PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA SISI PADA $A \otimes x = B \otimes x$ DALAM ALJABAR MAX-PLUS

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika

Oleh : **ZULFA AULIA FADILLA**
NIM : 2008046026

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG

2024

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	Zulfa Aulia Fadilla
NIM	:	2008046026
Jurusan/Program Studi	:	Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA SISI PADA $A \bigotimes x = B \bigotimes x$ DALAM ALJABAR MAX-PLUS

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 27 Juni 2024

Pembuat pernyataan,

Zulfa Aulia Fadilla

NIM : 2008046026

KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul	:	**PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA SISI PADA $A \otimes x = B \otimes x$ DALAM ALJABAR MAX-PLUS**
Penulis	:	Zulfa Aulia Fadilla
NIM	:	2008046026
Jurusan	:	Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 27 Juni 2024

DEWAN PENGUJI

Penguji I,	Penguji II,
Agus Wayan Yulianto M.Sc	**Seftina Diyah Miasary, M.Sc**
NIP : 198907162019031007	NIP : 198709212019032010
Penguji III,	Penguji IV,
Yulia Romadiastri, S.Si., M.Sc	**Dinni Rahma Oktaviani, M.Sc**
NIP : 198107152005012008	NIP : 199410092019032017
Pembimbing I,	Pembimbing II,
Any Muanalifah, M.Si.,Ph.D	**Agus Wayan Yulianto M.Sc**
NIP : 198201132011012009	NIP : 198907162019031007

NOTA DINAS

Semarang, 27 Juni 2024

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA SISI PADA $A \otimes x = B \otimes x$ DALAM ALJABAR MAX-PLUS
Nama	:	Zulfa Aulia Fadilla
NIM	:	2008046026
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,

Any Muanalifah, M.Si.,Ph.D
NIP : 198201132011012009

NOTA DINAS

Semarang, 27 Juni 2024

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA SISI PADA $A \otimes x = B \otimes x$ DALAM ALJABAR MAX-PLUS
Nama	:	Zulfa Aulia Fadilla
NIM	:	2008046026
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing II,

Agus Wayan Yulianto M.Sc
NIP : 198907162019031007

ABSTRAK

Aljabar max-plus merupakan semiring. Aljabar max-plus sendiri adalah himpunan $\mathbb{R}_{max}$. Dimana $\mathbb{R}_{max}$ adalah himpunan $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$. $\mathbb{R}$ itu sendiri merupakan himpunan bilangan real sedangkan ε didefinisikan sebagai $\varepsilon = -\infty$. Terdapat beberapa bentuk sistem persamaan linear dalam aljabar max-plus, salah satunya $A \otimes x = b$. Persamaan linear tersebut dapat diperluas kedalam bentuk Persamaan Linear Dua sisi $A \otimes x = B \otimes x$. Untuk mencari aljabar max-plus tersebut harus membentuk sistem persamaan linear baru berbentuk $C \otimes x = D \otimes y$. Dimana $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}$ untuk I matriks identitas di aljabar max-plus. Sistem persamaan linear ini akan dicari solusi penyelesaiannya dengan menggunakan metode alternating. Sistem persamaan linear $A \otimes x = B \otimes x$ ada yang mempunyai solusi penyelesaiannya dan ada yang belum menemukan solusi penyelesaiannya sampai iterasi ke-10.

Kata kunci : Aljabar Max-plus, Sistem Persamaan Linear Baru, Metode Alternating

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahi rabbil alamin puji syukur kami panjatkan kehadirat Allah SWT atas semua nikmat dan karunianya yang tak terhingga sehingga penulis dapat menyelesaikan Skripsi yang berjudul "**PENYELESAIAM SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA SISI PADA** $A \otimes x = B \otimes x$ **DALAM ALJABAR MAX-PLUS**". Proses penyusunan skripsi ini tidak lepas dari doa, bantuan, bimbingan, motivasi dan peran dari banyak pihak. Sehingga penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. Musahadi, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi.

2. Ibu Any Muanalifah, P.hD., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, dan juga selaku Pembimbing I yang senantiasa memberi bantuan, dorongan, serta masukan dalam proses penyelesaian skripsi.

3. Bapak Agus Wayan Yulianto, M.Sc., selaku pembimbing II yang senantiasa memberi dorongan, saran, masukan dalam proses penyelesaian skripsi.

4. Oki Chandra Saputra, S.Tp, selaku suami penulis yang selalu memberi dukungan penuh kepada penulis, memberi motivasi dan doa agar penulis cepat menyelesaikan skripsi.

5. Florynzo Belvania Kheyra Grisella selaku anak penulis yang menjadi penyemangat penulis untuk menyelesaikan skripsi.

6. Bapak M. Suldin dan Ibu Ainin Mikawati selaku orang tua penulis yang selalu memberikan dukungan, motivasi serta doanya.

7. Bapak Nosy Hendriyanto dan Ibu Mujiyati selaku orang tua penulis yang selalu memberikan dukungan motivasi serta doanya.

