PELABELAN SISI AJAIB SUPER PADA GRAF BINTANG

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika

WALISONGO

Oleh : **LINDA EKA YULIANA**
NIM : 2008046005

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2023

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	Linda Eka Yuliana
NIM	:	2008046005
Jurusan/Program Studi	:	Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

PELABELAN SISI AJAIB SUPER PADA GRAF BINTANG

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 28 Desember 2023

Pembuat pernyataan,

Linda Eka Yuliana

NIM : 2008046005

KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul	:	**PELABELAN SISI AJAIB SUPER PADA GRAF BINTANG**
Penulis	:	Linda Eka Yuliana
NIM	:	2008046005
Jurusan	:	Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 28 Desember 2023

DEWAN PENGUJI

Penguji I,	Penguji II,
Dinni Rahma Oktaviani, M.Si.	**Any Muanalifah, M.Si., P.hD**
NIP : 19941009 201903 2 017	NIP : 19820113 201101 2 009
Penguji III,	Penguji IV,
Eva Khoirun Nisa, M.Si.	**Dr. Budi Cahyono, M.Si.**
NIP : 19870102 201903 2 010	NIP : 19801215 200912 1 003
Pembimbing I,	Pembimbing II,
Prihadi Kurniawan, M.Sc.	**Dinni Rahma Oktaviani, M.Si.**
NIP : 19901226 201903 1 012	NIP : 19941009 201903 2 017

NOTA DINAS

Semarang, 22 Desember 2023

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	PELABELAN SISI AJAIB SUPER PADA GRAF BINTANG
Nama	:	Linda Eka Yuliana
NIM	:	2008046005
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,

Prihadi Kurniawan, M.Sc.
NIP : 19901226 201903 1 012

NOTA DINAS

Semarang, 22 Desember 2023

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	PELABELAN SISI AJAIB SUPER PADA GRAF BINTANG
Nama	:	Linda Eka Yuliana
NIM	:	2008046005
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing II,

Dinni Rahma Oktaviani, M.Si.
NIP : 19941009 201903 2 017

ABSTRAK

Pelabelan pada graf merupakan suatu pemetaan fungsi yang memasangkan titik atau sisi pada graf dengan bilangan bulat. Pelabelan sisi ajaib super merupakan suatu pelabelan total sisi ajaib yang memetakan himpunan titik suatu graf ke suatu himpunan $\{1, 2, 3, ..., |V|\}$, dan diperoleh suatu nilai k dari pemetaan $f(x) + f(x, y) + f(y) = k$. Pada penelitian ini dibahas pelabelan sisi ajaib super pada graf bintang $K_{1,n}$, pelabelan sisi ajaib super pada graf bintang dengan operasi join pada graf $K_{1,1} + N_m$ dan pelabelan sisi ajaib super pada graf bintang dengan operasi join pada graf $K_{1,n} + N_1$.

Berdasarkan penelitian diperoleh suatu nilai k yang disebut konstanta ajaib dari pelabelan sisi ajaib super untuk ketiga jenis graf yang diteliti, diantaranya

1. Untuk graf bintang $K_{1,n}$ diperoleh nilai $k = 2n + 4$
2. Untuk graf bintang dengan operasi join $K_{1,1} + N_m$ nilai $k = 3m + 6$
3. Untuk graf bintang $K_{1,n}$ dengan operasi join N_1 diperoleh nilai $k = 3n + 6$

Kata kunci : Pelabelan Sisi Ajaib Super, Graf Bintang $K_{1,n}$, Graf $K_{1,1} + N_m$, dan Graf $K_{1,n} + N_1$

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillahirobbil'alamin... segala puji dan syukur bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan nikmat-Nya kepada semua makhluknya-Nya. Shalawat serta salam senantiasa terlantunkan kepada Nabi Muhammad SAW, para sahabat, keluarga serta muslimin dan muslimat.

Skripsi yang berjudul **"PELABELAN SISI AJAIB SUPER PADA GRAF BINTANG"** disusun guna memenuhi persyaratan untuk memperoleh gelar sarjana di Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang. Berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulis mengucapkan banyak terimakasih serta doa, semoga Allah membalas semua perbuatan baik, kepada:

1. Dr. H. Ismail, M.Ag., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo.

2. Emy Siswanah, M.Sc., selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo.

3. Prihadi Kurniawan, M.Sc., selaku pembimbing penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, motivasi, saran, dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan ini dengan baik, penulis menyampaikan banyak terimakasih.

4. Dinni Rahma Oktaviani, M.Si., selaku pembimbing penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan,

arahan, motivasi, saran, dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan ini dengan baik, penulis menyampaikan banyak terimakasih.

5. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo, yang telah mencurahkan ilmunya kepada penulis.
6. Kedua orang tua penulis Bapak Sugiman serta Ibu Partinah yang selalu memberikan doa, semangat, motivasi, dan dukungan sehingga penulis semangat untuk mengerjakan skripsi ini.
7. Adik-adik penulis Meisya Dwi Anggraeny dan Muh.Alvin Shaquille Ramadhan yang telah memberikan doa, dukungan, dan motivasi kepada penulis.
8. Sahabat-sahabat penulis yang telah memberikan doa, dukungan, dan semangat kepada penulis.

Atas segala kekurangan dan kelemahan dalam skripsi ini penulis memohon maaf yang sebesar-besarnya. Kritik dan saran bagi pembaca demi kebaikan karya ini merupakan harapan bagi penulis. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua orang.

Wassalamualikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Semarang, 28 Desember 2023

Penulis,

Linda Eka Yuliana

NIM : 2008046005

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan ilmu yang sangat penting, bahkan menurut Agusdianata dan Asmahasanah (2020) matematika merupakan semua aktivitas manusia dalam kehidupan sehari-hari. Menurut Abdurahman (2003) ada beberapa alasan mengapa manusia diharuskan belajar matematika, diantaranya untuk sarana berpikir logis dan jelas, untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari dan sebagai sarana mengembangkan kreativitas. Untuk itu kemampuan untuk memanfaatkan ilmu matematika menjadi hal mendasar bagi umat manusia, tanpa memanfaatkan matematika manusia akan mengalami kesulitan. Didalam matematika dipelajari banyak cabang ilmu, diantara mengenai keuangan, stastitika, komputasi, terapan, analisis, dan aljabar.

Salah satu cabang matematika yakni aljabar membahas mengenai teori graf yang pertama kali dipopulerkan oleh Leonhard Euler. Masalah yang mendasari munculnya graf adalah Jembatan Konigsberg, Euler ingin menyelesaikan kasus ketika tujuh jembatan yang menghubungkan daratan diantara sungai. Ia ingin melewati tujuh jembatan tepat satu kali dan kembali ketitik asal. Kemudian Euler memodelkan masalah tersebut dengan menggunakan graf. Secara sederhana, graf merupakan dua atau lebih titik yang dihubungkan oleh sisi-sisi. Salah satu manfaat penerapan graf telah diteliti oleh Nasir dan Setyawan (2022) mengenai penjadwalan mata kuliah agar tidak bentrok antar mata kuliah.

Graf terus berkembang, sehingga memunculkan sebuah istilah pelabelan, dimana pelabelan merupakan materi pada graf. Pelabelan merupakan pemetaan bijektif yang memetakan himpunan titik dan / atau himpunan sisi ke bilangan asli. Saat ini telah dikenal beberapa jenis pelabelan dalam graf, diantaranya pelabelan kordial, pelabelan *gracefull*, dan pelabelan ajaib. Pelabelan *gracefull* dan pelabelan kordial untuk graf bintang telah diteliti oleh Ezhilarasi dan Kavitha (2021). Mengenai pelabelan ajaib dibagi menjadi beberapa kelompok yaitu pelabelan titik sisi ajaib, pelabelan total sisi ajaib, pelabelan total titik ajaib, pelabelan sisi titik ajaib (Wallis, 2001), dan pelabelan sisi ajaib super (Abdussakir, 2005). Manfaat pelabelan graf banyak digunakan untuk sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data komputer, dan desain pada komponen elektronik (Rosyid, 2009).

Pembahasan topik pelabelan total titik ajaib telah dilakukan oleh Irawati dan Heri (2010) dalam artikel tersebut dijelaskan mengenai algoritma-algoritma yang digunakan untuk melakukan pelabelan pada graf lengkap K_n dengan n ganjil dan juga menentukan sebuah nilai k yaitu nilai konstanta ajaib. Untuk penelitian pelabelan total sisi ajaib telah dilakukan oleh Gultiom dan Mulyono (2019) dipaparkan beberapa teorema pembuktian mengenai cara menentukan nilai konstanta ajaib (k) pada graf lingkaran (C_n).

Pelabelan sisi ajaib telah dilakukan oleh Sugeng dan Miller (2008) yang membahas mengenai pelabelan titik dan sisi pada graf bintang namun hanya pada graf bintang sederhana dan belum membahas mengenai operasi join pada graf. Jenis pelabelan yang digunakan oleh Sugeng dan Miller adalah pelabelan sisi ajaib berurutan dan bukan pelabelan sisi ajaib super. Chusna (2011) telah membahas mengenai pelabelan super sisi ajaib pada graf bintang yang lebih kompleks dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait, namun pada penelitian Chusna belum membahas mengenai operasi join pada graf bintang.

Maka pada kajian ini akan dibahas secara lengkap bagaimana pelabelan sisi ajaib super pada graf bintang dengan menggunakan operasi join pada graf. Berdasarkan latar belakang diatas, maka penulis memilih judul "Pelabelan Sisi Ajaib Super pada Graf Bintang".

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah yang akan dibahas pada skripsi ini adalah:

1. Apakah graf bintang $K_{1,n}$ dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super?.
2. Apakah graf bintang dengan operasi join $K_{1,1} + N_m$ dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super?.
3. Apakah graf bintang dengan operasi join $K_{1,n} + N_1$ dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super?.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka tujuan skripsi ini adalah:

1. Untuk memeriksa apakah graf bintang $K_{1,n}$ dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super.
2. Untuk memeriksa apakah graf bintang dengan operasi join $K_{1,1} + N_m$ dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super.
3. Untuk memeriksa apakah graf bintang dengan operasi join $K_{1,n} + N_1$ dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super.

1.4 Manfaat Penelitian

1. Manfaat bagi penulis

   Bagi penulis penelitian ini bertujuan untuk menambah wawasan dan pengetahuan mengenai teori graf.

