RELASI GREEN DALAM MATRIKS 2×2 ATAS ALJABAR MAX-PLUS

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu MATEMATIKA

Oleh : **MUHAMMAD ZAINAL ABIDIN**
NIM : 2008046024

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2023

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	MUHAMMAD ZAINAL ABIDIN
NIM	:	2008046024
Jurusan/Program Studi	:	MATEMATIKA/ MATEMATIKA

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

RELASI GREEN DALAM MATRIKS 2×2 ATAS ALJABAR MAX-PLUS

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 28 November 2023
Pembuat pernyataan,

MUHAMMAD ZAINAL ABIDIN
NIM : 2008046024

KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul	:	**RELASI GREEN DALAM MATRIKS 2×2 ATAS ALJABAR MAX-PLUS**
Penulis	:	MUHAMMAD ZAINAL ABIDIN
NIM	:	2008046024
Jurusan	:	MATEMATIKA

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu MATEMATIKA.

Semarang, 14 Desember 2023

DEWAN PENGUJI

Penguji I,	Penguji II,
Emy Siswanah, M.Sc.	**Any Muanalifah, M.Si., Ph.D.**
NIP : 19870202 201101 2 014	NIP : 19820113 201101 2 009
Penguji III,	Penguji IV,
Prihadi Kurniawan, M.Sc.	**Ariska Kurnia Rachmawati, M.Sc.**
NIP : 19901226 201903 1 012	NIP : 19890811 201903 2 019

Pembimbing I,

Any Muanalifah, M.Si., Ph.D.
NIP : 19820113 201101 2 009

NOTA DINAS

Semarang, 28 November 2023

Yth. Ketua Program Studi MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	RELASI GREEN DALAM MATRIKS 2×2 ATAS ALJABAR MAX-PLUS
Nama	:	MUHAMMAD ZAINAL ABIDIN
NIM	:	2008046024
Jurusan	:	MATEMATIKA

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,

Any Muanalifah, M.Si., Ph.D.
NIP : 19820113 201101 2 009

ABSTRAK

Aljabar max-plus merupakan himpunan bilangan ril dan elemen negatif tak hingga $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\})$ yang dilengkapi dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan $\oplus$ (maksimum) dan perkalian $\otimes$ (pejumlahan). Dalam penelitian ini akan dikaji tentang relasi green serta sifat-sifatnya dalam matriks 2×2 atas aljabar max-plus $(M_2(\mathbb{R}_{\max}))$. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa matriks 2×2 atas aljabar max-plus dengan operasi $\otimes$ merupakan semigrup. Hasil dari penelitian ini juga menunjukkan bahwa terdapat relasi green pada $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ serta menunjukkan bahwa beberapa sifat pada relasi green kelasik juga berlaku pada $M_2(\mathbb{R}_{\max})$.

Kata kunci : aljbar max-plus, relasi green, relasi green pada matriks 2×2

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb. Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, yang telah memberikan kesehatan, kenikmatan, dan kemudahan dalam menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Relasi Green dalam Matriks** 2×2 **atas Aljabar Max-Plus.**"

Salawat dan salam dihaturkan kepada junjungan kita, Nabi Agung Muhammad SAW. Beliau adalah manusia pilihan yang telah menerima wahyu dan membawa ilmu ke dunia ini sehingga kita bisa lepas dari zaman kebodohan menuju zaman Islam rahmatan lil alamin.

Penyusunan skripsi ini merupakan salah satu syarat yang harus dipenuhi oleh penulis untuk menyelesaikan pendidikan strata 1 (S1) di Progam Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang. Dalam penyusunan skripsi ini penulis mendapatkan dukungan serta bimbingan dari berbagai pihak, baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dr. H. Ismail, M. Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang;

2. Yulia Romadiastri, M.Sc., dan Hj. Nadhifah, M.Si., selaku Ketua dan Sekretaris Jurusan Matematika UIN Walisongo Semarang;

3. Emy Siswanah, M.Sc., dan Ahmad Aunur Rohman, M.Pd., selaku Ketua dan Sekretaris Progam Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang;

4. Any Muanalifah, Ph.D., selaku dosen pembimbing yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam menyelesaikan skripsi ini;
5. Nur Khasanah, M.Si.,selaku wali dosen yang telah memberikan bimbingan kepada penulis selama menjadi mahasiswa Progam Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang;
6. Segenap Dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang yang telah memberikan ilmu dan pelajaran bagi penulis selama penulis melakukan studi S1 di UIN Walisongo Semarang;
7. Teman-teman seperjuangan dan seangkatan 2020 terutama teman-teman satu kelas penulis;
8. Segenap keluarga terutama Bapak Karman dan Ibu Rusmiah yang telah mendukung dan mendoakan penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan studi;
9. HMJ Matematika UIN Walisongo Semarang;
10. Segenap tim Perkumpulan Pegiat Sains Madarasah (PPSM);
11. PMII Rayon Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.
12. Segenap teman-teman Asisten Laboratorium Matematika (Aslab).

Terakhir penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih banyak kekurangan dan jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran demi memperbaiki skripsi ini. Akhir kata mohon maaf atas kesalahan dan kekurangannya.

Semarang, 3 November 2023

Penulis,

Muhammad Zainal Abidin

NIM : 2008046024

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan alat penting karena berbagai bidang keilmuan, seperti kedokteran, teknik, sosial, politik, ekonomi, dan bahkan psikologi tidak terlepas dari matematika. Karena banyak ilmu pengetahuan lain yang tidak terlepas dari konsep ilmu matematika sehingga matematika dianggap sebagai pelayan dari ilmu pengetahuan. Selain itu, matematika juga dikatakan sebagai *mother of science* (ibu dari ilmu pengetahuan alam) karena dasar dari ilmu pengetahuan alam adalah ilmu matematika.

Karena kesadaran akan pentingnya ilmu matematika para ilmuan terus-menerus mempelajari serta mengembangkan ilmu tersebut. Salah satunya adalah aljabar max-plus. Aljabar max-plus merupakan himpunan bilangan ril dan elemen negatif tak hingga ($\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) yang dilengkapi dengan dua operasi biner, yaitu maksimum (max) dan penjumlahan.

Aplikasi aljabar max-plus telah banyak ditemukan dalam berbagai bidang, seperti pengaturan sistem antrian *traffic light* (Wibowo, 2018), model antrian pelayanan farmasi (Mustofani, 2018), sistem produksi (Kismanti, 2021), dan lain-lain. Hal tersebut tidak terlepas dari jasa para ahli matematika yang melakukan penelitian terhadap aljabar max-plus sehingga dapat melihat manfaat yang terdapat padanya.

Penelitian tentang aljabar max-plus berawal dari tahun 70-an dan berkembang pesat pada tahun 90-an. Hasil dari penelitian-penelitian yang dilakukan mengungkap bahwa beberapa sifat dan konsep yang dimiliki oleh aljabar klasik juga berlaku dalam aljabar max-plus. Dalam aljabar max-plus juga berlaku aturan *Cramer*, teorema *Cayley-Hamilton* (Olsder,1998), nilai eigen serta vektor eigen (Mufid, 2014).

Penelitian tentang struktur aljabar max-plus terus dilakukan hingga kini, diantaranya penelitian tentang matriks atas aljbar max-plus. Seperti penelitian oleh Zur Izhakian dan Stuart W. Margolis pada tahun 2010 dengan judul "*Semigroup identities in the monoid of two-by-two tropical matrices*". Penelitian tersebut menunjukkan bahwa monoid $M_2(\mathbb{T})$ dari matriks atas aljabar max-plus 2×2 merupakan semigrup regular (Izhakian, 2010).

Selanjutnya ada penelitian yang dilakukan oleh Christopher Hollings dan Mark Kambites (Hollings, 2012) yang membahas versi baru dari teorema *duality* matriks atas aljbar max-plus, sifat-sifat dasar relasi green $\mathcal{D}$ dalam semigrup matriks berdimensi berhingga atas aljabar max-plus. Pada tahun 2013 Marianne Johson dan Mark Kambites juga melakukan penelitian yang berjudul *Green' s $\mathcal{J}$-order and the rank of tropical matrices*. Penelitian tersebut membahas tentang *Green $\mathcal{J}$-order* dan *$\mathcal{J}$-equivalence* untuk semigrup dari matriks $n \times n$ atas aljabar max-plus (Johnson, 2012).

Penelitian-penelitian yang telah disebutkan mengungkap beberapa sifat yang ada pada matriks atas aljabar max-plus terutama relasi green pada matriks atas aljabar max-plus. Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut, peneliti tertarik untuk meneliti tentang relasi green pada sembarang matriks 2×2 atas aljabar max-plus dengan judul **"Relasi Green dalam Matriks 2×2 atas Aljabar Max-Plus"**. Perbedaan penelitian ini dengan penelitian-penelitian sebelumnya adalah penelitian ini terfokus pada relasi green dan sifat-sifatnya pada matriks 2×2 atas aljabar max-plus.

1.2. Rumusan Masalah

Bagaimana relasi green serta sifat-sifatnya pada matriks 2×2 atas aljabar max-plus?

1.3. Tujuan Penelitian

Untuk membuktikan relasi green dan sifat-sifatnya pada matriks 2×2 atas aljabar max-plus.

1.4. Manfaat Penelitian

Penelitian ini memiliki manfaat-manfaat sebagai berikut:

1. Menambah wawasan dan pengetahuan peneliti tentang struktur aljabar terkhusus aljabar max-plus dan relasi green.
2. Sebagai bahan referensi untuk penelitian selanjutnya yang berhubungan dengan struktur aljabar max-plus atau relasi green.

1.5. Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Penelitian ini terbatas pada relasi green dalam matriks atas aljabar max-plus.
2. matriks yang digunakan dalam penelitian ini terbatas pada matriks berordo 2×2.

