

# **PEMODELAN MATEMATIKA ALIRAN FLUIDA DUA FASA AIR DAN PASIR BESI MELEWATI PIPA SOLENOIDA**

**TUGAS AKHIR**

**Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh  
Gelar Sarjana Matematika  
dalam Ilmu Matematika**



**Oleh : ALY SYAFRUDIN  
NIM : 2008046031**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO  
SEMARANG  
2024**

## **PERNYATAAN KEASLIAN**

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Aly Syafrudin  
NIM : 2008046031  
Jurusan/Program Studi : Program Studi Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

### **PEMODELAN MATEMATIKA ALIRAN FLUIDA DUA FASA AIR DAN PASIR BESI MELEWATI PIPA SOLENOIDA**

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,  
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 3 April 2024

Pembuat pernyataan,



Aly Syafrudin

NIM : 2008046031



KEMENTERIAN AGAMA R.I.  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang  
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

### PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **PEMODELAN MATEMATIKA ALIRAN FLUIDA  
DUA FASA AIR DAN PASIR BESI MELEWATI PIPA  
SOLENOIDA**

Penulis : Aly Syafrudin

NIM : 2008046031

Jurusan : Program Studi Matematika

Telah diujikan dalam sidang  *tugas akhir*  oleh Dewan Penguji  
Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima  
sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu  
Matematika.

Semarang, 3 April 2024

### DEWAN PENGUJI

Penguji I,

**Zulaikha, M.Si.**

NIP : 19920409 201903 2 011

Penguji II,

**Seftina Diyah Miasary, M.Sc.**

NIP : 19870921 201903 2 010

Penguji III,

**Yolanda Norasia, M.Si.**

NIP : 19940923 201903 2 011

Penguji IV,

**Aini Fitriyah, M.Sc.**

NIP : 19890929 201903 2 021

Pembimbing,

**Yolanda Norasia, M.Si.**

NIP : 19940923 201903 2 011

## NOTA DINAS

Semarang, 3 April 2024

Yth. Ketua Program Studi Matematika  
Fakultas Sains dan Teknologi  
UIN Walisongo Semarang

*Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh*

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : PEMODELAN MATEMATIKA ALIRAN FLUIDA  
DUA FASA AIR DAN PASIR BESI MELEWATI PIPA  
SOLENOIDA  
Nama : Aly Syafrudin  
NIM : 2008046031  
Jurusan : Program Studi Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

*Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh*

Pembimbing,



**Yolanda Norasia, M.Si.**

NIP : 19940923 201903 2 011

## ABSTRAK

Penelitian ini menginvestigasi pengaruh gaya lorentz terhadap laju aliran fluida dua fasa, yaitu pemodelan matematika aliran dua fasa air dan pasir besi melewati pipa solenoida. Metode penelitian dibagi menjadi tiga tahap analisa yaitu analisa tahap permasalahan, analisa tahap implementasi, analisa tahap penyelesaian akhir. Pada tahap analisa permasalahan peneliti melakukan studi literatur tentang semua hal yang berkaitan dengan proses penelitian. Langkah-langkah pada penelitian adalah studi literatur, analisa karakteristik aliran dua fasa air - pasir besi, analisa karakteristik keadaan pipa solenoida, penurunan persamaan konservai massa, hukum Newton II, penyederhanaan persamaan pembangun untuk memperoleh persamaan dimensional. Analisa tahap implementasi, pada tahap ini peneliti menggunakan skema metode beda hingga orde kedua, dengan langkah-langkah pada penelitian ini adalah substitusi variabel non dimensional untuk mengubah persamaan dimensional menjadi persamaan non dimensional, mengubah persamaan non dimensional menjadi persamaan similar dengan substitusi fungsi aliran (*streamfunction*). Analisa tahap penyelesaian akhir, pada tahap ini peneliti menjabarkan hasil menggunakan program MATLAB 2019a. Hasil perlakuan variasi pada parameter arus listrik ( $i$ ), jumlah lilitan( $n$ ), dan viskositas( $V$ ). Hasil visualisasi hasil perhitungan dengan program matlab. Analisa hasil numerik dari pengaruh parameter. Hasil simulasi menunjukkan profil kecepatan ( $f'$ ) meningkat seiring dengan meningkatnya nilai parameter arus listrik ( $i$ ) dan nilai parameter jumlah lilitan kawat konduktor ( $n$ ), sedangkan kecepatan fluida menurun seiring peningkatan parameter viskositas( $V$ ).

**Kata kunci** : aliran fluida dua fasa, gaya lorentz, pipa solenoida

## ABSTRAK

Penelitian ini menginvestigasi pengaruh gaya lorentz terhadap laju aliran fluida dua fasa, yaitu pemodelan matematika aliran dua fasa air dan pasir besi melewati pipa solenoida. Metode penelitian dibagi menjadi tiga tahap analisa yaitu analisa tahap permasalahan, analisa tahap implementasi, analisa tahap penyelesaian akhir. Pada tahap analisa permasalahan peneliti melakukan studi literatur tentang semua hal yang berkaitan dengan proses penelitian. Langkah-langkah pada penelitian adalah studi literatur, analisa karakteristik aliran dua fasa air - pasir besi, analisa karakteristik keadaan pipa solenoida, penurunan persamaan konservasi massa, hukum Newton II, penyederhanaan persamaan pembangun untuk memperoleh persamaan dimensional. Analisa tahap implementasi, pada tahap ini peneliti menggunakan skema metode beda hingga orde kedua, dengan langkah-langkah pada penelitian ini adalah substitusi variabel non dimensional untuk mengubah persamaan dimensional menjadi persamaan non dimensional, mengubah persamaan non dimensional menjadi persamaan similar dengan substitusi fungsi aliran (*streamfunction*). Analisa tahap penyelesaian akhir, pada tahap ini peneliti menjabarkan hasil menggunakan program MATLAB 2019a. Hasil perlakuan variasi pada parameter arus listrik ( $i$ ), jumlah lilitan( $n$ ), dan viskositas( $V$ ). Hasil visualisasi hasil perhitungan dengan program matlab. Analisa hasil numerik dari pengaruh parameter. Hasil simulasi menunjukkan profil kecepatan ( $f'$ ) meningkat seiring dengan meningkatnya nilai parameter arus listrik ( $i$ ) dan nilai parameter jumlah lilitan kawat konduktor ( $n$ ), sedangkan kecepatan fluida menurun seiring peningkatan parameter viskositas( $V$ ).

**Kata kunci** : aliran fluida dua fasa, gaya lorentz, pipa solenoida

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan atas kehadiran Allah SWT atas rahmat, taufik, dan hidayah-NYA, sehingga penelitian ini dapat kami selesaikan. Penelitian ini merupakan bagian dari perjalanan akademik penulis dalam mengeksplorasi bidang ilmu yang penulis tekuni, yaitu pemodelan matematika aliran fluida dua fasa air dan pasir besi melewati pipa solenoida.

Skripsi ini disusun guna untuk memenuhi salah satu syarat kelulusan Program Studi Strata 1 (S-1) Program Sarjana Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi (FST) Uin Walisongo Semarang.

proses penyusunan skripsi ini tidak lepas dari peran banyak pihak oleh karena itu penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Kedua orang tua, Bapak Karno dan Ibu Komari, yang telah membiayai kuliah penulis dan doa kepada penulis sampai terselesaikannya skripsi ini.
2. Bapak Prof. Dr. Imam Taufiq, M.Ag. selaku Rektor UIN Walisongo Semarang.
3. Bapak Dr. H. Ismail, M.Ag. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.
4. Ibu Emy Siswanah, M.Sc. selaku ketua prodi matematika fakultas sains dan teknologi Uin Walisongo Semarang.
5. Ibu Nur Khasanah, M.Si. selaku dosen wali penulis yang telah memberikan semangat dan motivasi kepada penulis dikala penulis sedang mengalami kesulitan.

6. Ibu Yolanda Norasia, M.si. selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktunya kepada penulis untuk memberi saran, arahan, nasehat, perhatian, motivasi, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
7. Teman-teman seangkatan prodi matematika yang telah memberi semangat kepada penulis.
8. Semua Pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah memberikan kontribusi hingga selesainya skripsi ini.

Semoga kebaikan semuanya menjadi amal ibadah yang diterima dan mendapat pahala yang berlimpah dari Allah SWT. Aamiin.

Atas segala kekurangan dan kelemahan dalam skripsi ini penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun. Semoga karya tulis yang sederhana ini dapat menjadi bacaan yang bermanfaat dan dapat dikembangkan bagi peneliti-peneliti selanjutnya.

Semarang, 3 April 2024

Pembuat pernyataan,



Aly Syafrudin

NIM : 2008046031



# DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	
<b>PERNYATAAN KEASLIAN</b> .....	<b>i</b>
<b>PENGESAHAN</b> .....	<b>ii</b>
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	<b>viii</b>
<b>DAFTAR ISI</b> .....	<b>viii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	<b>x</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	<b>xi</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	<b>1</b>
A. Latar Belakang Masalah .....	1
B. Rumusan Masalah .....	6
C. Tujuan Penelitian .....	6
D. Manfaat Penelitian .....	6
E. Batasan Masalah .....	7
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b> .....	<b>8</b>
A. Kajian Teori .....	8
1. Uraian Gaya .....	8
2. Persamaan Diferensial Parsial .....	12
3. Persamaan Aliran Fluida .....	14
4. Aliran Dua Fasa .....	16
5. Pipa Solenoida .....	16
6. Hukum Kedua Newton .....	19
7. Teorema Angkut Reynolds .....	20
8. Teorema Gauss .....	21
9. Variabel Tegangan Stress Cauchy .....	21
10. Metode Beda Hingga .....	22
11. Metode Gauss Siedel .....	23
B. Penelitian Terdahulu .....	24
<b>BAB III METODE PENELITIAN</b> .....	<b>27</b>
A. Tahap Penelitian .....	27
1. Tahap Analisa Permasalahan .....	27
2. Tahap Implementasi .....	28

3.	Tahap Penyelesaian Akhir . . . . .	28
<b>BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN . . . . .</b>		<b>29</b>
A.	Persamaan Pembangun . . . . .	29
1.	Persamaan Kontinuitas . . . . .	29
2.	Persamaan Momentum . . . . .	31
B.	Penurunan Persamaan Pembangun . . . . .	33
1.	Penurunan Persamaan Momentum . . . . .	33
C.	Persamaan Non - dimensional . . . . .	47
D.	Diskritisasi Dengan Metode Beda Hingga . . . . .	52
1.	Pendiskritan persamaan momentum . . . . .	53
E.	Analisa Hasil . . . . .	56
<b>BAB V KESIMPULAN DAN SARAN . . . . .</b>		<b>61</b>
A.	Kesimpulan . . . . .	61
B.	Saran . . . . .	63
<b>DAFTAR PUSTAKA . . . . .</b>		<b>65</b>
<b>Lampiran-lampiran . . . . .</b>		<b>71</b>

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar</b>	<b>Judul</b>	<b>Halaman</b>
Gambar 2.1	Skema representasi aliran dua fasa	17
Gambar 2.2	Pipa solenoida	18
Gambar 4.1	Profil kecepatan dengan variasi arus listrik	57
Gambar 4.2	Profil kecepatan dengan variasi jumlah lilitan	58
Gambar 4.3	Profil kecepatan dengan variasi viskositas	59

## DAFTAR LAMPIRAN

	<b>Halaman</b>
Lampiran 1 Perhitungan Lengkap Bab IV	71
Lampiran 2 Matlab 2019a	100

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

### **A. Latar Belakang Masalah**

Pemodelan matematika merupakan proses menggambarkan fenomena disekitar kehidupan dengan menggunakan bahasa matematika untuk menganalisis, memprediksi, dan memahami perilaku tersebut. Melalui pemodelan matematika, kita dapat menyederhanakan kompleksitas permasalahan nyata menjadi struktur matematis yang dapat di mengerti. Pemodelan matematika digunakan secara luas di berbagai bidang ilmu, seperti fisika, biologi, ekonomi, dan teknik, untuk memecahkan masalah yang kompleks dan mendapatkan wawasan yang mendalam dari permasalahan yang diamati. Fluida merupakan permasalahan dalam bidang fisika yang dapat diamati menggunakan pemodelan matematika yang dimana kita dapat mengetahui sifat fluida seperti pola aliran dan kecepatan. (Widodo, dkk, 2017).

Fluida tergolong zat sangat mudah berubah bentuk apabila dikenai tegangan geser sekecil apapun. Fase fluida dibagi menjadi tiga yaitu cair, gas, solid. Fluida memiliki sifat bentuknya menyerupai wadahnya, salah satu contohnya adalah ketika air berada di dalam gelas maka bentuk air tersebut akan menyesuaikan bentuk gelas. Faktanya fluida yang mengalir pada pipa tidak hanya satu fasa saja. Dua atau tiga fasa fluida yang mengalir secara bersamaan disebut fluida multifasa. Dua fasa fluida yang mengalir disebut aliran fluida dua fasa dan tiga fasa fluida yang mengalir disebut aliran fluida tiga fasa (Ebrahimi, dkk, 2019). Penelitian terkait fluida multifasa dapat menjadi topik yang

menarik untuk dilakukan demi kemajuan teknologi.

Sudah banyak penelitian tentang permasalahan aliran fluida multifasa, diantaranya penelitian yang diteliti oleh Ebrahimi (2019) dalam penelitian fluida multifasa yaitu fasa cair dan gas menunjukkan bahwa aliran dua fasa lebih tidak stabil jika dibandingkan dengan fasa tunggal. Penelitian yang dilakukan oleh Shadloo (2020) mengenai fluida multifasa menghasilkan grafik tiga dimensi yaitu variasi diameter pipa, input proporsi volume campuran dari fluida, indeks perilaku aliran, kekentalan fluida untuk mengestimasi penurunan tekanan. Penelitian fluida multifasa air dan gas menghasilkan prediksi aliran fluida dua fasa dengan parameter arah sudut aliran  $0^\circ - 90^\circ$  dilakukan oleh Lin (2020). Saputra (2023) pada penelitian fluida multifasa minyak dan gas melakukan variasi terhadap kecepatan minyak dan gas sehingga aliran multifasa memiliki pola aliran yang berbeda, dan pada variasi viskositas didapat hasil pada viskositas 10 cP sampai 2000 cP memiliki penurunan tekanan yang besar dibandingkan dengan viskositas 3000 cP. Pada penelitian Herraprastanti (2022) hasil laju aliran tertinggi yaitu  $0.00032 \text{ m}^3/\text{s}$  dan laju aliran terendah yaitu  $0.0002 \text{ m}^3/\text{s}$ . Penelitian fluida fasa air dan minyak mentah menunjukkan bahwa peningkatan rata-rata tebal film selaras dengan peningkatan kecepatan superfisial air (Jati, 2021). Hasil tersebut didapatkan dari simulasi bentuk gelombang dan kecepatan gelombang fluida.

Berdasarkan penelitian terdahulu peneliti tertarik untuk melakukan penelitian terkait aliran fluida dua fasa. Aliran fluida dua fasa dibedakan atas fasa - fasa aliran yaitu gas - cair, gas - solid, cair - solid, arah alirannya dapat terjadi searah dan berlawanan arah, dan kedudukan salurannya tegak, mendatar, atau miring

(Bello, dkk, 2008). Pada fluida fasa cair - solid lebih sering menimbulkan keausan pada dinding pipa hal ini dikarenakan fasa cair - solid memiliki densitas massa yang lebih besar dari pada fasa gas akibatnya gaya gesek antara fluida dan dinding pipa semakin besar (Ebrahimi, dkk, 2019). Fluida fasa cair yang digunakan pada penelitian ini adalah fasa air. Air merupakan zat yang tersusun dari unsur hidrogen dan oksigen (Wyadnyana, 2020). Air mudah dijumpai disekitar manusia karena sifat pentingnya yaitu sebagai sumber kehidupan. Air tergolong sebagai jenis fluida fasa cair yang dimana air sangat mudah berubah bentuknya jika terkena tegangan sekecil apapun (Ebrahimi, dkk, 2019). Fluida fasa solid yang digunakan pada penelitian ini adalah fasa pasir besi. Pasir besi merupakan pasir yang memiliki unsur magnetit ( $Fe_3O_4$ ) yang sering digunakan sebagai bahan pembuatan logam besi (Setianto, S., 2017). Pasir besi dapat digolongkan sebagai fluida fasa padat karena karakteristiknya yang dapat terdeformasi oleh tegangan (Ebrahimi, dkk, 2019).

Pada penelitian ini peneliti akan mengamati profil kecepatan partikel pasir besi dan air yang melaju melalui pipa. Pipa yang digunakan untuk mengalirkan fluida fasa cair dan solid berbentuk silinder berongga. Adanya gesekan antara fluida dengan dinding pipa berongga mengakibatkan terjadinya penipisan. Penipisan dinding pipa disebut sebagai fenomena erosi akibat adanya gesekan atau tumbukan oleh fluida yang ber-kecepatan tinggi (Natsir, dkk, 2000). Penipisan dapat mengakibatkan keausan pada pipa yang dapat mengganggu proses aliran fluida (Darmadi, dkk, 2023). Contoh kasus kebocoran pipa terdapat pada data website kementerian ESDM diantaranya kebocoran pipa pengalir gas pada Laut Cilegon Banten Pada tanggal 9 Juli 2022. Selain itu terjadi

kebocoran pipa minyak milik Pertamina di Teluk Balikpapan tanggal 31 Maret 2018.

Berdasarkan data tersebut menjadi penting untuk mempertimbangkan kendali pada aliran fluida. Salah satu cara dalam mengendalikan aliran fluida dengan mengurangi efek gaya gesek yang terjadi antara fluida dua fasa dengan dinding pipa. Hal tersebut dapat ditangani dengan dengan menambahkan gaya yang arahnya menuju sumbu-y positif (Sahaya, dkk, 2016). Peneliti menggunakan gaya Lorentz sebagai solusi untuk mengurangi gaya gesek. Gaya Lorentz bekerja pada benda yang memiliki muatan listrik ketika berada di wilayah medan magnet. Gaya Lorentz dapat di terapkan pada pipa dengan menambahkan kumparan yang berupa kawat konduktor pada batang pipa. Pipa yang dililiti kumparan dinamakan pipa solenoida (De Andrade & Pereira, 1997).