2. Manfaat bagi pembaca

   Bagi pembaca penelitian ini bertujuan untuk menambah wawasan bagi pembaca dan juga untuk dijadikan rujukan untuk penelitian berikutnya.

3. Manfaat bagi lembaga

   Sebagai bahan rujukan tentang teori graf serta bahan rujukan untuk materi kuliah.

1.5 Metode Penelitian

Metode Penelitian yang digunakan oleh penulis dalam hal ini merupakan metode studi literatur . Metode studi literatur merupakan serangkaian kegiatan yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca dan mencatat, serta mengolah bahan penelitian (Zed, 2008). Pengumpulan data dilakukan dengan mencari sumber dan mengonstruksi dari berbagai sumber seperti buku, jurnal dan penelitian-penelitian yang telah dilakukan sebelumnya. Langkah-langkah yang dilakukan penulis dalam penelitian ini adalah:

1. Mengkaji definisi graf, jenis-jenis graf, operasi graf, dan pelabelan graf.

2. Memetakan himpunan titik dan sisi pada graf bintang $K_{1,n}$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, |V| + |E|\}$, dimana $|V|$ merupakan banyaknya titik dan $|E|$ banyaknya sisi pada graf bintang $K_{1,n}$.

3. Menentukan bilangan ajaib k pada graf bintang $K_{1,n}$ dengan menggunakan rumus untuk pelabelan total sisi ajaib, dimana f merupakan sebuah fungsi bijektif

$$f(x) + f(x, y) + f(y) = k$$

4. Memetakan pelabelan total sisi ajaib dari himpunan titik pada suatu graf $K_{1,n}$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, |V|\}$, karena suatu pelabelan sisi ajaib super merupakan bentuk khusus dari pelabelan total sisi ajaib.

5. Memetakan himpunan titik dan sisi pada graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,1} + N_m$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, |V| + |E|\}$, dimana $|V|$ merupakan banyaknya titik dan $|E|$ banyaknya sisi pada graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,1} + N_m$.

6. Menentukan bilangan ajaib k pada graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,1} + N_m$ dengan

menggunakan rumus untuk pelabelan total sisi ajaib, dimana f merupakan sebuah fungsi bijektif

$$f(x) + f(x, y) + f(y) = k$$

7. Memetakan pelabelan total sisi ajaib dari himpunan titik pada suatu graf dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,1} + N_m$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, |V|\}$, karena suatu pelabelan sisi ajaib super merupakan bentuk khusus dari pelabelan total sisi ajaib.

8. Memetakan himpunan titik dan sisi pada graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,n} + N_1$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, |V| + |E|\}$, dimana $|V|$ merupakan banyaknya titik dan $|E|$ banyaknya sisi pada graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,n} + N_1$.

9. Menentukan bilangan ajaib k pada graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,n} + N_1$ dengan menggunakan rumus untuk pelabelan total sisi ajaib, dimana f merupakan sebuah fungsi bijektif

$$f(x) + f(x, y) + f(y) = k$$

10. Memetakan pelabelan total sisi ajaib dari himpunan titik pada suatu graf dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,n} + N_1$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, |V|\}$, karena suatu pelabelan sisi ajaib super merupakan bentuk khusus dari pelabelan total sisi ajaib.

BAB 2

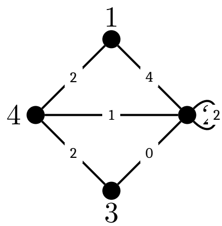
LANDASAN PUSTAKA

2.1 Graf

Definisi 1 *(Wallis, 2001) Graf G didefinisikan sebagai sebuah himpunan berhingga $V(G)$ dari objek-objek yang disebut titik dan sebuah himpunan $E(G)$ dari pasangan-pasangan titik yang tidak berurutan; $E(G)$ disebut sisi.*

Contoh 1 *Graf G yang dapat dinyatakan dengan $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $E(G) = \{0, 1, 2, 2, 2, 4\}$.*

Dimana sisi-sisinya dapat dituliskan sebagai 2=$(1, 4)$, 2=$(2, 2)$, 2=$(4, 3)$, 1=$(2, 4)$, 0=$(3, 2)$, dan 4=$(1, 2)$.



Gambar 2.1. Graf G

2.2 Operasi Join pada Graf

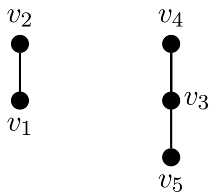
Diberikan definisi 2 mengenai operasi join pada dua buah graf G_1 dan G_2 :

Definisi 2 *(Harary, 1969) Dipunyai dua buah graf yaitu graf* G_1 *dan graf* G_2 *dengan himpunan titik kedua graf tersebut saling asing. Join dari graf* G_1 *dan graf* G_2 *yang disimbolkan* $G_1 + G_2$ *yang didesinisikan sebagai :*

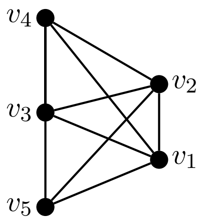
$$V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$$

$$E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(g_1, g_2)|g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$$

Contoh 2 *Suatu graf* G_1 *memiliki himpunan titik* $\{v_1, v_2\}$ *serta himpunan sisi* $\{(v_1, v_2)\}$. *Graf* G_2 *memiliki himpunan titik* $\{v_3, v_4, v_5\}$ *serta himpunan sisi* $\{(v_3, v_4), (v_3, v_5)\}$.



Gambar 2.2. Graf G_1 dan G_2



Gambar 2.3. $G_1 + G_2$

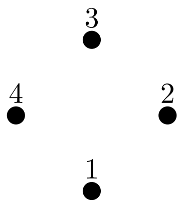
Gambar 2.3 merepresentasikan graf $G_1 + G_2$ atau dengan kata lain graf G_1 dioperasikan join dengan graf G_2.

2.3 Jenis-Jenis Graf(Wilson dan Watkins,1990)

Penelitian ini membahas jenis-jenis graf diantaranya graf bintang dan graf kosong.

1. Graf kosong

   Definisi 3 *Graf kosong merupakan graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong, yang dinotasikan dengan N_m dengan titik sebanyak m buah.*



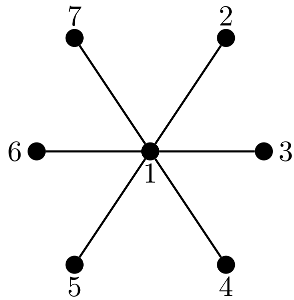
Gambar 2.4. Contoh graf kosong N_4

2. Graf Bintang

   Sebelum membahas graf bintang, terlebih dahulu mengenal istilah graf bipartit karena definisi graf bipartit digunakan untuk mendefinisikan graf bintang $K_{1,n}$. Graf bipartit sederhana adalah himpunan titik-titik dalam suatu graf G yang dapat dibagi menjadi 2 himpunan yang saling asing, misalkan $V_1(G)$ dan $V_2(G)$ sehingga setiap sisi $e \in E(G)$ menghubungkan suatu titik $V_1(G)$ dengan suatu titik $V_2(G)$ dan tidak ada dua titik $V_1(G)$ dan $V_2(G)$ yang bertetangga. Misalkan G merupakan graf bipartit sederhana dengan $V_1(G)$ dan $V_2(G)$, sehingga disebut graf bipartit lengkap apabila setiap titik di $V_1(G)$ bertetangga dengan $V_2(G)$.

Definisi 4 *Graf bintang merupakan graf bipartit lengkap yang terbentuk dari* $K_{1,n}$.

Dengan simbol penulisan $K_{1,n}$, dengan n merupakan bilangan asli, dengan banyaknya titik $|V| = 1 + n$ dan banyaknya sisi $|E| = n$.



Gambar 2.5. Contoh graf bintang $K_{1,6}$

2.4 Fungsi

Definisi 5 *(Grimaldi, 1999) Misalkan dua buah himpunan tak kosong yaitu* X *dan* Y. *Suatu fungsi* f *dilambangkan dengan* $f : X \to Y$ *merupakan relasi dari* X *ke* Y *sehingga setiap elemen dari himpunan* X *memetakan ke satu elemen pada himpunan* Y.

Pada umumnya suatu fungsi f disebut memetakan X ke Y, dengan X disebut sebagai domain dan Y sebagai kodomain.

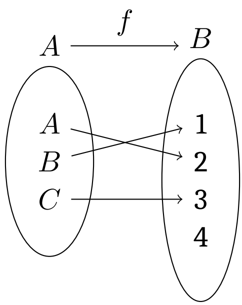
Fungsi dapat dikelompokan menjadi tiga jenis, yaitu fungsi injektif(fungsi satu-satu), fungsi surjektif (fungsi onto) dan fungsi bijektif atau fungsi yang memenuhi injektif serta surjektif sebagai berikut:

1. Fungsi Injektif

Definisi 6 *(Baugh,2009) Suatu fungsi disebut fungsi injektif atau fungsi satu-satu jika sebuah fungsi f dari X ke Y dimana untuk setiap $y \in Y$, terdapat paling banyak satu $x \in X$ dengan $f(x)$=y. Secara simbolis*

$$(\forall x_1)(\forall x_2), x_1, x_2 \in X((f(x_1) = f(x_2)) \rightarrow (x_1 = x_2))$$

Contoh 3 *Suatu fungsi f=$\{(B,1),(C,3),(A,2)\}$, dimana A=$\{A,B,C\}$ dan B=$\{1,2,3\}$ merupakan fungsi satu-satu.*



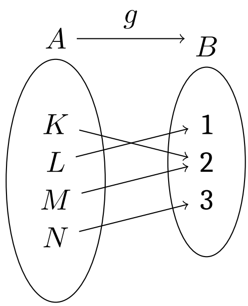
Gambar 2.6. Contoh fungsi f injektif

2. Fungsi Surjektif

Definisi 7 *(Baugh,2009) Suatu fungsi f dikatakan fungsi surjektif dari Y apabila fungsi dari X ke Y dan range dari f adalah Y. Atau untuk setiap $y \in Y$, terdapat $x \in X$ sehingga $f(x)$=y. Secara simbolis*

$$(\forall y \in Y), (\exists x \in X)(f(x) = y)$$

Contoh 4 *Fungsi* g=$\{(K, 2), (L, 1), (M, 2), (N, 3)\}$, *dengan* A=$\{K, L, M, N\}$ *dan* B=$\{1, 2, 3\}$, *merupakan fungsi surjektif.*



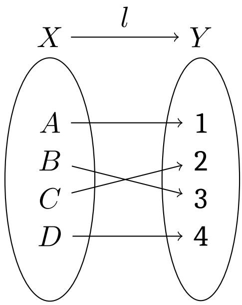
Gambar 2.7. Contoh fungsi g surjektif

3. Fungsi Bijektif

Definisi 8 *(Baugh,2009) Suatu fungsi* f *yang merupakan fungsi injektif dan fungsi surjektif disebut fungsi bijektif.*

Contoh 5 *Fungsi* l=$\{(A, 1), (C, 2), (B, 3), (D, 4)\}$, *dimana* X=$\{A, B, C, D\}$ *dan* Y=$\{1, 2, 3\}$ *merupakan fungsi bijektif.*

Fungsi l merupakan contoh fungsi bijektif karena fungsi l merupakan fungsi injektif dan surjektif.



