

PENYELESAIAN NUMERIK PERILAKU FLUIDA CASSON NANO PADA MEDIA BERPORI

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika (S.Mat) dalam Ilmu Matematika



Diajukan oleh:
BILQIS NUR SALSABILLAH
NIM : 2108046093

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2024

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : BILQIS NUR SALSABILLAH
NIM : 2108046093
Jurusan/Program Studi : MATEMATIKA/ MATEMATIKA

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

**PENYELESAIAN NUMERIK PERILAKU FLUIDA CASSON NANO
PADA MEDIA BERPORI**

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 20 Desember 2024
Pembuat pernyataan,



BILQIS NUR SALSABILLAH
NIM : 2108046093

KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387



PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **Penyelesaian Numerik Perilaku Fluida Casson Nano pada Media Berpori**

Penulis : **BILQIS NUR SALSABILLAH**

NIM : **2108046093**

Jurusan : **MATEMATIKA**

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu MATEMATIKA.

Semarang, 27 Desember 2024

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

Siti Maslihah, M.Si

NIP : 197706112011012004

Penguji II,

Aini Pitriyah, M.Sc

NIP : 198909292019032021

Penguji III,

Agus Wayan Yulianto, M.Sc

NIP : 198907162019031007

Penguji IV,

Seftina Diyal Miasary, M.Sc

NIP : 1987010113032010

Pembimbing I,

Yolanda Norasia, M.Si

NIP : 19940923 201903 2 011



NOTA DINAS

Semarang, 20 Desember 2024

Yth. Ketua Program Studi MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : Penyelesaian Numerik Perilaku Fluida Casson Nano pada Media Berpori
Nama : BILQIS NUR SALSABILLAH
NIM : 2108046093
Jurusan : MATEMATIKA

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing,



Yolanda Norasia, M.Si
NIP : 19940923 201903 2 011

ABSTRAK

Berdasarkan karakteristiknya, fluida dibedakan menjadi dua tipe yaitu fluida Newtonian dan non-Newtonian. Pada penelitian ini akan dibahas mengenai fluida non-Newtonian yaitu fluida casson nano. Fluida casson nano adalah campuran fluida darah sebagai fluida dasar dengan partikel nano solid berukuran kecil 1 sampai 100 nanometer (nm), dan fluida casson. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji mengenai aliran fluida nano melalui silinder berpori dibawah pengaruh parameter fraksi volume (χ), parameter casson (β), dan parameter porositas (ϕ) secara teori dengan model matematika dibangun oleh persamaan kontinuitas dan persamaan momentum. Selanjutnya model yang telah dibangun diselesaikan secara numerik dengan Skema Keller-Box, yang disimulasikan secara numerik untuk menganalisa pengaruh arameter fraksi volume (χ), parameter casson (β), dan parameter porositas (ϕ) terhadap kecepatan aliran fluida. Hasil yang diperoleh yaitu semakin meningkatnya variasi nilai parameter fraksi volume ditingkatkan (χ) = 0.1, 0.125, 0.15, 0.175, 0.2 maka kecepatan aliran fluida terhadap partikel nano Cu mengalami peningkatan sedangkan terhadap partikel nano Al_2O_3 mengalami penurunan. Apabila variasi nilai parameter casson ditingkatkan (β) = 0.5, 0.8, 1, 1.3, 1.6 maka kecepatan aliran fluida terhadap partikel nano Cu dan Al_2O_3 sama-sama mengalami peningkatan. Apabila variasi nilai parameter porositas ditingkatkan (ϕ) = 0.1, 0.2, 0.5, 0.7, dan 0.9 maka kecepatan aliran fluida terhadap partikel nano Cu dan Al_2O_3 sama-sama mengalami penurunan. **Kata kunci** : Fluida Casson Nano, Silinder Berpori,

Keller-Box

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT, karena atas rahmat, hidayah, dan karunia-Nya, penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Penyelesaian Numerik Perilaku Fluida Casson Nano pada Media Berpori**" dengan baik. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan program sarjana di Prodi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Walisongo.

Penulisan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, bantuan, motivasi, bimbingan, dan doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati, penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Nizar, M.Ag, selaku rektor UIN Walisongo Semarang.
2. Bapak Prof. Dr. H. Musahadi, M.Ag, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.
3. Ibu Any Muanalifah, M.Si., Ph.D, selaku Ketua Jurusan Matematika UIN Walisongo Semarang.
4. Ibu Yolanda Norasia, M.Si, selaku dosen pembimbing, yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan motivasi yang luar biasa selama proses penyusunan tugas ini. Terima kasih atas kesabaran, waktu, dan perhatian yang telah diberikan, serta atas dukungan yang tidak ternilai harganya.
5. Ibu Ariska Kurnia Rachmawati, M.Sc, selaku Dosen Wali yang memberikan nasehat dan motivasi kepada penulis dari awal perkuliahan hingga terselesaikannya skripsi ini.

6. Bapak/Ibu dosen dan staf di lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang, khususnya Program Studi Matematika yang telah banyak membantu dan memberikan ilmunya kepada penulis selama kuliah.
7. Teristimewa kepada orang tua penulis Bapak Arief Rullyanto dan Ibu Mumun yang telah memberikan dukungan, doa, dan kasih sayang yang tiada henti. Terima kasih atas segala pengorbanan, cinta, dan kesabaran yang telah Bapak dan Ibu berikan selama ini. Tanpa bimbingan dan dorongan semangat dari kalian, penulis tidak akan mampu menyelesaikan tugas ini dengan baik. Peneliti merasa sangat beruntung memiliki orang tua yang selalu mendukung setiap langkah penulis.
8. Teman-teman KKN MB Ke-18 Posko 22 Kelurahan Pedalangan tahun 2024 yang telah memberikan pengalaman berharga bagi penulis dan telah bersama-sama menjalani setiap proses pengabdian masyarakat. Terima kasih atas kebersamaan, kerjasama, dan dukungan yang luar biasa.
9. Teman-teman Matematika kelas C angkatan 2021 yang sudah menemani perjalanan kuliah penulis hingga selesai dan menjadi bagian penting dalam perjalanan akademik penulis. Terima kasih atas persahabatan, kerja sama, dan dukungan yang telah dibangun bersama. Setiap momen belajar, berbagi ilmu, dan melalui tantangan bersama telah memberikan pengalaman berharga yang akan selalu penulis kenang.
10. Eca, Ndoro Nisa, Salsabila, Novita, Jihan, dan Nur selaku teman istimewa yang selalu memberikan support dan

dukungan kepada penulis dan selalu ada dalam setiap langkah hidup penulis, baik dalam suka maupun duka. Terima kasih atas kebersamaan, dukungan, dan semangat yang kalian berikan, baik dalam perjalanan akademik maupun kehidupan pribadi penulis.

11. Semua Pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah memberikan kontribusi hingga selesainya skripsi ini.

Semoga kebaikan semuanya menjadi amal ibadah yang diterima dan mendapat pahala yang berlimpah dari Allah SWT. Aamiin.

Atas segala kekurangan dan kelemahan dalam skripsi ini penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun. Semoga karya tulis yang sederhana ini dapat menjadi bacaan yang bermanfaat dan dapat dikembangkan bagi peneliti-peneliti selanjutnya.

