TEOREMA DEKOMPOSISI DALAM BARISAN $\mathcal{I}-$ *CONVERGENT*

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika

Oleh : **SHONIA ADI NUGRAHA**
NIM : 2008046023

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2024

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	Shonia Adi Nugraha
NIM	:	2008046023
Jurusan/Program Studi	:	Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

TEOREMA DEKOMPOSISI DALAM BARISAN $\mathcal{I}$ – *CONVERGENT*

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 31 Juli 2024
Pembuat pernyataan,

Shonia Adi Nugraha
NIM : 2008046023

KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **TEOREMA DEKOMPOSISI DALAM BARISAN $\mathcal{I}$ – *CONVERGENT***

Penulis : Shonia Adi Nugraha

NIM : 2008046023

Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 28 Agustus 2024

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

Ariska Kurnia Rachmawati, M.Sc.
NIP : 19890811 201903 2 019

Penguji II,

Yolanda Norasia, M.Si.
NIP : 19940923 201903 2 011

Penguji III,

Yulia Romadiastri, S.Si., M.Sc.
NIP : 19810715 200501 2 008

Penguji IV,

Eva Khoirun Nisa, S.Si., M.Si.
NIP : 19870102 201903 2 010

Pembimbing,

Nur Khasanah, M.Si.
NIP: 19911121 201903 2 017

NOTA DINAS

Semarang, 31 Juli 2024

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	TEOREMA DEKOMPOSISI DALAM BARISAN $\mathcal{I}$ – *CONVERGENT*
Nama	:	Shonia Adi Nugraha
NIM	:	2008046023
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing ,

Nur Khasanah, M.Si.
NIP : 19911121 201903 2 017

ABSTRAK

Solusi dalam mencari kekonvergenan barisan $\geq \epsilon$ yaitu dengan melakukan operasi syarat ideal yang disebut $\mathcal{I} -$ *convergent*. $\mathcal{I} -$ *convergent* merupakan metode yang memanfaatkan kondisi ideal untuk memastikan bahwa barisan tersebut konvergen sesuai dengan syarat-syarat yang ditentukan. Salah satu cara utama yang diterapkan untuk menyelesaikan masalah kekonvergenan barisan $\mathcal{I} -$ *convergent* adalah dengan metode dekomposisi. Dekomposisi dilakukan dengan memisahkan barisan x menjadi dua barisan baru, yaitu y dan z, sehingga $x = y + z$. Dengan dekomposisi ini, diperoleh teorema dekomposisi dalam barisan $\mathcal{I} -$ *convergent* melalui uji kekonvergenan $\mathcal{I} -$ *convergent*.

Kata kunci : Ideal, $\mathcal{I} -$ *convergent*, Teorema dekomposisi

KATA PENGANTAR

Assalamualikum Wr.Wb Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, yang telah memberikan nikmat, rahmat, dan hidayah-Nya dalam menyelesaikan tugas akhir yang berjudul " *Teorema Dekomposisi dalam Barisan I- Convergent*" ini tepat pada waktunya.

Sholawat serta salam senantiasa semoga tetap tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW yang membawa kita dari zaman kegelapan ke zaman yang terang.

Tugas akhir ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang. Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan tugas akhir ini dapat terselesaikan berkat bantuan arahan, bimbingan, dan doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Musahadi, M. Ag., selaku Dekan Fakultas Sains Dan Teknologi UIN Walisongo Semarang;

2. Ibu Any Muanalifah, P.h.D., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi;

3. Nur Khasanah, M.Si., sebagai dosen pembimbing yang senantiasa memberikan bantuan arahan serta bimbingan dalam menyelesaikan tugas akhir ini;

4. Segenap Dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang yang senantiasa

memberikan ilmu serta pelajaran bagi penulis dalam menempuh studi S1 di UIN Walisongo Semarang;

5. Bapak Jamad dan Ibu Sukami selaku orang tua penulis yang senantiasa membersamai, memberi dukungan, serta doa kepada penulis;
6. Mohammad Zainal Arifin, Eli Nurlaila, Sabda Bathara Ezas Zeandaru selaku keluarga penulis yang senantiasa membersamai, memberi dukungan, serta doa kepada penulis;
7. Teman seperjuangan dalam bidang ini, Shintia Ayu yang senantiasa membantu dalam penyusunan tugas akhir ini.

Terakhir penulis menyadari akan segala kekurangan dan kelemahan dalam tugas akhir ini. Oleh karena itu, penulis mengharapkan segala saran dan kritik yang dapat menyempurnakan tugas akhir ini. Semoga karya tulis yang sederhana ini dapat menjadi bacaan yang bermanfaat dan dapat dikembangkan bagi peneliti-peneliti selanjutnya. Semoga kebaikan semuanya menjadi amal ibadah yang diterima dan mendapat pahala yang berlimpah dari Allah SWT. Aamiin.

Daftar Simbol

Simbol	Keterangan
=	Sama dengan
$\neq$	Tidak sama dengan
>	Lebih dari
$\geq$	Lebih dari atau sama dengan
<	Kurang dari
$\leq$	Kurang dari atau sama dengan
(…)	Menyatakan barisan
{…}	Menyatakan himpunan
$\in$	Elemen dari
$\notin$	Bukan elemen dari
$\varnothing$	Himpunan kosong
$\subset$ & $\subseteq$	Subset ; himpunan bagian
$\cap$	Gabungan
$\cup$	Irisan
$\|\ldots\|$	Nilai mutlak
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real
$\triangle$	Himpunan tak hingga
$X = \{x_n\}$	Himpunan
$X = (x_n)$	Barisan
$M = (m_{nk})$	Barisan bagian
x	Anggota himpunan/barisan
y	Anggota himpunan /barisan
n	Suku barisan

α	Skalar
ρ	Metrik
θ	elemen tak nol
β_s	Kardinalitas minimal
β^s	Kardinalitas maksimal
$\underline{u}$	Densitas seragam bawah
$\overline{u}$	Densitas seragam atas
$\mathcal{I}$	Ideal
ξ	Titik limit
$A_i \triangle B_j$	Selisih simetri

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika menjadi dasar bagi ilmu pengetahuan lain dalam menghadapi berbagai tantangan baru yang muncul seiring dengan kemajuan yang semakin kompleks dalam ilmu pengetahuan dan teknologi. Ilmu matematika merupakan cabang ilmu pengetahuan yang memuat tentang logika mengenai bentuk, susunan, besaran, dan konsep-konsep yang berhubungan satu dengan lainnya (James, 1976). Ilmu matematika terbagi kedalam empat bidang yaitu aljabar, analisis, komputasi, dan terapan.

Matematika analisis merupakan cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang limit dan teori-teori seperti differensial, barisan, integral, pengukuran, deret, dan fungsi. Menurut Robert (2000) barisan bilangan real merupakan suatu fungsi, dimana domain merupakan himpunan bilangan asli dan *range* merupakan himpunan bilangan real. Berdasarkan definisi bahwa barisan merupakan suatu fungsi, maka barisan dapat divisualisasikan sebagai grafik fungsi khusus, dimana domain merupakan bilangan asli dan *range* merupakan bilangan real (Hadi, 2014). Barisan memiliki berbagai jenis, seperti barisan aritmatika, geometri, fibbonaci, harmonik, dan lainnya. Dalam pembahasan barisan, kajian yang mendasar adalah kekonvergenan.