Gambar 2.8. Contoh fungsi l bijektif

2.5 Pelabelan pada Graf

Definisi 9 *(Wallis,2001) Pelabelan pada graf merupakan suatu fungsi atau pemetaan yang memasangkan titik atau sisi pada graf dengan bilangan bulat (biasanya bilangan bulat positif).*

Pelabelan pada graf dibedakan menjadi tiga, yakni pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan titik merupakan suatu fungsi yang memasangkan titik atau sisi pada himpunan titik dalam suatu bilangan bulat positif. Pelabelan sisi merupakan suatu fungsi yang memasangakan titik atau sisi pada himpunan sisi dalam suatu bilangan bulat positif. Sedangkan untuk pelabelan total merupakan suatu fungsi yang memasangkan titik atau sisi pada himpunan titik dan himpunan sisi dalam suatu bilangan bulat positif.

2.5.1 Pelabelan Ajaib

Definisi 10 *(Wallis,2001) Dipunyai suatu graf G yang mempunyai himpunan titik V dan himpunan sisi E dengan sisi sebanyak $|E|$*

dan titik $|V|$. Pelabelan ajaib pada graf G merupakan pemetaan bijektif pada suatu fungsi f dari E ke himpunan bilangan bulat positif sehinggan untuk setiap titik $v \in V$ penjumlahan semua sisi $e \in E$ terhadap titik v sama.

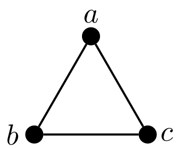
Pelabelan ajaib dibagi menjadi 4 jenis, yaitu pelabelan titik sisi ajaib, pelabelan total titik ajaib, pelabelan sisi titik ajaib, dan pelabelan total sisi ajaib. Pada penelitian ini membahas mengenai pelabelan total sisi ajaib.

2.5.1.1 Pelabelan Total Sisi Ajaib

Definisi 11 *(Wallis,2001) Pelabelan Total Sisi Ajaib pada suatu graf G merupakan pemetaan dari $V(G) \cup E(G)$ pada himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \ldots, |V|+|E|\}$ sehingga untuk sebarang sisi (x, y) di graf G berlaku*

$$f(x) + f(x, y) + f(y) = k$$

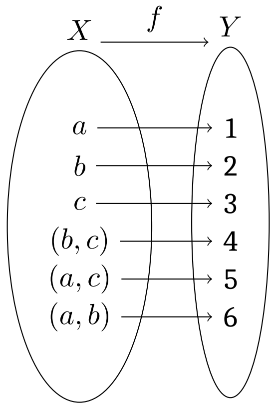
dengan k merupakan konstanta, k disebut bilangan ajaib pada G dan G disebut graf total sisi ajaib.



Gambar 2.9. Graf G

Contoh 6 *Dipunyai graf G dengan $V(G)$=$\{a, b, c\}$ dan $E(G)$=$\{(a, b), (b, c), (a, c)\}$.*

Graf G memiliki banyak titik $|V|$=3 dan banyak sisi $|E|$=3. Apabila dibuat sebuah fungsi f dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



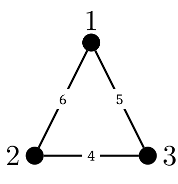
Gambar 2.10. Fungsi f dari $V(G) \cup E(G)$

Untuk mencari suatu nilai k dengan rumus $f(x) + f(x, y) + f(y) = k$ didapatkan

$f(a) + f(a, b) + f(b)$=$1 + 6 + 2$=9

$f(a) + f(a, c) + f(c)$=$1 + 5 + 3$=9

$f(a) + f(b, c) + f(c)$=$2 + 4 + 3$=9



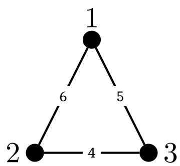
Gambar 2.11. Contoh pelabelan total sisi ajaib

Jadi, graf pada gambar 2.11 merupakan pelabelan total sisi ajaib pada graf G dengan k=9.

2.5.1.2 Pelabelan Sisi Ajaib Super

Definisi 12 *(Abdussakir, 2005) Suatu pelabelan total sisi ajaib yang memetakan himpunan titik suatu graf ke suatu himpunan* $\{1, 2, 3, \ldots, |V|\}$ *disebut pelabelan sisi ajaib super.*

Dengan kata lain, pelabelan sisi ajaib super merupakan bentuk khusus dari pelabelan total sisi ajaib. Setiap pelabelan sisi ajaib super pasti pelabelan total sisi ajaib, namun tidak sebaliknya. Graf dengan pelabelan sisi ajaib super disebut graf sisi ajaib super.



Gambar 2.12. Contoh pelabelan sisi ajaib super

Pelabelan pada graf gambar contoh pelabelan super sisi ajaib merupakan contoh pelabelan total super sisi ajaib karena himpunan titik dipetakan ke himpuanan $\{1, 2, 3\}$.

BAB 3

PELABELAN SISI AJAIB SUPER PADA GRAF BINTANG

Pada bab ini akan dibahas mengenai apakah dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super pada graf bintang $K_{1,n}$, $K_{1,1} + N_m$ dan $K_{1,n} + N_1$.

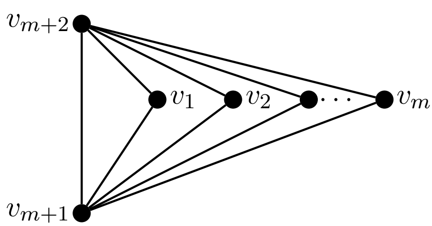
3.1 Graf $K_{1,1} + N_m$

Graf $K_{1,1}$ merupakan graf bintang dengan banyaknya $n = 1$ serta graf N_m merupakan suatu graf kosong dengan m titik.

Definisi 13 *Graf $K_{1,1} + N_m$ merupakan dua buah graf yang menggunakan operasi pada graf yaitu operasi join yang didefinisikan*

$$V(K_{1,1} + N_m) = V(K_{1,1}) \cup V(N_m)$$

$$E(K_{1,1} + N_m) = E(K_{1,1}) \cup E(N_m) \cup \{(k_{1,1}, n_m)$$
$$|k_{1,1} \in K_{1,1}, n_m \in N_m, \}$$



Gambar 3.1. Graf $K_{1,1} + N_m$

3.2 Graf $K_{1,n} + N_1$

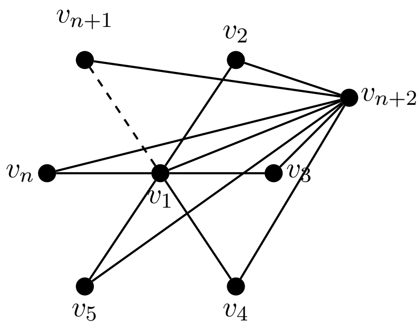
Graf $K_{1,n}$ merupakan graf bintang dengan banyaknya titik $= n$ serta graf N_1 merupakan suatu graf kosong dengan 1 titik.

Definisi 14 *Graf* $K_{1,n} + N_1$ *merupakan dua buah graf yang menggunakan operasi pada graf yaitu operasi join yang didefinisikan*

$$V(K_{1,n} + N_1) = V(K_{1,n}) \cup V(N_1)$$

$$E(K_{1,n} + N_1) = E(K_{1,n}) \cup E(N_1) \cup \{(k_{1,n}, n_1)$$

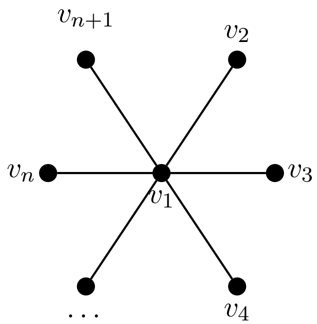
$$|k_{1,n} \in K_{1,n}, n_1 \in N_1\}$$



Gambar 3.2. Graf $K_{1,n} + N_1$

3.3 Pelabelan Sisi Ajaib Super pada Graf Bintang $K_{1,n}$

Graf bintang $K_{1,n}$ memiliki banyak titik=$|V(K_{1,n})|$ dan banyaknya sisi=$|E(K_{1,n})|$ dengan himpunan titik=$\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ dan himpuanan sisi =$\{(v_1, v_2), \ldots, (v_1, v_{n+1})\}$.



Gambar 3.3. Graf $K_{1,n}$

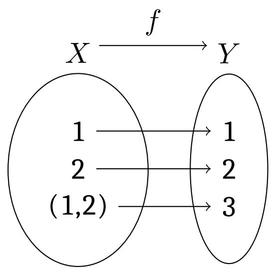
Pelabelan sisi ajaib super pada graf bintang $K_{1,n}$ memiliki himpunan titik $\{1, \ldots, |V(K_{1,n})|\}$. Langkah pertama yaitu menentukan apakah untuk graf bintang $K_{1,n}$ dapat dilakukan pelabelan total sisi ajaib, sehingga dilakukan pemetaan himpunan $V(K_{1,n}) \cup E(K_{1,n})$ ke himpunan $\{1, 2, \ldots, |V(K_{1,n})| + |E(K_{1,n})|\}$.

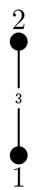
Langkah yang kedua yaitu menentukan nilai konstanta ajaib dengan rumus $f(x) + f(x, y) + f(y) = k$.