8. Novia Sekar Ramadhani, Azahra Faadhilah Ghaisani, dan Abbad Nailun Nabhan selaku keluarga penulis yang selalu memberikan dukungan, motivasi, dan doanya.

9. Ibu Djuminah dan Ibu Rutinem selaku nenek penulis yang selalu memberikan dukungan, motivasi, serta doanya.

10. Bapak Agung Widiarto dan Ibu Astriana megawati selaku keluarga penulis yang selalu memberikan dukungan, motivasi, dan doanya.

11. Firda, Azzah, Mitha, Dita, Sepia, dan Linda selaku teman penulis yang selalu menyemangati, menghibur, mendorong penulis untuk menyelesaikan skripsi.

12. Teman-teman terdekat penulis yang tidak dapat disebutkan keseluruhan yang senantiasa memberikan dukungan dari jauh kepada penulis.

13. Tidak lupa penulis berterimakasih untuk dirinya sendiri yang sudah bertahan dan berjuang sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

Penulis juga mengucapkan terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu serta memberikan semangat dan doa sehingga skripsi ini dpat diselesaikan. Penulis berharap skrisi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Atas segala kekurangan dan kelemahan dalam skripsi ini penulis memohon maaf yang sebesar-besarnya, oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun agar skripsi ini bisa menjadi lebih baik.

Semarang, 27 Juni 2024
Penulis,

Zulfa Aulia Fadilla
NIM : 2008046026

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika adalah sebuah disiplin ilmu yang mempelajari pola abstrak, struktur, ruang dan perubahan. Matematika mencakup berbagai bidang dan topik, termasuk aljabar, geometri, analisis, statistik, teori bilangan, logika, teori grafik, dan banyak lagi. Masing-masing bidang tersebut memiliki fokus dan pendekatan yang berbeda untuk mempelajari struktur dan konsep matematika (Puspitasari, N. 2016).

Aljabar adalah cabang matematika yang mempelajari struktur dan operasi pada objek matematika, seperti angka, variabel, fungsi, dan himpunan. Tujuan utama aljabar adalah untuk mempelajari pola dan hubungan antara objek-objek tersebut melalui operasi matematika yang ditentukan (Kamaruddin, K., Panggabean, E. M., & Irvan, I. 2023).

Ada banyak bentuk dari aljabar di antaranya adalah Aljabar Linear dan Aljabar Abstrak. Aljabar abstrak atau yang biasa disebut sebagai struktur aljabar mengkaji tentang himpunan tak kosong dengan operasi biner dan sifat-sifatnya (Kamaruddin, K., Panggabean, E. M., & Irvan, I. 2023).

Salah satu bentuk struktur aljabar baru yang muncul adalah semiring dan salah satu contoh dari semiring adalah aljabar max-plus. Aljabar max-plus merupakan semiring dari himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan operasi biner $\bigoplus dan \bigotimes$ yang masing-masing di definisikan sebagai maksimum dan penjumlahan.

Aljabar max-plus analog dengan kajian pada aljabar liniear sehingga banyak sekali penelitian penelitian pada aljabar max-plus yang kajianya analog dengan aljabar linear seperti, basis dalam aljabar max-plus (Aminu. Butkovic. 2008), masalah dekomposisi QR matriks (De Schutter, B., & De Moor, B. 2002) dan sistem persamaan linear dua sisi $A \otimes x = B \otimes y$ (Cunninghame, G. & Butkovic, P. 2003).

Pada penelitian ini, penulis ingin mengkaji lebih dalam lagi tentang penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi yang ditulis oleh Cunningham dan Butkovic (2003) dalam papernya yang berjudul "The Equation $Ax = By$ over $(\max, +)$". Karena tidak semua matriks dalam aljabar max-plus mempunyai invers sehingga mengakibatkan penyelesaian sistem persamaan linear ini berbeda dengan sistem persamaan linear pada aljabar linear klasik. Cunningham dan Butkovic memperkenalkan dua sistem persamaan linear dua sisi yaitu $A \otimes x = B \otimes y$ dan $A \otimes x = B \otimes x$. Sistem persamaan linear ini diselesaikan dengan menggunakan algoritma alternating. Algoritma alternating ini yang nantinya akan digunakan untuk mencari solusi penyelesaian dari sistem persamaan dua sisi. Metode alternating ini menggunakan metode iterasi.