Barisan dikatakan konvergen apabila elemennya mendekati nilai tertentu (limit). Limit barisan merupakan konsep dasar dalam matematika analisis. Kekonvergenan pada barisan bilangan real dapat digeneralisasi pada ruang metrik atau ruang topologi. Kajian lebih luas mengenai kekonvergenan yaitu mengenai $\mathcal{I} - convergent$. $\mathcal{I} - convergent$ barisan bilangan real merupakan generalisasi dari konvergen statistik yang didasari pada struktur $\mathcal{I}$ ideal dari himpunan bagian bilangan bulat positif (Kostyrko dkk, 2000).

Selanjutnya, terkait dengan penelitian pada $\mathcal{I} - convergent$ dilakukan oleh Kostyrko (2005) yang membahas tentang konsep dari barisan $\mathcal{I} - convergent$ pada ruang metrik, dimana $\mathcal{I}$ merupakan ideal dari himpunan bagian bilangan bulat positif, dan memperluas konsep tersebut ke dalam barisan $\mathcal{I} - convergent$ dari fungsi real yang didefinisikan pada ruang metrik dan membuktikan beberapa sifat dari konsep tersebut. Diperkenalkan konsep $\mathcal{I} - convergent$ dari baris-baris dalam ruang metrik, di mana $\mathcal{I}$ merupakan ideal dari subhimpunan dari suatu himpunan bilangan asli. Selanjutnya baris-baris ruang metrik ke $\mathcal{I} - convergent$ yang didefinisikan dalam ruang metrik. Aspek penting yang berkaitan dengan $\mathcal{I} - convergent$ adalah teorema dekomposisi.

Teorema dekomposisi barisan $\mathcal{I} - convergent$ merupakan teorema yang menyatakan bahwa setiap barisan $\mathcal{I} - convergent$ dapat diuraikan menjadi bagian-bagian yang lebih sederhana atau lebih terstruktur. Dekomposisi memungkinkan untuk dapat lebih memahami struktur dan sifat dari barisan. Dekomposisi dapat menjadi prosedur yang efektif untuk solusi analitis dari kelas sistem dinamik yang luas tanpa linearisasi atau asumsi non linieritas yang lemah, perkiraan penutupan, teori perturbasi, atau asumsi restriktif pada stokastikitas. Keuntungan dari metode dekomposisi adalah dapat memberikan pendekatan analitis terhadap kelas persamaan nonlinier (dan stokastik) yang cukup luas tanpa metode linearisasi, perturbasi, pendekatan penutupan, atau diskritisasi yang dapat menghasilkan perhitungan numerik yang sangat besar (Adomian, 1988).

Dalam penelitian Kooman (1994) menunjukkan penerapan asimtotik dari suatu barisan matrik persegi dengan elemen-elemennya bilangan real dan bilangan kompleks. Penelitian tersebut menggunakan dua teorema dekomposisi, menunjukkan perumuman teorema *Poincare-Perron* untuk peruangan linier serta membuktikan teorema dekomposisi untuk barisan metrik yang merupakan jumlah dari barisan metrik diagonal dan beberapa suku perturbasi. Selanjutnya dalam artikel tersebut juga menunjukkan penggunaan kedua teorema yang dapat menurunkan hasil mengenai solusi perulangan metrik jika metrik-metrik tersebut konvergen untuk beberapa limit metrik.

Penerapan teorema dekomposisi dalam teori bingkai, menunjukkan bahwa setiap barisan bassel yang dibatasi dapat didekomposisi menjadi dua himpunan bagian yang masing-masing merupakan perturbasi secara sembarang dari suatu barisan dengan dekomposisi ortogonal terbatas (Peter, 2008). Selain itu dalam penelitian Taeyoing (2007) memperkenalkan G-ekspansivitas lemah dimana merupakan ekspansivitas dan G-ekspansivitas yang mendefinisikan himpunan G-stabil dan G-tidak stabil dari homomorfisma pada ruang G metrik X, dan meneliti sifat-sifatnya. Hasil dari penelitian tersebut adalah teorema dekomposisi pada Ruang-G.

Berdasarkan dengan beberapa penelitian sebelumnya maka pada tugas akhir ini membahas lebih lanjut tentang "Teorema Dekomposisi dalam Barisan $\mathcal{I} -$ *convergent*".

1.2 Rumusan Masalah

Bagimana penerapan Teorema Dekomposisi dalam barisan $\mathcal{I} -$ *convergent*?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari tugas akhir ini yaitu memperoleh penerapan teorema dekomposisi dalam barisan $\mathcal{I} -$ *convergent*.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat-manfaat dalam tugas akhir ini yaitu:

1. Menambah wawasan dan pengetahuan penenliti tentang analisis terkhusus teorema dekomposisi dan kekonvergenan barisan dalam bidang matematika analisis.

2. Sebagai bahan referensi dalam penelitian selanjutnya yang berhubungan dengan teorema dekomposisi.

1.5 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang diterapkan adalah tinjauan pustaka atau literatur review

1.6 Prosedur Penelitian

Tugas akhir ini melalui beberapa prosedur penelitian diantaranya yaitu:

1. Mengkaji tentang barisan
2. Mengkaji tentang ruang metrik
3. Mengkaji tentang konvergen statistik
4. Mengkaji tentang $\mathcal{I} - convergent$
5. Mengkaji tentang penerapan Teorema Dekomposisi dalam Barisan $\mathcal{I} - convergent$

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan definisi dari barisan, ruang metrik, dan konvergen statistik sebagai dasar yang digunakan dalam menyelesaikan penerapan teorema dekomposisi dalam barisan $\mathcal{I}-$ *convergent* pada pembahasan selanjutnya.

2.1 Barisan

Barisan merupakan sekumpulan angka-angka yang diatur dalam urutan tertentu, di mana setiap angka disebut sebagai suku. Sebelum lebih lanjut membahas tentang barisan, berikut ini diberikan definisi-definisi yang berkaitan dengan barisan.

Definisi 2.1.1 *(Marshadi, 2017) Jika x merupakan anggota himpunan A, maka dinotasikan*

$$x \in A \tag{2.1}$$

Jika y bukan anggota A, maka dapat dinotasikan

$$y \notin A \tag{2.2}$$

Contoh 2.1.1 *Misalkan $A = \{1, 3, 5, 7\}$ maka dapat dilihat bahwa $1 \in A, 3 \in A, 5 \in A, 6 \notin A, 7 \in A$.*

Definisi 2.1.2 *(Marshadi, 2017) Himpunan A dan B dikatakan sama apabila semua elemen di himpunan A terdapat dalam himpunan B, dapat dinotasikan dengan $A = B$.*

Contoh 2.1.2 *Misalkan $A = \{3, 5, 7, 11\}$ dan $B = \{11, 3, 5, 7\}$. Karena setiap elemen A termasuk B dan setiap elemen B termasuk elemen A, maka $A = B$.*

Setelah diketahui definisi himpunan, selanjutnya diberikan definisi fungsi sebagai berikut.

Definisi 2.1.3 *(Marshadi, 2017) Terdapat suatu himpunan tak kosong A dan B. Relasi semua anggota dari himpunan A ke himpunan B disebut dengan Fungsi, $A \times B$ adalah pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$. Fungsi dapat dinotasikan dengan,*

$$f = A \to B. \tag{2.3}$$

Contoh 2.1.3 *Misalkan diberikan himpunan $A = \{2, 4, 8\}$ dan $B = \{1, 8, 48, 64, 80, 360, 512\}$. Didefinisikan fungsi $f = A \to B$ dengan $f(x) = x^3$, untuk setiap $x \in A$. Berikut diberikan pemetaan*
$f = A \to B$
$2 \to f(2) = 8$
$4 \to f(4) = 64$
$8 \to f(8) = 512$.