Langkah ketiga menentukan apakah graf bintang $K_{1,n}$ apakah dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super, jika suatu graf bintang $K_{1,n}$ sudah memetakan himpunan titik ke himpunan $\{1, 2, \ldots, |V(K_{1,n})|\}$ maka dapat disimpulkan bahwa graf bintang $K_{1,n}$ dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super. Untuk graf bintang $K_{1,n}$ dengan n merupakan bilangan asli, maka:

1. Untuk n=1

   Graf bintang untuk n=1 dapat dilakukan pelabelan total sisi ajaib yang memetakan himpunan $V(K_{1,1}) \cup E(K_{1,1})$ ke himpunan $\{1, 2, 3\}$, dengan nilai k=6. Sebagai ilustrasi





Gambar 3.4. Graf $K_{1,1}$

Graf bintang $K_{1,1}$ juga dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super karena memetakan titik ke himpunan $\{1, 2\}$.

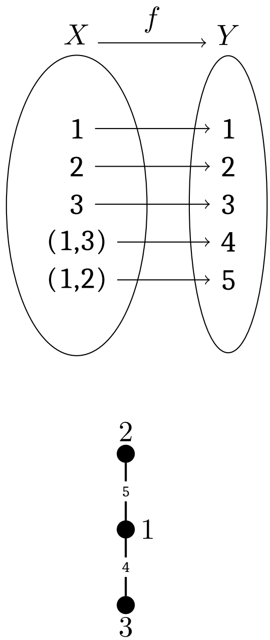
2. Untuk n=2

Graf bintang untuk n=2 dapat dilakukan pelabelan total sisi ajaib yang memetakan himpunan $V(K_{1,2}) \cup E(K_{1,2})$ ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5\}$,

dengan nilai k diperoleh dari

$1 + 4 + 3 = 8$

$1 + 5 + 2 = 8.$

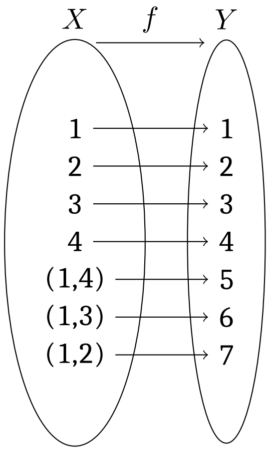


Gambar 3.5. Graf $K_{1,2}$

Secara lebih lanjut gambar graf bintang $K_{1,2}$ juga dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super karena memetakan himpunan titik ke himpunan $\{1, 2, |V|\}$ atau $\{1, 2, 3\}$.

3. Untuk n=3

   Graf bintang $K_{1,3}$ dapat dilakukan pemetaan himpunan $V(K_{1,3}) \cup E(K_{1,3})$ ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dengan nilai k=10.

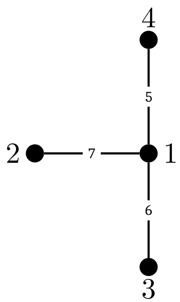


Nilai k=10 untuk graf $K_{1,3}$ yang diperoleh dari pelabelan total sisi ajaib untuk mencari suatu nilai k dengan rumus $f(x) + f(x, y) + f(y) = k$ sehingga untuk graf bintang $K_{1,3}$ diperoleh:

$1 + 5 + 4 = 10$

$1 + 6 + 3 = 10$

$1 + 7 + 2 = 10.$

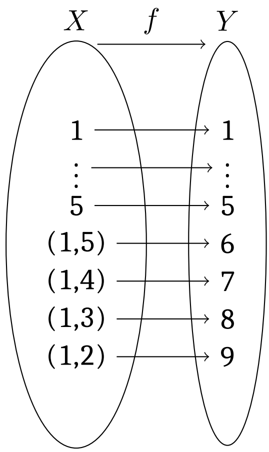


Gambar 3.6. Graf $K_{1,3}$

Graf bintang $K_{1,3}$ sudah memetakan himpunan titik ke himpunan $\{1, 2, 3, |V|\}$ atau $\{1, 2, 3, 4\}$ maka dapat disimpulkan bahwa graf bintang $K_{1,3}$ dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super.

4. Untuk n=4

   Graf $K_{1,4}$ dapat dilakukan pemetaan himpunan $V(K_{1,4}) \cup E(K_{1,4})$ ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, dengan nilai k diperoleh dari



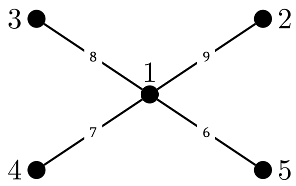
   $1 + 6 + 5 = 12$

   $1 + 7 + 4 = 12$

   $1 + 8 + 3 = 12$

   $1 + 9 + 2 = 12.$

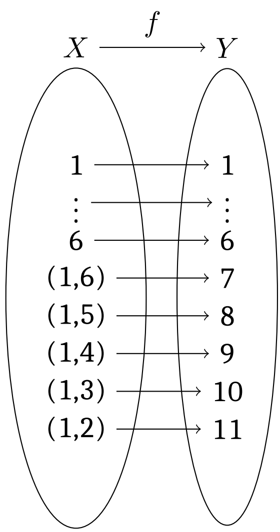
   Graf bintang $K_{1,4}$ sudah memetakan himpunan titik ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ maka dapat disimpulkan bahwa graf bintang $K_{1,4}$ dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super.



Gambar 3.7. Graf $K_{1,4}$

5. Untuk n=5

   Graf bintang $K_{1,5}$ dapat dilakukan pemetaan bijektif himpunan $V(K_{1,5}) \cup E(K_{1,5})$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, 11\}$. Untuk bilangan kostanta ajaib dari graf bintang diperoleh dengan menggunakan rumus $f(x) + f(x,y) + f(y) = k$, diperoleh



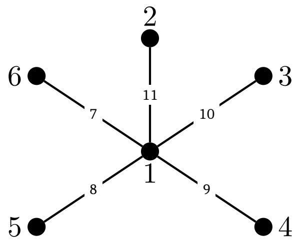
$1 + 7 + 6 = 14$

$1 + 8 + 5 = 14$

$1 + 9 + 4 = 14$

$1 + 10 + 3 = 14$

$1 + 11 + 2 = 14.$

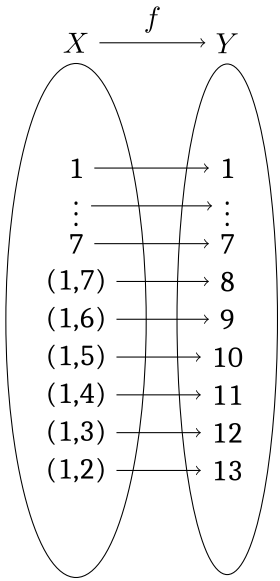


Gambar 3.8. Graf $K_{1,5}$

Graf bintang $K_{1,5}$ sudah memetakan himpunan titik ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

6. Untuk n=6

   Graf bintang $K_{1,6}$ dengan pemetaan bijektif himpunan $V(K_{1,6}) \cup E(K_{1,6})$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$, dengan nilai k=16 diperoleh dari:



$1 + 8 + 7 = 16$

$1 + 9 + 6 = 16$

$1 + 10 + 5 = 16$

$1 + 11 + 4 = 16$

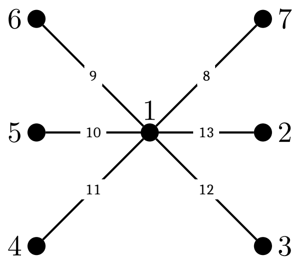
$1 + 12 + 3 = 16$

$1 + 13 + 2 = 16.$

Pelabelan sisi ajaib super juga berlaku pada graf bintang $K_{1,6}$ karena sudah memetakan himpunan titik ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Sehingga graf bintang $K_{1,6}$ dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super.

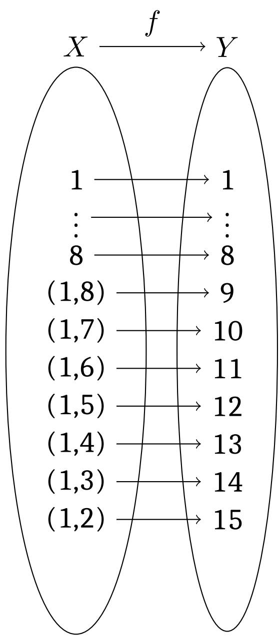
7. n=7

Graf bintang $K_{1,7}$ dengan pemetaan bijektif himpunan $V(K_{1,7}) \cup E(K_{1,7})$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ dengan



Gambar 3.9. Graf $K_{1,6}$

$|V(K_{1,7})|$=8 dan $|E(K_{1,7})|$=7. Selanjutnya menentukan nilai konstanta ajaib dengan rumus $f(x) + f(x,y) + f(y) = k$, diperoleh



$1 + 9 + 8 = 18$

$1 + 10 + 7 = 18$

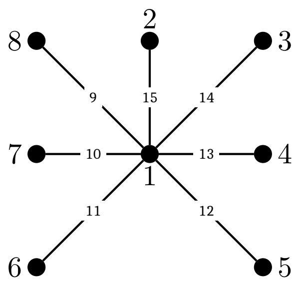
$1 + 11 + 6 = 18$

$1 + 12 + 5 = 18$

$1 + 13 + 4 = 18$

$1 + 14 + 3 = 18$

$1 + 15 + 2 = 18.$



Gambar 3.10. Graf $K_{1,7}$

Graf bintang $K_{1,7}$ sudah memetakan himpunan titik ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, sehingga graf $K_{1,7}$ dapat dikatakan graf sisi ajaib super.

Dari penjelasan untuk $n = 1$ hingga $n = 7$, maka untuk graf bintang $K_{1,n}$ merupakan graf sisi ajaib super dengan konstanta ajaib $k = 2n + 4$ dengan $n \in \mathbb{N}$.

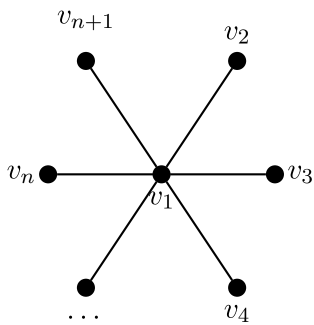
Dapat ditunjukan : misalkan $V(K_{1,n})$=$\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ dan $E(K_{1,n})$=$\{(v_1, v_2), (v_1, v_3), \ldots, (v_1, v_n), (v_1, v_{n+1})\}$.