Semarang, 20 Desember 2024
Penulis,

Bilqis Nur Salsabillah
NIM : 2108046093

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xv
DAFTAR NOTASI	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Rumusan Masalah	3
C. Tujuan Penelitian	4
D. Manfaat Penelitian	4
E. Batasan Masalah	5
BAB II LANDASAN PUSTAKA	6
A. Fluida	6
B. Fluida Casson	7
C. Fluida Nano	9
D. Fluida Casson Nano	13
E. Aliran Fluida Berdasarkan Waktu	14
F. Porositas Media Silinder Berpori	15
G. Lapisan Batas (<i>Boundary Layer</i>)	16
H. Metode Beda Hingga	17
I. Skema <i>Keller-Box</i>	17
J. Penelitian Terdahulu	19
BAB III METODE PENELITIAN	29
A. Langkah-langkah Penelitian	29
BAB IV HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN	33
A. Persamaan Pembangun Model Matematika Dimensional	33
B. Model Matematika Non-Dimensional	47
C. Teori Lapisan Batas	52
D. Fungsi Alir	54

E. Persamaan Similaritas	56
F. Penyelesaian Numerik Model Matematika	61
G. Analisis Hasil Simulasi Numerik	75
BAB V PENUTUP	86
A. Kesimpulan	86
B. Saran	88
DAFTAR PUSTAKA	89
Lampiran-lampiran.....	93

DAFTAR TABEL

Table	Judul	Halaman
Tabel 2.1	Tabel Karakteristik Fisik (Norasia dkk, 2024)	13
Tabel 2.2	Tabel Persamaan dan Perbedaan Penelitian Terdahulu dengan Penelitian yang sedang Dilakukan	22
Tabel 4.1	Tabel Karakteristik Fisik (Norasia dkk, 2024)	75

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
Gambar 2.1	Skema <i>Keller-Box</i> (Al-Shibani dkk, 2012)	19
Gambar 3.1	Diagram Langkah Penelitian	32
Gambar 4.1	Komponen Tegangan pada Permukaan Fluida	37
Gambar 4.2	Kecepatan parameter fraksi <i>volume</i> (χ) dengan partikel nano <i>Cu</i>	77
Gambar 4.3	Kecepatan parameter fraksi <i>volume</i> (χ) dengan partikel nano <i>Cu</i> pada jarak (1.4 - 2.5)	78
Gambar 4.4	Pengaruh parameter fraksi <i>volume</i> (χ) dengan partikel nano <i>Al₂O₃</i>	78
Gambar 4.5	Pengaruh parameter fraksi <i>volume</i> (χ) dengan partikel nano <i>Al₂O₃</i> pada jarak (1.8 - 3.6)	79
Gambar 4.6	Kecepatan parameter casson (β) partikel nano <i>Cu</i>	80
Gambar 4.7	Kecepatan parameter casson (β) partikel nano <i>Al₂O₃</i>	81
Gambar 4.8	Kecepatan parameter porositas (ϕ) dengan partikel nano <i>Cu</i>	82
Gambar 4.9	Kecepatan parameter porositas (ϕ) dengan partikel nano <i>Cu</i> pada jarak (0.5 - 3.25)	83

Gambar 4.10 Kecepatan parameter porositas (ϕ) dengan partikel nano Al_2O_3	84
Gambar 4.11 Kecepatan parameter porositas (ϕ) dengan partikel nano Al_2O_3 pada jarak (1 - 4.25)	85

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1	Pembuktian Awal Mula Parameter Casson β
Lampiran 2	Transformasi Persamaan Dimensional menjadi Persamaan Non-Dimensional
Lampiran 3	Persamaan Similaritas
Lampiran 4	Penurunan Kondisi Awal
Lampiran 5	Program Matlab

DAFTAR NOTASI

β	: Parameter Casson
η	: Variabel Similaritas
μ	: Kekentalan Dinamik
ρ	: Massa Jenis Fluida
σ	: Konduktivitas Listrik
ν	: Kekentalan Kinematik
Φ	: Parameter Porositas
χ	: Parameter Fraksi Volume
\mathbf{B}	: Gaya Magnet
\mathbf{b}	: Induksi Medan Magnet
\mathbf{E}	: Medan Magnet
\mathbf{F}	: Gaya
\mathbf{J}	: Kerapatan Arus Listrik
\mathbf{M}	: Magnetik
Re	: Bilangan Reynolds
t	: Waktu
\mathbf{u}	: Kecepatan Fluida pada Vektor
u	: Kecepatan Searah sumbu x
v	: Kecepatan Seanan sumbu y
K^*	: Permeabilitas
Ψ	: Fungsi Alir
τ	: Tegangan Geser Fluida
\hat{n}	: Vektor Normal Keluar Masuk Elemen dA
C_p	: Kalor Khusus Fluida
u_e	: Kecepatan di Luar Lapisan Batas
U_∞	: Kecepatan Bebas Fluida
M_{sys}	: Massa Suatu System
erf	: <i>error function</i>

DAFTAR NOTASI

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Fluida merupakan zat yang mempunyai kemampuan untuk mengalir. Zat-zat yang ada di alam tidak hanya dalam bentuk padat, tetapi juga bisa berupa cairan dan gas. Berdasarkan sifat alirannya, fluida terbagi menjadi dua kategori: aliran fluida *Newtonian* dan aliran fluida *non-Newtonian* (Widodo dkk, 2017). Pengaplikasian aliran fluida *non-Newtonian* menawarkan keunggulan dibandingkan fluida *Newtonian* dengan aplikasi yang lebih luas dalam industri, termasuk desain bantalan dorong pada mesin, diffuser radial, pengurangan drag, pendinginan transpirasi, pemulihan minyak termal, dan lain-lain. Pada beberapa fluida *non-Newtonian*, tegangan geser yang rendah membuat fluida berperilaku seperti padatan elastis, sehingga gerakannya menjadi terbatas. Sebagai contoh, fluida casson adalah jenis fluida yang memiliki karakteristik ini. Agar fluida dapat mengalir, tegangan geser yang diterapkan harus lebih besar dari tegangan luluh; jika tidak, fluida tersebut akan berfungsi seperti benda padat (Rahman dkk, 2016).

Salah satu sifat khas dari fluida casson adalah jika tegangan yang diberikan pada fluida casson belum melampaui atau mencapai nilai batas tertentu maka tidak akan ada aliran yang terjadi yang dikenal sebagai tegangan luluh (Ali dkk, 2023). Penelitian Nagarani dkk (2024) menunjukkan bahwa model fluida casson efektif dalam pemodelan aliran darah, terutama dalam memprediksi pergerakan obat dan nutrisi. Fluida casson,

dengan sifat kekentalannya (kemampuan kembali ke bentuk semula setelah diberi tekanan), memberikan gambaran yang lebih akurat tentang bagaimana zat terlarut seperti obat dan nutrisi berperilaku dalam aliran darah. Hasil penelitian ini menggarisbawahi pentingnya mempertimbangkan efek fluida casson dalam kajian aliran darah dan aplikasi medis seperti distribusi obat.

Choi dkk pada tahun 1955, memperkenalkan konsep fluida nano yang menggabungkan partikel nano dengan fluida dasar. Penelitian Norasia dkk (2024), meneliti aliran fluida nano dengan fluida dasar darah, serta dua partikel nano yaitu Cu (tembaga) dan Al_2O_3 (alumina). Menurut hasil penelitian kedua partikel nano dapat mempercepat aliran darah dan meningkatkan suhu, yang berkontribusi pada distribusi obat yang lebih efisien dalam tubuh. Penelitian yang dilakukan oleh Ismaeel dkk (2023), fluida nano terbukti lebih efektif dalam meningkatkan perpindahan konveksi dibandingkan cairan lain, yang dapat meningkatkan hasil pengobatan kanker, mengatasi pembekuan darah, dan mengoptimalkan keberhasilan terapi tumor.