Dari definisi fungsi yang diberikan bahwasannya fungsi dapat digunakan untuk menggambarkan aturan pola yang menghubungkan elemen-elemen dalam suatu himpunan. Berikutnya diberikan definisi barisan sebagai berikut.

Definisi 2.1.4 *(Marshadi, 2017) Barisan merupakan suatu fungsi yang memiliki domain himpunan bilangan asli. Dinotasikan dengan $\{x_n\}$. Pada umumnya, telah dikenal barisan bilangan riil yaitu $X = \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, yang artinya daerah hasil dari barisan X yaitu bilangan riil.*

Contoh 2.1.4 *Misalkan $b \in \mathbb{R}$ dan didefinisikan $B = (b^n)$ yaitu barisannya $B = (b^1, b^2, b^3, \ldots, b^n)$. Apabila $b = 2$ maka didapatkan ($2^n : n \in \mathbb{N}$) = ($2, 4, 6, \ldots, 2^n$).*

Suku dalam barisan dapat mendekati nilai tertentu saat mendekati tak hingga. Diberikan definisi kekonvergenan barisan sebagai berikut.

Definisi 2.1.5 *(Bartle dkk, 2000) Sebuah barisan $X = (x_n)$ di $\mathbb{R}$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, atau x dikatakan sebagai sebuah limit dari (x_n), jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\epsilon)$ sedemikian hingga untuk semua $n \geq K(\epsilon)$, suku-suku x_n memenuhi $|x_n - x| < \epsilon$.*

Contoh 2.1.5 *Lim $\frac{1}{(n^2+1)} = 0$.*
Solusi:
Diberikan $\epsilon > 0$. Untuk mencari K, jika $n \in \mathbb{N}$, maka

$$\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}.$$

Diberikan K sedemikian sehingga $\frac{1}{K} < \epsilon$. Kemudian $n \geq K$ mengimplikasikan bahwa $\frac{1}{n} < \epsilon$, dan oleh karena itu

$$\left|\frac{1}{n^2+1} - 0\right| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Oleh karena itu, telah ditunjukkan bahwa batas dari barisan tersebut adalah nol.

Definisi 2.1.6 *(Bartle dkk, 2000) Misalkan $X = (x_n)$ merupakan barisan bilangan real. Barisan X dikatakan meningkat jika* *memenuhi pertidaksamaan.*

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n+1} \leq \ldots$$

Dapat dikatakan bahwa X menurun jika memenuhi pertidaksamaan.

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_{n+1} \geq \ldots$$

Dapat dikatakan bahwa X adalah monoton jika ia naik atau turun.

Contoh 2.1.6 *Diberikan $x_n = 3n$, dengan $n \in \mathbb{N}$. Nilai barisan untuk beberapa n:*
$x_1 = 3(1) = 3$
$x_2 = 3(2) = 6$
$x_3 = 3(3) = 9$
.
.
$x_n = 3n$
Maka barisan $X = (3, 6, 9, \ldots, 3n)$ merupakan barisan monoton naik karena setiap nilai bertambah seiring bertambahnya n.

Barisan merupakan suatu fungsi yang memiliki domain himpunan bilangan asli , dimana angka yang diatur dalam urutan tertentu disebut suku barisan. Setelah memahami definisi barisan yang diberikan, selanjutnya diberikan definisi *subsequences* berikut ini.

Definisi 2.1.7 *(Bartle dkk, 2000) Diberikan $X = (x_n)$ merupakan barisan bilangan real dan misalkan $(n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots)$ merupakan barisan bilangan asli yang yang monoton naik. Barisan* *baru $X' = (x_{nk})$ yang didefinisikan,*

$$(x_{nk}) = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk}, \ldots)$$

Disebut barisan bagian atau subsequences dari X.

Contoh 2.1.7 *Diberikan barisan $X = (1, 2, 3, \ldots, x_n, \ldots)$, diberikan barisan bagian dari X.*

a. Barisan $X_1^{'} = (2, 4, \ldots, 2n, \ldots)$ merupakan barisan bagian dari X.

b. Barisan $X_2^{'} = (3, 2, 4, 5, \ldots)$ bukan merupakan barisan bagian dari X karena $n_2 < n_1$.

Setelah diberikan definisi barisan beserta beberapa definisi yang saling berkaitan dengan barisan, berikut ini diberikan definisi ruang metrik.

2.2 Ruang Metrik

Bentuk barisan tidak hanya suatu urutan yang memiliki pola tertentu. Namun barisan juga dapat ditemukan dalam ruang metrik. Ruang metrik merupakan ruang di mana setiap pasangan titik memiliki jarak yang dapat dihitung. Untuk memahami lebih lanjut terkait ruang metrik, berikutnya diberikan definisi dari ruang metrik.

Definisi 2.2.1 *(Bartle dkk, 2000) Diberikan himpunan tak kosong S. Fungsi $\rho : S \times S \to \mathbb{R}$ disebut metrik pada X jika memenuhi aksioma-aksioma:*

a. $\rho(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$ (kepositifan);

b. $\rho(x,y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$ *(ketunggalan);*

c. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ *untuk setiap* $x, y \in X$ *(simetri);*

d. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ *untuk setiap* x, y *dan* $z \in X$ *(ketaksamaan segitiga).*

Himpunan S *yang dilengkapi dengan fungsi jarak* ρ*, disebut ruang metrik dan dinyatakan dengan* (S, ρ)

Contoh 2.2.1 *Diberikan himpunan tak kosong* S *dan didefinisikan sebagai* $\rho = S \times S \to \mathbb{R}$*, dengan*

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

berikut ditunjukkan bahwa (S, ρ) *merupakan Ruang metrik.*
Solusi:

a. *Untuk* $x = y$ *atau* $x \neq y$ *menggunakan* $\rho(x,y) \geq 0$*, untuk setiap* $x, y \in X$*, sehingga dengan menggunakan metrik didapatkan* $\rho(x,y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$*.*

b. $\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases} = \begin{cases} 1, & y \neq x \\ 0, & y = x \end{cases} = \rho(y,x)$

c. *Jika* $x = y$ *maka* $\rho(x,y) = \rho(x,x) = 0 \leq \rho(x,z) + \rho(z,x)$ *untuk setiap* $x, y, z \in X$*.*
Jika $x \neq y$ *maka berlaku* $x \neq y \neq z$ *atau* $x \neq y = z$ *dan* $\rho(x,y) = \rho(x,z) = \rho(z,y) = 1$ *atau* $\rho(x,y) = \rho(x,z) = 1$ *dan* $\rho(z,y) = 0$ *untuk setiap* $x, y, z \in X$*. Sehingga* $\rho(x,y) =$

$1 \leq \rho(x,z) = 1 + \rho(z,y) = 1$, *untuk setiap* $x, y, z \in X$ *atau* $\rho(x,y) = 1 \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) = 0$, *untuk setiap* $x, y, z \in X$.

Jarak antara dua titik dalam ruang metrik merupakan jumlah dari jarak mereka dalam setiap sumbu yang disebut dengan sub-ruang metrik atau ruang metrik linear. Selajutnya diberikan definisi ruang metrik linear.