Jadi diperoleh:

$|V(K_{1,n})| = n + 1$ dan $|E(K_{1,n})| = n$

Maka $|V(K_{1,n})| + |E(K_{1,n})| = n + 1 + n = 2n + 1$

Terdapat pola pelabelan sebagai berikut:



Gambar 3.11. Graf $K_{1,n}$

Pelabelan titik $f(v_k) = k, 1 \leq k \leq n+1$

Pelabelan sisi $f((v_1, v_k)) = N - k, 2 \leq k \leq n+1$ dengan N diperoleh dari $|V(K_{1,n})| + |E(K_{1,n})| + 2$

Dapat ditunjukan bahwa f adalah fungsi yang memetakan setiap $V(K_{1,n}) \cup E(K_{1,n})$ ke tepat satu $\{1, 2, \ldots, |V(K_{1,n})| + |E(K_{1,n})|\}$. Pelabelan titik dari pendefinisian $f(v_k) = k$ maka untuk pelabelan titik paling besar dipetakan ke $n+1$, untuk pelabelan sisi $f((v_1, v_k)) = N - k, 2 \leq k \leq n+1$ dengan N diperoleh dari $|V(K_{1,n})| + |E(K_{1,n})| + 2, N = n+1+n+2 = 2n+3$ serta batas interval untuk pelabelan sisi $n+1$. Untuk $f((v_1, v_k)) = 2n+3-(n+1) = n+2$, maka dapat disimpulkan bahwa tidak ada irisan dari pelabelan titik. Dapat disimpulkan bahwa f adalah fungsi yang memetakan setiap $V(K_{1,n}) \cup E(K_{1,n})$ ke tepat satu $\{1, 2, \ldots, |V(K_{1,n})| + |E(K_{1,n})|\}$.

Fungsi f dapat ditunjukan injektif dengan mengecek pada masing-masing pelabelan titik dan sisi.

1. Pelabelan titik $f(v_k) = k, 1 \leq k \leq n+1$

Akan ditunjukan untuk bilangan bulat k_1 dan k_2, jika $f(v_{k_1}) = f(v_{k_2})$ maka $k_1 = k_2$.

Diketahui $f(v_k) = k, 1 \leq k \leq n+1$

Karena $f(v_{k_1}) = f(v_{k_2})$ maka diperoleh

$k_1 = k_2$.

2. Pelabelan sisi $f((v_1, v_k)) = N - k, 2 \leq k \leq n+1$ dengan $N = |V(K_{1,n})| + |E(K_{1,n})| + 2$

   Akan ditunjukan untuk bilangan bulat k_1 dan k_2, jika $f((v_1, v_{k_1})) = f((v_1, v_{k_2}))$ maka $k_1 = k_2$

   Diketahui $f((v_1, v_k)) = N - k, 2 \leq k \leq n+1$ dengan $N = |V(K_{1,n})| + |E(K_{1,n})| + 2$

   Karena $f((v_1, v_{k_1})) = f((v_1, v_{k_2}))$ maka diperoleh

   $N - k_1 = N - k_2$

   $|V| + |E| + 2 - k_1 = |V| + |E| + 2 - k_2$

   $k_1 = k_2$

Dapat disimpulkan f merupakan fungsi injektif dari $V(K_{1,n}) \cup E(K_{1,n})$ ke $\{1, 2, \ldots, |V(K_{1,n})| + |E(K_{1,n})|\}$.

Sesuai dengan definisi surjektif yaitu untuk setiap $y \in Y$, terdapat $x \in X$ sehingga $f(x) = y$. Dengan fungsi f adalah $V(K_{1,n}) \cup E(K_{1,n})$ ke $\{1, 2, \ldots, |V(K_{1,n})| + |E(K_{1,n})|\}$, untuk bilangan asli dimana semua kodomainnya mempunyai pasangan di domainnya. Karena f injektif juga surjektif maka f adalah bijektif.

Akan ditunjukan bahwa terdapat nilai $k = 2n + 4$ atau konstanta ajaib di graf $K_{1,n}$ dengan rumus umum untuk pelabelan total sisi ajaib adalah :

$k = f(x) + f(x, y) + f(y)$

Untuk graf $K_{1,n}$ maka berlaku:

$k = f(v_1) + f((v_1, v_k)) + f(v_k)$

$k = 1 + N - k + k$

$k = 1 + (|V| + |E| + 2 - k) + k$

$k = 1 + n + 1 + n + 2 - k + k$

$k = 2n + 4.$

Jadi graf $K_{1,n}$ adalah graf total sisi ajaib dengan bilangan ajaib $k = 2n + 4.$

Dengan melihat peta dari $V(K_{1,n})$ oleh fungsi f yaitu

$f(v_k) = k, 1 \leq k \leq n + 1$

terlihat bahwa $V(K_{1,n})$ dipetakan $\{1, 2, \ldots, n + 1\}$, maka $\{1, 2, \ldots, n + 1\} = \{1, 2, \ldots, |V(K_{1,n})|\}$

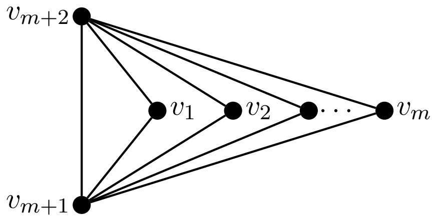
Dengan demikian, terbukti bahwa graf $K_{1,n}$ merupakan graf sisi ajaib super.

3.4 Pelabelan Sisi Ajaib Super pada graf $K_{1,1} + N_m$

Misalkan graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,1} + N_m$ adalah graf yang memiliki banyak titik=$|V(K_{1,1} + N_m)|$ dan banyaknya sisi=$|E(K_{1,1} + N_m)|$ dengan $V(K_{1,1} + N_m)$=$\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m, v_{m+1}, v_{m+2}\}$ dan $E(K_{1,1} + N_m)$=$\{(v_{m+1}, v_1), (v_{m+1}, v_2), \ldots,(v_{m+1}, v_m), (v_{m+2}, v_1),$ $(v_{m+2}, v_2), \ldots, (v_{m+2}, v_m), (v_{m+1}, v_{m+2})\}$.

Langkah pertama yaitu menentukan apakah untuk graf bintang $K_{1,1} + N_m$ dapat dilakukan pelabelan total sisi ajaib, sehingga dilakukan pemetaan himpunan $V(K_{1,1} + N_m) \cup E(K_{1,1} + N_m)$ ke himpunan $\{1, 2, \ldots, |V(K_{1,1} + N_m)| + |E(K_{1,1} + N_m)|\}$.

Langkah yang kedua yaitu menentukan nilai konstanta ajaib dengan rumus $f(x) + f(x, y) + f(y) = k$.

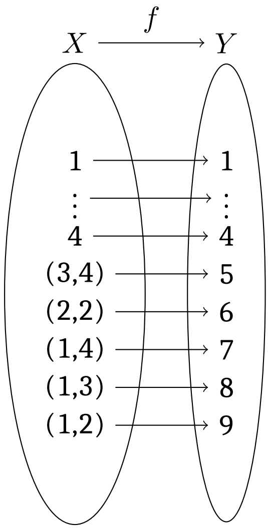


Gambar 3.12. Graf $K_{1,1} + N_m$

Langkah ketiga menentukan apakah graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,1} + N_m$ apakah dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super, jika suatu graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,1} + N_m$ sudah memetakan himpunan titik ke himpunan $\{1, 2, \ldots, |V(K_{1,1} + N_m)|\}$ maka dapat disimpulkan bahwa graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,1} + N_m$ dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super. Untuk graf $K_{1,1} + N_m$, nilai m diperoleh dari banyaknya titik pada graf kosong, maka:

1. Untuk m=2

   Graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,1} + N_2$ dapat dilakukan pelabelan total sisi ajaib dengan memetakan himpunan $V(K_{1,1} + N_2) \cup E(K_{1,1} + N_2)$ ke himpunan {1,2,...,9},



dengan nilai $k = 12$ diperoleh dari pelabelan total sisi ajaib yaitu $f(x) + f(x,y) + f(y) = k$

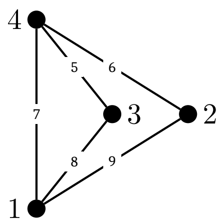
$1 + 7 + 4 = 12$

$1 + 8 + 3 = 12$

$1 + 9 + 2 = 12$

$2 + 6 + 4 = 12$

$3 + 5 + 4 = 12$.



Gambar 3.13. Graf $K_{1,1} + N_2$

Secara lebih lanjut gambar graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,1} + N_2$ juga dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super karena memetakan titik ke himpunan $\{1, 2, 3, 4\}$.

2. Untuk m=3

   Graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,1} + N_3$ dapat dilakukan pelabelan total sisi ajaib dengan memetakan himpunan $V(K_{1,1} + N_3) \cup E(K_{1,1} + N_3)$ ke himpunan {1,2,...,12},

   dengan nilai k diperoleh dari

   $1 + 12 + 2 = 15$

   $1 + 11 + 3 = 15$

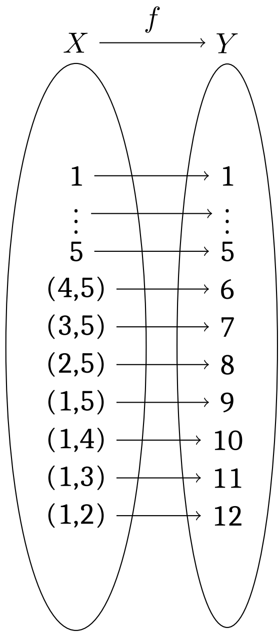
   $1 + 10 + 4 = 15$

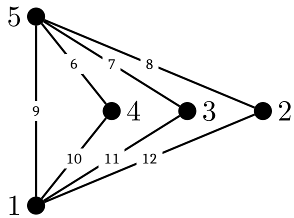
   $1 + 9 + 5 = 15$

   $2 + 8 + 5 = 15$

   $3 + 7 + 5 = 15$

   $4 + 6 + 5 = 15.$



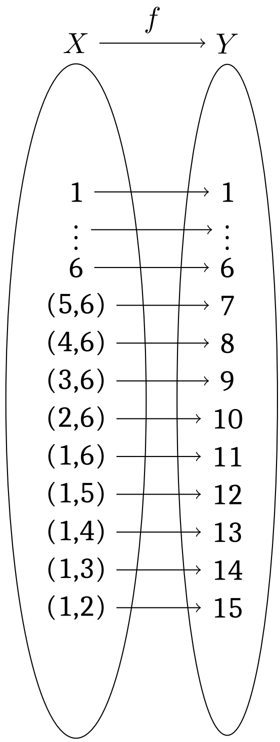


Gambar 3.14. Graf $K_{1,1} + N_3$

Secara lebih lanjut gambar graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,1} + N_3$ juga dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super karena memetakan titik ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

3. Untuk m=4

Graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,1} + N_4$ dapat dilakukan pelabelan total sisi ajaib dengan memetakan himpunan $V(K_{1,1} + N_4) \cup E(K_{1,1} + N_4)$ ke himpunan {1,2,...,15},



dengan nilai k diperoleh dari

$1 + 15 + 2 = 18$

$1 + 14 + 3 = 18$

$1 + 13 + 4 = 18$

$1 + 12 + 5 = 18$

$1 + 11 + 6 = 18$

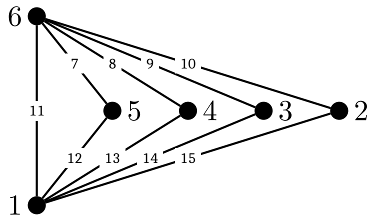
$2 + 10 + 6 = 18$

$3 + 9 + 6 = 18$

$4 + 8 + 6 = 18$

$5 + 7 + 6 = 18$

Secara lebih lanjut gambar graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,1} + N_4$juga dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super karena memetakan titik ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, 6\}$.