3. Himpunan yang digunakan sebagai contoh pada pembahasan adalah himpunan berhingga $U \subset M_2(\mathbb{R}_{\max})$.

1.6. Metode penelitian

Penelitian skripsi ini menggunakan metode studi literatur. Dalam penelitian ini, peneliti melakukan kajian materi-materi yang dibutuhkan dari berbagai sumber.

1.7. Tahapan Penelitian

Berikut ini langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini:

1. Melakukan kajian pustaka tentang semigrup dan semiring dalam aljabar klasik.

2. Melakukan kajian pustaka tentang aljabar max-plus yang meliputi definisi dan sifat-sifat aljabar max-plus.

3. Melakukan kajian tentang matriks atas aljabar max-plus.

4. Melakukan kajian pustaka tentang relasi green pada aljabar klasik.

5. Menunjukkan bukti bahwa matriks 2×2 atas aljabar max-plus merupakan semigrup.

6. Mengadopsi konsep relasi green pada aljabar klasik ke aljabar max-plus.

BAB II

Landasan Teori

2.1. Relasi

Definisi 2.1.1 *Hasil kali kartesian, $X \times Y$, dari dua himpunan X dan Y adalah himpunan pasangan terurut (x, y) dimana $x \in X$ dan $y \in Y$:*

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \textit{ dan } y \in Y\}$$

Contoh 2.1.2 Misal dipunyai dua himpunan A dan B,dengan $A = \{a1, a2, a3\}$ dan $B = \{b1, b2\}$ maka $A \times B = \{(a1, b1), (a1, b2), (a2, b1), (a2, b2), (a3, b1), (a3, b2)\}$.

Definisi 2.1.3 *Diberikan dua buah himpunan A dan B. Relasi A ke B adalah himpunan bagian dari hasil kali kartesian $A \times B$.*

Contoh 2.1.4 Misal dipunyai $S = \{p, q, r, s, t\}$ dan $G = \{1, 2, 3\}$, kemudian dipunyai himpunan $R = \{(p, 1), (p, 2), (r, 2)\}$. Himpunan R merupakan relasi dari S ke G karena merupakan himpunan bagian dari $S \times G$ ($R \subseteq S \times G$).

Definisi 2.1.5 *Diberikan R sebagai relasi dari A ke B dan S sebagai relasi dari B ke C. Relasi gabungan dari R dan S, disimbolkan dengan $R \circ S$, adalah pasangan terurut (a, c), dimana $a \in A$ dan $c \in C$ serta terdapat $b \in B$ sedemikian hingga $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in S$.*

Definisi 2.1.6 *Misalkan dipunyai himpunan tak kosong A dan B. Suatu relasi f dari A ke B dikatakan pemetaan dari A ke B jika f*

memasangkan setiap elemen di A tepat satu dengan elemen di B.

Contoh 2.1.7 Diketahui $\mathbb{N}$ adalah himpunan seluruh bilangan bulat dan f merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ yang didefinisikan dengan

$$f = \{(n, 2n) | n \in \mathbb{N}\}$$

f merupakan pemetaan dari $\mathbb{N}$ ke $\mathbb{N}$ karena untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ terdapat tepat satu m sedemikian hingga $m = 2n$.

Definisi 2.1.8 *Operasi biner $*$ didefinisikan sebagai pemetaan dari $S \times S$ ke S dimana S merupakan himpunan tak kosong.*

Contoh 2.1.9 Operasi $+$ pada $\mathbb{N}$ merupakan contoh dari operasi biner karena memetakan sembarang elemen $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dengan $m + n$ di $\mathbb{N}$.

2.2. Semigrup

Definisi 2.2.1 *Grupoid $(S, *)$ merupakan suatu himpunan tak kosong S dimana operasi biner $*$ terdefinisi.*

Contoh dari grupoid adalah himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dengan operasi penjumlahan $(\mathbb{N}, +)$, himpunan bilangan ril dengan operasi penjumlahan $(\mathbb{R}, +)$, himpunan bilangan bulat dengan operasi perkalian $(\mathbb{Z}, \times)$, dan seterusnya.

Definisi 2.2.2 *Semigrup merupakan suatu grupoid $(S, *)$ dimana operasi biner $*$ bersifat asosiatif, sehingga $\forall x, y, z \in G$ maka*

$$(x * y) * z = x * (y * z) \tag{2.1}$$

Contoh 2.2.3 Himpunan bilangan bulat kelipatan 2 dinotasikan $2\mathbb{Z} = \{2n|n \in \mathbb{Z}\} = \{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$ dengan operasi penjumlahan biasa $+$ merupakan contoh dari semigrup karena $+$ merupakan operasi biner yang bersifat asosiatif.

Contoh 2.2.4 Himpunan matriks 2×2 M_2 dengan operasi penjumlahan adalah semigrup karena:

1. Operasi $+$ merupakan operasi biner pada M_2.
   Misal diambil sembarang matriks $A, B \in M_2$, dengan $A = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} |a_i \in \mathbb{R} \text{ dan } i = 1, 2, 3, 4 \right\}, B = \left\{ \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} |b_i \in \mathbb{R} \text{ dan } i = 1, 2, 3, 4 \right\}$ maka,

   $$A + B = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix}$$

   dengan $a_i + b_i\mathbb{R}$ dan $i = 1, 2, 3, 4$.

2. $(M, +)$ bersifat asosiatif. Misal diambil sembarang matriks $A, B, C \in M_2$ dengan

   $$A = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} |a_i \in \mathbb{R} \text{ dan } i = 1, 2, 3, 4 \right\}$$
   $$B = \left\{ \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} |b_i \in \mathbb{R} \text{ dan } i = 1, 2, 3, 4 \right\}$$
   $$C = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} |c_i \in \mathbb{R} \text{ dan } i = 1, 2, 3, 4 \right\}$$

maka,

$$\begin{aligned}
(A+B)+C &= \left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a_1+b_1)+c_1 & (a_2+b_2)+c_2 \\ (a_3+b_3)+c_3 & (a_4+b_4)+c_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3+b_3+c_3 & a_4+b_4+c_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1+(b_1+c_1) & a_2+(b_2+c_2) \\ a_3+(b_3+c_3) & a_4+(b_4+c_4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 \\ b_3+c_3 & b_4+c_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}\right) \\
&= A+(B+C).
\end{aligned}$$

Selanjutnya penulisan semigrup $(S,*)$ dengan sembarang opersai biner akan disederhanakan menjadi S demi mempermudah penulisan.

Definisi 2.2.5 *Semigrup komutatif merupakan semigrup S dimana operasi biner $*$ bersifat komutatif, sehingga $\forall x, y \in S$ maka*

$$x * y = y * x \tag{2.2}$$

Contoh 2.2.6 Himpunan $2\mathbb{Z}$ dengan operasi $+$, merupakan contoh dari semigrup komutatif, karena untuk setiap $2a, 2b \in 2\mathbb{Z}$ berlaku

$2a + 2b = 2b + 2a$.

Definisi 2.2.7 *Suatu elemen a pada semigrup S dinamakan idempoten jika $a * a = a$(atau $a^2 = a$)*

Contoh 2.2.8 Elemen $0 \in 2\mathbb{Z}$, merupakan elemen idempoten terhadap penjumlahan pada $2\mathbb{Z}$ karena $0 + 0 = 0$.

Definisi 2.2.9 *Elemen identitas (atau biasa disebut identitas) dari suatu semigrup S adalah elemen (dilambangkan dengan) e di S dimana $\forall x \in S$ berlaku*

$$e * x = x * e = x \tag{2.3}$$

Proposisi 2.2.10 *(Alan, 2020) Suatu semigrup tidak dapat memiliki lebih dari satu elemen identitas.*

Bukti. Misal e dan e' merupakan elemen identitas dari semigrup S maka $\forall x \in A$ berlaku,

$$x * e = e * x = x \text{ dan } x * e' = e' * x = x$$

Karena e' dan e juga merupakan elemen dari S maka

$$e * e' = e' * e = e' \text{ dan } e' * e = e * e = e$$

sehingga dapat disimpulakan

$$e = e'$$

■

Definisi 2.2.11 *Monoid merupakan suatu semigrup S dengan* *elemen identitas.*

Contoh 2.2.12 Misal dipunyai $\mathbb{R}^0 = \mathbb{N} \cup 0$ dengan operasi biner $(+)$. $(\mathbb{R}^0, +)$ merupakan monoid karena $\forall x, y, z \in (\mathbb{R}^0, +)$ berlaku:

1. $(x+y)+z = x+(y+z)$, (sifat asosiatif penjumlahan bilangan rill)

2. $\exists e = 0$ sedemikian hingga berlaku $x + 0 = 0 + x = x$.

Seperti $(\mathbb{R}^0, +)$, $(\mathbb{R}^0, \times)$ juga merupakan monoid dengan elemen 1 sebagai elemen identitas.

Jika suatu semigrup S tidak memiliki elemen identitas, maka dapat ditambahkan elemen tambahan e sedemikian hingga berlaku:

$$e * x = x * e = x, \forall x \in S.$$

Selanjutnya didapatkan suatu S^1 dengan definisi:

$$S^1 = \begin{cases} S & \text{, jika } S \text{ memiliki elemen identitas} \\ S \cup \{e\} & \text{, selainnya} \end{cases} \tag{2.4}$$

Definisi 2.2.13 *Monoid* $(S, *)$ *merupakan monoid komutatif jika* $\forall x, y \in S$ ***berlaku*** $x * y = y * x$.