Definisi 2.2.2 *(Iswanti,2010) Terdapat X merupakan ruang linear atas $\mathcal{F}$, dengan $\mathcal{F} = \mathbb{R}$. Ruang X disebut ruang linear metrik jika terdapat metrik ρ sehingga operasi operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar terhadap metrik kontinu dengan memenuhi,*

a. $f = (x,y) \to x + y$

b. $g = (\alpha, x) \to \alpha x$, *dengan* α*= skalar*

Maka X disebut ruang linear metrik.

Contoh 2.2.2 *Diberikan himpunan tak kosong* $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. *Didefinisikan metrik* $\rho((x_1,x_2)(y_1,y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. *Berikut ditunjukkan V dengan metrik ρ merupakan ruang linear metrik.*
Solusi:

a. $\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 0$ *jika dan hanya jika* $(x_1,x_2) = (y_1,y_2)$. *Karena metrik ρ memiliki komponen yang sama yaitu* $(x_1,x_2) = (y_1,y_2)$.

b. $\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \rho((y_1,y_2),(x_1,x_2))$. *Metrik ρ memenuhi karena* $\rho((x_1,x_2)(y_1,y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

c. $\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \rho((x_1+z, x_2), (y_1+z, y_2))$ *untuk semua* $z \in \mathbb{R}$. *Metrik* ρ *memenuhi karena* $\rho((x_1, x_2)(y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ *sama dengan* $\rho((x_1 + z, x_2), y_1 + z, y_2))$ *untuk semua* $z \in \mathbb{R}$.

d. $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ((x_1, x_2) + (y_1, y_2))$ *memenuhi karena misalkan* $(x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}^2$ *maka* $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$*, atau* $((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)) = ((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2))$.

e. $(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$ *memenuhi karena misalkan* $c \in \mathbb{R}$ *dimana* $cx = (c_1, cx_2)$ *maka* $c(x) = c(\alpha x_1, \alpha x_2) = (c\alpha x_1, c\alpha x_2)$

Dengan memeriksa kondisi-kondisi diatas, dapat menunjukkan bahwa V *dengan* ρ *merupakan ruang linear metrik.*

Setelah diberikan definisi ruang metrik, berikutnya diberikan definisi konvergen statistik. Sebelum membahas mengenai konvergen statistik, diberikan definisi mengenai densitas.

Definisi 2.2.3 *(Barbarski, 2011) Misalkan* $A \in \mathbb{N}$ *dan* $n \in \mathbb{N}$ *dengan (kardinalitas dari sebuah himpunan* X *dilambangkan dengan* $|X|$*)*

$$s_n(A) = \min_{m \in \mathbb{N}} |A \cap \{m, m+1, \ldots, m+n-1\}|$$

$$S_n(A) = \max_{m \in \mathbb{N}} |A \cap \{m, m+1, \ldots, m+n-1\}|$$

Diketahui bahwa terdapat limit sebagai berikut ini,

$$\underline{u} = \lim_{n \to \infty} \frac{s_n(A)}{n}, \overline{u} = \lim_{n \to \infty} \frac{S_n(A)}{n}$$

Keduanya disebut densitas seragam bawah dan atas dari A. Jika $\underline{u}(A) = \overline{u}(A)$, maka $u(A) = \underline{u}(A) = \overline{u}(A)$ disebut densitas seragam dari A.

2.3 Konvergen Statistik

Suku barisan yang mendekati tak hingga dalam ruang metrik disebut konvergen statistik.

Definisi 2.3.1 *(Kostyrko dkk, 2000) Diberikan $\mathbb{N}$ menunjukkan himpunan semua bilangan bulat positif dan (X, ρ) merupakan ruang linear metrik. Barisan $(x_n)_{n \in N}$ dari elemen X dikatakan konvergen secara statistik ke $x \in X$ jika himpunan $A(\epsilon) = n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, x) \geq \epsilon$.*

Contoh 2.3.1 *Densitas seragam dari sebuah himpunan $A \subset \mathbb{N}$ yang didefinisikan $A(t+1, t+s) = \{n \in A : t+1 \leq n \leq t+s\}$ untuk $t \geq 0$ dan $s \geq 1$, dimana $\beta_s = \lim_{\to\infty} A(t+1, t+s)$, dan $\beta^s = \lim sup_{\to\infty} A(t+1, t+s)$. Dapat ditunjukkan bahwa batas-batas berikut ini ada: $\underline{u}(A) = \lim_{s\to\infty} \frac{\beta_s}{s}$, $\overline{u}(A) = \lim_{s\to\infty} \frac{\beta^s}{s}$. Jika $\underline{u}(A) = \overline{u}(A)$, maka $u(A) = \underline{u}(A)$ disebut densitas seragam dari himpunan A.*

Dimana $\mathcal{I}_u = \{A \subset \mathbb{N} : u(A) = 0\}$. Maka $\mathcal{I}_u$ adalah ideal non-trival dan $\mathcal{I}_u -$ convergent dikatakan sebagai kekonvergenan statistik yang seragam.

Setelah memahami konsep konvergen statistik, diberikan definisi supremum.

Definisi 2.3.2 *(Bartle dkk, 2000) Misalkan S merupakan himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}$.*

a *Himpunan S dikatakan berbatas atas jika ada sebuah bilangan $u \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $s \leq u$ untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan u seperti itu disebut batas atas dari S.*

b *Himpunan S dikatakan berbatas bawah jika ada sebuah bilangan $w \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $w \leq s$ untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan w seperti itu disebut batas bawah dari S.*

c *Sebuah himpunan dikatakan berbatas jika himpunan tersebut berbatas atas dan berbatas bawah. Sebuah himpunan dikatakan tidak terbatas jika tidak memiliki batas.*

Contoh 2.3.2 *Diberikan himpunan $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$. Bilangan 2 dan bilangan yang lebih besar dari 2 adalah batas atas dari S.*

Definisi 2.3.3 *(Supriadi, 2017) Diberikan $A \subset \mathbb{R}$, bilangan a disebut supremum (sup) di A, dinotasikan dengan $a =$sup A, jika:*

a *Untuk setiap $b \in A$ berlaku $b \leq a$*

b *Jika u sebarang batas atas A, maka $a \leq u$*

Contoh 2.3.3 *Diberikan himpunan $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 7\}$. Berikut ditunjukkan sup $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 7\}$.*
Solusi:
Sup $S = 7$ (Sebab bilangan 7 dan sebarang bilangan lebih dari 7 merupakan batas atas minimum dari S).

Supremum (sup) sebagai batas atas terkecil dari suatu himpunan, dapat juga digunakan untuk menentukan batas dari barisan.

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini membahas mengenai penyelesaian teorema dekomposisi dalam barisan $\mathcal{I} - $ *convergent* dengan dasar-dasar teori yang sudah diberikan pada bab sebelumnya. Teorema dekomposisi dapat menjadi solusi untuk memecahkan suatu fungsi atau operasi linear menjadi bagian-bagian yang lebih sederhana dan selanjutnya akan ditentukan solusi bagaimana penerapan teorema dalam barisan $\mathcal{I} - $ *convergent*. Sebelum membahas mengenai teorema utama dekomposisi, terlebih dahulu diberikan definisi ideal, *Almost Periodicity (AP)*, dan teorema dekomposisi .