Pipa solenoida dapat mengurangi gaya gesek partikel dalam pipa, hal ini disebabkan oleh gaya lorentz yang berada pada pipa solenoida berfungsi mengurangi gaya gravitasi partikel (Sahaya, dkk, 2016). Pipa solenoida dapat di implementasikan pada bidang perminyakan dan petambangan. Pipa solenoida memerlukan komponen arus listrik dan medan magnet agar menimbulkan gaya lorentz. Komponen tersebut dapat didapatkan dengan cara meilitkan kumparan berupa kawat konduktor pada batang pipa (Hilal, dkk, 2021).

Peneliti akan menggunakan komponen arus listrik, kumparan, dan viskositas pada pemodelan yang akan dilakukan. Arus listrik yang digunakan merupakan aliran listrik yang mengalir pada suatu rangkaian pipa yang ditimbulkan dari adanya tegangan listrik dan muatan listrik pada medium konduktor kawat kumparan. Besar



kecilnya suatu nilai arus listrik akan mempengaruhi juga nilai dari gaya lorentznya (Hutalagung, dkk, 2018). Variasi kedua adalah kumparan, seutas kawat yang dililitkan melingkar atau spiral pada batang pipa (Budiyanto, & Agus, 2021 ). Kumparan berfungsi sebagai penghantar arus listrik, semakin banyak jumlah lilitan dan kerapatan lilitanya akan memperkuat arus listrik yang dihasilkan (Setiadi, dkk, 2015). Bahan kawat yang digunakan sebagai solenoida adalah alumunium dan tembaga atau bisa juga terbuat dari bahan konduktor lainya (Setiadi, dkk, 2015). Variasi ketiga adalah viskositas, nilai viskositas mendeskripsikan kemampuan bertahan fluida terhadap tegangan yang diterima. Besar nilai gaya gesek tergantung pada kekentalan fluida yang disebut dengan viskositas semakin besar nilai viskositas akan sebanding dengan besar nilai dari viskositas (Norasia, dkk. 2023).

Uraian permasalahan diatas kemudian dianalisis untuk menyusun persamaan pembangunnya. Peneliti menggunakan dua persamaan pembangun yaitu persamaan kontinuitas dan persamaan momentum. Tahap selanjutnya dilakukan substitusi variabel non dimensional ke dalam persamaan dimensional, yang membentuk persamaan non dimensiona. Persamaan non dimensional yang didapat, dilakukan substitusi dengan fungsi alir untuk menghasilkan persamaan similaritas. Peneliti menggunakan metode beda hingga untuk mendapatkan solusi numerik dengan bantuan software MATLAB 2019a. Peneliti menggunakan metode beda hingga karena persamaan differensial parsial non linear sangat mudah diselesaikan dengan metode tersebut. Hasil simulasi menggunakan software MATLAB 2019a menunjukkan bahwa variasi arus listrik dan variasi jumlah lilitan kumparan akan meningkatkan nilai kecepatan partikel

seiring dengan peningkatan nilai ke-dua variasi tersebut. Kondisi berbeda ditunjukkan oleh variasi viskositas yang menunjukkan penurunan laju kecepatan partikel seiring dengan peningkatan variasi viskositas.

## **B. Rumusan Masalah**

1. Bagaimana model persamaan aliran dua fasa?
2. Bagaimana pengaruh arus listrik terhadap kecepatan fluida?
3. Bagaimana pengaruh jumlah lilitan terhadap kecepatan fluida?
4. Bagaimana pengaruh viskositas terhadap kecepatan fluida?

## **C. Tujuan Penelitian**

1. Menyusun model persamaan aliran dua fasa.
2. Mengetahui pengaruh arus listrik terhadap kecepatan fluida.
3. Mengetahui pengaruh jumlah lilitan solenoida terhadap kecepatan fluida.
4. Mengetahui pengaruh viskositas terhadap kecepatan fluida.

## **D. Manfaat Penelitian**

Mengetahui parameter arus listrik dan lilitan solenoida sehingga dapat mengetahui besar gaya lorentz untuk mengurangi gaya gesek.

## E. Batasan Masalah

1. Aliran dua fasa air - pasir besi berdimensi dua dalam keadaan (*steady state*) yaitu kecepatannya konstan dan suhu fluida tetap (*isothermal*).
2. Aliran dua fasa air - pasir besi di asumsikan sebagai fluida Newtonian.
3. Antara fasa air dan pasir besi volumenya tidak dapat diubah oleh tekanan (*incompressible*).
4. Efek percepatan di abaikan pada perpindahan massa interfacial di antara fasa.
5. Interaksi gelembung diabaikan.
6. Penelitian ini tidak menjelaskan proses teknis dari pembuatan teknologi pipa solenoida.
7. Persamaan yang digunakan yaitu persamaan kontinuitas dua dimensi dan persamaan momentum dua dimensi.
8. Gaya - gaya yang digunakan di penelitian ini gaya gravitasi, gaya apung, gaya lorentz, gaya gesek dinding, gaya tarik gesekan, dan tegangan geser.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### A. Kajian Teori

##### 1. Uraian Gaya

Aliran fluida dua fasa memiliki banyak gaya yang bekerja sistem. Pada penelitian ini menggunakan tujuh gaya untuk membangun pemodelan matematikanya yang diantaranya sebagai berikut:

##### a. Gaya Gravitasi

Gaya gravitasi adalah gaya tarik menarik pada partikel dalam fluida terjadi ketika partikel partikel fluida tertarik oleh gaya gravitasi bumi. Gaya gravitasi terjadi karena massa partikel akan dipengaruhi oleh percepatan gravitasi bumi. Persamaan dari gaya gravitasi ini dapat dijelaskan dengan persamaan berikut:

$$F_G = \frac{1}{6}d^3 \rho_p g \quad (2.1)$$

gaya gravitasi pada fluida dua fasa cair-padat dan fluida tiga fasa dipengaruhi oleh percepatan gravitasi, volum, dan masa jenis pasir (Bello, dkk, 2008).  $g$  adalah percepatan gravitasi ( $\frac{m}{s^2}$ ),  $d$  adalah diameter suatu benda ( $m$ ),  $\rho_p$  adalah massa jenis pasir besi ( $\frac{kg}{m^3}$ )

##### b. Gaya Apung

Gaya apung adalah gaya yang bekerja pada benda yang tenggelam. Setiap benda atau partikel yang berada didalam

air pasti memiliki gaya apung, gaya apung pada aliran dua fasa pasir besi - air didefinisikan sebagai berikut:

$$F_A = \frac{1}{6}d^3\rho_a g \quad (2.2)$$

dimana  $\rho_a$  adalah massa jenis air ( $\frac{kg}{m^3}$ ),  $g$  adalah percepatan gravitasi ( $\frac{m}{s^2}$ ),  $d$  adalah diameter suatu benda ( $m$ ). (Bello, dkk, 2008).

### c. Gaya Lorentz

Gaya Lorentz adalah gaya yang muncul pada partikel bermuatan yang bergerak dalam medan magnetik. Gaya lorentz terjadi karena solenoida yang memiliki medan magnet di aliri listrik akan menimbulkan gaya lorentz yang didefinisikan sebagai berikut:

$$F_L = Bil \quad (2.3)$$

atau

$$F_L = Bqv\sin\theta \quad (2.4)$$

dengan  $B$  adalah medan magnet ( $T$ ),  $i$  adalah arus listrik ( $A$ ).  $l$  adalah panjang pipa ( $m$ ), ( $q$ ) muatan listrik ( $ohm$ ),  $v$  adalah kecepatan muatan ( $\frac{m}{s}$ ) (De Andrade & Pereira, 1997).

### d. Gaya Gesek Dinding

Menurut Bello (2008) Gaya gesek adalah gaya yang bekerja pada dua benda atau partikel bergeak yang saling bergesekan. fluida yang mengalir pada pipa akan mengalami

gaya gesek dengan dinding pipa, secara umum gaya gesek didefinisikan sebagai berikut:

$$F_g = \mu N \quad (2.5)$$

( $\mu$ ) adalah koefisien gesekan,  $N$  adalah gaya normal ( $kg \frac{m}{s^2}$ ). Dari persamaan (2.5) kita dapat uraikan gaya normal, berdasarkan definisi gaya normal yaitu gaya normal adalah resultan gaya dengan arah vertikal yang bekerja pada suatu benda. Maka:

$$\begin{aligned} F_g &= \mu(F_A + F_L - F_G) \\ &= \mu\left(\frac{1}{6}d^3 \rho_a g + Bil - \frac{1}{6}d^3 \rho_p g\right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

dengan  $F_A$  adalah gaya apung,  $F_L$  adalah gaya lorentz,  $F_G$  adalah gaya gesek.

#### e. Gaya Tarik Gesekan

Gaya tarik gesekan adalah gaya yang bekerja pada partikel air dan partikel pasir besi yang berfungsi menjaga keseimbangan dari 2 partikel tersebut. Gaya tarik gesekan terjadi akibat gesekan dari fluida dengan permukaan objek yang dilewatinya. Gaya tarik gesekan dari aliran dua fasa didefinisikan sebagai berikut:

$$F_g = \beta(v_a - v_p) \quad (2.7)$$

dimana ( $\beta$ ) adalah koefisien perpindahan momentum ( $v_a, v_p$ ) adalah kecepatan air dan kecepatan pasir (Bello, dkk, 2008).

## f. Tegangan Geser

Tegangan geser adalah jenis tegangan yang terjadi saat dua lapisan atau bagian dari sebuah benda padat bergeser atau meluncur terhadap satu sama lain. Tegangan geser diperoleh dari perbandingan antara gaya yang bekerja pada fluida dengan luas permukaan plat oleh karena itu rumus tegangan geser didefinisikan sebagai berikut.

$$\tau = \mu_0 \frac{du}{dy} \quad (2.8)$$

dengan  $(\mu_0)$  adalah faktor proporsionalitas,  $(u)$  adalah laju aliran disepanjang batasan,  $(y)$  adalah ketinggian diatas batasan (Co & Bird, 1997).

## g. Gaya Permukaan

Gaya permukaan adalah gaya yang bekerja pada sebuah objek atau zat karena kontak dengan permukaan lainnya. Gaya ini muncul sebagai respons terhadap interaksi antara molekul atau partikel di permukaan objek dengan molekul atau partikel di permukaan lainnya. Gaya permukaan ini dapat terjadi pada berbagai materi, termasuk cairan, padatan, dan gas. Persamaan Gaya permukaan adalah sebagai berikut (Bello, dkk, 2008):

$$F_s = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial y}, i, y = x, y \quad (2.9)$$

dengan  $P$  adalah tekanan dalam pascal ( $p_a$ ) dan  $T$  adalah tegangan geser.

## 2. Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat lebih dari satu variabel bebas. Persamaan diferensial diklasifikasikan sebagai berikut (Gunawan, 2021).

### a. Kehomogenan

Persamaan diferensial dikatakan tak homogen jika pada persamaan diferensial parsial terdapat dua fungsi yang berbeda dan tidak terikat dengan turunannya. Contohnya adalah sebagai berikut (Gunawan, 2021).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_d}{\partial x} + V \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right. \\ & \left. - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\beta}{\rho} (u_a - u_p) + g \sin\left(\frac{x}{a}\right) \left( -\frac{\mu}{\rho} \frac{1}{6} d^3 \rho_a \right. \\ & \left. + \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{6} d^3 \rho_p - 1 - \beta(T - T_\infty) + O(T - T_\infty)^2 \right) + \frac{\mu}{\rho} Bil \end{aligned} \quad (2.11)$$

Pada persamaan 2.10 tidak ada fungsi lain yang berbeda sedangkan pada persamaan 2.11 terdapat fungsi  $g \sin \frac{x}{a}$  yang tidak bergantung pada kecepatan.



## b. Orde

Orde adalah turunan tertinggi dari persamaan itu sendiri. Contohnya dapat diberikan pada persamaan berikut (Gunawan, 2021).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.13)$$

Pada persamaan 2.12 merupakan persamaan diferensial parsial orde satu dan pada persamaan 2.13 merupakan persamaan diferensial orde dua.

## c. Kelinieran

Persamaan diferensial parsial dikatakan linear jika persamaan diferensial parsial jika suku atau operator dalam persamaan tersebut tidak mengandung hasil kali atau pangkat dari fungsi turunannya (Gunawan, 2021).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.15)$$

Persamaan 2.14 adalah linear karena semua suku dalam persamaan adalah linear terhadap  $u$  dan turunannya. Artinya, tidak ada hasil kali atau pangkat lain dari  $u$  atau turunannya. Persamaan 2.15 adalah non linear karena suku kedua di sebelah kiri persamaan  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  merupakan hasil kali antara  $u$  dan turunannya sendiri (Gunawan, 2021).

### 3. Persamaan Aliran Fluida

Pemodelan matematika fluida membutuhkan persamaan pembangun untuk memodelkannya dalam bentuk persamaan matematika. Persamaan pembangun yang digunakan pada penelitian ini diantaranya sebagai berikut:

#### a. Persamaan Kontinuitas

Menurut Munson, dkk (2015) Kecepatan perubahan massa dalam suatu sistem tidak ada, atau jumlahan DKL (Deretan Kecepatan Likuid) dari massa sistem tetap persamaan kontinuitas didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (2.16)$$

#### b. Persamaan Momentum

Menurut Munson, dkk (2015) besar momentum dalam kaitanya dengan waktu akan setara dengan besarnya gaya total yang mempengaruhi sistem, persamaan momentum didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho v d\forall + \int_{cs} \rho v ds = \int_{cs} F d\forall \quad (2.17)$$

dengan  $v$ ,  $d\forall$ ,  $\rho$ ,  $F$ ,  $cv$ ,  $cs$  berturut turut adalah kecepatan, differensial volum, massa jenis, gaya, kontrol volume, kontrol surface.

#### c. Persamaan Non Dimensional

Menurut Siswono (2015), Persamaan non-dimensional adalah alat penting dalam pemodelan matematika dan

ilmu fisika untuk mengurangi kompleksitas sistem dengan menghilangkan satuan ukuran. Dengan memperkenalkan variabel non-dimensional, seperti bilangan Reynolds dalam mekanika fluida, atau bilangan Prandtl dalam transfer panas, kita dapat mengekspresikan fenomena yang sama pada skala yang berbeda dengan cara yang seragam. Ini memungkinkan perbandingan yang lebih mudah antara berbagai situasi fisik dan memungkinkan generalisasi yang lebih luas dari hasil yang diperoleh dari pemodelan matematika dan eksperimen fisik.

#### **d. Persamaan Similaritas**

Menurut Siswono (2015), Persamaan similaritas adalah alat matematika yang kuat dalam analisis perbandingan fenomena fisika yang berbeda namun memiliki karakteristik yang serupa. Dengan memanfaatkan prinsip-prinsip fisika dasar, persamaan similaritas mengidentifikasi variabel non-dimensional yang relevan dan menggabungkannya dalam bentuk yang sama. Ini memungkinkan kita untuk menggeneralisasi hasil eksperimen dari satu sistem ke sistem lainnya yang serupa secara fisik, tanpa harus mengulangi eksperimen yang mahal dan rumit. Persamaan similaritas sering digunakan dalam berbagai bidang ilmu, termasuk mekanika fluida, transfer panas, dan mekanika bahan, memfasilitasi pemahaman yang lebih baik tentang fenomena alam yang kompleks.

#### **4. Aliran Dua Fasa**

Aliran dua fasa merupakan istilah yang digunakan untuk dua jenis fluida berbeda yang mengalir dalam satu sistem (Bello, dkk, 2008). Pada penelitian ini mengkaji tentang aliran dua fasa yang mengalir pada suatu sistem pipa solenoida. Fasa fluida yang digunakan pada penelitian ini yaitu fasa air dan fasa pasir besi. Pada Gambar 2.1 merupakan gambar dua dimensi dari pipa solenoida yang dialiri fluida dua fasa. Gaya vertikal di sebuah sistem aliran fluida dua fasa air dan pasir besi adalah gaya apung, gaya lorentz, dan gaya gravitasi. Pada gaya horizontal gaya yang bekerja adalah gaya gesek dan gaya tarik gesekan.

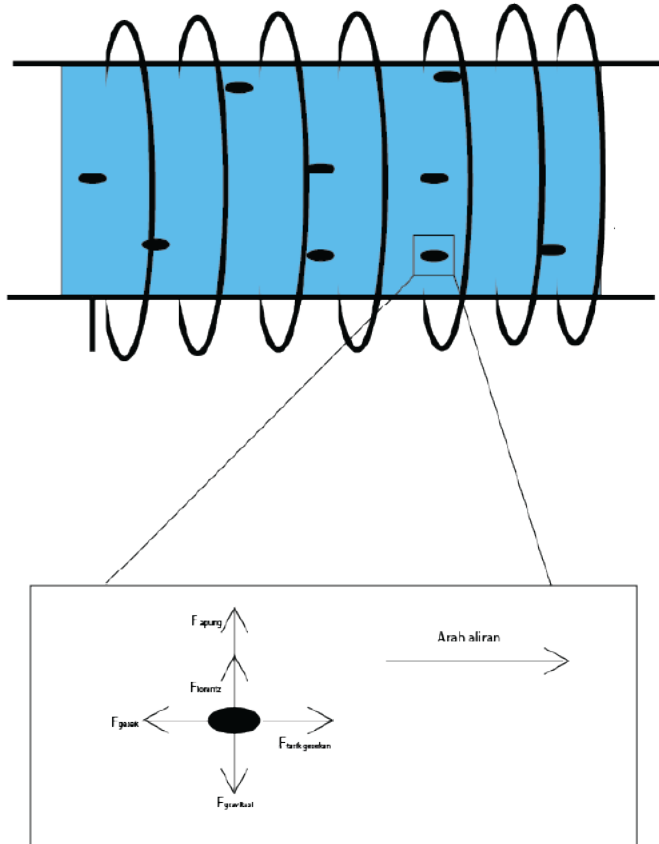
Pada kondisi khusus tentunya memiliki karakteristik tertentu. Tahapan inilah peneliti mengkaji kondisi dari fluida dua fasa air – pasir besi yang melewati pipa terlilit kumparan solenoida. Pada Gambar 2.1 ditunjukkan gambar oval hitam adalah pasir besi dan lilitan pada pipa adalah kumparan solenoida.