Contoh 2.2.14 $(\mathbb{R}^0, +)$ dan $(\mathbb{R}^0, \times)$ merupakan monoid komutatif karena $\forall x, y \in \mathbb{R}^0$ berlaku:

1. $x + y = y + x$, (sifat komutatif penjumlahan bilangan rill)

2. $x \times y = y \times x$, (sifat komutatif perkalian bilangan rill).

Definisi 2.2.15 *Elemen zero dari suatu semigrup S, yang memiliki sekurang-kurangnya dua elemen, merupakan elemen (dinotasikan* *dengan* 0*) pada* S *yang memenuhi sifat:*

$$0 * x = x * 0 = 0, \forall x \in S$$

Definisi 2.2.16 *Himpunan bagian tak kosong* T *dari semigrup* S *disebut subsemigrup dari* S *jika* T *tertutup terhadap operasi yang terdefinisi pada* S*.*

Definisi 2.2.17 *Ideal kiri dari suatu semigrup* S *adalah himpunan bagian tak kosong* A *dari* S *sedemikian hingga* $SA \subseteq A$ *atau* $(\forall s \in S, a \in A) s * a \in A$

Definisi 2.2.18 *Ideal kanan dari suatu semigrup* S *adalah himpunan bagian tak kosong* A *dari* S *sedemikian hingga* $AS \subseteq A$ *atau* $\forall s \in S, a \in A) a * s \in A$

Definisi 2.2.19 *Sebuah himpunan tak kosong* A *dari* S *dinamakan ideal dari* S *jika* A *merupakan ideal kiri dan kanan dari* S*.*

Contoh 2.2.20 Diberikan semigrup $(\mathbb{N}, +)$, diambil sembarang $n \in \mathbb{N}$ dan $\mathbb{I} = \{m \in \mathbb{N} : m \geq n\}$. Maka $\mathbb{I}$ merupakan ideal dari $\mathbb{N}$.

Definisi 2.2.21 *Misal dipunyai semigrup* S*, kemudian untuk sembarang* $x \in S$ *didefinisikan,*

$$\begin{aligned}
L(x) &= S^1 x = \{x\} \cup Sx, \\
R(x) &= xS^1 = \{x\} \cup xS, \\
J(x) &= S^1 x S^1 = \{x\} \cup xS \cup Sx \cup SxS.
\end{aligned}$$

Maka $L(x), R(x)$ *dan* $J(x)$*, secara berturut-turut disebut sebagai ideal kiri utama yang dibangun oleh* x*, ideal kanan untama yang* *dibangun oleh x, dan ideal utama yang dibangun oleh x.*

2.3. Aljabar Max-plus

Aljabar max-plus merupakan himpunan bilangan ril yang dikombinasikan dengan elemen negatif tak hingga $(\mathbb{R}\cup\{-\infty\})$ dan dilengakapi dengan dua operasi yaitu $\oplus$ dan $\otimes$. Hasil dari operasi $\oplus$ merupakan nilai maksimum dari dua buah elemen pada aljabar max-plus yang dioperasikan $\oplus$. Sedangkan hasil dari operasi $\otimes$ adalah penjumlahan dari kedua elemen yang dioperasikan $\otimes$.

Sebelum mempelajari konsep tentang aljabar max-plus, perlu dipahami terlebih dahulu konsep-konsep dasar yang terkait di dalamnya. Oleh sebab itu, sebagai awal pembahasan akan diberikan definisi-definisi dan teorema-teorema penting yang akan membantu dalam memahami konsep aljabar max-plus.

Definisi 2.3.1 *Misal dipunyai suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner $+$ dan $\times$, $(R,+,\times)$ dikatakan semiring jika memenuhi aksioma berikut:*

i. $(R,+)$ *merupakan monoid komutatif dan terdapat elemen identitas* 0*;*

ii. $(R,\times$ *adalah monoid dengan elemen identitas* 1*;*

iii. $\forall x,y,z\in R$ *berlaku* $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$ *dan* $(x+y)\times z = x\times z+y\times z$ *(sifat distributif kiri dan kanan);*

iv. $\forall x\in R$ *berlaku* $0\times x=x\times 0=0$.

Contoh 2.3.2 Himpunan $\mathbb{R}^0$ dengan operasi $+$ dan $\times$ pada Contoh 2.2.12 merupakan contoh dari semiring karena:

1. $(\mathbb{R}^0, +)$ merupakan monoid komutatif (proof pada Contoh 2.2.14 dan terdapat elemen 0 sebagai elemen identitas.

2. $(\mathbb{R}^0, \times)$ merupakan monoid dan terdapat elemen 1 sebagai elemen identitas.

3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^0$ berlaku $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$ (sifat distributif kiri bilangan rill) dan $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$ (sifat distributif kanan bilangan rill).

4. $\forall x \in \mathbb{R}^0$ berlaku $0 \times x = x \times 0 = 0$

Contoh 2.3.3 Misal himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan dua operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$ yang didefinisikan dengan

$$x \oplus y = \max(x, y)$$

dan

$$x \otimes y = x + y$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Struktur aljabar $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ disebut juga semiring karena memenuhi semua sifat dari semiring. Struktur aljabar ini selanjutnya disebut aljabar max-plus dengan elemen identitas terhadap $\oplus$ adalah $-\infty$ dan elemen identitas terhadap $\otimes$ adalah 0 dan dinotasikan sebagai $\mathbb{R}_{\max}$.

Contoh 2.3.4 Penjumlahan

1. $10 \oplus 2 = \max(10, 2) = 10$

2. $32 \oplus -\infty = \max(32, -\infty) = 32$

Contoh 2.3.5 Perkalian

1. $20 \otimes 3 = 20 + 3 = 23$
2. $0 \otimes 5 = 0 + 5 = 5$
3. $4 \otimes -\infty = 4 + -\infty = -\infty$

Struktur $(\mathbb{R}_\epsilon, \oplus, \otimes)$ disebut juga sebagai aljabar max-plus dan disimbolkan dengan $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}_\epsilon, \oplus, \otimes)$. Struktur tersebut merupakan semiring

Urutan pengoprasian pada aljabar max-plus memiliki prioritas yang sama dengan aljabar klasik, yaitu operasi $\otimes$ didahulukan dari pada operasi $\oplus$, selama tanda kurang tidak dituliskan.

Contoh 2.3.6

$$\begin{aligned}
2 \otimes 5 \oplus -3 \oplus 10 \otimes -\infty &= (2 \otimes 5) \oplus -3 \oplus (10 \otimes -\infty) \\
&= (2 + 5) \oplus -3 \oplus (10 + -\infty) \\
&= 7 \oplus -3 \oplus -\infty \\
&= \max(7, -3) \oplus -\infty \\
&= \max(7, -\infty) \\
&= 7
\end{aligned}$$

Dalam Contoh 2.3.6 operasi $\otimes$ didahulukan kemudian operasi $\oplus$. Jika disertakan tanda kurung maka bilangan dalam tanda kurang dikerjakan terlebih dahulu.

Contoh 2.3.7

$$\begin{aligned}
(3 \oplus 10) \otimes -\infty &= \max(3, 10) \otimes -\infty \\
&= 10 \otimes -\infty \\
&= 10 + -\infty \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Dalam aljabar max-plus juga dapat terdapat operasi pangkat dengan definisi sebagaimana pada Definisi 2.3.8.

Definisi 2.3.8 *Untuk setiap* $x \in \mathbb{R}_{\max}$ *dan* $n \in \mathbb{N}$*, jika* $n \neq 0$ *maka*

$$\begin{aligned} x^{\otimes n} &= \underbrace{x \otimes x \otimes x \otimes ... \otimes x}_{\textit{sebanyak n kali}} \\ &= \underbrace{x + x + x + ... + x}_{\textit{sebanyak n kali}} \end{aligned}$$

dan untuk $n = 0$ *maka* $x^{\otimes 0} = 0$

2.1.1. Matriks atas Aljabar Max-Plus

Konsep dari aljabar max-plus dapat diperluas ke dalam matriks berukuran $m \times n$. Misal dipunyai sembarang $m, n \in \mathbb{N}$ maka matriks berukuran $m \times n$ atas aljabar max-plus adalah matriks yang elemen-elemennya merupakan anggota dari $\mathbb{R}_{\max}$, disimbolkan dengan ${\mathbb{R}_{\max}}^{m \times n}$, dan berlaku operasi $\oplus$ dan $\otimes$. Terlebih dahulu dinotasikan $[m] = 1, ..., m$ dan $[n] = 1, 2, ..., n$.

Selanjutnya kita akan definisikan penjumlahan matriks atas aljabar sebagai berikut:

Definisi 2.3.9 *Misal dipunyai* $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ *dengan* $A = (a_{ij})$ *dan* $B = (b_{ij})$ *maka*

$$A \oplus B := \max(a_{ij}, b_{ij})$$

untuk i=[m] dan j=[n].