Berdasarkan latar belakang ini maka penulis tertarik untuk mengkaji ulang tentang sistem persamaan linear dua sisi $A \otimes x = B \otimes y$ dalam aljabar max-plus.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka rumusan masalah yang diambil adalah bagaimana mencari penyelesaian sistem persamaan dua sisi pada $A \otimes x = B \otimes x$ dalam aljabar max-plus?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan untuk penulisan ini adalah untuk mencari penyelesaian sistem persamaan dua sisi pada $A \otimes x = B \otimes x$ dalam aljabar max-plus.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat untuk kemudian hari mengenai penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi dalam aljabar max-plus. Serta diharapkan dengan aljabar max-plus ini memberikan kemudahan untuk mendapatkan penyelesaian dari suatu sistem penyelesaian dua sisi, dalam hal ini menggunakan metode alternating.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

2.1 Aljabar Max-Plus

Sebelum dijelaskan tentang definisi aljabar max-plus maka akan diberikan terlebih dahulu definisi semiring sebagai berikut:

Definisi 2.1.1 *Semiring (Majid, 2012)*
Misal R adalah himpunan tak kosong dilengkapi dengan dua operasi biner $+$ *dan* $\times$ *dinotasikan dengan* $(R, +, \times)$*, yang memenuhi aksioma:*

1. $(R, +)$ *merupakan monoid komutatif, yaitu* $\forall a, b, c \in R$*:*
   (a) *Asosiatif* $a + (b + c) = (a + b) + c$
   (b) *Mempunyai elemen identitas*
   Ada $0 \in R$ *sehingga* $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in R$
   (c) *Komutatif*
   $a + b = b + a$
2. $(R, \times)$ *merupakan monoid, yaitu* $\forall a, b, c \in R$*:*
   (a) *Asosiatif*
   $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
   (b) *Mempunyai elemen identitas*
   Ada $1 \in R$ *sehingga* $a \times 1 = 1 \times a = a, \forall a \in R$
3. $(R, +, \times)$ *distributif, yaitu* $\forall a, b, c \in R$*:*

$$
\begin{aligned}
a \times (b + c) &= (a \times b) + (a \times c) \\
(a + b) \times c &= (a \times c) + (b \times c)
\end{aligned}
$$

4. *Elemen penyerap, yaitu* $\forall a \in R$*:*
   Ada $0 \in R$ *sehingga* $0 \times a = a \times 0 = 0, a \in R$*.*

Semiring (Majid, 2012)

Contoh 2.1.1 *Diberikan himpunan* $\mathbb{R}_{max}$ *dengan operasi* $\oplus$ *dan* $\otimes$*. Dimana* $\mathbb{R}_{max}$ *adalah himpunan* $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$*.* $\mathbb{R}$ *itu sendiri merupakan himpunan bilangan real.* ε *didefinisikan sebagai* $\varepsilon = -\infty$*, sedangkan operasinya menyatakan maksimal.* $(\mathbb{R}_{max}, \oplus, \otimes)$ *merupakan semiring dengan elemen netral* ε *dan elemen satuan adalah* 0*, karena* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_{max}$ *berlaku:*

1. *(*$\mathbb{R}_{max}, \oplus$*) merupakan monoid komutatif, yaitu* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_{max}$ *:*

   (a) *Asosiatif*
   $(a \oplus b) \oplus c = max(max(a, b), c) = max(a, max(b, c)) = a \oplus (b \oplus c)$

   (b) *Mempunyai elemen identitas*
   $a \oplus \varepsilon = max(a, -\infty) = a, \forall a \in \mathbb{R}_{max}$

   (c) *Komutatif*
   $a \oplus b = max(a, b) = max(b, a) = b \oplus a$

2. *(*$R, \otimes$*) merupakan monoid, yaitu* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_{max}$*:*

   (a) *Asosiatif*
   $(a \otimes b) \otimes c = (a + b) + c = a + (b + c) = a \otimes (b \otimes c)$

   (b) *Mempunyai elemen identitas*
   $a \otimes e = a + 0 = 0 + a = e \otimes a, \forall a \in \mathbb{R}_{max}$

3. $(R, \oplus, \otimes)$ *distributif, yaitu* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_{max}$*:*

$$\begin{aligned} a \otimes (b \oplus c) &= (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \\ (a \oplus b) \otimes c &= (a \otimes c) \oplus (b \otimes c) \end{aligned}$$

4. *Elemen netral bersifat menyerap terhadap operasi* $\otimes$*, yaitu* $\forall a \in \mathbb{R}_{max}$*:*
   $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$

Definisi 2.1.2 *Aljabar Max-plus (Farlow, K.G. 2009)*
Misal $\mathbb{R}$ *adalah himpunan bilangan real ditambah dengan elemen* $-\infty$ *(*$\mathbb{R} \cup \{-\infty\})$ *dilengkapi dengan dua operasi Biner* $\oplus$ *dan* $\otimes$ *yang didefinisikan sebagai berikut:*
$a \oplus b = max(a, b)$
$a \otimes b = a + b$
$\forall a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
Misalkan :

$$2 \oplus 3 = max(2, 3) = 3$$

$$2 \otimes 3 = 2 + 3 = 5$$

2.2 Operasi Matriks dalam Aljabar Max-plus

Definisi 2.2.1 *Penjumlahan Matriks (Farlow, K.G. 2009)*

Diberikan dua buah matriks $A, B \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ *untuk penjumlahan matriks yang dinotasikan dengan* $A \oplus B$ *di definisikan sebagai :*

$$\begin{aligned}[A \oplus B]_{ij} &= a_{ij} \oplus b_{ij} \\ &= max(a_{ij}, b_{ij})\end{aligned}$$

Untuk $i \in 1, 2, 3, ..., m$ ***dan*** $j \in 1, 2, 3, ..., n$.

