &= \rho_{fn} \left(\frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial(u)}{\partial(t)} + \frac{U_\infty^2}{a} u \frac{\partial(u)}{\partial(x)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{U_\infty^2}{a} v \frac{\partial(u)}{\partial(y)} \right) \\ &= \rho_{fn} \frac{U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial(u)}{\partial(t)} + u \frac{\partial(u)}{\partial(x)} + v \frac{\partial(u)}{\partial(y)} \right) \end{aligned}$$

Perhitungan pada ruas kanan:

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + \sigma(b + B_0)^2 \bar{u} - \rho_{fn} g_x \\ \Leftrightarrow &-\frac{\partial(p\rho_{fn}U_\infty^2)}{\partial(xa)} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2(uU_\infty)}{\partial(xa)^2} + \frac{\partial^2(uU_\infty)}{\partial(ayRe^{-1/2})^2} \right) + \sigma(b + \\ &B_0)^2(uU_\infty) - \rho_{fn} \left(-g \sin \left(\frac{ax}{a} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\rho_{fn}U_{\infty}^2}{a}\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{fn}\left(\frac{U_{\infty}}{a^2}\frac{\partial^2(u)}{\partial(x)^2} + \frac{U_{\infty}}{a^2}Re\frac{\partial^2(u)}{\partial(y)^2}\right) + \sigma(b + B_0)^2(uU_{\infty}) + \rho_{fn}g\sin x$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\rho_{fn}U_{\infty}^2}{a}\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{fn}\frac{U_{\infty}}{a^2}\left(\frac{\partial^2(u)}{\partial(x)^2} + Re\frac{\partial^2(u)}{\partial(y)^2}\right) + \sigma(b + B_0)^2(uU_{\infty}) + \rho_{fn}g\sin x$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka diperoleh.

$$\rho_{fn}\frac{U_{\infty}^2}{a}\left(\frac{\partial(u)}{\partial(t)} + u\frac{\partial(u)}{\partial(x)} + v\frac{\partial(u)}{\partial(y)}\right) = -\frac{\rho_{fn}U_{\infty}^2}{a}\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{fn}\frac{U_{\infty}}{a^2}\left(\frac{\partial^2(u)}{\partial(x)^2} + Re\frac{\partial^2(u)}{\partial(y)^2}\right) + \sigma(b + B_0)^2(uU_{\infty}) + \rho_{fn}g\sin x$$

Kemudian kedua ruas dibagi dengan $\rho_{fn}\frac{U_{\infty}^2}{a}$, maka diperoleh.

$$\left(\frac{\partial(u)}{\partial(t)} + u\frac{\partial(u)}{\partial(x)} + v\frac{\partial(u)}{\partial(y)}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\mu_{fn}}{a\rho_{fn}U_{\infty}^2}\right)\left(\frac{\partial^2(u)}{\partial(x)^2} + Re\frac{\partial^2(u)}{\partial(y)^2}\right) + \frac{\sigma(b+B_0)^2ua}{\rho_{fn}U_{\infty}} + \frac{a g\sin x}{U_{\infty}^2}$$

Karena $M = \frac{a\sigma(B_0)^2}{\rho_{fn}U_{\infty}}$, $\nu_{fn} = \frac{\mu_{fn}}{\rho_{fn}}$, $Re = \frac{a\rho_{fn}U_{\infty}}{\mu}$, diasumsikan

bahwa $b = \frac{1}{4}B_0$, maka diperoleh.

$$\left(\frac{\partial(u)}{\partial(t)} + u\frac{\partial(u)}{\partial(x)} + v\frac{\partial(u)}{\partial(y)}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{aU_{\infty}}\frac{\mu_{fn}}{\rho_{fn}}\left(\frac{\partial^2(u)}{\partial(x)^2} + Re\frac{\partial^2(u)}{\partial(y)^2}\right) + \frac{\sigma(b+B_0)^2ua}{\rho_{fn}U_{\infty}} + \left(\frac{a}{U_{\infty}^2}\right)g\sin x$$