#### **5. Pipa Solenoida**

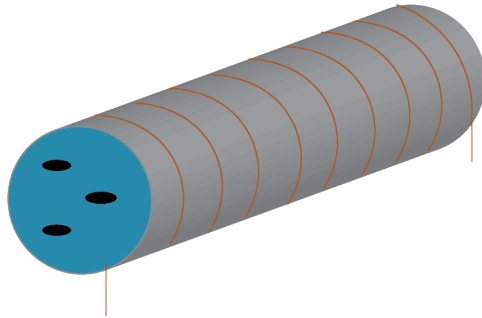
Pipa solenoida merupakan pipa konduktor yang dirancang khusus dengan lilitan solenoida disekitar pipa. Solenoida adalah kumparan kawat yang dapat menghantarkan arus listrik serta menimbulkan gaya lorentz, ketika arus listrik mengalir melalui lilitan tersebut akan menimbulkan medan magnet yang akan mempengaruhi partikel yang mengalir pada pipa tersebut (Setiadi, dkk, 2015).

##### **a. Arus Listrik**

Arus listrik merupakan aliran listrik yang mengalir pada suatu rangkaian akibat dari adanya tegangan listrik dan



Gambar 2.1. Skema representasi aliran dua fasa



Gambar 2.2. Pipa solenoida

muatan listrik pada medium konduktor (Hutalagung, dkk, 2018). Arus listrik didapatkan dari hasil membandingkan antara tegangan listrik dan muatan listriknya. Arus listrik berdasarkan jenisnya dibedakan berdasarkan sifatnya yaitu: arus listrik satu arah dan arus listrik bolak - balik.

**b. Kumparan**

Kumparan adalah seutas kawat yang dililitkan melingkar atau spiral (Budiyanto, & Agus, 2021 ). Kumparan berfungsi sebagai penghantar arus listrik, semakin banyak jumlah lilitan dan kerapatan lilitanya akan memperkuat arus listrik yang dihasilkan. Bahan kawat yang digunakan sebagai solenoida adalah aluminium dan tembaga atau bisa juga terbuat dari bahan konduktor lainnya.

**c. Medan Magnet**

Medan magnet adalah wilayah yang disekitarnya memiliki gaya magnet. Medan magnet akan mempengaruhi benda - benda yang memiliki sifat magnetik. Menurut Budiman, dkk

(2012) formula yang digunakan untuk mencari kuat medan magnet adalah

$$B = \frac{\mu_o I N}{2r} \quad (2.18)$$

dengan  $B$  adalah medan magnet (T),  $I$  adalah kuat arus listrik (A),  $r$  adalah jari-jari lingkarann(m),  $\mu_o$  adalah permebailitas ruang hampa, dan  $N$  adalah jumlah lilitan.

#### d. **Viskositas**

Viskositas merupakan suatu nilai yang mendeskripsikan kemampuan bertahan fluida terhadap tegangan yang diterima. Semakin besar nilai viskositas maka semakin sukar fluida untuk dipengaruhi oleh gaya-gaya yang bekerja (Norasia, dkk. 2023).

## 6. **Hukum Kedua Newton**

Hukum kedua Newton, juga dikenal sebagai hukum gerak, menyatakan bahwa percepatan suatu objek sebanding dengan gaya total yang diberikan padanya, dan berbanding terbalik dengan massa objek tersebut. Dengan kata lain, jika gaya yang diberikan pada suatu objek diketahui, maka percepatannya dapat dihitung dengan membagi gaya tersebut dengan massa objek tersebut. Hukum ini memberikan dasar matematis yang penting dalam memahami gerakan objek dan digunakan secara luas dalam berbagai bidang ilmu, mulai dari mekanika klasik hingga aplikasi modern dalam teknologi dan ilmu kehidupan. Konsep ini menjadi dasar bagi pemahaman kita tentang gerak benda di bumi, gerak planet, dan bahkan perilaku partikel sub-atom (Bello, dkk, 2008).

Hukum ke-dua Newton didefinisikan oleh persamaan berikut:

$$\sum F = m.a \quad (2.19)$$

dengan  $\sum F$  adalah jumlah total gaya yang bekerja dalam sistem ( $N$ ),  $m$  adalah massa ( $kg$ ), dan  $a$  adalah percepatan objek ( $\frac{m}{s^2}$ )

## 7. Teorema Angkut Reynolds

Menurut Munson, dkk (2002) teorema angkut Reynolds adalah prinsip fundamental dalam mekanika fluida yang menyatakan bahwa jumlah massa yang keluar dari suatu aliran melalui suatu kontur tertutup dalam sistem tetap sama dengan perubahan jumlah momentum dalam sistem tersebut. Dengan kata lain, teorema ini menjelaskan keterkaitan antara perubahan momentum dan aliran massa dalam sistem fluida. Prinsip ini penting dalam berbagai aplikasi, termasuk dalam perencanaan desain aliran fluida dalam mesin dan sistem pipa, serta dalam pemahaman aliran fluida dalam lingkungan alamiah seperti sungai atau atmosfer. Teorema angkut Reynolds memberikan dasar matematis yang kokoh untuk analisis aliran fluida dan sering digunakan dalam pembangunan model matematika yang kompleks untuk memprediksi perilaku aliran fluida dalam berbagai situasi. Teorema angkut Reynolds didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{sys}} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho \bar{n} \mathbf{V} dA \quad (2.20)$$

dengan  $\rho$  adalah kerapatan massa,  $V$  adalah volume sistem,  $S$  adalah permukaan sistem,  $\mathbf{V}$  adalah kecepatan fluida,  $\bar{n}$  adalah



vektor normal, dan  $t$  adalah waktu.

## 8. Teorema Gauss

Menurut Munson, dkk (2008) teorema gauss adalah salah satu dari teorema fundamental dalam kalkulus vektor yang menghubungkan integral suatu vektor medan melintasi suatu permukaan tertutup dengan integral divergensi dari vektor medan di dalam volume yang dibatasi oleh permukaan tersebut. Dalam fisika, teorema ini memiliki aplikasi luas, termasuk dalam elektromagnetisme medan listrik dan medan magnet, serta dalam mekanika aliran fluida melalui permukaan tertutup. Teorema Gauss juga memberikan landasan penting dalam berbagai bidang ilmu yang memerlukan pemahaman tentang aliran, distribusi, dan sifat vektor medan dalam ruang tiga dimensi. Teorema gauss didefinisikan sebagai berikut (Siswono, 2015):

$$\int_V \nabla(\rho \mathbf{V}) dV = \int_S \rho \mathbf{V} \bar{n} dA \quad (2.21)$$

dengan  $\rho$  adalah kerapatan massa,  $V$  adalah volume sistem,  $S$  adalah permukaan sistem,  $\mathbf{V}$  adalah kecepatan fluida,  $\bar{n}$  adalah vektor normal, dan  $\nabla$  adalah divergensi vektor dari  $\rho \mathbf{V}$ .

## 9. Variabel Tegangan Stress Cauchy

Variabel tegangan Cauchy adalah representasi matematis dari distribusi tegangan dalam sebuah benda kontinu (Munson, dkk, 2002). Tensor ini diberi nama sesuai dengan matematikawan Augustin-Louis Cauchy. Dalam konteks dinamika fluida, tensor tegangan Cauchy sering digunakan untuk menggambarkan tegangan pada suatu titik dalam benda. Tensor tegangan Cauchy

adalah tensor simetris yang memuat empat komponen tegangan: dua komponen normal (tegangan normal) yang menunjukkan tegangan yang bekerja tegak lurus terhadap bidang elemen yang diambil dan dua komponen geser (tegangan geser) yang menunjukkan tegangan yang bekerja sejajar dengan bidang elemen yang diambil. Representasi matematis dari tensor tegangan Cauchy bisa dinyatakan dalam bentuk matriks (Siswono, 2015):

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & \delta_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

yang dimana  $\delta_{xx}$  dan  $\delta_{yy}$  adalah komponen tegangan normal dimana pada saat dua partikel relatif diam maka koefisien gesekan yang digunakan adalah koefisien gesek statis ( $\mu_0$ ) dan vektor gradien kecepatan tegak lurus terhadap permukaan.  $T_{xy}$  dan  $T_{yx}$  adalah komponen tegangan geser pada saat partikel relatif bergerak maka koefisien gesekan yang digunakan adalah koefisien gesek kinetis ( $k_0$ ) dan vektor gradien kecepatan sejajar dengan bidang permukaan.

## 10. Metode Beda Hingga

Matematika mengenal metode beda hingga sebagai cara untuk mencari nilai perkiraan persamaan diferensial. Menurut Munson, dkk (2002) Metode beda hingga terbagi menjadi tiga metode aproksimasi yaitu beda maju, beda pusat, beda mundur, berikut skema dari tiga metode aproksimasi metode beda hingga:

### a. Beda Maju

$$\begin{aligned}
 f(x + \Delta x) &= f(x) + f'(x)\Delta x + f''(x)(\Delta x)^2 + \dots \\
 f(x + \Delta x) &\approx f(x) + f'(x)\Delta x \\
 f'(x) &\approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

### b. Beda Mundur

$$\begin{aligned}
 f(x - \Delta x) &= f(x) - f'(x)\Delta x + f''(x)(\Delta x)^2 + \dots \\
 f(x - \Delta x) &\approx f(x) - f'(x)\Delta x \\
 f'(x) &\approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

### c. Beda Pusat

$$\begin{aligned}
 f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) &\approx f(x) + f'(x)\Delta x - (f(x) - f'(x)\Delta x) \\
 f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) &\approx 2f'(x)\Delta x \\
 f'(x) &\approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

## 11. Metode Gauss Siedel

Metode Gauss-Seidel adalah metode iteratif yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Metode ini sering digunakan dalam perhitungan numerik karena kecepatan dan keandalannya. Metode ini dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang memiliki lebih dari satu variabel (Ihsan, dkk, 2024). Prinsip dari metode Gauss siedel adalah mencari nilai variabel masing-masing orde yang kemudian akan

dihitung nilai error nya dengan mengurangkan variabel setelah dengan variabel sebelum kemudian dibagi dengan variabel setelahnya (Tafrikan, dkk, 2015). Adapun metode Gauss siedel diberikan dalam bentuk (Ihsan, dkk, 2024) :

$$x_i^k = \frac{1}{A} \left[ (ax_i^k) - \sum_{i=1}^n (bx_i^{k-1}) + ci \right] \quad (2.26)$$

untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , iterasi dihentikan saat tingkat keakuratan sesuai yang dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut (Ihsan, dkk, 2024):

$$\left| \frac{x_i^k - x_i^{k-1}}{x_i^k} \right| < \epsilon \quad (2.27)$$

dengan  $\epsilon$  adalah tingkat akurasi yang ingin dicapai dan  $i = 1, 2, 3, \dots, n$

## B. Penelitian Terdahulu

1. Ebrahimi (2019) dengan penelitiannya berjudul *Dynamics of two phase flow in vertical pipes*. Penelitian yang dilakukanya adalah membangun model matematika yang digunakan untuk analisis dinamis dari aliran dua fasa pada pipa vertikal dengan mempertimbangkan perbedaan model aliran dua fasa yang di tambahkan gaya penghilang energi. Tujuan dari penelitian ini adalah menunjukkan respon dinamis dari pipa secara substansial yang bergantung pada jumlah total volumetrik gas. Penelitian ini menghasilkan peta stabilitas numerik yang menunjukkan bahwa aliran dua fasa lebih tidak stabil jika dibandingkan dengan fasa tunggal.

2. Shadloo (2020) melakukan penelitian berjudul *Estimation of pressure drop of two phase flow in horizontal long pipes using artificial neural networks*. Meneliti tentang aliran dua fasa gas - air melewati pipa panjang pada industri perminyakan dan energi gas. Penelitian ini bertujuan untuk memprediksi perubahan tekanan berdasarkan diameter pipa dan karakteristik fluida. Hasil penelitian ini berupa grafik tiga dimensi dengan variasi diameter pipa, input jumlah total volum cairan, indeks perilaku aliran, koefisien konsistensi fluida untuk mengestimasi penurunan tekanan.
3. Lin (2020) dalam penelitiannya yang berjudul *Prediction of two phase flow pattern in upward inclined pipes via deep learning* melakukan penelitian dengan mengidentifikasi pola aliran jika penambahan variabel independen atau parameter lebih di prioritaskan dari pada kecepatan *superficial* fluida. Tujuan penelitian ini adalah memprediksikan pola aliran pada pipa vertikal. Penelitian ini mendapat hasil prediksi aliran fluida dua fasa dengan parameter arah sudut aliran  $0^\circ - 90^\circ$ .
4. Saputra (2023) dengan judul Analisis Pengaruh Pola Aliran Multifasa Minyak dan Gas Terhadap *Pressure Loss* Pada Pipa Vertikal dengan Ansys Fluent. Melakukan penelitian untuk mengetahui bagaimana pengaruh pola aliran dan viskositas terhadap pengurangan tekanan yang terjadi pada pipa vertikal pada GOR rendah dengan bantuan software Ansys Fluent untuk memvisualisasikan aliran fluida didalam pipa vertikal. Tujuan dilakukan penelitian ini adalah mengetahui pengurangan tekanan yang terjadi pada awal

fluida memasuki pipa. Didapat hasil penelitian berupa hasil dari variasi terhadap kecepatan minyak dan gas sehingga aliran multifasa memiliki pola aliran yang berbeda, dan pada variasi viskositas didapat hasil pada viskositas 10 cP sampai 2000 cP memiliki penurunan tekanan yang besar dibandingkan dengan viskositas 3000 cP.

5. Herrapstanti (2022) dalam penelitian yang berjudul Kaji Eksperimental Aliran Dua Fase *Water-Crude Oil* Melewati Pipa Horizontal dengan Variasi Putaran Kecepatan Pompa. Membahas penelitian dengan identifikasi pola dan situasi aliran minyak melewati pipa yang penampangnya dapat diubah secara mendadak dari diameter 0.014 m sampai 0.021 m. Penelitian ini bertujuan untuk mendapat hasil visualisasi aliran pada daerah pemuaihan didalam pipa akrilik transparan. Penelitian ini mendapatkan hasil laju aliran tertinggi yaitu  $0.00032 \text{ m}^3/\text{s}$ , dan laju aliran terendah yaitu  $0.0002 \text{ m}^3/\text{s}$ .
6. Jati (2021) dalam penelitian yang berjudul Simulasi CFD Dinamika Kecepatan Gelombang Aliran *Stratified Wavy* Dua Fasa Minyak-Air Pada Pipa *Horizontal*. Melakukan simulasi 2 dimensi terhadap fluida campuran minyak dan air pada pipa berdiameter 24 mm dan panjang 1200 mm dengan 4 variasi kecepatan. didapatkan hasil penelitiannya peningkatan rata-rata tebal film selaras peningkatan kecepatan superfisial air, hasil tersebut didapatkan dari simulasi bentuk gelombang dan kecepatan gelombang fluida.

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

#### **A. Tahap Penelitian**

Atas dasar penjabaran masalah yang dijelaskan pada bab sebelumnya, tiga tahap analisa digunakan untuk menyelesaikan penelitian ini yaitu : analisa tahap permasalahan, analisa tahap implementasi, dan analisa tahap penyelesaian.

##### **1. Tahap Analisa Permasalahan**

Peneliti mengumpulkan informasi-informasi tentang semua hal yang terkait dengan langkah-langkah penelitian, misal mengenai karakteristik aliran fluida dua fasa, lapisan batas, gaya Lorentz, gaya tarik gesekan, dan yang lainnya.

Mengacu pada penjelasan tersebut, untuk menjawab semua permasalahan yang sudah ditentukan peneliti melakukan langkah-langkah berikut ini dilaksanakan:

- I. Studi literatur.
- II. Menganalisa karakteristik aliran dua fasa air - pasir besi.
- III. Menganalisa karakteristik keadaan pipa solenoida.
- IV. Menurunkan persamaan konservasi massa, hukum Newton 2.
- V. Menyederhanakan persamaan konstitutif untuk memperoleh persamaan dimensional.

## 2. Tahap Implementasi

Pada proses penyelesaian masalah ini peneliti menggunakan metode beda hingga. Penulis mendiskritisasi persamaan diferensial orde dua dengan memakai metode beda hingga atau disebut juga dengan persamaan similaritas berikut tahapan untuk memperoleh persamaan similaritas:

- I. Mensubstitusikan variabel non dimensional yang bertujuan mentransformasikan persamaan dimensional ke bentuk persamaan non dimensional.
- II. Mengubah persamaan non dimensional ke bentuk persamaan similar menggunakan substitusi fungsi aliran (*stream function*)

## 3. Tahap Penyelesaian Akhir

Tahap ini menjabarkan langkah langkah analisa tahap akhir yaitu sebagai berikut:

- I. Hasil diskritisasi persamaan similaritas di hitung dengan menggunakan program MATLAB 2019a.
- II. Dilakukan variasi pada parameter arus listrik ( $i$ ), jumlah lilitan ( $n$ ), viskositas ( $V$ )
- III. Visualisasi hasil perhitungan dengan program MATLAB 2019a.
- IV. Analisa hasil numerik dari pengaruh parameter.



## BAB IV

### HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini peneliti membangun model matematika dari fluida aliran dua fasa yaitu fasa air dan fasa pasir besi yang melewati pipa solenoida. Sesuai pada Gambar 2.1 untuk merumuskan pemodelan pada kasus ini peneliti menggunakan persamaan konservasi massa dan persamaan momentum.

#### A. Persamaan Pembangun

Persamaan-persamaan yang peneliti gunakan untuk membangun model aliran fluida dua fasa air dan pasir besi yaitu persamaan kontinuitas dan persamaan momentum.