Aplikasi industri dan medis, fluida casson nano menunjukkan peran yang penting. Fluida casson nano, sebagaimana diungkapkan oleh Reddy dkk (2023) dan Ali dkk (2023), memiliki peran penting dalam berbagai sektor industri dan medis, termasuk pembuatan kaca, pemurnian minyak mentah, pelumasan, produksi kertas, serta dalam transportasi darah dan terapi kanker, terutama karena kemampuannya dalam sebuah proses yang memerlukan suhu tinggi. Manvi dkk (2023) menganalisis fluida casson nano pada plat datar berpori yang mengalami regangan. Hasil penelitian mereka menunjukkan bahwa parameter fluida memengaruhi

kecepatan dan suhu fluida pada plat datar yang meregang baik secara langsung maupun tidak langsung. Peningkatan parameter fluida casson nano menyebabkan peningkatan profil suhu, sementara medan kecepatan justru menurun. Yousef dkk (2022) melakukan penelitian fluida casson nano pada plat datar yang meregang dalam media berpori. Hasilnya terlihat pada pergerakan fluida casson nano yang melambat ketika parameter medan magnet dan parameter porositas media berpori ditingkatkan.

Penelitian model matematika fluida casson nano melalui media berpori dengan pengaruh tiga parameter, yaitu parameter fraksi *volume*, parameter casson, dan parameter porositas diharapkan memberikan pengaruh positif dan dapat diaplikasikan secara optimal untuk berbagai sektor kehidupan manusia. Ketertarikan peneliti ditemukan pada peluang signifikan yang bisa ditingkatkan dengan menggunakan metode yang sesuai, diharapkan mampu memberikan pandangan yang bermanfaat untuk masa yang akan datang mengenai pengembangan ilmu matematika terapan. Pada penelitian ini berawal dari persamaan lapisan batas sehingga memperoleh dua persamaan dimensi, yaitu persamaan kontinuitas dan persamaan momentum. Kemudian didapat persamaan similaritas dengan mengubah persamaan dimensi menjadi persamaan non-dimensi. Simulasi numerik akan diselesaikan dengan bantuan *software* MATLAB R2024b menerapkan metode beda hingga yang berskema *Keller-box*.

B. Rumusan Masalah

Berikut beberapa rumusan masalah yang didapatkan dari latar belakang yang sudah dipaparkan.

1. Bagaimana model matematika pada aliran fluida casson nano melalui media silinder berpori?
2. Bagaimana penyelesaian numerik model matematika pada aliran fluida casson nano melalui media silinder berpori menerapkan metode beda hingga yang berskema *Keller-Box*?
3. Bagaimana analisis hasil simulasi numerik dari model matematika pada aliran fluida casson nano melalui media silinder berpori?

C. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian berikut dirumuskan berdasarkan masalah yang telah diuraikan:

1. Membangun model matematika pada aliran fluida casson nano melalui silinder berpori.
2. Model matematika pada aliran fluida casson nano yang melewati silinder berpori diselesaikan secara numerik menerapkan metode beda hingga yang berskema *Keller-Box*.
3. Menganalisis hasil simulasi numerik pada model matematika aliran fluida casson nano melalui media silinder berpori.

D. Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini dilakukan, diharapkan dapat memberikan kontribusi penelitian tentang matematika terapan baik secara pengetahuan ataupun keilmuan. Khususnya pada pemodelan aliran fluida casson nano melalui media berpori

dengan mempertimbangkan parameter casson, parameter fraksi *volume*, dan parameter porositas menerapkan metode beda hingga yang berskema *Keller-Box*.

E. Batasan Masalah

Pada penelitian ini memiliki beberapa batasan masalah sebagai berikut.

1. Silinder berpori adalah media yang digunakan pada penelitian ini.
2. Terdapat dua partikel nano dalam penelitian yaitu: Cu (tembaga) dan Al_2O_3 (alumina).
3. Penyelesaian secara numerik menerapkan metode beda hingga yang berskema *Keller-Box* dengan bantuan *software* MATLAB R2024b.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

A. Fluida

Zat-zat di alam dikelompokkan kedalam tiga wujud, yaitu wujud cair, gas, dan padat. Wujud cair dan gas adalah wujud dengan kemampuan yang sama untuk mengalir dan bentuknya selalu berubah-ubah atau sering disebut sebagai fluida. Fluida merupakan suatu zat, yang mana jika diberikan gaya sekecil apapun berakibat perubahan bentuk terus-menerus karena tidak dapat menahan gaya yang diberikan (Bambang, 2016). Dalam aliran fluida, terdapat dua aspek utama, yakni tegangan geser yang menunjukkan gaya penyebab pergeseran, serta regangan geser yang menunjukkan perubahan bentuk akibat gaya itu, yang mengakibatkan pembagian fluida menjadi dua kategori, yaitu (Widodo dkk, 2017)

1. Aliran Fluida *Newtonian*

Jika aliran fluida menerapkan hukum pertama Newton (benda akan terus diam jika tidak diberikan gaya) atau hubungan di antara laju regangan geser dan tegangan geser berbanding lurus, maka disebut aliran fluida *Newtonian*. Contohnya seperti oli, bensin, minyak, air, dan udara. Bentuk persamaan fluida *Newtonian*:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

dimana:

- τ : tegangan geser pada fluida
 $\frac{du}{dy}$: laju regangan geser
 μ : kekentalan dinamik fluida

2. Aliran Fluida *non-Newtonian*

Aliran fluida *non-Newtonian* adalah kebalikan dari aliran fluida *Newtonian*. Hukum pertama Newton tidak dapat diterapkan karena tegangan geser dan laju regangan gesernya tidak berbanding lurus. Dalam kehidupan sehari-hari, kita dapat menemui beberapa contoh aliran fluida *non-Newtonian*, seperti campuran air dan tepung maizena, cat lateks, pasta gigi, dan lain-lain. Bentuk persamaan fluida *non-Newtonian*:

$$\tau = k \left(\frac{du}{dy} \right)^n$$

dimana:

- τ : tegangan geser pada fluida
 n : indeks perilaku kekentalan fluida ketika tegangan geser berubah
 k : koefisien indeks kekentalan fluida pada tegangan geser
 $\frac{du}{dy}$: laju regangan geser

Jenis aliran fluida yang digunakan dalam penelitian ini adalah fluida *non-Newtonian* karena aliran fluida adalah fluida casson nano.

B. Fluida Casson

Fluida *non-Newtonian* yang mempunyai perilaku khusus adalah fluida casson. Perilaku khusus fluida casson yaitu akan

mengalami tegangan geser sampai mencapai tegangan tertentu sebelum memulai aliran. Fluida casson juga memiliki tegangan luluh (*yield stress*) yaitu nilai dari tegangan geser yang harus dicapai agar aliran fluida dapat mengalir. Jika tegangan luluh sudah tercapai maka aliran fluida casson akan mengalir sesuai dengan sifat kekentalannya (Nagarani dkk, 2024).

Perilaku khusus fluida casson yang membutuhkan tercapainya nilai tegangan luluh tertentu sebelum memulai aliran memunculkan sebuah parameter yaitu parameter casson. Perilaku khusus ini juga memerlukan pendekatan khusus untuk memahami perilaku aliran fluidanya. Menyebabkan aliran fluida yang memiliki perilaku khusus tidak bisa didekati dengan model *Newtonian* sederhana.