Contoh 2.2.1 *Diberikan dua buah matriks* $A \in \mathbb{R}_{max}^{2\times 2}$ *,* $B \in \mathbb{R}_{max}^{2\times 2}$.
misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *dan* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} max(3,1) & max(4,3) \\ max(1,2) & max(2,4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Definisi 2.2.2 *Perkalian Matriks (Rudhito, M. A. 2020)*

Diberikan dua buah matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{m\times p}$ *,* $B \in \mathbb{R}_{max}^{p\times n}$ ***untuk perkalian matriks yang dinotasikan dengan*** $A \otimes B$ ***yang di definisikan sebagai berikut :***

$$[A \otimes B]_{ij} = \bigoplus_{l=1}^{n} (a_{il} \otimes b_{lj})$$

Untuk $i \in 1, 2, 3, ..., m$ ***dan*** $j \in 1, 2, 3, ..., n$.

Contoh 2.2.2 *Diberikan dua buah matriks* $A \in \mathbb{R}_{max}^{2\times 2}$ *,* $B \in \mathbb{R}_{max}^{2\times 2}$.
misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *dan* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
A \otimes B &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} max((3+1),(4+3)) & max((3+2),(4+4)) \\ max((1+1),(2+3)) & max((1+2),(2+4)) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} max(4,7) & max(5,8) \\ max(2,5) & max(3,6) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Definisi 2.2.3 *Transpos matriks aljabar max-plus (Farlow, K.G. 2009)*
Transpos dari matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{m\times n}$ *dinotasikan dengan* A^T *dan didefinisikan sebagai:*

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$$

Untuk $i \in 1, 2, 3, ..., m$ *dan* $j \in 1, 2, 3, ..., n$.

Contoh 2.2.3 *Diberikan matriks* $A \in \mathbb{R}_{max}^{2\times 2}$
misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
maka transpos matriks $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Definisi 2.2.4 *Matriks Identitas (Farlow, K.G. 2009)*
Diberikan Matriks identitas Aljabar Max-plus $n \times n$, I, *didefinisikan sebagai berikut:*

$$[I]_{ij} = \begin{cases} e = 0 & \textit{jika } i = j \\ \varepsilon & \textit{jika } i \neq j \end{cases}$$

Dengan kata lain, semua elemen pada diagonal utamanya sama dengan 0, sedangkan elemen non diagonal utama bernilai $\varepsilon = -\infty$*. Seperti,*

$$I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.5 *Perpangkatan Matriks (Farlow, K.G. 2009)*
Diberikan matriks persegi dan k *bilangan bulat positif, pangkat* $ke-k$ *pada* A *dinotasikan* $A^{\otimes k}$ *yang didefinisikan :*

$$A^{\otimes k} = \underbrace{A \otimes A \otimes A \otimes A \otimes ... \otimes A}_{\textit{sebanyak k}}$$

untuk $k = 0, A^{\otimes 0} = I$.

Definisi 2.2.6 *Perkalian Matriks dengan Skalar (Farlow, K.G. 2009)*
Diberikan sebarang matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{m\times n}$ *dan sebarang skalar* $\alpha \in \mathbb{R}_{max}$*, perkalian* $\alpha \otimes A$ *didefinisikan sebagai:*

$$[\alpha \otimes A]_{ij} = \alpha \otimes [A]_{ij}$$

dengan $i \in 1, 2, 3, ..., m$ *dan* $j \in 1, 2, 3, ..., n$

Contoh 2.2.4 *Diberikan sebarang matriks* $A \in \mathbb{R}_{max}^{2\times 2}$ *dan sebarang skalar* $\alpha \in \mathbb{R}_{max}$
misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *dan* $\alpha = 2$

$$[\alpha \otimes A]_{1,1} = \alpha \otimes A_{1,1} = 2 \otimes 3 = 2 + 3 = 5$$

$$[\alpha \otimes A]_{1,2} = \alpha \otimes A_{1,2} = 2 \otimes 4 = 2 + 4 = 6$$

$$[\alpha \otimes A]_{2,1} = \alpha \otimes A_{2,1} = 2 \otimes 1 = 2 + 1 = 3$$

$$[\alpha \otimes A]_{2,2} = \alpha \otimes A_{2,2} = 2 \otimes 2 = 2 + 2 = 4$$

Jadi hasil dari $\alpha \otimes A$ adalah

$$\alpha \otimes A = \begin{bmatrix} [\alpha \otimes A]_{1,1} & [\alpha \otimes A]_{1,2} \\ [\alpha \otimes A]_{2,1} & [\alpha \otimes A]_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2.3 Sistem Persamaan Linear dalam Aljabar Max-Plus

Sistem persamaan linear dalam aljabar max-plus bentuk umumnya adalah $A \otimes x = b$ dimana $A \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}_{max}^{n}$ $b \in \mathbb{R}_{max}^{m}$. Sistem persamaan linear ini tidak selalu mempunyai penyelesaian. Karena belum ada penelitian yang menjelaskan bahwa sistem persamaan linear ini selalu mempunyai penyelesaian.