3.1 Ideal

Ideal merupakan solusi yang dapat digunakan untuk memastikan kekonvergenan suatu barisan. Berikut ini diberikan definisi ideal sebagai berikut.

Definisi 3.1.1 *(Nabiev dkk, 2007) Diberikan* $Y \neq \varnothing$. *Sebuah himpunan* $\mathcal{I} \subset 2^Y$ *dari subhimpunan Y disebut ideal di Y apabila memenuhi kondisi-kondisi berikut ini:*

a. $\varnothing \in I$;

b. $A, B \in I$ *berarti* $A \cup B \in \mathcal{I}$;

c. $A \in I, B \subset A$ *berarti* $B \in \mathcal{I}$.

Contoh 3.1.1 *Misalkan* Y *merupakan himpunan bilangan bulat positif , serta* I *merupakan sekumpulan himpunan bilangan bulat* *positif berhingga. Didefinisikan* $I = \{S \subseteq Y : |S| < \infty\}$*, dengan* $|S|$ *banyaknya anggota* S *berhingga, maka* I *adalah ideal di* Y*. Berikutnya ditunjukkan bahwa* I *memenuhi ketiga kondisi dari Definisi 3.1.1 :*

a. $\varnothing \in I$
Karena diketahuibahwa $\mathcal{I}$ *merupakan sekumpulan himpunan bilangan bulat positif berhingga, maka* $\varnothing \in \mathcal{I}$*.*

b. $S, T \in I$ *berarti* $S \cup T \in \mathcal{I}$
Misalkan $S, T \in \mathcal{I}$*. Maka* $S, T \subseteq Y$ *dengan* $|S|$*,* $|T| < \infty$*. Karena* $S \cup T \subseteq Y$ *dan* $|S| \cup |T| \geq |S| + |T| < \infty$*, maka* $S \cup T \in \mathcal{I}$*.*

c. $S \in I, T \subset A$ *berarti* $T \in \mathcal{I}$*.*
Misalkan $S \in \mathcal{I}$ *dan* $T \subseteq S$*. Karena* $S \subseteq Y$ *dan* $T \subseteq S \subseteq Y$*. Misalkan* $S = s_1, s_2, \ldots, s_n$ *maka* $T \subseteq Y$ *dengan* $|T| < \infty$*, maka* $T \in \mathcal{I}$*.*

Karena memenuhi semua kondisi-kondisi yang perlu dipenuhi, maka $\mathcal{I}$ *merupakan ideal di* Y*.*

Setelah diberikan definisi mengenai ideal, berikutnya diberikan definisi filter.

Definisi 3.1.2 *(Nabiev dkk, 2007) Diberikan* $Y \neq \varnothing$*. Sebuah himpunan tak kosong* $\mathcal{F} \subset 2^Y$ *dikatakan sebagai sebuah filter pada* Y *jika yang berikut ini terpenuhi:*

a. $\varnothing \notin \mathcal{F}$;

b. $A, B \in \mathcal{F}$ *maka* $A \cap B \in \mathcal{F}$;

c. $A \in \mathcal{F}, A \subset B \subset Y$ *maka* $B \in \mathcal{F}$.

Contoh 3.1.2 *Misalkan* $X = \{2, 4, 6\}$ *dan* $\mathcal{F} = \{X, 2, \{2, 4\}\}$ *merupakan suatu sekumpulan himpunan di* X*. Ditunjukkan bahwa* F *merupakan filter di* X*.*
Solusi:

a $\varnothing \notin \mathcal{F}$
Karena $\mathcal{F} = \{X, 2, \{2, 4\}\}$ *merupakan suatu sekumpulan himpunan di* X *, maka* $\varnothing \notin \mathcal{F}$*.*

b $A, B \in \mathcal{F}$*, maka* $A \cap B \in \mathcal{F}$
Misalkan $A = X$ *dan* $B = \{2\}$*, maka* $A \cap B = \{2\} = B \in \mathcal{F}$*.*
Misalkan $A = X$ *dan* $B = \{2, 4\}$*, maka* $A \cap B = \{2, 4\} = B \in \mathcal{F}$*.*
Misalkan $A = 2$ *dan* $B = \{2, 4\}$*, maka* $A \cap B = \{2\} = A \in \mathcal{F}$*.*

c $A \in \mathcal{F}, A \subset B \subset Y$ *maka* $B \in \mathcal{F}$
Misalkan $A = \{2\}$ *dan* $B = \{2, 4\}$*,* $A \subset B$*, maka* $B \in \mathcal{F}$*.*
Misalkan $A = \{2, 4\}$ *dan* $B = \{2, 4, 6\}$*,* $A \subset B$ *maka* $B \in \mathcal{F}$*.*

Karena memenuhi semua kondisi-kondisi yang perlu dipenuhi, maka $\mathcal{F}$ *merupakan filter di* X*.*

Definisi 3.1.3 *(Nabiev dkk, 2007) Sebuah ideal* $\mathcal{I}$ *dikatakan dapat diterima jika* $\{x\} \in \mathcal{I}$ *untuk setiap* $x \in Y$

Setelah diberikan definisi mengenai ideal dan filter yang diperlukan dalam pembahasan lebih lanjut, selanjutnya diberikan definisi $\mathcal{I} -$ *convergent.*

Definisi 3.1.4 *(Kostyrko dkk, 2000) Barisan* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dari elemen* X *dikatakan* $\mathcal{I} -$ *convergent ke* $\xi \in X (\xi = \mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} x_n)$ *jika dan hanya jika untuk setiap* $\epsilon > 0$ *himpunan* $A(\epsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \epsilon\}$ *. Elemen* ξ *disebut* $\mathcal{I} -$ *limit dari barisan* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Jika $x = \{x_n\}$ adalah $\mathcal{I} -$ *convergent* ke ξ maka $\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} x_n$. Dalam hal ini, elemen ξ disebut $\mathcal{I} -$ *limit* $x = (x_n)$

Contoh 3.1.3 *Diberikan* $\mathbb{N} = U_{j=1}^{\infty} \triangle_j$ *merupakan dekomposisi dari* $\mathbb{N}$ *sedemikian sehingga setiap* $\triangle_j$ *himpunan tidak terbatas dan jelas* $\triangle_i \cap \triangle_j = \varnothing$ *untuk* $i \neq j$. *Nyatakan dengan* ε *kelas dari semua* $A \subset \mathbb{N}$ *yang hanya memotong sejumlah terbatas dari* $\triangle_j^{'} s$. *Maka* ε *adalah ideal non-trival.*

Jika $x = \{x_n\}$ adalah $\mathcal{I} -$ *convergent* ke ξ maka $\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. Dalam hal ini elemen $\xi \in X$ disebut $\mathcal{I}$-Limit $x = (x_n) \in X$. Selanjutnya, diberikan aksioma-aksioma konvergensi yang dipenuhi oleh $\mathcal{I} -$ *convergent.*

Aksioma 3.1.1 *(Kostyrko dkk, 2000) Sifat-sifat berikut ini adalah aksioma-aksioma konvergensi:*

a. *Setiap deret konstanta* $\{\xi, \xi, \ldots, \xi, \ldots\}$ *konvergen ke* ξ.

b. *Limit dari barisan konvergen ditentukan secara unik.*

c. *Jika barisan* $(x_n)_{n\in N}$ *memiliki limit* ξ, *maka setiap barisan bagian memiliki limit yang sama.*

d. *Jika setiap barisan bagian dari barisan* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *memiliki sebuah barisan bagian yang konvergen ke* ξ, *maka* x *konvergen ke* ξ.