Kasus aliran fluida casson, kecepatan aliran biasanya dipengaruhi oleh tegangan geser yang melampaui tegangan luluh, yang diwakili oleh parameter (τ_y). Nagarani dkk (2024) menyatakan rumus umum yang digunakan untuk mendeskripsikan perilaku fluida casson adalah

$$\tau = \tau_y + \mu \left(\frac{du}{dy} \right)$$

dimana:

τ : tegangan geser

τ_y : tegangan luluh

μ : kekentalan dinamis

$\frac{du}{dy}$: gradien/perubahan kecepatan

Fluida casson memberikan berbagai keuntungan dalam meningkatkan perpindahan panas dan massa dalam media berpori, khususnya di bawah pengaruh medan magnet dan reaksi

kimia. Manfaat ini mendukung aplikasi yang membutuhkan kontrol suhu dan pengolahan kimia dengan akurasi tinggi. Fluida ini memungkinkan pengendalian aliran dan suhu melalui penyesuaian viskositas dan porositas, yang sangat relevan untuk proses industri dengan pengawasan operasi yang ketat. Aplikasinya meluas ke sektor farmasi, kimia, serta simulasi aliran darah dalam desain sistem peredaran darah untuk mengkaji jaringan tubuh (Reddy dkk, 2023).

C. Fluida Nano

Aliran fluida nano adalah gabungan dari aliran fluida dasar dan partikel nano. Choi dan Eastman pertama kali mengemukakan konsep ini pada tahun 1995. Fluida dasar yang dimaksud dapat berupa darah, air, minyak, alkohol, oli, serta berbagai jenis cairan lainnya. Sedangkan partikel nano sendiri dapat berupa Ag, Al, Zn, Fe, Cu, Al_2O_3 , dan lain sebagainya (Norasia dkk, 2019). Fluida dasar yang digunakan penelitian ini berupa darah karena sifatnya yang kompleks dan akan bertambah kompleks ketika penggunaannya digabungkan dengan partikel nano (Norasia dkk, 2024).

Penelitian ini menggunakan partikel nano yang berupa Cu (tembaga) serta Al_2O_3 (alumina). Dalam aplikasi medis, tembaga memiliki manfaat penting karena memiliki sifat antimikroba yang mana sangat efektif dalam memusnahkan virus dan bakteri. Tembaga juga memiliki fungsi dalam memusnahkan sel-sel kanker tetapi tidak merusak jaringan yang sehat karena memiliki kemampuan fototermal, yaitu menyerap energi cahaya infra merah dan mengubahnya menjadi panas (Wei dkk, 2024).

Sedangkan Al_2O_3 (alumina) adalah partikel nano yang mudah

ditemukan dan termasuk bahan yang aman untuk manusia dan hewan (Heris dkk, 2006). Partikel nano Al_2O_3 (alumina) memiliki sifat biokompatibel (untuk implan dan alat bedah karena alumina tidak menimbulkan reaksi toksik atau merugikan pada tubuh), kemampuan penghantaran panas yang tinggi (terapi kanker), dan fleksibel dalam berbagai aplikasi medis seperti bidang kesehatan dan kedokteran modern (Islam dkk, 2024)

Alasan tembaga dan alumina digunakan bersama dalam bidang medis dapat menjadikan tambahan keuntungan. Dengan menggabungkan tembaga yang secara signifikan dapat mengoptimalkan konduktivitas termal dan alumina yang menambah biokompatibilitas serta stabilitas, keduanya menghasilkan suatu sistem aplikasi medis yang lebih stabil dan efisien (Ketchate dkk, 2021).

Menurut Norasia dkk (2021) aliran fluida dasar dan partikel nano memiliki sifat-sifat yang berhubungan, yaitu.

1. Massa Jenis Fluida Nano

Fluida dinyatakan dengan massa fluida per satuan *volume* disebut massa Jenis. Massa fluida sendiri adalah banyaknya besaran massa dalam suatu *volume* pada suatu fluida. Massa Jenis fluida nano dituliskan pada persamaan berikut.

$$\rho_{nf} = (1 - \chi)\rho_f + \chi\rho_s$$

dimana:

ρ_{nf} : massa jenis fluida nano (kg/m^3)

χ : fraksi *volume* fluida nano

ρ_f : massa jenis fluida dasar (kg/m^3)

ρ_s : massa jenis partikel nano (kg/m^3)

2. Kekentalan Fluida Nano

Pergerakan aliran fluida terdapat suatu gesekan antar partikelnya, hal ini disebut kekentalan. Aliran fluida akan mengalir lebih mudah jika kekentalannya rendah. Sehingga, besar kecilnya tekanan pada aliran fluida disebabkan oleh kekentalan.

Pada dasarnya fluida nano adalah gabungan dari partikel nano dan fluida dasar. Hal ini menyebabkan adanya hubungan langsung antar kekentalannya, ditunjukkan pada persamaan berikut:

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \chi)^{2.5}}$$

dimana:

μ_{nf} : kekentalan fluida nano (Pa·s)

μ_f : kekentalan fluida dasar (kg/m·s)

χ : fraksi *volume* partikel nano

3. Kalor Khusus Fluida Nano

Fluida nano memiliki karakteristik kalor spesifik yang menggambarkan berapa banyak energi yang diperlukan untuk meningkatkan suhu fluida hingga 1°C. Apabila tekanan fluida konstan, interaksi antara partikel nano dan fluida dasar dapat digunakan untuk memperkirakan kapasitas kalor fluida nano yang mana dituliskan dalam persamaan berikut.

$$(\rho c_p)_{nf} = (1 - \chi)(\rho c_p)_f + \chi(\rho c_p)_s$$

dimana:

- $(\rho c_p)_{nf}$: kalor khusus fluida nano (J/kg·K)
 $(\rho c_p)_f$: kalor khusus fluida dasar (J/kg·K)
 $(\rho c_p)_s$: kalor khusus partikel (kJ/kg.K)
 χ : fraksi *volume* partikel nano
 ρ_f : massa jenis fluida dasar (kg/m³)
 ρ_s : massa jenis partikel nano (kg/m³)
 ρ_{nf} : massa jenis fluida nano (kg/m³)

4. Kondivitas Termal Fluida Nano

Konduktivitas termal merupakan indikator kemampuan bahan dalam menghantarkan energi panas. Hal ini menunjukkan seberapa cepat dan efisien panas dapat bergerak melalui bahan tersebut. Konduktivitas termal dari fluida nano dapat dituliskan dalam bentuk persamaan berikut.

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = \frac{(k_s + 2k_f) - 2\chi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \chi(k_f - k_s)}$$

dimana:

- k_{nf} : konduktivitas termal fluida nano (W/m·K)
 k_f : konduktivitas termal fluida dasar (W/m·K)
 k_s : konduktivitas termal partikel (W/m·K)
 χ : fraksi *volume* dari partikel nano

Parameter χ fraksi *volume* didapat dari pembagian antara *volume* partikel nano (V_s) dengan *volume* keseluruhan (V_{total}) (Mahdi dkk, 2015).

$$\chi = \frac{V_s}{V_{total}}$$

Karakteristik fisik dari fluida dasar (darah) serta partikel nano Cu dan Al₂O₃, disajikan dalam tabel sebagai berikut.

Tabel 2.1. Tabel Karakteristik Fisik (Norasia dkk, 2024)

Parameter	Alumina	Tembaga	Fluida Dasar (Darah)
massa Jenis	3970	8933	1063
Kapasitas Panas	765	385	3594
Konduktivitas Termal	40	400	0.492

D. Fluida Casson Nano

Yousef dkk pada tahun 2022, menjelaskan karakteristik khusus dari fluida casson yang memiliki nilai ambang atau tegangan luluh. Fluida casson nano adalah gabungan dari beberapa atau salah satu partikel nano dan fluida casson. Fluida casson akan mengalami pergerakan jika tegangan luluh melebihi tegangan geser. Dapat digambarkan bahwa perilaku aliran fluida casson memerlukan tegangan geser minimum sebelum aliran terjadi.