##### 1. Persamaan Kontinuitas

Menurut Munson, dkk (2002) aliran fluida memiliki medan magnet yang melewati suatu silinder, dapat dikonstruksikan dengan persamaan kontinuitas. Sebuah sistem dinyatakan tidak mengalami perubahan pada partikel air maupun partikel besinya dengan kata lain sistem dinyatakan sebagai sistem yang kekal. Nilai massa pada suatu sistem bisa kita dapatkan dengan menjumlahkan semua partisi volume di sepanjang sistem di kalikan dengan massa, atau dapat dituliskan dengan bantuan integral sebagai berikut:

$$\begin{aligned} M &= \rho V \\ M_{sys} &= \rho \Delta V_1 + \rho \Delta V_2 + \rho \Delta V_3 + \dots \\ M_{sys} &= \int_{V_{sys}} \rho d\forall \end{aligned} \tag{4.1}$$

persamaan diatas menjelaskan bahwasanya nilai massa dalam satu komposisi akan sebanding dari nilai jumlah multiplikasi massa jenis dengan volum dari isi sistem. Prinsip kekekalan massa yaitu pada suatu sistem perubahan massa terhadap waktu adalah nol,

$$\frac{\partial M_{sys}}{\partial t} = 0 \quad (4.2)$$

Untuk sistem volum tetap dan terdeformasi pada waktu tetap diberlakukan teorema angkut *Reynolds* yaitu sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{sys}} \rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\forall + \int_S \rho \bar{n} \mathbf{V} dA \quad (4.3)$$

dengan mensubstitusikan persamaan 4.1 ke persamaan 4.3 didapatkan persamaan berikut:

$$\frac{\partial M_{sys}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\forall + \int_S \rho \bar{n} \mathbf{V} dA \quad (4.4)$$

dari hasil substitusi persamaan 4.2 akan diperoleh :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\forall + \int_S \rho \bar{n} \mathbf{V} dA \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\forall &= - \int_S \rho \mathbf{V} \bar{n} dA \end{aligned} \quad (4.5)$$

Persamaan yang dihasilkan menunjukkan rata-rata massa jenis total didalam sistem, integral *surface* kemudian ditransformasi menjadi integral volum ( $\forall$ ) dengan memanfaatkan teorema Gauss yang

dijelaskan oleh persamaan dibawah ini:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \rho \int_V dV &= - \int_V \nabla(\rho \mathbf{V}) dV \\
 \frac{\partial}{\partial t} \rho \int_V dV + \int_V \nabla(\rho V) dV &= 0 \\
 \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla(\rho \mathbf{V}) dV &= 0 \\
 \int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}) \right) dV &= 0 \\
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \rho + \frac{\partial v}{\partial y} \rho &= 0
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

## 2. Persamaan Momentum

Aliran fluida dua fasa pada penelitian ini melaju pada pipa horizontal dengan pipa berdiameter  $d$ . Aliran fluida yang bergerak selaras dengan pergerakan partikel - partikelnya. Setiap partikel yang bergerak tidak bisa lepas dengan efek hukum kedua newton. Menurut Munson, dkk (2002) percepatan gerak partikel dari impulsnya akan mengakibatkan momentum linearnya akan sebanding jumlahnya dengan seluruh gaya luaran yang berada pada komposisi kontrol.

Momentum dijelaskan sebagai kemampuan fluida untuk menerima tegangan, maka momentum fluida yang berada pada komposisi kontrol dinyatakan sebagai  $V \rho dV$ , oleh karena itu momentum seluruh sistemnya adalah:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{sys}} \rho V dV \tag{4.7}$$

dengan hukum kedua Newton didefinisikan oleh persamaan

dibawah ini:

$$\begin{aligned}
 ma &= \sum F \\
 \rho V \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= \sum F \\
 \int_{V_{sys}} \rho d\mathcal{V} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= \sum F \\
 \frac{\partial}{\partial t} \int_{sys} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} &= \sum F
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

dengan teorema angkut reynolds diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{sys} \rho V d\mathcal{V} + \int_S V \rho \mathbf{V} \bar{n} dA = \sum F \tag{4.9}$$

maka dari hasil perhitungan diatas akan didapatkan persamaan dibawah ini:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{sys} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho V d\mathcal{V} + \int_S V \rho \mathbf{V} \bar{n} dA \tag{4.10}$$

$V \cdot \bar{n}$  dijelaskan sebagai kecepatan partikel yang memiliki sudut tegak terhadap muka bidang kontrol. Integral *surface* mempresentasikan kontrol terhadap momentum yang bergerak melewati muka bidang kontrol. Kontrol tersebut berlaku untuk fluida yang masuk maupun fluida yang keluar.

$$\rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \nabla V \right) = \sum F \tag{4.11}$$

dengan  $\sum F$  adalah gaya gaya pada volum kendali yaitu gaya permukaan ( $F_s$ ), gaya lorentz ( $F_L$ ), gaya apung ( $F_{apung}$ ), gaya gesek ( $F_{ges}$ ), gaya tarik gesekan ( $F_{tges}$ ), dan gaya gravitasi ( $F_g$ )

yang ditulis menjadi persamaan sebagai berikut:

$$\sum F = F_S + F_L + F_{apung} + F_{ges} + F_{tges} + F_G \quad (4.12)$$

dengan mensubstitusikan persamaan 4.12 ke persamaan 4.11 didapat persamaan berikut:

$$\rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \nabla V \right) = F_S + F_L + F_{apung} + F_{ges} + F_{tges} + F_G \quad (4.13)$$

## B. Penurunan Persamaan Pembangun

Persamaan kontinuitas dan persamaan momentum yang dihasilkan sekarang dibahas dalam persamaan konstitutifnya. Persamaan konstitutif yang dihasilkan ditransformasikan menjadi persamaan nondimensional, kemudian persamaan nondimensional tersebut diubah menjadi persamaan similaritas dan diselesaikan dengan metode numerik.

### 1. Penurunan Persamaan Momentum

Persamaan momentum yang kita dapatkan, kita uraikan sesuai dengan arah dari momentum sistemnya. Dimensi arah dua dimensi diterapkan pada kasus ini dimana mekanisme momentum fluida bekerja pada arah horizontal dan vertikal. Persamaan momentum di sumbu-x

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + F_x \quad (4.14)$$

Persamaan momentum di sumbu-y

$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + F_y \quad (4.15)$$

Untuk aliran fluida memori pendek, model fluida Walters B digunakan dengan tegangan geser saat mengembangkan persamaan momentum kesetimbangan. Untuk fluida dua fasa menggunakan variabel stress cauchy yang persamaanya diberikan sebagai berikut (siswono, 2015):

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & \delta_{yy} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

tegangan normal pada partikel yang relatif diam nilainya akan sama dengan  $\delta_{xx} = \mu_0(d_{xx})$ ,  $\delta_{yy} = \mu_0(d_{yy})$  dengan  $\mu_0$  adalah koefisien gesek statis dan  $d$  adalah gradien kecepatan fluida pada saat partikel pasir besi dalam keadaan diam, serta tegangan geser pada partikel bergerak nilainya akan sama dengan  $T_{xy} = -k_0(\hat{d}_{xy})$ ,  $T_{yx} = -k_0(\hat{d}_{yx})$  dengan  $k_0$  adalah koefisien gesek kinetis dan  $\hat{d}$  adalah gradien vektor kecepatan fluida pada saat partikel besi relatif bergerak. Pada saat partikel pasir besi tepat akan bergerak nilai koefisien gesek kinetis akan mengurangi koefisien gesek statis maka koefisien gesek kinetis bernilai negatif (-). Oleh karena itu persamaan dapat di ubah menjadi sebagai

berikut:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mu_0 d_{xx} & -k_0 \hat{d}_{xy} \\ -k_0 \hat{d}_{yx} & \mu_0 d_{yy} \end{bmatrix}, x = y \\
 &= \begin{bmatrix} \mu_0 d_{xx} & 0 \\ 0 & \mu_0 d_{yy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -k_0 \hat{d}_{xy} \\ -k_0 \hat{d}_{yx} & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & \mu_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{xx} \\ d_{yy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -k_0 \\ -k_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{d}_{xy} \\ \hat{d}_{yx} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & \mu_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -k_0 \\ -k_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{d} \\ \hat{d} \end{bmatrix} \tag{4.17} \\
 &= \begin{bmatrix} \mu_0 d & -k_0 \hat{d} \\ -k_0 \hat{d} & \mu_0 d \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T &= T_x + T_y \\
 &= \mu_0 d - k_0 \hat{d} + \mu_0 d - k_0 \hat{d} \\
 &= 2\mu_0 d - 2k_0 \hat{d}
 \end{aligned}$$

vektor gradien kecepatan  $\hat{\mathbf{d}}$  dapat dijelaskan dengan persamaan dibawah:

$$\hat{\mathbf{d}} = V \nabla(\mathbf{d}) - (\mathbf{d}) \cdot (\nabla V)^T - \nabla V(\mathbf{d}) \tag{4.18}$$

yang dimana terdapat tiga kondisi yaitu: pada saat kecepatan berubah terhadap perubahan vektor gradien kecepatan yang direpresentasikan dengan  $V \nabla(\mathbf{d})$ , pada saat perubahan kecepatan di arah berlawanan dengan vektor gradien kecepatan akan mempengaruhi vektor gradien kecepatan yang direpresentasikan dengan  $(\mathbf{d}) \cdot (\nabla V)^T$ , dan pada saat perubahan kecepatan yang arahnya sejajar dengan vektor gradien kecepatan akan

mempengaruhi perubahan vektor gradien kecepatan yang direpresentasikan dengan  $\nabla V(\mathbf{d})$  mengacu pada persamaan 4.18 akan didapat  $2\hat{\mathbf{d}}$  seperti dibawah:

$$2\hat{\mathbf{d}} = V\nabla(2\mathbf{d}) - (2\mathbf{d}).(\nabla V)^T - \nabla V(2\mathbf{d}) \quad (4.19)$$

oleh karena itu dari hasil diatas persamaan 4.17 dapat ditulis sebagai berikut:

$$T_{ij} = \mu_0(2\mathbf{d}_{ij}) - k_0(V\nabla(2\mathbf{d}_{ij}) - (2\mathbf{d}_{ij})(\nabla V)^T - \nabla V(2\mathbf{d}_{ij})) \quad (4.20)$$

dengan:

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right], i = x, y; \text{ dan } j = x, y \quad (4.21)$$

komponen tegangan geser diperoleh dari hasil perhitungan diatas yaitu:

a. untuk  $i = x, j = x$ , diperoleh

$$T_{xx} = 2\mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) - k_0 \left[ 2u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (4.22)$$

b. untuk  $i = x, j = y(T_{xy})$  dan  $i = y, j = x(T_{yx})$  bernilai sama



sehingga diperoleh :

$$T_{yx} = \mu_0 \left( v \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial y} \right) - k_0 \left[ u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (4.23)$$

c. untuk  $i = y, j = y$ , diperoleh:

$$T_{yy} = 2\mu_0 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) - k_0 \left[ 2u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 4 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (4.24)$$

selanjutnya persamaan 4.22, 4.23, dan 4.24 diturunkan terhadap x dan y agar persamaan 4.14 dan 4.15 terpenuhi, dari hasil penurunan tersebut maka akan diperoleh persamaan dibawah ini:

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} = 2\mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - k_0 \left( -6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} &= \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - k_0 \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right. \\
&+ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\
&\left. - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} &= \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - k_0 \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\
&+ v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
&\left. - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \quad (4.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{yy}}{\partial y} &= 2\mu_0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left( 2u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \\
&\left. - 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.28)
\end{aligned}$$

langkah substitusi dilakukan pada persamaan 4.25 sampai 4,28 ke persamaan 4.14 dan 4.15 sehingga akan didapatkan komponen persamaan meomentum untuk sumbu horizontal dan vertikal:

Persamaan momentum sumbu-x:

$$\begin{aligned}
 \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[ 2\mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - k_0 \left( -6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \right. \\
 & - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \left. \left. \right) \right] + \left[ \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \right. \\
 & + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \left. \left. \right) - k_0 \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \right. \\
 & + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \\
 & \left. \left. - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] + F_x
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Persamaan momentum sumbu-y:

$$\begin{aligned}
 \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[ \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - k_0 \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right. \right. \\
 & + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \\
 & \left. \left. - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + \left[ 2\mu_0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right. \\
 & \left. - k_0 \left( 2u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] \\
 & + F_y
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Pada permasalahan aliran fluida dua fasa komponen gaya pada sumbu-x adalah gaya yang vektor arahnya sejajar dengan arah

horizontal, sedangkan komponen gaya berada pada sumbu-y adalah gaya yang vektor arahnya sejajar dengan sumbu vertikal oleh karena itu didapat persamaan gaya pada dua arah tersebut yaitu:

Gaya pada sumbu-x:

$$F_x = \beta(u_a - u_p) - \mu\left(\frac{1}{6}d^3\rho_a g + Bil - \frac{1}{6}d^3\rho_p g\right) \quad (4.31)$$

Gaya pada sumbu-y:

$$F_y = Bil + \frac{1}{6}d^3\rho_a g - \frac{1}{6}d^3\rho_p g \quad (4.32)$$

dari hasil uraian gaya pada arah horizontal dan vertikal maka dapat dibangun persamaan momentum 2 dimensi yaitu:.

Persamaan momentum sumbu-x

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[ 2\mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - k_0 \left( -6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] + \left[ \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - k_0 \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \right. \\ & \left. \left. + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] + \beta(u_a - u_p) - \mu\left(\frac{1}{6}d^3\rho_a g + Bil - \frac{1}{6}d^3\rho_p g\right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Persamaan momentum sumbu-y

$$\begin{aligned}
 \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[ \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - k_0 \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right. \right. \\
 & + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] \\
 & + \left[ 2\mu_0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left( 2u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. - 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] + Bil + \frac{1}{6} d^3 \rho_a g - \frac{1}{6} \rho d^3 \rho_p g \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

dengan mengalikan  $\frac{1}{\rho}$  ke kedua ruas didapatkan persamaan momentum yang lebih sederhana yaitu:

Persamaan momentum sumbu-x

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \left[ 2 \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left( -6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] + \left[ \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \right. \\
 & \left. \left. + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\beta}{\rho} (u_a - u_p) - \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{1}{6} d^3 \rho_a g + Bil - \frac{1}{6} d^3 \rho_p g \right) \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

Persamaan momentum sumbu-y

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \left[ \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right. \right. \\
& + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] \\
& + \left[ \frac{2\mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left( 2u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{Bil}{\rho} + \frac{1}{6\rho} d^3 \rho_a g - \frac{1}{6\rho} d^3 \rho_p g
\end{aligned} \tag{4.36}$$

menurut persamaan kontinuitas  $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$ , hasil persamaan momentum diatas dapat disederhanakan kembali agar didapat persamaan yang lebih sederhana yaitu seperti berikut ini:

Persamaan momentum sumbu-x

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + v \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{\partial u}{\partial x} \left( 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\beta}{\rho} (u_a - u_p) \\
& - \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{1}{6} d^3 \rho_a g + Bil - \frac{1}{6} d^3 \rho_p g \right)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Persamaan momentum sumbu-y

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) + v \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial u}{\partial x} \left( 3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] \right. \\
 & \left. + \frac{Bi_l}{\rho} + \frac{1}{6\rho} d^3 \rho_a g - \frac{1}{6\rho} d^3 \rho_p g \right)
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Persamaan momentum diatas yaitu Persamaan 4.37 dan 4.38 masih terlalu rumit jika diselesaikan, Kompleksitas dari persamaan diatas dapat di reduksi dengan teori lapisan batas. Fisikawan teoritis Ludwig Prandtl mengatakan di teorinya bahwa kompleksitas persamaan dapat disederhanakan menjadi sekumpulan persamaan pendekatan (Bejan, 2004). Besaran setiap suku persamaan disederhanakan agar didapat persamaan momentum yang lebih sederhana (Ozisik, 1985), (Siswono, 2015). Persamaan momen 4.37 dan 4.38 dinotasikan satuan 1 dan  $\Delta$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 u \approx 1, x \approx 1, v \approx \Delta, y \approx \Delta, \frac{k_0}{\rho} \approx \Delta^2, \frac{\mu_0}{\rho} \approx \Delta^2, \frac{\beta}{\rho} \approx \Delta^2, \\
 u_a - u_p \approx \frac{1}{\Delta^2}, g \approx 1, \frac{\mu}{\rho} \approx \Delta^2, \frac{\rho_a}{6} \approx \frac{1}{\Delta^2}, Bi \approx \frac{1}{\Delta^2}, \\
 \mu \approx \Delta^2, \frac{\rho_p}{6} \approx \frac{1}{\Delta^2}, \frac{1}{\rho} \approx \Delta^2
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

hasil perhitungan proses orde besarnya membuat persamaan momentum bernilai konstan disepanjang titik kecepatan. Hal itu disebabkan oleh kecepatan partikel pada arah vertikal bernilai konstan akibat tidak terpengaruh oleh gaya lorentz oleh karena itu perubahan momentum di sumbu-y bernilai nol.

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + V \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right. \\
 & \left. - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\beta}{\rho} (u_a - u_p) - \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{1}{6} d^3 \rho_a g + Bil \right. \\
 & \left. - \frac{1}{6} d^3 \rho_p g \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.40}$$

dengan  $V = \frac{\mu_0}{\rho}$  adalah viskositas kinematik.