Contoh 2.3.10 Penjumlahan pada matriks atas aljabar max-plus

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \oplus 0 & 5 \oplus 6 \\ 5 \oplus 4 & 9 \oplus 7 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \max(3,0) & \max(5,6) \\ \max(5,4) & \max(9,7) \end{bmatrix} \tag{2.5}$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.3.11 Penjumlahan pada matriks atas aljabar max-plus

$$\begin{bmatrix} 6 & -\infty \\ -\infty & 3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \oplus 2 & -\infty \oplus 0 \\ -\infty \oplus -4 & 3 \oplus -\infty \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \max(6,2) & \max(-\infty,0) \\ \max(-\infty,-4) & \max(3,-\infty) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Berikut ini diberikan definisi perkalian matriks dan perkalian skalar dalam aljabar max-plus

Definisi 2.3.12 *Misal dipunyai matriks atas aljabar max-plus* A, B *yang ukurannya saling kompatibel. Dipunyai juga sembarang bilangan* $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$ *maka:*

$$(A \otimes B)_{ij} := \max_k (a_{ik} + b_{kj}) \tag{2.7}$$

dan

$$\alpha \otimes A := \alpha + a_{ij} \tag{2.8}$$

Contoh 2.3.13 Tentukan hasil operasi berikut:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 4 & -\infty\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}(-2\otimes 3)\oplus(3\otimes 1)\\ (4\otimes 3)\oplus(-\infty\otimes 1)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\max(-2+3,3+1)\\ \max(4+3,-\infty+1)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\max(1,4)\\ \max(7,-\infty)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}4\\ 7\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Contoh 2.3.14 Tentukan hasil operasi berikut:

$$\begin{aligned}5\otimes\begin{bmatrix}2 & -\infty\\ 0 & 4\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}5+2 & 5+-\infty\\ 5+0 & 5+4\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}7 & -\infty\\ 5 & 9\end{bmatrix}\end{aligned}$$

2.4. Relasi Green

Sebelum membahas konsep relasi green, akan diberikan terlebih dahulu definisi-definisi dari istilah-istilah yang berkaitan dengan relasi green. Selanjutnya akan diberikan contoh untuk memudahkan dalam memahami konsep tersebut.

Definisi 2.4.1 *Diketahui* $(S,*)$ *adalah suatu semigrup. Selanjutnya* *untuk $a, b \in S$ didefinisikan relasi green sebagai berikut:*

$$
\begin{aligned}
a\mathcal{L}b &\Leftrightarrow S^1 * a = S^1 * b \\
a\mathcal{R}b &\Leftrightarrow a * S^1 = b * S^1 \\
a\mathcal{J}b &\Leftrightarrow S^1 * a * S^1 = S^1 * b * S^1 \\
a\mathcal{H}b &\Leftrightarrow a\mathcal{L}b \wedge a\mathcal{R}b \\
a\mathcal{D}b &\Leftrightarrow \exists c \in S(a\mathcal{L}c \wedge c\mathcal{R}b) = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}
\end{aligned}
$$

Contoh 2.4.2 Diberikan himpunan bilangan bulat modulo 4, $\mathbb{Z}_4$. $\mathbb{Z}_4$ merupakan semigrup dengan operasi $+_4$.

Sebelumnya akan dibentuk table cayle $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ sebgai berikut:

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

Tabel 2.1. Hasil penjumlahan $\mathbb{Z}_4$

Berdasarkan tabel 2.1 dapat dibentuk ideal kiri utama, ideal kanan utama, dan ideal utama yang dibangun oleh $\overline{0}$ dan $\overline{1}$ secara berturut-turut sebagai berikut.

1. Ideal kiri utama yang dibangun oleh $\overline{0}$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z}_4 + \bar{0} &= \{\bar{0} + \bar{0}, \bar{1} + \bar{0}, \bar{2} + \bar{0}, \bar{3} + \bar{0}\} \\
&= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}
\end{aligned}
$$

2. Ideal kiri utama yang dibangun oleh $\overline{1}$

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_4 + \bar{1} &= \{\bar{0} + \bar{1}, \bar{1} + \bar{1}, \bar{2} + \bar{1}, \bar{3} + \bar{1}\}\\ &= \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{0}\}\end{aligned}$$

3. Ideal kiri utama yang dibangun oleh $\overline{2}$

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_4 + \bar{2} &= \{\bar{0} + \bar{2}, \bar{1} + \bar{2}, \bar{2} + \bar{2}, \bar{3} + \bar{2}\}\\ &= \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{0}, \bar{1}\}\end{aligned}$$

4. Ideal kanan utama yang dibangun oleh $\overline{0}$

$$\begin{aligned}\bar{0} + \mathbb{Z}_4 &= \{\bar{0} + \bar{0}, \bar{0} + \bar{1}, \bar{0} + \bar{2}, \bar{0} + \bar{3}\}\\ &= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}\end{aligned}$$

5. Ideal kanan utama yang dibangun oleh $\overline{1}$

$$\begin{aligned}\bar{1} + \mathbb{Z}_4 &= \{\bar{1} + \bar{0}, \bar{1} + \bar{1}, \bar{1} + \bar{2}, \bar{1} + \bar{3}\}\\ &= \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{0}\}\end{aligned}$$

6. Ideal kanan utama yang dibangun oleh $\overline{2}$

$$\begin{aligned}\bar{2} + \mathbb{Z}_4 &= \{\bar{2} + \bar{0}, \bar{2} + \bar{1}, \bar{2} + \bar{2}, \bar{2} + \bar{3}\}\\ &= \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{0}, \bar{1}\}\end{aligned}$$

7. Ideal utama yang dibangun oleh $\overline{0}$

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_4 + \bar{0} + \mathbb{Z}_4 &= \{\bar{0} + \bar{0}, \bar{1} + \bar{0}, \bar{2} + \bar{0}, \bar{3} + \bar{0}\} + \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}\\ &= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} + \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}\\ &= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}\end{aligned}$$

8. ideal utama yang dibangun oleh $\bar{1}$

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_4 + \bar{1} + \mathbb{Z}_4 &= \{\bar{0}+\bar{1}, \bar{1}+\bar{1}, \bar{2}+\bar{1}, \bar{3}+\bar{1}\} + \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} \\ &= \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{0}\} + \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} \\ &= \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{0}\}\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh relasi $\mathcal{L}$, dan $\mathcal{R}$ pada $\mathbb{Z}_4$ berturut-turut sebagai berikut,

$$\mathbb{Z}_4 + \bar{0} = \mathbb{Z}_4 + \bar{1} \longleftrightarrow \bar{0}\mathcal{L}\bar{1}$$

$$\mathbb{Z}_4 + \bar{0} = \mathbb{Z}_4 + \bar{2} \longleftrightarrow \bar{0}\mathcal{L}\bar{2}$$

$$\mathbb{Z}_4 + \bar{1} = \mathbb{Z}_4 + \bar{2} \longleftrightarrow \bar{1}\mathcal{L}\bar{2}$$

$$\bar{0} + \mathbb{Z}_4 = \bar{1} + \mathbb{Z}_4 \longleftrightarrow \bar{0}\mathcal{R}\bar{1}$$

$$\bar{0} + \mathbb{Z}_4 = \bar{2} + \mathbb{Z}_4 \longleftrightarrow \bar{0}\mathcal{R}\bar{2}$$

$$\bar{1} + \mathbb{Z}_4 = \bar{2} + \mathbb{Z}_4 \longleftrightarrow \bar{1}\mathcal{R}\bar{2}$$

$$\mathbb{Z}_4 + \bar{0} + \mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}_4 + \bar{1} + \mathbb{Z}_4 \longleftrightarrow \bar{0}\mathcal{J}\bar{1}$$

$\bar{0}\mathcal{L}\bar{1}$ dan $\bar{0}\mathcal{R}\bar{1}$ sehingga $\bar{0}\mathcal{H}\bar{1}$

$\bar{0}\mathcal{L}\bar{2}$ dan $\bar{0}\mathcal{R}\bar{2}$ sehingga $\bar{0}\mathcal{H}\bar{2}$

$\bar{1}\mathcal{L}\bar{2}$ dan $\bar{1}\mathcal{R}\bar{2}$ sehingga $\bar{1}\mathcal{H}\bar{2}$

$\bar{0}\mathcal{L}\bar{1}$ dan $\bar{1}\mathcal{R}\bar{2}$ sehingga $\bar{0}\mathcal{D}\bar{2}$.

Contoh 2.4.3 Diberikan semigrup $G = \{k, l, m, n\}$ dengan operasi $\times$ yang didefinisikan sebagai berikut:

Berdasarkan tabel 2.2 diperoleh ideal kiri utama, ideal kanan utama, dan ideal utama yang dibangun oleh elemen-elemen pada

$\times$	k	l	m	n
k	n	k	m	l
l	k	l	m	n
m	m	m	m	m
n	l	n	m	k

Tabel 2.2. Hasil " $\times$ " semigrup G

semigrup G adalah sebagai berikut.

1. Ideal kiri utama yang dibangun oleh "k"

$$G \times k = \{n, k, m, l\}.$$

2. Ideal kiri utama yang dibangun oleh "l"

$$G \times l = \{k, l, m, n\}.$$

3. Ideal kiri utama yang dibangun oleh "m"

$$G \times m = \{m\}.$$

4. Ideal kiri utama yang dibangun oleh "n"

$$G \times n = \{l, n, m, k\}.$$

5. Ideal kanan utama yang dibangun oleh "k"

$$k \times G = \{n, k, m, l\}.$$

6. Ideal kanan utama yang dibangun oleh "l"

$$l \times G = \{k, l, m, n\}.$$

7. Ideal kanan utama yang dibangun oleh "m"

$$m \times G = \{m\}.$$

8. Ideal kanan utama yang dibangun oleh "n"

$$n \times G = \{l, n, m, k\}.$$

9. Ideal utama yang dibangun oleh "k"

$$G \times k \times G = \{l, n, m, k\}.$$

10. Ideal utama yang dibangun oleh "l"

$$G \times l \times G = \{n, k, m, l\}.$$

11. Ideal utama yang dibangun oleh "m"

$$G \times m \times G = \{m\}.$$

12. Ideal utama yang dibangun oleh "n"

$$G \times n \times G = \{k, l, m, n\}.$$

Relasi green pada semigrup G atas operasi $\times$ adalah sebagai berikut:

1. $k\mathcal{L}l$ karena $G \times k = G \times l$,
2. $k\mathcal{L}n$ karena $G \times k = G \times n$,
3. $l\mathcal{L}n$ karena $G \times l = G \times n$,
4. $k\mathcal{R}l$ karena $k \times G = l \times G$,
5. $k\mathcal{R}n$ karena $k \times G = n \times G$,
6. $l\mathcal{R}n$ karena $l \times G = n \times G$,
7. $k\mathcal{J}l$ karena $G \times k \times G = G \times l \times G$,
8. $k\mathcal{J}n$ karena $G \times k \times G = G \times n \times G$,
9. $l\mathcal{J}n$ karena $G \times l \times G = G \times n \times G$,
10. $k\mathcal{H}l$ karena $k\mathcal{L}l$ dan $k\mathcal{R}l$,
11. $k\mathcal{H}n$ karena $k\mathcal{L}n$ dan $k\mathcal{R}n$,
12. $l\mathcal{H}n$ karena $l\mathcal{L}n$ dan $l\mathcal{R}n$,
13. $k\mathcal{D}n$ karena $k\mathcal{L}l$ dan $l\mathcal{R}n$.