$$\left(\frac{\partial(u)}{\partial(t)} + u\frac{\partial(u)}{\partial(x)} + v\frac{\partial(u)}{\partial(y)}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re\nu_{fn}}\nu_{fn}\left(\frac{\partial^2(u)}{\partial(x)^2} + Re\frac{\partial^2(u)}{\partial(y)^2}\right) + \frac{25}{16}Mu + \left(\frac{a}{U_{\infty}^2}\right)g\sin x$$

$$\left(\frac{\partial(u)}{\partial(t)} + u \frac{\partial(u)}{\partial(x)} + v \frac{\partial(u)}{\partial(y)}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{fn}}{Re_{vf}} \left(\frac{\partial^2(u)}{\partial(x)^2}\right) + \frac{v_{fn}}{v_f} \left(\frac{\partial^2(u)}{\partial(y)^2}\right) + \frac{25}{16} Mu + \left(\frac{a}{U_{\infty}^2}\right) g \sin x$$

Persamaan Momentum Sumbu-y

$$\rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right) + \sigma(b + B_0)^2 \bar{v} - \rho_{fn} g_{\bar{y}}$$

Perhitungan pada ruas kiri:

$$\begin{aligned} \rho_{fn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) &= \rho_{fn} \left(\frac{\partial \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}}\right)}{\partial \left(\frac{at}{U_{\infty}}\right)} + (uU_{\infty}) \frac{\partial \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}}\right)}{\partial (xa)} + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}}\right) \frac{\partial \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}}\right)}{\partial \left(\frac{ay}{Re^{1/2}}\right)}\right) \\ &= \rho_{fn} \left(\frac{U_{\infty}^2}{a Re^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u U_{\infty}^2}{a Re^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v U_{\infty}^2}{a Re^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ &= \rho_{fn} \frac{U_{\infty}^2}{a Re^{1/2}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

Perhitungan pada ruas kanan:

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right) + \sigma(b + B_0)^2 \bar{v} - \rho_{fn} g_{\bar{y}} \\ \Leftrightarrow &-\frac{\partial(p\rho_{fn}U_{\infty}^2)}{\partial \left(\frac{ay}{Re^{1/2}}\right)} + \mu_{fn} \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}}\right)}{\partial (xa)^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}}\right)}{\partial \left(\frac{ay}{Re^{1/2}}\right)^2}\right) + \sigma(b + \\ &B_0)^2 \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}}\right) - \rho_{fn} g \cos \frac{ax}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -\frac{\rho_{fn}U_{\infty}^2}{a Re^{-\frac{1}{2}}}\frac{\partial p}{\partial y} + \mu_{fn} \left(\left(\frac{\frac{U_{\infty}}{Re^{\frac{1}{2}}}}{a^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\frac{U_{\infty}}{Re^{\frac{1}{2}}}}{\left(\frac{a}{Re^{\frac{1}{2}}}\right)^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \sigma(b + \\
&\quad B_0)^2 \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \right) - \rho_{fn} g \cos x \\
&\Leftrightarrow -\frac{\rho_{fn}U_{\infty}^2 Re^{\frac{1}{2}}}{a} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu_{fn} \left(\left(\frac{U_{\infty}}{a^2 Re^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{U_{\infty} Re^{\frac{1}{2}}}{a^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \sigma(b + \\
&\quad B_0)^2 \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \right) - \rho_{fn} g \cos x \\
&\Leftrightarrow -\frac{\rho_{fn}U_{\infty}^2 Re^{\frac{1}{2}}}{a} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu_{fn} \frac{U_{\infty}}{a^2} \left(\frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \sigma(b + \\
&\quad B_0)^2 \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \right) - \rho_{fn} g \cos x
\end{aligned}$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka diperoleh.

$$\begin{aligned}
\rho_{fn} \frac{U_{\infty}^2}{a Re^{1/2}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\rho_{fn}U_{\infty}^2 Re^{\frac{1}{2}}}{a} \frac{\partial p}{\partial y} + \\
\mu_{fn} \frac{U_{\infty}}{a^2} \left(\frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) &+ \sigma(b + B_0)^2 \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \right) - \rho_{fn} g \cos x
\end{aligned}$$