Pada permasalahan fluida dua fasa air dan pasir besi, *pressure* ( $P$ ) adalah hasil jumlahan tekanan hidrostatis ( $P_h$ ) dengan tekanan dinamik ( $P_d$ ). Tekanan hidrostatis adalah tekanan yang diterima benda diam oleh fluida sedangkan tekanan dinamis adalah tekanan pada benda saat bergerak didalam fluida (Bello, dkk, 2008). Tekanan bisa didefinisikan sebagai:

$$P = P_h + P_d \tag{4.41}$$

*hydrostatic press*  $P_h$  di akibatkan oleh kedalaman fluida dua fasa dengan dinding pipa solenoida.

$$\nabla P_h = \rho_{\infty} g \tag{4.42}$$

$\rho_{\infty}$  yaitu massa jenis partikel dua fasa disekitar pipa. partikel dua



fasa terpengaruh oleh gaya tarik bumi yang arahnya kebawah, oleh karena itu perubahan dari tekananya yaitu:

$$\frac{\partial P_h}{\partial x} = -\rho_{\infty} g_x \quad (4.43)$$

oleh karena itu

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial P_d}{\partial x} - \frac{\partial P_h}{\partial x} = -\frac{\partial P_h}{\partial x} + \rho_{\infty} g_x \quad (4.44)$$

substitusi persamaan 4.44 ke persamaan momentum 4.40, sehingga didapat persamaan momentum berikut ini:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_d}{\partial x} + V \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\beta}{\rho} (u_a - u_p) - \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{1}{6} d^3 \rho_a g_x + Bil \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6} d^3 \rho_p g_x \right) + \frac{\rho_{\infty} g_x}{\rho} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Dalam dinamika aliran, aproksimasi Boussinesq digunakan pada fluida dengan sifat konveksi alami. Dikarenakan penelitian tersebut menggunakan konveksi aliran campuran yang merupakan gabungan antara konveksi alami serta konveksi buatan, maka pendekatan Boussinesq dapat diterapkan pada di permasalahan ini. Joseph Valentin Boussinesq dalam teori aproksimasi mengatakan kerapatan dari massa jenis suatu partikel yang sangat kecil bisa kita aproksimasikan sama dengan nol. Pendekatan ini digunakan untuk memperkirakan perbedaan kepadatan yang menyebabkan timbulnya aliran melalui kombinasi gaya tarik bumi

dan gradien tekanan dinamik di bawah suhu ideal. Nilai maksimal  $(T - T_\infty)$  dianggap sangat kecil (Leal, 1992) (Siswono, 2015),

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = 1 + \beta(T - T_\infty) + O(T - T_\infty)^2 \quad (4.46)$$

dan menurut (Nazar, dkk. 2003), perubahan kecepatan gaya tarik bumi untuk aliran di arah horizontal didefinisikan seperti dibawah:

$$g_x = g \sin\left(\frac{x}{a}\right) \quad (4.47)$$

dengan  $a$  adalah jari - jari pipa solenoida. Substitusikan persamaan 4.46 dan 4.47 ke dalam persamaan 4.45 sehingga didapatkan persamaan momentum sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_d}{\partial x} + V \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right. \\ & \left. - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\beta}{\rho} (u_a - u_p) + g \sin\left(\frac{x}{a}\right) \left( -\frac{\mu}{\rho} \frac{1}{6} d^3 \rho_a \right. \\ & \left. + \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{6} d^3 \rho_p - 1 - \beta(T - T_\infty) + O(T - T_\infty)^2 \right) + \frac{\mu}{\rho} Bil \end{aligned} \quad (4.48)$$

Persamaan 4.48 dievaluasi diluar lapisan batas sehingga, didapatkan (Aurangzaib, dkk, 2013):

$$-\frac{\partial P_d}{\partial x} = \rho \frac{\partial u_e}{\partial t} + \rho u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \quad (4.49)$$

dengan  $u_e$  adalah kecepatan diluar lapisan batas dan  $\frac{\partial u_e}{\partial t}$  percepatan diluar aliran batas dalam kasus ini fluida tidak mengalami percepatan atau perubahan kecepatan sehingga

percepatanya adalah nol, persamaan 4.49 dapat disederhanakan menjadi

$$-\frac{\partial P_d}{\partial x} = \rho u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \quad (4.50)$$

hasil substitusi persamaan 4.50 kedalam persamaan 4.48 yaitu:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + V \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\ \left. + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\beta}{\rho} (u_a - u_p) + g \sin\left(\frac{x}{a}\right) \left( -\frac{\mu}{\rho} \frac{1}{6} d^3 \rho_a + \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{6} d^3 \rho_p - 1 \right. \\ \left. - \beta(T - T_\infty) + O(T - T_\infty)^2 \right) + \frac{\mu}{\rho} Bil \end{aligned} \quad (4.51)$$

### C. Persamaan Non - dimensional

Mengacu pada persamaan kontinuitas yang telah diperoleh pada sub-bab sebelumnya, serta hasil penyederhanaan persamaan momentum, maka diperoleh persamaan pembangun untuk aliran fluida dua fasa air dan pasir magnet yang melewati pipa solenoida sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + V \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\
&+ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\beta}{\rho} (u_a - u_p) + g \sin\left(\frac{x}{a}\right) \left( -\frac{\mu}{\rho} \frac{1}{6} d^3 \rho_a + \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{6} d^3 \rho_p - 1 \right. \\
&\left. - \beta(T - T_\infty) + O(T - T_\infty)^2 \right) + \frac{\mu}{\rho} Bil
\end{aligned} \tag{4.53}$$

kemudian dapat ditulis menjadi persamaan seperti dibawah ini:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= \bar{u}_e \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right. \\
&+ \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] + \frac{\beta}{\rho} (\bar{u}_a - \bar{u}_p) + g \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) \left( -\frac{\mu}{\rho} \frac{1}{6} d^3 \rho_a + \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{6} d^3 \rho_p - 1 \right. \\
&\left. - \beta(T - T_\infty) + O(T - T_\infty)^2 \right) + \frac{\mu}{\rho} Bil
\end{aligned} \tag{4.55}$$

dengan kondisi batas diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\bar{u} = \bar{v} = 0, T = T_w, \bar{y} = 0, \\
\bar{u} = \bar{u}_e(x), \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = 0, T = T_\infty, y \implies \infty
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Persamaan konstitutif dimensional diubah menjadi persamaan konstitutif non dimensional dengan mensubstitusi variabel non dimensional. Variabel non dimensional dalam penelitian ini

disajikan sebagai (Anwar, dkk, 2008):

$$\begin{aligned}x &= \frac{\bar{x}}{a}, y = R_{e^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\bar{y}}{a} \right), u = \frac{\bar{u}}{U_{\infty}}, \\v &= R_{e^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\bar{v}}{U_{\infty}} \right), u_e = \frac{\bar{u}_e}{\bar{x}} U_{\infty}\end{aligned}\quad (4.57)$$

bilangan Reynold ( $R_e$ ) dinyatakan sebagai  $R_e = \frac{U_{\infty} a}{\nu}$ , hasil substitusi variabel non dimensional pada persamaan 4.57 ke persamaan pembangun dimensional 4.54 dan 4.55, akan memperoleh persamaan konstitutif non dimensional sebagai berikut:

Persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.58)$$

Persamaan momentum:

$$\begin{aligned}u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \right. \\&\left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] - M\theta \sin x + N(u_a - u_p) + Z\end{aligned}\quad (4.59)$$

kondisi batas pada persamaan 4.59 pada bentuk non-dimensional menjadi:

$$\begin{aligned}u &= v = 0, \text{ untuk } y = 0 \\u &= u_{ex}, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \text{ untuk } y \rightarrow \infty\end{aligned}\quad (4.60)$$

parameter untuk menyederhanakan persamaan 4.59 yang digunakan pada permasalahan ini didefinisikan sebagai berikut:

$$K = \frac{K_0 U_\infty}{a \rho V}, M = \frac{a}{U_\infty^2} g \left( -\frac{\mu x^3}{\rho 6} \rho_a + \frac{\mu}{6} \rho_p - 1 - \beta_0 (T - T_\infty) - O(T - T_\infty)^2 \right), N = -\frac{a}{U_\infty^2} \frac{\beta}{\rho}, Z = -\frac{a}{U_\infty^2} \frac{\mu}{\rho} B i l \quad (4.61)$$

Penyelesaian persamaan konstitutif non-dimensional adalah dengan mentransformasikannya menjadi persamaan sejenis, yaitu dengan mensubstitusi variabel similaritas. Dalam dinamika fluida khususnya permasalahan persamaan lapisan batas, persamaan similaritas adalah bentuk penyelesaian dengan mengubah beberapa koordinat menjadi koordinat yang sama akan tetapi tanpa mengubah bentuk koordinat aslinya. Secara fisik, persamaan similaritas mendeskripsikan aliran yang terlihat sama sepanjang waktu. Penugasan ini menggunakan variabel similaritas berikut (Anwar, dkk, 2008):

$$\psi = x f(x, y), \theta = \theta(x, y) \quad (4.62)$$

(Norasia, dkk. 2021) dengan  $\psi$  merupakan fungsi alir, berfungsi sebagai definisi dari kecepatan arah horizontal dan vertikal:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.63)$$

Menurut Merkin, (1976), siswono (2015) diasumsikan  $u_e(x) = \sin x$ . Menggunakan persamaan 4.62 dan 4.63 ke dalam persamaan pembangun non-dimensional 4.54 dan 4.55 maka diperoleh

persamaan similaritas sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} x \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) &= \frac{\sin x \cos x}{x} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &- K \left[ 2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right] - Kx \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} \right. \\ &- \left. \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right] + \frac{M\theta \sin x}{x} + N \frac{\partial f}{\partial y} + Z \end{aligned} \quad (4.65)$$

batas kondisi persamaan non-dimensional diubah ke dalam bentuk batas kondisi persamaan similar dengan menggunakan:

$$\begin{aligned} f = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \theta = 1 &\longrightarrow y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sin x}{x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \theta = 0 &\longrightarrow y \hookrightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.66)$$

kemudian akan diselidiki sifat fluida di wilayah titik stagnasi terendah. Titik stagnasi terendah adalah titik dimana lapisan batas hampir bertemu objek. Dalam mekanika fluida, titik stagnasi yang terendah adalah pada saat mendekati nol atau  $x \approx 0$ , sehingga persamaan 4.65 menjadi:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - K \left[ 2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right] \\ &+ 1 + N \frac{\partial f}{\partial y} + Z \end{aligned} \quad (4.67)$$

atau dapat direduksi menjadi persamaan diferensial sederhana

sebagai berikut:

$$0 = f''' - (f')^2 + f f'' - K[2f' f''' - f f^{(4)} - (f'')^2] + 1 + N f' + Z \quad (4.68)$$

dengan kondisi batas:

$$\begin{aligned} f(0) &= f'(0) = 0 \\ f'(\infty) &= 1, f''(\infty) = 0 \end{aligned} \quad (4.69)$$

dengan (') menunjukkan turunan terhadap  $y$

#### D. Diskritisasi Dengan Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah salah satu metode diskritisasi yang paling umum digunakan untuk menyelesaikan PDP. Metode ini menggantikan turunan parsial dalam persamaan dengan aproksimasi beda hingga, mengubah persamaan diferensial parsial menjadi sistem persamaan aljabar. Persamaan aljabar ini kemudian dapat dipecahkan secara iteratif menggunakan iterasi Gauss-Seidel (Siswono, 2015). Hasil persamaan similaritas berupa persamaan diferensial parsial sehingga peneliti menggunakan metode beda hingga untuk mendiskritisasi persamaan similaritas. Diketahui skema metode beda sebagai berikut:

Skema beda hingga pusat untuk turunan pertama:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y_i} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y^2) \quad (4.70)$$



Skema beda hingga pusat untuk turunan kedua:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{y_i} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2) \quad (4.71)$$

Skema beda hingga pusat untuk turunan ketiga:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Big|_{y_i} = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2\Delta y^3} + O(\Delta y^2) \quad (4.72)$$

### 1. Pendiskritan persamaan momentum

Penelitian ini menganalisis pengaruh parameter fluida terhadap kecepatan. Perbandingan parameter dengan profil kecepatan diperoleh dengan menghitung nilai  $f'$  dengan melengkapai contoh berikut.

Didefinisikan:

$$f' = z \quad (4.73)$$

Hasil substitusi persamaan 4.73 ke persamaan 4.68 akan diperoleh persamaan momentum sebagai berikut:

$$0 = z'' - z^2 + z\Delta y z' + Nz - K(2zz'' - z\Delta y z''' - (z')^2) + 1 + Z \quad (4.74)$$

Pendiskritan yang dilakukan adalah dengan menggunakan skema metode beda pusat orde kedua seperti yang ditulis pada Persamaan 4.70 hingga 4.72, sehingga hasil diskritisasi Persamaan

4.74 adalah sebagai berikut:

$$z_i^2 = \left( -Az_{i+1} + Bz_i - Az_{i-1} + Dz_i z_{i+1} + Ez_i z_{i-1} + Gz_{i+1} z_{i-1} - C - Gz_i z_i + 2 + Gz_i z_{i-2} - \frac{G}{2} z_{i+1}^2 - \frac{G}{2} z_{i-1}^2 \right) / F \quad (4.75)$$

atau dapat ditulis:

$$z_i = \left( \left( -Az_{i+1} + Bz_i - Az_{i-1} + Dz_i z_{i+1} + Ez_i z_{i-1} + Gz_{i+1} z_{i-1} - C - Gz_i z_i + 2 + Gz_i z_{i-2} - \frac{G}{2} z_{i+1}^2 - \frac{G}{2} z_{i-1}^2 \right) / F \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.76)$$

dengan:

$$A = \frac{1}{\Delta y^2}; B = (2A + N); C = 1 + Z; D = -\frac{1}{2} + 3kA; E = \frac{1}{2} + kA; F = 4kA - 1; G = \frac{kA}{2} \quad (4.77)$$

Pada tahap selanjutnya dilakukan proses iterasi Gauss Seidel. Metode ini dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang memiliki lebih dari satu variabel (Ihsan, dkk, 2024). Iterasi Gauss siedel pada persamaan momentum untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, \mathbb{Z}$ .

a. untuk  $i = 1$ , diperoleh  $z_{i-1} = z_{i+1}$  dan  $z_{i-2} = z_i$

$$z_i = \left( \left( -Az_{i+1} + Bz_i - Az_{i+1} + Dz_i z_{i+1} + Ez_i z_{i+1} + Gz_{i+1} z_{i+1} - C - Gz_i z_i + 2 + Gz_i z_i - \frac{G}{2} z_{i+1}^2 - \frac{G}{2} z_{i+1}^2 \right) / F \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.78)$$

b. untuk  $i = 2$ , diperoleh  $z_{i-2} = z_i$

$$z_i = \left( \left( -Az_{i+1} + Bz_i - Az_{i-1} + Dz_i z_{i+1} + Ez_i z_{i-1} + Gz_{i+1} z_{i-1} - C - Gz_i z_i + 2 + Gz_i z_i - \frac{G}{2} z_{i+1}^2 - \frac{G}{2} z_{i-1}^2 \right) / F \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.79)$$

c. untuk  $2 < i < \mathbb{Z} - 1$

$$z_i = \left( \left( -Az_{i+1} + Bz_i - Az_{i-1} + Dz_i z_{i+1} + Ez_i z_{i-1} + Gz_{i+1} z_{i-1} - C - Gz_i z_i + 2 + Gz_i z_{i-2} - \frac{G}{2} z_{i+1}^2 - \frac{G}{2} z_{i-1}^2 \right) / F \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.80)$$

d. untuk  $i = \mathbb{Z} - 1$ , diperoleh  $z_{i+2} = 1$

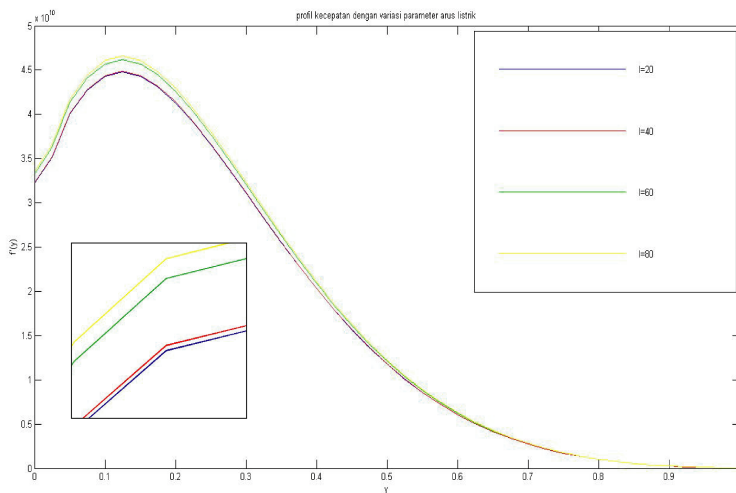
$$z_i = \left( \left( -Az_{i+1} + Bz_i - Az_{i-1} + Dz_i z_{i+1} + Ez_i z_{i-1} + Gz_{i+1} z_{i-1} - C - Gz_i + 2 + Gz_i z_{i-2} - \frac{G}{2} z_{i+1}^2 - \frac{G}{2} z_{i-1}^2 \right) / F \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.81)$$

e. untuk  $i = \mathbb{Z}$ , diperoleh  $z_{i+1} = 1$  dan  $z_{i+2} = 1$

$$z_i = \left( \left( -A + Bz_i - Az_{i-1} + Dz_i + Ez_i z_{i-1} + Gz_{i-1} - C - Gz_i + 2 + Gz_i z_{i-2} - \frac{G}{2} - \frac{G}{2} z_{i-1}^2 \right) / F \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.82)$$

## E. Analisa Hasil

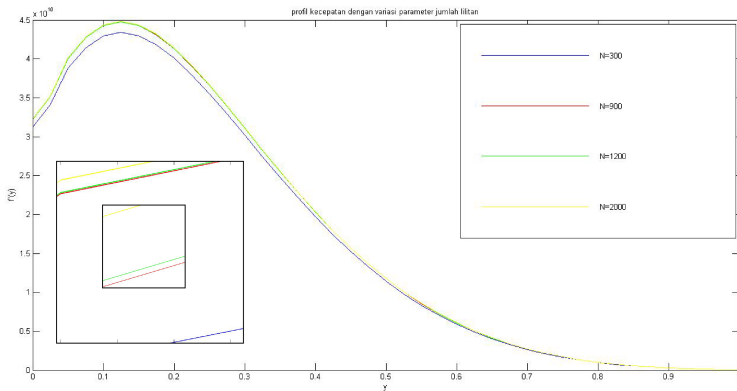
Persamaan 4.76 diselesaikan dengan perhitungan numerik serta divisualisasikan dengan menggunakan *software* MATLAB 2019. Diskritisasi yang telah dilakukan pada persamaan 4.78-4.82 kemudian diubah dalam bentuk perintah program bahasa MATLAB dari hasil running program maka akan muncul hasil visual dari diskritisasi. Grafik yang dihasilkan menunjukkan pengaruh dari variasi parameter arus listrik ( $i$ ), parameter jumlah lilitan pada kumparan ( $n$ ), dan parameter viskositas ( $V$ ) terhadap profil kecepatan ( $f'$ ) yang dimana dari variasi parameter-parameter tersebut akan menunjukkan perbedaan pada profil kecepatan fluida. pada perhitungan numerik akan digunakan  $\Delta y = 0.025$  sebagai rentang partisi dari iterasi yang akan dilakukan.



Gambar 4.1. Profil kecepatan dengan variasi arus listrik

Pada Gambar 4.1 didapat ilustrasi visual untuk profil kecepatan dengan variasi arus listrik, variasi arus listrik yang digunakan adalah  $i = 20, i = 40, i = 60, i = 80$ . Pada saat tegangan diterapkan pada ujung konduktor, medan listrik yang dihasilkan mendorong elektron untuk bergerak. Arus listrik adalah ukuran dari jumlah muatan yang melintasi suatu titik dalam konduktor setiap detiknya. Dalam hal ini, arus listrik ( $i$ ) dapat diukur dalam satuan ampere (A). Gambar 4.1 dapat diamati dan diambil hasil bahwa ketika nilai arus listrik meningkat dari  $i = 20$  hingga  $i = 80$ , kecepatan partikel juga meningkat seiring dengan peningkatan arus listrik. Hal ini menunjukkan adanya hubungan langsung antara arus listrik yang diberikan dan kecepatan partikel dalam sistem. Kecepatan minimum untuk  $20 \leq I \leq 80$  berada pada pada

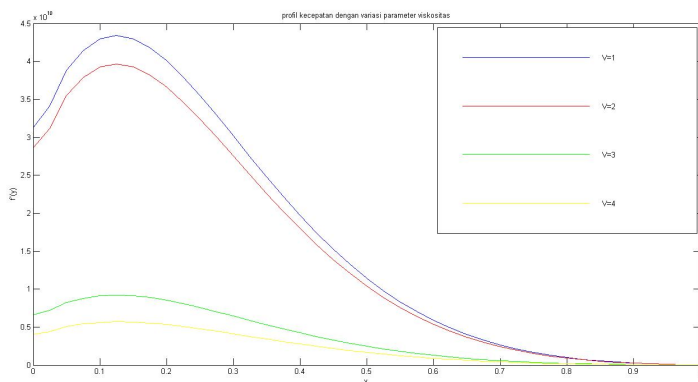
$i = 20$  dan kecepatan maksimum untuk  $20 \leq I \leq 80$  berada pada  $i = 80$ . Meningkatnya nilai suatu arus maka akan meningkatkan pula nilai kecepatan ( $v$ ). Dalam konteks penurunan rumus gaya lorentz  $i = \frac{qv}{l}$ , di mana  $i$  adalah arus listrik,  $q$  adalah muatan partikel,  $v$  adalah kecepatan partikel, dan  $l$  adalah panjang kawat atau jalur konduktif, hubungan proporsional antara arus listrik dan kecepatan partikel sangatlah jelas. Saat nilai arus listrik meningkat, kecepatan partikel juga meningkat.