Proposisi 3.1.1 *(Kostyrko dkk, 2000) Misalkan* X *memiliki setidaknya dua titik. Diberikan* $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ *merupakan sebuah ideal yang dapat diterima.*

i. $\mathcal{I} -$ *convergence memenuhi (a), (b), dan (d) pada Aksioma* (3.1.1).

ii. *Jika $\mathcal{I}$ berisi sebuah himpunan tak hingga, maka $\mathcal{I}$ − convergence tidak memenuhi (c) pada Aksioma* (3.1.1).

Bukti:

i. *(a) jelas terpenuhi. Untuk membuktikan (b), cukup untuk mengamati bahwa untuk setiap $A_1, A_2 \in \mathcal{I}$ memiliki $(\mathbb{N} \setminus A_1) \cap (\mathbb{N} \setminus A_2) \neq \varnothing$ karena dua himpunan yang terakhir adalah bagian dari filter yang berhubungan dengan $\mathcal{I}$. Jika ada dua batasan $\xi\eta \in \mathcal{I}$, $\xi \neq \eta$, diberikan ϵ sehingga,*

$$0 < \epsilon < \frac{1}{2}\rho(\xi, \eta) \tag{3.1}$$

dan menempatkan $A_1 = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \epsilon\}$, $A_2 = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \eta) \geq \epsilon$. Misalkan (d) tidak berlaku. Maka ada $\epsilon_0 > 0$ sedemikian sehingga,

$$A(\epsilon_0) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \epsilon_0\} \notin \mathcal{I}$$

Maka $A(\epsilon_0)$ adalah sebuah himpunan tak hingga karena $\mathcal{I}$ dapat ditambahkan. Diberikan $A(\epsilon_0) = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \ldots\}$. Masukkan $y_k = x_{nk}$ untuk $k \in \mathbb{N}$. Maka $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ adalah sebuah barisan dari x tanpa sebuah barisan $\mathcal{I}$ − convergent ke ξ.

ii. *Misalkan $A \in \mathcal{I}$ adalah sebuah himpunan tak hingga, $A = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \ldots\}$. $B = \mathbb{N} \setminus A = \{m_1 < m_2 < m_3 < \cdots < m_k < \ldots\}$. Himpunan B juga tidak terbatas karena $\mathcal{I}$ adalah ideal non-trival. Definisikan $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dengan memilih $\xi_1, \xi_2 \in X$, $\xi_1 \neq \xi_2$ dan masukkan $x_{nk} = \xi_1$, $x_{mk} = \xi_2$ untuk $k \in \mathbb{N}$. Jelas $\mathcal{I} - \lim_{k\to\infty} x_k = \xi_2$, tetapi selanjutnya $y_k = x_{nk}$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}$ − convergent to ξ_1.*

Setelah diberikan mengenai definisi $\mathcal{I} -$ *convergent, berikutnya diberikan definisi* $\mathcal{I}^* -$ *convergent.*

Definisi 3.1.5 *(Kostyrko dkk, 2000) Barisan* $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dari elemen-elemen* X *dikatakan sebagai* $\mathcal{I}^* -$ *convergent ke* $\xi \in X$ *jika dan hanya jika ada sebuah himpunan* $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ $(i.e.\mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I})$, $M = \{m_1 < m_2 < m_3 < \cdots < m_k < \dots\}$ *sedemikian hingga* $\lim_{k\to\infty} \rho(x_{mk}, \xi) = 0$.

Contoh 3.1.4 *Diberikan* $\mathcal{I}$ *merupakan ideal dari semua subhimpunan berhingga* $\mathbb{N}$. *Misalkan* $(\mathbb{R}, G)$ *ruang metrik dan* $(x_n) = \frac{1}{n^2+1}$ *dalam ruang metrik* $(\mathbb{R}, G)$ *dengan* $G(x_n, x_n, x) = |x - y| + |x - z| - |y - z|$. *Dipilih* M *himpunan bilangan genap sehingga* $M = |2, 4, 6, \dots|$. *Maka* (x_n) *merupakan* $\mathcal{I}^* -$ *convergence ke* $x = 0$.

Solusi:

Perhatikan bahwa $M = |2, 4, 6, \dots|$ *merupakan filter* $\mathcal{F}(\mathcal{I})$, *karena* $M = \mathbb{N}\setminus\{1, 3, 5, \dots\}$ *dan* $\{1, 3, 5, \dots\} \in \mathcal{I}$. *Kemudian ditunjukkan* $lim_{k\to\infty} G(x_n, x_n, x) = 0$. *Perhatikan bahwa* $k \in M$ *dan*

$$\begin{aligned}
G(x_n, x_n, x) &= G\left(\frac{1}{k^2+1}, \frac{1}{k^2+1}, x\right) \\
&= G\left(\frac{1}{k^2+1}, \frac{1}{k^2+1}, 0\right) \\
&= \left|\frac{1}{k^2+1} - \frac{1}{k^2+1}\right| + \left|\frac{1}{k^2+1} - 0\right| - \left|\frac{1}{k^2+1} - 0\right| \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa $(x_n) = \frac{1}{n^2+1}$ $\mathcal{I}^* -$ *convergence ke* $x = 0$ *dengan dipilih* $M = \{2, 4, 6, \dots\}$.

Proposisi 3.1.2 *(Kostyrko dkk,2000) Diberikan $\mathcal{I}$ merupakan sebuah ideal yang dapat diterima. Jika $\mathcal{I}^* - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, maka $\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$*

Bukti:

Dengan asumsi terdapat sebuah himpunan $H \in \mathcal{I}$ sedemikian sehingga untuk $M = \mathbb{N} \setminus H = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots <\}$, dimiliki

$$\lim_{k\to\infty} x_{mk} = \xi \tag{3.2}$$

Diberikan $\epsilon > 0$. Berdasarkan (3.2), maka terdapat $k_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\rho(x_{mk}, \xi) < \epsilon$ untuk setiap $k > k_0$. Maka,

$$A(\epsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \epsilon\} \subset H \cup \{m_1 < m_2 < \cdots < m_{k0}\} \tag{3.3}$$

Himpunan di sisi kanan dari (3.2) adalah milik $\mathcal{I}$ (karena $\mathcal{I}$ dapat diterima). Jadi $A(\epsilon) \in \mathcal{I}$.

Implikasi kekonvergenan antara $\mathcal{I} - convergent$ dan $\mathcal{I}^* -$ convergence pada dasarnya bergantung pada struktur dari ruang metrik (X, ρ).