Kemudian kedua ruas dibagi dengan $\frac{\rho_{fn}U_{\infty}^2 Re^{1/2}}{a}$, maka diperoleh.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{fn}}{\rho_{fn} a U_{\infty} Re^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \\
\sigma(b + B_0)^2 \left(\frac{a}{\rho_{fn} U_{\infty} Re} \right) v &- \left(\frac{a}{U_{\infty}^2} \right) g \frac{a}{Re^{\frac{1}{2}}} \cos x
\end{aligned}$$

Karena $M = \frac{a\sigma(B_0)^2}{\rho_{fn}U_\infty}$, $\nu_{fn} = \frac{\mu_{fn}}{\rho_{fn}}$, $Re = \frac{a\rho_{fn}U_\infty}{\mu}$, diasumsikan

bahwa $b = \frac{1}{4}B_0$, maka diperoleh.

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu_{fn} \frac{1}{Re\nu_f} \frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &+ \frac{25}{16} \frac{M}{Re} v - \left(\frac{a}{U_\infty^2} \right) \frac{g}{Re^{\frac{1}{2}}} \cos x \end{aligned}$$

Lampiran 2 Persamaan Similaritas

Persamaan Momentum

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)}$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{25}{16} M \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right)$$

dengan

$$1) \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{t^{1/2}} \right) = \frac{1}{t^{1/2}}$$

$$2) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{y}{t^{1/2}} \right) = -\frac{1}{2} y t^{-3/2} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t}$$

$$3) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(t^{\frac{1}{2}} u_e(x) f(x, \eta, t) \right) \frac{1}{t^{1/2}}$$

$$= \frac{t^{\frac{1}{2}} u_e(x)}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta}$$

$$= u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta}$$

$$4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(t^{\frac{1}{2}} u_e(x) f(x, \eta, t) \right)$$

$$= t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} (u_e(x) f(x, \eta, t))$$

$$= t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} f(x, \eta, t) + t^{\frac{1}{2}} u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x}$$

$$= t^{\frac{1}{2}} f(x, \eta, t) \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} + t^{\frac{1}{2}} u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
 &= u_e(x) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{1}{t^{1/2}} \\
 &= \frac{u_e(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
 &= \frac{u_e(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_e(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_e(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_e(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \frac{1}{t^{1/2}} \\
 &= \frac{u_e(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3} \frac{1}{t^{1/2}} \\
 &= \frac{u_e(x)}{t} \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
 &= \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= u_e(x) \left(\frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \left(-\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right) + u_e(x) \left(\frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta} \right) \\
&= -\frac{u_e(x) \eta}{t} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) + u_e(x) \left(\frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

Selanjutnya $u_e(x)$ dan $f(x, \eta, t)$ ditulis menjadi $u_e(x) = u_e$ dan $f(x, \eta, t) = f$ sehingga diperoleh persamaan momentum berikut.

Ruas kiri:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\
&\Leftrightarrow \left(-\frac{u_e \eta}{t} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + u_e \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \right) \right) + \left(\left(u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} + \right. \right. \\
&\left. \left. u_e \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) \right) - \left(\left(t^{\frac{1}{2}} f \frac{\partial u_e}{\partial x} + t^{\frac{1}{2}} u_e \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{u_e}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \right) \\
&\Leftrightarrow -\frac{u_e \eta}{t} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \\
&u_e f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

Ruas kanan:

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{25}{16} M \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right)$$

$$\Leftrightarrow u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \left(\frac{u_e \partial^3 f}{t \partial \eta^3} \right) + \frac{25}{16} M \left(\left(u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - u_e \right)$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka diperoleh.

$$\begin{aligned} & -\frac{u_e \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - u_e f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \\ & u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \left(\frac{u_e \partial^3 f}{t \partial \eta^3} \right) + \\ & \frac{25}{16} M \left(\left(u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - u_e \right) \end{aligned}$$

Kemudian kedua ruas dibagi dengan $\frac{u_e}{t}$, maka diperoleh.