Penelitian ini berfokus pada penggunaan partikel nano Cu (tembaga) dan Al_2O_3 (alumina). Keduanya memiliki konduktivitas termal yang cukup baik, menyebabkan transfer panas menjadi lebih efektif dalam pengaplikasianya. Tembaga sendiri dapat diaplikasikan dalam dunia medis karena mempunyai sifat antimikroba alami yang membantu meminimalisir risiko dari infeksi. Sedangkan alumina sangat cocok jika diterapkan untuk aplikasi jangka panjang karena sulit bereaksi dengan fluida dasar (Das dkk, 2003).

Manvi dkk pada tahun 2023, meneliti fluida casson nano dengan aplikasinya dalam berbagai bidang khususnya dalam bidang medis. Fluida casson nano sangat bermanfaat untuk penyaluran obat secara tepat, terapi hipertermia dalam pengobatan kanker, dan sistem pendingin untuk peralatan medis karena memiliki kemampuan untuk meningkatkan perpindahan

panas dan massa. Penggunaan partikel nano Cu (tembaga) dan Al₂O₃ (alumina) dapat mengoptimalkan konduktivitas termal dan memungkinkan pengendalian suhu yang lebih presisi, yang sangat penting dalam proses medis sensitif seperti terapi hipertermia dalam pengendalian jaringan kanker.

E. Aliran Fluida Berdasarkan Waktu

Aliran fluida mengalami perubahan berdasarkan waktu (Norasia, 2018). Menurut Norasia (2018) dengan mempertimbangkan perubahan waktu, aliran fluida dibedakan menjadi dua jenis, yaitu:

1. Fluida Tunak (*Steady State*)

Fluida tunak adalah aliran fluida dimana turunannya sama dengan nol atau tidak berpengaruh terhadap perubahan waktu. Hal ini berarti kecepatan aliran setiap waktu bernilai konstan. Persamaan fluida tunak adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

2. Fluida Tak Tunak (*Unsteady State*)

Fluida tak tunak merupakan aliran fluida yang berubah seiring waktu, sehingga turunannya tidak bernilai nol. Hal ini berarti kecepatan aliran setiap waktu bernilai tidak konstan. Berikut berlaku persamaan fluida tak tunak:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$$

Namun pada penelitian ini, difokuskan pada fluida tak tunak

(*Unsteady State*). Dalam memahami tentang dinamika fluida casson nano, penting untuk mempertimbangkan karakteristik aliran lapisan batas yang memiliki dampak signifikan.

F. Porositas Media Silinder Berpori

Media berpori adalah media yang memiliki lubang-lubang kecil atau pori-pori yang mana tiap lubang-lubang kecil ini memiliki tingkat porositas tertentu. Sedangkan porositas sendiri adalah ukuran seberapa baik air dapat mengalir melalui media berpori tersebut. Tingkat atau nilai porositas dilambangkan dengan ϕ (Triatmojo dkk, 2020).

Porositas pada model aliran fluida melalui silinder berpori memberikan manfaat serta aplikasi yang luas dalam berbagai bidang, khususnya bidang medis. Porositas memiliki peran untuk mengontrol aliran panas dan silinder berpori menyebarkan aliran panas secara merata. Silinder berpori juga bermanfaat sebagai implan karena porositas yang dimiliki dapat mengoptimalkan pertumbuhan jaringan tubuh. Selain itu, silinder berpori berguna dalam terapi jangka panjang atau pori-pori silinder berguna untuk penyaluran obat secara bertahap (Jamil dkk, 2023).

Darcy pada tahun (1856), menemukan bahwa tekanan yang terjadi sepanjang media berpori berkaitan dengan seberapa cepat fluida mengalir melalui media. Penelitian lebih lanjut mengungkapkan bahwa kecepatan rata-rata fluida yang mengalir melalui media berpori tidak memiliki hubungan linear dengan viskositas fluida (μ). Berdasarkan temuan Darcy (1856), dapat

dirumuskan persamaan porositas berikut.

$$\phi = \frac{a\mu}{\rho U_\infty K^*}$$

dimana:

- ϕ : parameter porositas
- a : konstanta
- μ : kekentalan
- ρ : massa Jenis fluida
- U_∞ : kecepatan aliran bebas
- K^* : permeabilitas (daya serap)

Dalam penelitian ini, peneliti mempelajari bentuk dan struktur silinder berpori berdasarkan parameter porositasnya.

G. Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

Lapisan batas merupakan jenis aliran yang terbagi menjadi tiga, yaitu aliran laminar, aliran transisi, serta aliran turbulen. Aliran lapisan batas terbentuk di wilayah sempit di dekat permukaan yang dipengaruhi oleh gaya inersia (hasil gaya dari pergerakan zat cair) dan viskositas suatu benda (Widodo, 2012).

Aliran laminar merupakan pergerakan partikel-partikel cairan secara teratur dan sejajar satu sama lain sepanjang lintasan. Ketika partikel-partikel tidak bergerak secara teratur disebut aliran turbulen. Aliran transisi, atau aliran peralihan terjadi ketika aliran mulai berubah dari keadaan laminar yang teratur ke turbulen yang tidak stabil (Norasia dkk, 2018).

H. Metode Beda Hingga

Persamaan difirensial dapat didekati dengan simulasi numerik, salah satunya dengan metode beda hingga. Terdapat titik-titik diskrit dilambangkan dengan indeks (i), fungsi $y'(x)$ pada titik x_i ditulis f_i , dan jarak antara dua titik diskrit (h). Titik diskrit menjadi kunci simulasi numerik karena dapat direpresentasikan ke dalam bahasa komputer. Menurut Davis (2001) secara umum metode beda hingga dibagi menjadi tiga, yaitu:

1. Pendekatan Beda Maju

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

2. Pendekatan Beda Mundur

$$y'(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

3. Pendekatan Beda Pusat

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

I. Skema *Keller-Box*

Skema *Keller-Box* digunakan dalam simulasi numerik untuk menyelesaikan persamaan lapisan batas dengan menerapkan metode beda hingga. Abu (2018) menjelaskan tentang langkah-langkah penyelesaian skema *Keller-Box* sebagai berikut.

1. Melakukan pengubahan pada persamaan diferensial berordo tinggi menjadi ordo pertama dapat mengubah persamaan

yang awalnya kompleks menjadi lebih sederhana sehingga mempermudah metode numerik. Berikut diberikan contoh dalam mengubah sebuah persamaan diferensial berordo tinggi menjadi ordo pertama:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

didefinisikan bahwa

$$v = \frac{\partial u}{\partial x}$$

sehingga persamaan diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial v}{\partial x}$$

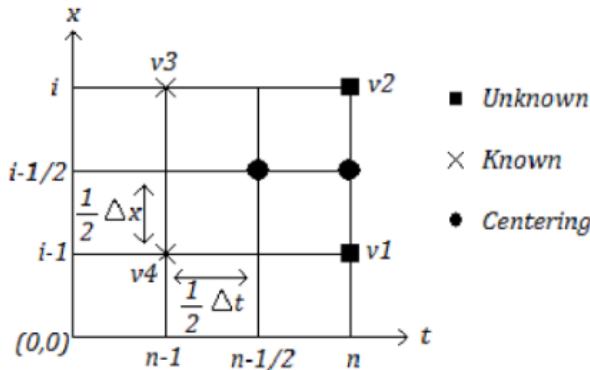
kemudian dapat dituliskan bentuk persamaan berikut.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = h$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial v}{\partial x}$$

2. Menerapkan diskritisasi persamaan dengan metode beda hingga pusat terhadap sumbu- x dan sumbu- y .
3. Hasil persamaan diskritisasi kemudian digunakan metode newton yang diubah menjadi bentuk matriks vektor untuk dilinearisasikan.
4. Langkah terakhir mengeliminasi matriks blok tridiagonal sehingga memperoleh solusi dari hasil linierisasi.