Selanjutnya akan diberikan beberapa proposisi yang berhubungan dengan relasi green dan akan diberikan pembuktiannya.

Proposisi 2.4.4 *(Shabir, 2020) Misal a, b merupakan elemen dari semigrup S. Maka $a\mathcal{L}b$ jika dan hanya jika terdapat $x, y \in S^1$ sedemikian hingga $xa = b, yb = a$. Juga, $a\mathcal{R}b$ jika dan hanya jika terdapat $u, v \in S^1$ sedemikian hingga $au = b, bv = a$.*

Bukti. Misal $a, b \in S$, diketahui bahwa

$$a\mathcal{L}b \longleftrightarrow S^1a = S^1b \tag{2.9}$$

Pertama andaikan bahwa $a\mathcal{L}b$. Karena $b \in S^1b = S^1a$ (berdasarkan Definisi 2.4.1), maka terdapat $x \in S^1$ sedemikian hingga $b = xa$. Demikian juga, karena $a \in S^1a = S^1b$ maka terdapat $y \in S^1$ sedemikian hingga $a = yb$. Kebalikannya, andaikan bahwa untuk setiap $a, b \in S^1$ terdapat $x, y \in S^1$ sedemikian hingga

$$xa = b \text{ dan } yb = a. \tag{2.10}$$

Akan ditunjukkan bahwa $a\mathcal{L}b$, yaitu, $S^1a = S^1b$, misalkan $t \in S^1a$ maka terdapat $s \in S^1$ sedemikian hingga

$$t = sa = s(yb) = (sy)b \in S^1b$$

Sehingga dapat disimpulkan $S^1a \subseteq S^1b$. Kemudian, misal diambil $r \in S^1b$, maka terdapat $p \in S^1$ sedemikian hingga

$$r = pb = p(xa) = (px)a \in S^1a.$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $S^1b \subseteq S^1a$ Karena $S^1a \subseteq S^1b$ dan $S^1b \subseteq S^1a$ maka $S^1a = S^1b$.

■

Contoh 2.4.5 Pada Contoh 2.4.3 telah diketahui bahwa $k\mathcal{L}l$. Pada tabel 2.2 terlihat bahwa terdapat $n, k \in G$ sedemikian hingga $n \times k = l$ dan $k \times l = k$. Begitu juga telah diketahui bahwa $k\mathcal{R}n$. Dari tabel 2.2 dapat dilihat bahwa terdapat $k, n \in G$ sedemikian hingga $k \times k = n$ dan $n \times n = k$.

Contoh 2.4.6 Pada Contoh 2.2.4 telah disebutkan bahwa$(M_2, +)$ merupakan semigrup. Diberikan $A, B \in M_2$ dengan $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Selanjutnya berdasarkan Proposisi 2.4.4 dapat ditunjukkan bahwa $A\mathcal{L}B$ dengan menentukan nilai dari $X, Y \in M_2$ sedemikian hingga $A = X + B$ dan $B = Y + A$.

Misal diambil dua buah matriks $A^{-1}, B^{-1} \in M_2$ dengan

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

dan

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A + A^{-1} &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B + B^{-1} &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_2 \end{aligned}$$

Maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
&A = X + B\\
&A + B^{-1} = X + B + B^{-1}\\
&A + B^{-1} = X + O_2\\
&A + B^{-1} = X \text{ atau } X = A + B^{-1}
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
&B = Y + A\\
&B + A^{-1} = Y + A + A^{-1}\\
&B + A^{-1} = Y + O_2\\
&B + A^{-1} = Y \text{ atau } Y = B + A^{-1}
\end{aligned}
$$

Sehingga nilai dari X dan Y secara berturut-turut adalah

$$
\begin{aligned}
X &= A + B^{-1}\\
X &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
Y &= B + A^{-1}\\
Y &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Jadi karena terdapat $X, Y \in M_2$ sedemikian hingga $A = X + B$ dan $B = Y + A$ maka $A\mathcal{L}B$.

Untuk menunjukkan bahwa $A\mathcal{R}B$ dapat dilakukan dengan cara yang sama.

BAB III

Relasi Green pada Matriks 2×2 atas Aljabar Max-Plus

3.1. Semigrup atas Aljabar Max-Plus

Relasi green merupakan lima relasi yaitu $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{J}, \mathcal{D}$, dan $\mathcal{H}$. Kelima relasi tersebut mencirikan elemen-elemen dari semigrup berdasarkan prinsip ideal yang digunakan. Oleh karena itu sebelum menyelidiki relasi green pada matriks 2×2 atas aljabar max-plus, perlu diselidiki terlebih dahulu bahwa matriks 2×2 atas aljabar max-plus merupakan semigrup.

Diberikan himpunan semua matriks 2×2 atas aljabar max-plus $M_2(\mathbb{R}_{\max})$. Akan ditunjukkan bahwa grupoid $(M_2(\mathbb{R}_{\max}), \otimes)$ merupakan semigrup.

Berdasarakan Definisi 2.2.2 maka akan ditunjukkan bahwa $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ terhadap operasi $\otimes$ bersifat tertutup dan $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ bersifat asosiatif terhadap operasi $\otimes$. Misal diambil sembarang $P, B, C \in M_2(\mathbb{R}_{max})$ dengan

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

maka,

$$
\begin{aligned}
P \otimes B &= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (p_1 \otimes b_1) \oplus (p_2 \otimes b_3) & (p_1 \otimes b_2) \oplus (p_2 \otimes b_4) \\ (p_3 \otimes b_1) \oplus (p_4 \otimes b_3) & (p_3 \otimes b_2) \oplus (p_4 \otimes b_4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(p_1 + b_1, p_2 + b_3) & \max(p_1 + b_2, p_2 + b_4) \\ \max(p_3 + b_1, p_4 + b_3) & \max(p_3 + b_2, p_4 + b_4) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

dengan $p_i + b_j \in \mathbb{R}_{\max} | i, j = 1, 2, 3, 4$ sehingga $P \otimes B \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$. Sehingga $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ bersifat tertutup. Selanjutnya diperhatikan:

$$
\begin{aligned}
&(P \otimes B) \otimes C \\
&= \left(\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (p_1 \otimes b_1) \oplus (p_2 \otimes b_3) & (p_1 \otimes b_2) \oplus (p_2 \otimes b_4) \\ (p_3 \otimes b_1) \oplus (p_4 \otimes b_3) & (p_3 \otimes b_2) \oplus (p_4 \otimes b_4) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(p_1 + b_1, p_2 + b_3) & \max(p_1 + b_2, p_2 + b_4) \\ \max(p_3 + b_1, p_4 + b_3) & \max(p_3 + b_2, p_4 + b_4) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (d_1 \otimes c_1) \oplus (d_2 \otimes c_3) & (d_1 \otimes c_2) \oplus (d_2 \otimes c_4) \\ (d_3 \otimes c_1) \oplus (d_4 \otimes c_3) & (d_3 \otimes c_2) \oplus (d_4 \otimes c_4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(d_1 + c_1, d_2 + c_3) & \max(d_1 + c_2, d_2 + c_4) \\ \max(d_3 + c_1, d_4 + c_3) & \max(d_3 + c_2, d_4 + c_4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

dengan:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \max(\max(p_1 + b_1, p_2 + b_3) + c_1, \max(p_1 + b_2, p_2 + b_4) + c_3) \\
&= \max(\max(p_1 + b_1 + c_1, p_2 + b_3 + c_1), \\
&\quad \max(p_1 + b_2 + c_3, p_2 + b_4 + c_3)) \\
&= \max(p_1 + b_1 + c_1, p_2 + b_3 + c_1, p_1 + b_2 + c_3, p_2 + b_4 + c_3) \\
e_2 &= \max(\max(p_1 + b_1, p_2 + b_3) + c_2, \max(p_1 + b_2, p_2 + b_4) + c_4) \\
&= \max(\max(p_1 + b_1 + c_2, p_2 + b_3 + c_2), \\
&\quad \max(p_1 + b_2 + c_4, p_2 + b_4 + c_4)) \\
&= \max(p_1 + b_1 + c_2, p_2 + b_3 + c_2, p_1 + b_2 + c_4, p_2 + b_4 + c_4) \\
e_3 &= \max(\max(p_3 + b_1, p_4 + b_3) + c_1, \max(p_3 + b_2, p_4 + b_4) + c_3) \\
&= \max(\max(p_3 + b_1 + c_1, p_4 + b_3 + c_1), \\
&\quad \max(p_3 + b_2 + c_3, p_4 + b_4 + c_3)) \\
&= \max(p_3 + b_1 + c_1, p_4 + b_3 + c_1, p_3 + b_2 + c_3, p_4 + b_4 + c_3) \\
e_4 &= \max(\max(p_3 + b_1, p_4 + b_3) + c_2, \max(p_3 + b_2, p_4 + b_4) + c_4) \\
&= \max(\max(p_3 + b_1 + c_2, p_4 + b_3 + c_2), \\
&\quad \max(p_3 + b_2 + c_4, p_4 + b_4 + c_4)) \\
&= \max(p_3 + b_1 + c_2, p_4 + b_3 + c_2, p_3 + b_2 + c_4, p_4 + b_4 + c_4)
\end{aligned}$$