Contoh 2.3.1 *Diberikan suatu persamaan matriks $A \otimes x = b$ yang akan dicari penyelesaiannya. Matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ dan $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$*

selesaikan $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$

sistem persamaan tersebut ekuivalen dengan

$$\begin{cases} 2 \otimes x_1 \oplus 3 \otimes x_2 & = 6 \\ 4 \otimes x_1 \oplus 5 \otimes x_2 & = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \otimes (2 \otimes x_1 \oplus 3 \otimes x_2) & = -2 \otimes 6 \\ -4 \otimes (4 \otimes x_1 \oplus 5 \otimes x_2) & = -4 \otimes 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \oplus 1 \otimes x_2 & = & 4 \\ x_1 \oplus 1 \otimes x_2 & = & 3 \end{cases}$$

Disini kita dapat lihat bahwa $4 \neq 3$ sehingga sistem persamaan linear ini tidak mempunnyai penyelesaian.

Akan tetapi sistem persamaan linear dalam aljabar max-plus $A \otimes x = b$ mempunyai sub penyelesaian terbesar seperti pada definisi berikut ini.

Definisi 2.3.1 *(Rudhito, M. A. 2020)*
Misalkan $A \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ dan $b \in \mathbb{R}_{max}^{m}$. Vektor x' disebut sub penyelesaian dari sistem persamaan linear $A \otimes x = b$ jika x' memenuhi $A \otimes x' \leq b$.

Definisi 2.3.2 *(Rudhito, M. A. 2020)*
Sub penyelesaian x'' dari sistem persamaan linear $A \otimes x = b$ disebut sebagai subpenyelesaian terbesar untuk setiap x' merupakan subpenyelesaian dari persamaan $A \otimes x = b$ berlaku $x' \leq x''$.

Jaminan bahwa $a \otimes x = b$ mempunyai sub penyelesaian terbesar akan di jelaskan pada teorema berikut ini.

Teorema 2.3.1 *(Cunninghame, G. & Butkovic, P. 2003)*
Misalkan $A \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ dengan unsur-unsur setiap kolomnya tak semuanya sama dengan $-\infty$ dan $b \in \mathbb{R}_{max}^{m}$. Subpenyelesaian terbesar dari sistem persamaan linear $A \otimes x = b$ ada dan merupakan solusi penyelesaian jika x'' memenuhi

$$-x'' = \max_i \{-b_i, A_{ij}\}$$

$-x'' = A^T \otimes (-b)$

atau

$x'' = -(A^T \otimes -b)$.

bukti :

$$\begin{aligned}\{A \otimes x'' \leq b\} \quad &\leftrightarrow \{\bigoplus_j A_{ij} \otimes x''_j \leq b_i, \forall i\}\\ &\leftrightarrow \{x''j \leq b_i - Aij \forall i, j\}\\ &\leftrightarrow \{x''j \leq \min_i (b_i - Aij), \forall j\}\\ &\leftrightarrow \{-x'' \geq \max_i (-b_i + A_{ij}), \forall j\}\end{aligned}$$

Sebaliknya, dapat diperiksa dengan cara yang sama bahwa vektor x *didefinisikan oleh* $-x = \max_i (-b_i + A_{ij})$*, adalah subpenyelesaian. Oleh karena itu,* x'' *adalah yang terbesar.*

Contoh 2.3.2 *Misalkan* $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}_{max}$ *dan* $b \in \mathbb{R}^{3}_{max}$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -\infty \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$ *dan* $b = \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$.

Tentukan sub penyelesaian terbesar sistem persamaan linear $A \otimes x = b$

solusi :

$$\begin{aligned} x'' &= -(A^T \otimes -b)\\ &= -\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -\infty & 12 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -13 \\ -9 \\ -12 \end{bmatrix}\right)\\ &= -\begin{bmatrix} -10 \oplus -10 \oplus -10 \\ -13 \oplus -\infty \oplus 0 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

substitusi : $x_1 = 10$ *dan* $x_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -\infty \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \oplus 0 \\ 9 \oplus -\infty \\ 12 \oplus 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Diperoleh subpenyelesaian terbesar dari sistem persamaan diatas adalah $\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Karena* $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -\infty \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$, *maka* $\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$ *merupakan solusi penyelesaian sistem persamaan tersebut.*