$$\begin{aligned} & -\frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + t u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - t \frac{\partial u_e}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \\ & t u_e \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = t \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \\ & + \frac{25}{16} M t \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - 1 \right) \end{aligned}$$

atau dapat ditulis.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-\chi)^{2.5} \left((1-\chi) + \chi \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\ & = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + \frac{25}{16} M t \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right) \end{aligned}$$

Lampiran 3 Program Simulasi Numerik Menggunakan Matlab

```

clear all
clc
close all
format long
np = 75; %%banyaknya partisi eta
nt = 25; %%banyaknya partisi waktu
nt1 = 15 ; %%banyaknya partisi waktu untuk small
time
%% Nilai awal partisi
del_eta = 0.1; %step size dari eta (hj)
del_t = 0.01; %step size dari waktu (t)

%% Nilai Awal Parameter yang di Variasi
Chi = 0.1; %input('input parameter volume
fraction = ');
% M = 1; %input('input parameter magnetik = ');

%% Koefisien Parameter fluida nano
%% Basic Fluid (Air Murni)
% rhof = 997.1; %input('input density of the
base fluid fraction = ');
% Bf = 0.00021; %input('input thermal expansion
coefficient of the base fluid fraction = ');
% kf = 0.613; %input('input thermal conductivity
of the base fluid = ');
% cf = 4179; %input('input heat capacity of the
base fluid = ');

%% Basic Fluid (Air Laut)
rhof = 1024; %input('input density of the base
fluid fraction = ');
Bf = 0.00015; %input('input thermal expansion
coefficient of the base fluid fraction = ');
kf = 0.1013250; %input('input thermal
conductivity of the base fluid = ');
cf = 3900; %input('input heat capacity of the
base fluid = ');

```

```

%% Partikel Nano Li
  rhos = 516; %input('input density of the solid
fraction Li = ');
  Bs = 0.00046; %input('input thermal expansion
coefficient of the solid fraction Li = ');
  ks = 44; %input('input thermal conductivity of
the solid Li = ');
  cs = 4169; %input('input heat capacity of the
solid Li = ');

%% Partikel Nano Li2O
% rhos=2013; %input('input density of the solid
fraction Li2O = ');
% Bs=0.000092; %input('input thermal expansion
coefficient of the solid fraction Li2O = ');
% ks=11.29; %input('input thermal conductivity
of the solid Li2O = ');
% cs=2049; %input('input heat capacity of the
solid Li2O = ');

%% Input Variasi Parameter
% volume_fraction(1)=0.1;
% volume_fraction(2)=0.145;
% volume_fraction(3)=0.15;
% volume_fraction(4)=0.185;
% volume_fraction(5)=0.2;

magnetik(1)=0;
magnetik(2)=1.3;
magnetik(3)=1.8;
magnetik(4)=2;
magnetik(5)=2.3;

%% Penghitungan partisi eta dan eta^{j-1/2}
for i = 1:5
eta(1) = 0.0; %eta
eta_c(1) = 0.0; %diskrit eta
end
for j = 2:np

```

```

    eta(j) = eta(j-1) + del_eta;
    eta_c(j) = 0.5*(eta(j) + eta(j-1));
end
%% Penghitungan waktu t dan t^{j-1/2}
for n=1:nt
    if n==1
        t(1) = 0;
        t1(1) = 0;
    else
        t(n) = t(n-1) + del_t;
        t1(n) = 0.5*(t(n) + t(n-1));
    end
end
end

%% Iterasi variasi parameter
for i = 1:5
    k = 1;
    % Chi = volume_fraction(i);
    M = magnetik(i);
    for n = 1:nt
        k = 1;
        stop = 1;
        while stop > 0.00001;

%% Koefisien persamaan momentum
A = 1/(((1-Chi)^2.5)*(1-Chi+(Chi*(rhos/rhof))));

%% Initial Condition
for j = 1:np
    if n == 1
        f(j,1,n) = eta(j)*erf(0.5*sqrt(((1-Chi)^2.5)*(1-
Chi+(Chi*(rhos/rhof)))*eta(j))+2/(sqrt(pi))*(((1-
Chi)^2.5)*(1-Chi+(Chi*(rhos/rhof)))*exp(-
0.25*(((1-Chi)^2.5)*(1-
Chi+(Chi*(rhos/rhof)))*(eta(j)^2))-1);

u(j,1,n) = erf(0.5*eta(j)*sqrt(((1-Chi)^2.5)*(1-
Chi+(Chi*(rhos/rhof))));