Berikut ini adalah contoh skema *Keller-Box*:



Gambar 2.1. Skema *Keller-Box* (Al-Shibani dkk, 2012)

J. Penelitian Terdahulu

Pada penelitian ini terdapat beberapa penelitian terdahulu yang relevan, dijelaskan sebagai berikut.

1. *"The Effect of Nanoparticles on Drug Distribution in The Mathematical Model of Blood Flow"* (Yolanda Norasia dkk, 2024).

Studi ini menunjukkan bahwa nanopartikel seperti Cu Cu (tembaga) dan Al₂O₃ (alumina) dapat mempercepat aliran darah dan meningkatkan suhu, yang berkontribusi pada distribusi obat yang lebih efisien dalam tubuh.

2. *"Chemical reaction impact on MHD dissipative casson Williamson nanofluid flow over a slippery stretching sheet through porous medium"* (N. S. Yousef dkk, 2022).

Studi ini membahas konsentrasi fluida nano yang berdampak pada pergerakan partikel nano. Kecepatan fluida casson nano dipengaruhi oleh medan magnet. Jika mengandung medan magnet, kecepatan fluida lebih lambat dibandingkan fluida yang tidak mengandung medan magnet.

3. *“Numerical simulation for a casson nanofluid over an inclined vessel surrounded by hot tissue at the microscale”* (A.M. Ismaeel dkk, 2023).

Studi ini menghasilkan bahwa ada beberapa parameter partikel nano yang mempengaruhi kecepatan fluida nano, diantaranya koefisien kelengkungan silinder (K) dan radiasi termal (Rd). Peningkatan nilai K menghambat aliran fluida karena adanya peningkatan gaya elektromagnetik. Sementara itu, peningkatan parameter Rd juga meningkatkan kecepatan fluida dan penyebaran partikel nano di dalam jaringan. Partikel nano yang tersebar lebih maksimal dapat mengurangi gaya viskos, sehingga partikel nano lebih mudah mencapai jaringan tumor. Beberapa parameter yang disesuaikan mengakibatkan penyebaran partikel nano lebih efisien dalam bidang biomedis.

4. *“Hydromagnetic flow of casson nano-fluid across a stretched sheet in the presence of thermoelectric and radiation”* (Md. Yousuf Ali dkk, 2023).

Hasil studi diperoleh bahwa kecepatan fluida nano dipengaruhi oleh berbagai parameter fisik seperti konsentrasi partikel nano, parameter slip velocity, dan medan magnet. Parameter yang ditingkatkan dapat memperlambat kecepatan fluida tetapi dapat meningkatkan

persebaran suhu dan perpindahan panas di dalam media yang digunakan. Pengaruh media berpori juga signifikan dalam menentukan kinerja fluida nano dalam aplikasi praktis, terutama dalam meningkatkan efisiensi perpindahan panas di aplikasi biomedis.

5. “*MHD casson nanofluid boundary layer flow in presence of radiation and non-uniform heat source/sink*” (Bharatkumar K. Manvi dkk, 2023).

Hasil studi mengungkapkan bahwa parameter fluida pada lembar yang diregangkan baik secara langsung maupun tidak langsung mempengaruhi kecepatan dan suhu fluida. Parameter fluida casson nano yang ditingkatkan menyebabkan suhu naik, namun kecepatan fluida berkurang.

6. “*A finite difference study of radiative mixed convection MHD heat propagating casson fluid past an accelerating porous plate including viscous dissipation and Joule heating effects*” (B. Prabhakar Reddy dkk, 2023).

Studi ini mengungkapkan bahwa peningkatan nilai parameter mengurangi pergerakan fluida karena adanya peningkatan parameter magnetik. Sementara itu, peningkatan porositas pada media berpori mempercepat aliran fluida.

7. “*The effect of peristalsis on dispersion in casson fluid flow*” (P. Nagarani dkk, 2024).

Studi ini menemukan bahwa penggunaan model fluida casson memperdalam wawasan mengenai sifat darah non-Newtonian dan dampaknya terhadap distribusi obat

dalam tubuh. Fluida casson secara signifikan memengaruhi perilaku zat terlarut.

Beberapa penelitian terdahulu yang digunakan terdapat persamaan dan perbedaan dengan penelitian yang sedang dilakukan. Berikut disajikan dalam Tabel 2.2

Tabel 2.2. Tabel Persamaan dan Perbedaan Penelitian Terdahulu dengan Penelitian yang sedang Dilakukan

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
1.	Yolanda Norasia dkk (2024) <i>“The Effect of Nanoparticles on Drug Distribution in The Mathematical Model of Blood Flow”</i>	<p>a. Fluida yang digunakan sama-sama fluida nano.</p> <p>b. Dipengaruhi oleh parameter fraksi volume.</p> <p>c. Terdapat partikel nano Cu dan Al₂O₃.</p> <p>d. Media yang digunakan silinder berpori.</p>	<p>a. Peneliti terdahulu tidak menggunakan parameter porositas.</p> <p>b. Penelitian terdahulu menggunakan metode Euler mundur (<i>Backward Euler</i>) dan Algoritma Thomas, penelitian ini metode beda hingga skema <i>Keller-Box</i>.</p>

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
2.	N. S. Yousef dkk (2022) $\text{"Chemical reaction impact on MHD dissipative Casson Williamson nanofluid flow over a slippery stretching sheet through porous medium"}$	a. Jenis fluida yang digunakan fluida casson nano. b. Dipengaruhi oleh parameter fraksi volume, parameter casson, dan parameter porositas. c. Media yang digunakan adalah media berpori.	a. Peneliti terdahulu menggunakan aliran fluida nano <i>williamson</i> , penelitian ini hanya menggunakan fluida nano yang mengandung partikel Cu dan Al_2O_3 . b. Metode peneliti terdahulu adalah <i>runge-kutta</i> , penelitian ini menggunakan metode beda hingga skema <i>Keller-Box</i> .

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
3.	A.M. Ismaeel dkk (2023) <i>“Numerical simulation for a Casson nanofluid over an inclined vessel surrounded by hot tissue at the microscale”</i>	a. Jenis fluida yang digunakan sama-sama fluida casson nano. b. Terdapat parameter casson dan fraksi volume. c. Media yang dipakai sama-sama silinder.	a. Media silinder miring digunakan oleh peneliti terdahulu, penelitian ini menggunakan media silinder berpori. b. Metode peneliti terdahulu adalah bvp4c, penelitian ini metode beda hingga skema <i>Keller-Box</i> . c. Tidak terdapat parameter porositas

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
4.	Md. Yousuf Ali dkk (2023) <i>“Hydromagnetic flow of Casson nano-fluid across a stretched sheet in the presence of thermoelectric and radiation”</i>	<p>a. Jenis fluida yang digunakan sama-sama fluida casson nano.</p> <p>b. Metode yang digunakan sama-sama metode beda hingga skema <i>Keller-Box</i>.</p> <p>c. Parameter sama-sama menggunakan parameter casson dan parameter fraksi volume.</p>	<p>a. Media plat datar yang diregangkan adalah media peneliti terdahulu, penelitian ini menggunakan media silinder berpori.</p> <p>b. Pada penelitian terdahulu tidak memuat parameter porositas, sedangkan penelitian ini memuat parameter porositas karena menggunakan media berpori.</p>

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
5.	Bharatkumar K. Manvi dkk (2023) $\text{"MHD Casson nanofluid boundary layer flow in presence of radiation and non-uniform heat source/sink"}$	a. Jenis fluida yang digunakan sama-sama fluida casson nano. b. Media yang digunakan adalah media berpori. c. Terdapat parameter fraksi volume, parameter casson, dan parameter porositas.	a. Metode yang digunakan peneliti terdahulu adalah <i>runge-kutta</i> , penelitian ini menggunakan metode beda hingga skema <i>Keller-Box</i> . b. Partikel nano pada penelitian terdahulu adalah perak dan tembaga, penelitian ini menggunakan tembaga dan alumina. c. Media berpori pada penelitian terdahulu adalah plat datar berpori yang diregangkan, sedangkan penelitian ini menggunakan silinder berpori.