Diperhatikan juga:

$$
\begin{aligned}
&P \otimes (B \otimes C) \\
&= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} (b_1 \otimes c_1) \oplus (b_2 \otimes c_3) & (b_1 \otimes c_2) \oplus (b_2 \otimes c_4) \\ (b_3 \otimes c_1) \oplus (b_4 \otimes c_3) & (b_3 \otimes c_2) \oplus (b_4 \otimes c_4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \max(b_1 + c_1, b_2 + c_3) & \max(b_1 + c_2, b_2 + c_4) \\ \max(b_3 + c_1, b_4 + c_3) & \max(b_3 + b_2, b_4 + c_4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (p_1 \otimes k_1) \oplus (p_2 \otimes k_3) & (p_1 \otimes k_2) \oplus (p_2 \otimes k_4) \\ (p_3 \otimes k_1) \oplus (p_4 \otimes k_3) & (p_3 \otimes k_2) \oplus (p_4 \otimes k_4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(p_1 + k_1, p_2 + k_3) & \max(p_1 + k_2, p_2 + k_4) \\ \max(p_3 + k_1, p_4 + k_3) & \max(p_3 + k_2, p_4 + k_4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ l_3 & l_4 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

dengan:

$$
\begin{aligned}
l_1 &= \max(p_1 + \max(b_1 + c_1, b_2 + c_3), p_2 + \max(b_3 + c_1, b_4 + c_3)) \\
&= \max(\max(p_1 + b_1 + c_1, p_1 + b_2 + c_3), \\
&\quad \max(p_2 + b_3 + c_1, p_2 + b_4 + c_3)) \\
&= \max(p_1 + b_1 + c_1, p_1 + b_2 + c_3, p_2 + b_3 + c_1, p_2 + b_4 + c_3) \\
l_2 &= \max(p_1 + \max(b_1 + c_2, b_2 + c_4), p_2 + \max(b_3 + c_2, b_4 + c_4)) \\
&= \max(\max(p_1 + b_1 + c_2, p_1 + b_2 + c_4), \\
&\quad \max(p_2 + b_3 + c_2, p_2 + b_4 + c_4)) \\
&= \max(p_1 + b_1 + c_2, p_1 + b_2 + c_4, p_2 + b_3 + c_2, p_2 + b_4 + c_4) \\
l_3 &= \max(p_3 + \max(b_1 + c_1, b_2 + c_3), p_4 + \max(b_3 + c_1, b_4 + c_3)) \\
&= \max(\max(p_3 + b_1 + c_1, p_3 + b_2 + c_3), \\
&\quad \max(p_4 + b_3 + c_1, p_4 + b_4 + c_3)) \\
&= \max(p_3 + b_1 + c_1, p_3 + b_2 + c_3, p_4 + b_3 + c_1, p_4 + b_4 + c_3) \\
l_4 &= \max(p_3 + \max(b_1 + c_2, b_2 + c_4), p_4 + \max(b_3 + c_2, b_4 + c_4)) \\
&= \max(\max(p_3 + b_1 + c_2, p_3 + b_2 + c_4), \\
&\quad \max(p_4 + b_3 + c_2, p_4 + b_4 + c_4)) \\
&= \max(p_3 + b_1 + c_2, p_3 + b_2 + c_4, p_4 + b_3 + c_2, p_4 + b_4 + c_4)
\end{aligned}
$$

Jadi karena (1)=(2) maka $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ bersifat asosiatif. Karena$M_2(\mathbb{R}_{\max})$ tertutup dan bersifat asosiatif terhadap operasi $\otimes$, maka $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ merupakan semigrup.

Telah dibuktikan bahwa $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ merupakan semigrup. Dalam Definisi 2.2.11 dijelaskan bahwa semigrup dengan elemen identitas disebut monoid. Proposisi 3.1.1 berikut menunjukkan bahwa $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ merupakan monoid.

Proposisi 3.1.1 *Diberikan matriks* $I = \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}$, *matriks* I *merupakan elemen identitas pada* $(M_2(\mathbb{R}_{\max}), \otimes)$.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa matriks I merupakan elemen identitas pada $(M_2(\mathbb{R}_{\max}), \otimes)$ maka akan ditunjukkan bahwa $\forall A \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ maka $A \otimes I = A = I \otimes A$. Misal diambil sembarang $X \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dengan $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$, diperhatikan

$$\begin{aligned} X \otimes I &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} I \otimes X &= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Karena $X \otimes I = X$ dan $I \otimes X = X$ maka terbukti bahwa I adalah elemen identitas pada $M_2(\mathbb{R}_{\max})$. ■

Selanjutnya karena $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ merupakan semigrup maka berlaku prinsip ideal pada $M_2(\mathbb{R}_{\max})$, sehingga untuk suatu elemen $A \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$, ideal kiri utama pada $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ yang dibangun oleh A adalah

$$M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes A = \{X \otimes A | \forall X \in M_2(\mathbb{R}_{\max})\},$$

ideal kanan utama pada $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ yang dibangun oleh A adalah

$$A \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max}) = \{A \otimes X | \forall X \in M_2(\mathbb{R}_{\max})\},$$

dan ideal utama pada $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ yang dibangun oleh A adalah

$$M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes A \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max}) = \{X \otimes A \otimes Y | \forall X, Y \in M_2(\mathbb{R}_{\max})\}.$$

Untuk memudahkan pemahaman, akan diberikan contoh dengan menggunakan himpunan berhingga $U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R}_{\max})$. $(U, \otimes)$ merupakan semigrup karena operasi $\otimes$ merupakan operasi biner pada U. Hal tersebut sebagamana yang ditunjukkan pada persamaan 3.3 berikut.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \in U \\
\begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \in U \\
\begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \in U \\
\begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \in U
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Selanjutnya karena $U \subseteq M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dan $(M_2(\mathbb{R}_{\max}), \otimes)$ bersifat asosiatif, maka $(U, \otimes)$ juga bersifat asosiatif. Jadi $(U, \otimes)$ merupakan semigrup.

Contoh 3.1.2 Diberikan $A = \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \in U$. Ideal kiri utama, ideal kanan utama, serta ideal utama pada U yang dibangun oleh A secara berturut-turut adalah

$$
\begin{aligned}
&U \otimes A\\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \right\}\\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&A \otimes U\\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \right\}\\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&U \otimes A \otimes U\\
&= (U \otimes A) \otimes U\\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \right\}\\
&\otimes \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \right\}\\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix}, \right.\\
&\left. \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \right\}\\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

3.2. Relasi Green pada Matriks 2×2 atas Aljabar Max-Plus

Definisi 2.4.1 mendefinisikan relasi $\mathcal{L}$ dan $\mathcal{R}$ pada aljabar kelasik. Namun, konsep tersebut juga dapat dibawa ke dalam aljbar max-plus. Sehingga untuk $A, B \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$, A dan B dikatakan berelasi green $\mathcal{L}$ dan $\mathcal{R}$ jika memenuhi kondisi berikut,

$$A\mathcal{L}B \Leftrightarrow (M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes A) = (M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes B) \tag{3.4}$$

$$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow (A \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max})) = (B \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max})) \tag{3.5}$$

Contoh 3.2.1 Diberikan semigrup $U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \right\}$ dan $A = \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix}$ maka A berelasi $\mathcal{L}$ dengan B karena

$$A \otimes U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} B \otimes U &= \left\{ \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \right. \\ &\qquad \left. \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \tag{3.6}$$

sehingga $A \otimes U = B \otimes U$.

Contoh 3.2.2 A dan B pada Contoh 3.2.1 juga berelasi $\mathcal{R}$ karena,

$$\begin{aligned}
U\otimes A =& \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \right\} \\
U\otimes B =& \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix}, \right. \\
& \left. \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \right\} \\
=& \left\{ \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

sehingga $U \otimes A = U \otimes A$.

Untuk menunjukkan adanya relasi green $\mathcal{L}$ dan $\mathcal{R}$ pada suatu semigrup berdasarkan definisi seringkali merupakan persoalan yang sulit, terlebih pada suatu semigrup tak hingga. Namun hal ini dapat dipermudah dengan menggunakan Proposisi 2.4.4. Proposisi 2.4.4 juga dapat digunakan untuk menunjukkan adanya relasi green $\mathcal{L}$ dan $\mathcal{R}$ dalam aljabar max-plus.

Contoh 3.2.3 Misal dipunyai matriks $A = \begin{bmatrix} -\infty & 3 \\ 2 & -\infty \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -\infty & 6 \\ 2 & -\infty \end{bmatrix}$. Matriks A berelasi $\mathcal{L}$ dengan matriks B, karena terdapat matriks $X = \begin{bmatrix} -3 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}$ dan matriks $Y = \begin{bmatrix} 3 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}$ sedemikian hingga $A = X \otimes B$ dan $B = Y \otimes A$.

Contoh 3.2.4 Diberikan matriks $C = \begin{bmatrix} 4 & -\infty \\ -\infty & 1 \end{bmatrix}$ dan matriks $D = \begin{bmatrix} 7 & -\infty \\ -\infty & 6 \end{bmatrix}$, $C\mathcal{R}D$ karena terdapat $U = \begin{bmatrix} -3 & -\infty \\ -\infty & -5 \end{bmatrix}$ dan $V = \begin{bmatrix} 3 & -\infty \\ -\infty & 5 \end{bmatrix}$ sedemikian hingga $C = D \otimes U$ dan $D = C \otimes V$.