Gambar 4.2. Profil kecepatan dengan variasi jumlah lilitan

Pada Gambar 4.2 didapat ilustrasi visual untuk profil kecepatan dengan variasi jumlah lilitan, variasi jumlah lilitan yang digunakan adalah  $n = 300, n = 900, n = 1200, n = 2000$ . Gambar 4.2 dapat diamati dan diambil hasil bahwa profil kecepatan pada saat  $n = 300 < n = 900 < n = 1200 < n = 2000$ . Kecepatan minimum untuk  $300 \leq n \leq 2000$  berada pada  $n = 300$  dan kecepatan maksimum untuk  $300 \leq n \leq 2000$  berada pada  $n = 2000$ . Hal ini sesuai dengan konsep hukum gaya Lorentz

menyatakan bahwa gaya yang diberikan pada sebuah muatan listrik dalam medan magnetik akan menyebabkan muatan tersebut bergerak dengan kecepatan tertentu. Dalam konteks solenoida, yang menghasilkan medan magnetik ketika arus listrik mengalir melaluinya, peningkatan jumlah lilitan akan menghasilkan medan magnetik yang lebih kuat, yang pada gilirannya akan mendorong partikel dengan kecepatan yang lebih tinggi. Meningkatnya jumlah lilitan yang melingkar pada solenoida maka akan meningkatkan pula nilai kecepatan ( $v$ ) hal ini akan sesuai dengan konsep hukum Faraday  $n = \frac{-qv \int \epsilon t dt}{F \cos \theta}$  yang menyatakan bahwa perubahan fluks magnetik dalam suatu rangkaian kumparan akan menghasilkan tegangan induksi dalam kumparan tersebut. Dalam konteks ini, peningkatan jumlah lilitan ( $n$ ) pada solenoida akan meningkatkan fluks magnetik yang melalui kumparan, dimana jumlah lilitan ( $n$ ) berbanding lurus dengan kecepatan partikel ( $v$ ).



Gambar 4.3. Profil kecepatan dengan variasi viskositas

Pada Gambar 4.3 didapatkan hasil ilustrasi visual untuk

profil kecepatan dengan variasi viskositas, variasi viskositas yang digunakan adalah  $V = 1, V = 2, V = 3, V = 4$  (Siswono, 2015). Dapat diamati dan diambil hasil bahwa profil kecepatan pada saat  $V = 4 < V = 3 < V = 2 < V = 1$ . Terlihat bahwa terdapat kebalikan hubungan yang jelas antara nilai viskositas ( $V$ ) dan kecepatan aliran fluida. Semakin tinggi nilai viskositasnya, semakin lambat kecepatan aliran fluida, dan sebaliknya. Viskositas adalah sifat penting dalam sifat aliran fluida yang menentukan seberapa mudah fluida tersebut dapat mengalir. Ketika viskositas suatu fluida meningkat, gesekan antara partikel-fluida juga meningkat, yang menghambat pergerakan fluida dan akhirnya mengurangi kecepatannya (Norasia, dkk. 2022). Ini berarti bahwa fluida dengan viskositas yang tinggi cenderung mengalir lebih lambat daripada fluida dengan viskositas yang rendah. Kecepatan minimum untuk  $1 \leq V \leq 4$  berada pada  $V = 4$  dan kecepatan maksimum untuk  $1 \leq V \leq 4$  berada pada  $V = 1$ . Hasil menunjukkan bahwa pengaruh dari peningkatan nilai viskositas akan mengurangi nilai kecepatan fluida. Menurut Norasia, dkk (2022) efek pengurangan nilai viskositas mempermudah aliran fluida, yang berarti bahwa semakin rendah viskositasnya, semakin mudah fluida tersebut mengalir dan semakin tinggi kecepatannya. Hal tersebut dibuktikan dari hasil visual yang disajikan pada Gambar 4.3.



## BAB V

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### A. Kesimpulan

Mengacu pada rumusan masalah yang dibangun pada Bab I, maka dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika aliran fluida dua fasa air dan pasir besi melewati pipa solenoida yang terbentuk adalah berupa persamaan sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + V \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right. \\ & \left. - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\beta}{\rho} (u_a - u_p) + g \sin\left(\frac{x}{a}\right) \left( -\frac{\mu}{\rho} \frac{1}{6} d^3 \rho_a \right. \\ & \left. + \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{6} d^3 \rho_p - 1 - \beta(T - T_\infty) + O(T - T_\infty)^2 \right) + \frac{\mu}{\rho} Bil \end{aligned}$$

Model matematika tersebut diperoleh berdasarkan penguraian persamaan konservasi massa dan hukum dua Newton. Kemudian, dilakukan penyederhanaan persamaan kontinuitas dan persamaan momentum menggunakan teori lapisan batas. Model matematika aliran fluida dua fasa air dan pasir besi melewati pipa solenoida dapat diselesaikan dengan menggunakan Metode Beda Hingga (*Finite Difference Method*). Memanfaatkan metode tersebut

peneliti mendiskritisasi persamaan similaritas.

$$0 = f''' - (f')^2 + ff'' - K[2f'f''' - ff^{(4)} - (f'')^2] \\ + 1 + Nf' + Z$$

dengan hasil diskritisasi

$$z_i = \left( \left( -Az_{i+1} + Bz_i - Az_{i-1} + Dz_i z_{i+1} + Ez_i z_{i-1} \right. \right. \\ \left. \left. + Gz_{i+1} z_{i-1} - C - Gz_i z_i + 2 + Gz_i z_{i-2} - \frac{G}{2} z_{i+1}^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{G}{2} z_{i-1}^2 \right) / F \right)^{\frac{1}{2}}$$

2. Pengaruh variasi parameter arus listrik ( $i$ ), untuk  $i = 20, 40, 60, 80$  dan parameter tetap  $n = 300, V = 1$  menyebabkan profil kecepatan dari  $f'$  semakin meningkat seiring peningkatan nilai arus listrik.. Hal ini jelas sesuai dalam konteks penurunan rumus gaya lorentz  $i = \frac{qv}{l}$ , di mana  $i$  adalah arus listrik,  $q$  adalah muatan partikel,  $v$  adalah kecepatan partikel, dan  $l$  adalah panjang kawat atau jalur konduktif, hubungan proporsional antara arus listrik dan kecepatan partikel sangatlah jelas. Saat nilai arus listrik meningkat, kecepatan partikel juga meningkat. Hasil tersebut menjelaskan bahwa nilai arus listrik berbanding lurus dengan kecepatan fluida.
3. Pengaruh variasi parameter jumlah lilitan kawat konduktor ( $n$ ), untuk  $n = 300, 900, 1200, 2000$  dan parameter tetap  $i = 20, V = 1$  menyebabkan profil kecepatan dari  $f'$  semakin meningkat seiring peningkatan nilai jumlah lilitan kumparan. Hal ini akan sesuai dengan konsep hukum

Faraday  $n = \frac{-qv \int \epsilon dt}{F \cos \theta}$  bahwa peningkatan jumlah lilitan ( $n$ ) pada solenoida akan meningkatkan fluks magnetik yang melalui kumparan, dimana jumlah lilitan ( $n$ ) berbanding lurus dengan kecepatan partikel ( $v$ ). Hasil tersebut menjelaskan bahwa nilai jumlah lilitan kumparan berbanding lurus dengan kecepatan fluida.

4. Pengaruh variasi parameter viskositas ( $V$ ), untuk  $V = 1, 2, 3, 4$  dan parameter tetap  $i = 20, n = 100$  menyebabkan profil kecepatan  $f'$  semakin menurun seiring peningkatan nilai viskositas. Hal ini sesuai dengan penelitian yang dilakukan oleh Norasia, dkk (2022) yaitu efek pengurangan nilai viskositas mempermudah aliran fluida, yang berarti bahwa semakin rendah viskositasnya, semakin mudah fluida tersebut mengalir dan semakin tinggi kecepatannya. Hasil tersebut menjelaskan nilai viskositas berbanding terbalik dengan kecepatan fluida.

## B. Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, saran yang dapat diberikan kepada penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Pada penelitian ini dilakukan pada kondisi setimbang (*steady*), diharapkan penelitian selanjutnya dapat dilakukan penelitian untuk permasalahan pada kondisi tak tunak (*unsteady*).
2. Pada penelitian berikutnya dapat dilakukan studi pada batasan penelitian yang lebih kompleks, misalnya efek

percepatan, persamaan kontinuitas dan persamaan momentum dalam skema tiga dimensi.

3. Ada kajian secara teknis tentang teknologi pipa solenoida.

## DAFTAR PUSTAKA

- Anwar, I., Amin, N., & Pop, I. 2008. Mixed convection boundary layer flow of a viscoelastic fluid over a horizontal circular cylinder, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43(9), 814-821.
- Aurangzaib, A., Kasim, A. R. M., Mohammad, N. F., & Shafie, S. 2013. Unsteady MHD mixed convection flow with heat and mass transfer over a vertical plate in a micropolar fluid-saturated porous medium, *Journal of Applied Science and Engineering*, 16(2), 141-150.
- Bejan, A., and Lorente, S. 2004. The constructal law and the thermodynamics of flow systems with configuration, *International journal of heat and mass transfer*, Vol. 47, No. 14-16 : 3203-3214.
- Bello, Oladele O, dkk. 2008. *Modelling Particle Transport in Gas Oil Sand Multiphase Flows and Its Applications to Production Operations*, Univ.-Bibliothek, 39-47.
- Budiman, Aris dan Asy'ari, Hakim, Arief Rahman. 2012. Desain Geenerator Magnet Permanen Untuk Sepeda Listrik.
- Budiyanto, B., & Agus, M. 2021. Perbandingan Kinerja Arus Dan daya Pada Motor Kapasitor Satu Fasa Dengan Belitan Alumunium Dan Tembaga Pada Sumber Listrik Energi Terbaru, *RESISTOR (Elektronika Kendali Telekomunikasi Tenaga Listrik Komputer)*, 4(2), 87-90.

- Co, A. & Bird, R.B. 1997. Slow viscoelastic radial flow between parallel disk, *Applied Scientific Research*, 385-404.
- Darmadi, H., Nelza, N., Siregar, M.I.H.M., Kurnia, D., & Bastanta, Y. 2023. Analisa Laju Korosi Ketebalan Pipa Baja Karbon Pada Proses Pembakaran di Unit Boiler, *Jurnal Ilmiah Teknik Mesin, Elektro dan Komputer*, 2023, 3.1 : 64-73.
- De Andrade, V.C.; Pereira, J.G. Gravitational lorentz force and the description of the gravitational interaction, *Physical Review D*, 56(8):4689.
- Ebrahimi- Mamaghani, A., Sotudeh - Gharebagh, R., Zarghami, R., & Moustoufi, N. 2019. Dynamics of two phase flow in vertical pipes, *Journal of fluids and structures*, 87, 150-173.
- Ghassemlooy, Z., Popoola, W., & Rajbhandari, S. 2019. Optical wireless communications: system and channel modelling with Matlab. CRC Press.
- Gunawan, P.H. 2021. *Pengantar Persamaan Diferensial Parsial Untuk Sains dan Teknik*, KBM Penerbit Sastrabook Indonesia.
- Herraprastanti, Eva Hertnacahyani dan Santoso, Asep Juliyana Eka. 2022. Kaji Eksperimental Aliran Dua Fase Water-Crude Oil Melewati Pipa Horizontal Dengan Variasi Putaran Kecepatan Pompa, *JME (Jurnal Mekanika dan Energi)*.
- Hilal, Y.N., Andromeda, T., & Handoko, S. 2021. Pengatur Kecepatan Prototipe Mesin Solenoid 4 Induktor Menggunakan Metode Kontrol Frekuensi. *Elektrika*, 13(2), 59-62.

- Hutalagung, Siti Nurhabibah; Panjaitan, Melda. 2018. Pembelajaran Fisika Dasar dan Elektronika Dasar (Arus, Hambatan, dan Tegangan Listrik) Menggunakan Aplikasi Matlab Metode Simulink, *Jurnal Ikatan Alumni Fisika*, 4(3), 29-33.
- Ihsan, H., Wahyuni, M. S., & Waode, Y. S. 2024. Penerapan Metode Iterasi Jacobi dan Gauss-Seidel dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Kompleks. *Journal of Mathematics, Computations and Statistics*, 7(1), 34-54.
- Jati, Pandu Prabowo dan Widyaparaga, Andhika. 2021. Simulasi CFD Dinamika Kecepatan Gelombang Aliran Stratified Wavy Dua Fasa Minyak-Air pada Pipa Horizontal. *Journal of Mechanical Design and Testing*.
- Leal, L.G. 1992. *Laminar Flow and Convective Transport Process: Scalling, Principles and Asymptotic Analysis*, Heinemann, London.
- Lin, Zi dan Liu, Xiaolei dan Lao, Liyun dan Liu, Hengxu. 2020. Prediction of two phase flow pattern in upward inclined pipes via deep learning, *Energy*, 210, 118541.
- Ozisik, MN. 1985. *Heat transfer: a basic approach*.
- Munson, B.R., Young, D.F., Okiishi, T.H. 2002. *Fundamental of fluids mechanics fourth edition*, John Wiley and Sons, Inc., USA, 110-448.
- Natsir, Muhammad dan soedardjo, B dan Arhatari, Dewi dan Haryanto, Mudi dan Triyadi, Ari, dkk. 2000. Failure Analysis

Of Industrial Boiler Pipe; Analisis Kerusakan Pipa Boiler Industri.

- Nazar, R., Amin, N., & Pop, I. 2003. Mixed convection boundary-layer flow from a horizontal circular cylinder in micropolar fluids: case of constant wall temperature, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 13(1), 86-109.
- Norasia, Y., & Ghani, M. 2023. Exploring Micromagnetorotation in Maxwell Viscous Fluid Flow Within a Porous Cylinder, *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, 10(6).
- Norasia, Y., Tafrikan, M., & Ghani, M. 2022. Laminar Viscous Fluid Flow with Micro-rotation Capabilities through Cylindrical Surface, *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*, 6(4), 865-875.
- Norasia, Y., Widodo, B., & Adzkiya, D. 2021. Pergerakan aliran mhd ag-air melewati bola pejal, *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 18(1), 15-21.
- Saputra, Novan Ade dan Nugroho, Adhimas Daru and Maharsi, Dara Ayuda and others. 2023. Analisis Pengaruh Pola Aliran Multifasa Minyak dan Gas Terhadap Pressure Loss pada Pipa Vertikal Dengan Ansys Fluent, *PETRO: Jurnal Ilmiah Teknik Perminyakan*.
- Sahaya, R., Widodo, B., & Imron, C. 2016. Aliran Fluida Magnetohidrodinamik Viskoelatis Tersuspensi yang Melewati Pelat Datar. *Jurnal Sains dan Seni ITS* 5.(2)



- Setiadi, M.F., Suraatmadja, M.S., & Kurniawan, E. 2015. *Pemanfaatan Fluks Magnetik Sebagai Sumber Pembangkit Tenaga Listrik Dengan Menggunakan Solenoida. eProceedings of Engineering*, 2.3.
- Setianto, S. 2017. Analisa Kuantitatif Campuran Senyawa Oksida Sebagai Dasar Identifikasi Kandungan Bahan Sumber Daya Alam Studi Kasus: Kandungan Mineral Pada Pasir Besi di Pesisir Pantai Selatan, Jawa Barat., *EKSAKTA : Berkala Ilmiah Bidang MIPA*. 18(02), 173-177.
- Shadloo, M. S., Rahmat, A., Karimipour, A., dan Wongwises, S. 2020. Estimation of pressure drop of two phase flow in horizontal long pipes using artificial neural networks, *Copernicus GmbH. Journal of Energy Resources Technology*, 142(11).
- Siswono, G.O. 2015. Analisa Aliran Konveksi Campuran Pada Fluida Viskoelastik Magnetohydrodynamics (MHD) yang Melewati Silinder Sirkular Berpori, *Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember*.
- Tafrikan, M., Widodo, B., & Imron, C. 2015. Pemodelan pengaruh panas terhadap aliran fluida konveksi bebas yang melalui bola berpori.
- Widodo, B., Arif, D. K., Aryany, D., Asiyah, N., Widjajati, F.A., & Kamiran, K. 2017. The Effect Of Magnetohydrodynamic Nano Fluid Flow Through Porous Cylinder. *AIP Conference Proceedings*, 1867, August 2017.
- Wyadnyana, A.A.G.R., Marwati, S.P., Purna, S.P., & Nyoman, I. 2020. Gambaran Lingkungan Fisik dan Kualitas Air di Mata Air

Beji Pura Dalem Kawi Banjar Kutuh Desa Sayan Kecamatan  
Ubud Tahun 2020, *Doctoral dissertation, Jurusan Kesehatan  
Lingkungan.*

## Lampiran 1. Perhitungan Lengkap Bab IV

### A. Perhitungan Tegangan Persamaan Momentum

Diberikan:

$$T_{ij} = \mu_0(2d_{ij}) - k_0(\mathbf{V}\nabla(2\mathbf{d}_{ij}) - (2\mathbf{d}_{ij})\cdot(\nabla\mathbf{V})^T - \nabla\mathbf{V}(2\mathbf{d}_{ij}))$$

dengan:

$$\mathbf{d}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right), i = x, y \ \& \ j = x, y$$

substitusikan:

$$\mathbf{V}\nabla(\mathbf{d}_{ij}) = \mathbf{V}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)\right)\right)$$