```

```

v(j,1,n) = exp(-0.25*((1-Chi)^2.5)*(1-
Chi+(Chi*(rhos/rhof))))*eta(j)^2)*sqrt(((1-
Chi)^2.5)*(1-Chi+(Chi*(rhos/rhof))))/pi;
    else
        f(j,1,n) = ff(j,n-1);
        u(j,1,n) = uu(j,n-1);
        v(j,1,n) = vv(j,n-1);
    end
end
end

for j = 2:np
    if n == 1
        cfb(j,n) = 0;
        cub(j,n) = 0;
        cvb(j,n) = 0;
        cdervb(j,n) = 0;
        cfvb(j,n) = cfb(j,n)*cvb(j,n);
        cuub(j,n) = cub(j,n)^2;
    else
        cfb(j,n) = ffb(j,n-1);
        cub(j,n) = uub(j,n-1);
        cvb(j,n) = vvb(j,n-1);
        cuub(j,n) = cub(j,n)^2;
        cdervb(j,n) = ddervb(j,n-1);
        cfvb(j,n) = cfb(j,n)*cvb(j,n);
    end
    fb(j,k,n) = 0.5*(f(j,k,n)+f(j-1,k,n));
    ub(j,k,n) = 0.5*(u(j,k,n)+u(j-1,k,n));
    vb(j,k,n) = 0.5*(v(j,k,n)+v(j-1,k,n));
    dervb(j,k,n) = (v(j,k,n)-v(j-1,k,n))/del_eta;
    fvb(j,k,n) = fb(j,k)*vb(j,k,n);
    uub(j,k,n) = (ub(j,k,n))^2;

    %% Komponen matriks hasil eliminasi blok
    if n < ntl + 1
        a1(j,k) = A/del_eta + 0.25*eta_c(j) +
        0.5*t1(n)*fb(j,k,n);
    end
end

```

```

a2(j,k) = -A/del_eta + 0.25*eta_c(j) +
0.5*t1(n)*fb(j,k,n) ;
a3(j,k) = 0.5*t1(n)*vb(j,k,n);
a4(j,k) = a3(j,k);
a5(j,k) = -t1(n)*ub(j,k,n) - 0.78*M*t1(n) -
t1(n)/del_t;
a6(j,k) = a5(j,k);

p1(j,k) = f(j-1,k,n) - f(j,k,n) +
del_eta*ub(j,k,n);
p2(j,k) = u(j-1,k,n) - u(j,k,n) +
del_eta*vb(j,k,n);
p3(j,k) = -A*dervb(j,k,n) -
0.5*eta_c(j)*vb(j,k,n) - t1(n)*(1 - uub(j,k,n) +
fvb(j,k,n)) - 1.5625*M*t1(n)*(1-ub(j,k,n)) +
2*t1(n)*ub(j,k,n)/del_t - A*cdervb(j,n) -
0.5*eta_c(j)*cvb(j,n) - t1(n)*(1-cuub(j,n) +
cfvb(j,n)) + 1.5625*M*t1(n)*(1-cub(j,n)) -
2*t1(n)*cub(j,n)/del_t;
end
end

%% Matriks eliminasi blok
a{2,k} = [0 1 0; -0.5*del_eta 0 -0.5*del_eta;
a2(2,k) a3(2,k) a1(2,k)];
for j = 3:np
a{j,k} = [-0.5*del_eta 1 0; -1 0 -0.5*del_eta;
a6(j,k) a3(j,k) a1(j,k)];
b{j,k} = [0 -1 0; 0 0 -0.5*del_eta; 0 a4(j,k)
a2(j,k)];
end;
for j = 2:np
c{j,k} = [-0.5*del_eta 0 0; 1 0 0; a5(j,k) 0 0 ];
end;

%%Algoritma LU
alfa{2,k} = a{2,k};
gamma{2,k} = inv(alfa{2,k})*c{2,k};
for j = 3:np