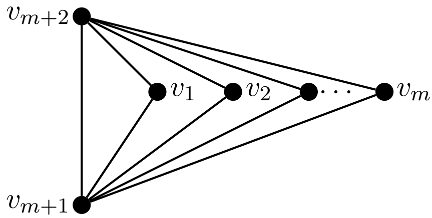
Gambar 3.15. Graf $K_{1,1} + N_4$

Dari penjelasan untuk $m = 2$ hingga $m = 4$, maka untuk graf bintang $K_{1,1} + N_m$ merupakan graf sisi ajaib super dengan konstanta ajaib $k = 3m + 6$ dengan $m \in \mathbb{N}$.

Dapat ditunjukan : misalkan

1. $V(N_m)$=$\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$
2. $V(K_{1,1})$=$\{v_{m+1}, v_{m+2}\}$
3. $E(K_{1,1})$ = $\{(v_{m+1}, v_{m+2})\}$

Apabila graf bintang dan graf kosong dilakukan operasi join $K_{1,1} + N_m$ maka untuk $V(K_{1,1} + N_m)$=$\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m, v_{m+1}, v_{m+2}\}$ dan $E(K_{1,1} + N_m)$=$\{(v_{m+1}, v_1), (v_{m+1}, v_2), \ldots, (v_{m+1}, v_m), (v_{m+2}, v_1),$ $(v_{m+2}, v_2), \ldots, (v_{m+2}, v_m), (v_{m+1}, v_{m+2})\}$.



Gambar 3.16. Graf $K_{1,1} + N_m$

Jadi akan diperoleh $|V(K_{1,1} + N_m)| = m + 2$ dan $|E(K_{1,1} + N_m)| = 2m + 1$, dengan banyaknya titik $|V(K_{1,1} + N_m)| = m + 2$ diperoleh dari banyaknya titik m dari graf kosong serta 2 diperoleh dari banyaknya titik di graf $K_{1,1}$. Banyaknya sisi $|E(K_{1,1} + N_m)| = 2m + 1$ diperoleh angka 1 dari banyaknya sisi dari graf bintang $K_{1,1}$ nilai $2m$ didapat dari banyaknya sisi yang menghubungkan graf kosong dengan graf bintang karena menggunakan operasi join.

Maka $|V(K_{1,1} + N_m)| + |E(K_{1,1} + N_m)| = m + 2 + 2m + 1 = 3m + 3$

Terdapat pola pelabelan sebagai berikut:

Pelabelan titik untuk $f(v_{m+1}) = 1$

Pelabelan titik untuk $f(v_i) = m + 2 - i, 1 \leq i \leq m$

Pelabelan titik untuk $f(v_{m+2}) = m + 2$

Pelabelan sisi $f((v_i, v_{m+1})) = 2m + 3 + i, 1 \leq i \leq m$

Pelabelan sisi $f((v_i, v_{m+2})) = m + 2 + i, 1 \leq i \leq m$

Pelabelan sisi $f((v_{m+1}, v_{m+2})) = 2m + 3$

Dapat ditunjukan bahwa f adalah fungsi yang memetakan setiap $V(K_{1,1} + N_m) \cup E(K_{1,1} + N_m)$ ke tepat satu $\{1, 2, \ldots, |V(K_{1,1} + N_m)| + |E(K_{1,1} + N_m)|\}$. Dari pendefinisian pelabelan yang telah didefinisikan terlihat bahwa untuk pelabelan titik paling besar dipetakan ke $m+2$, dan untuk pelabelan sisi

$f((v_i, v_{m+1})) = 2m+3+i, 1 \leq i \leq m$ dengan batas interval terbesar m diperoleh $f((v_i, v_{m+1})) = 2m+3+m = 3m+3$.

$f((v_i, v_{m+2})) = m+2+i, 1 \leq i \leq m$ dengan batas interval terbesar m diperoleh $f((v_i, v_{m+2})) = m+2+m = 2m+2$

$f((v_i, v_{m+1})) = 2m+3+i, 1 \leq i \leq m$ dengan batas interval terkecil m diperoleh $f((v_i, v_{m+1})) = 2m+3+1 = 2m+4$.

$f((v_i, v_{m+2})) = m+2+i, 1 \leq i \leq m$ dengan batas interval terkecil m diperoleh $f((v_i, v_{m+2})) = m+2+1 = m+3$

$f((v_{m+1}, v_{m+2})) = 2m+3$

Dari ketiga pelabelan sisi diperoleh untuk pelabelan sisi dimulai dari interval terkecil yaitu $m+3$, maka tidak ada irisan dari pelabelan titik. Dapat disimpulkan bahwa f merupakan fungsi yang memetakan setiap $V(K_{1,1}+N_m) \cup E(K_{1,1}+N_m)$ ke tepat satu $\{1, 2, \ldots, |V(K_{1,1}+N_m)| + |E(K_{1,1}+N_m)|\}$.

Fungsi f dapat ditunjukan injektif dengan mengecek pada masing-masing pelabelan.

1. Pelabelan titik $f(v_{m+1}) = 1$, karena $f(v_{m+1}) = 1$ sehingga sudah jelas memenuhi fungsi injektif.

2. Pelabelan titik $f(v_i) = m+2-i, 1 \leq i \leq m$

   Akan ditunjukan untuk bilangan bulat i_1 dan i_2 jika $f(v_{i_1}) = f(v_{i_2})$ maka $i_1 = i_2$.

   Diketahui $f(v_i) = m+2-i, 1 \leq i \leq m$

   Karena $f(v_{i_1}) = f(v_{i_2})$ maka diperoleh

   $m+2-i_1 = m+2-i_2$

   $i_1 = i_2$.

3. Pelabelan titik $f(v_{m+2}) = m + 2$, karena $f(v_{m+2}) = m + 2$ sehingga sudah jelas memenuhi fungsi injektif.

4. Pelabelan sisi $f((v_i, v_{m+1})) = 2m + 3 + i, 1 \leq i \leq m$

   Akan ditunjukan untuk bilangan bulat i_1 dan i_2 jika $f((v_{i_1}, v_{m+1})) = f((v_{i_2}, v_{m+1}))$ maka $i_1 = i_2$

   Diketahui $f((v_i, v_{m+1})) = 2m + 3 + i, 1 \leq i \leq m$

   Karena $f((v_{i_1}, v_{m+1})) = f((v_{i_2}, v_{m+1}))$ maka diperoleh

   $2m + 3 + i_1 = 2m + 3 + i_2$

   $i_1 = i_2$

5. Pelabelan sisi $f((v_i, v_{m+2})) = m + 2 + i, 1 \leq i \leq m$ Akan ditunjukan untuk bilangan bulat i_1 dan i_2 jika $f((v_{i_1}, v_{m+2})) = f((v_{i_2}, v_{m+2}))$ maka $i_1 = i_2$.

   Diketahui $f((v_i, v_{m+2})) = m + 2 + i, 1 \leq i \leq m$

   Karena $f((v_{i_1}, v_{m+2})) = f((v_{i_2}, v_{m+2}))$ maka diperoleh

   $m + 2 + i_1 = m + 2 + i_2$

   $i_1 = i_2$

6. Pelabelan sisi $f((v_{m+1}, v_{m+2})) = 2m + 3$, karena sisi $f((v_{m+1}, v_{m+2})) = 2m + 3$ sehingga sudah jelas memenuhi fungsi injektif.

Dapat disimpulakn f merupakan fungsi injektif dari $V(K_{1,1} + N_m) \cup E(K_{1,1} + N_m)$ ke $\{1, 2, \ldots, |V(K_{1,1} + N_m)| + |E(K_{1,1} + N_m)|\}$.

Sesuai dengan definisi surjektif yaitu untuk setiap $y \in Y$, terdapat $x \in X$ sehingga $f(x) = y$. Dengan fungsi f adalah $V(K_{1,1} + N_m) \cup E(K_{1,1} + N_m)$ ke $\{1, 2, \ldots, |V(K_{1,1} + N_m)| + |E(K_{1,1} + N_m)|\}$, untuk bilangan asli dimana semua kodomainnya mempunyai pasangan di domainnya. Karena f injektif juga surjektif maka f adalah bijektif.

Akan ditunjukan bahwa terdapat nilai konstanta ajaib $k = 3m + 6$ di graf $K_{1,1} + N_m$ dengan rumus umum untuk pelabelan total sisi ajaib adalah:

$k = f(x) + f(x, y) + f(y)$

karena pada graf $K_{1,1} + N_m$ pelabelan sisi terbagi menjadi 3 jadi untuk nilai k juga terbagi menjadi 3 kasus yaitu :

1. $k = f(v_i) + f((v_i, v_{m+2})) + f(v_{m+2})$

   $k = m + 2 - i + m + 2 + i + m + 2$

   $k = 3m + 6$

2. $k = f(v_i) + f((v_i, v_{m+1})) + f(v_{m+1})$

   $k = m + 2 - i + 2m + 3 + i + 1$

   $k = 3m + 6$

3. $k = f(v_{m+1}) + f((v_{m+1}, v_{m+2})) + f(v_{m+2})$

   $k = 1 + 2m + 3 + m + 2$

   $k = 3m + 6.$

Jadi graf $K_{1,1} + N_m$ merupakan graf total sisi ajaib dengan bilangan ajaib $k = 3m + 6$.