Berikut ini adalah perhitungan tegangan tensor:

1. untuk  $i = x$  dan  $j = x$

$$\begin{aligned}
T_{xx} &= 2\mu_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] 2k_0 \left[ \mathbf{V} \nabla \left( \frac{1}{2} \left( \frac{v_j}{x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} d_{ii} + \frac{\partial v_j}{x_j} d_{ij} \right) - \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d_{ij} \right) \right] \\
&= 2\mu_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] - 2k_0 \left[ \mathbf{V} \nabla \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] \\
&= 2\mu_0 \frac{\partial u}{\partial x} - 2k_0 \left[ u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] \\
&= 2\mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) - 2k_0 \left[ u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]
\end{aligned}$$

2. untuk  $i = x$  dan  $j = y$

$$\begin{aligned}
 T_{xy} &= 2\mu_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] - 2k_0 \left[ \mathbf{V} \nabla \left( \frac{1}{2} \left( \frac{v_j}{x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} d_{ii} + \frac{\partial v_j}{x_j} d_{ij} \right) - \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d_{ij} \right) \right] \\
 &= 2\mu_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] - 2k_0 \left[ \mathbf{V} \nabla \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\
 &= \mu_0 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2k_0 \left[ \left( \frac{u}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{v}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right] \\
 &= \mu_0 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2k_0 \left[ \left( \frac{u}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{v}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]
 \end{aligned}$$

3. untuk  $i = y$  dan  $j = x$

$$\begin{aligned}
T_{yx} &= 2\mu_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] - 2k_0 \left[ \mathbf{V} \nabla \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} d_{ii} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} d_{ij} \right) - \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d_{jj} \right) \right] \\
&= 2\mu_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - 2k_0 \left[ \mathbf{V} \nabla \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{\partial u}{\partial y} d_{ii} + \frac{\partial u}{\partial x} d_{ij} \right) - \left( \frac{\partial v}{\partial y} d_{ij} + \frac{\partial v}{\partial x} d_{jj} \right) \right] \\
&= \mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2k_0 \left[ \mathbf{V} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right) \\
&\quad \left. + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right) - \left( \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \right) \left. \right] \\
&= \mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2k_0 \left[ \frac{u}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{v}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right]
\end{aligned}$$

4. untuk  $i = y$  dan  $j = y$

$$\begin{aligned}
 T_{yy} &= 2\mu_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] - 2k_0 \left[ \mathbf{V} \nabla \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} d_{ii} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} d_{ij} \right) - \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d_{jj} \right) \right] \\
 &= 2\mu_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - 2k_0 \left[ \mathbf{V} \nabla \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right] \\
 &= 2\mu_0 \frac{\partial v}{\partial y} - 2k_0 \left[ u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \\
 &= 2\mu_0 \frac{\partial v}{\partial y} - 2k_0 \left[ u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right. \\
 &\quad \left. - 2 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) \right]
 \end{aligned}$$

Penurunan komponen tegangan untuk memenuhi persamaan momentum sumbu x dan y:

1. Diferensiasi  $T_{xx}$  dan  $x$ 

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} - k_0 \left( 2u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \\
&= 2\mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - k_0 \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\
&\quad \left. + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial^2 x \partial y} - 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \\
&\quad \left. - 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \\
&= 2\mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - k_0 \left( -6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right. \\
&\quad \left. + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)
\end{aligned}$$

2. Diferensiasi  $T_{xy}$  dan  $y$ 

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu_0 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - k_0 \left( u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\
&= \mu_0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - k_0 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = & \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - k_0 \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right. \\
& + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \\
& + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \\
& \left. - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}$$

### 3. Diferensiasi $T_{xy}$ dan $x$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} = & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu_0 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - k_0 \left( u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right. \right. \\
& \left. \left. + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\
= & \mu_0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - k_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right. \\
& + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\
& + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \\
& - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \\
& \left. - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\
= & \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - k_0 \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \right. \\
& + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \\
& + \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
& \left. - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)
\end{aligned}$$

#### 4. Diferensiasi $T_{yy}$ dan $y$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu_0 \frac{\partial v}{\partial y} - k_0 \left( 2u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 4 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \\
 &= 2\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k_0 \left( 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right. \\
 &\quad \left. - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
 &= 2\mu_0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left( 2u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right. \\
 &\quad \left. - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned}$$

### B. Penyederhanaan Persamaan Momentum

Berikut ini adalah perhitungan dari penyederhanaan persamaan momentum:

#### 1. Persamaan momentum sumbu- $x$ :

$$\begin{aligned}
 \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[ 2\mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - k_0 \left( -6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] + \left[ \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - k_0 \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] + F_x
 \end{aligned}$$

Berikut ini adalah penyederhanaan persamaan momentum pada sumbu- $x$ :

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right. \\ &- k_0 \left[ 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \\ &- 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ &+ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ &\left. \left. - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + F_x \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right) \\ &- k_0 \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \left( u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \right. \\ &+ \left( v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \\ &- \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ &- \left( 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ &+ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ &\left. \left. - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + F_x \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) \\
&\quad - k_0\left[u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)\right] \\
&\quad + v\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} + v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) \\
&\quad - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) \\
&\quad - 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 2\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) \\
&\quad - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + v\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \\
&\quad + \left[\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] + F_x
\end{aligned}$$

substitusikan persamaan berikut

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - k_0\left[u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right. \\
&\quad + v\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \\
&\quad - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \\
&\quad + v\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \\
&\quad \left. - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] + F_x
\end{aligned}$$

Menurut persamaan kontinuitas juga dapat diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial x}\end{aligned}$$

Subtitusikan persamaan tersebut ke dalam persamaan momentum sumbu-  $x$ , sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned}\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - k_0\left[u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right. \\ &+ \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}) + v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right) \\ &- \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) - 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \\ &\left. - \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right] + F_x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - k_0\left[u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right. \\ &+ \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}) + v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right) \\ &- \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) - 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \\ &- \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right. \\ &\left. - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right] + F_x\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan momentum pada sumbu- $x$

sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = & - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left( 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] + F_x \end{aligned}$$

## 2. Persamaan momentum sumbu-y:

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & - \frac{\partial P}{\partial x} + \left[ \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - k_0 \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right. \right. \\ & \left. \left. + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right. \right. \\ & \left. \left. + v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] + \left[ 2\mu_0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right. \\ & \left. - k_0 \left( 2u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] + F_y \end{aligned}$$

Berikut ini adalah penyederhanaan persamaan momentum

pada sumbu-  $y$ :

$$\begin{aligned}
 \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & - \frac{\partial P}{\partial x} + \left[ \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right. \\
 & - k_0 \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 2u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right. \\
 & + v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \\
 & + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right. \\
 & + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\
 & \left. - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + F_y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & - \frac{\partial P}{\partial x} + \left[ \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right. \\
 & - k_0 \left( \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial y} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y^2} \right) + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right. \\
 & + \left( v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \\
 & + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \left( \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \right. \\
 & + \left. \left. 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \\
 & - \left. \frac{\partial v}{\partial y} \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right. \\
 & \left. - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \left. \right] + F_y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[\mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right. \\
&= -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[\mu_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right.\right. \\
&\quad \left.+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - k_0\left(u\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)\right)\right) \\
&\quad \left.+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2} + v\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right.\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left.\left.+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)\right)\right) + v\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y} + v\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \\
&\quad \left.+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial v}{\partial x}\left(2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left.+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial y}\left(2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left.+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + 4\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)\right] + F_y
\end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

diperoleh penyederhanaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[\mu_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - k_0\left(u\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right.\right. \\
&\quad \left.+\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2} + v\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y} + v\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right.\right. \\
&\quad \left.-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial v}{\partial y}\left(4\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\
&\quad \left. - 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)\right] + F_y
\end{aligned}$$



menurut persamaan kontinuitas, diperoleh:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

Sehingga penyederhanaan lebih lanjut untuk persamaan sumbu-  $y$  adalah:

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[ \mu_0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right. \right. \\ & + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\ & - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left. \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ & \left. \left. + \frac{\partial u}{\partial x} \left( 4 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] + F_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[ \mu_0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right. \right. \\ & + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\ & - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \left. \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ & \left. \left. - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] + F_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[\mu_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - k_0\left(u\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right.\right. \\
&\quad + u\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2} + v\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y} + v\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\
&\quad \left. - \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right] + F_y \\
&= -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[\mu_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - k_0\left(u\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right.\right. \\
&\quad + u\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2} + v\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y} + v\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\
&\quad \left. - \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right] + F_y \\
&= -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[\mu_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - k_0\left(u\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right.\right. \\
&\quad + u\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2} + v\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y} + v\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial x}\left(3\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\left.]\right] + F_y
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan momentum pada sumbu-  $y$

sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & - \frac{\partial P}{\partial x} + \left[ \mu_0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right. \right. \\ & + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \left. \left. + v \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) \right. \right. \\ & + \frac{\partial u}{\partial x} \left( 3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + F_x \end{aligned}$$

### C. Perhitungan Persamaan Momentum dengan Menggunakan Teori Penyederhanaan Persamaan Lapisan Batas

Berikut ini adalah penyederhanaan persamaan momentum dengan menggunakan teori lapisan batas, dengan mensubstitusikan Persamaan 5.28 ke dalam Persamaan 5.26 dan Persamaan 5.27 diperoleh:

#### 1. Persamaan momentum sumbu- $x$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right. \right. \\ & + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \left. \left. + v \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right. \right. \\ & + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left. \left. - \frac{\partial u}{\partial x} \left( 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \beta (u_a - u_p) - \mu \left( \frac{1}{6} d^3 \rho_a g \right. \right. \\ & \left. \left. + Bil - \frac{1}{6} d^3 \rho_p g \right) \end{aligned}$$

## 2. Persamaan momentum sumbu- $y$

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right. \\
 & + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x} \left( 3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right. \\
 & \left. - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
 & \left. - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] Bil + \frac{1}{6} d^3 \rho_a g - \frac{1}{6} \rho d^3 \rho_p g
 \end{aligned}$$

Sesuai dengan konsep lapisan batas yang ditunjukkan oleh Ozisik (1985), Siswono (2015), maka diperoleh:

### a. sumbu- $x$

$$\begin{aligned}
 1 \frac{1}{1} \Delta \frac{1}{\Delta} = & \Delta^2 \left( \frac{1}{1} \frac{1}{\Delta^2} \right) \Delta^2 \left[ 1 \left( \frac{1}{1} \frac{1}{\Delta^2} \right) \Delta \left( \frac{1}{\Delta} \frac{1}{\Delta^3} \right) \frac{1}{\Delta} \left( \frac{1}{\Delta} \frac{\Delta^2}{1} \right) \right. \\
 & \left. \frac{1}{1} \left( \frac{1}{1} \frac{1}{\Delta^2} \right) \frac{\Delta}{1} \frac{1}{\Delta} \right] \Delta^2 \frac{1}{\Delta^2} 1 \Delta^2 \frac{1}{\Delta^2} 1^3 \Delta^2 \frac{1}{\Delta^2} \Delta^2 \frac{1}{\Delta^2} 1^3 \\
 11 = & (\Delta^2 1) \Delta^2 \left[ \left( 1 \frac{1}{\Delta^2} \right) \left( 1 \frac{1}{\Delta^2} \right) \left( \frac{1}{\Delta^2} \Delta \right) \left( 1 \frac{1}{\Delta^2} \right) 1 \right] 11111111
 \end{aligned}$$

### b. sumbu- $y$

$$\begin{aligned}
 1 \frac{\Delta}{1} \Delta \frac{\Delta}{\Delta} = & \Delta^2 \left( \frac{\Delta^2}{1} \frac{\Delta^2}{\Delta^2} \right) \Delta^2 \left[ 1 \frac{\Delta^2}{1} 1 \frac{\Delta^2}{\Delta^2} \Delta \frac{\Delta^3}{\Delta} \Delta \frac{\Delta^3}{\Delta^3} \right. \\
 & \left. \frac{1}{1} \left( \frac{\Delta^2}{\Delta^2} \frac{\Delta^2}{1} \right) \frac{\Delta}{1} \left( \frac{\Delta^2}{\Delta} \frac{1}{\Delta^2} \right) \frac{1}{\Delta} \frac{\Delta^2}{\Delta} \right] \Delta^2 \frac{1}{\Delta^2} \Delta \\
 & \Delta^2 \frac{1}{\Delta^2} \Delta^3 \Delta^2 \frac{1}{\Delta^2} \Delta^3 \\
 \Delta \Delta = & \Delta^2 \left( \Delta^2 1 \right) \Delta^2 \left[ \Delta^3 \Delta \Delta^3 \Delta 11 \left( 1 \Delta^2 \right) \Delta \left( \Delta \frac{1}{\Delta^2} \right) \right. \\
 & \left. \frac{1}{\Delta} \Delta \right] \Delta \Delta^3 \Delta^3
 \end{aligned}$$

$$\Delta \Delta = \Delta^4 \Delta^2 \left[ \Delta^5 \Delta^3 \Delta^5 \Delta^3 \left( \Delta^2 \Delta^4 \right) \left( \Delta^4 \Delta \right) \Delta^2 \right] \\ \Delta \Delta^3 \Delta^3$$

#### D. Perhitungan Persamaan Pembangun Non-dimensional

Persamaan pembangun non-dimensional didapatkan dengan mensubstitusi variabel non-dimensional Persamaan 4.53 ke dalam Persamaan pembangun dimensional 4.50 dan 4.51. Perhitungan yang dilakukan diuraikan sebagai berikut:

##### Persamaan Kontinuitas

Perhitungan pada persamaan kontinuitas adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\frac{\partial (u U_\infty)}{\partial (ax)} + \frac{\partial \left( \frac{v U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)}{\partial \left( \frac{ay}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)} = 0$$

$$\frac{U_\infty}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\frac{U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}}}{\frac{a}{Re^{\frac{1}{2}}}} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{U_\infty}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

sehingga didapatkan persamaan kontinuitas non dimensional sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

## Persamaan Momentum

Persamaan momentum dimensional diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = & \bar{u}_e \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{x}} + v \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} \right. \\ & \left. - \frac{\bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{\bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] + \frac{\beta}{\rho} (\bar{u}_a - \bar{u}_p) + g \sin \frac{\bar{x}}{a} \\ & \left( -\frac{\mu}{\rho} \frac{1}{6} d^3 \rho_a + -\frac{\mu}{\rho} \frac{1}{6} d^3 \rho_p - 1 - \beta(T - T_\infty) \right. \\ & \left. + O(T - T_\infty)^2 \right) + \frac{\mu}{\rho} Bil \end{aligned}$$

Perhitungan pada ruas kiri:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = & (uU_\infty) \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(ax)} + \left( \frac{vU_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial\left(\frac{ay}{Re^{\frac{1}{2}}}\right)} \\ = & \frac{U_\infty^2}{a} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{Re^{\frac{1}{2}} \frac{a}{Re^{\frac{1}{2}}}} v \frac{\partial u}{\partial y} \\ = & \frac{U_\infty^2}{a} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{a} v \frac{\partial u}{\partial y} \\ = & \frac{U_\infty^2}{a} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

perhitungan pada ruas kanan:

$$\begin{aligned} = & \bar{u}_e \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{x}} + v \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] \\ & + \frac{a}{U_\infty} g \theta \sin \frac{ax}{a} \left( \frac{\mu}{\rho} \frac{d^3}{6} \rho_a + \frac{\mu}{\rho} \frac{x^3}{6} \rho_p - 1 - \beta_0(T - T_\infty) \right) \\ & - O(T - T_\infty)^2 + \frac{\beta}{\rho} (u_a - u_p) + \frac{\mu}{\rho} Bil \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u_e U_\infty \frac{\partial(u_e U_\infty)}{\partial(ax)} + v \left( \frac{\partial^2(u U_\infty)}{\partial \left( \frac{ay}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ (u U_\infty) \frac{\partial^3(u U_\infty)}{\partial(ax) \partial \left( \frac{ay}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)^2} \right. \\
&\quad + \left( \frac{v U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{\partial^3(u U_\infty)}{\partial \left( \frac{ay}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)^3} - \frac{\partial(u U_\infty)}{\partial \left( \frac{ay}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)} \frac{\partial^2(u U_\infty)}{\partial(ax) \partial \left( \frac{ay}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)} \\
&\quad \left. + \frac{(\partial u U_\infty)}{\partial(ax)} \frac{\partial^2(u U_\infty)}{\partial \left( \frac{ay}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)^2} \right] + g\theta \sin x \left( -\frac{\mu}{\rho} \frac{x^3}{6} \rho_a + \frac{\mu}{6} x^3 \rho_p - 1 \right. \\
&\quad \left. - \beta_0(T - T_\infty) - O(T - T_\infty)^2 \right) + \frac{\beta}{\rho}(u_a - u_p) + \frac{\mu}{\rho} Bil \\
&= \frac{(U_\infty)^2}{a} u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{U_\infty Re}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{k_0}{\rho} \left[ \left( \frac{U_\infty^2 Re}{a^3} \right) u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right. \\
&\quad + \left( \frac{U_\infty^2}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{Re^{\frac{1}{2}} Re}{a^3} \right) v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \left( \frac{U_\infty^2}{a} \frac{(Re^{\frac{1}{2}})^2}{a^2} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
&\quad \left. + \left( \frac{U_\infty}{a} \frac{U_\infty Re}{a^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + g\theta \sin x \left( -\frac{\mu}{\rho} \frac{x^3}{6} \rho_a + \frac{\mu}{6} x^3 \rho_p - 1 \right. \\
&\quad \left. - \beta_0(T - T_\infty) - O(T - T_\infty)^2 \right) + \frac{\beta}{\rho}(u_a - u_p) + \frac{\mu}{\rho} Bil \\
&= \frac{(U_\infty)^2}{a} u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{U_\infty Re}{a^2} v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left( \frac{U_\infty^2 Re}{a^3} \right) \frac{k_0}{\rho} \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right. \\
&\quad \left. + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + g\theta \sin x \left( -\frac{\mu}{\rho} \frac{x^3}{6} \rho_a + \frac{\mu}{6} x^3 \rho_p \right. \\
&\quad \left. - 1 - \beta_0(T - T_\infty) - O(T - T_\infty)^2 \right) + \frac{\beta}{\rho}(u_a - u_p) + \frac{\mu}{\rho} Bil
\end{aligned}$$