Teorema 3.1.1 *(Kostyrko dkk, 2000) Diberikan (X, ρ) merupakan sebuah ruang metrik.*

a. *Jika X tidak memiliki titik limit, $\mathcal{I} -$ convergence dan $\mathcal{I}^* -$ convergence berimpit untuk setiap ideal yang dapat diterima $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$.*

b. *Jika X memiliki titik limit ξ, maka terdapat sebuah ideal yang dapat diterima $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ dan sebuah barisan $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dari elemen-elemen X sedemikian sehingga $\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} y_n = \xi$ namun $\mathcal{I}^* - \lim y_n$ tidak ada.*

Bukti:

a. *Misalkan* $\xi \in X$ *dan* $\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} = \xi$. *Berdasarkan Proposisi 3.1.1, cukup untuk membuktikan bahwa* $\mathcal{I}* - lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. *Karena* X *tidak memiliki titik-titik limit, ada* $\delta > 0$ *sedemikian sehingga* $B(\xi, \delta) = \{x \in X : \rho(x, \xi) < \delta\} = \{\xi\}$. *Dari asumsi didapatkan* $\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \delta\} \in \mathcal{I}$. *Oleh karena itu*

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) < \delta\} = \{n \in \mathbb{N} : x_n = \xi \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

dan tentu $\mathcal{I}^* - \lim_{n\to\infty} = \xi$.

b *Karena* ξ *adalah titik limit dari* X, *terdapat sebuah barisan* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dari elemen-elemen* X *sehingga* $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$ *dan barisan* $\{\rho(x_n, \xi)\}_n \in \mathbb{N}$ *menurun ke 0. Masukkan* $\epsilon_n = \rho(x_n, \xi)$ *untuk* $n \in \mathbb{N}$. *Untuk* $\mathcal{I}$ *dapat mengambil* ε *ideal dari Contoh 3.1.3.*

Tentukan barisan $\{y_n\}_n \in \mathbb{N}$ *dengan* $y_n = x_j$ *jika* $n \in \triangle_j$. *Diberikan* $\eta > 0$. *Diberikan* $v \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga* $\epsilon_v < \eta$. *Maka* $A(\eta) = \{n : \rho(y_n, \xi) \geq \eta\} \subset \triangle_1 \cdots \cup \cdots \cup \triangle_v$. *Oleh karena itu* $A(\eta) \in \varepsilon$ *dan* $\varepsilon - lim_{n\to\infty} y_n = \xi$.

Misalkan $\varepsilon^* - \lim_{n\to\infty} y_n = \xi$. *Maka terdapat sebuah himpunan* $H \in \varepsilon$ *sedemikian sehingga untuk* $M = \mathbb{N} \setminus H = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \dots\}$ *dimiliki* $\lim_{k\to\infty} \rho(y_{mk}, \xi) = 0$. *Menurut definisi* ε, *ada* $\mathcal{I} \in \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga* $H \subset \triangle_1 \cup \cdots \cup \triangle_{\mathcal{I}}$. *Maka* $\triangle_{\mathcal{I}+1} \subset \mathbb{N} \setminus H = M$, *jadi untuk k's yang tak terhingga banyaknya (setiap* $\triangle_i$ *adalah sebuah himpunan yang tak terhingga) dimiliki* $\rho(y_{mk}, \xi) = \epsilon_{\mathcal{I}+1} >$

0, yang bertentangan dengan $y_{mk} \to \xi$. Juga asumsi $\varepsilon^* - \lim_{n\to\infty} y_n = y$ untuk $y \neq \xi$ mengarah pada kontradiksi.

Setelah diberikan definisi mengenai ideal. Berikutnya diberikan definisi mengenai *Almost Periodicity (AP)* untuk mendukung dalam pembuktian teorema dekomposisi dalam barisan $\mathcal{I} - convergent$

3.2 *Almost Periodicity (AP)*

Definisi 3.2.1 *(Nabiev dkk, 2007) Sebuah ideal yang dapat diterima $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ dikatakan memenuhi kondisi properti AP jika untuk setiap himpunan $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_i\}$ dari himpunan-himpunan yang saling lepas dari $\mathcal{I}$, ada sebuah himpunan $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_i\}$ dari himpunan-himpunan sedemikian hingga setiap selisih simetri $A_i \triangle B_i (i = 1, 2, ...)$ berhingga dan $U_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{I}$.*

Contoh 3.2.1 *Diberikan I merupakan semua himpunan bagian berhingga dari $\mathbb{N}$. Misalkan terdapat sekumpulan himpunan berhingga $\{A_1, A_2, \ldots, A_i\}$ yang saling lepas di $\mathcal{I}$. Untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, $B_i \in \mathcal{I}$, dan $A_i \triangle B_i = \{i\}$, maka himpunan tersebut merupakan himpunan berhingga dan $U_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{I}$. Oleh karena itu, $\mathcal{I}$ memenuhi kondisi properti AP.*

Lemma 3.2.1 *(Nabiev dkk, 2007) Diberikan $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ merupakan ideal yang dapat diterima dengan properti AP dan (X, ρ) merupakan ruang metrik sebarang. Maka $I - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ jika dan hanya jika terdapat sebuah himpunan $P \in \mathcal{F}(\mathcal{I}, P : \{P_1 < P_2 < P_3 < \cdots < P_k\}$ sehingga $\lim_{k\to\infty} \rho(X_{(\rho,k)}, \xi) = 0$.*
Bukti:

($\Longrightarrow$) *Diberikan* ξ *adalah titik limit dari* X*, terdapat sebuah barisan* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dari elemen-elemen* X *sehingga* $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$ *dan barisan* $\{\rho(x_n, \xi)\}_n \in \mathbb{N}$ *konvergen ke 0. Masukkan* $\epsilon_n = \rho(x_n, \xi)$ *untuk* $n \in \mathbb{N}$*. Untuk* $\mathcal{I}$ *dapat mengambil* ε *ideal dari Contoh 3.1.3 tentukan barisan* $\{y_n\}_n \in \mathbb{N}$ *dengan* $y_n = x_j$ *jika* $n \in \triangle_j$*. Diberikan* $\eta > 0$*. Diberikan* $v \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga* $\epsilon_v < \eta$*. Maka* $A(\eta) = \{n : \rho(y_n, \xi) \geq \eta\} \subset \triangle_1 \cdots \cup \cdots \cup \triangle_v$*. Oleh karena itu* $A(\eta) \in \varepsilon$ *dan* $\varepsilon - lim_{n\to\infty} y_n = \xi$*. Misalkan* $\varepsilon^* - \lim_{n\to\infty} y_n = \xi$*. Maka terdapat sebuah himpunan* $H \in \varepsilon$ *sedemikian sehingga untuk* $M = \mathbb{N} \setminus H = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \dots\}$ *dimiliki* $\lim_{k\to\infty} \rho(y_{mk}, \xi) = 0$.

($\Longleftarrow$) *Diketahui* $\lim_{k\to\infty} \rho(X_{(\rho,k)}, \xi) = 0$ *dengan sebuah himpunan* $P \in \mathcal{F}(\mathcal{I}, P : \{P_1 < P_2 < P_3 < \cdots < P_k\}$*. Berdasarkan Definisi 3.1.6, maka terdapat barisan* $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dari elemen-elemen* X *dikatakan sebagai* $\mathcal{I}^* - convergent$ *ke* $\xi \in X$*. Dari Definisi 3.1.4 jika* $x = \{x_n\}$ *adalah* $\mathcal{I} - convergent$ *ke* ξ *maka* $\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$*. Menurut Proposisi 3.1.1. dapat diketahui bahwa jika* $\mathcal{I}^* - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$*, maka* $\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$*. Oleh sebab itu, dapat disimpulkan bahwa* $\mathcal{I}^* - convergent$ *berkaitan erat dengan* $\mathcal{I} - convergent$*, maka dari* $\lim_{k\to\infty} \rho(X_{(\rho,k)}, \xi) : 0$ *berakibat* $\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$.

3.3 Teorema Dekomposisi

Setelah dibahas mengenai beberapa definisi pendukung dalam teorema dekomposisi maka dapat dituliskan teorema dekomposisi dalam $\mathcal{I} -$ *convergent* berikut ini.