2.4 Algoritma Alternating

Berikut ini akan dibahas mengenai salah satu metode untuk mencari solusi penyelesaian dari sistem persamaan dua sisi yang berbentuk $A \otimes x = B \otimes y$ dimana $A, B \in \mathbb{R}_{max}^{m\times n}$ dan $x, y \in \mathbb{R}_{max}^{n}$. . Metode ini dikenalkan oleh Cunninghame dan Butkovic pada tahun 2003. Metode tersebut dinamakan metode Alternating. Metode Alternating ini menggunakan metode iterasi, yaitu sebagai berikut:
Input : matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ $B \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$, vektor $x(0)$.
Output : Solusi (x, y) dari persamaan $A \otimes x = B \otimes y$
langkah - langkah metode alternating :

1. Ambil sebarang vektor berhingga x

2. Tetapkan $x = x_r$ dimana $r \in 0, 1, 2, ...$ sebagai iterasi

3. Hitung $a_r = A \otimes x_r$
4. Hitung $y_r = -(B^T \otimes (-a_r))$, dimana a_r merupakan hasil dari $A \otimes x_r$
5. Hitung $b_r = B \otimes y_r$
6. Hitung $x_r = -(A^T \otimes (-b_r))$, dimana b merupakan hasil dari $B \otimes y_r$
7. Tentukan x_{r+1}
8. Ulangi langkah-langkah tersebut hingga mememenuhi $A \otimes x_{r+1} = B \otimes y_r$
9. Jika sudah mememenuhi persamaan $A \otimes x_{r+1} = B \otimes y_r$ maka persamaan $A \otimes x = B \otimes y$ mempunyai solusi penyelesaian, sebaliknya jika tidak memenuhi persamaan $A \otimes x = B \otimes y$ maka tidak mempunyai solusi penyelesaian.

BAB III

Sistem Persamaan Linear $A \otimes x = B \otimes x$

Sebelum memasuki pembahasan penyeleseaian sistem persamaan linear dua sisi pada $A \otimes x = B \otimes x$ dalam aljabar max-plus dalam bab ini, Pertama diberikan penjelasan tentang persamaan $A \otimes x = b$ yang mana solusi pada persamaan ini akan digunakan pada persamaan $A \otimes x = B \otimes x$ dimana $A \in \mathbb{R}_{max}^{m\times n}, x \in \mathbb{R}_{max}^{n}$ $b \in \mathbb{R}_{max}^{m}$.

3.1 Solusi sistem persamaan dua sisi $A \otimes x = B \otimes x$

Misal diberikan sistem persamaan linear dua sisi homogen sebagai berikut (Cunninghame, G. & Butkovic, P. 2003):

$$Ax = Bx. \tag{3.1.1}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (3.1.1) akan dimisalkan $Ax = y$ dan $Bx = y$. kemudian dibentuk sistem persamaan linear baru yaitu:

$$\begin{bmatrix} A \otimes x \\ B \otimes x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix} \tag{3.1.2}$$

agar persamaan di atas setara maka selanjutnya persamaan (3.1.2) dapat dituliskan menjadi persamaan berikut :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \otimes x = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \otimes y \tag{3.1.3}$$

Dimana I adalah matriks identitas dari aljabar max-plus, dengan elemen diagonal nol dan elemen luar diagonal sama dengan $-\infty$, Kita bisa lihat pada persamaan (3.1.3) membentuk sistem persamaan dua sisi $C \otimes x = D \otimes y$, dimana $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}$ sehingga dapat diselesaikan dengan menggunakan algoritma alternating.Sebagai berikut:

Input : matriks $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ $D = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$, vektor $x(0)$.

Output : Solusi (x, y) dari persamaan $A \otimes x = B \otimes x$

langkah - langkah metode alternating :

1. Ambil sebarang vektor berhingga x
2. Tetapkan $x = x_r$ dimana $r \in 0, 1, 2, ...$ sebagai iterasi
3. Hitung $a_r = C \otimes x_r$
4. Hitung $y_r = -(D^T \otimes (-a_r))$, dimana a_r merupakan hasil dari $C \otimes x_r$
5. Hitung $b_r = D \otimes y_r$
6. Hitung $x_r = -(C^T \otimes (-b_r))$, dimana b merupakan hasil dari $D \otimes y_r$
7. Tentukan x_{r+1}
8. Ulangi langkah-langkah tersebut hingga memenuhi $C \otimes x_{r+1} = D \otimes y_r$
9. Jika sudah mememenuhi persamaan $C \otimes x_{r+1} = D \otimes y_r$ maka persamaan $A \otimes x = B \otimes x$ mempunyai solusi penyelesaian, sebaliknya jika tidak memenuhi persamaan $A \otimes x = B \otimes x$ maka tidak mempunyai solusi penyelesaian.