Dengan melihat peta dari $V(K_{1,1} + N_m)$ oleh fungsi f yaitu

$f(v_{m+1}) = 1$

$f(v_i) = m + 2 - i, 1 \leq i \leq m$

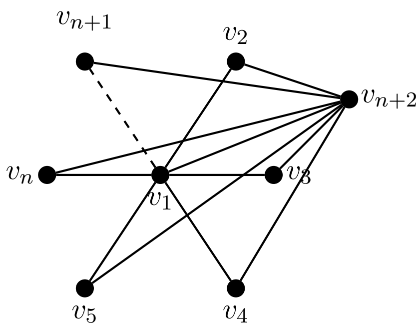
$f(v_{m+2}) = m + 2$

maka terlihat bahwa $V(K_{1,1} + N_m)$ dipetakan $\{1, 2, \ldots, m + 2\} = \{1, 2, \ldots, |V(K_{1,1} + N_m)|\}$

Dengan demikian, terbukti bahwa graf $K_{1,1} + N_m$ merupakan graf sisi ajaib super.

3.5 Pelabelan Sisi Ajaib Super pada Graf $K_{1,n} + N_1$

Graf bintang $K_{1,n} + N_1$ dengan $V(K_{1,n} + N_1)$=$\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_{n+1}, v_{n+2}\}$ dan $E(K_{1,n} + N_1)$=$\{(v_1, v_2), (v_1, v_3), \ldots, (v_1, v_{n+1}), (v_1, v_{n+2}), (v_2, v_{n+2}), \ldots, (v_{n+1}, v_{n+2})\}$.



Gambar 3.17. Graf $K_{1,n} + N_1$

Langkah pertama yaitu menentukan apakah untuk graf bintang $K_{1,n} + N_1$ dapat dilakukan pelabelan total sisi ajaib, sehingga dilakukan pemetaan himpunan $V(N_1 + K_{1,n}) \cup E(N_1 + K_{1,n})$ ke himpunan $\{1, 2, \ldots, |V| + |E|\}$.

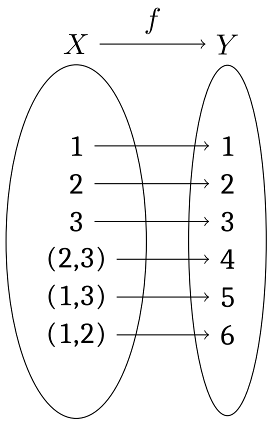
Langkah yang kedua yaitu menentukan nilai konstanta ajaib dengan rumus $f(x) + f(x, y) + f(y) = k$.

Langkah ketiga menentukan apakah graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,n} + N_1$ apakah dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super, jika suatu graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,n} + N_1$ sudah memetakan himpunan titik ke himpunan $\{1, 2, \ldots, |V|\}$ maka dapat disimpulkan bahwa graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,n} + N_1$ dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super. Untuk graf $K_{1,n} + N_1$ nilai

n didapat dari bilangan asli pada graf bintang, maka:

1. Untuk n=1

   Graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,1} + N_1$ dapat dilakukan pelabelan total sisi ajaib dengan memetakan himpunan $V(K_{1,1} + N_1) \cup E(K_{1,1} + N_1)$ ke himpunan {1,2,...,6},

   dengan nilai k diperoleh dari

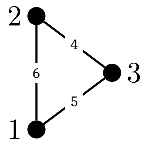
   $1 + 6 + 2 = 9$

   $1 + 5 + 3 = 9$

   $2 + 4 + 3 = 9$

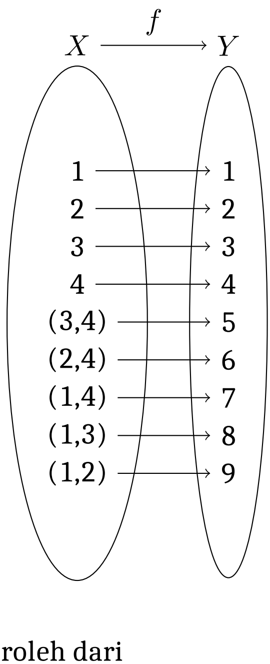
   Secara lebih lanjut gambar graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,1} + N_1$juga dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super karena memetakan titik ke himpunan $\{1, 2, 3\}$.

2. Untuk n=2



Gambar 3.18. Graf $K_{1,1} + N_1$

Graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,2} + N_1$ dapat dilakukan pelabelan total sisi ajaib dengan memetakan himpunan $V(K_{1,2} + N_1) \cup E(K_{1,2} + N_1)$ ke himpunan {1,2,...,9},



dengan nilai k diperoleh dari

$1 + 9 + 2 = 12$

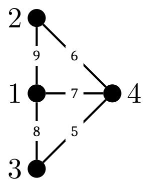
$1 + 8 + 3 = 12$

$1 + 7 + 4 = 12$

$2 + 6 + 4 = 12$

$3 + 5 + 4 = 12.$

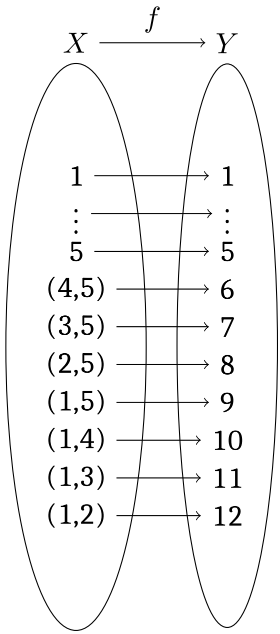
Secara lebih lanjut gambar graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,2} + N_1$juga dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super karena memetakan titik ke himpunan $\{1, 2, 3, 4\}$.



Gambar 3.19. Graf $K_{1,2} + N_1$

3. Untuk n=3

   Graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,3} + N_1$ dapat dilakukan pelabelan total sisi ajaib dengan memetakan himpunan $V(K_{1,3} + N_1) \cup E(K_{1,3} + N_1)$ ke himpunan {1,2,...,12},



dengan nilai k diperoleh dari

$1 + 9 + 5 = 15$

$1 + 10 + 4 = 15$

$1 + 11 + 3 = 15$

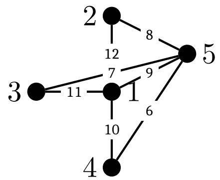
$1 + 12 + 2 = 15$

$2 + 8 + 5 = 15$

$3 + 7 + 5 = 15$

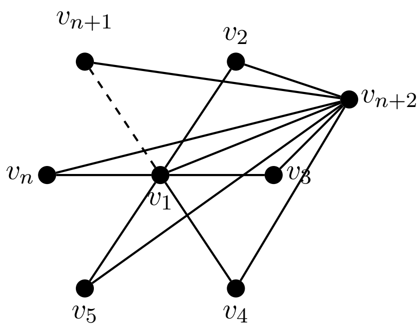
$4 + 6 + 5 = 15.$

Secara lebih lanjut gambar graf bintang dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,3} + N_1$ juga dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super karena memetakan titik ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.



Gambar 3.20. Graf $K_{1,3} + N_1$

Dari penjelasan untuk $n = 1$ hingga $n = 3$, maka untuk graf bintang $K_{1,n} + N_1$ merupakan graf sisi ajaib super dengan konstanta ajaib $3n + 6$ dengan $n \in \mathbb{N}$.



Gambar 3.21. Graf $K_{1,n} + N_1$

Dapat ditunjukan : misalkan

1. $V(K_{1,n})$=$\{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$
2. $V(N_1)$=$\{v_{n+2}\}$,
3. $E(K_{1,n})$=$\{(v_1, v_2), (v_1, v_3), \ldots, (v_1, v_{n+1})\}$

Apabila graf bintang $K_{1,n}$ dilakukan operasi join dengan graf kosong N_1 atau graf $K_{1,n} + N_1$, maka $V(K_{1,n} + N_1)$=$\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_{n+1}, v_{n+2}\}$. $E(K_{1,n} + N_1)$=$\{(v_1, v_2), (v_1, v_3), \ldots, (v_1, v_{n+1}), (v_1, v_{n+2}), (v_2, v_{n+2}),$

$\ldots, (v_{n+1}, v_{n+2})\}$.

Jadi diperoleh:

$|V(K_{1,n} + N_1)| = n + 2$ dan $|E(K_{1,n} + N_1)| = 2n + 1$, dengan banyaknya titik $|V(K_{1,n} + N_1)| = n + 2$ diperoleh $n + 1$ dari pendefisian banyaknya titik pada graf bintang dan ditambah 1 dari banyaknya titik dari graf kosong N_1. Banyaknya sisi $|E(K_{1,n} + N_1)| = 2n+1$, banyak sisi dari graf $K_{1,n}$ adalah n, ditambah dengan $n + 1$ diperoleh dari pengoperasian join dengan N_1

Maka $|V(K_{1,n}+N_1)|+|E(K_{1,n}+N_1)| = n+2+2n+1 = 3n+3$

Terdapat pola pelabelan sebagai berikut:

Pelabelan titik $f(v_1) = 1$

Pelabelan titik $f(v_k) = k, 2 \leq k \leq n + 1$

Pelabelan titik $f(v_{n+2}) = n + 2$

Pelabelan sisi $f((v_1, v_k)) = N - k, 2 \leq k \leq n + 2$ dengan $N = |V(G)| + |E(G)| + 2$

Pelabelan sisi $f((v_k, v_{n+2})) = 2(n + 2) - k, 2 \leq k \leq n + 1$

Dapat ditunjukan bahwa f adalah fungsi yang memetakan setiap $V(K_{1,n} + N_1) \cup E(K_{1,n} + N_1)$ ke tepat satu $\{1, 2, \ldots, |V(K_{1,n} + N_1)| + |E(K_{1,n} + N_1)|\}$. Dari pelabelan yang telah didefinisikan terlihat bahwa untuk pelabelan titik paling besar dipetakan ke $n + 2$. Untuk pelabelan sisi

$f((v_1, v_k)) = N - k, 2 \leq k \leq n + 2$ dengan $N = |V(K_{1,n} + N_1)|+|E(K_{1,n}+N_1)|+2$ dengan batas interval terbesar $n+2$ ketika disubtitusi ke $f((v_1, v_k)) = N-k$ diperoleh $N = n+2+2n+1+2 = 3n + 5$ maka $f((v_1, v_k)) = 3n + 5 - (n + 2) = 2n + 3$

$f((v_k, v_{n+2})) = 2(n + 2) - k, 2 \leq k \leq n + 1$ dengan batas interval terkecil $n+1$ maka $f((v_k, v_{n+2})) = 2(n+2)-(n+1) = n+3$

Jadi dari kedua pelabelan sisi tersebut dapat disimpulkan bahwa untuk pelabelan sisi dimulai dari $n+3$, maka tidak ada irisan dari pelabelan titik. Dapat disimpulkan bahwa f merupakan suatu fungsi yang memetakan setiap $V(K_{1,n}+N_1) \cup E(K_{1,n}+N_1)$ ke tepat satu $\{1, 2, \ldots, |V(K_{1,n}+N_1)| + |E(K_{1,n}+N_1)|\}$.