```

```

alfa{j,k} = a{j,k}-(b{j,k}*gamma{j-1,k});
gamma{j,k} = inv(alfa{j,k})*c{j,k};
end;
for j = 2:np
pp{j,k} = [p1(j,k);p2(j,k);p3(j,k)];
end;
ww{2,k} = inv(alfa{2,k})*pp{2,k};
for j = 3:np
ww{j,k} = inv(alfa{j,k})*(pp{j,k}-(b{j,k}*ww{j-1,k}));
end;

%% backward sweep
%%kondisi batas
delf(1,k) = 0;
delu(1,k) = 0;
delu(np,k) = 0;
dell{np,k} = ww{np,k};

for j = np-1:-1:2
dell{j,k} = ww{j,k} - (gamma{j,k}*dell{j+1,k});
end;
delv(1,k) = dell{2,k}(1,1);
delf(2,k) = dell{2,k}(2,1);
delv(2,k) = dell{2,k}(3,1);

for j = np:-1:3
delu(j-1,k) = dell{j,k}(1,1);
delf(j,k) = dell{j,k}(2,1);
delv(j,k) = dell{j,k}(3,1);
end;

%% Newton's Method
for j = 1:np
f(j,k+1,n) = f(j,k,n) + delf(j,k);
u(j,k+1,n) = u(j,k,n) + delu(j,k);
v(j,k+1,n) = v(j,k,n) + delv(j,k);
end;

```

```

%% Cek iterasi pada konvergen
stop = abs(delv(1,k));
kmax = k;
k = k + 1;
end;

%% shift profil
for j = 1:np
ff(j,n) = f(j,k,n);
uu(j,n) = u(j,k,n);
vv(j,n) = v(j,k,n);
end

for j=1:np
ffb(j,n) = fb(j,kmax,n);
uub(j,n) = ub(j,kmax,n);
vvb(j,n) = vb(j,kmax,n);
ddervb(j,n) = dervb(j,kmax,n);
end
end

if(i==1)
    a11=u(:,kmax,nt)
    figure(1)
    plot(eta,u(:,kmax,nt),'b','Linewidth',2)
    hold on;
elseif(i==2)
    a12=u(:,kmax,nt)
    figure(1)
    plot(eta,u(:,kmax,nt),'g','Linewidth',2)
    hold on;
elseif(i==3)
    a13=u(:,kmax,nt)
    figure(1)
    plot(eta,u(:,kmax,nt),'r','Linewidth',2)
    hold on;
elseif (i==4)
    a14=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

```

```

        plot(eta,u(:,kmax,nt),'c','Linewidth',2)
        hold on;
elseif(i==5)
    a15=u(:,kmax,nt)
    figure(1)
    plot(eta,u(:,kmax,nt),'y','Linewidth',2)
    grid on;
    hold on;
% title('Kurva Kecepatan Li2O-air laut dengan
Variasi Parameter Volume Fraction')
    title('Kurva Kecepatan Li-air laut dengan
Variasi Parameter Magnetik')

% legend('Chi = 0.1','Chi = 0.145','Chi =
0.15','Chi = 0.185','Chi = 0.2')
    legend('M = 0','M = 1.3','M = 1.8','M = 2','M
= 2.3')

xlabel('\eta')
ylabel(' \partial f / \partial \eta ')
end
end

```

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

1. Nama Lengkap : Muhammad Fikri Ardiansyah
2. Tempat & Tgl. Lahir : Jakarta, 20 Juli 2001
3. Alamat Rumah : Jalan Cisanggarung I/35 RT.002
RW.001, Kel. Semper Barat, Kec.
Cilincing, Jakarta Utara
4. No. Handphone : 087784728026
5. E-mail : fikribolang231@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. SD Negeri Semper Barat 03 Jakarta (2007 – 2013)
2. SMP Negeri 231 Jakarta (2013 – 2016)
3. SMA Negeri 75 Jakarta (2016 – 2019)

Semarang, 07 Juni 2023