Contoh 3.1.1 *Diberikan suatu persamaan matriks* $C \otimes x = D \otimes y$ *yang akan di dapatkan penyelesaiannya. Matriks* $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *dan* $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Tentukan solusi dari $A \otimes x = B \otimes x$ *dimana* $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ *dan* $D = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}$

$$C \otimes x = D \otimes y$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes x = \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes y$$

Ambil sebarang vektor x_0 = $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

hitung iterasi 0

$$\begin{aligned} a_0 &= C \otimes x_0 \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

hitung

$$
\begin{aligned}
y_0 &= -(D^T \otimes (-a_0)) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

hitung

$$
\begin{aligned}
b_0 &= D \otimes y_0 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Hitung iterasi 1

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -(C^T \otimes (-b_0)) \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

hitung

$$
\begin{aligned}
a_1 &= C \otimes x_1 \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Hitung

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -(D^T \otimes (-a_1)) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

hitung

$$
\begin{aligned}
b_1 &= D \otimes y_1 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Hitung iterasi 2

$$
\begin{aligned}
x_2 &= -(C^T \otimes (-b_1)) \\
&= -\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

hitung

$$
\begin{aligned}
a_2 &= C \otimes x_2 \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Dapat dilihat bahwa $C \otimes x_2 = D \otimes y_1$. *Artinya pasangan* (x, y) *yang memenuhi persamaan* $C \otimes x = D \otimes y$ *adalah* $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ *dan* $y_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Jadi, persamaan $C \otimes x = D \otimes y$ mempunyai solusi penyelesaian. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa nilai x_2 dari persamaan $C \otimes x = D \otimes y$ dapat memenuhi nilai x dari persamaan

$A \otimes x = B \otimes x$. Dimana $x = x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Maka langkah selanjutnya adalah memasukkan nilai $x = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ ke dalam persamaan $A \otimes x = B \otimes x$.

$A \otimes x = B \otimes x$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa $A \otimes x = B \otimes x$, artinya bahwa nilai x memenuhi penyelesaian dalam persamaan dua sisi $A \otimes x = B \otimes x$

Akan tetapi tidak semua sistem persamaan linear $A \otimes x = B \otimes x$ mempunyai penyelesaian. Berikut ini merupakan contoh sistem persamaan linear $A \otimes x = B \otimes x$ yang tidak mempunyai penyelesaian:

Contoh 3.1.2 *Diberikan suatu persamaan matriks $A \otimes x = B \otimes x$ yang akan dicari penyelesaiannya. Matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ Tentukan solusi dari $A \otimes x = B \otimes x$ dimana, $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}$*

$C \otimes x = D \otimes y$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes x = \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes y$$

Ambil sembarang vektor x_0 = $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

hitung iterasi 0

$$\begin{aligned} a_0 &= C \otimes x_0 \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hitung

$$\begin{aligned} y_0 &= -(D^T \otimes (-a_0)) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

hitung

$$
\begin{aligned}
b_0 &= D \otimes y_0 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Hitung iterasi 1

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -(C^T \otimes (-b_0)) \\
&= -\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

hitung

$$
\begin{aligned}
a_1 &= C \otimes x_1 \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Hitung

$$\begin{aligned} y_1 &= -(D^T \otimes (-a_1)) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} -5 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

hitung

$$\begin{aligned} b_1 &= D \otimes y_1 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hitung iterasi 2

$$\begin{aligned} x_2 &= -(C^T \otimes (-b_1)) \\ &= -\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

hitung

$$
\begin{aligned}
a_2 &= C \otimes x_2 \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Hitung

$$
\begin{aligned}
y_2 &= -(D^T \otimes (-a_2)) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix} \\
&= - \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

hitung

$$
\begin{aligned}
b_2 &= D \otimes y_2 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Hitung iterasi 3

$$
\begin{aligned}
x_3 &= -(C^T \otimes (-b_2)) \\
&= -\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} -0 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

hitung

$$
\begin{aligned}
a_3 &= C \otimes x_3 \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Hitung

$$
\begin{aligned}
y_3 &= -(D^T \otimes (-a_3)) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

hitung

$$\begin{aligned} b_3 &= D \otimes y_3 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hitung iterasi 4

$$\begin{aligned} x_4 &= -(C^T \otimes (-b_3)) \\ &= -\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

hitung

$$\begin{aligned} a_4 &= C \otimes x_4 \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hitung

$$
\begin{aligned}
y_4 &= -(D^T \otimes (-a_4)) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

hitung

$$
\begin{aligned}
b_4 &= D \otimes y_4 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Hitung iterasi 5

$$
\begin{aligned}
x_5 &= -(C^T \otimes (-b_4)) \\
&= -\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_5 &= C \otimes x_5 \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Hitung

$$
\begin{aligned}
y_5 &= -(D^T \otimes (-a_5)) \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

hitung

$$
\begin{aligned}
b_5 &= D \otimes Y_5 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \infty \\ -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Hitung iterasi 6

$$\begin{aligned} x_6 &= -(C^T \otimes (-b_5)) \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

hitung

$$\begin{aligned} a_6 &= C \otimes x_6 \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hitung

$$\begin{aligned} y_6 &= -(D^T \otimes (-a_6)) \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

hitung

$$b_6 = D \otimes y_6$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Hitung iterasi 7

$$x_7 = -(C^T \otimes (-b_6))$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

hitung

$$a_7 = C \otimes x_7$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Hitung