Berdasarkan Proposisi 2.4.4, untuk mengetahui apakah dua matriks $A, B \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ berelasi green $\mathcal{L}$ atau $\mathcal{R}$ maka perlu dicari adanya nilai $X, Y \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ sedemikian hingga $A = X \otimes B$ dan $B = Y \otimes A$ dan nilai $U, V \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ sedemikian hingga $A = B \otimes U$ dan $B = A \otimes V$. Pada matriks 2×2 atas aljabar max-plus terdapat matriks identitas I dimana $\forall M \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ maka $M \otimes I = M = I$. Dengan memenfaatkan matriks I dapat dicari nilai dari matriks X, Y, U dan V.

Misal diambil semabarang matriks $A, B \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$. Diasumsikan terdapat $A', B' \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ sedemikian hingga $A \otimes A' = I = A' \otimes A$ dan $B \otimes B' = I = B' \otimes B$. Diperhatikan,

$$\begin{aligned} A &= Y \otimes B \\ A \otimes B' &= Y \otimes B \otimes B' \\ A \otimes B' &= Y \otimes I \\ A \otimes B' &= Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= X \otimes A \\ B \otimes A' &= X \otimes A \otimes A' \\ B \otimes A' &= X \otimes I \\ B \otimes A' &= X \end{aligned}$$

jadi diperoleh $Y = A \otimes B' \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dan $X = B \otimes A' \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$.

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa untuk $A, B, U,$ dan $V \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ jika $A = B \otimes U$ dan $B = A \otimes V$ dan terdapat $A', B' \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ sedemikian hingga $A' \otimes A = I$ dan $B' \otimes B = I$ maka $U = B' \otimes A$ dan $V = A' \otimes B$.

Dalam aljabar linier, sebuah matriks persegi dengan elemen selain elemen diagonal utama bernilai nol disebut sebagai matriks diagonal, sedangkan dalam aljbar max-plus dipunyai matriks diagonal dengan bentuk $D = \begin{bmatrix} x & -\infty \\ -\infty & y \end{bmatrix}$.

Matriks diagonal 2×2 atas aljabar max-plus merupakan salah satu contoh matriks 2×2 atas aljabar max-plus yang dapat ditentukan dengan mudah nilai dari X dan Y yang memenuhi pada Proposisi 2.4.4. Karena pada sembarang D terdapat matriks D' yang memenuhi $D \otimes D' = I$.

Misal diambil matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ sedemikian hingga,

$$
\begin{aligned}
A \otimes D &= I \\
\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x & -\infty \\ -\infty & y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \max(a + x, b + -\infty) & \max(a + -\infty, b + y) \\ \max(c + x, d + -\infty) & \max(c + -\infty, d + y) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} a + x & b + y \\ c + x & d + y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} a+x=0 \quad & b+y=-\infty \\ c+x=-\infty \quad & d+y=0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

diperoleh persamaan yang memenuhi 3.7 adalah

$$\begin{aligned} a=-x \quad & b=-\infty \\ c=-\infty \quad & d=-y \end{aligned}$$

Jadi nilai D' yang memenuhi persamaan $D \otimes D' = I$ adalah $D' = \begin{bmatrix} -x & -\infty \\ -\infty & -y \end{bmatrix}$.

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa keberadaan matriks D' dapat digunakan untuk menentukan nilai dari X atau Y pada Proposisi 2.4.4. Begitu juga dengan nilai dari U atau V pada Proposisi 2.4.4 karena jika diambil sembarang $D = \begin{bmatrix} x & -\infty \\ -\infty & y \end{bmatrix}$, maka

$$\begin{aligned} D' \otimes D &= \begin{bmatrix} -x & -\infty \\ -\infty & -y \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x & -\infty \\ -\infty & y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(0,-\infty) & \max(-\infty,-\infty) \\ \max(-\infty,-\infty) & \max(-\infty,0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\ &= I. \end{aligned}$$

Karena terdapat $D' \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ sedemikian hingga $D' \otimes D = I$ maka nilai U dan V dapat ditentukan dengan cara seperti yang telah dijelaskan sebelumnya.

Selain matriks digaonal 2×2 atas aljabar max-plus, juga terdapat contoh matriks 2×2 atas aljbar max-plus lain yang dapat ditentukan dengan mudah nilai dari X atau Y pada Proposisi 2.4.4 dan nilai dari U atau V pada Proposisi 2.4.4. Matriks tersebut adalah matriks dengan bentuk umum $\begin{bmatrix} -\infty & x \\ y & -\infty \end{bmatrix}$.

Misal diambil sembarang matriks $A = \begin{bmatrix} -\infty & x \\ y & -\infty \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ sehingga $A \otimes B = I$. Diperhatikan,

$$\begin{aligned} A \otimes B &= I \\ \begin{bmatrix} -\infty & x \\ y & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \max(-\infty + a, x + c) & \max(-\infty + b, x + d) \\ \max(y + a, -\infty + c) & \max(y + b, -\infty + d) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \max(-\infty, x + c) & \max(-\infty, x + d) \\ \max(y + a, -\infty) & \max(y + b, -\infty) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x + c & x + d \\ y + a & y + b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

diperoleh,

$$\begin{aligned} x + c = 0 \qquad & x + d = -\infty \\ y + a = -\infty \qquad & y + b = 0 \end{aligned}$$

sehingga,

$$\begin{aligned} c = -x \qquad & d = -\infty \\ a = -\infty \qquad & b = -y \end{aligned}$$

Jadi nilai dari matirks B yang memenuhi $A \otimes B = I$ adalah

$B = \begin{bmatrix} -\infty & -y \\ -x & -\infty \end{bmatrix}$. Kemudian jika B dioperasikan $\otimes$ dengan A maka didapat,

$$\begin{aligned} B \otimes A &= \begin{bmatrix} -\infty & -y \\ -x & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty & x \\ y & -\infty \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(-\infty, 0) & \max(-\infty, -\infty) \\ \max(-\infty, -\infty) & \max(0, -\infty) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\ &= I. \end{aligned}$$

Karena terdapat $B \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ sedemikian hingga $A \otimes B = I = B \otimes A$ maka nilai X, Y, U, dan V juga dapat ditentukan dengan menggunakan cara yang telah dijelaskan sebelumnya.

Telah disebutkan definisi dari relasi green $\mathcal{L}$ dan $\mathcal{R}$ pada matriks 2×2 atas aljabar max-plus. Selanjutnya akan ditunjukkan definsi dari relasi $\mathcal{J}$, $\mathcal{H}$, dan $\mathcal{D}$ pada matriks 2×2 atas aljabar max-plus beserta dengan contohnya.

Dipunyai $A, B \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$, kemudian didefinikan,

$$\begin{aligned} &A\mathcal{J}B \iff M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes A \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max}) = M_2 \otimes B \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max}) \\ &A\mathcal{H}B \iff A\mathcal{L}B \wedge A\mathcal{R}B \\ &A\mathcal{D}B \iff \exists C \in M_2(\mathbb{R}_{\max})(A\mathcal{L}C \wedge C\mathcal{R}B) = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}. \end{aligned}$$

Contoh 3.2.5 Pada contoh 3.1.2 diketahui $U \otimes A \otimes U =$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

selajuntnya diambil $B = \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix}$ kemudian dicari nilai dari $U \otimes B \otimes U$. Diperhatikan berdasarkan Contoh 3.2.2

$$U \otimes B == \left\{ \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

sehingga

$$\begin{aligned} U \otimes B \otimes U = & \\ & \left\{ \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ & \otimes \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \right\} \\ = & \left\{ \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \right. \\ & \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \\ & \left. \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \right\} \\ = & \left\{ \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \right. \\ & \left. \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

karena $U \otimes A \otimes U = U \otimes B \otimes U$ maka $A \mathcal{J} B$.

Contoh 3.2.6 Pada Contoh 3.2.1 diperoleh $A\mathcal{L}B$ dan pada Contoh 3.2.2 juga diperoleh $A\mathcal{R}B$, sehingga karena $A\mathcal{L}B$ dan $A\mathcal{R}B$ maka $A\mathcal{H}B$.

Contoh 3.2.7 Dipunyai matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -\infty \\ -\infty & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -\infty & 2 \\ 1 & -\infty \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & -\infty \\ -\infty & 3 \end{bmatrix}$$

$A\mathcal{L}B$ karena terdapat $X = \begin{bmatrix} -\infty & 2 \\ 2 & -\infty \end{bmatrix}$ dan $Y = \begin{bmatrix} -\infty & -2 \\ -2 & -\infty \end{bmatrix}$ sedemikian hingga $A = X \otimes B$ dan $B = Y \otimes A$. $B\mathcal{R}C$ karena terdapat $U = \begin{bmatrix} -\infty & -3 \\ -2 & -\infty \end{bmatrix}$ dan $V = \begin{bmatrix} -\infty & 2 \\ 3 & -\infty \end{bmatrix}$ sedemikian hingga $B = C \otimes U$ dan $C = B \otimes V$.

Karena $A\mathcal{L}B$ dan $B\mathcal{R}C$ maka berdasarkan Definisi 2.4.1 $A\mathcal{D}C$.

Proposisi 2.4.4 memberikan pertolongan untuk menentukan relasi pada $\mathcal{L}$ dan $\mathcal{R}$. Selanjutnya akan diberikan proposisi yang serupa untuk memudahkan melihat ada atau tidaknya relasi green $\mathcal{J}$ pada $M_2(\mathbb{R}_{\max})$.