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
6.	B. Prabhakar Reddy dkk (2023) <i>“A finite difference study of radiative mixed convection MHD heat propagating Casson fluid past an accelerating porous plate including viscous dissipation and Joule heating effects”</i>	a. Media yang digunakan adalah media berpori. b. Fluida yang digunakan fluida casson. c. Sama- sama terdapat parameter casson dan paramater porositas.	a. Skema yang digunakan pada penelitian terdahulu adalah beda hingga <i>Crank Nicolson</i> , penelitian ini skema beda hingga <i>Keller Box</i> . b. Media berpori pada penelitian terdahulu adalah plat berpori bergerak, sedangkan penelitian ini menggunakan silinder berpori. c. Fluida yang digunakan penelitian terdahulu hanya fluida casson, penelitian ini menggunakan fluida casson nano.

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
7.	P. Nagarani dkk (2024) <i>“The effect of peristalsis on dispersion in Casson fluid flow”</i>	a. Fluida yang digunakan sama-sama fluida casson b. Terdapat parameter casson.	a. Metode elemen hingga (FEM) digunakan oleh peneliti terdahulu, penelitian ini menggunakan metode beda hingga skema <i>Keller-Box</i> . b. Parameter peneliti terdahulu hanya parameter casson, penelitian ini menggunakan paramater fraksi volume dan porositas. c. Media yang digunakan pada penelitian terdahulu berbentuk tabung sedangkan penelitian ini silinder berpori.

BAB III

METODE PENELITIAN

A. Langkah-langkah Penelitian

Proses penelitian yang dilakukan terdiri dari beberapa langkah utama yang harus dilakukan, diantaranya:

1. Studi Literatur

Untuk mendukung penelitian, studi literatur mengkaji model-model aliran fluida casson nano pada media berpori dengan mengacu pada sumber-sumber terpercaya, termasuk buku dan jurnal-jurnal ilmiah yang relevan. Selanjutnya dilakukan pengembangan lebih lanjut tentang model matematika aliran fluida casson nano dalam media berpori dari penelitian yang telah dilakukan sebelumnya.

2. Pembangunan Model Matematika

Langkah-langkah berikut adalah proses dalam membangun model matematika:

- i. Membangun model matematika sehingga menghasilkan persamaan kontinuitas dan persamaan momentum dengan melakukan penurunan rumus pada hukum-hukum fisika yang berkaitan.
- ii. Persamaan dimensional pada persamaan kontinuitas dan momentum ditransformasikan menjadi persamaan non-dimensional, fungsi alir, dan persamaan similaritas secara berturut-turut. Tujuannya supaya mempermudah penyelesaian simulasi numerik.

- iii. Selanjutnya akan ditentukan kondisi batas pada persamaan-persamaan yang telah diperoleh.

3. Penyelesaian Model Matematika

Model matematika yang telah didapatkan yaitu dalam bentuk persamaan similaritas. Selanjutnya diselsaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga yang bersekma *Keller-Box*. Berikut langkah-langkah dari penyelesaian numerik.

- i. Hasil analisis lapisan batas pada media berpori dengan fluida casson nano, didapatkan persamaan similaritas ordo tinggi yang mana akan dilakukan penyederhanaan dengan mengubah persamaan ordo tinggi menjadi ordo pertama untuk memudahkan simulasi numerik yang akan dilakukan pada langkah selanjutnya.
 - ii. Ordo pertama persamaan similaritas yang diperoleh selanjutnya diterapkan metode beda hingga melalui proses diskritisasi guna memperkirakan persamaan.
 - iii. Persamaan yang diperoleh dari proses diskritisasi kemudian digunakan metode newton yang diubah menjadi bentuk matriks vektor untuk dilinearisasikan.
 - iv. Untuk mendapatkan solusi, persamaan hasil linierisasi dipecahkan dengan cara menerapkan eliminasi matriks yang berbentuk blok tridiagonal.
- ### 4. Simulasi Numerik Model Matematika Aliran Fluida Casson Nano

Model pada penelitian ini, selanjutnya dilakukan proses simulasi secara numerik dengan algoritma program

yang akan disimulasikan menggunakan bantuan *software* MATLAB R2024b sebagai berikut.

- i. Melakukan proses simulasi secara numerik menerapkan metode beda hingga yang berskema Keller-Box terhadap model matematika yang sudah dibangun pada aliran fluida casson nano dalam media berpori kemudian disimulasikan menggunakan *software* MATLAB R2013b.
 - ii. Langkah berikutnya melakukan simulasi yang akan menghasilkan data berupa grafik pengaruh parameter fraksi *volume* terhadap partikel nano tembaga (Cu) dan alumina (Al_2O_3), parameter casson terhadap partikel nano tembaga (Cu) dan alumina (Al_2O_3), dan parameter porositas terhadap partikel nano tembaga (Cu) dan alumina (Al_2O_3) dengan memasukkan semua nilai parameter dan partikel nano.
 - iii. Apabila simulasi numerik yang dijalankan berjalan lancar, langkah penelitian dapat diteruskan ke langkah berikutnya. Namun, jika terjadi simulasi numerik yang dijalankan terdapat kendala/masalah/gagal, maka simulasi numerik tersebut harus diperbaiki atau diulang kembali sampai tidak terdapat kendala.
5. Analisis Pembahasan dan Hasil yang diperoleh

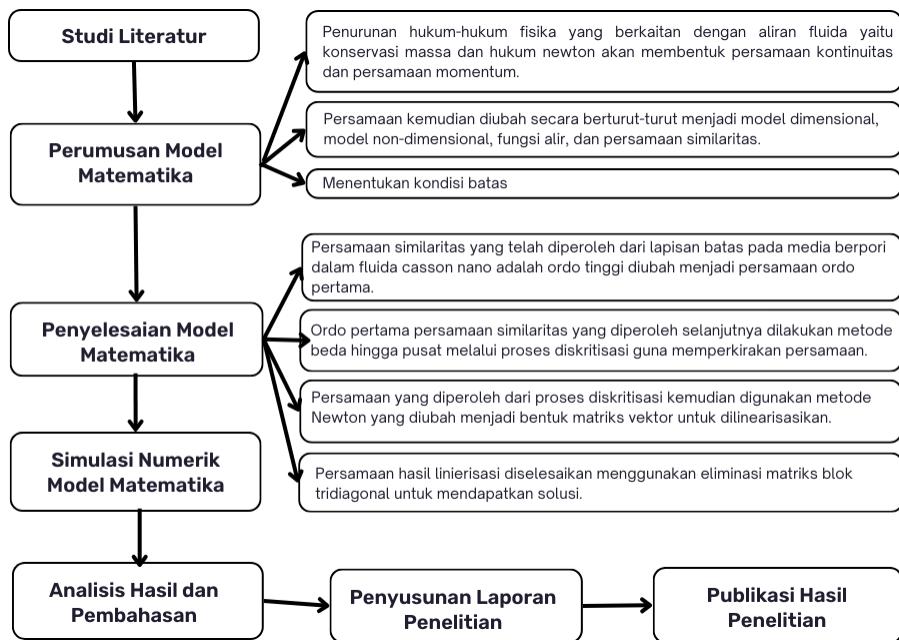
Pada bagian pembahasan akan menganalisis lebih lanjut hasil simulasi numerik yang telah dilakukan. Hasil analisis akan mengetahui bagaimana pengaruh tiga parameter terhadap dua partikel nano yang sudah disimulasikan, yaitu parameter fraksi *volume* terhadap partikel nano tembaga

(Cu) dan alumina (Al_2O_3), parameter casson terhadap partikel nano tembaga (Cu) dan alumina (Al_2O_3), dan parameter porositas terhadap partikel nano tembaga (Cu) dan alumina (Al_2O_3). Setelah mendapatkan hasil analisis simulasi numerik, selanjutnya diambil beberapa kesimpulan.