$$
\begin{aligned}
y_7 &= -(D^T \otimes (-a_7)) \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

hitung

$$
\begin{aligned}
b_7 &= D \otimes y_7 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Hitung iterasi 8

$$
\begin{aligned}
x_8 &= -(C^T \otimes (-b_7)) \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

hitung

$$\begin{aligned} a_8 &= C \otimes x_8 \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hitung

$$\begin{aligned} y_8 &= -(D^T \otimes (-a_8)) \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

hitung

$$\begin{aligned} b_8 &= D \otimes y_8 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hitung iterasi 9

$$\begin{aligned} x_9 &= -(C^T \otimes (-b_8)) \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

hitung

$$\begin{aligned} a_9 &= C \otimes x_9 \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hitung

$$\begin{aligned} y_9 &= -(D^T \otimes (-a_9)) \\ &= - \begin{bmatrix} 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

hitung

$$\begin{aligned} b_9 &= D \otimes y_9 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hitung iterasi 10

$$\begin{aligned} x_{10} &= -(C^T \otimes (-b_9)) \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -7 \\ -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

hitung

$$\begin{aligned} a_{10} &= C \otimes x_{10} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -7 \\ -6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $C \otimes x \neq D \otimes y$ sampai pada iterasi ke-10 belum ditemukan solusi penyelesaian. Artinya pasangan (x, y) yang memenuhi persamaan $C \otimes x = D \otimes y$ belum ditemukan solusi penyelesaiannya. Perhitungan lebih lanjut dapat dilakukan untuk mengetahui apakah $C \otimes x = D \otimes y$ memiliki solusi atau tidak.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Setelah mengkaji mengenai solusi persamaan dua sisi $A \otimes x = B \otimes x$ dalam aljabar max-plus dapat disimpulkan:
Solusi sistem persamaan linear dua sisi $A \otimes x = B \otimes x$ dapat dicari dengan membentuk Sistem Persamaan Linear baru dimana $C \otimes x$ dan $D \otimes y$ dimana $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}$ untuk I matriks identitas di aljabar max-plus. Selanjutnya Vektor x dicari dengan menggunakan metode alternating dari persamaan $C \otimes x = D \otimes y$. Sistem persamaan linear $A \otimes x = B \otimes x$ ada yang mempunyai solusi penyelesaiannya dan ada yang belum menemukan solusi penyelesaiannya sampai iterasi ke-10.

4.2 Saran

Berikut ini adalah saran untuk penelitian selanjutnya:

1. Bisa dilakukan penelitian lanjutan untuk mencari syarat perlu dan syarat cukup agar sistem persamaan linear $A \otimes x = B \otimes y$ mempunyai solusi.
2. Membuat teorema tentang syarat perlu dan sayarat cukup agar sistem persamaan linear homogen mempunyai penyelesaian.

DAFTAR PUSTAKA

Aminu. Butkovic. 2008. Comparison of method for solving two sided system in max-algebra. *Journal of Management Mathematics.*

Cunninghame, G. & Butkovic, P. 2003. *The equation* $A \otimes x = B \otimes y$ *over (max,+)*. School of Mathematics and Statistics, The University of Birmingham, Edgbaston, B15 2TT Birmingham, UK.

De Schutter, B., & De Moor, B. 2002. The QR decomposition and the singular value decomposition in the symmetrized max-plus algebra revisited. *SIAM review*, 44(3), 417-454.

Farlow, K.G. . 2009. *Max-plus Algebra*. *Thesis.* Faculty of the Virginia Polytechhnic Institute and State University.

Kamaruddin, K., Panggabean, E. M., & Irvan, I. 2023. Analysis of Algebra Structure Implementation Input-Output Applications in the Economic Field. *Journal Of Education And Teaching Learning (JETL)*, 5(3), 296-304.

Majid, A. 2012. *Aljabar Max-plus dan Sifat-sifatnya*. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang.

Puspitasari, N. 2016. Kontribusi Matematika Terhadap Ilmu Komputer Di D3 Manajemen Informatika Politeknik Indonusa Surakarta. *Jurnal Informa: Jurnal Penelitian dan Pengabdian Masyarakat*, 3(2), 18-25.

Rudhito, M. A. 2020. *Aljabar max-plus dan penerapannya*. Sanata Dharma University Press.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Identitas Diri

Nama	:	Zulfa Aulia Fadilla
TTL	:	Semarang, 26Februari 2002
Alamat	:	Jl. Gergaji Pelem V No. 69
	:	Kec. Semarang Selatan, Kota. Semarang
Hp	:	08985495865
E-mail	:	zulfa_aulia_fadilla_2008046026@walisongo.ac.id

Riwayat Pendidikan

1. SD Islam Gergaji
2. SMP N 10 Semarang
3. SMA Walisongo Semarang
4. UIN Walisongo Semarang

Demikian daftar riwayat hidup ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Semarang, 27 Juni 2023

Penulis,

Zulfa Aulia Fadilla

NIM : 2008046026