Proposisi 3.2.8 *Diberikan $A, B \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$, $A\mathcal{J}B$ jika dan hanya jika terdapat $X, Y, U, V \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ sedemikian hingga $X \otimes A \otimes U = B$ dan $Y \otimes B \otimes V = A$.*

Bukti.($\Rightarrow$) Diketahui $A\mathcal{J}B$. Akan dibuktikan bahwa terdapat $X, Y, U, V \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ sedemikian hingga $X \otimes A \otimes U = B$ dan $Y \otimes B \otimes V = A$.

Misal diambil sembarang $A, B \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$. Jelas bahwa $A \in (M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes A \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max}))$. Selanjutnya karena $A\mathcal{J}B$ berdasarkan Definisi 2.4.1 diperoleh $A \in (M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes A \otimes$

$M_2(\mathbb{R}_{\max})) = (M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes B \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max}))$. Karena $(A \in M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes B \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max}))$ artinya terdapat $Y, V \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ sedemikian hingga $Y \otimes B \otimes V = A$.

Dengan cara analog dapat dibutktikan bahwa terdapat $X, U \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ sedemikian hingga $X \otimes A \otimes U = B$. Jadi terbukti bahwa terdapat $X, Y, U, V \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ sedemikian hingga $X \otimes A \otimes U = B$ dan $Y \otimes B \otimes V = A$.

$(\Leftarrow)$ Diketahui terdapat $X, Y, U, V \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ sedemikian hingga $X \otimes A \otimes U = B$ dan $Y \otimes B \otimes V = A$. Akan dibuktikan bahwa $A \mathcal{J} B$.

Diambil $B = X \otimes A \otimes U$ sehingga $B \in (M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes A \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max}))$. Diperhatikan

$$\begin{aligned} B &= X \otimes A \otimes U \\ &= X \otimes (Y \otimes B \otimes V) \otimes U \\ &= (X \otimes Y) \otimes B \otimes (V \otimes U) \\ &= R \otimes B \otimes T \end{aligned}$$

Karena $B = R \otimes B \otimes T$ artinya $B \in (M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes B \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max}))$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $(M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes A \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max})) \subseteq (M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes B \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max}))$. Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa $(M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes B \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max})) \subseteq (M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes A \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max}))$.

Karena $(M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes A \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max})) \subseteq (M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes B \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max}))$ dan $(M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes B \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max})) \subseteq (M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes A \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max}))$ maka $(M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes A \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max})) = (M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes B \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max}))$. Berdasarkan Definisi 2.4.1 $(M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes A \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max})) = (M_2(\mathbb{R}_{\max}) \otimes B \otimes M_2(\mathbb{R}_{\max})) \iff A \mathcal{J} B$. Jadi terbukti bahwa $A \mathcal{J} b$.

Karena $(\Rightarrow)$ dan $(\Leftarrow)$ terpenuhi maka pernyataan terbukti benar. $\blacksquare$

Proposisi 3.2.9 *(Shabir, 2020) Relasi $\mathcal{L}$ dan $\mathcal{R}$ pada $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ bersifat komutatif.*

Selanjutnya akan diberikan bukti bahwa Proposisi 3.2.9 berlaku pada matriks 2×2 atas alajabar max-plus.

Bukti. Misal diambil $A, B \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$, diasumsikan $(A, B) \in \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$. Sehingga terdapat $C \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ sedemikian hingga $A\mathcal{L}C$ dan $C\mathcal{R}B$. Berdasarkan Proposisi 2.4.4 terdapat $X, Y, U, V \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ sedemikian hingga,

$$A = X \otimes C, C = Y \otimes A \text{ dan } C = B \otimes U, B = C \otimes V.$$

Misal diambil $D = X \otimes C \otimes V \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$, maka

$$A \otimes V = X \otimes C \otimes V = D$$

dan

$$D \otimes U = X \otimes C \otimes V \otimes U = X \otimes B \otimes U = X \otimes C = A.$$

Karena $A = D \otimes U$ dan $D = A \otimes V$ maka berdasarkan Proposisi 2.4.4 $A\mathcal{R}D$. Kemudian diperhatikan juga,

$$X \otimes B = X \otimes C \otimes V = D$$

dan

$$Y \otimes D = Y \otimes X \otimes C \otimes V = Y \otimes A \otimes V = C \otimes V = B.$$

Karena $D = X \otimes B$ dan $B = Y \otimes D$ maka berdasarkan Proposisi 2.4.4 $D\mathcal{L}B$. Berdasarkan Definisi 2.4.1 $A\mathcal{R}D$ dan $D\mathcal{L}B$ maka $R \circ L$. Jadi $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$.

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa $\mathcal{R} \circ \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$. Sehingga dapat disimpulakan bahwa $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$. ■

Contoh 3.2.10 Diberikan $A = \begin{bmatrix} 2 & -\infty \\ -\infty & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -\infty \\ -\infty & 4 \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} -\infty & 2 \\ 3 & -\infty \end{bmatrix}$. Karena terdapat matriks $X = \begin{bmatrix} -\infty & -1 \\ -1 & -\infty \end{bmatrix}$ dan matriks Y $\begin{bmatrix} -\infty & 1 \\ 1 & -\infty \end{bmatrix}$ sedemikian hingga $A = X \otimes C$ dan $C = Y \otimes A$, maka berdasarkan preposisi 2.4.4 $A\mathcal{L}C$. Demikian juga terdapat matriks $U = \begin{bmatrix} -\infty & 1 \\ -1 & -\infty \end{bmatrix}$ dan matriks $V = \begin{bmatrix} -\infty & 1 \\ -1 & -\infty \end{bmatrix}$ sedemikian hingga $C = B \otimes U$ dan $B = C \otimes V$ sehingga berdasarkan 2.4.4 $C\mathcal{R}B$.

Karena $A\mathcal{L}C$ dan $C\mathcal{R}B$, maka berdasarkan Definisi 2.4.1 $\mathcal{L} \circ \mathcal{R}$. Dengan menggunakan preposisi 3.2.9 diperoleh $\mathcal{R} \circ \mathcal{L}$.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan tujuan penulisan skripsi, kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan adalah sebagai berikut:

1. Dapat didefinisikan relasi green $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{J}, \mathcal{H}$, dan $\mathcal{D}$ pada matriks 2×2 atas aljabar max-plus.

2. Nilai $X \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ pada persamaan $B = X \otimes A$ dan $B = A \otimes X$ dimana $X \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dapat dicari dengan menggunakan persamaan $X = B \otimes A'$ dan persamaan $X = A' \otimes B$ secara berturut-turut, dengan nilai $A' \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ memenuhi $A \otimes A' = A' \otimes A = I \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$. Artinya nilai X yang memenuhi persamaan dapat dengan mudah ditentukan jika matriks yang digunakan mempunyai invers.

3. Matriks diagonal dan matriks anti-diagonal merupakan dua tipe matriks dalam matriks 2×2 atas aljabar max-plus yang dapat dengan mudah diselidiki apakah berelasi green atau tidak kerena keduanya memiliki invers.

4. Invers dari matriks $D = \begin{bmatrix} a & -\infty \\ -\infty & b \end{bmatrix}$ adalah matriks $D' = \begin{bmatrix} -a & -\infty \\ -\infty & -b \end{bmatrix}$.

5. Invers matriks untuk matriks anti diagonal $A = \begin{bmatrix} -\infty & x \\ y & -\infty \end{bmatrix}$ adalah matriks $A' = \begin{bmatrix} -\infty & -y \\ -x & -\infty \end{bmatrix}$.

6. Relasi $\mathcal{L}$ dan $\mathcal{R}$ pada $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ bersifat komutatif.

DAFTAR PUSTAKA

Adhila, M.N.(2009) Relasi Green pada T-Semigrup dan T-Semigrup Reduktif.Skripsi.Malang:Progam Sarjana.

Ahangar, S.A.(2020) Theory of Semigroups. Central University of Khasmir.

Cain, Alan J.(2020) Nine Chapters on the Semigroup Art.Lecture notes for a tour through semigroups.

Hollings,C. and Kambites, Mark. (2010) Tropical Matrix and Green $\mathcal{D}$ Relation,86, pp.520-538.https://doi.org/10.1112/jlms/jds015

Izhakian, Z., Margolis, S.W. (2010) Semigroup identities in the monoid of two-by-two tropical matrices. Semigroup Forum 80, 191–218. https://doi.org/10.1007/s00233-009-9203-8

Johnson, M. and Kambites, M. (2013) Green's $\mathcal{J}$-order and the rank of tropical matrices, pp. 280-292.https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2012.06.003

Kelompok Bidang Keahlian Aljabar FST. (2020) *Pengantar struktur aljbar 1*. UIN Walisongo Semarang.

Kismanti, S. T., & Indriyani, D. (2021) "Penerapan Aljabar pada sistem produksi," Jurnal Borneo SAINTEK, 37-42.

Kramar Fijavž, M., Peperko, A., Sikolya, E. (2017) Semigroups of max-plus linear operators, Semigroup Forum.

Mufid, Muhammad S., and Subiono Subiono.(2014) "Eigenvalues and Eigenvectors of Latin Squares in Max-plus Algebra," Journal of the Indonesian Mathematical Society, vol. 20, no. 1, pp. 37-45.

Mustofani. dkk.(2018) "Model antrian pelayanan farmasi menggunakan petrinet dan aljabar Max-Plus." https://journal.unipdu.ac.id:8080/index.php/jmpm

Olsder, G. J., and C. Roos. (1998) Cramer and Cayley-Hamilton in the max-algebra,Linear Algebra and its Applications,101, 87-108.

Rudhito, M.A.(2016) *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya*. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Wibowo, A., Wijayanti, K., Veronica, R.B. (2018) "Penerapan aljabar max-plus pada pengaturan sistem antrian *Traffic Light*," Unnes Journal of Mathematics(2018),7(2). https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm