

PENYELESAIAN NUMERIK FLUIDA NON-NEWTONIAN PADA ALIRAN DARAH MANUSIA MELALUI ARTERI

SKRIPSI

**Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika**



**Oleh : AJENG OXA NISA
NIM : 2008046028**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2023**

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Ajeng Oxa Nisa
NIM : 2008046028
Jurusan/Program Studi : Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

PENYELESAIAN NUMERIK FLUIDA NON-NEWTONIAN PADA ALIRAN DARAH MANUSIA MELALUI ARTERI

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 3 April 2024
Pembuat pernyataan,



Ajeng Oxa Nisa
NIM : 2008046028



KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **PENYELESAIAN NUMERIK FLUIDA
NON-NEWTONIAN PADA ALIRAN DARAH
MANUSIA MELALUI ARTERI**

Penulis : Ajeng Oxa Nisa

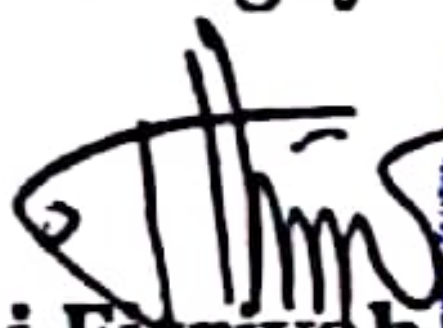
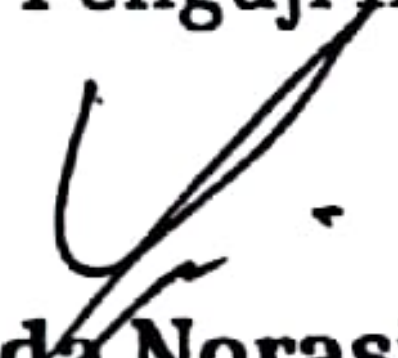
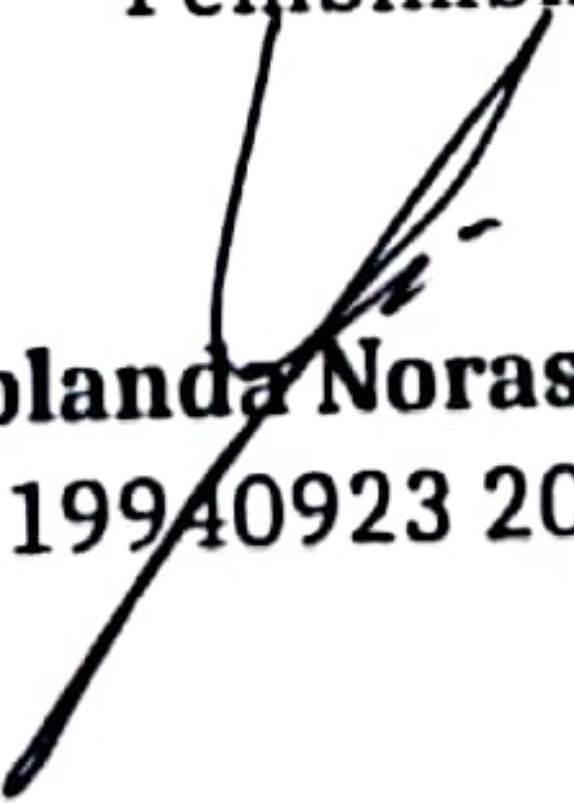
NIM : 2008046028

Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang tugas akhir oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 3 April 2024

DEWAN PENGUJI

Penguji I,  Aini Fitriyah, M.Sc. NIP : 19890929 201903 2 021	Penguji II,  Yolanda Norasia, M.Si. NIP : 19940923 201903 2 011
Penguji III,  Zulaikha, M.Si. NIP : 19920409 201903 2 027	Penguji IV,  Seftina Diah Miasary, M.Sc. NIP : 19870921 201903 2 010
Pembimbing,  Yolanda Norasia, M.Si. NIP : 19940923 201903 2 011	

NOTA DINAS

Semarang, 3 April 2024

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah dengan:

Judul : PENYELESAIAN NUMERIK FLUIDA
NON-NEWTONIAN PADA ALIRAN DARAH MANUSIA
MELALUI ARTERI
Nama : Ajeng Oxa Nisa
NIM : 2008046028
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing,


Yolanda Norasia, M.Si.
NIP : 19940923 201903 2 011

ABSTRAK

Studi dinamika fluida memainkan peran penting pada aliran fluida dalam tubuh manusia, dan pemodelan matematika aliran darah merupakan bidang penting dalam fisika peredaran darah. Penelitian ini menyajikan model matematika aliran darah yang sederhana dengan asumsi darah adalah fluida non-newtonian yang diatur oleh persamaan kontinuitas, persamaan momentum linier dan persamaan momentum angular. Penelitian ini juga mengkaji tentang aliran darah manusia melalui arteri dengan pengaruh parameter magnetik (M) dan pengaruh parameter bahan (K) terhadap profil kecepatan linier dan mikrorotasi. Persamaan pembangun dimensional ditransformasikan menjadi persamaan non dimensional, kemudian dirubah menjadi persamaan similaritas. Kemudian penyelesaian numerik dilakukan dengan menggunakan metode *Keller – Box* dan disimulasikan menggunakan matlab. Hasil simulasi menunjukkan bahwa ketika parameter magnetik (M) dan parameter bahan (K) ditingkatkan, maka kecepatan aliran fluida non-newtonian pada aliran darah manusia melalui arteri mengalami penurunan. Parameter magnetik (M) pada aliran darah fluida mikrokutub menunjukkan bahwa aliran darah meningkat seiring dengan bertambahnya nilai variasi parameter magnetik.

Kata kunci : Aliran darah, Fluida Non-Newtonian, Keller-Box, Matlab 2013a.

DAFTAR SIMBOL

Variabel :

u = Kecepatan terhadap arah sumbu x

y = Kecepatan terhadap arah sumbu y

t = Waktu

T = Temperatur

Parameter :

U_e = Kecepatan fluida pada aliran bebas

B = Gaya magnet

B_0 = Medan magnet

E = Medan listrik

σ = Daya hantar listrik

b = Induksi medan magnet

M = Parameter magnetik

λ = Parameter konveksi

N = Parameter mikrorotasi

K_{fm} = Parameter bahan

g = Gravitasi

t = Waktu

T = Temperatur

Re = Bilangan Reynolds

ρ_{fm} = Densitas fluida

ρ_{∞} = Massa jenis diluar area lapisan batas

p = Tekanan

u_e = Kecepatan free stream

F = Gaya

j = Densitas mikro inersia

ν_{fm} = Viskositas kinematik

γ_{fm} = Gradien viskositas

μ_{fm} = Viskositas dinamik

β = Ekspansi panas

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah robbil Alamin. Dengan menyebut asma Allah SWT yang maha pengasih lagi maha penyayang. Puji syukur dengan hati yang tulus tureruhkan kehadiran Allah SWT, atas limpahan nikmat dan rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyusun dan menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam semoga selalu tureruhkan kepada baginda Rasulullah SAW.

Skripsi yang berjudul “Penyelesaian Numerik Fluida Non-Newtonian pada Aliran Darah Manusia Melalui Arteri” disusun untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Satu Program Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.

Proses penyusunan skripsi tidak terlepas dari bantuan, bimbingan, motivasi, do’a, dan peran dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Bambang Sumantri, Ayah Muhammad Maxum dan Ibu Lia Walimatun selaku orang tua penulis, yang telah memberikan segalanya baik do’a, semangat, cinta, kasih sayang, ilmu dan bimbingan, yang tidak dapat tergantikan dengan apapun.
2. Prof. Dr. Imam Taufiq, M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negri Walisongo Semarang.
3. Dr. H. Ismail, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negri Walisongo Semarang.
4. Emy Siswanah, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Universitas Islam Negri Walisongo Semarang.

5. Yolanda Norasia, M.Si., selaku pembimbing yang telah berkenan meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran serta dengan tekun dan sabar memberikan bimbingan dan pengarahan dalam menyusun skripsi ini.
6. Nur Khasanah, M.Si., selaku Dosen Wali penulis yang telah memberikan semangat.
7. Segenap dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang yang telah mencurahkan segenap ilmunya kepada penulis.
8. Sintia, prita, dinda, atika, yanti, maya, una, alvian, aly, anggota kelas matematika 8B dan anggota KKN MIT-16 posko 85 selaku teman belajar, memberikan kenangan terindah serta pelajaran berharga.
9. Alm.Embah Putri, Alm.Embah Kakung, Alm.Embah Endut, dan Embah Tinah. Terima kasih telah mendidik penulis sedari kecil, anak kecil pemulung sudah menjadi sarjana, ya!! cucumu telah menyandang gelar sarjana pertama dikeluarga besar. Terima Kasih telah mengajarkan penulis pentingnya pendidikan.

Atas segala kekurangan dan kelemahan dalam skripsi ini penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun. Semoga skripsi ini bermanfaat untuk siapapun yang membacanya, secara khusus untuk berbagai pihak yang berkaitan dengan matematika.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iii
NOTA PEMBIMBING I	iv
DAFTAR SIMBOL	vii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Rumusan Masalah	4
C. Tujuan Penelitian	4
D. Manfaat Penelitian	5
E. Batasan Masalah	5
BAB II LANDASAN PUSTAKA	6
A. Penelitian Terdahulu	6
B. Sistem Peredaran Darah	9
C. Fluida	10
1. Fluida Newtonian dan Fluida Non-Newtonian	11
2. Fluida Mikrokutub	11
3. Aliran Lapisan Batas	12
D. Bilangan Non-Dimensional Reynolds	13
E. Persamaan Diferensial	14
F. Metode Beda Hingga	14
G. Skema <i>Keller Box</i>	17
BAB III METODOLOGI PENELITIAN	20
A. Metode Penelitian	20
B. Tahapan Penelitian	20
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	23
A. Model Matematika	23

1.	Persamaan Kontinuitas	24
2.	Persamaan Momentum Linier	27
3.	Persamaan Momentum Angular	37
B.	Persamaan Pembangun Non Dimensional	41
C.	Pendekatan Aliran Bebas	43
D.	Fungsi Alir	48
E.	Persamaan Similaritas	49
F.	Penyelesaian Numerik Model Matematika	54
1.	Penyelesaian Notasi	54
2.	Diskretisasi Model	55
3.	Pelinieran Model	60
4.	Teknik Eliminasi Blok	66
G.	Analisis Hasil Simulasi Numerik	74
1.	Pengaruh Parameter Bahan Terhadap Kecepatan Aliran Darah	75
2.	Pengaruh Parameter Magnetik Terhadap Kecepatan Aliran Darah	77
3.	Pengaruh Parameter Magnetik Terhadap Kecepatan Aliran Darah Fluida Mikroktub	80
BAB V PENUTUP		83
A.	Kesimpulan	83
B.	Saran	86
DAFTAR PUSTAKA		87
Lampiran-lampiran		92

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
Gambar 2.1	Pembuluh darah	9
Gambar 2.2	Pembuluh darah arteri.	10
Gambar 2.3	Aliran Laminer.	12
Gambar 2.4	Aliran Transisi.	12
Gambar 2.5	Aliran Turbulen.	13
Gambar 2.6	Metode Beda Hingga	15
Gambar 2.7	Stensil Skema <i>KellerBox</i>	19
 Gambar 3.1	 Diagram alir penelitian.	 22
Gambar 4.1	Aliran fluida masuk dan keluar	26
Gambar 4.2	Gaya Permukaan Elemen fluida	32
Gambar 4.3	Skema Beda Hingga	56
Gambar 4.4	Diagram kecepatan aliran darah dengan variansi parameter bahan saat $M = 1, n = 0$	76
Gambar 4.5	Diagram kecepatan aliran darah dengan variansi parameter bahan saat $M = 1, n = 0.5$	77
Gambar 4.6	Diagram kecepatan aliran darah dengan variansi parameter magnetik saat $M = 1, n = 0$	78
Gambar 4.7	Diagram kecepatan aliran darah dengan variansi parameter magnetik saat $M = 1, n = 0.5$	79

Gambar 4.8	Diagram pengaruh parameter magnetik terhadap kecepatan aliran darah fluida mikrokutub saat $M = 1, n = 0$	80
Gambar 4.9	Diagram pengaruh parameter magnetik terhadap kecepatan aliran darah fluida mikrokutub saat $M = 1, n = 0.5$	82

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 Transformasi Kondisi batas Dimensional ke Non Dimensional	92
Lampiran 2 Transformasi Persamaan Similaritas	108
Lampiran 3 Penurunan Kondisi Awal	118
Lampiran 4 Scrip Matlab 2013a	125

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Pemodelan matematika adalah salah satu cabang ilmu dari matematika terapan. Pemodelan matematika digunakan untuk menggambarkan masalah-masalah di kehidupan nyata dalam bentuk sistem persamaan matematika. Dalam hal ini, sistem persamaan matematika disebut sebagai model matematika (Ahmad et al., 2019). Model matematika digunakan tidak hanya dalam bidang industri dan bidang teknik, tetapi juga dalam bidang kesehatan. Seiring berkembangnya zaman, banyak penelitian mengenai model matematika dalam dinamika fluida.

Dinamika fluida adalah suatu ilmu terapan yang menggunakan pemodelan matematika dan diselesaikan dengan solusi numerik (Norasia & Ghani, 2023). Perkembangan ilmu dinamika fluida semakin berkembang dari waktu ke waktu. Dalam ilmu dinamika fluida, fluida adalah zat yang terus berubah bentuk setelah mengalami tegangan geser, sekalipun tegangan gesernya relatif kecil. Tegangan geser diperoleh dari gesekan antara fluida dan permukaan benda sehingga menyebabkan terbentuknya lapisan yang disebut dengan lapisan batas, terbentuknya lapisan batas dipengaruhi oleh beberapa faktor antara lain seperti viskositas dan gaya inersia fluida (Setyo , 2017). Fluida meliputi zat cair dan gas, berdasarkan sifat kemampatannya, fluida dibagi menjadi dua kelompok yakni fluida yang mampu mampat (*compressible*) dan fluida tak mampu mampat (*incompressible*) (Ghurri, 2014). Dalam menghitung kecepatan suatu aliran fluida dibutuhkan

beberapa parameter untuk mempengaruhi aliran tersebut, banyak parameter yang bisa digunakan misalnya parameter magnetik, parameter bahan, parameter panjang karakteristik, dsb.

Mengenai penelitian tentang aliran fluida dalam bidang industri telah dilakukan oleh Norasia (2019), meneliti tentang kecepatan dan temperatur dari fluida nano Zn -Air dan ZnO -Air dan menghasilkan kesimpulan bahwa dengan meningkatnya parameter magnetik, kecepatan dan temperatur keduanya mengalami penurunan. Penelitian aliran fluida dalam bidang teknik telah dilakukan oleh Rosha (2022), dengan menghasilkan alat peraga materi fluida yang digunakan sebagai pembelajaran peserta didik untuk memahami materi. Kebanyakan penelitian dibidang teknik menggunakan fluida newtonian, sedangkan di fenomena nyata tidak hanya ada fluida newtonian tetapi ada juga fluida non-newtonian. Fluida newtonian merupakan fluida yang mempunyai sifat tidak mendapat perubahan pada viskositasnya di saat diberikan gaya, atau bersifat permanen. Pada saat yang sama, fluida non-newtonian tidak menunjukkan sifat tersebut, contoh fluida non-newtonian yaitu cat, minyak pelumas, lumpur dan darah (Martanegara et al., 2013).

Darah adalah cairan dalam sistem peredaran darah manusia. Darah memainkan peran dalam sistem peredaran darah atau dalam transportasi tubuh manusia, aliran darah bergerak keseluruhan tubuh untuk mendistribusikan oksigen dan nutrisi ke seluruh sel dan jaringan tubuh (Norasia et al., 2024). Pada manusia, darah didenyutkan oleh jantung ke semua organ tubuh untuk terjadinya proses peredaran darah, dalam hal ini terdapat organ pembuluh darah yang berperan sebagai jalur aliran darah (Salman et al., 2018). Ketika darah mengalir di dalam tubuh

melalui pembuluh, pada dinding pembuluh akan terjadi sebuah tekanan yang sering disebut tekanan darah. Faktor utama terjadinya tekanan darah yaitu laju aliran darah, ukuran pembuluh darah, dan gradien tekanan (Khalid et al., 2021). Pembuluh darah dibagi menjadi tiga yakni arteri, kapiler dan vena. Arteri merupakan pembuluh darah yang mengangkut darah dari jantung ke seluruh organ tubuh, kapiler menjadi penghubung antara arteri dan vena, dan vena merupakan pembuluh darah yang membawa darah dari organ tubuh untuk kembali ke jantung (Sarpini & Rusbandi, 2016).

Penelitian tentang aliran darah dilakukan oleh Riri Jonuarti (2011), yang menguji fluida aliran darah dalam stenosis, kecepatan aliran darah dengan parameter jarak stenosis dari ujung pembuluh darah menghasilkan semakin jauh stenosis dari ujung arteri, maka semakin menurun kecepatan aliran darah, penelitian lainnya konsep aliran darah melalui arteri sudah diselidiki oleh Changdar (2015) yang memperlakukan arteri sebagai tabung silinder dan dimampatkan. Penelitian serupa dilakukan dengan asumsi darah tak mampu mampat telah diselediki oleh Khalid (2021).

Merujuk pada penelitian diatas, dalam Tugas Akhir ini peneliti tertarik untuk mempelajari tentang fluida non-newtonian pada aliran darah manusia melalui arteri. Penelitian ini memperhatikan bagian arteri karena arteri merupakan pembuluh besar yang membawa darah dari jantung ke seluruh tubuh dan darah diasumsikan memiliki sifat non-newtonian. Batasan masalah digunakan untuk membuat model matematika aliran darah manusia melalui arteri. Model yang dihasilkan kemudian diselesaikan dengan menggunakan metode beda hingga skema *KellerBox*. Metode yang diusulkan memungkinkan untuk

memperlihatkan penyelesaian aliran darah manusia menggunakan metode yang sudah ditentukan. Selanjutnya, disimulasikan menggunakan program Matlab 2013a.

B. Rumusan Masalah

1. Bagaimana membangun model matematika dari fluida non-newtonian pada aliran darah manusia melalui arteri ?
2. Bagaimana menyelesaikan model matematika dari fluida non-newtonian pada aliran darah manusia melalui arteri menggunakan penerapan metode beda hingga skema *KellerBox*?
3. Bagaimana pengaruh parameter bahan dan parameter magnetik terhadap kecepatan, serta pengaruh parameter magnetik terhadap kecepatan mikrorotasi dari fluida non-newtonian pada aliran darah manusia melalui arteri menggunakan software matlab 2013a.

C. Tujuan Penelitian

1. Membangun model matematika dari permasalahan fluida non-newtonian pada aliran darah manusia melalui arteri.
2. Menyelesaikan model fluida non-newtonian pada aliran darah manusia melalui arteri menggunakan penerapan metode beda hingga skema *KellerBox*.
3. Menganalisis pengaruh parameter bahan dan parameter magnetik terhadap kecepatan, serta pengaruh parameter magnetik terhadap kecepatan mikrorotasi dari fluida

non-newtonian pada aliran darah manusia melalui arteri menggunakan software matlab 2013a.

D. Manfaat Penelitian

1. Bagi penulis diharapkan dapat menambah wawasan dan pengetahuan tentang penelitian yang berkaitan dengan matematika terapan khususnya pada pemodelan aliran fluida non-newtonian.
2. Bagi lembaga diharapkan dapat dijadikan tambahan pembelajaran perkuliahan khususnya tentang materi fluida non-newtonian.
3. Bagi pembaca diharapkan dapat menjadi rujukan untuk dikembangkan pada penelitian yang akan datang.

E. Batasan Masalah

1. Media aliran darah adalah arteri pada manusia sehat (tidak ada sumbatan atau stenosis).
2. Pembuluh darah arteri diasumsikan berbentuk silinder, berukuran pendek dan tidak mengalami perubahan jari-jari.
3. Metode numerik yang digunakan adalah metode beda hingga dengan skema *KellerBox*.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan penelitian-penelitian terdahulu untuk dijadikan referensi. Selain itu juga diberikan beberapa pembahasan yang berkaitan dengan penelitian ini, yakni sistem peredaran darah, fluida, bilangan non-dimensional reynolds, persamaan pembangun, metode beda hingga, dan skema *KellerBox*.

A. Penelitian Terdahulu

1. Pada tahun 2019, Basuki Widodo melakukan penelitian yang berjudul '*Unsteady nano fluid flow through magnetic porous sphere under the influence of mixed convection*'. Penelitian ini mempelajari tentang permasalahan fluida nano melalui bola berpori di bawah pengaruh konveksi campuran. Hasil simulasi memperoleh bahwa kecepatan dan suhu akan menurun ketika nilai parameter magnetik ditingkatkan, kecepatan dan suhu meningkat ketika nilai konveksi campuran semakin besar. Persamaan penelitian Basuki Widodo dengan penelitian saat ini adalah sama-sama mensimulasikan pengaruh parameter magnetik terhadap kecepatan, perbedaannya adalah penelitian saat ini selain menggunakan parameter magnetik juga menggunakan parameter bahan.
2. Pada tahun 2015, S. Changdar dan S. De melakukan penelitian yang berjudul '*Numerical Simulation of Nonlinear*

Pulsate Newtonian Blood Flow throught a Multiple Stenosed Artery', model matematika untuk aliran darah pada arteri stenosis multiple telah diselesaikan di penelitian ini, dengan melibatkan parameter bahan dan meningkatkan bilangan reynolds maka menghasilkan gesekan dinding meningkat, stenosis multiple memiliki pengaruh yang signifikan terhadap gesekan tersebut. Persamaan penelitian Changdar dengan penelitian saat ini adalah sama-sama menghitung kecepatan aliran darah pada arteri dan melibatkan parameter bahan, perbedaanya adalah darah dalam penelitian saat ini memiliki sifat yang tak mampu mampat.

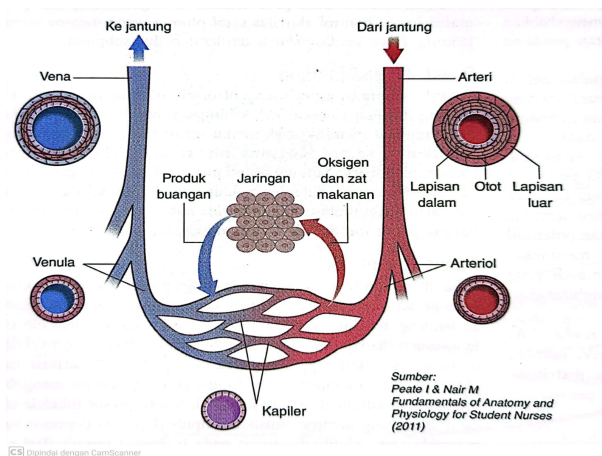
3. Pada tahun 2021, A K Khalid melakukan penelitian yang berjudul '*A review of mathematical modelling of blood flow in human circulatory system*', penyelesaian dari model matematika, tidak hanya menentukan model matematika aliran darah, penelitian ini juga mengembangkan model aliran tekanan darah dengan asumsi darah mengalir pada arah-z. Simulasi dari kedua model yaitu model laju aliran darah dan model tekanan darah dipengaruhi oleh perubahan luas penampang dan gradien tekanan. Persamaan penelitian A K Khalid dengan penelitian saat ini adalah sama-sama menghitung kecepatan aliran darah pada arteri, perbedaanya adalah penelitian saat ini hanya akan menghitung pada arah sumbu x dan y, pada penelitian A K Khalid selain menghitung kecepatan aliran darah pada arah sumbu z tapi juga menghitung model tekanan darah.
4. Pada tahun 2018, Gelar Salman, Siti Fatimah, dan Kartika

Yulianti melakukan penelitian yang berjudul '*Model Matematika untuk Kecepatan Aliran Darah*', membahas tentang model matematika kecepatan aliran darah yang menghasilkan kesimpulan bahwa kecepatan aliran darah dipengaruhi oleh jari-jari pembuluh dan gradien tekanan darah, persamaan penelitian Gelar Salman dengan penelitian saat ini adalah sama-sama menghitung kecepatan aliran darah, perbedaanya adalah penelitian saat ini menggunakan metode beda hingga skema *Keller Box* dan pada penelitian Gelar Salman menggunakan metode pemisahan variabel.

5. Pada tahun 2021, Mohammad Ghani dan Wayan Rumite melakukan penelitian yang berjudul '*Keller Box Aliran Konveksi Campuran Pada Bola Padat dengan Efek MHD*', penelitian ini mempelajari tentang permasalahan aliran fluida diatas permukaan bola dengan efek MHD, dengan menggunakan pengaruh parameter angka prandtl, viskoelastik, dan konveksi campuran. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa ketika bertambah besar angka prandtl maka semakin rendah suhu dan kecepatan dari aliran fluida, berbanding terbalik dengan parameter viskoelastik, konveksi campuran, semakin besar angka parameternya semakin meningkat juga suhu dan kecepatan aliran fluida. Persamaan penelitian Ghani dengan penelitian saat ini adalah menggunakan metode *KellerBox* untuk menyelesaikan persamaan pembangun, perbedaanya adalah penelitian ghani menggunakan persamaan energi sedangkan penelitian saat ini hanya menggunakan persamaan kontinuitas dan persamaan momentum.

B. Sistem Peredaran Darah

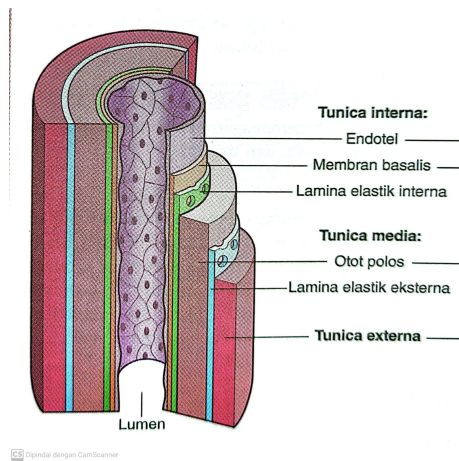
Sistem peredaran darah merupakan sistem transportasi tubuh yang membawa makanan, oksigen dan semua zat penting lainnya ke sel-sel jaringan. Sistem peredaran darah terdiri dari jantung yang memompa darah, dan vaskular (Manaba, 2016). Pembuluh darah merupakan belahan sistem peredaran darah. Ada tiga jenis utama pembuluh darah, salah satunya adalah arteri yang mengangkut darah keluar dari jantung; kapiler tempat pertukaran air, nutrisi, dan bahan kimia; vena yang mengembalikan darah dari kapiler ke jantung (Peate & Nair, 2018). Gambar (2.1) adalah simulasi gambar dari pembuluh darah .



Gambar 2.1. Pembuluh darah

Pembuluh darah arteri terletak agak jauh dari permukaan tubuh, dinding arteri terdiri dari tiga lapisan yaitu tunica intima yang terdiri dari lapisan tipis sel-sel endotel, tunical media yang terdiri dari otot polos dan serat elastis, tunical externa atau lapisan

luar yang terdiri dari saraf dan jaringan kolagen. Simulasi gambar pembuluh darah arteri ditunjukkan pada gambar dibawah ini:



Gambar 2.2. Pembuluh darah arteri.

C. Fluida

Di alam semesta, zat terbagi menjadi tiga bagian yaitu padat, gas dan cair. Zat padat jika dilihat secara langsung mempunyai sifat tetap, sedangkan zat cair dan gas memiliki sifat menerima terhadap perubahan bentuk dan kemampuan untuk bergerak. Zat yang memiliki kekuatan untuk bergerak mengalir disebut dengan fluida. Fluida merupakan zat yang akan mengalami perubahan bentuk terus menerus apabila mendapat tegangan geser sekecil apapun (Kironto, 2018). Tegangan geser merupakan perbandingan antara luas suatu permukaan dengan besarnya gaya geser yang terjadi (Ghurri, 2014). Fluida terbagi menjadi 2, yakni fluida newtonian dan fluida non newtonian.

1. Fluida Newtonian dan Fluida Non-Newtonian

Fluida newtonian merupakan fluida yang diatur Hukum Newton, fluida dengan tegangan gesernya berkorelasi secara linier dengan laju deformasi, fluida newtonian juga merupakan fluida tak kental atau dapat dikatakan tidak dapat mengalami perubahan apabila diberikan suatu gaya geser berapapun. Keunikan dari fluida newtonian yaitu mempunyai kemampuan untuk terus mengalir berapapun gaya geser yang diberikan, hal ini dapat terjadi karena viskositas dari suatu fluida newtonian tidak berubah (Ghurri, 2014). Contoh fluida newtonian adalah gas, oli, minyak, bensin, air, dan udara. Sedangkan, Fluida non-newtonian adalah fluida yang mengalami perubahan viskositas saat diberi gaya. Pada fluida non-newtonian tegangan gesernya tidak berbanding lurus dengan laju deformasi (Kironto, 2018). Salah satu fluida yang memiliki karakteristik non-newtonian adalah fluida mikrokutub.

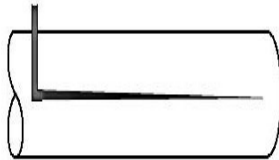
2. Fluida Mikrokutub

Fluida mikrokutub adalah fluida dengan struktur mikronya terdiri dari partikel-partikel yang mampu berrotasi dan dapat berputar secara acak dengan rotasi mikronya masing-masing atau kerap disebut *stress momen*. *Stress momen* merupakan gaya rotasi yang diterapkan pada elemen fluida, dan ini dapat mempengaruhi aliran fluida atau mempengaruhi struktur fluida seperti vortex (pusaran) yang terbentuk (Anggriani, 2016). Contoh dari fluida mikrokutub adalah cairan koloid, dan cairan vaskular pada manusia atau hewan (Abdel-Rahman, 2009).

3. Aliran Lapisan Batas

Lapisan batas merupakan lapisan yang terletak diantara benda dan fluida. Lapisan batas tercipta karena adanya gesekan atau tekanan aliran fluida dengan permukaan benda karena pengaruh viskositas maupun gaya inersia. Menurut Rohani (2021), aliran fluida dibagi menjadi tiga yaitu:

1. Aliran Laminer, pada aliran laminer tiap partikel fluida mengikuti aliran yang lurus, dan lintasan-lintasan ini tidak memotong satu sama lainnya. Ditunjukkan pada gambar dibawah ini:



Gambar 2.3. Aliran Laminer.

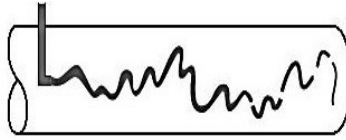
2. Aliran Transisi adalah aliran pergantian dari aliran laminer ke aliran turbulen. Ditunjukkan pada gambar dibawah ini:



Gambar 2.4. Aliran Transisi.

3. Aliran Turbulen merupakan aliran fluida yang geraknya

tidak beraturan dan kecepatan dari alirannya berubah-ubah. Ditunjukkan pada gambar dibawah ini:



Gambar 2.5. Aliran Turbulen.

D. Bilangan Non-Dimensional Reynolds

Bilangan Reynolds adalah bilangan tak berdimensi yang menganalisis gaya inersia fluida. Bilangan Reynolds juga merupakan bilangan yang menunjukkan batas aliran laminar atau turbulen. Aliran laminar hanya terjadi pada kecepatan rendah. Jika kecepatan meningkat, arus berputar lokal terjadi, yang disebut arus turbulen. Tidak ada aliran turbulen di seluruh fluida, lapisan di dekat dinding tabung masih bersifat laminar (Sarojo, 2013). Bilangan Reynolds di deskripsikan sebagai berikut:

$$Re = \frac{GayaInersia}{GayaViskositas}$$

$$Re = \frac{\rho V R}{\mu}$$

Dengan

ρ : kerapatan fluida

V : kecepatan aliran

R : diameter tabung

μ : viskositas kinematik fluida

E. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan variabel-variabel tak bebas dan derivatif-derivatifnya terhadap variabel-variabel bebas. Persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah suatu persamaan diferensial yang hanya mempunyai satu variabel bebas, jika $y(x)$ adalah suatu fungsi satu variabel, maka x dinamakan variabel bebas dan y dinamakan variabel tak bebas. Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah suatu persamaan diferensial yang mempunyai setidaknya dua variabel bebas, jika z adalah variabel terikat (*dependent*) dan x, y adalah variabel bebas (*independent*) maka $z = f(x, y)$ (Lumbantoruan, 2019).

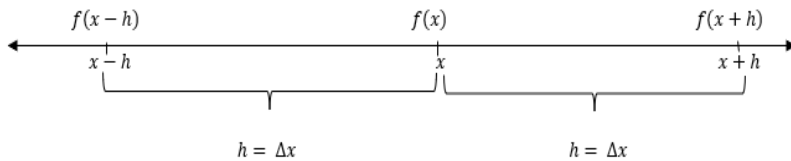
F. Metode Beda Hingga

Metode beda hingga merupakan pendekatan solusi secara numerik untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial. Solusi yang diperoleh secara numerik adalah solusi pendekatan dari solusi sebenarnya, maka berarti terdapat (*error*) sebesar selisih antara solusi sebenarnya dengan solusi pendekatan. *Error* pada solusi numerik harus dihubungkan dengan polinom pendekatan fungsi sebenarnya. *Kakas (tools)* yang digunakan untuk membuat polinom pendekatan adalah deret Taylor (Munir, 2021).

Definisi Deret Taylor : Andaikan f dan semua turunannya, $f', f'', f''', \dots$, menerus didalam selang $[a, b]$. Misalkan $x_0 \in [a, b]$ maka untuk semua nilai-nilai x disekitar x_0 dan $x \in [a, b]$, $f(x)$ dapat diperluas (diekspansi) ke dalam deret Taylor berikut :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots$$

Secara umum, terdapat tiga pendekatan dalam metode beda hingga yakni beda maju, beda mundur, dan beda tengah. Ketiga pendekatan tersebut dapat ditulis dalam persamaan berikut (Yulistiyo, 2017):



Gambar 2.6. Metode Beda Hingga

Persamaan differensial numerik dari $f(x + h)$ dan $f(x - h)$:

$$\begin{aligned} f(x + h) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta x^k}{k!} f^{(k)}(x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) \\ &\quad + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} f(x - h) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Delta x^k}{k!} f^{(k)}(x) = f(x) - \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) \\ &\quad - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

a. Beda Maju .

Metode beda hingga beda maju dapat di deskripsikan sebagai

berikut :

$$\begin{aligned}
 f(x+h) &= f(x) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \dots \\
 f(x+h) - f(x) &= \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \dots \\
 \frac{f(x+h) - f(x)}{\Delta x} &= f'(x) + \frac{\Delta x}{2!} f''(x) + \frac{\Delta x^2}{3!} f'''(x) + \dots \\
 \frac{f(x+h) - f(x)}{\Delta x} &= f'(x) + O(\Delta x) \\
 f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Karena dicari turunan pertama, maka $(\frac{\Delta x}{2!} f''(x) + \frac{\Delta x^2}{3!} f'''(x) + \dots)$ dianggap error atau dapat di tulis dengan $O(\Delta x)$.

b. Beda Mundur

Metode beda hingga beda mundur dapat di deskripsikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 f(x-h) &= f(x) - \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \dots \\
 f(x-h) - f(x) &= -\Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \dots \\
 \frac{f(x-h) - f(x)}{-\Delta x} &= f'(x) - \frac{\Delta x}{2!} f''(x) + \frac{\Delta x^2}{3!} f'''(x) - \dots \\
 \frac{f(x) - f(x-h)}{\Delta x} &= f'(x) + O(\Delta x) \\
 f'(x) &= \frac{f(x) - f(x-h)}{h}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Karena dicari turunan pertama, maka $(\frac{\Delta x}{2!} f''(x) + \frac{\Delta x^2}{3!} f'''(x) - \dots)$

dianggap error atau dapat di tulis dengan $O(\Delta x)$.

c. Beda Tengah .

Pada beda tengah ini adalah selisih dari beda maju dan beda mundur, metode beda hingga beda tengah dapat di deskripsikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \dots \\ f(x-h) &= f(x) - \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \dots \end{aligned}$$

pengurangan dari dua persamaan tersebut dihasilkan:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2\Delta x f'(x) + \frac{2\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

lalu kedua ruas dibagi dengan $2\Delta x$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2\Delta x} &= f'(x) + \frac{2\Delta x^2}{3!} f'''(x) + \dots \\ \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2\Delta x} &= f'(x) + O(\Delta x^2) \quad (2.5) \\ f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \end{aligned}$$

Karena dicari turunan pertama, maka $(\frac{2\Delta x^2}{3!} f'''(x) + \dots)$ dianggap error atau dapat di tulis dengan $O(\Delta x^2)$.

G. Skema Keller Box

Metode numerik merupakan suatu metode penyelesaian berbagai masalah matematika dengan menggunakan operasi hitungan, secara umum sifat metode numerik dibagi menjadi

dua yaitu implisit dan eksplisit. Skema *KellerBox* adalah salah satu teknik untuk menyelesaikan persamaan parabolik, terutama persamaan lapisan batas. Skema *Keller Box* bersifat implisit dengan keakurasiannya orde kedua dengan ruang dan waktu tidak harus sama, sehingga penyelesaian lebih tepat dan efisien. Penerapan skema *Keller Box* dimulai dengan mengubah bentuk persamaan orde dua menjadi persamaan orde satu (Al-Shibani et al., 2012). Misalkan :

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} \quad (2.6)$$

didefinisikan bahwa :

$$k = \frac{\partial j}{\partial x}$$

sehingga bentuk dari persamaan (2.6) dapat dinyatakan :

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial j}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \alpha \frac{\partial j}{\partial x}$$

selanjutnya dapat ditulis dalam dua persamaan sebagai berikut :

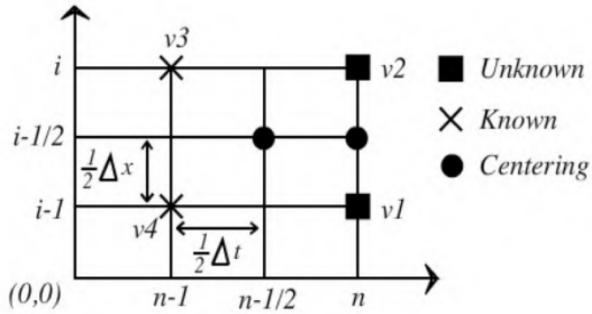
$$\frac{\partial j}{\partial x} = k \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \alpha \frac{\partial j}{\partial x} \quad (2.8)$$

Berdasarkan bentuk skema *Keller Box* pada Gambar (2.7) untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu yaitu sebagai berikut :

$$\frac{j_i^n - j_{i-1}^n}{\Delta x_i} = k_{i-1/2}^n \quad (2.9)$$

$$2 \frac{j_{i-1/2}^n - j_{i-1/2}^{n-1}}{\Delta t_n} = \frac{\alpha(k_i^n - k_{i-1}^n)}{\Delta x_i} + \frac{\alpha(k_i^{n-1} - k_{i-1}^{n-1})}{\Delta x_i} \quad (2.10)$$



Gambar 2.7. Stensil Skema *Keller Box*

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

A. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan bagian dari metode kajian literatur atau studi kepustakaan. Penelitian dilakukan dengan cara mengamati, mempelajari, menggali, dan mengidentifikasi seluruh informasi yang terkandung dalam literatur, seperti bacaan, buku referensi, dan hasil penelitian lainnya.

B. Tahapan Penelitian

1. Kajian Literatur

Pada langkah ini dilakukan pengumpulan penelitian-penelitian sebelumnya yang mendukung teori-teori yang berkaitan dengan persamaan-persamaan dalam aliran darah, yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum linier, dan persamaan momentum angular. Menggunakan metode beda hingga skema *Keller Box* untuk menyelesaikan model matematika secara numerik.

2. Perumusan Model Matematika

- (a) Mengkaji perumusan persamaan pembangun.
- (b) Persamaan pembangun yang telah didapat kemudian dilakukan substitusi variabel dan parameter non-dimensional menjadi model persamaan non-dimensional.

- (c) Persamaan non-dimensional yang telah didapat kemudian disederhanakan menjadi persamaan satu variabel (similaritas) menggunakan fungsi alir.

3. Penyelesaian Numerik

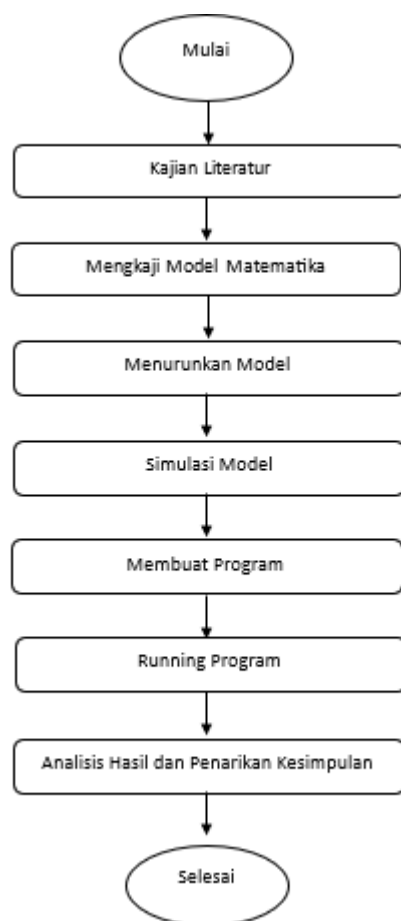
Pada langkah ini dilakukan penyelesaian numerik dengan menggunakan pendekatan metode beda hingga dengan skema *Keller Box*. Metode ini digunakan untuk menyelesaikan model matematika dari permasalahan penyelesaian numerik fluida non-newtonian pada aliran darah manusia melalui arteri.

4. Simulasi Model

Setelah didapatkan model matematika yang sudah diselesaikan menggunakan pendekatan metode beda hingga dengan skema *Keller Box* dari permasalahan penyelesaian numerik fluida non-newtonian pada aliran darah manusia melalui arteri, maka akan disimulasikan menggunakan bantuan program matlab 2013a.

5. Analisis Hasil dan Kesimpulan

Pada langkah ini dilakukan analisis hasil simulasi, diambil kesimpulan dari analisis yang dilakukan dan memberikan saran untuk pengembangan berikutnya. Secara umum ditampilkan dalam diagram alir berikut :



Gambar 3.1. Diagram alir penelitian.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Model Matematika

Model matematika yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari tiga persamaan yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum yang meliputi : persamaan momentum di sumbu x, persamaan momentum di sumbu y, dan persamaan angular. Persamaan-persamaan tersebut didefinisikan sebagai berikut. Persamaan Kontinuitas :

$$\frac{\partial \bar{r}\bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{r}\bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

Persamaan Momentum Linier Sumbu x :

$$\begin{aligned} \rho_{fm} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu_{fm} + k_{fm}) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ & - \sigma B_0^2 \bar{u} - \rho_{fm} \beta (\bar{T} - T_\infty) g_x + k_{fm} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \end{aligned}$$

Persamaan Momentum Linier Sumbu y :

$$\begin{aligned} \rho_{fm} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu_{fm} + k_{fm}) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ & - \sigma B_0^2 \bar{v} - \rho_{fm} \beta (\bar{T} - T_\infty) g_y + k_{fm} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} \end{aligned}$$

Persamaan Momentum Angular :

$$\rho_{fm} j \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) = \gamma_{fm} \left(\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - k_{fm} \left(2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)$$

dengan kondisi batas :

$$\bar{t} = 0; \bar{u} = \bar{v} = \bar{N} = 0, \bar{T} = T_{\infty} \text{ untuk setiap } \bar{x}, \bar{y}$$

$$\bar{t} > 0; \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{N} = -n \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}, \bar{T} = T_w \text{ pada } \bar{y} = 0$$

$$\bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{N} = 0, \bar{T} = T_{\infty} \text{ pada } \bar{y} \rightarrow \infty$$

1. Persamaan Kontinuitas

“Hukum kekekalan massa mengatakan bahwa laju perubahan massa suatu sistem terhadap waktu adalah nol (konstan), atau jumlah massa dalam sistem adalah konstan” (Rohani, 2021). Persamaan kontinuitas dapat dideskripsikan sebagai berikut :

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = 0 \quad (4.1)$$

M_{sys} adalah massa suatu sistem, $\frac{D}{Dt}$ adalah laju perubahan terhadap waktu. Dengan M dalam sistem dinyatakan sebagai berikut :

$$M_{sys} = \int_{sys} \rho_{fm} d\forall \quad (4.2)$$

ρ_{fm} adalah densitas dan $\forall$ adalah volume. Substitusi persamaan (4.2) ke persamaan (4.1) sehingga diperoleh :

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho_{fm} d\forall = 0 \quad (4.3)$$

Diketahui teorema *Transpor Reynolds* pada laju perubahan massa didefinisikan sebagai berikut :

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho_{fm} d\forall + \int_{cs} \rho_{fm} V \hat{n} ds \quad (4.4)$$

Dengan

cv = control volume.

cs = control surface.

V = kecepatan fluida.

$\hat{n}$ = arah vektor masuk keluar permukaan kontrol.

ds = luas bidang permukaan fluida.

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.4) kepersamaan (4.3) sehingga diperoleh :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho_{fm} d\forall + \int_{cs} \rho_{fm} V \hat{n} ds \quad (4.5)$$

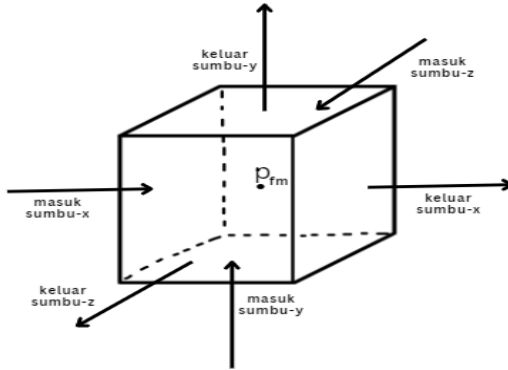
Dengan

$$\int_{cs} \rho_{fm} V \hat{n} ds = \Sigma m_{masuk} - \Sigma m_{keluar} \quad (4.6)$$

Diambil partikel kecil dari fluida berbentuk kubus dengan ρ_{fm} sebagai pusat kubus yang bergerak pada arah u, v, z terhadap x, y, z dapat dilihat pada gambar (4.1).

Jumlah aliran pada sumbu-x dapat dideskripsikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \Sigma m_{masuk} - \Sigma m_{keluar} &= \left(\rho_{fm} u - \frac{\partial}{\partial x} \rho_{fm} u \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z \\ &\quad - \left(\rho_{fm} u + \frac{\partial}{\partial x} \rho_{fm} u \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z \quad (4.7) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \rho_{fm} u \delta x \delta y \delta z \end{aligned}$$



Gambar 4.1. Aliran fluida masuk dan keluar

Jumlah aliran pada sumbu-y dapat dideskripsikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \Sigma m_{masuk} - \Sigma m_{keluar} &= \left(\rho_{fm} v - \frac{\partial}{\partial y} \rho_{fm} v \frac{\delta y}{2} \right) \delta x \delta z \\
 &\quad - \left(\rho_{fm} v + \frac{\partial}{\partial y} \rho_{fm} v \frac{\delta y}{2} \right) \delta x \delta z \quad (4.8) \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \rho_{fm} v \delta x \delta y \delta z
 \end{aligned}$$

Jumlah aliran pada sumbu-z dapat dideskripsikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \Sigma m_{masuk} - \Sigma m_{keluar} &= \left(\rho_{fm} w - \frac{\partial}{\partial z} \rho_{fm} w \frac{\delta z}{2} \right) \delta x \delta y \\
 &\quad - \left(\rho_{fm} w + \frac{\partial}{\partial z} \rho_{fm} w \frac{\delta z}{2} \right) \delta x \delta y \quad (4.9) \\
 &= \frac{\partial}{\partial z} \rho_{fm} w \delta x \delta y \delta z
 \end{aligned}$$

Jumlah dari aliran di sumbu x, y , dan z dapat dideskripsikan

sebagai berikut :

$$\frac{\partial \rho_{fm}}{\partial t} \delta x \delta y \delta z + \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho_{fm} u + \frac{\partial}{\partial y} \rho_{fm} v + \frac{\partial}{\partial z} \rho_{fm} w \right) \delta x \delta y \delta z = 0 \quad (4.10)$$

Kemudian persamaan (4.10) dibagi dengan $\delta x \delta y \delta z$, maka diperoleh :

$$\frac{\partial \rho_{fm}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho_{fm} u + \frac{\partial}{\partial y} \rho_{fm} v + \frac{\partial}{\partial z} \rho_{fm} w = 0 \quad (4.11)$$

Persamaan (4.11) dapat ditulis dengan menggunakan notasi vektor sehingga didapat sebagai berikut :

$$\frac{\partial \rho_{fm}}{\partial t} + \nabla(\rho_{fm} V) = 0 \quad (4.12)$$

Penelitian ini mengasumsikan bahwa aliran fluida bersifat *incompressible*. Massa jenis zat cair sangat rendah dan tidak berpengaruh ($\frac{\partial \rho_{fm}}{\partial t} = 0$), maka persamaan (4.12) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (4.13)$$

2. Persamaan Momentum Linier

Partikel-partikel aliran fluida memiliki momentum dan setiap saat kecepatan aliran diubah dalam besaran atau arah, akan ada perubahan dalam momentum fluida. Sesuai dengan hukum kedua Newton, gaya untuk menghasilkan perubahan akan sebanding dengan laju terjadinya perubahan momentum dokali dengan percepatan (Rohani, 2021). Secara matematis, ditulis sebagai berikut :

$$\Sigma F = m \cdot a = m \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(mV) \quad (4.14)$$

Dengan mV adalah massa suatu sistem yang dinyatakan dalam persamaan berikut :

$$mV_{sys} = \int_{sys} V dM_{sys} = \int_{sys} \rho f m V d\forall \quad (4.15)$$

Substitusikan persamaan (4.15) ke persamaan (4.14) maka diperoleh :

$$\Sigma F = \frac{d}{dt} \int_{sys} \rho_{fm} V d\forall \quad (4.16)$$

Menurut teorema *transport reynold* laju perubahan momentum terhadap waktu dari suatu sistem didefinisikan sebagai berikut :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho_{fm} V d\forall + \int_{cs} \rho_{fm} V \cdot (V \hat{n}) ds = \Sigma F \quad (4.17)$$

atau

$$\rho_{fm} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V(\nabla V) \right) \delta x \delta y \delta z = \Sigma F \quad (4.18)$$

dengan ΣF adalah sekumpulan gaya yang digunakan dalam fluida, yaitu gaya permukaan ($F_{permukaan}$), gaya magnetik ($F_{magnetik}$), gaya gravitasi ($F_{gravitasi}$), dan gaya angular ($F_{angular}$), atau dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \rho_{fm} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V(\nabla V) \right) \delta x \delta y \delta z = & F_{magnetik} + F_{permukaan} + F_{gravitasi} \\ & + F_{angular} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Karena penelitian ini hanya menggunakan dua arah sumbu yakni sumbu x dan y , maka persamaan (4.19) menjadi :

$$\rho_{fm} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V(\nabla V) \right) \delta x \delta y = F_{magnetik} + F_{permukaan} + F_{gravitasi} + F_{angular} \quad (4.20)$$

1. Gaya Magnetik ($F_{magnetik}$).

Gaya magnetik yang terdapat didalam aliran fluida dapat ditulis dengan.

$$F_{magnetik} = J \times B \quad (4.21)$$

dengan J merupakan massa jenis arus dan B merupakan total medan magnet pada sistem. Massa jenis arus dapat dideskripsikan sebagai berikut :

$$J = \sigma(E + V \times B) \quad (4.22)$$

dengan σ merupakan daya hantar listrik, E merupakan medan listrik dari luar ($E = 0$) karena tidak ada medan listrik dari luar pada aliran fluida, maka B dalam massa jenis arus dapat dituliskan sebagai berikut :

$$B = b + B_0 \quad (4.23)$$

dengan b merupakan besarnya medan magnet dari fluida yang terinduksi oleh media, B_0 merupakan medan magnet dari media yang mengandung magnet. Subtitusikan

persamaan (4.22) ke persamaan (4.21) maka menjadi.

$$F_{magnetik} = \sigma(V \times B) \times B \quad (4.24)$$

subtitusikan persamaan (4.23) ke persamaan (4.24) maka menjadi.

$$F_{magnetik} = [\sigma(V \times (b + B_0))] \times (b + B_0) \quad (4.25)$$

atau dapat ditulis

$$F_{magnetik} = [\sigma(V \times b) + (V \times B_0)] \times (b + B_0) \quad (4.26)$$

dengan

$$(V \times b) = (vb)i - (ub)j + 0k \quad (4.27)$$

$$(V \times B_0) = (vB_0)i - (uB_0)j + 0k \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} [(V \times b) + (V \times B_0)] &= [(vb)i - (ub)j + 0k] + [(vB_0)i \\ &\quad - (uB_0)j + 0k] \\ &= [(vb)i + (vB_0)i - (ub)j - (uB_0)j + 0k] \\ &= [(v(b + B_0))i + (-u(b + B_0))j + 0k] \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$[(V \times b) + (V \times B_0)] \times (b + B_0) = -u(b + B_0)^2 i - v(b + B_0)^2 j + 0k \quad (4.30)$$

atau dapat ditulis.

$$[(V \times b) + (V \times B_0)] \times (b + B_0) = (-u(b + B_0)^2, -v(b + B_0)^2, 0)) \quad (4.31)$$

subtitusikan persamaan (4.31) ke persamaan (4.26) maka diperoleh.

$$F_{magnetik} = (\sigma(-u(b + B_0)^2, -v(b + B_0)^2, 0))$$

dituliskan dalam bentuk vektor maka dapat dituliskan sebagai berikut :

$$F_{magnetik} = -\sigma(b + B_0)^2 V \quad (4.32)$$

2. Gaya Permukaan ($F_{permukaan}$).

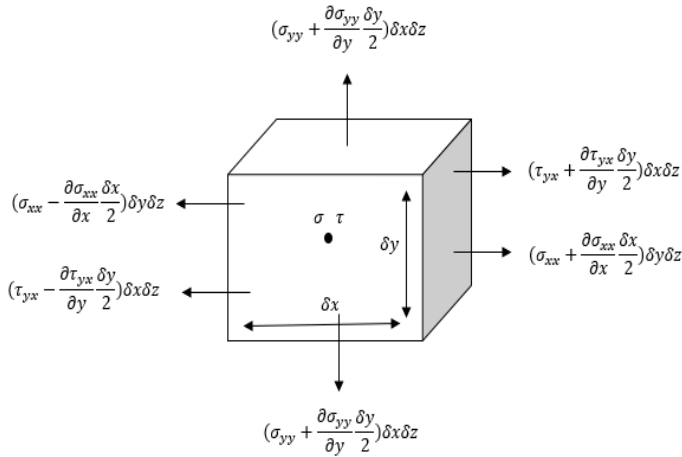
Gaya Permukaan adalah gaya yang terbentuk karena tekanan dan kekentalan, diambil elemen kecil dari fluida berbentuk kubus dengan (σ dan τ) sebagai pusat kubus dimana σ sebagai tegangan normal dan τ sebagai tegangan geser, dapat dilihat pada gambar berikut:

Gaya permukaan pada sumbu-x sebagai berikut :

$$F_{permukaan-x} = \frac{\partial(\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yx})}{\partial y}$$

Gaya permukaan pada sumbu-y sebagai berikut :

$$F_{permukaan-y} = \frac{\partial(\sigma_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{xy})}{\partial x}$$



Gambar 4.2. Gaya Permukaan Elemen fluida

Total gaya permukaan dapat dituliskan sebagai berikut:

$$F_{permukaan} = F_{permukaan-xi} + F_{permukaan-yj}$$

$$F_p = \left(\frac{\partial(\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yx})}{\partial y} \right) i + \left(\frac{\partial(\sigma_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{xy})}{\partial x} \right) j \quad (4.33)$$

karena pada penelitian ini menggunakan fluida non-newtonian sehingga alirannya tidak mampu mampat oleh karna itu tegangan dan laju deformasi dapat dinyatakan sebagai berikut :

Tegangan Normal

$$\sigma_{xx} = -p + 2(\mu_{fm} k_{fm}) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.34)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2(\mu_{fm} k_{fm}) \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.35)$$

Tegangan Geser

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = (\mu_{fm} k_{fm}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (4.36)$$

Substitusikan persamaan (4.34)-(4.36) ke persamaan (4.33), maka diperoleh :

$F_{permukaan}$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial \left(-p + 2(\mu_{fm} k_{fm}) \frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left((\mu_{fm} k_{fm}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right)}{\partial y} \right) i \\ &\quad + \left(\frac{\partial \left(-p + 2(\mu_{fm} k_{fm}) \frac{\partial v}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left((\mu_{fm} k_{fm}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right)}{\partial x} \right) j \\ &= \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2(\mu_{fm} k_{fm}) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu_{fm} k_{fm}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) i \\ &\quad + \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2(\mu_{fm} k_{fm}) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\mu_{fm} k_{fm}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) j \\ &= \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + 2(\mu_{fm} k_{fm}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\mu_{fm} k_{fm}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right) i \\ &\quad + \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + 2(\mu_{fm} k_{fm}) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\mu_{fm} k_{fm}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right) j \end{aligned}$$

Maka total tegangang normal dan tegangan geser sebagai

berikut :

$$\begin{aligned}
& 2(\mu_{fm}k_{fm})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\mu_{fm}k_{fm})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) \\
& = (\mu_{fm}k_{fm})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + (\mu_{fm}k_{fm})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) \\
& = (\mu_{fm}k_{fm})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + (\mu_{fm}k_{fm})\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
& = (\mu_{fm}k_{fm})\nabla^2 u + (\mu_{fm}k_{fm})\frac{\partial}{\partial x}(\nabla V) \\
& = (\mu_{fm}k_{fm})\nabla^2 u
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Sehingga didapatkan gaya permukaan ($F_{permukaan}$) yaitu :

$$F_{permukaan} = -\nabla p + (\mu_{fm}k_{fm})\nabla^2 V \tag{4.38}$$

3. Gaya Angular ($F_{angular}$).

Pada penelitian ini fluida mempunyai kemampuan mikrorotasi sehingga didapat gaya angular, fluida jenis ini sering disebut sebagai fluida mikrokutub. Gaya angular dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$F_{angular} = \rho_{fm}f + k_{fm}(\nabla \times N)$$

Fluida mikrokutub diasumsikan tidak mampu mampat, maka koefisien materialnya bersifat konstan, maka ρ_{fm} dan $f = 0$

, diperoleh :

$$F_{angular} = k_{fm}(\nabla X N)$$

$$F_{angular} = k_{fm} \frac{\partial \bar{N}}{\partial y} i - k_{fm} \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} j \quad (4.39)$$

4. Gaya Gravitasi ($F_{gravitasi}$).

Gaya gravitasi dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$F_{gravitasi} = \rho_{fm} g$$

p yakni tekanan pada persamaan (4.39) dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$p = p_n + p_h$$

Dimana p_h adalah tekanan hidrostatik dan p_n adalah tekanan dinamik. Tekanan hidrostatik merupakan tekanan yg diakibatkan oleh gaya yang bekerja pada aliran fluida, sedangkan tekanan dinamik adalah tekanan yang disebabkan oleh gerakan atau kecepatan fluida. Gradien tekanan yang diakibatkan oleh tekanan hidrostatik dapat didefinisikan sebagai:

$$\nabla p_h = \rho_{\infty} g$$

gaya gravitasi $g = (g_x, g_y, 0)$ dan ρ_{∞} adalah massa jenis fluida, sehingga turunan tekanan p adalah

terhadap sumbu-x dapat didefinisikan sebagai :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial p_n}{\partial x} - \rho_{\infty} g_x$$

terhadap sumbu-y dapat didefinisikan sebagai :

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial p_n}{\partial y} - \rho_{\infty} g_y$$

Sehingga persamaan (4.20) menjadi :

$$\begin{aligned} \rho_{fm} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V(\nabla V) \right) \delta x \delta y = & \nabla p + (\mu_{fm} + k_{fm}) \nabla^2 V + (\rho_{fm} - \rho_{\infty}) g \\ & - \sigma(b + B_0)^2 V + k_{fm} (\nabla \times N) \end{aligned} \quad (4.40)$$

karena penelitian ini bergerak pada arah sumbu x dan y , maka komponen sumbu z dihilangkan, sehingga persamaan momentum linier menjadi.

Persamaan Momentum Linier Sumbu x dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \rho_{fm} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu_{fm} + k_{fm}) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ & - \sigma(b + B_0)^2 \bar{u} - \rho_{fm} \beta (\bar{T} - T_{\infty}) g_x \\ & + k_{fm} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Persamaan Momentum Linier Sumbu y dapat didefinisikan sebagai

berikut :

$$\begin{aligned} \rho_{fm} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = & - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu_{fm} + k_{fm}) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ & - \sigma(b + B_0)^2 \bar{v} - \rho_{fm} \beta (\bar{T} - T_\infty) g_y \\ & - k_{fm} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

dengan kondisi batas :

$$\bar{t} = 0; \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_\infty \text{ untuk semua } \bar{x}, \bar{y}$$

$$\bar{t} > 0; \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_w \text{ pada } \bar{y} = 0$$

$$\bar{u} = \bar{u}_e, \bar{T} = T_\infty, \text{ pada } \bar{y} \rightarrow \infty$$

3. Persamaan Momentum Angular

Semua benda yang bergerak mempunyai momentum. Dalam penelitian ini selain mempunyai momentum linier tetapi juga mempunyai momentum angular, yang dimaksud momentum angular adalah ketika partikel-partikel didalam fluida mempunyai kemampuan untuk gerak mikrorotasi dan dapat mempengaruhi aliran dari fluida. Momentum angular terdiri dari momentum angular internal ($\rho_{fm} \times l$) dan momentum eksternal ($\rho_{fm} x \times v$), sehingga momentum angular dapat dideskripsikan sebagai (Mufatin, 2018):

$$\frac{d}{dt} \int_{cv} \rho_{fm} (l + x \times V) dx = \int_{cv} \rho_{fm} (g + x \times f) dx + \int_{cs} (c_n + x \times t_n) ds \quad (4.43)$$

Dimana

$$t_n = n.T = \text{tegangan normal}$$

$$g = \text{body torque}$$

$f = \text{body force}$

$c_n = n.C = \text{couple stress}$

$C = \text{couple stress tensor}$

Persamaan (4.43) dapat juga ditulis :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{cv} \rho_{fm}(l + x \times V) dx &= \int_{cv} (\rho_{fm}g + (\rho_{fm}x) \times f + \nabla.C \\ &\quad + x \times (\nabla.T) + T_x) dx \\ \rho_{fm} \frac{d}{dt} (l + x \times V) &= \rho_{fm}g + (\rho_{fm}x)f + \nabla.C + x(\nabla.T) + T_x \end{aligned} \quad (4.44)$$

hukum konservasi momentum angular dapat dideskripsikan sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} \int_{cv} \rho_{fm}(x \times V) dx = \int_{cv} \rho_{fm}(x \times f) dx + \int_{cs} x \times t_n ds$$

dimana :

$$\int_{cs} x \times t_n ds = \int_{cv} (x \times (\nabla.T) + T_x) dx$$

diperoleh :

$$\begin{aligned} \int_{cv} x \times \left(\rho_{fm} \frac{dV}{dt} - \rho_{fm}f - \nabla.T \right) dx &= \int_{cv} T_x dx \\ \rho_{fm}x \times \frac{dV}{dt} - \rho_{fm}fx - x(\nabla.T) &= T_x \end{aligned}$$

Pada persamaan cauchy, $T_x = 0$ maka diperoleh :

$$\rho_{fm}x \left(\frac{dV}{dt} \right) = \rho_{fm}x \times f + x \times (\nabla T) \quad (4.45)$$

dengan mengurangi persamaan (4.45) ke persamaan (4.44),

diperoleh :

$$\rho_{fm} \frac{dl}{dt} = \rho_{fm} g + \nabla \cdot C + T_x \quad (4.46)$$

karna

$$\nabla \cdot (x \times T) = x \times (\nabla \cdot T) + T_x$$

sehingga persamaan (4.45) menjadi :

$$\rho_{fm} \frac{d}{dt} (x \times V) = \rho_{fm} x \times f + \nabla \cdot (x \times T) + T_x \quad (4.47)$$

dari persamaan (4.46) dan (4.47) diperoleh hukum konsevasi momentum angular sebagai berikut :

$$\rho_{fm} \frac{d}{dt} (l + x \times V) = \rho_{fm} x \times f + \rho_{fm} g + \nabla \cdot (x \times T + C)$$

Dari persamaan diasumsikan bahwa momentum angular internal didefinisikan dengan vektor $j_i (i = 1, 2, 3)$ dan $j_i = j_{ik} w_k$ maka persamaan (4.46) dapat ditulis :

$$\rho_{fm} j \frac{dw}{dt} = \rho_{fm} g + \nabla \cdot C + T_x \quad (4.48)$$

Berdasarkan teorema reynold dapat diperoleh :

$$\rho_{fm} j \frac{dw}{dt} = \rho_{fm} j \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \cdot (\nabla \cdot w) \right) \quad (4.49)$$

Fluida isotropik atau sering disebut dengan fluida mikrotub mempunyai *couple stress tensor* C dan *stress tensor* T_x . Dapat dideskripsikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \alpha w_{k,k} + \beta w_{i,j} + \gamma w_{i,j} \\ T_x &= e_{ijk} T_j k = 2k e_{ikm} u_{m,k} - 2k w_i \end{aligned} \quad (4.50)$$

Dalam hal ini, persamaan (4.48) menggunakan notasi vektor Gibbsi diperoleh :

$$\begin{aligned}\nabla C &= \gamma \nabla \times (\nabla \times w) = \gamma_{fm} \nabla \times (\nabla \times w) \\ T_x &= (k \nabla) V - 2kw = (k_{fm} \nabla) V - 2kw\end{aligned}$$

Selanjutnya substitusi T_x , *tensor* C dan $w = N$, diperoleh :

$$\rho_{fm} j \left(\frac{\partial N}{\partial t} + V \cdot (\nabla \cdot N) \right) = \gamma_{fm} \nabla \times (\nabla \times N) + k_{fm} (-2N + \nabla \times V) \quad (4.51)$$

Dengan

N = daerah Mikroktub

k_{fm} = kekentalan/viskositas rotasi

j = densitas mikro inersia

γ_{fm} = gradien kekentalan

Persamaan (4.51) dapat ditulis :

$$\begin{aligned}\rho_{fm} j \left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} + w \frac{\partial N}{\partial z} \right) \\ = \gamma_{fm} \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial xy} - \frac{\partial^2 N}{\partial xz} \right) \\ + k_{fm} \left(-2N + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)\end{aligned} \quad (4.52)$$

Pada penelitian ini objek yang dikaji merupakan aliran darah manusia melalui arteri, dan diasumsikan bergerak pada aliran sumbu x dan y maka kecepatan pada sumbu z bernilai nol, dapat

dideskeipsikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \rho_{fm} j \left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) = & \gamma_{fm} \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \\ & - k_{fm} \left(2\bar{N} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.53)$$

dengan kondisi batas :

$$\bar{t} = 0; \bar{u} = \bar{v} = \bar{N} = 0 \text{ untuk setiap } \bar{x}, \bar{y}$$

$$\bar{t} > 0; \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{N} = -n \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \text{ pada } \bar{y} = 0$$

$$\bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{N} = 0 \text{ pada } \bar{y} \longrightarrow \infty$$

B. Persamaan Pembangun Non Dimensional

Langkah awal menstransformasikan model matematika menjadi bentuk non dimensional adalah menentukan variabel dan parameter non-dimensional. Variabel dan parameter yang digunakan adalah sebagai berikut (Widodo et al., 2017) .

Variabel non-dimensional sebagai berikut :

$$x = \frac{\bar{x}}{a}, y = Re^{1/2} \frac{\bar{y}}{a}, u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}, v = Re^{1/2} \frac{\bar{v}}{U_\infty}, p = \frac{\bar{p}}{\rho_{fm} U_\infty^2},$$

$$N = Re^{-1/2} \frac{a \bar{N}}{U_\infty}, r = \frac{\bar{r}}{a}, t = \frac{U_\infty \bar{t}}{a}, T = \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

$$g_x = -\sin x, g_y = \cos x$$

Parameter non-dimensional sebagai berikut :

$$v_{fm} = \frac{\mu_{fm}}{\rho_{fm}}, Re = \frac{U_{\infty} a}{v}, Gr = \frac{g\beta(T_x - T_{\infty})a^3}{v_{fm}^2}, \lambda = \frac{Gr}{Re^2}$$

$$\gamma_{fm} = (\mu_{fm} + \frac{k_{fm}}{2}), k_{fm} = K_{fm} \cdot \mu_{fm}, M = \frac{a\sigma B_0^2}{\rho_{fm} U_{\infty}}$$

Dengan mensubtitusikan variabel non-dimensional dan parameter non-dimensional [lampiran 1] serta diasumsikan besar medan magnet menginduksi fluida yang mengalir silinder vertikal bermagnet sebesar $\frac{1}{4}$ dari besar medan magnet ($b = \frac{1}{4}B_0$) (Palyama, 2017). Sehingga didapatkan model matematika non-dimensional sebagai berikut.

1. Persamaan kontinuitas, dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\left(\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.54)$$

2. Persamaan momentum linier sumbu-x dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{(1 + K_{fm})}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$+ (1 + K_{fm}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{25}{16} Mu + \lambda T \sin x + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y} \quad (4.55)$$

3. Persamaan momentum linier pada sumbu-y dapat dituliskan

sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{(1 + K_{fm})}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ &- \frac{25}{16} Re^{-1} Mv - \frac{\lambda T}{Re^{1/2}} \cos x + \frac{(1 + K_{fm})}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{K_{fm}}{Re} \frac{\partial N}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.56)$$

4. Persamaan momentum angular dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) &= \left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \\ &- K_{fm} \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.57)$$

dengan kondisi batas :

$$t = 0; u = v = 0, N = 0, T = 0 \text{ untuk setiap } x, y$$

$$t > 0; u = v = 0, N = -n \frac{\partial u}{\partial y}, T = 1 \text{ pada } y = 0$$

$$u = u_e(x), N = 0, T = 0, \text{ pada } y \longrightarrow \infty$$

C. Pendekatan Aliran Bebas

Pendekatan aliran bebas digunakan untuk menyederhanakan persamaan pembangun non dimensional, dimana nilai Reynold mendekati tak hingga ($Re \longrightarrow \infty$) maka ($\frac{1}{Re} \longrightarrow 0$). Oleh karna itu, persamaan non-dimensional dapat dituliskan sebagai berikut.

1. Persamaan kontinuitas dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\left(\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.58)$$

2. Persamaan momentum linier sumbu-x dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{(1 + K_{fm})}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + K_{fm}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{25}{16} Mu + \lambda T \sin x + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y}$$

Menjadi

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{(1 + K_{fm})}{(0)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &+ (1 + K_{fm}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{25}{16} Mu \\ &+ \lambda T \sin x + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y} \\ &= - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + (1 + K_{fm}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &+ \frac{25}{16} Mu + \lambda T \sin x + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.59)$$

3. Persamaan momentum linier pada sumbu-y dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{(1 + K_{fm})}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ &- \frac{25}{16} Re^{-1} Mv - \frac{\lambda T}{Re^{1/2}} \cos x \\ &+ \frac{(1 + K_{fm})}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{K_{fm}}{Re} \frac{\partial N}{\partial x} \end{aligned}$$

Menjadi

$$\begin{aligned}
 (0) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{(1 + K_{fm})}{(0)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
 &\quad - \frac{25}{16} (0) M v - \frac{\lambda T}{(0)^{1/2}} \cos x \\
 &\quad + \frac{(1 + K_{fm})}{(0)} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{K_{fm}}{(0)} \frac{\partial N}{\partial x} \\
 (0) &= - \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.60}$$

4. Persamaan momentum angular dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) &= \left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \\
 &\quad - K_{fm} \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

Menjadi

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) &= \left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \left(\frac{1}{(0)} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \\
 &\quad - K_{fm} \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{(0)} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 &= \left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K_{fm} \\
 &\quad \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.61}$$

Karena persamaan momentum linier sumbu y sama dengan nol maka hanya persamaan momentum linier sumbu x saja yang digunakan dengan persamaan momentum di luar lapisan batas (u_e) merupakan pengganti dari u , sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + (1 + K_{fm}) \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} \\ & - \left(\frac{25}{16} M \right) u_e + \lambda T \sin x + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.62)$$

diasumsikan kecepatan aliran bebas $u_e = \sin x$ (Widodo et al., 2017), sehingga :

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = 0; \frac{\partial u_e}{\partial y} = 0; \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0 \quad (4.63)$$

kemudian substitusikan persamaan (4.63) ke persamaan (4.62) diperoleh :

$$u_e \left(\frac{\partial u_e}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{25}{16} M \right) u_e + \lambda T u_e + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y} \quad (4.64)$$

saat $T = 0$ dan $N = 0$, maka persamaan (4.64) berubah menjadi :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = u_e \left(\frac{\partial u_e}{\partial x} \right) - \left(\frac{25}{16} M \right) u_e \quad (4.65)$$

Selanjutnya substitusikan (4.65) ke persamaan (4.62) maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \left(u_e \left(\frac{\partial u_e}{\partial x} \right) - \left(\frac{25}{16} M \right) u_e \right) + (1 + K_{fm}) \\
 &\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{25}{16} M u + \lambda T u_e + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y} \\
 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= u_e \left(\frac{\partial u_e}{\partial x} \right) + (1 + K_{fm}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
 &\quad - \left(\frac{25}{16} M \right) (u - u_e) + \lambda T u_e + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

Sehingga persamaan akhir dari aliran bebas sebagai berikut.

1. Persamaan Kontinuitas dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\left(\frac{\partial r u}{\partial x} + \frac{\partial r v}{\partial y} \right) = 0 \tag{4.67}$$

2. Persamaan Momentum Linier dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= u_e \left(\frac{\partial u_e}{\partial x} \right) + (1 + K_{fm}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
 &\quad - \left(\frac{25}{16} M \right) (u - u_e) + \lambda T u_e + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

3. Persamaan Momentum Angular dapat dituliskan sebagai

berikut :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) \\ &= \left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - K_{fm} \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.69)$$

D. Fungsi Alir

Pada dasarnya fungsi alir berfungsi menghubungkan antara tiga penampang yakni (u, v, w) yang mengalir pada bidang (x, y, z) , penelitian ini hanya menggunakan dua penampang yaitu pada dimensi u dan dimensi v dan bergerak pada bidang x dan y . Fungsi alir dapat dinyatakan dengan (Norasia & Zulaikha, 2019):

$$u = r^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -r^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.70)$$

subtitusikan persamaan (4.67)-(4.69) ke persamaan (4.70) sehingga didapatkan persamaan sebagai berikut.

1. Persamaan Kontinuitas dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (4.71)$$

2. Persamaan Momentum Linier dapat dituliskan sebagai

berikut :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \\
 &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K_{fm}) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \left(\frac{25}{16} M \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) \\
 & \quad + \lambda T u_e + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

3. Persamaan Momentum Angular dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial N}{\partial t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial N}{\partial x} + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial N}{\partial y} \right) \\
 &= \left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K_{fm} \left(2N + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

dengan kondisi batas:

jika $t = 0$; $\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $N = 0$, $T = 0$ untuk setiap x, y .

jika $t > 0$; $\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$, $N = n \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$, $T = 1$, pada $y = 0$

$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e$, $N = 0$, $T = 0$ saat $y \rightarrow \infty$

E. Persamaan Similaritas

Tahapan selanjutnya setelah didapat persamaan pembangun pada tahap fungsi alir, maka persamaan tersebut akan ditransformasikan kedalam variabel similaritas berikut (Muhammad, 2012) :

$$\psi = t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t); \eta = \frac{y}{t^{1/2}}; T = s(x, \eta, t);$$

$$N = t^{-1/2} u_e(x) h(x, \eta, t)$$

dengan mensubstitusikan variabel similaritas ke persamaan (4.72)-(4.73) maka didapatkan persamaan sebagai berikut.

1. Persamaan Momentum Linier dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 & (1 + K_{fm}) \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + k_{fm} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \left(\frac{25}{16} M \right) \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\
 & + \lambda st + \frac{\partial u_e}{\partial x} t \left(1 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \\
 & + u_e t \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

2. Persamaan Momentum Angular dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{h}{2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right) \\
 & = t \frac{\partial h}{\partial t} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \\
 & + K_{fm} t \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

dengan kondisi batas:

jika $t = 0$; $f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = h = s = 0$ untuk setiap x, η .

jika $t > 0$; $f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, h = -n \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}, s = 1$, pada $\eta = 0$

$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, h = s = 0$ pada $\eta \rightarrow \infty$.

Penelitian ini diteliti pada titik stagnasi ($x \approx 0$), oleh sebab itu nilai $u_e(x) = \sin x = 0$ dan $\frac{\partial u_e}{\partial x} = \cos x = 1$ sehingga persamaan (4.74) dan (4.75) dapat dituliskan sebagai berikut.

Persamaan Momentum Linier dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow (1 + K_{fm}) \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \left(\frac{25}{16} M \right) \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + \lambda st \\
&\quad + \frac{\partial u_e}{\partial x} t \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + k_{fm} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \\
&\quad + u_e t \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\
&\Longleftrightarrow (1 + K_{fm}) \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \left(1 - \frac{25}{16} M \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + \lambda st \\
&\quad + \cos xt \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + k_{fm} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \\
&\quad + \sin xt \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\
&\Longleftrightarrow (1 + K_{fm}) \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \left(\frac{25}{16} M \right) \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + \lambda st \\
&\quad + t \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + k_{fm} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta}
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Persamaan Momentum Angular dapat dituliskan sebagai

berikut :

$$\begin{aligned}
 &\Longleftrightarrow \left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{h}{2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \\
 &= t \frac{\partial h}{\partial t} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta}\right) \\
 &\quad + K_{fm} t \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \\
 &\Longleftrightarrow \left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{h}{2} + t \cos x \left(f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \\
 &= t \frac{\partial h}{\partial t} + t \sin x \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta}\right) \\
 &\quad + K_{fm} t \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \\
 &\Longleftrightarrow \left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{h}{2} + t \left(f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \\
 &= t \frac{\partial h}{\partial t} + K_{fm} t \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)
 \end{aligned}
 \tag{4.77}$$

Penelitian ini tidak dipengaruhi oleh parameter konveksi, sehingga nilainya sama dengan nol ($\lambda = 0$), dengan mensubstitusikan nilai parameter konveksi tersebut maka persamaan (4.76) dan persamaan (4.77) dapat dituliskan sebagai berikut.

Persamaan momentum linier dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
(1 + K_{fm}) \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + t \left(\frac{25}{16} M \right) \\
\left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + k_{fm} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta}
\end{aligned} \tag{4.78}$$

Persamaan momentum angular dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{h}{2} + t \left(f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial h}{\partial t} \\
+ K_{fm} t \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.79}$$

dengan kondisi batas:

jika $t = 0$; $f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = h = s = 0$ untuk setiap x, η .

jika $t > 0$; $f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0$, $h = -n \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$, $s = 1$, pada $\eta = 0$

$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 1$, $h = s = 0$ pada $\eta \rightarrow \infty$.

Diasumsikan :

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = f'; \quad \frac{\partial h}{\partial \eta} = h' \tag{4.80}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.80) ke persamaan (4.78) dan (4.79) maka diperoleh persamaan sebagai berikut.

Persamaan Momentum Linier dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
(1 + K_{fm}) f''' + \frac{\eta}{2} f'' + t(1 - (f')^2 + f f'') + t \left(\frac{25}{16} M \right) (1 - f') \\
+ K_{fm} h' = t \frac{\partial f'}{\partial h}
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Persamaan Momentum Angular dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) h'' + \frac{\eta}{2} h' + \frac{h}{2} + t(fh' - hf') = t \frac{\partial h}{\partial t} + K_{fm} t(2h + f'') \quad (4.82)$$

dengan kondisi batas:

jika $t = 0$; $f' = h = s = 0$ untuk semua x, η .

jika $t > 0$; $f' = 0, h = -nf'', s = 1$, pada $\eta = 0$

$f' = 1, h = s = 0$ saat $\eta \rightarrow \infty$.

F. Penyelesaian Numerik Model Matematika

Pada tahap ini akan dibahas tentang solusi numerik model matematika dari fluida non-newtonian pada aliran darah manusia melalui arteri menggunakan metode beda hingga skema *Keller Box*. Langkah pertama dari metode ini adalah penyelesaian notasi, kedua dilakukan diskritasi model, ketiga melakukan pelinieran model, dan diselesaikan dengan eliminasi blok. Setelah langkah-langkah tersebut terpenuhi maka akan dilakukan simulasi model menggunakan software Matlab 2013a dengan menampilkan output berupa profil kecepatan pada parameter bahan dan parameter magnetik.

1. Penyelesaian Notasi

Pertama akan merubah persamaan-persamaan orde tinggi yakni persamaan (4.81) dan (4.82) menjadi persamaan berorde pertama. Misalkan :

$$f' = u \quad (4.83)$$

$$u' = g \quad (4.84)$$

$$h' = w \quad (4.85)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.83)-(4.85) ke persamaan (4.81) dan (4.82), diperoleh persamaan sebagai berikut.

Persamaan Momentum Linier dapat dituliskan sebagai berikut:

$$(1+K_{fm})g' + \frac{\eta}{2}g + t(1-(u)^2 + fg) + t \left(\frac{25}{16}M \right) (1-u) + K_{fm}w = t \frac{\partial u}{\partial h} \quad (4.86)$$

Persamaan Momentum Angular dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) w' + \frac{\eta}{2}w + \frac{h}{2} + t(fw - hu) = t \frac{\partial h}{\partial t} + K_{fm}t(2h + g) \quad (4.87)$$

2. Diskretisasi Model

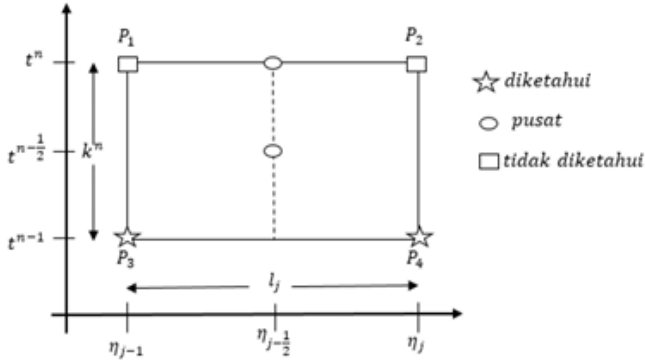
Tahapan selanjutnya setelah melakukan penyederhanaan persamaan-persamaan menjadi orde pertama adalah mendiskretisasi persamaan-persamaan menggunakan metode numerik beda hingga pusat.

Pada persamaan linier (4.83)-(4.85) menggunakan titik pusat $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n)$ yang terletak pada P_1, P_2 , dan untuk persamaan (4.86) dan (4.87) menggunakan titik tengah $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n-\frac{1}{2}})$ yang terletak pada segiempat P_1, P_2, P_3, P_4 yang terdapat pada gambar berikut :

Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{l_j} = u_{j-\frac{1}{2}}^n \iff \frac{1}{l_j}(f_j^n - f_{j-1}^n) = \frac{1}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (4.88)$$

$$\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{l_j} = g_{j-\frac{1}{2}}^n \iff \frac{1}{l_j}(u_j^n - u_{j-1}^n) = \frac{1}{2}(g_j^n - g_{j-1}^n) \quad (4.89)$$



Gambar 4.3. Skema Beda Hingga

$$\frac{h_j^n - h_{j-1}^n}{l_j} = w_{j-\frac{1}{2}}^n \iff \frac{1}{l_j} (h_j^n - h_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (w_j^n - w_{j-1}^n) \quad (4.90)$$

Diskretisasi persamaan (4.86) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{1}{2} \left[(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = t^{n-\frac{1}{2}} \left[\frac{w_{j-\frac{1}{2}}^n - w_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right]$$

dengan

$$\begin{aligned} (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n &= [(1 + K_{fm})g' + \frac{\eta}{2}g + t(1 - (u)^2 + fg) + t \left(\frac{25}{16}M \right) \\ &\quad (1 - u) + K_{fm}w] \\ &= (1 + K_{fm}) \left(\frac{g_j^n - g_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (g_{j-\frac{1}{2}}^n) + t^n [1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 \\ &\quad + f_{j-\frac{1}{2}}^n g_{j-\frac{1}{2}}^n] + t^n \left(\frac{25}{16}M \right) (1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n) + K_{fm} (w_{j-\frac{1}{2}}^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= [(1 + K_{fm})g' + \frac{\eta}{2}g + t(1 - (u)^2 + fg) + t\left(\frac{25}{16}M\right)(1 - u) \\
&\quad + K_{fm}w] \\
&= (1 + K_{fm})\left(\frac{g_j^{n-1} - g_{j-1}^{n-1}}{l_j}\right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}(g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + t^{n-1}[1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right)^2 \\
&\quad + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] + t^{n-1}\left(\frac{25}{16}M\right)\left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) + K_{fm}\left(w_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned}
&(1 + K_{fm})\left(\frac{g_j^n - g_{j-1}^n}{l_j}\right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}\left(g_{j-\frac{1}{2}}^n\right) + t^n[1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n\right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&g_{j-\frac{1}{2}}^n] + t^n\left(\frac{25}{16}M\right)\left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n\right) + K_{fm}\left(w_{j-\frac{1}{2}}^n\right) + (1 + K_{fm}) \\
&\left(\frac{g_j^{n-1} - g_{j-1}^{n-1}}{l_j}\right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}\left(g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) + t^{n-1}[1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] \\
&+ t^{n-1}\left(\frac{25}{16}M\right)\left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) + K_{fm}\left(w_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) = 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}\left(u_{j-\frac{1}{2}}^n\right) \\
&- 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}\left(u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

atau dapat ditulis sebagai :

$$\begin{aligned}
 & (1 + K_{fm}) \left(\frac{g_j^n - g_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + t^n [1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
 & g_{j-\frac{1}{2}}^n + t^n \left(\frac{25}{16} M \right) \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + K_{fm} \left(w_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
 & = -(1 + K_{fm}) \left(\frac{g_j^{n-1} - g_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - t^{n-1} [1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 \\
 & - f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] - t^{n-1} \left(\frac{25}{16} M \right) \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - K_{fm} \left(w_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
 & \left(u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

Diskretisasi persamaan (4.87) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{1}{2} \left[(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = t^{n-\frac{1}{2}} \left[\frac{h_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right]$$

Dengan

$$\begin{aligned}
 (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left[\left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) w' + \frac{\eta}{2} w + \frac{h}{2} + t(fw - hu) - K_{fm}t(2h + g) \right] \\
 &= \left[\left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \left(\frac{w_j^n - w_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(w_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{1}{2} \left(h_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \right. \\
 &\quad \left. + t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n w_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - K_{fm}t^n \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^n + g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= \left[\left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) w' + \frac{\eta}{2} w + \frac{h}{2} + t(fw - hu) - K_{fm}t(2h + g) \right] \\
&= \left[\left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \left(\frac{w_j^{n-1} - w_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(w_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \frac{1}{2} \right. \\
&\quad \left(h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + t^{n-1} \left(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} w_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - K_{fm}t^{n-1} \\
&\quad \left. \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \right]
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned}
&\left[\left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \left(\frac{w_j^n - w_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(w_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{1}{2} (h_{j-\frac{1}{2}}^n) + t^n (f_{j-\frac{1}{2}}^n) \right. \\
&\quad \left. w_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - K_{fm}t^n \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^n + g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \left. \right] + \left[\left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left(\frac{w_j^{n-1} - w_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(w_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \frac{1}{2} \left(h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + t^{n-1} (f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} w_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&\quad - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - K_{fm}t^{n-1} \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \left. \right] = 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(h_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
&\quad - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)
\end{aligned}$$

atau dapat ditulis sebagai :

$$\begin{aligned}
& \left[\left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \left(\frac{w_j^n - w_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(w_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{1}{2} \left(h_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + t^n \right. \\
& \left. \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n w_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - K_{fm} t^n \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^n + g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \right] - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
& \left(h_{j-\frac{1}{2}}^n \right) = - \left[\left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \left(\frac{w_j^{n-1} - w_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(w_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \left(h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - t^{n-1} \left(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} w_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + K_{fm} t^{n-1} \right. \\
& \left. \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \right] - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)
\end{aligned} \tag{4.92}$$

3. Pelinieran Model

Pada tahap ketiga ini, hasil dari diskretisasi model dilinearisasikan dengan menggunakan metode Newton berikut (Adhikari et al., 2014) :

$$\begin{aligned}
f_j^{(i+1)} &= f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} \\
u_j^{(i+1)} &= u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)} \\
g_j^{(i+1)} &= g_j^{(i)} + \delta g_j^{(i)} \\
h_j^{(i+1)} &= h_j^{(i)} + \delta h_j^{(i)} \\
w_j^{(i+1)} &= w_j^{(i)} + \delta w_j^{(i)}
\end{aligned} \tag{4.93}$$

Dengan mensubstitusikan bentuk iterasi (4.93) ke persamaan (4.88)-(4.92), sehingga diperoleh :

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_j - \delta u_{j-1}) = -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (4.94)$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta g_j - \delta g_{j-1}) = -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(g_j^n - g_{j-1}^n) \quad (4.95)$$

$$(\delta h_j - \delta h_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta w_j - \delta w_{j-1}) = -(h_j^n - h_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(w_j^n - w_{j-1}^n) \quad (4.96)$$

Dapat ditulis persamaan momentum linier sebagai berikut :

$$\begin{aligned} & (1 + K_{fm}) \left(\frac{\delta g_j - \delta g_{j-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\delta g_j - \delta g_{j-1}}{2} \right) + t^n u_{j-\frac{1}{2}}^n \\ & \left(\frac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{2} \right) - t^n \left(\frac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{2} \right)^2 + t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta g_j - \delta g_{j-1}}{2} \right) \\ & + t^n g_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta f_j - \delta f_{j-1}}{2} \right) + t^n \left(\frac{\delta f_j - \delta f_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta g_j - \delta g_{j-1}}{2} \right) \\ & + t^n \left(\frac{25}{16} M \right) \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) + K_{fm} \left(\frac{\delta w_j - \delta w_{j-1}}{2} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\ & \left(\frac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{2} \right) = -(1 + K_{fm}) \left(\frac{g_j^n - g_{j-1}^n}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\ & - t^n \left[1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n g_{j-\frac{1}{2}}^n \right] - t^n \left(\frac{25}{16} M \right) \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\ & + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + R_1 \end{aligned} \quad (4.97)$$

Dapat ditulis persamaan momentum angular sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) \left(\frac{\delta w_j - \delta w_{j-1}}{l_j}\right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\delta w_j - \delta w_{j-1}}{2}\right) + \frac{1}{2} \\
& \left(\frac{\delta h_j - \delta h_{j-1}}{2}\right) + t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta w_j - \delta w_{j-1}}{2}\right) + t^n w_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta f_j - \delta f_{j-1}}{2}\right) \\
& + t^n \left(\frac{\delta f_j - \delta f_{j-1}}{2}\right) \left(\frac{\delta w_j - \delta w_{j-1}}{2}\right) - t^n h_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{2}\right) \\
& - t^n u_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta h_j - \delta h_{j-1}}{2}\right) - t^n \left(\frac{\delta h_j - \delta h_{j-1}}{2}\right) \left(\frac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{2}\right) \\
& - 2t^n K_{fm} \left(\frac{\delta h_j - \delta h_{j-1}}{2}\right) - t^n K_{fm} \left(\frac{\delta g_j - \delta g_{j-1}}{2}\right) - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
& \left(\frac{\delta h_j - \delta h_{j-1}}{2}\right) = - \left[\left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) \left(\frac{w_j^n - w_{j-1}^n}{l_j}\right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(w_{j-\frac{1}{2}}^n\right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \left(h_{j-\frac{1}{2}}^n\right) - t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n w_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n\right) + K_{fm} t^n \left(2h_{j-\frac{1}{2}}^n + g_{j-\frac{1}{2}}^n\right) \right] \\
& + 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(h_{j-\frac{1}{2}}^n\right) + R_2
\end{aligned} \tag{4.98}$$

Selanjutnya menyederhanakan persamaan (4.94)-(4.98) dengan cara menghilangkan orde tinggi yang terdapat pada $\delta f_j^i, \delta u_j^i, \delta g_j^i, \delta h_j^i$ dan δw_j^i .

Sehingga diperoleh :

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_j + \delta u_{j-1}) = (r_1)_j \tag{4.99}$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta g_j + \delta g_{j-1}) = (r_2)_j \tag{4.100}$$

$$(\delta h_j - \delta h_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta w_j + \delta w_{j-1}) = (r_3)_j \tag{4.101}$$

$$\begin{aligned}
& (a_1)_j \delta g_j + (a_2)_j \delta g_{j-1} + (a_3)_j \delta u_j + (a_4)_j \delta u_{j-1} + (a_5)_j \delta f_j \\
& + (a_6)_j \delta f_{j-1} + (a_7)_j \delta w_j + (a_8)_j \delta w_{j-1} = (r_4)_j
\end{aligned}
\tag{4.102}$$

$$\begin{aligned}
& (b_1)_j \delta w_j + (b_2)_j \delta w_{j-1} + (b_3)_j \delta h_j + (b_4)_j \delta h_{j-1} + (b_5)_j \delta f_j \\
& + (b_6)_j \delta f_{j-1} + (b_7)_j \delta u_j + (b_8)_j \delta u_{j-1} + (b_9)_j \delta g_j + (b_{10})_j \delta g_{j-1} \\
& = (r_5)_j
\end{aligned}
\tag{4.103}$$

dengan

$$\begin{aligned}
(r_1)_j &= - (f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (u_j^n + u_{j-1}^n) \\
(r_2)_j &= - (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (g_j^n + g_{j-1}^n) \\
(r_3)_j &= - (h_j^n - h_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (w_j^n + w_{j-1}^n) \\
(r_4)_j &= - (1 + K_{fm}) \left(\frac{g_j^n - g_{j-1}^n}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - t^n [1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 \\
&\quad + f_{j-\frac{1}{2}}^n g_{j-\frac{1}{2}}^n] - t^n \left(\frac{25}{16} M \right) \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - K_{fm} \left(w_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
&\quad + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} (u_{j-\frac{1}{2}}^n) - (1 + K_{fm}) \left(\frac{g_j^{n-1} - g_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \\
&\quad \left(g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - t^{n-1} \left[1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 - f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] - t^{n-1} \left(\frac{25}{16} M \right) \\
&\quad \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - K_{fm} \left(w_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
(r_5)_j &= - \left[\left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \left(\frac{w_j^n - w_{j-1}^n}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(w_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{1}{2} \left(h_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \right. \\
&\quad \left. - t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n w_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + K_{fm} t^n \left(2 h_{j-\frac{1}{2}}^n + g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \right] \\
&\quad + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(h_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \left[\left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \left(\frac{w_j^{n-1} - w_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \right. \\
&\quad \left. \left(w_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \frac{1}{2} \left(h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - t^{n-1} \left(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} w_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \right. \\
&\quad \left. + K_{fm} t^{n-1} \left(2 h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \right] - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a_1)_j &= \left(\frac{1 + K_{fm}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(a_2)_j &= - \left(\frac{1 + K_{fm}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(a_3)_j &= - t^n u_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{2} \left(\frac{25}{16} M \right) t^n - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
(a_4)_j &= (a_3)_j \\
(a_5)_j &= \frac{t^n g_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} \\
(a_6)_j &= (a_5)_j \\
(a_7)_j &= \frac{K_{fm}}{2} \\
(a_8)_j &= (a_7)_j \\
(b_1)_j &= \left(\frac{1 + \frac{K_{fm}}{2}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_2)_j &= - \left(\frac{1 + \frac{K_{fm}}{2}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_3)_j &= \frac{1}{4} - \frac{t^n u_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} - K_{fm} t^n - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
(b_4)_j &= (b_3)_j \\
(b_5)_j &= \frac{t^n w_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} \\
(b_6)_j &= (b_5)_j \\
(b_7)_j &= - \frac{t^n h_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} \\
(b_8)_j &= (b_7)_j \\
(b_9)_j &= - \frac{K_{fm} t^n}{2} \\
(b_{10})_j &= (b_9)_j
\end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi batas, maka dapat dinyatakan bahwa $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta h_0 = 0, \delta u_M = 0, \delta h_M = 0$,

4. Teknik Eliminasi Blok

Persamaan (4.99)-(4.103) merupakan persamaan yang diselesaikan menggunakan teknik eliminasi blok, elemen-elemen pada blok triagonal adalah matrik blok. Dalam menyelesaikan perlu ditentukan elemen-elemen matrik blok triagonal dengan membentuknya menjadi tiga kondisi yaitu saat $j = 1, j = M - 1$ dan $j = M$

1. Kondisi pada saat $j = 1$, persamaan (4.84)-(4.88) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$(\delta f_1 - \delta f_0) - \frac{l_j}{2}(\delta u_1 + \delta u_0) = (r_1)_1 \quad (4.104)$$

$$(\delta u_1 - \delta u_0) - \frac{l_j}{2}(\delta g_1 + \delta g_0) = (r_2)_1 \quad (4.105)$$

$$(\delta h_1 - \delta h_0) - \frac{l_j}{2}(\delta w_1 + \delta w_0) = (r_3)_1 \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned} & (a_1)_1 \delta g_1 + (a_2)_1 \delta g_0 + (a_3)_1 \delta u_1 + (a_4)_1 \delta u_0 + (a_5)_1 \delta f_1 \\ & + (a_6)_1 \delta f_0 + (a_7)_1 \delta w_1 + (a_8)_1 \delta w_0 = (r_4)_1 \end{aligned} \quad (4.107)$$

$$\begin{aligned} & (b_1)_1 \delta w_1 + (b_2)_1 \delta w_0 + (b_3)_1 \delta h_1 + (b_4)_1 \delta h_0 + (b_5)_1 \delta f_1 \\ & + (b_6)_1 \delta f_0 + (b_7)_1 \delta u_1 + (b_8)_1 \delta u_0 + (b_9)_1 \delta g_1 + (b_{10})_1 \delta g_0 \\ & = (r_5)_1 \end{aligned} \quad (4.108)$$

Berdasarkan kondisi batas $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta h_0 = 0$, maka

persamaan (4.104)-(4.108) dapat ditulisan sebagai berikut :

$$(\delta f_1) - \frac{l_1}{2}(\delta u_1) = (r_1)_1 \quad (4.109)$$

$$(\delta u_1) - \frac{l_1}{2}(\delta g_1 + \delta g_0) = (r_2)_1 \quad (4.110)$$

$$(\delta h_1) - \frac{l_1}{2}(\delta w_1 + \delta w_0) = (r_3)_1 \quad (4.111)$$

$$\begin{aligned} (a_1)_1 \delta g_1 + (a_2)_1 \delta g_0 + (a_3)_1 \delta u_1 + (a_5)_1 \delta f_1 + (a_7)_1 \delta w_1 \\ + (a_8)_1 \delta w_0 = (r_4)_1 \end{aligned} \quad (4.112)$$

$$\begin{aligned} (b_1)_1 \delta w_1 + (b_2)_1 \delta w_0 + (b_3)_1 \delta h_1 + (b_5)_1 \delta f_1 + (b_7)_1 \delta u_1 \\ + (b_9)_1 \delta g_1 + (b_{10})_1 \delta g_0 = (r_5)_1 \end{aligned} \quad (4.113)$$

maka persamaan (4.109)-(4.113) dapat dibentuk dalam matriks dibawah ini :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} \\ (a_2)_1 & (a_8)_1 & (a_5)_1 & (a_1)_1 & (a_7)_1 \\ (b_{10})_1 & (b_2)_1 & (b_5)_1 & (b_9)_1 & (b_1)_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta g_0 \\ \delta w_0 \\ \delta f_1 \\ \delta g_1 \\ \delta w_1 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_3)_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (b_7)_1 & (b_3)_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta h_1 \\ \delta f_2 \\ \delta g_2 \\ \delta w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1)_1 \\ (r_2)_1 \\ (r_3)_1 \\ (r_4)_1 \\ (r_5)_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

selanjutnya matrik dapat dituliskan sebagai berikut :

$$[A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1]$$

2. Kondisi saat $j = M - 1$, dihasilkan persamaan sebagai berikut :

$$(\delta f_{M-1} - \delta f_{M-2}) - \frac{l_{M-1}}{2}(\delta u_{M-1} + \delta u_{M-2}) = (r_1)_{M-1} \quad (4.114)$$

$$(\delta u_{M-1} - \delta u_{M-2}) - \frac{l_{M-1}}{2}(\delta g_{M-1} + \delta g_{M-2}) = (r_2)_{M-1} \quad (4.115)$$

$$(\delta h_{M-1} - \delta h_{M-2}) - \frac{l_{M-1}}{2}(\delta w_{M-1} + \delta w_{M-2}) = (r_3)_{M-1} \quad (4.116)$$

$$\begin{aligned} & (a_1)_{M-1}\delta g_{M-1} + (a_2)_{M-1}\delta g_{M-2} + (a_3)_{M-1}\delta u_{M-1} \\ & + (a_4)_{M-1}\delta u_{M-2} + (a_5)_{M-1}\delta f_{M-1} + (a_6)_{M-1}\delta f_{M-2} \\ & + (a_7)_{M-1}\delta w_{M-1} + (a_8)_{M-1}\delta w_{M-2} = (r_4)_{M-1} \end{aligned} \quad (4.117)$$

$$\begin{aligned} & (b_1)_{M-1}\delta w_{M-1} + (b_2)_{M-1}\delta w_{M-2} + (b_3)_{M-1}\delta h_{M-1} \\ & + (b_4)_{M-1}\delta h_{M-2} + (b_5)_{M-1}\delta f_{M-1} + (b_6)_{M-1}\delta f_{M-2} \\ & + (b_7)_{M-1}\delta u_{M-1} + (b_8)_{M-1}\delta u_{M-2} + (b_9)_{M-1}\delta g_{M-1} \\ & + (b_{10})_{M-1}\delta g_{M-2} = (r_5)_{M-1} \end{aligned} \quad (4.118)$$

dapat dinyatakan dalam bentuk matriks berikut :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{M-1}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{M-1}}{2} \\ 0 & 0 & (a_6)_{M-1} & (a_2)_{M-1} & (a_8)_{M-1} \\ 0 & 0 & (b_6)_{M-1} & (b_{10})_{M-1} & (b_2)_{M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta g_{M-3} \\ \delta w_{M-3} \\ \delta f_{M-2} \\ \delta g_{M-2} \\ \delta w_{M-2} \end{pmatrix} \\
 + \begin{pmatrix} -\frac{l_{M-1}}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{M-1}}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{M-1}}{2} \\ (a_4)_{M-1} & 0 & (a_5)_{M-1} & (a_1)_{M-1} & (a_7)_{M-1} \\ (b_8)_{M-1} & (b_4)_{M-1} & (b_5)_{M-1} & (b_9)_{M-1} & (b_1)_{M-1} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \delta u_{M-2} \\ \delta h_{M-2} \\ \delta f_{M-1} \\ \delta g_{M-1} \\ \delta w_{M-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{l_{M-1}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_3)_{M-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (b_7)_{M-1} & (b_3)_{M-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{M-1} \\ \delta h_{M-1} \\ \delta f_M \\ \delta g_M \\ \delta w_M \end{pmatrix} \\
 = \begin{pmatrix} (r_1)_{M-1} \\ (r_2)_{M-1} \\ (r_3)_{M-1} \\ (r_4)_{M-1} \\ (r_5)_{M-1} \end{pmatrix}$$

Secara sederhana bentuk matriks dapat dituliskan sebagai berikut :

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] + [C_j][\delta_{j+1}] = [r_j]$$

berlaku untuk setiap $j = 2, 3, \dots, M - 1$.

3. Kondisi saat $j = M$, dihasilkan persamaan sebagai berikut :

$$(\delta f_M - \delta f_{M-1}) - \frac{l_M}{2}(\delta u_M + \delta u_{M-1}) = (r_1)_M \quad (4.119)$$

$$(\delta u_M - \delta u_{M-1}) - \frac{l_M}{2}(\delta g_M + \delta g_{M-1}) = (r_2)_M \quad (4.120)$$

$$(\delta h_M - \delta h_{M-1}) - \frac{l_M}{2}(\delta w_M + \delta w_{M-1}) = (r_3)_M \quad (4.121)$$

$$\begin{aligned} & (a_1)_M \delta g_M + (a_2)_M \delta g_{M-1} + (a_3)_M \delta u_M + (a_4)_M \delta u_{M-1} \\ & + (a_5)_M \delta f_M + (a_6)_M \delta f_{M-1} + (a_7)_M \delta w_M + (a_8)_M \delta w_{M-1} \\ & = (r_4)_M \end{aligned} \quad (4.122)$$

$$\begin{aligned} & (b_1)_M \delta w_M + (b_2)_M \delta w_{M-1} + (b_3)_M \delta h_M + (b_4)_M \delta h_{M-1} \\ & + (b_5)_M \delta f_M + (b_6)_M \delta f_{M-1} + (b_7)_M \delta u_M + (b_8)_M \delta u_{M-1} \\ & + (b_9)_M \delta g_M + (b_{10})_M \delta g_{M-1} = (r_5)_M \end{aligned} \quad (4.123)$$

dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_m}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_m}{2} \\ 0 & 0 & (a_6)_M & (a_2)_M & (a_8)_M \\ 0 & 0 & (b_6)_M & (b_{10})_M & (b_2)_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta g_{M-2} \\ \delta w_{M-2} \\ \delta f_{M-1} \\ \delta g_{M-1} \\ \delta w_{M-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} -\frac{l_m}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_m}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_m}{2} \\ (a_4)_M & 0 & (a_5)_M & (a_1)_M & (a_7)_M \\ (b_8)_M & (b_4)_M & (b_5)_M & (b_9)_M & (b_1)_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{M-1} \\ \delta h_{M-1} \\ \delta f_M \\ \delta g_M \\ \delta w_M \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} (r_1)_M \\ (r_2)_M \\ (r_3)_M \\ (r_4)_M \\ (r_5)_M \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

secara sederhana dapat dinyatakan dengan $[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] = [r_j]$ untuk $j = M$.

Secara sederhana bentuk matriks pada kondisi $j = 1, 2, 3, \dots, M$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$j=1; [A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1]$$

$$j=2; [B_2][\delta_1] + [A_2][\delta_2] + [C_2][\delta_3] = [r_2]$$

$$j=3; [B_3][\delta_2] + [A_3][\delta_3] + [C_3][\delta_4] = [r_3]$$

$\vdots$

$$j=M-1; [B_{M-1}][\delta_{M-2}] + [A_{M-1}][\delta_{M-1}] + [C_{M-1}][\delta_M] = [r_{M-1}]$$

$$j=M; [B_M][\delta_{M-1}] + [A_M][\delta_M] = [r_M]$$

atau dapat dinyatakan dengan

$$A\delta = r \tag{4.124}$$

dengan

$$A = \begin{pmatrix} [A_1] & [C_1] & & & \\ [B_2] & [A_2] & [C_2] & & \\ & [B_3] & [A_3] & & \\ & & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [B_{M-1}] & [A_{M-1}] & [C_{M-1}] \\ & & & & & [B_M] & [A_M] \end{pmatrix}$$

$$\delta = \begin{pmatrix} [\delta_1] \\ [\delta_2] \\ \vdots \\ [\delta_{M-1}] \\ [\delta_M] \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} [r_1] \\ [r_1] \\ \vdots \\ [r_{M-1}] \\ [r_M] \end{pmatrix}$$

untuk menyelesaikan persamaan(4.124) diasumsikan A matriks *non singular* dapat difaktorkan kedalam

$$A = LU \quad (4.125)$$

dengan masing-masing L dan U sebagai berikut :

$$L = \begin{pmatrix} [\alpha_1] & & & & \\ [B_2] & [\alpha_2] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [\alpha_{M-1}] & \\ & & & [B_M] & [\alpha_M] \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} [I] & [T_1] & & & \\ & [I] & [T_2] & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & [I] & [T_{M-1}] \\ & & & & & & [I] \end{pmatrix}$$

dengan $[I]$ adalah matriks identitas berorde 5×5 dan $[\alpha_j]$ dan $[T_j]$ adalah matriks ukuran 5×5 dengan unsur-unsurnya ditentukan dengan persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} [\alpha_1] &= [A_1] \\ [A_1][T_1] &= [C_1] \\ [\alpha_j] &= [A_j] - [B_j][T_{j-1}], j = 2, 3, \dots, M \\ [\alpha_j][T_j] &= [C_j], j = 2, 3, \dots, M - 1 \end{aligned}$$

kemudian substitusikan persamaan (4.125) ke persamaan (4.124) diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$LU\delta = r \quad (4.126)$$

$U\delta = X$, maka

$$LX = r \quad (4.127)$$

dengan

$$X = \begin{pmatrix} [X_1] \\ [X_2] \\ \vdots \\ [X_{M-1}] \\ [X_M] \end{pmatrix}$$

dimana $[X_j]$ merupakan matriks berukuran 5×1 yang memiliki elemen-elemen yang diperoleh dari persamaan (4.127) yaitu :

$$\begin{aligned} [\alpha_1][X_1] &= [r_1] \\ [\alpha_j][X_j] &= [r_j] - [B_j][X_{j-1}], j = 2, 3, \dots, M \end{aligned} \quad (4.128)$$

setelah elemen X ditemukan selanjutnya menentukan penyelesaian dari δ pada persamaan (4.126) menggunakan persamaan berikut :

$$\begin{aligned} [\delta_M] &= [X_M] \\ [\delta_j] &= [X_j] - [T_j][\delta_{j+1}], j = 1, 2, \dots, M - 1 \end{aligned}$$

Perhitungan ini diulang terus menerus dan berhenti ketika telah terpenuhi kriteria konvergensinya. Menurut Bradshaw, $v = (0, t)$ merupakan kriteria konvergen, sehingga iterasinya akan dihentikan ketika $|\delta v(0, t)| < \epsilon$ dengan nilai ϵ yang sangat kecil (Ghani, 2011).

G. Analisis Hasil Simulasi Numerik

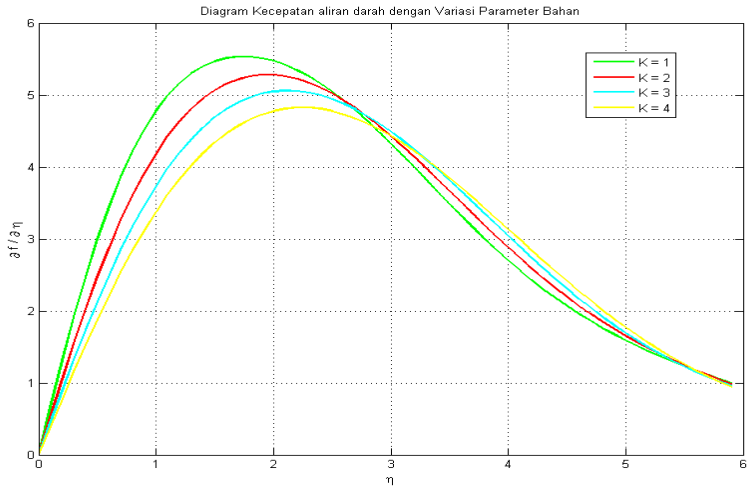
Setelah diperoleh model matematika secara numerik dengan metode beda hingga skema *Keller Box* maka langkah berikutnya yakni simulasi menggunakan Matlab 2013a dengan menginputkan model matematika yang telah diperoleh, serta memberikan variasi parameter magnetik (M) dan variasi parameter bahan (K). Penelitian ini juga dilakukannya simulasi untuk nilai $n = 0$ dan $n = 0.5$, n adalah konstanta yang mempunyai nilai $0 \leq n \leq 1$. Jika $n = 0$ yang merupakan perbandingan komponen vektor mikrorotasi terhadap gesekan fluida pada permukaan bernilai nol,

maka suatu unsur mikrokutub yang berada didekat permukaan benda tidak dapat berotasi. Sedangkan untuk $n = 0.5$ bagian tensor tegangan menghilang hal ini disebut kelemahan konsentrasi unsur mikro. Namun pada penelitian ini mempelajari pada saat $n = 0$ dan $n = 0.5$, dengan kata lain karena aliran darah yang diperiksa dilakukan pada konsentrasi pekat dan setengah pekat. Dengan memilih partisi waktu sebanyak ($t = 33$), partisi $\eta = 60$, $\delta\eta = l_j = 0.1$ merupakan *stepsize* η dan $\delta t = k^n = 0.05$ merupakan *stepsize* dari t , η menyatakan ketebalan lapisan batas dan t adalah waktu.

1. Pengaruh Parameter Bahan Terhadap Kecepatan Aliran Darah

Pengaruh parameter bahan terhadap kecepatan aliran darah, dimana parameter bahan ini adalah parameter yang terdapat pada fluida mikrokutub. Diberikan nilai parameter bahan sebesar $K = 1, K = 2, K = 3$ dan $K = 4$, dan pengaruh parameter magnetik $M = 1$. Simulasi ini dilakukan pada fluida yang berkonsentrasi pekat dan setengah pekat, sehingga diperoleh grafik matlab 2013a berikut

Gambar (4.4) menggambarkan aliran darah berkonsentrasi pekat. Kecepatan aliran darah mengalami kenaikan pada $f' \approx 0$ sampai dengan $f' \approx 5.5$ lalu kecepatannya menurun mulai $f' \approx 5.5$ sampai $f' \approx 1$. Pada diagram yang ditunjukkan gambar (4.4) kecepatan aliran darah dengan variansi parameter bahan menunjukkan bahwa laju aliran darah menurun seiring dengan bertambahnya nilai variasi parameter bahan yang ditentukan. Hal ini karena dengan bertambahnya parameter bahan dari fluida mikrokutub, gesekan yang dihasilkan antara partikel aliran darah

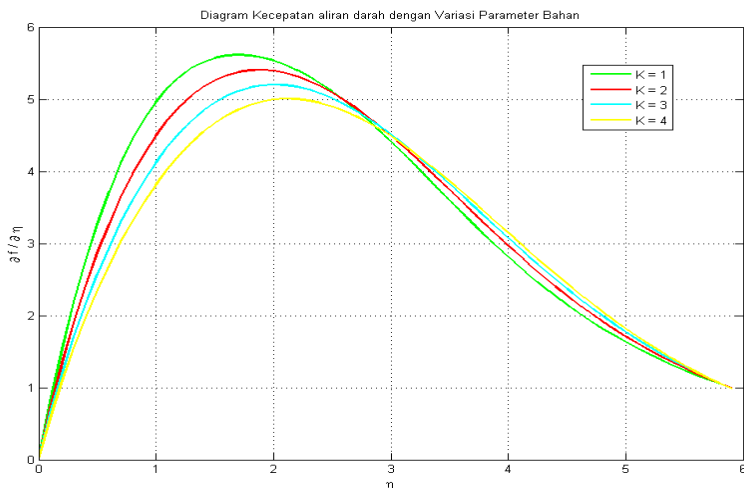


Gambar 4.4. Diagram kecepatan aliran darah dengan variansi parameter bahan saat $M = 1, n = 0$

fluida mikrokutub semakin besar dan mengakibatkan kecepatan aliran darah semakin menurun. Jika nilai variasi parameter bahan semakin berkurang, maka laju aliran darah semakin meningkat. Pada Diagram tersebut juga menunjukkan perbedaan pengaruh masing-masing variasi parameter bahan terhadap aliran darah. Dapat dilihat bahwa aliran darah yang memiliki variasi parameter bahan yang lebih tinggi, kecepatan aliran darah lebih lambat dibandingkan aliran darah yang variasi parameter bahannya rendah.

Selanjutnya melakukan simulasi untuk kecepatan aliran darah berkonsentrasi setengah pekat dengan nilai variasi parameter bahan sebesar $K = 1, K = 2, K = 3$ dan $K = 4$, diberikan pengaruh parameter magnetik sebesar $M = 1$. Hasil simulasi menunjukkan bahwa kecepatan aliran darah ketika diberi

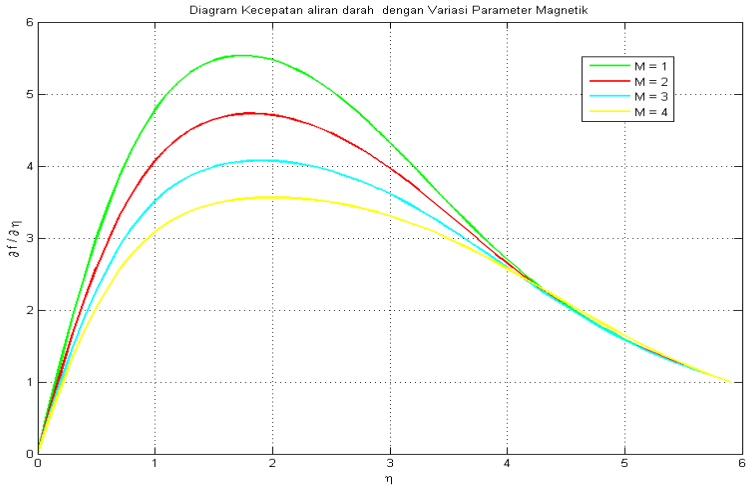
pengaruh variasi parameter bahan menurun saat nilai variasi parameter bahan semakin bertambah dan ketika nilai variasi parameter bahan semakin berkurang, maka laju aliran darah semakin meningkat. Tidak ada perbedaan yang signifikan antara kecepatan aliran darah berkonsentrasi pekat dan setengah pekat.



Gambar 4.5. Diagram kecepatan aliran darah dengan variansi parameter bahan saat $M = 1, n = 0.5$

2. Pengaruh Parameter Magnetik Terhadap Kecepatan Aliran Darah

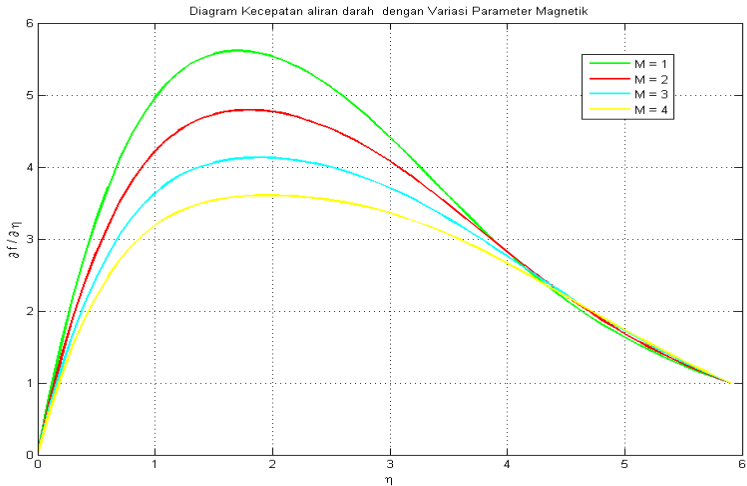
Pengaruh parameter magnetik terhadap kecepatan aliran darah. Simulasi dilakukan menggunakan nilai variasi parameter magnetik sebesar $M = 1, M = 2, M = 3, M = 4$, dan $K = 1$ sebagai parameter bahan. Simulasi dilakukan pada aliran darah berkonsentrasi pekat dan setengah pekat, sehingga diperoleh.



Gambar 4.6. Diagram kecepatan aliran darah dengan variasi parameter magnetik saat $M = 1, n = 0$

Gambar (4.6) Kecepatan aliran darah mengalami kenaikan pada $f' \approx 0$ sampai dengan $f' \approx 5.5$ lalu kecepatannya menurun mulai $f' \approx 5.5$ sampai $f' \approx 1$. Diagram tersebut juga merupakan simulasi kecepatan aliran darah dengan konsentrasi pekat, diagram menunjukkan kecepatan aliran darah ketika diberi pengaruh variasi parameter magnetik terjadi penurunan. Hal ini terjadi karena adanya medan magnet, semakin besar parameter magnet maka semakin lambat pergerakannya. $M = \frac{a\sigma B_0^2}{\rho_{fm} U_\infty}$ menunjukkan bahwa parameter magnetik (M) berbanding lurus dengan besar medan magnet (B_0), sehingga semakin bertambahnya parameter magnetik maka medan magnet semakin meningkat yang mengakibatkan kecepatan menurun pada aliran darah. Jika nilai variasi parameter magnetik semakin berkurang, maka laju aliran darah semakin meningkat. Pada Diagram tersebut

juga menunjukkan perbedaan pengaruh masing-masing variasi parameter magnetik terhadap aliran darah. Dapat dilihat bahwa aliran darah yang memiliki variasi parameter magnetik yang lebih tinggi, kecepatan aliran darah lebih lambat dibandingkan aliran darah yang variasi parameter magnetiknya rendah.



Gambar 4.7. Diagram kecepatan aliran darah dengan variasi parameter magnetik saat $M = 1, n = 0.5$

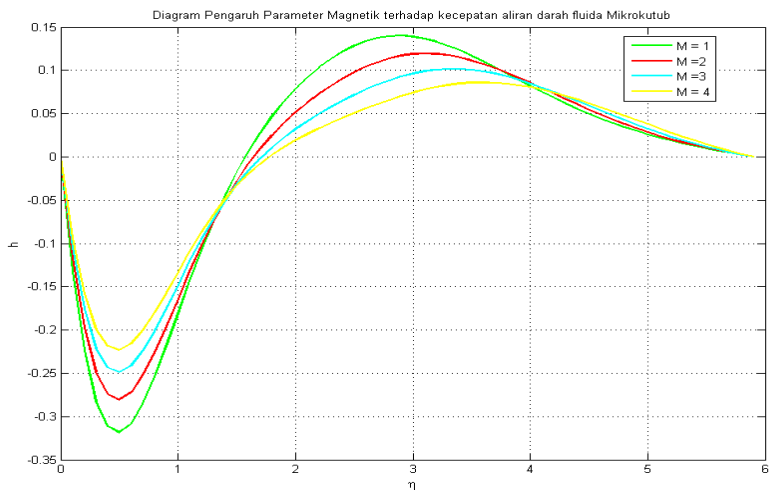
Selanjutnya melakukan simulasi untuk kecepatan aliran darah berkonsentrasi setengah pekat dengan variasi parameter magnetik sebesar $M = 1, M = 2, M = 3$ dan $M = 4$ diberikan pengaruh parameter bahan sebesar $K = 1$.

Gambar (4.7) kecepatan aliran darah dengan pengaruh variasi parameter magnetik menurun ketika nilai variasi parameter magnetik semakin bertambah dan ketika nilai variasi parameter magnetik semakin berkurang, maka laju aliran darah semakin meningkat. Tidak ada perbedaan yang signifikan antara kecepatan

aliran darah berkonsentrasi pekat dan setengah pekat.

3. Pengaruh Parameter Magnetik Terhadap Kecepatan Aliran Darah Fluida Mikroktub

Simulasi dilakukan menggunakan nilai variasi parameter magnetik sebesar $M = 1, M = 2, M = 3$ dan $M = 4$, diberikan pengaruh parameter bahan sebesar $K = 1$. Nilai negatif kecepatan aliran darah fluida mikroktub fluida menunjukkan arah partikel mikroktub dalam fluida, yaitu berlawanan arah jarum jam. Simulasi dilakukan pada aliran darah yang berkonsentrasi pekat dan setengah pekat, sehingga diperoleh sebagai berikut.



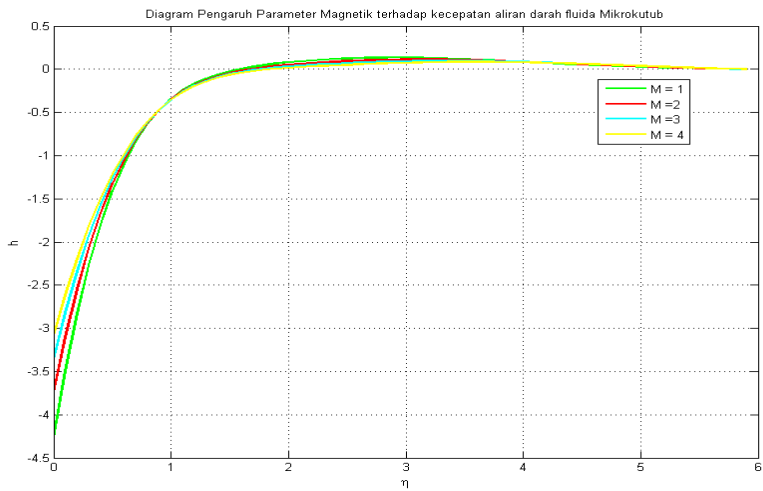
Gambar 4.8. Diagram pengaruh parameter magnetik terhadap kecepatan aliran darah fluida mikroktub saat $M = 1, n = 0$

Gambar (4.8) adalah perbandingan rasio antara gesekan darah

pada permukaan terhadap komponen vektor mikrorotasi adalah nol. Dapat diamati ketika bertambahnya variasi parameter magnetik maka semakin meningkat kecepatan aliran darah fluida mikrokutub. Hal ini terjadi karena adanya medan magnet, medan magnet semakin bertambah dengan bertambahnya variasi parameter magnetik yang bekerja pada fluida mikrokutub. Dengan bertambahnya medan magnet maka pergerakan muatan-muatan listrik dalam parameter magnetik meningkat, sehingga fluida mikrokutub bergerak lebih cepat. Jika nilai variasi parameter magnetik semakin berkurang, maka laju aliran darah semakin menurun.

Selanjutnya melakukan simulasi untuk kecepatan aliran darah berkonsentrasi setengah pekat dengan nilai variasi parameter magnetik sebesar $M = 1, M = 2, M = 3$ dan $M = 4$ diberikan pengaruh parameter bahan sebesar $K = 1$ maka diperoleh hasil simulasi sebagai berikut.

Hasil simulasi (Gambar 4.9) menunjukkan bahwa kecepatan aliran darah fluida mikrokutub meningkat sejalan dengan bertambahnya nilai variasi parameter magnetik. Hal ini disebabkan oleh medan magnet yang ada pada darah sehingga menyebabkan penurunan kecepatan aliran darah dan mengakibatkan peningkatan kecepatan aliran darah fluida mikrokutub, dan ketika nilai variasi parameter magnetik semakin berkurang maka laju aliran darah semakin menurun.



Gambar 4.9. Diagram pengaruh parameter magnetik terhadap kecepatan aliran darah fluida mikrokutub saat $M = 1, n = 0.5$

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan mengenai penyelesaian numerik fluida non-newtonian pada aliran darah manusia melalui arteri, dapat diambil kesimpulan:

1. Bentuk matematika dari model aliran darah manusia melalui arteri diperoleh dengan menurunkan persamaan pembangun dimensional ke dalam bentuk persamaan non-dimensional, lalu disederhanakan menggunakan pendekatan aliran bebas dan disubstitusi fungsi alir, selanjutnya diubah kedalam persamaan similaritas agar mendapatkan bentuk akhir model matematika aliran fluida non-newtonian pada aliran darah manusia melalui arteri.

Persamaan Momentum Linier dapat dituliskan sebagai berikut :

$$(1 + K_{fm})f''' + \frac{\eta}{2}f'' + t(1 - (f')^2 + ff'') + t\left(\frac{25}{16}M\right)(1 - f') + K_{fm}h' = t\frac{\partial f'}{\partial h} \quad (5.1)$$

Persamaan Momentum Angular dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right)h'' + \frac{\eta}{2}h' + \frac{h}{2} + t(fh' - hf') = t\frac{\partial h}{\partial t} + K_{fm}t(2h + f'') \quad (5.2)$$

2. Model matematika diselesaikan menggunakan metode numerik beda hingga skema *Keller Box*. Dalam skema *Keller Box* mempunyai empat langkah dalam menyelesaikan model matematika, yaitu :

(a) Penyelesaian Notasi.

Didapatkan persamaan momentum linier dan momentum angular sebagai berikut.

Persamaan Momentum Linier :

$$(1 + K_{fm})g' + \frac{\eta}{2}g + t(1 - (u)^2 + fg) + t\left(\frac{25}{16}M\right)(1 - u) + K_{fm}w = t\frac{\partial u}{\partial h} \quad (5.3)$$

Persamaan Momentum Angular :

$$\left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right)w' + \frac{\eta}{2}w + \frac{h}{2} + t(fw - hu) = t\frac{\partial h}{\partial t} + K_{fm}t(2h + g) \quad (5.4)$$

(b) Diskretisasi Model.

- i. Persamaan momentum dapat dilihat pada persamaan (4.91).
- ii. Persamaan momentum angular dapat dilihat pada persamaan (4.92).

(c) Pelinieran Model.

- i. Persamaan momentum dapat dilihat pada persamaan (4.102).
- ii. Persamaan momentum angular dapat dilihat pada persamaan (4.103).

(d) Teknik Eliminasi Blok.

- i. Teknik eliminasi blok pada kondisi $j = 1$, dapat dilihat pada persamaan (4.109)-(4.113).
- ii. Teknik eliminasi blok pada kondisi $j = M - 1$, dapat dilihat pada persamaan (4.114)-(4.118).
- iii. Teknik eliminasi blok pada kondisi $j = M$, dapat dilihat pada persamaan (4.119)-(4.123).

3. Hasil simulasi numerik menggunakan matlab 2013a mengenai model matematika aliran fluida non-newtonian pada aliran darah manusia melalui arteri menggunakan variasi parameter magnetik dan variasi parameter bahan pada aliran fluida dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

- (a) Semakin bertambahnya parameter bahan, maka kecepatan aliran darah semakin menurun, hal ini karena dengan bertambahnya parameter bahan maka gesekan yang dihasilkan antara partikel aliran darah semakin besar. Jika nilai variasi parameter bahan semakin berkurang, maka laju aliran darah semakin meningkat. Berlaku untuk konsentrasi pekat dan setengah pekat.
- (b) Semakin bertambahnya nilai parameter magnetik maka kecepatan aliran darah semakin menurun, hal ini terjadi karena adanya medan magnet. Jika nilai variasi parameter magnetik semakin berkurang, maka laju aliran darah semakin meningkat. Berlaku untuk konsentrasi pekat dan setengah pekat.
- (c) Semakin bertambahnya nilai parameter magnetik maka kecepatan aliran darah fluida mikroktub semakin

meningkat, hal ini terjadi karena adanya medan magnet. Jika nilai variasi parameter magnetik semakin berkurang, maka laju aliran darah semakin menurun. Berlaku untuk konsentrasi pekat dan setengah pekat.

B. Saran

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, saran untuk penelitian berikutnya adalah:

1. Penelitian ini dapat dikembangkan dengan menggunakan pengaruh parameter-parameter non-dimensional lain.
2. Penelitian ini dapat dikembangkan pada aliran darah manusia melalui arteri dengan adanya stenosis atau sumbatan aliran darah.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdel-Rahman, G. M. 2009. Studying effect of MHD on thin films of a micropolar fluid. *Physica B: Condensed Matter*, 404(21):3859-3866 .
- Adhikari, A and Maiti, AK. 2014. MHD micropolar fluid flow towards a vertical surface in presence of heat source/sink under radiative heat flux. *Journal of the International Mathematical Virtual Institute*.
- Ahmad, Nur Intan Syafnaz and Mahat, Aishah and Khalid, Ahmad Khudzairi and Abd Halim, MS and others . 2019 . A novel mathematical model of airborne infection. *Journal of Information System and Technology Management* . 4(11): 62-72.
- Al-Shibani, F.S., Ismail, A.I. Md., dan Abdullah, F.A. 2012 . "The Implicit Keller-Box Method for The One Dimensional Time Fractional Diffusion Equation", *Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics*, Vol. 2, No. 3, hal. 72-76.
- Anggriani, I. N. D. I. R. A. 2016. *Pengaruh Magnetohidrodinamik (MHD) pada Fluida Micropolar yang Melewati Bola Berpori* . Disertasi. Surabaya: Program Pascasarjana Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Changdar, Satyasan and De, Soumen. 2015. Numerical simulation of nonlinear pulsatile Newtonian blood flow through a multiple stenosed artery. *International Scholarly Research Notices*.

- Eringen, A.C., (1965), *Theory of Micropolar Fluids* Report, Purdue University, Indiana.
- Fauziyah, M., Widodo, B., & Adzkiya, D. 2022. Profil Mikrorotasi dan Temperatur Aliran Magnetohidrodinamik Fluida Mikrokutub pada Bola Bermagnet. *Square: Journal of Mathematics and Mathematics Education*, 4(1), 1-7.
- Ghani, M., & Rumite, W. 2021. Keller-box scheme to mixed convection flow over a solid sphere with the effect of mhd. *MUST: Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, 6(1), 97-120.
- Ghurri, A. 2014. *Dasar-Dasar Mekanika Fluida*. Bukit Jimbaran: Jurusan Teknik Mesin Universitas Udayana.
- Jonuarti, R., & Haryanto, F. (2011, February). Analisis Model Fluida Casson untuk Aliran Darah dalam Stenosis Arteri. *In Conference Proceedings in Science*.
- Khalid, AK and Othman, ZS and Shafee, CT MNM. 2021. A review of mathematical modelling of blood flow in human circulatory system. *Journal of Physics: Conference Series*.
- Kironoto, Bambang Agus. 2018. *Statika Fluida*. UGM PRESS.
- Leal, L. G. 2007. *Advanced Transport Phenomena*, Cambridge University Press.
- Lumbantoruan, J. H. (2019). Buku Materi Pembelajaran Persamaan Diferensial.
- Manaba, Faizin. 2016. *Anatomi Fisiologi Untuk Mahasiswa Gizi*. Edisi 3. Jakarta: Kedokteran EGC.

- Martanegara, H. A., Yulianti, K., & Yusnitha, I. 2020. Model matematika fluida lapisan tipis pada bidang miring. *Jurnal EurekaMatika*. 8(1), 26-38.
- Mufatin, F. 2018. *The Characterization of unsteady Magnetohydrodynamic Micropolar Fluid Through a Sphere Affected by Mixed Convection Using Euler Implicit Scheme*. Disertasi. Surabaya: Program Pascasarjana Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Mohammad, N. F., Mohd Kasim, A. R., Ali, A., & Shafie, S. (2012, May). Unsteady mixed convection boundary layer flow past a sphere in a micropolar fluid. *In AIP Conference Proceedings* (Vol. 1450, No. 1, pp. 211-217). American Institute of Physics.
- Munir, R. (2021). Metode Numerik Revisi kelima.
- Narayana, P. S., Venkateswarlu, B., & Venkataramana, S. (2013). Effects of Hall current and radiation absorption on MHD micropolar fluid in a rotating system. *Ain Shams Engineering Journal*, 4(4), 843-854.
- Norasia, Y., Nisa, A. O., & Sumardi, S. R. A. 2024. The Effect of Nanoparticles on Drug Distribution in The Mathematical Model of Blood Flow. *Vygotsky: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika* 6(1), 51-60.
- Norasia, Y., & Ghani, M. 2023. Exploring Micromagnetorotation in Maxwell Viscous Fluid Flow Within a Porous Cylinder. *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, 10(6).
- Norasia, Y., and Zulaikha, Z. 2019. Pengaruh partikel nano zn dan zno terhadap aliran mhd fluida nano pada lapisan batas bola

- bermagnet. *Square: Journal of Mathematics and Mathematics Education*, 1(2), 133-142.
- Palyama, P. A. M. 2017. *Melalui Bola di Dalam Fluida Nano di Unsteady Magnetohydrodynamics Nano Fluid in Boundary Layer Flow Past a Sphere Under The Influence Of Magnrtic Field* . Disertasi. Surabaya: Program Pascasarjana Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Peate, Ian and Nair, Muralitharan. 2018. *At a Glance Anatomi dan Fisiologi*. Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Rohani, I. 2021. *Mekanika Fluida untuk Bidang Ilmu Rekayasa Lanjut*. Graha Ilmu.
- Rosha, J. M., Permata, H., Rusdiana, D., & Suwama, I. R. 2022. Pengukuran Debit Fluida Menggunakan Sensor Flow Berbasis Arduino pada Materi Fluida Dinamis. *Jurnal Ikatan Alumni Fisika*, 8(1), 29-32.
- Salman, Gelar and Fatimah, Siti and Yulianti, Kartika. Model Matematika untuk Kecepatan Aliran Darah. *Jurnal EurekaMatika*. 6(2): 73-82.
- Sarpini, Rusbandi. 2016. *Anatomi dan Fisiologi Tubuh Manusia*. Jakarta: In Media.
- Sarojo, Ganijanti Aby. 2013. *Seri Fisika Dasar Mekanika*. Edisi 5. Jakarta: Salemba Teknik.
- SP, Setyo Hariyadi. 2017. Karakteristik Aliran Di Belakang Gundukan (Bump) Segitiga Pada Plat Datar. *Jurnal Penelitian*, 2(3), 203-211.

- Versteeg, H. K., & Malalasekera, W. 1995. Computational fluid dynamics. *The finite volume method*.
- Widodo, B., Abu, M., & Imron, C. 2019. Unsteady nano fluid flow through magnetic porous sphere under the influence of mixed convection. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1153, No. 1, p. 012053). IOP Publishing.
- Widodo, B., Arif, D. K., Aryany, D., Asiyah, N., Widjajati, F. A., & Kamiran, K. 2017. The Effect Of Magnetohydrodynamic Nano Fluid Flow Through Porous Cylinder. *AIP Conference Proceedings* Vol. 1867, No. 1). AIP Publishing.
- Yulistiyanto, B. 2017. *Metode Numerik Aplikasi untuk Teknik Sipil*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press.

Lampiran 1. Transformasi Kondisi batas Dimensional ke Non Dimensional

Pada penelitian ini menggunakan kondisi batas yaitu :

$$\bar{t} = 0; \bar{u} = \bar{v} = \bar{N} = 0, \bar{T} = T_{\infty} \text{ untuk setiap } \bar{x}, \bar{y}$$

$$\bar{t} > 0; \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{N} = -n \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}, \bar{T} = T_w \text{ pada } \bar{y} = 0$$

$$\bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{N} = 0, \bar{T} = T_{\infty} \text{ pada } \bar{y} \rightarrow \infty$$

dengan menggunakan variabel non-dimensional sebagai berikut

:

$$T = \frac{\bar{T} - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}}; \bar{u}_e(\bar{x}) = u_e(x)U_{\infty}; y = Re^{1/2} \frac{\bar{y}}{a}; u = \frac{\bar{u}}{U_{\infty}};$$

$$N = Re^{-1/2} \frac{a\bar{N}}{U_{\infty}}$$

maka diperoleh

$$\bar{T} = T_{\infty}$$

$$T = \frac{\bar{T} - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}} = \frac{T_{\infty} - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}} = 0$$

$$\bar{T} = T_w$$

$$T = \frac{\bar{T} - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}} = \frac{T_w - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}} = 1$$

$$\bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x})$$

$$uU_{\infty} = u_e(x)U_{\infty}$$

$$u = u_e$$

$$\bar{N} = 0$$

$$N = \frac{a \cdot 0}{Re^{-1/2} U_\infty} = 0$$

$$\bar{N} = -n \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}$$

$$N = \frac{a}{Re^{-1/2} U_\infty} - n \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}$$

$$N = \frac{a}{Re^{-1/2} U_\infty} - n \frac{\partial u U_\infty}{\partial y a Re^{-1/2}}$$

$$N = -n \frac{\partial u}{\partial y}$$

sehingga kondisi batasnya menjadi :

$t = 0; u = v = N = 0, T = 0$ untuk setiap x, y

$t > 0; u = v = 0, N = -n \frac{\partial u}{\partial y}, T = 1$ pada $y = 0$

$u = u_e(x), N = 0, T = 0$, pada $y \rightarrow \infty$

A. Mengubah persamaan dimensional ke persamaan non-dimensional

Pada penelitian ini menggunakan variabel-variabel berikut :

$$x = \frac{\bar{x}}{a}; y = Re^{1/2} \frac{\bar{y}}{a}; u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}; v = Re^{1/2} \frac{\bar{v}}{U_\infty}; t = \frac{U_\infty \bar{t}}{a}; p = \frac{\bar{p}}{\rho_{fm} U_\infty^2};$$

$$N = Re^{-1/2} \frac{a \bar{N}}{U_\infty}; r = \frac{\bar{r}}{a}; T = \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_w - T_\infty}; g_x = -\sin x; g_y = \cos x$$

sehingga diperoleh persamaan pembangun non-dimensional berikut.

1. Persamaan Kontinuitas

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \overline{ru}}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial \overline{rv}}{\partial \overline{y}} \right) &= 0 \\
 \left(\frac{\partial (aruU_\infty)}{\partial (xa)} + \frac{\partial (arvU_\infty Re^{-1/2})}{\partial (yaRe^{-1/2})} \right) &= 0 \\
 \left(\frac{\partial ru}{\partial x} \frac{aU_\infty}{a} + \frac{\partial rv}{\partial y} \frac{aU_\infty Re^{-1/2}}{aRe^{-1/2}} \right) &= 0 \\
 \left(\frac{\partial ru}{\partial x} U_\infty + \frac{\partial rv}{\partial y} U_\infty \right) &= 0 \\
 U_\infty \left(\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} \right) &= 0 \\
 \left(\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} \right) &= 0
 \end{aligned}$$

2. Persamaan Momentum Linier pada Sumbu-x

Menurut Leal (2007) bahwa nilai maksimum $(\overline{T} - T_\infty)$ kecil, sehingga :

$$\frac{\rho_\infty}{\rho_{fm}} = 1 + \beta(\overline{T} - T_\infty) + O(T - T_\infty)^2$$

Dengan menghilangkan bagian berorde tinggi maka diperoleh :

$$\frac{\rho_\infty}{\rho_{fm}} = 1 + \beta(\overline{T} - T_\infty)$$

untuk $\beta(\overline{T} - T_\infty)$ diperoleh :

$$\frac{\rho_\infty - \rho_{fm}}{\rho_{fm}} = -\rho_{fm}\beta(\overline{T} - T_\infty)$$

atau

$$\rho_{\infty} - \rho_{fm} = -\rho_{fm}\beta(\bar{T} - T_{\infty})$$

β adalah koefisien panas yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\beta = -\frac{1}{\rho_{fm}} \left(\frac{\partial \rho_{fm}}{\partial T} \right)$$

diperoleh persamaan momentum linier sumbu-x berikut :

$$\begin{aligned} \rho_{fm} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu_{fm} + k_{fm}) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ & - \sigma(b + B_0)^2 \bar{u} - \rho_{fm} \beta (\bar{T} - T_{\infty}) g_x \\ & + k_{fm} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \end{aligned}$$

Perhitungan pada ruas kiri

$$\begin{aligned} \rho_{fm} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \\ = \rho_{fm} \left(\frac{\partial(uU_{\infty})}{\partial \left(\frac{at}{U_{\infty}} \right)} + uU_{\infty} \frac{\partial(uU_{\infty})}{\partial(xa)} + \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \right) \frac{\partial(uU_{\infty})}{\partial(yaRe^{-1/2})} \right) \\ = \rho_{fm} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{U_{\infty}^2}{a} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{uU_{\infty}^2}{a} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{vU_{\infty}^2}{a} \right) \\ = \rho_{fm} \frac{U_{\infty}^2}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Perhitungan pada ruas kanan

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu_{fm} + k_{fm}) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma(b + B_0)^2 \bar{u} \\
&\quad - \rho_{fm} \beta (\bar{T} - T_\infty) g_x + k_{fm} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \\
&= -\frac{\partial(p \rho_{fm} U_\infty^2)}{\partial(xa)} + (\mu_{fm} + k_{fm}) \left(\frac{\partial^2(u U_\infty)}{\partial(xa)^2} + \frac{\partial^2(u U_\infty)}{\partial \left(\frac{ya}{Re^{1/2}} \right)^2} \right) \\
&\quad - \sigma(b + B_0)^2 u U_\infty + \rho_{fm} \beta g T (T_w - T_\infty) \sin x \\
&\quad + k_{fm} \frac{\partial(N U_\infty a^{-1} Re^{1/2})}{\partial(ya Re^{-1/2})} \\
&= -\frac{\rho_{fm} U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + (\mu_{fm} + k_{fm}) \left(\frac{U_\infty}{a^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
&\quad - \sigma(b + B_0)^2 u U_\infty + \rho_{fm} \beta g T (T_w - T_\infty) \sin x + k_{fm} \frac{U_\infty Re}{a^2} \frac{\partial N}{\partial y}
\end{aligned}$$

Dengan menyamakan ruas kiri dan ruas kanan, maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
\rho_{fm} \frac{U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\rho_{fm} U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + (\mu_{fm} + k_{fm}) \\
&\quad \left(\frac{U_\infty}{a^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \sigma(b + B_0)^2 \\
&\quad u U_\infty + \rho_{fm} \beta g T (T_w - T_\infty) \sin x \\
&\quad + k_{fm} \frac{U_\infty Re}{a^2} \frac{\partial N}{\partial y}
\end{aligned}$$

Kemudian kedua ruas dibagi dengan $\rho_{fm} \frac{U_\infty^2}{a}$ menghasilkan persamaan sebagai berikut ;

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + (1 + K_{fm}) \mu_{fm} \frac{1}{\rho_{fm} a U_\infty} \\
 &\quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\sigma a}{\rho_{fm} U_\infty} (b + B_0)^2 u \\
 &\quad + \lambda T \sin x + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y} \\
 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1 + K_{fm}}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
 &\quad - \frac{\sigma a}{\rho_{fm} U_\infty} (b + B_0)^2 u + \lambda T \sin x + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y} \\
 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{(1 + K_{fm})}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + K_{fm}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
 &\quad - \frac{\sigma a}{\rho_{fm} U_\infty} (b + B_0)^2 u + \lambda T \sin x + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y}
 \end{aligned}$$

Dalam penelitian ini, diberikan asumsi $b = \frac{1}{4} B_0$ maka dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 (b + B_0)^2 &= \left(\frac{1}{4} B_0 + B_0 \right)^2 \\
 (b + B_0)^2 &= \left(\frac{1}{4} B_0 + \frac{4}{4} B_0 \right)^2 \\
 (b + B_0)^2 &= \left(\frac{5}{4} B_0 \right)^2 = \frac{25}{16} B_0^2
 \end{aligned}$$

sehingga dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{(1 + K_{fm})}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + K_{fm}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &\quad - \frac{\sigma a}{\rho_{fm} U_{\infty}} \left(\frac{25}{16} B_0^2 \right) u + \lambda T \sin x + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{(1 + K_{fm})}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + K_{fm}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &\quad - \frac{25}{16} M u + \lambda T \sin x + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y} \end{aligned}$$

Dalam hal ini, $k_{fm} = K_{fm} \cdot \mu_{fm}$; $U_{\infty} a = Re \cdot v_{fm}$; $M = \frac{a \sigma B_0^2}{\rho_{fm} U_{\infty}}$
 $\lambda = \frac{GR}{Re^2}$ dengan $GR = \frac{\beta g (T_w - T_{\infty}) a^3}{v_{fm}^2}$

3. Persamaan Momentum Linier pada Sumbu-y

$$\begin{aligned} \rho_{fm} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu_{fm} + k_{fm}) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ &\quad - \sigma (b + B_0)^2 \bar{v} - \rho_{fm} \beta (\bar{T} - T_{\infty}) g_y \\ &\quad - k_{fm} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} \end{aligned}$$

Perhitungan pada ruas kiri

$$\begin{aligned}
&= \rho_{fm} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) \\
&= \rho_{fm} \left(\frac{\partial \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \right)}{\partial \left(\frac{at}{U_{\infty}} \right)} + uU_{\infty} \frac{\partial \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \right)}{\partial (xa)} + \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \right) \frac{\partial \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \right)}{\partial \left(\frac{ya}{Re^{1/2}} \right)} \right) \\
&= \rho_{fm} \left(\left(\frac{\left(\frac{U_{\infty}}{Re^{1/2}} \right)}{\left(\frac{a}{U_{\infty}} \right)} \right) \frac{\partial v}{\partial t} + uU_{\infty} \frac{\left(\frac{U_{\infty}}{Re^{1/2}} \right)}{a} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{vU_{\infty}}{Re^{1/2}} \right) \frac{\left(\frac{U_{\infty}}{Re^{1/2}} \right)}{\frac{a}{Re^{1/2}}} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
&= \rho_{fm} \left(\left(\frac{U_{\infty}^2}{aRe^{1/2}} \right) \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{uU_{\infty}^2}{aRe^{1/2}} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{vU_{\infty}^2}{aRe^{1/2}} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
&= \rho_{fm} \frac{U_{\infty}^2}{aRe^{1/2}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

Perhitungan pada ruas kanan

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + (\mu_{fm} + k_{fm}) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma(b + B_0)^2 \bar{v} \\
&\quad - \rho_{fm} \beta (\bar{T} - T_\infty) g_y - k_{fm} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} \\
&= -\frac{\partial (p \rho_{fm} U_\infty^2)}{\partial (y a Re^{-1/2})} + (\mu_{fm} + k_{fm}) \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \right)}{\partial (xa)^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \right)}{\partial \left(\frac{ya}{Re^{1/2}} \right)^2} \right) \\
&\quad - \sigma(b + B_0)^2 v U_\infty Re^{1/2} - \rho_{fm} \beta g T (T_w - T_\infty) \cos x \\
&\quad - k_{fm} \frac{\partial \left(\frac{N U_\infty}{a Re^{-1/2}} \right)}{\partial (xa)} \\
&= -\rho_{fm} \frac{U_\infty^2}{a Re^{-1/2}} \frac{\partial p}{\partial y} + (\mu_{fm} + k_{fm}) \frac{U_\infty}{a^2 Re^{-1/2}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
&\quad - \sigma(b + B_0)^2 v U_\infty Re^{1/2} - \rho_{fm} \beta g T (T_w - T_\infty) \cos x \\
&\quad - k_{fm} \frac{U_\infty}{a^2 Re^{-1/2}} \frac{\partial N}{\partial x}
\end{aligned}$$

Dengan menyamakan ruas kiri dan ruas kanan, maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\rho_{fm} \frac{U_\infty^2}{a Re^{1/2}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\rho_{fm} \frac{U_\infty^2}{a Re^{-1/2}} \frac{\partial p}{\partial y} + (\mu_{fm} + k_{fm}) \\
&\quad \frac{U_\infty}{a^2 Re^{-1/2}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
&\quad - \sigma(b + B_0)^2 v U_\infty Re^{1/2} - \rho_{fm} \beta g T \\
&\quad (T_w - T_\infty) \cos x - k_{fm} \frac{U_\infty}{a^2 Re^{1/2}} \frac{\partial N}{\partial x}
\end{aligned}$$

Kemudian kedua ruas dibagi dengan $\rho_{fm} \frac{U_\infty^2}{a Re^{-1/2}}$ menghasilkan persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 Re^{-1} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{(1 + K_{fm})}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
 &\quad - \frac{\sigma a}{\rho_{fm} U_\infty Re} (b + B_0)^2 v - \frac{\lambda T}{Re^{1/2}} \cos x \\
 &\quad - \frac{K_{fm}}{Re} \frac{\partial N}{\partial x} \\
 \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{(1 + K_{fm})}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\sigma a}{\rho_{fm} U_\infty Re} \\
 &\quad (b + B_0)^2 v - \frac{\lambda T}{Re^{1/2}} \cos x + \frac{(1 + K_{fm})}{Re^2} \\
 &\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{K_{fm}}{Re} \frac{\partial N}{\partial x}
 \end{aligned}$$

Diketahui bahwa nilai $(b + B_0)^2 = \frac{25}{16} B_0^2$ sehingga dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{(1 + K_{fm})}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\sigma a}{\rho_{fm} U_\infty Re} \\
 &\quad \frac{25}{16} B_0^2 v - \frac{\lambda T}{Re^{1/2}} \cos x + \frac{(1 + K_{fm})}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
 &\quad - \frac{K_{fm}}{Re} \frac{\partial N}{\partial x} \\
 \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{(1 + K_{fm})}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{25}{16} Re^{-1} M v \\
 &\quad - \frac{\lambda T}{Re^{1/2}} \cos x + \frac{(1 + K_{fm})}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{K_{fm}}{Re} \frac{\partial N}{\partial x}
 \end{aligned}$$

Dalam hal ini, $k_{fm} = K_{fm} \mu_{fm}$; $U_\infty \cdot a = Re \cdot v_{fm}$; $M = \frac{a \sigma B_0^2}{\rho_{fm} U_\infty}$
 $; v_{fm} = \frac{\mu_{fm}}{\rho_{fm}}$

4. Persamaan Momentum Angular

$$\begin{aligned} \rho_{fm} j \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) = & \gamma_{fm} \left(\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ & - k_{fm} \left(2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \end{aligned}$$

Perhitungan pada ruas kiri

$$\begin{aligned} & \rho_{fm} j \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) \\ = & \rho_{fm} j \frac{\partial \left(\frac{NU_{\infty} Re^{1/2}}{a} \right)}{\left(\partial \frac{at}{U_{\infty}} \right)} + u U_{\infty} \frac{\partial \left(\frac{NU_{\infty} Re^{1/2}}{a} \right)}{\partial (xa)} + \left(\frac{v U_{\infty}}{Re^{1/2}} \right) \\ & \frac{\left(\partial \frac{NU_{\infty} Re^{1/2}}{a} \right)}{\left(\partial \frac{ya}{Re^{1/2}} \right)} \\ = & \rho_{fm} j \frac{\left(\frac{U_{\infty} Re^{1/2}}{a} \right)}{\left(\frac{a}{U_{\infty}} \right)} \frac{\partial N}{\partial t} + u U_{\infty} \frac{\left(\frac{U_{\infty} Re^{1/2}}{a} \right)}{a} \frac{\partial N}{\partial x} + \left(\frac{v U_{\infty}}{Re^{1/2}} \right) \\ & \frac{\left(\frac{U_{\infty} Re^{1/2}}{a} \right)}{\left(\frac{a}{Re^{1/2}} \right)} \frac{\partial N}{\partial y} \\ = & \rho_{fm} j \left(\frac{U_{\infty}^2 Re^{1/2}}{a^2} \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{U_{\infty}^2 Re^{1/2}}{a^2} \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{U_{\infty}^2 Re^{1/2}}{a^2} \frac{\partial N}{\partial y} \right) \\ = & \rho_{fm} j \left(\frac{U_{\infty}^2 Re^{1/2}}{a^2} \right) \left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Perhitungan pada ruas kanan

$$\begin{aligned}
 & \gamma_{fm} \left(\frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - k_{fm} \left(2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \\
 &= \left(\mu_{fm} + \frac{K_{fm} \mu_{fm}}{2} \right) j \left(\frac{\partial^2 N U_{\infty} Re^{1/2}}{\partial x^2 a^2 a} + \frac{\partial^2 N U_{\infty} Re^{1/2}}{\partial y^2 a^2 (Re^{1/2}) a} \right) \\
 &\quad - (K_{fm} \mu_{fm}) \left(2 \frac{N U_{\infty} Re^{1/2}}{a} + \frac{\partial u U_{\infty} Re^{1/2}}{\partial (ya)} - \frac{\partial v U_{\infty}}{\partial (xa Re^{1/2})} \right) \\
 &= \left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \mu_{fm} j \left(\frac{U_{\infty} Re^{1/2}}{a^3} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K_{fm} \mu_{fm} \\
 &\quad \left(\frac{U_{\infty}}{a} 2N Re^{1/2} + \frac{U_{\infty}}{a} Re^{1/2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{U_{\infty}}{a} Re^{-1/2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 &= \left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \mu_{fm} j \left(\frac{U_{\infty} Re^{1/2}}{a^3} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K_{fm} \mu_{fm} \\
 &\quad \frac{U_{\infty} Re^{1/2}}{a} \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

Dengan menyamakan ruas kiri dan ruas kanan, maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 & \rho_{fm} j \left(\frac{U_{\infty}^2 Re^{1/2}}{a^2} \right) \left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) = \left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \mu_{fm} j \\
 & \left(\frac{U_{\infty} Re^{1/2}}{a^3} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K_{fm} \mu_{fm} \frac{U_{\infty} Re^{1/2}}{a} \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

Kemudian kedua ruas dibagi dengan $\frac{U_\infty^2 Re^{1/2}}{a^2}$ menghasilkan persamaan sebagai berikut :

$$\rho_{fm} j \left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) = \left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \frac{\mu_{fm} j}{U_\infty a} \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K_{fm} \mu_{fm} \frac{U_\infty}{a} \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Membagi kedua ruas dengan $\rho_{fm} j$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) = \left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K_{fm} \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Dalam hal ini, $\mu_{fm} = \rho_{fm} \cdot v_{fm}$; $U_\infty \cdot a = Re \cdot v_{fm}$; $j = \frac{a \cdot v_{fm}}{U_\infty}$

B. Penurunan Pada Fungsi Alir

Fungsi alir ini dinyatakan sebagai berikut :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

dan

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

1. Persamaan Kontinuitas

$$\begin{aligned}\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial r}{\partial y} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

2. Persamaan Momentum Linier

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + (1 + K_{fm}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{25}{16} M \right) \\ &\quad (u - u_e) + \lambda T \sin x + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y}\end{aligned}$$

Perhitungan pada ruas kiri

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

dengan menggunakan sifat turunan

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} v + u \frac{\partial v}{\partial x}$$

dan dengan

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2
 \end{aligned}$$

Perhitungan pada ruas kanan

$$\begin{aligned}
 &- \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + (1 + K_{fm}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{25}{16} M \right) (u - u_e) + \lambda T \sin x + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y} \\
 &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K_{fm}) \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial y^2} - \left(\frac{25}{16} M \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) \\
 &\quad + \lambda T u_e + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y} \\
 &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K_{fm}) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \left(\frac{25}{16} M \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \lambda T u_e \\
 &\quad + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y}
 \end{aligned}$$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K_{fm}) \\
 &\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \left(\frac{25}{16} M \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \lambda T u_e + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y}
 \end{aligned}$$

3. Persamaan Momentum Angular

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} &= \left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\right) - K_{fm} \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
\frac{\partial N}{\partial t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \frac{\partial N}{\partial x} + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \frac{\partial N}{\partial y} &= \left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\right) \\
&\quad - K_{fm} \left(2N + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial y}\right) \\
\frac{\partial N}{\partial t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \frac{\partial N}{\partial x} + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \frac{\partial N}{\partial y} &= \left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\right) \\
&\quad - K_{fm} \left(2N + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}$$

Lampiran 2. Transformasi Persamaan Similaritas

Dengan menggunakan fungsi alir sebagai berikut :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ dan } v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Persamaan non dimensional yang telah diperoleh dirubah ke persamaan similaritas dengan mentransformasikan persamaan tersebut ke dalam variabel similaritas berikut.

$$\psi = t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t); \eta = \frac{y}{t^{1/2}}; N = t^{-1/2} u_e(x) h(x, \eta, t);$$

$$T = s(x, \eta, t)$$

Persamaan Momentum Linier

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x}$$

$$+ (1 + K_{fm}) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \left(\frac{25}{16} M \right) \left(u_e - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \lambda T u_e + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y}$$

Dengan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{t^{1/2}} \right) = \frac{1}{t^{1/2}} \\
\frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{y}{t^{1/2}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{y}{t^{1/2}} \frac{1}{t} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \\
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t) \right) \\
&= t^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} (u_e(x) r(x) f(x, \eta, t)) \\
&= t^{1/2} r(x) f(x, \eta, t) \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} + u_e(x) t^{1/2} f(x, \eta, t) \frac{\partial r(x)}{\partial x} \\
&\quad + u_e(x) t^{1/2} r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x} \\
\frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} (t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t)) \frac{1}{t^{1/2}} \\
&= t^{1/2} u_e(x) r(x) \frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\
&= u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \frac{1}{t^{1/2}} \\
&= \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3} \frac{1}{t^{1/2}} \\
&= \frac{1}{t} u_e(x) r(x) \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial u_e(x) r(x)}{\partial x} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta} \\
&= \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} r(x) + \frac{\partial r(x)}{\partial x} u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta} \\
&= r(x) \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) \frac{\partial r(x)}{\partial x} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\
&\quad + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta} \right) \\
&= u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \left(-\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right) + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta} \\
&= -\frac{u_e(x) r(x)}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta}
\end{aligned}$$

Dapat ditulis bahwa $u_e(x) = u_e, r(x) = r$ dan $f(x, \eta, t) = f$
Perhitungan pada ruas kiri

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\
&= \frac{1}{r} \left(-\frac{u_e r}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \right) + \frac{1}{r^2} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \\
&\quad \left(r \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} \left(u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\
&\quad - \frac{1}{r^2} \left(t^{1/2} f r \frac{\partial u_e}{\partial x} + t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} + t^{1/2} f u_e \frac{\partial r}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{t^{1/2}} u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\
&= \left(-\frac{1}{r} \frac{u_e r}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \right) + \left(\frac{1}{r^2} u_e r^2 \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r^2} (u_e)^2 r \frac{\partial r}{\partial x} (u_e)^2 r \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} (u_e)^2 r^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} \left(u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right) - \frac{1}{r^2} t^{1/2} f r \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e r \frac{1}{t^{1/2}} \\
&\quad - \frac{1}{r^2} \frac{1}{t^{1/2}} f u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e r \frac{1}{t^{1/2}} - \frac{1}{r^2} t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e r \frac{1}{t^{1/2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{u_e}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{r} (u_e)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\
&\quad + (u_e)^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} (u_e)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e \\
&\quad - f (u_e)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{1}{r} - (u_e)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

Perhitungan pada ruas kanan

$$\begin{aligned}
&u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K_{fm}) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \left(\frac{25}{16} M \right) \left(u_e - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \lambda T u_e \\
&\quad + K_{fm} \frac{\partial N}{\partial y} \\
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K_{fm}) \frac{1}{r} \left(\frac{1}{t} u_e r \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + \left(\frac{25}{16} M \right) \left(u_e - \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\
&\quad + \lambda T u_e + k_{fm} \left(\frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \\
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K_{fm}) \frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + u_e \left(\frac{25}{16} M \right) \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + \lambda T u_e \\
&\quad + k_{fm} \left(\frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

Dengan menyamakan ruas kiri dan ruas kanan, maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
&-\frac{u_e}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{r} (u_e)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\
&\quad + (u_e)^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} (u_e)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e \\
&\quad - f (u_e)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{1}{r} - (u_e)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K_{fm}) \frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \\
&\quad + u_e \left(\frac{25}{16} M \right) \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + \lambda T u_e + k_{fm} \left(\frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

Kemudian kedua ruas dibagi dengan $\frac{u_e}{t}$ menghasilkan persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow -\frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{u_e t}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + u_e t \frac{\partial f}{\partial \eta} \\
&\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{u_e t}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} t - f \frac{u_e t}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e t \\
&\quad \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = t \frac{\partial u_e}{\partial x} (1 + K_{fm}) \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + t \left(\frac{25}{16} M \right) \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\
&\quad + \lambda T t + k_{fm} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \\
&\Longleftrightarrow (1 + K_{fm}) \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + k_{fm} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \lambda T \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(\frac{25}{16} M \right) \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right) \right) + \frac{\partial u_e t}{\partial x} \left(f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right) \\
&\quad = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e t \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\
&\Longleftrightarrow (1 + K_{fm}) \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + k_{fm} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \left(\frac{25}{16} M \right) \\
&\quad \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + \lambda s t + \frac{\partial u_e}{\partial x} t \left(1 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \\
&\quad + u_e t \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

Persamaan Momentum Angular

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} \right) &= \left(1 + \frac{K_{fm}}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \\
&\quad - K_{fm} \left(2N + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}$$

Dengan,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(t^{-1/2} u_e(x) h(x, \eta, t) \right) \\
&= \frac{\partial(t^{-1/2} u_e(x) h(x, \eta, t))}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) h(x, \eta, t) \right) \\
&= t^{-1/2} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta} \left(-\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right) + t^{-1/2} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial t} \\
&\quad - \frac{1}{2t^{3/2}} u_e(x) h(x, \eta, t) \\
&= -\frac{\eta}{2} \frac{1}{t^{3/2}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta} + \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial t} \\
&\quad - \frac{1}{2t^{3/2}} u_e(x) h(x, \eta, t) \\
\frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(t^{-1/2} u_e(x) h(x, \eta, t) \right) \\
&= \frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} h(x, \eta, t) + \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial x} \\
\frac{\partial N}{\partial y} &= \frac{\partial(t^{-1/2} u_e(x) h(x, \eta, t))}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= t^{-1/2} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{1}{t^{1/2}} \\
&= \frac{u_e(x)}{t} \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\
\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_e(x)}{t} \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \frac{u_e(x)}{t} \frac{1}{t^{1/2}} \left(\frac{\partial^2 h(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \\
&= \frac{u_e(x)}{t^{3/2}} \left(\frac{\partial^2 h(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

Dapat ditulis bahwa $h(x, \eta, t) = h$

Perhitungan pada ruas kiri

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} \right) \\
= & -\frac{\eta}{2} \frac{1}{t^{3/2}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta} + \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial t} \\
& - \frac{1}{2t^{3/2}} u_e(x) h(x, \eta, t) + \frac{1}{r} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
& \left(\frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} h(x, \eta, t) + \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial x} \right) \\
& - \frac{1}{r} (t^{1/2} f(x, \eta, t) r(x) \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} + t^{1/2} u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x} \\
& + t^{1/2} u_e(x) f(x, \eta, t) \frac{\partial r(x)}{\partial x}) \left(\frac{u_e(x)}{t} \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial x} \right) \\
= & -\frac{\eta}{2} \frac{1}{t^{3/2}} u_e \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{t^{1/2}} u_e \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{2t^{3/2}} u_e h + \frac{u_e h}{t^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{u_e^2}{t^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} \\
& - \left(t^{1/2} f \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{t^{1/2} u_e f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} + t^{1/2} u_e \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{t} u_e \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \\
= & -\frac{\eta}{2} \frac{1}{t^{3/2}} u_e \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{t^{1/2}} u_e \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{2t^{3/2}} u_e h + \frac{u_e h}{t^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{u_e^2}{t^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} \\
& - \frac{u_e f}{t^{1/2}} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial u_e}{\partial x} - \frac{u_e^2 f}{t^{1/2} r} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{u_e^2}{t^{1/2}} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x}
\end{aligned}$$

Perhitungan pada ruas kanan

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\right) - K_{fm} \left(2N + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) \\
 &= \left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) \left(\frac{u_e(x)}{t^{3/2}} \frac{\partial^2 h(x, \eta, t)}{\partial \eta^2}\right) - K_{fm} \\
 & \quad \left(2 \left(\frac{u_e(x)h(x, \eta, t)}{t^{1/2}}\right) + \frac{1}{r} \frac{u_e(x)r(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2}\right) \\
 &= \left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) \left(\frac{u_e}{t^{3/2}} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}\right) - K_{fm} \left(2 \left(\frac{u_e h}{t^{1/2}} + \frac{u_e}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)\right) \\
 &= \left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) \left(\frac{u_e}{t^{3/2}} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}\right) - K_{fm} \frac{u_e}{t^{1/2}} \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)
 \end{aligned}$$

Dengan menyamakan ruas kiri dan ruas kanan, maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\eta}{2} \frac{1}{t^{3/2}} u_e \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{t^{1/2}} u_e \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{2t^{3/2}} u_e h + \frac{u_e h}{t^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{u_e^2}{t^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} \\
 & - \frac{u_e f}{t^{1/2}} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial u_e}{\partial x} - \frac{u_e^2 f}{t^{1/2} r} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{u_e^2}{t^{1/2}} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} = \left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) \left(\frac{u_e}{t^{3/2}} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}\right) \\
 & - K_{fm} \frac{u_e}{t^{1/2}} \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)
 \end{aligned}$$

Kemudian kedua ruas dibagi dengan $\frac{u_e}{t^{3/2}}$ menghasilkan persamaan

sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow -\frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + t \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{h}{2} + th \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e t \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - t f \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial u_e}{\partial x} \\
&\quad - \frac{u_e t f}{r} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial x} - u_e t \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} = \left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}\right) \\
&\quad - K_{fm} t \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \\
&\Longleftrightarrow \left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{h}{2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \\
&\quad = t \frac{\partial h}{\partial t} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta}\right) + K_{fm} t \\
&\quad \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)
\end{aligned}$$

Lampiran 3. Penurunan Kondisi Awal

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = f'; \frac{\partial h}{\partial \eta} = h'$$

Misalkan $u_e = \sin x = 0$; $\frac{\partial u_e}{\partial x} = \cos x = 1$

Persamaan Momentum Linier

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (1 + K_{fm}) \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u_e}{\partial x} t \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\ + t \left(\frac{25}{16} M \right) \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + k_{fm} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e t \\ \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (1 + K_{fm}) \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \cos x t \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\ + t \left(\frac{25}{16} M \right) \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + k_{fm} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (1 + K_{fm}) f''' + \frac{\eta}{2} f'' + t(1 - (f')^2 + f f'') + t \left(\frac{25}{16} M \right) (1 - f') \\ + K_{fm} h' = t \frac{\partial f'}{\partial h} \end{aligned}$$

Persamaan Momentum Angular

$$\begin{aligned}
 &\Longleftrightarrow \left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{h}{2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \\
 &= t \frac{\partial h}{\partial t} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta}\right) + K_{fm} t \\
 &\quad \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \\
 &\Longleftrightarrow \left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{h}{2} + t \cos x \left(f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \\
 &= t \frac{\partial h}{\partial t} + K_{fm} t \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \\
 &\Longleftrightarrow \left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) h'' + \frac{\eta}{2} h' + \frac{h}{2} + t(fh' - hf') = t \frac{\partial h}{\partial t} + K_{fm} t \\
 &\quad (2h + f'')
 \end{aligned}$$

Maka didapat persamaan untuk menentukan kondisi awal yaitu:

$$\begin{aligned}
 &\Longleftrightarrow (1 + K_{fm})f''' + \frac{\eta}{2}f'' + t(1 - (f')^2 + ff'') + t\left(\frac{25}{16}M\right) \\
 &\quad (1 - f') + K_{fm}h' = t \frac{\partial f'}{\partial h} \\
 &\Longleftrightarrow \left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) h'' + \frac{\eta}{2}h' + \frac{h}{2} + t(fh' - hf') = t \frac{\partial h}{\partial t} \\
 &\quad + K_{fm}t(2h + f'')
 \end{aligned}$$

untuk $t = 0$, diperoleh persamaan berikut :

$$\begin{aligned}
 &\Longleftrightarrow (1 + K_{fm})f''' + \frac{\eta}{2}f'' + K_{fm}h' = 0 \\
 &\Longleftrightarrow \left(1 + \frac{K_{fm}}{2}\right) h'' + \frac{\eta}{2}h' + \frac{h}{2} = 0
 \end{aligned}$$

Persamaan diubah menjadi persamaan orde satu dengan

memisalkan $f'' = s$ maka

$$(1 + K_{fm})s' + \frac{\eta}{2}s + K_{fm}h' = 0$$

dan diketahui $h = -nf''$

$$(1 + K_{fm})s' + \frac{\eta}{2}s - K_{fm}ns' = 0$$

$$(1 + K_{fm}[1 - n])s' + \frac{\eta}{2}s = 0$$

dengan $s' = \frac{ds}{d\eta}$ maka

$$(1 + K_{fm}[1 - n])\frac{ds}{d\eta} + \frac{\eta}{2}s = 0$$

dikali $d\eta$

$$(1 + K_{fm}[1 - n])ds + \frac{\eta}{2}s d\eta = 0$$

dibagi $\frac{1}{s}$

$$\frac{(1 + K_{fm}[1 - n])ds}{s} + \frac{\eta}{2}d\eta = 0$$

kedua ruas diintegrasikan

$$(1 + K_{fm}[1 - n])ins + \frac{\eta^2}{4} = c_1$$

$$(1 + K_{fm}[1 - n])ins = c_1 - \frac{\eta^2}{4}$$

$$ins = \frac{c_1}{(1 + K_{fm}[1 - n])} - \frac{\eta^2}{4(1 + K_{fm}[1 - n])}$$

$$f'' = s = e^{\frac{c_1}{(1 + K_{fm}[1 - n])} - \frac{\eta^2}{4(1 + K_{fm}[1 - n])}}$$

$$f' = \int (e^{\frac{c_1}{(1 + K_{fm}[1 - n])}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1 + K_{fm}[1 - n])}}) d\eta$$

$$f' = e^{\frac{c_1}{(1 + K_{fm}[1 - n])}} \int e^{-\frac{\eta^2}{4(1 + K_{fm}[1 - n])}} d\eta$$

dengan menggunakan rumus integral eksponensial yang mensubstitusikan fungsi error (*erf*) diperoleh :

$$f' = e^{\frac{c_1}{(1 + K_{fm}(1 - n))}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{4 \frac{1}{(1 + K_{fm}(1 - n))}}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{\eta^2}{4(1 + K_{fm}(1 - n))}} \right) \right)$$

$$f' = \sqrt{\pi(1 + K_{fm}(1 - n))} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1 + K_{fm}(1 - n))}} \right) e^{\frac{c_1}{(1 + K_{fm}(1 - n))}}$$

$$+ c_2$$

dengan menggunakan kondisi batas :

$$t \geq 0 : f' = 0, h = -nf' \text{ pada saat } \eta = 0$$

$$f' = 1, \text{ pada saat } \eta \rightarrow \infty$$

selanjutnya ditentukan nilai c_2 dengan mensubstitusikan

kondisi batas $f' = 0$ saat $\eta = 0$

$$f' = \sqrt{\pi(1 + K_{fm}(1 - n))} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1 + K_{fm}(1 - n))}}\right) e^{\frac{c_1}{(1 + K_{fm}(1 - n))}}$$

$$+ c_2$$

$$c_2 = 0$$

saat $f' = 1$ pada saat $\eta \rightarrow \infty$ diperoleh $\frac{c_1}{e^{(1 + K_{fm}(1 - n))}}$, dengan $\operatorname{erf}(\infty) = 1$

$$f' = \sqrt{\pi(1 + K_{fm}(1 - n))} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1 + K_{fm}(1 - n))}}\right) e^{\frac{c_1}{(1 + K_{fm}(1 - n))}}$$

$$1 = \sqrt{\pi(1 + K_{fm}(1 - n))} \operatorname{erf}(\infty) e^{\frac{c_1}{(1 + K_{fm}(1 - n))}}$$

$$1 = \sqrt{\pi(1 + K_{fm}(1 - n))} e^{\frac{c_1}{(1 + K_{fm}(1 - n))}}$$

$$e^{\frac{c_1}{(1 + K_{fm}(1 - n))}} = \frac{1}{\sqrt{\pi(1 + K_{fm}(1 - n))}}$$

dengan mensubstitusikan c_2 dan $e^{\frac{c_1}{(1 + K_{fm}(1 - n))}}$ pada f' maka diperoleh f' sebagai berikut :

$$f' = \sqrt{\pi(1 + K_{fm}(1 - n))} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1 + K_{fm}(1 - n))}}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(1 + K_{fm}(1 - n))}}$$

$$f' = \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1 + K_{fm}(1 - n))}}\right)$$

untuk mendapatkan f maka f' diintegalkan

$$\begin{aligned}
 f &= \int f' d\eta \\
 &= \int \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1+K_{fm}(1-n))}}\right) d\eta \\
 &= \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1+K_{fm}(1-n))}}\right) + 2\sqrt{\frac{(1+K_{fm}(1-n))}{\pi}} \\
 &\quad \left(e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K_{fm}(1-n))}}\right) + c_3
 \end{aligned}$$

untuk memperoleh c_3 maka disubstitusikan kondisi batas $f' = 1$ pada saat $\eta \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 1 &= \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1+K_{fm}(1-n))}}\right) + 2\sqrt{\frac{(1+K_{fm}(1-n))}{\pi}} \\
 &\quad \left(e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K_{fm}(1-n))}}\right) + c_3 \\
 c_3 &= -1
 \end{aligned}$$

dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned}
 f &= \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1+K_{fm}(1-n))}}\right) + 2\sqrt{\frac{(1+K_{fm}(1-n))}{\pi}} \\
 &\quad \left(e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K_{fm}(1-n))}} - 1\right)
 \end{aligned}$$

untuk mendapatkan f'' maka f' diturunkan

$$\begin{aligned}
 f'' &= \frac{d}{d\eta} f' \\
 &= \frac{d}{d\eta} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1+K_{fm}(1-n))}}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K_{fm}(1-n))}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K_{fm}(1-n))}}
 \end{aligned}$$

untuk mendapatkan f''' maka f'' diturunkan

$$\begin{aligned}
 f''' &= \frac{d}{d\eta} f'' \\
 &= \frac{d}{d\eta} \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K_{fm}(1-n))}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K_{fm}(1-n))}} \\
 &= -\frac{\eta}{2(1+K_{fm}(1-n))\sqrt{\pi(1+K_{fm}(1-n))}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K_{fm}(1-n))}}
 \end{aligned}$$

selanjutnya untuk mendapatkan h

$$\begin{aligned}
 h &= -nf'' \\
 &= -n \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K_{fm}(1-n))}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K_{fm}(1-n))}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h' &= -nf''' \\
 &= \frac{n\eta}{2(1+K_{fm}(1-n))\sqrt{\pi(1+K_{fm}(1-n))}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K_{fm}(1-n))}}
 \end{aligned}$$

Lampiran 4. Scrip Matlab 2013a

```
clear all
clc
close all
format long
np = 60; %% banyak partisi eta
nt = 33; %% banyak partisi waktu
nt1 = 21; %% banyak partisi waktu untuk small time
na = 0;
%% Nilai Awal Parameter yang di Variasi
K = 1; %input('input parameter bahan = ');
M = 1; %input('input parameter magnetik = ');
%% Nilai awal partisi
deleta = 0.1; %step size dari eta
delt = 0.05; %step size dari waktu
%% Input Variasi Parameter
Parameter_bahan(1)=0;
Parameter_bahan(2)=1;
Parameter_bahan(3)=2;
Parameter_bahan(4)=3;
Parameter_bahan(5)=4;

magnetik(1)=0;
magnetik(2)=1;
magnetik(3)=2;
magnetik(4)=3;
magnetik(5)=4;
```

```

for i=1:5
    eta(1) = 0;
    etac(1) = 0;
end

%% Penghitungan eta dan eta^{j-1/2}
for j = 2:np
    eta(j) = eta(j-1) + deleta;
    etac(j) = 0.5*(eta(j) + eta(j-1));
end

%% Penghitungan waktu t dan t^{n-1/2}
for n = 1:nt
    if n == 1
        t(1) = 0;
        t1(1) = 0;
    else
        t(n) = t(n-1) + deltt;
        t1(n) = 0.5*(t(n) + t(n-1));
    end
end

for i=1:5
    k=1;
    K = Parameter_bahan(i);
    M = magnetik(i);

    for n = 1:nt

```

```

k = 1;
stop = 1;
while stop > 0.00001
%%initial condition
for j = 1:np
if n == 1
f(j,1,n) = eta(j)*erf(0.5*eta(j)/sqrt(1 + K
      *(1 -na)))+ 2*sqrt((1 + K*(1 - na))
      /pi)*(exp(-0.25*(eta(j)^2)/(1 + K\\
      *(1 - na))) - 1);
u(j,1,n) = erf(0.5*eta(j)/sqrt(1 + K*(1 - na)));
v(j,1,n) = exp(-0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 -na))
      /sqrt(pi*(1 + K*(1 - na))));
h(j,1,n) = -na*exp(-0.25*(eta(j)^2)/(1 + K
      *(1 -na)))/sqrt(pi*(1 + K*(1 - na)));
p(j,1,n) = na*eta(j)*exp(-0.25*(eta(j)^2)/(1 + K
      *(1 -na)))/(sqrt(pi*(1 + K*(1 - na))
      *2*(1 + K*(1 - na))));

else
f(j,1,n) = ff(j,n-1);
u(j,1,n) = uu(j,n-1);
v(j,1,n) = vv(j,n-1);
h(j,1,n) = hh(j,n-1);
p(j,1,n) = pp(j,n-1);
end
end

for j = 2:np

```

```

    if n == 1
cjb(j,n) = 0; cub(j,n) = 0;
cvb(j,n) = 0; chb(j,n) = 0; cpb(j,n) = 0;
cdervb(j,n) = 0; cderpb(j,n) = 0;
cfvb(j,n) = cfb(j,n)*cvb(j,n);
cfpb(j,n) = cfb(j,n)*cpb(j,n);
chub(j,n) = chb(j,n)*cub(j,n);
cuub(j,n) = cub(j,n)^2;

    else
cjb(j,n) = fjb(j,n-1);
cub(j,n) = uub(j,n-1);
cvb(j,n) = vvb(j,n-1);
chb(j,n) = hhb(j,n-1);
cpb(j,n) = ppb(j,n-1);
cuub(j,n) = cub(j,n)^2;
cdervb(j,n) = ddervb(j,n-1);
cderpb(j,n) = dderpb(j,n-1);
cfvb(j,n) = cfb(j,n)*cvb(j,n);
cfpb(j,n) = cfb(j,n)*cpb(j,n);
chub(j,n) = chb(j,n)*cub(j,n);
    end

fb(j,k,n) = 0.5*(f(j,k,n) + f(j-1,k,n));
ub(j,k,n) = 0.5*(u(j,k,n) + u(j-1,k,n));
vb(j,k,n) = 0.5*(v(j,k,n) + v(j-1,k,n));
hb(j,k,n) = 0.5*(h(j,k,n) + h(j-1,k,n));
pb(j,k,n) = 0.5*(p(j,k,n) + p(j-1,k,n));
dervb(j,k,n) = (v(j,k,n) - v(j-1,k,n))/deleta;

```

```

derpb(j,k,n) = (p(j,k,n) - p(j-1,k,n))/deleta;
fvb(j,k,n) = fb(j,k,n)*vb(j,k,n);
fpb(j,k,n) = fb(j,k,n)*pb(j,k,n);
hub(j,k,n) = hb(j,k,n)*ub(j,k,n);
uub(j,k,n) = ub(j,k,n)^2;

if n < nt1 + 1
a1(j,k) = ((1 + K)/deleta) + (0.25*etac(j))
          + (t1(n)*fb(j,k,n));
a2(j,k) = (-(1 + K)/deleta + 0.25*etac(j))
          + (t1(n)*fb(j,k,n));
a3(j,k) = (-(t1(n)*ub(j,k,n))) - 0.5*((25/16)
          *M*t1(n)) - (t1(n)/delt);
a4(j,k) = a3(j,k);
a5(j,k) = (0.5)*t1(n)*vb(j,k,n);
a6(j,k) = a5(j,k);
a7(j,k) = 0.5*K;
a8(j,k) = a7(j,k);
b1(j,k) = ((1 + 0.5*K)/deleta)+(0.25*etac(j))
          +(t1(n)*fb(j,k,n));
b2(j,k) = (-(1 + 0.5*K)/deleta)+(0.25*etac(j))
          +(t1(n)*fb(j,k,n));
b3(j,k) = 0.25-((0.5)*t1(n)*ub(j,k,n))
          -(t1(n)*K)-(t1(n)/delt);
b4(j,k) = b3(j,k);
b5(j,k) = (0.5)*t1(n)*pb(j,k,n);
b6(j,k) = b3(j,k);
b7(j,k) = -(0.5)*t1(n)*hb(j,k,n);
b8(j,k) = b5(j,k);

```

```

b9(j,k) = -0.5*t1(n)*K;
b10(j,k)= b9(j,k);
r1(j,k) = f(j-1,k,n)-f(j,k,n)+deleta*ub(j,k,n);
r2(j,k) = u(j-1,k,n)-u(j,k,n)+deleta*vb(j,k,n);
r3(j,k) = h(j-1,k,n)-h(j,k,n)+deleta*pb(j,k,n);
r4(j,k) = -(1 + K)*dervb(j,k,n)-0.5*etac(j)
          *vb(j,k,n)-t1(n)*(1-uub(j,k,n)+ ...
          fvb(j,k,n)) - K*pb(j,k,n)-(25/16)
          *M*t1(n)*(ub(j,k,n)-1)+2*t1(n)
          *ub(j,k,n)/delt-(1 + K)*cdervb(j,n)- ...
          0.5*etac(j)*cvb(j,n)-t1(n)*(1-cuub(j,n)
          +cfvb(j,n))-K*cpb(j,n)-(25/16)*M*t1(n)
          *(cub(j,n)-1)-2*t1(n)*cub(j,n)/delt;
%r5(j,k)=0;
r5(j,k) = -(1 + 0.5*K)*derpb(j,k,n)-0.5*etac(j)
          *pb(j,k,n)-0.5*hb(j,k,n)-t1(n)
          *(fpb(j,k,n)-hub(j,k,n)) ...
          +t1(n)*K*(2*hb(j,k,n) + vb(j,k,n))
          +2*t1(n)*hb(j,k,n)/delt- (1 + 0.5*K)
          *cderpb(j,n)-0.5*etac(j)*cpb(j,n)
          - 0.5*chb(j,n) ...
          -t1(n)*(cfpb(j,n)-chub(j,n)) + t1(n)
          *K*(2*chb(j,n) + cvb(j,n)) -2*t1(n)
          *chb(j,n)/delt;

else
a1(j,k) = ((1 + K)/deleta) + (fb(j,k,n));
a2(j,k) = (-(1 + K)/deleta) + (fb(j,k,n));
a3(j,k) = (-ub(j,k,n))-(0.5*(25/16)*M)-(1/delt);

```

```

a4(j,k) = a3(j,k);
a5(j,k) = (0.5)*vb(j,k,n);
a6(j,k) = a3(j,k);
a7(j,k) = 0.5*K;
a8(j,k) = a7(j,k);
b1(j,k) = ((1+0.5*K)/deleta)+(fb(j,k,n));
b2(j,k) = (-(1 + 0.5*K)/deleta)+(fb(j,k,n));
b3(j,k) = - ((0.25)*ub(j,k,n))-(K)-(1/delt);
b4(j,k) = b3(j,k);
b5(j,k) = (0.5)*pb(j,k,n);
b6(j,k) = b5(j,k);
b7(j,k) = -(0.5)*hb(j,k,n);
b8(j,k) = b7(j,k);
b9(j,k) = -0.5*K;
b10(j,k) = b9(j,k);
r1(j,k) = f(j-1,k,n)-f(j,k,n)+deleta*ub(j,k,n);
r2(j,k) = u(j-1,k,n)-u(j,k,n)+deleta*vb(j,k,n);
r3(j,k) = h(j-1,k,n)-h(j,k,n)+deleta*pb(j,k,n);
r4(j,k) = -(1 + K)*dervb(j,k,n)-(1-uub(j,k,n)+ ...
        fvb(j,k,n))-K*pb(j,k,n)-(25/16)*M
        *(ub(j,k,n)-1)+2*ub(j,k,n)/delt
        - (1 + K)*cdervb(j,n) - ...
        0.5*etac(j)*cvb(j,n) -(1-cuub(j,n)
        +cfvb(j,n))-K*cpb(j,n)-(25/16)*M
        *(cub(j,n)-1) -2*t1(n)*cub(j,n)/delt;
%r5(j,k)=0;
r5(j,k) = -(1+0.5*K)*derpb(j,k,n)-0.5*etac(j)
        *pb(j,k,n)-0.5*hb(j,k,n) (fpb(j,k,n)
        -hub(j,k,n)) ...

```

```

+K*(2*hb(j,k,n)+vb(j,k,n)) +2*hb(j,k,n)
/delt-(1+0.5*K)*cderpb(j,n)-0.5*etac(j)
*cpb(j,n)-0.5*chb(j,n)...
-(cfpb(j,n) -chub(j,n))+K*(2*chb(j,n)
+ cvb(j,n)) -2*chb(j,n)/delt;
end
end

```

```

%%Matrices
a{2,k} = [0 0 1 0 0; -0.5*deleta 0 0 -0.5
          *deleta 0; 0 -0.5*deleta 0 0 -0.5
          *deleta; a2(2,k) a8(2,k) a5(2,k)
          a1(2,k) a7(2,k); b10(2,k) b2(2,k)
          b5(2,k) b9(2,k) b1(2,k)];
for j = 3:np
a{j,k} = [-0.5*deleta 0 1 0 0; -1 0 0 -0.5
          *deleta 0; 0 -1 0 0 -0.5*deleta;
          a4(j,k) 0 a5(j,k) a1(j,k) a7(j,k);
          b8(j,k) b4(j,k) b5(j,k) b9(j,k)
          b1(j,k)];
b{j,k} = [0 0 -1 0 0; 0 0 0 -0.5*deleta 0;
          0 0 0 0 -0.5*deleta; 0 0 a6(j,k)
          a2(j,k) a8(j,k); 0 0 b6(j,k)
          b10(j,k) b2(j,k)];
end;

for j = 2:np
c{j,k} = [-0.5*deleta 0 0 0 0; 1 0 0 0 0;
          0 1 0 0 0;a3(j,k) 0 0 0 0;b7(j,k)

```

```

        b3(j,k) 0 0 0];

end;

alfa{2,k} = a{2,k};
gamma{2,k} = inv(alfa{2,k})*c{2,k};
for j = 3:np
    alfa{j,k} = a{j,k} - (b{j,k}*gamma{j-1,k});
    gamma{j,k} = inv(alfa{j,k})*c{j,k};
end;
for j = 2:np
    rr{j,k} = [r1(j,k); r2(j,k);r3(j,k);r4(j,k)
               ;r5(j,k)];
end;
ww{2,k} = inv(alfa{2,k})*rr{2,k};
for j = 3:np
    ww{j,k} = inv(alfa{j,k})*(rr{j,k} - (b{j,k}
        *ww{j-1,k}));
end;

%%backward sweep
delu(1,k) = 0;delu(np,k) = 0;
delh(1,k) = 0;delh(np,k) = 0;
delf(1,k) = 0;

dell{np,k} = ww{np,k};
for j = np-1:-1:2
    dell{j,k} = ww{j,k}-(gamma{j,k}*dell{j+1,k});
end;
delv(1,k) = dell{2,k}(1,1);

```

```

delp(1,k) = dell{2,k}(2,1);
delf(2,k) = dell{2,k}(3,1);
delv(2,k) = dell{2,k}(4,1);
delp(2,k) = dell{2,k}(5,1);
delh(1,k) = -na*delv(1,k);

for j = np:-1:3
delu(j-1,k) = dell{j,k}(1,1);
delh(j-1,k) = dell{j,k}(2,1);
delf(j,k) = dell{j,k}(3,1);
delv(j,k) = dell{j,k}(4,1);
delp(j,k) = dell{j,k}(5,1);
end;

%% Newton's Method
for j = 1:np
u(j,k+1,n) = u(j,k,n) + delu(j,k);
h(j,k+1,n) = h(j,k,n) + delh(j,k);
f(j,k+1,n) = f(j,k,n) + delf(j,k);
v(j,k+1,n) = v(j,k,n) + delv(j,k);
p(j,k+1,n) = p(j,k,n) + delp(j,k);
end;

%%check for convergence of the iterations
stop = abs(delv(1,k));
kmax = k;
k = k+1;
end

```

```

%shift profile
for j = 1:np
    ff(j,n) = f(j,k,n);
    uu(j,n) = u(j,k,n);
    vv(j,n) = v(j,k,n);
    hh(j,n) = h(j,k,n);
    pp(j,n) = p(j,k,n);
end

for j = 1:np
    ffb(j,n) = fb(j,kmax,n);
    uub(j,n) = ub(j,kmax,n);
    vvb(j,n) = vb(j,kmax,n);
    hhb(j,n) = hb(j,kmax,n);
    ppb(j,n) = pb(j,kmax,n);
    ddervb(j,n) = dervb(j,kmax,n);
    dderpb(j,n) = derpb(j,kmax,n);
end

if(i==1)
    all=u(:,kmax,nt)
    b11=h(:,kmax,nt)
    figure(1)
    plot(eta,u(:,kmax,nt),'b','Linewidth',2)
    hold on;
    figure(2)
    plot(eta,h(:,kmax,nt),'b','linewidth', 2)
    hold on;

```

```

elseif(i==2)
a12=u(:,kmax,nt)
b12=h(:,kmax,nt)
figure(1)
plot(eta,u(:,kmax,nt),'g','Linewidth',2)
hold on;
figure(2)
plot(eta,h(:,kmax,nt),'g','linewidth', 2)
hold on;
elseif(i==3)
a13=u(:,kmax,nt)
b13=h(:,kmax,nt)
figure(1)
plot(eta,u(:,kmax,nt),'r','Linewidth',2)
hold on;
figure(2)
plot(eta,h(:,kmax,nt),'r','linewidth', 2)
hold on;
elseif (i==4)
a14=u(:,kmax,nt)
b14=h(:,kmax,nt)
figure(1)
plot(eta,u(:,kmax,nt),'c','Linewidth',2)
hold on;
figure(2)
plot(eta,h(:,kmax,nt),'c','linewidth', 2)
hold on;
elseif(i==5)
a15=u(:,kmax,nt)

```

```

b15=h(:,kmax,nt)
figure(1)
plot(eta,u(:,kmax,nt),'y','Linewidth',2)
grid on;
hold on;
figure(2)
plot(eta,h(:,kmax,nt),'y','linewidth', 2)
hold on;
title('Kurva Kecepatan aliran darah dengan
      Variasi Parameter Bahan')
title('Kurva Kecepatan aliran darah  dengan
      Variasi Parameter Magnetik')
legend('K = 0','K = 1','K = 2','K = 3','K = 4')
legend('M = 0','M = 1','M = 2','M = 3','M = 4')
xlabel('\eta')
ylabel(' \partial f / \partial \eta ')
grid on;
figure(2)
hold on;
title('pengaruh parameter magnetik terhadap
      kecepatan mikrokutub')
legend('M = 0','M = 1','M = 2','M = 3','M = 4')
xlabel('\eta')
ylabel('h')
grid on;
end
end

```

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Identitas Diri

Nama Lengkap	= Ajeng Oxa Nisa
Tempat, Tanggal Lahir	= Lampung Tengah, 22 Oktober 2002
Alamat	= Desa Wonorejo, RT 04/RW 01, Kec. Pringapus, Kab. Semarang
HP	= 085832740877
E-mail	= ajengnisa0352@gmail.com

Riwayat Pendidikan

1. MI Darul Hidayah (2008 - 2014)
2. SMP Satya Dharma Sudjana (2014 - 2017)
3. SMK Miftahul Ulum (2017 - 2019)
4. SMK NU Ungaran (2019 - 2020)