Teorema 3.3.1 *(Nabiev dkk, 2007) Diberikan* (X, ρ) *merupakan* *sebuah ruang metrik linear,* $x = (x_n) \in X$ *dan* $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ *merupakan sebuah ideal yang dapat diterima dengan properti AP. Maka pernyataan berikut ini saling equivalen:*

a. $\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$*;*

b. Terdapat $y = (y_n) \in X$ *dan* $z = (z_n) \in X$ *sedemikian sehingga* $x = y + z$*,* $\lim_{n\to\infty} d(y_n, \xi) = 0$ *dan sup* $z \in I$*, dimana sup* $z = (n \in \mathbb{N} : z_n \neq \theta)$ *dan* θ *merupakan elemen nol dari* X*.*

Bukti:
(a $\Longrightarrow$ b)
Diberikan $\mathcal{I} - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$. Kemudian dengan Lemma 3.2.1 terdapat sebuah himpunan,

$$M \subset F(I), M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \dots\}$$

sedemikian sehingga $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_{m_k}, \xi) = 0$.
Definisikan barisan $y = (yn)$ dalam X sebagai,

$$y = \begin{cases} x_n, n \in M \\ \xi, n \in \mathbb{N} \setminus M \end{cases} \tag{3.4}$$

Jelas bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(y_n, \xi) = 0$.
Selanjutnya, dimiliki $z_n = x_n - y_n, n \in \mathbb{N}$. Karena $k \in \mathbb{N} : x_k \neq y_k \subset \mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}$, dimiliki $k \in \mathbb{N} : z_k \neq 0 \in \mathcal{I}$. Oleh karena itu sup $z \in \mathcal{I}$ dan oleh (3.4) didapatkan $x = y + z$.
(b $\Longrightarrow$ a)
Misalkan ada dua barisan $y = (y_n) \in X$ dan $z = (z_n) \in X$ sedemikian sehingga $x = y + z$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(y_n, \xi) = 0$ dan supp $z \in \mathcal{I}$.

Akan dibuktikan bahwa $\mathcal{I} - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.
Definisikan $M = m_k$ menjadi himpunan bagian dari $\mathbb{N}$ sehingga $M = m \in \mathbb{N} : z_m = 0$, karena sup $z = m \in \mathbb{N} : z_m \neq 0 \in \mathcal{I}$ dimiliki $M \in F(I)$, karenanya $x_n = y_n$ jika $n \in M$. Jadi dapat simpulkan bahwa terdapat himpunan,

$$M = m_1 < m_2 < m_3 < \ldots, M \in F(I)$$

sedemikian sehingga $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_{m_k}, \xi) = 0$. Oleh Lemma 3.2.1maka $I - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. $\square$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Simpulan

$\mathcal{I}-$ *convergent* adalah metode yang memanfaatkan kondisi ideal untuk memastikan bahwa suatu barisan konvergen sesuai dengan syarat yang telah ditentukan. Salah satu cara utama untuk menyelesaikan masalah kekonvergenan dalam $\mathcal{I}-$ *convergent* adalah dengan metode dekomposisi. Metode ini memecah barisan menjadi dua bagian yang lebih sederhana untuk dianalisis secara terpisah. Dekomposisi dilakukan dengan memisahkan barisan x menjadi dua barisan baru, yaitu y dan z, sehingga $x = y+z$. Dengan dekomposisi ini, diperoleh teorema dekomposisi dalam barisan $\mathcal{I}-$ *convergent* melalui uji kekonvergenan $\mathcal{I}-$ *convergent*.

4.2 Saran

Penelitian selanjutnya dapat difokuskan pada penerapan teorema dekomposisi dalam barisan $\mathcal{I}-$ *convergent* pada berbagai jenis struktur aljabar lainnya, serta eksplorasi implikasinya dalam analisis data dan teori informasi untuk memperluas aplikasi praktis dari konsep ini.

DAFTAR PUSTAKA

Adomian, G. (1988) A review of the decomposition method in applied mathematics. *Journal of mathematical analysis and applications*, 135(2), 501-544.

Barbarski, P., Filipów, R., Mrożek, N., & Szuca, P. (2011). Uniform density u and I_u-convergence on a big set. *Mathematical Communications*.16(1).125-130.

Burgin, M., & Duman, O. (2006) Statistical convergence and convergence in statistics. *arXiv preprint math/0612179*.

Casazza, P., Kutyniok, G., Speegle, D., & Tremain, J. (2008) A decomposition theorem for frames and the Feichtinger conjecture. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136(6), 2043-2053.

Choi, T., & Kim, J. (2009). Decomposition theorem on G-spaces.*Osaka: J. Math*, 46, 87–104.

Fahmi, S., & Priwantoro, S. W. (2021). Logika Matematika dan Himpunan. *UAD PRESS*.

Hadi, S. (2014) Visualisasi Konsep Barisan Bilangan Real. Ta'allum: *Jurnal Pendidikan Islam*, 2(1), 87-100.

Iswanti, Darmawijaya. (2010). Sifat-sifat Dasar dan Struktur Ruang Dalam Ruang Linear Metrik. Universitas Negeri Yogyakarta.

James, G. & James, R.C. (1976). Mathematics dictionary. *New York: Van Nostrand Reinhold Company*.

Kooman, R. J. (1994). Decomposition of matrix sequences.*Indagationes Mathematicae*, 5(1), 61-79.

Kostyrko, P., Máčaj, M., Šalát, T., & Sleziak, M. (2005). *I*-convergent dan Extermal*I*-Limit Points. *Mathematica slowak* , 55 (4), 443-46.

Kostyrko, P., Šalát, T., & Wilczyński, W. (2000) I-convergence. *Real analysis exchange*, 669-685.

Marshadi & Abdul Hadi (2017) Analisis I .UR Press.Pekanbaru.

Marzali, A. (2016) Menulis kajian literatur . *Jurnal Etnografi Indonesia*.

Nabiev, A., Pehlivan, S., & Gürdal, M. (2007) On $\mathcal{I}$-Cauchy sequences. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 11(2), 569-576.

Robert G.Bartle & Donald R.Sherbert (2000) Introduction To Real Analysis. United State Of America.

Stromberg, E. H. K. (1965). Real and abstract analysis.*Graduate Texts in Math*, 18.

Supriadi, S. (2018). Komposisi Bahan Ajar Konsep Analisis Real" Supremum Dan Infimum" Lapisan Dalam Bumi Melalui Pembelajaran Etnomatematika Sunda.*Sainstek: Jurnal Sains dan Teknologi*, 9(2), 151-157.

Zhou, X., Liu, L., & Lin, S. (2019). On topological spaces defined by I-convergence.*Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 46(3), 675-692.

RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

Nama	: Shonia Adi Nugraha
Tempat, tanggal lahir	: Blora, 5 Desember 2002
Agama	: Islam
Alamat rumah	: Desa Pengkolrejo RT.004/RW.002 Kecamatan Japah,Kabupaten Blora ,Jawa Tengah.
Telepon	: 082136510036
Email	: shonia_adi_nugraha_2008046023@walisongo.ac.id

B. Riwayat Pendidikan

1. Pendidikan Formal:
   a TK Hadi Luhur Pengkolrejo
   b SD Negeri 1 Pengkolrejo
   c SMP Negeri 1 Japah
   d SMK Negeri 1 Blora
   e Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang

Semarang, 31 Juli 2024

Shonia Adi Nugraha
NIM. 2008046023