Fungsi f dapat ditunjukan injektif dengan mengecek pada masing-masing interval titik.

1. Pelabelan titik $f(v_1) = 1$, karena $f(v_1) = 1$ sehingga sudah jelas memenuhi fungsi injektif.

2. Pelabelan titik $f(v_k) = k, 2 \leq k \leq n+1$

   Akan ditunjukan untuk bilangan bulat k_1 dan k_2, jika $f(v_{k_1}) = f(v_{k_2})$ maka $k_1 = k_2$.

   Diketahui $f(v_k) = k, 2 \leq k \leq n+1$

   Karena $f(v_{k_1}) = f(v_{k_2})$ maka diperoleh

   $k_1 = k_2$.

3. Pelabelan titik $f(v_{n+2}) = n+2$, karena $f(v_{n+2}) = n+2$ sehingga sudah jelas memenuhi fungsi injektif

4. Pelabelan sisi $f((v_1, v_k)) = N - k, 2 \leq k \leq n+2$ dengan $N = |V(K_{1,n}+N_1)| + |E(K_{1,n}+N_1)| + 2$

   Akan ditunjukan untuk bilangan bulat k_1 dan k_2, jika $f((v_1, v_{k_1})) = f((v_1, v_{k_2}))$ maka $k_1 = k_2$

   Diketahui $f((v_1, v_k)) = N - k, 2 \leq k \leq n+2$ dengan $N = |V(K_{1,n}+N_1)| + |E(K_{1,n}+N_1)| + 2$

   Karena $f((v_1, v_{k_1})) = f((v_1, v_{k_2}))$ maka diperoleh

   $N - k_1 = N - k_2$

   $|V| + |E| + 2 - k_1 = |V| + |E| + 2 - k_2$

   $k_1 = k_2$

5. Pelabelan sisi $f((v_k, v_{n+2})) = 2(n+2) - k, 2 \leq k \leq n+1$

   Akan ditunjukan untuk k_1 dan k_2, jika $f((v_{k_1}, v_{n+2})) = f((v_{k_2}, v_{n+2}))$

   Diketaui $f((v_k, v_{n+2})) = 2(n+2) - k, 2 \leq k \leq n+1$

   Karena $f((v_{k_1}, v_{n+2})) = f((v_{k_2}, v_{n+2}))$ maka diperoleh

   $2(n+2) - k_1 = 2(n+2) - k_2$

   $k_1 = k_2$

Dapat disimpulkan f merupakan fungsi injektif dari $V(K_{1,n} + N_1) \cup E(K_{1,n} + N_1)$ ke $\{1, 2, \ldots, |V(K_{1,n} + N_1)| + |E(K_{1,n} + N_1)|\}$.

Sesuai dengan definisi surjektif yaitu untuk setiap $y \in Y$, terdapat $x \in X$ sehingga $f(x) = y$. Dengan fungsi f adalah $V(K_{1,n} + N_1) \cup E(K_{1,n} + N_1)$ ke $\{1, 2, \ldots, |V(K_{1,n} + N_1)| + |E(K_{1,n} + N_1)|\}$, untuk bilangan asli dimana semua kodomainnya mempunyai pasangan di domainnya. Karena f injektif juga surjektif maka f adalah bijektif.

Akan ditunjukan bahwa untuk nilai konstanta ajaib $k = 3n + 6$ di graf $K_{1,n} + N_1$ dengan rumus umum untuk mencari nilai k dengan pelabelan total sisi ajaib berlaku:

$k = f(x) + f(x, y) + f(y)$

karena pada graf $K_{1,n} + N_1$ pelabelan sisi dibagi menjadi 2 maka untuk nilai k terbagi menjadi 2 kasus yaitu:

1. $k = f(v_1) + f((v_1, v_k)) + f(v_k)$

   $k = 1 + N - k + k$

   $k = 1 + N$

   $k = 1 + n + 2 + 2n + 1 + 2$

   $k = 3n + 6$

2. $k = f(v_k) + f((v_k, v_{n+2})) + f(v_k)$

   $k = k + 2(n+2) - k + n + 2$

   $k = 2(n+2) + n + 2$

   $k = 2n + 4 + n + 2$

   $k = 3n + 6.$

Jadi graf $K_{1,n} + N_1$ merupakan graf total sisi ajaib dengan bilangan ajaib $k = 3n + 6$.

Dengan melihat peta dari $V(K_{1,n} + N_1)$ oleh fungsi f yaitu
$f(v_1) = 1$
$f(v_k) = k, 2 \leq k \leq n + 1$
$f(v_{n+2}) = n + 2$
maka terlihat bahwa $V(K_{1,n} + N_1)$ dipetakan $\{1, 2, \ldots, n + 2\}$ atau $\{1, 2, \ldots, n + 2\}$ = $\{1, 2, \ldots, |V(K_{1,n} + N_1)|\}$

Dengan demikian, terbukti bahwa graf $K_{1,n} + N_1$ merupakan graf sisi ajaib super.

BAB 4

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

1. Graf bintang $K_{1,n}$ merupakan graf yang dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super dengan nilai k yaitu $2n + 4$. Untuk pelabelan titik $f(v_k) = k$ dengan $1 \leq k \leq n + 1$ serta pelabelan sisi $f((1, v_k)) = N - k$, $2 \leq k \leq n + 1$ serta $N = |V| + |E| + 2$.

2. Graf dengan operasi join yang dinotasikan $K_{1,1} + N_m$ dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super dengan nilai $k = 3m+6$. Pelabelan titik $f(v_{m+1}) = 1$, $f(v_i) = m+2-i, 1 \leq i \leq m$ dan $f(v_{m+2}) = m + 2$. Pelabelan sisi $f((v_i, v_{m+1})) = 2m + 3 + i$, $f((v_i, v_{m+2})) = m + 2 + i$ dan $f((v_{m+1}, vm + 2)) = 2m + 3$.

3. Graf $K_{1,n}+N_1$ merupakan graf dengan menggunakan operasi join yang dapat dilakukan pelabelan sisi ajaib super dan mempunyai nilai $k = 3n + 6$. Pelabelan titik $f(v_1) = 1$, $f(v_k) = k$ dengan $1 \leq kleqn + 1$ dan $f(v_{n+2}) = n + 2$. Pelabelan sisi $f((v_1, v_k)) = N - k, 2 \leq k \leq n + 2$ dengan $N = |V| + |E| + 2$ dan $f((v_k, v_{n+2})) = 2(n+2) - k, 2 \leq k \leq n + 1$.

4.2 Saran

Pembahasan mengenai pelabelan sisi ajaib super masih terbuka untuk peneliti lain untuk melanjutkan penelitian ini, atau dengan menggunakan operasi graf yang lain seperti gabungan, hasil kali dan komposisi. Atau juga dapat melakukan penelitian serupa dengan jenis graf yang berbeda seperti graf pohon, graf kipas, graf sikel, graf roda, dan lain sebagainya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdurrahman, M.2003. *Pendidikan Bagi Anak Berkesulitan Belajar*. Jakarta : Rineka Cipta.

Abdussakir. 2005. *Edge-Magic Total Labeling pada Graf* mP_2 *(m bilangan asli ganjil)*. Jurnal Saintika, Edisi Khusus Dies Natalies 1 UIN Malang, Juli.

Abdussakir, dkk. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.

Agusdianita, N., & Asmahasanah, S. 2020. *Penyusunan Perangkat Model Quantum Teaching Dalam Pembelajaran Matematika Menggunakan Rme Untuk Meningkatkan Prestasi Belajar, Kreativitas, Dan Karakter Siswa Sd*. Attadib Journal Of Elementary Education, 4(1).

Balakrishnan, V.K. 1991. *Introductory Discrete Mathematics*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Baugh, Richard Jhonson. 2009. *Discrete Mathematics 7 Edition*. New Jersey: Prentice-Hall,Inc.

Cahit, I.1987. *Cordial Graphs: A Weaker Version of Graceful and Harmonious Graphs*

Chusna, L.F.. 2011. *Pelabelan Super Sisi Ajaib pada Graf-Graf Star Dengan Titik Pusat Terhubung Oleh Satu Titik Pengait*

S. Ezhilarasi and M.Kavitha. 2021. *A Study On Labelling For Star Graphs*

Gallian, J.A.. 2007. *A Dinamic Survey of Graf Labeling. The Electronic Journal of Combinatorics.*

Grimaldi, Ralph P. 1999. *Discrete And Combinatorial Mathematics*. California :Addison Wesley Longman.

Gultiom, Sonli Surya Hati dan Mulyono. 2019. *Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf Cycle*.

Harary F.1969. *Graph Theory*.USA:AddisonWesley Publishing Co. Inc.

Irawati, Novi dan Rubertus Heri. 2010. *Total Titik Ajaib pada Complete Graph K_n Dengan n Ganjil*.

Mardiyono, Sugeng. 1996. *Matematika Diskret*. Yogyakarta: FMIPA IKIP Yogyakarta.

Nasir, A.M., dan Setyawan, D..2022. *Optimalisasi Penjadwalan Mata Kuliah Menggunakan Teori Pewarnaan Graf*

Sugeng, K.A., & Miller, M..2008. *On Consecutive Edge Magic Total Labeling of Graphs*

Wallis, W.D. 2001. *Magic Graphs*. Boston:Birkhauser Boston.

Wilson, R.J. dan Watkins, J.J..1990. *Graphs An Introductory Approach*. Canada: John Wiley and Sons, Inc.