sehingga didapatkan penyederhanaan dari kedua ruas sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{(U_\infty)^2}{a} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{(U_\infty)^2}{a} u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{U_\infty Re}{a^2} v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
 &\quad - \left( \frac{U_\infty^2 Re}{a^3} \right) \frac{k_0}{\rho} \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\
 &\quad + g\theta \sin x \left( -\frac{\mu}{\rho} \frac{x^3}{6} \rho_a + \frac{\mu}{6} x^3 \rho_p - 1 \right. \\
 &\quad \left. - \beta_0 (T - T_\infty) - O(T - T_\infty)^2 \right) \\
 &\quad + \frac{\beta}{\rho} (u_a - u_p) + \frac{\mu}{\rho} Bil
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{a}{U_\infty^2} \left[ \frac{(U_\infty)^2}{a} u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{U_\infty Re}{a^2} v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{U_\infty^2 Re}{a^3} \right) \frac{k_0}{\rho} \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \right] \\
 &\quad + \frac{a}{U_\infty^2} g\theta \sin x \left( -\frac{\mu}{\rho} \frac{x^3}{6} \rho_a + \frac{\mu}{6} x^3 \rho_p - 1 \right. \\
 &\quad \left. - \beta_0 (T - T_\infty) - O(T - T_\infty)^2 \right) \\
 &\quad + \frac{a}{U_\infty^2} \frac{\beta}{\rho} (u_a - u_p) + \frac{a}{U_\infty^2} \frac{\mu}{\rho} Bil
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{Re}{U_\infty a} v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{Re}{a^2} \frac{k_0}{\rho} \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right. \\
&\quad \left. + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\
&\quad + \frac{a}{U_\infty^2} g \theta \sin x \left( -\frac{\mu}{\rho} \frac{x^3}{6} \rho_a + \frac{\mu}{6} x^3 \rho_p - 1 \right. \\
&\quad \left. - \beta_0 (T - T_\infty) - O(T - T_\infty)^2 \right) \\
&\quad + \frac{a}{U_\infty^2} \frac{\beta}{\rho} (u_a - u_p) + \frac{a}{U_\infty^2} \frac{\mu}{\rho} Bil \\
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{U_\infty a}{v} v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{U_\infty a}{v} \frac{k_0}{\rho} \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right. \\
&\quad \left. + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\
&\quad + \frac{a}{U_\infty^2} g \theta \sin x \left( -\frac{\mu}{\rho} \frac{x^3}{6} \rho_a + \frac{\mu}{6} x^3 \rho_p - 1 \right. \\
&\quad \left. - \beta_0 (T - T_\infty) - O(T - T_\infty)^2 \right) \\
&\quad + \frac{a}{U_\infty^2} \frac{\beta}{\rho} (u_a - u_p) + \frac{a}{U_\infty^2} \frac{\mu}{\rho} Bil \\
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{U_\infty}{av} \frac{k_0}{\rho} \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\
&\quad + \frac{a}{U_\infty^2} g \theta \sin x \left( -\frac{\mu}{\rho} \frac{x^3}{6} \rho_a + \frac{\mu}{6} x^3 \rho_p - 1 \right. \\
&\quad \left. - \beta_0 (T - T_\infty) - O(T - T_\infty)^2 \right) \\
&\quad + \frac{a}{U_\infty^2} \frac{\beta}{\rho} (u_a - u_p) + \frac{a}{U_\infty^2} \frac{\mu}{\rho} Bil
\end{aligned}$$

Diberikan penyederhanaan dengan parameter sebagai berikut:

$$K = \frac{K_0 U_\infty}{a \rho V}, M = \frac{a}{U_\infty^2} g \left( -\frac{\mu x^3}{\rho 6} \rho_a + \frac{\mu}{6} \rho_p - 1 - \beta_0 (T - T_\infty) - O(T - T_\infty)^2 \right), N = -\frac{a}{U_\infty^2} \frac{\beta}{\rho}, Z = -\frac{a}{U_\infty^2} \frac{\mu}{\rho} Bi$$

Persamaan momentum tersebut dapat disederhanakan menjadi:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - M \theta \sin x + N(u_a - u_p) + Z$$

dengan  $u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ , maka didapatkan persamaan momentum non-dimensional sebagai berikut:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] - M \theta \sin x + N(u_a - u_p) + Zx$$

## E. Perhitungan Persamaan Similaritas

Diperoleh persamaan pembangun non-dimensional sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] - M \theta \sin x + N(u_a - u_p) + Zx \end{aligned}$$

Persamaan pembangun non-dimensional tersebut ditransformasikan ke dalam bentuk persamaan *similarity*. Diasumsikan  $u_e = \sin x$  dan diberikan variabel similaritas untuk silinder sirkular berpori sebagai berikut (Merkin, 1976), (Siswono, 2015):

$$\begin{aligned}\psi &= x f(x, y) \\ \theta &= \theta(x, y)\end{aligned}$$

dengan  $\psi$  adalah *stream function* yang didefinisikan sebagai berikut (Norasia, dkk. 2021):

$$\begin{aligned}u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}\end{aligned}$$

### **Persamaan Kontinuitas**

Perhitungan untuk persamaan kontinuitas non-dimensional dengan mensubstitusikan variabel *similarity* adalah:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0\end{aligned}$$

Pada penyederhanaan tersebut, persamaan kontinuitas bernilai nol sehingga dapat dihilangkan.

### **Persamaan Momentum**

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \\
&\quad - M\theta \sin x + N(u_a - u_p) + Zx \\
\frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) &= \sin x \frac{\partial \sin x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \\
&\quad - K \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \right) \right) \right) \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \right) \right] \\
&\quad - M\theta \sin x + N(u_a - u_p) + Zx \\
\frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) &= \sin x \frac{\partial \sin x}{\partial x} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \\
&\quad - K \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) \right) \right. \\
&\quad - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right) \\
&\quad \left. - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \\
&\quad - M\theta \sin x + N(u_a - u_p) + Zx
\end{aligned}$$

dengan:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial y} &= x \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}; \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = x \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}; \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = x \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \\
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= f + x \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 x \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) - \left( f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left( x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) &= \sin x \frac{\partial \sin x}{\partial x} + x \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \\
 - K \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( x \frac{\partial f}{\partial y} \right) \left( x \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right) \right) - \left( f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left( x \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right) - \left( x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right. \\
 \left. + x \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right] - M\theta \sin x + N \left( x \frac{\partial f}{\partial y} \right) + Zx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x \left( \left( \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) - \left( f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right) \right) &= \sin x \cos x \\
 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - K \left[ 2x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x^2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} - x f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right. \\
 \left. - x^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - x \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 - x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right] - M\theta \sin x + N \left( x \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\
 + Zx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left( \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) - \left( f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right) &= \frac{\sin x \cos x}{x} \\
 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - K \left[ 2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} - f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right. \\
 \left. - x \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 - x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right] + \frac{M\theta \sin x}{x} \\
 + N \frac{\partial f}{\partial y} + Z
 \end{aligned}$$

Pada dinamika fluida, kecepatan lokal dari fluida bernilai nol pada titik stagnasi terendah dari silinder ( $x \approx 0$ ). Diketahui bahwa:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{x} = 1
 \end{aligned}$$

Sehingga persamaan similar yang diperoleh menjadi:

Persamaan momentum:

$$0 = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - K \left[ 2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 \right] \\ + 1 + N \frac{\partial f}{\partial y} + Z$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$0 = f''' - (f')^2 + f f'' - K [2 f' f''' - f f^{(4)} - (f'')^2] \\ + 1 + N f' + Z$$

## F. Diskritisasi Persamaan Momentum

Misalkan  $f' = z$

$$0 = z'' + z \Delta y z' - z^2 + 1 + N z - K (2 z z'' - z \Delta y z''' - (z')^2) + Z$$

$$0 = \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{\Delta y^2} + z_i \Delta y \left( \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2 \Delta y} \right) - z_i^2 + 1 + N z_i \\ - K \left( 2 z_i \left( \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{\Delta y^2} \right) \right. \\ \left. - z_i \Delta y \left( \frac{z_{i+2} - 2z_{i+1} + 2z_{i-1} - z_{i-2}}{2 \Delta y^3} \right) \right. \\ \left. - \left( \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2 \Delta y} \right)^2 \right) + Z$$

$$0 = A(z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}) + z_i \left( \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2} \right) - z_i^2 + 1 + N z_i \\ - K \left( 2 A z_i (z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}) \right. \\ \left. - A z_i \left( \frac{z_{i+2} - 2z_{i+1} + 2z_{i-1} - z_{i-2}}{2} \right) \right. \\ \left. - \frac{A}{4} (z_{i+1} - z_{i-1})^2 \right) + Z$$

$$\begin{aligned}
0 &= Az_{i+1} - 2Az_i + Az_{i-1} + \frac{1}{2}z_i z_{i+1} - \frac{1}{2}z_i z_{i-1} - z_i^2 + 1 + Nz_i \\
&\quad - K \left( 2Az_i z_{i+1} - 4Az_i z_i + 2Az_i z_{i-1} - \frac{A}{2}z_i z_{i+2} + Az_i z_{i+1} \right. \\
&\quad \left. - Az_i z_{i-1} + \frac{A}{2}z_i z_{i-2} - \frac{A}{4}z_{i+1}^2 + \frac{A}{2}z_{i+1} z_{i-1} - \frac{A}{4}z_{i-1}^2 \right) + Z \\
0 &= Az_{i+1} - 2Az_i + Az_{i-1} + \frac{1}{2}z_i z_{i+1} - \frac{1}{2}z_i z_{i-1} - z_i^2 + 1 + Nz_i \\
&\quad - 2AKz_i z_{i+1} + 4AKz_i z_i - 2AKz_i z_{i-1} + \frac{AK}{2}z_i z_{i+2} \\
&\quad - AKz_i z_{i+1} + AKz_i z_{i-1} - \frac{AK}{2}z_i z_{i-2} + \frac{AK}{4}z_{i+1}^2 \\
&\quad - \frac{AK}{2}z_{i+1} z_{i-1} + \frac{AK}{4}z_{i-1}^2 + Z \\
0 &= Az_{i+1} - (2A + N)z_i + Az_{i-1} + \left( \frac{1}{2} + 3KA \right) z_i z_{i+1} \\
0 &= Az_{i+1} - (2A + N)z_i + Az_{i-1} + \left( \frac{1}{2} + 3KA \right) z_i z_{i+1} \\
&\quad - \left( \frac{1}{2} AK \right) z_i z_{i-1} - \frac{AK}{2} z_{i+1} z_{i-1} + 1 + Z + \frac{AK}{2} z_i z_{i+2} \\
&\quad - \frac{AK}{2} z_i z_{i-2} + \frac{AK}{4} z_i^2 + 1 + 4(AK - 1)z_i^2 + \frac{AK}{4} z_{i-1}^2
\end{aligned}$$

## Lampiran 2. Matlab 2019a

```

     $\Delta y = 0.025$ ; (selisih partisi dari y)
y = 0 :  $\Delta y$  : 1;
Z = length(y);
 $\mu = 2 * 10^{-7}$ ;
(parameter arus listrik(i))
arus(1)=20;
arus(2)=40;
arus(3)=60;
arus(4)=80;
(parameter jumlah lilitan(N))
lilitan(1)=300;
lilitan(2)=900;
lilitan(3)=1200;
lilitan(4)=2000;
viskositas(1)=1;
viskositas(2)=2;
viskositas(3)=3;
viskositas(4)=4;

    for i=1:Z
f(i)=0;
s(i)=0;
end
(untuk menampilkan pilihan 1 sampai 3 variasi parameter)
disp('1. arus(various), lilitan(fixed), viskositas(fixed)');
disp('2. arus(fixed), lilitan(various), viskositas(fixed)');
```



```

disp('3. arus(fixed), lilitan(fixed), viskositas(various)');
pilih= input('pilih(1,2,3)= ');
(untuk memilih 1 sampai 3 menggunakan kode dibawah)
for it=1:4
if (pilih==1)
I=arus(it);
N=100;
V=1;
elseif (pilih==2)
I=2;
N=lilitan(it);
V=1;
elseif (pilih==3);
I=2;
N=100;
V=viskositas(it);
else
return;
end
(nilai awal) for i=1:Z
if i==1

$$(i) = (f(i + 1) - f(i - 1)) / (2 * \text{delta}_y);$$

elseif (i==Z)

$$(i) = (f(i - 1) - f(i + 1)) / (2 * \text{delta}_y);$$

else

$$(i) = (f(i + 1) - f(i - 1)) / (2 * \text{delta}_y);$$

end
end
(dibawah ini adalah koefisien yang digunakan pada persamaan)

```

$$A = 1/((\text{delta}_y)^2);$$

$$B = 2 * A - V;$$

$$C = 1 - \text{miu} * I * N;$$

$$D = -0.5 + 3 * A;$$

$$E = 0.5 + A;$$

$$F = 4 * A - 1;$$

$$G = A/2;$$

(untuk iterasi maksimal sampai 40 iterasi digunakan kode dibawah ini)

```

for  $it_{max} = 1:40$ 
for  $i=1:Z$ 

    if ( $i==1$ )
 $z(i) = \text{sqrt}((-A*z(i+1)+B*z(i)-A*z(i+1)+D*z(i)*z(i+1)+E*z(i)*z(i+1)-$ 
 $G*z(i)*z(i+2)+G*z(i)*z(i)-(0.5*G)*z(i+1)*z(i+1)+G*z(i+1)*z(i+1)-$ 
 $(0.5*G)*z(i+1)*z(i+1)-C+2)/F);$ 
    elseif ( $i==2$ )
 $z(i) = \text{sqrt}((-A*z(i+1)+B*z(i)-A*z(i-1)+D*z(i)*z(i+1)+E*z(i)*z(i-1)-$ 
 $G*z(i)*z(i+2)+G*z(i)*z(i)-(0.5*G)*z(i+1)*z(i+1)+G*z(i+1)*z(i-1)$ 
 $-(0.5*G)*z(i-1)*z(i-1)-C+2)/F);$ 
    elseif ( $i==Z-1$ )
 $z(i)=\text{sqrt}((-A*z(i+1)+B*z(i)-A*z(i-1)+D*z(i)*z(i+1)+E*z(i)*z(i-1)-$ 
 $G*z(i)*1+G*z(i)*z(i-2)-(0.5*G)*z(i+1)*z(i+1)+G*z(i+1)*z(i-1)-$ 
 $(0.5*G)*z(i-1)*z(i-1)-C+2)/F);$ 
    elseif ( $i==Z$ )
 $z(i)=\text{sqrt}((-A*1+B*z(i)-A*z(i)-A*z(i-1)+D*z(i)*1+E*z(i)*z(i-1)$ 
 $-G*z(i)*1+G*z(i-2)-(0.5*G)*1+G*1*z(i-1)-$ 
 $(0.5*G)*z(i-1)*z(i-1)-C+2)/F);$ 

```

```

else
z(i)=sqrt((-A*z(i+1)+B*z(i)-A*z(i-1)+D*z(i)*z(i+1)+E*z(i)*z(i-1)-
G*z(i)*z(i+2)+G*z(i)*z(i-2)-(0.5*G)*z(i+1)+G*z(i+1)*z(i-1)-
(0.5*G)*z(i-1)*z(i-1)-C+2)/F);
end
end
end
(untuk menampilkan grafik digunakan kode dibawah ini)
if (it==1)
figure(1);
plot(y,z,'k-');
title ('profil kecepatan dengan variasi parameter arus listrik');
ylabel ('f''(y)');
xlabel('y');
legend('I=20','I=40','I=60','I=80')
hold on;
figure(2)
plot(y,z,'k-');
title ('profil kecepatan dengan variasi parameter jumlah lilitan');
ylabel ('f''(y)');
xlabel('y');
legend('N=300','N=900','N=1200','N=2000')
hold on;
figure(3)
plot(y,z,'k-');
title ('profil kecepatan dengan variasi parameter viskositas');
ylabel ('f''(y)');
xlabel('y');
legend('V=1','V=2','V=3','V=4')

```

```
hold on;
elseif (it==2)
figure(1)
plot(y,z,'k-');
title ('profil kecepatan dengan variasi parameter arus listrik');
ylabel ('f"(y)');
xlabel('y');
legend('I=20','I=40','I=60','I=80')
hold on;
figure(2)
plot(y,z,'k-');
title ('profil kecepatan dengan variasi parameter jumlah lilitan');
ylabel ('f"(y)');
xlabel('y');
legend('N=300','N=900','N=1200','N=2000')
hold on;
figure(3)
plot(y,z,'k-');
title ('profil kecepatan dengan variasi parameter viskositas');
ylabel ('f"(y)');
xlabel('y');
legend('V=1','V=2','V=3','V=4')
hold on;
elseif (it==3)
figure(1)
plot(y,z,'k-');
title ('profil kecepatan dengan variasi parameter arus listrik');
ylabel ('f"(y)');
xlabel('y');
```

```

legend('I=20';I=40';I=60';I=80')
hold on;
figure(2)
plot(y,z,'k-');
title ('profil kecepatan dengan variasi parameter jumlah lilitan');
ylabel ('f"(y)');
xlabel('y');
legend('N=300';N=900';N=1200';N=2000')
hold on;
figure(3)
plot(y,z,'k-');
title ('profil kecepatan dengan variasi parameter viskositas');
ylabel ('f"(y)');
xlabel('y');
legend('V=1';V=2';V=3';V=4')
hold on;
else
figure(1)
plot(y,z,'k-');
title ('profil kecepatan dengan variasi parameter arus listrik');
ylabel ('f"(y)');
xlabel('y');
legend('I=20';I=40';I=60';I=80')
hold on;
figure(2)
plot(y,z,'k-');
title ('profil kecepatan dengan variasi parameter jumlah lilitan');
ylabel ('f"(y)');
xlabel('y');

```

```
legend('N=300','N=900','N=1200','N=2000')
hold on;
figure(3)
plot(y,z,'k:');
title ('profil kecepatan dengan variasi parameter viskositas');
ylabel ('f''(y)');
xlabel('y');
legend('V=1','V=2','V=3','V=4')
hold on;
end
end
```

## DAFTAR RIWAYAT HIDUP

### Identitas Diri

Nama Lengkap : Aly Syafrudin  
Tempat, Tanggal Lahir : Tegal, 06 Desember 2001  
Alamat : Desa Pagongan, RT 04/RW 03,  
Kec.Dukuhturi, Kab.Tegal  
HP : 085157701470  
E-mail : alysyafurdin635@gmail.com

### Riwayat Pendidikan

1. SDN Bandung 02 ( 2007 - 2013 )
2. SMPN 19 Kota Tegal ( 2013 - 2016)
3. SMAN 02 KOta Tegal ( 2016 - 2019)