6. Penyusunan Laporan Penelitian

7. Penerbitan Hasil Laporan Penelitian

Beberapa langkah penelitian disajikan dalam diagram berikut:



Gambar 3.1. Diagram Langkah Penelitian

BAB IV

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

A. Persamaan Pembangun Model Matematika Dimensional

Di bagian ini, peneliti akan menguraikan persamaan dasar yang membentuk persamaan pembangun dari model pergerakan fluida casson nano di sepanjang media silinder berpori. Persamaan dasar meliputi persamaan pembangun kontinuitas dan persamaan pembangun momentum

4.1 Persamaan Kontinuitas

Hukum dasar fisika yang membangun persamaan kontinuitas adalah turunan dari hukum kekekalan massa yang menyebutkan laju perubahan massa terhadap waktu akan bersifat tetap atau konstan (Purnaditya, 2020).

$$m = \text{konstan} \rightarrow \frac{dM_{sys}}{dt} = 0 \quad (4.1)$$

dengan M_{sys} adalah massa dalam sistem yaitu jumlah perkalian antara massa jenis fluida dengan *volume* fluida yang dituliskan dalam persamaan berikut.

$$M_{sys} = \int_{sys} \rho dV \quad (4.2)$$

dimana:

ρ : massa jenis fluida nano

V : *volume* fluida

Selanjutnya mensubtitusikan persamaan (4.1) ke (4.2) sehingga diperoleh.

$$\frac{dM_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{sys} \rho dV = 0 \quad (4.3)$$

Teori pengangkut *Reynold* menuliskan persamaan laju perubahan massa terhadap waktu dari suatu sistem sebagai berikut.

$$\frac{dM_{sys}}{dt} = \int_{cv} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{cs} \rho \mathbf{u} \hat{n} dA \quad (4.4)$$

dimana:

cv : *control volume* (dV)

cs : *control surface* (dA)

\mathbf{u} : vektor kecepatan *volume* terkontrol

\hat{n} : vektor normal keluar masuk *volume* kendali

dA : luas bidang permukaan fluida

$\int_{cv} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$: total besaran dalam *volume* kendali

$\int_{cs} \rho \mathbf{u} \hat{n} dA$: total besaran yang masuk dan keluar
dari bidang permukaan kendali

dikarenakan $\frac{dM_{sys}}{dt} = 0$, maka persamaan (4.4) dapat ditulis seperti berikut.

$$\begin{aligned} \int_{cv} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV &= - \int_{cs} \rho \mathbf{u} \hat{n} dA \\ \int_{cv} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{cs} \rho \mathbf{u} \hat{n} dA &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Persamaan (4.5) menunjukkan rerata dari perubahan jumlah seluruh massa dalam kontrol *volume*. Selanjutnya persamaan (4.5) dikenai teorema Gauss, sehingga menjadi.

$$\begin{aligned}
\int_{cv} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{cv} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dv &= 0 \\
\int_{cv} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) dv &= 0 \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial(\rho \bar{w})}{\partial \bar{z}} &= 0 \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} + \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{y}} + \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}} + \rho \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} &= 0 \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}} + \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) &= 0
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Penelitian aliran fluida casson nano ini bersifat tidak mampu mampat atau kekentalan fluida pada penelitian ini bergantung pada tegangan geser bukan tekanan yang mengakibatkan (ρ) bernilai konstan dan pengaruhnya tidak signifikan karena massa jenis fluida sangat kecil. Persamaan (4.6) dapat ditulis menjadi.

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) &= 0 \\
\rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) &= 0 \\
\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

atau dapat ditulis dalam bentuk 3 dimensi

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0 \tag{4.8}$$

persamaan kontinuitas dalam bentuk 2 dimensi adalah

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.9)$$

Dalam penelitian aliran fluida casson nano ini, menggunakan persamaan kontinuitas 2 dimensi pada persamaan (4.9).

4.2 Persamaan Momentum

Hukum kedua newton membangun persamaan momentum. Menurut Hukum kedua newton, percepatan suatu benda berbanding lurus dengan gaya total yang bekerja padanya dan berbanding terbalik dengan massanya. Dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{cv} \rho \mathbf{u} dv + \iint_{cs} \rho \mathbf{u} dv = \iiint_{cv} F dv \quad (4.10)$$

Persamaan (4.10) dapat ditulis dengan bentuk turunan, yaitu.

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \sum F \quad (4.11)$$

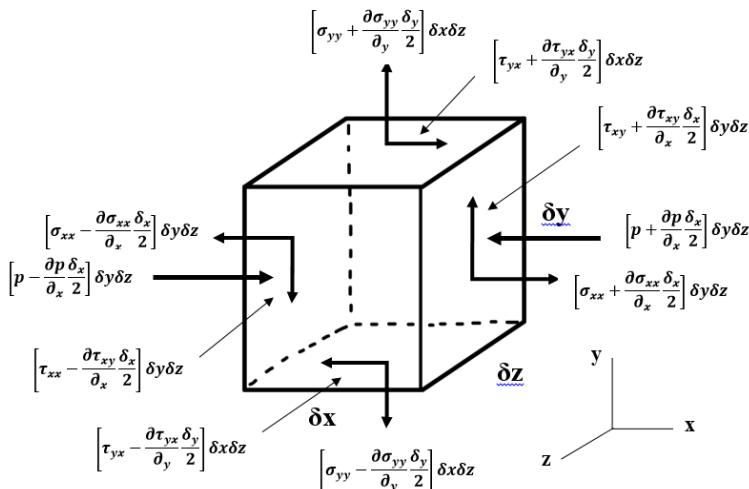
dengan

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} &= u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \end{aligned}$$

dengan $\mathbf{u} = u, v, w$, Dv adalah kecepatan aliran keluar (divergensi) pada seluruh waktu dimensi $(\delta x, \delta y, \delta z)$. Sedangkan Dt adalah kecepatan aliran keluar pada waktu. $\sum F$ adalah unsur-unsur gaya yang mempengaruhi pada fluida casson nano dengan media silinder berpori.

Unsur-unsur gaya yang berpengaruh yaitu (F_s) gaya permukaan dan (F_m) gaya magnetik. Gaya (F_s) berasal dari pengaruh tekanan dan sifat kekentalan fluida, sementara gaya (F_m) dihasilkan oleh interaksi langsung magnet dengan fluida. Sehingga persamaan (4.11) dalam penelitian ini diperoleh persamaan berikut.

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}(\nabla \mathbf{u}) \right) = F_s - F_m \quad (4.12)$$



Gambar 4.1. Komponen Tegangan pada Permukaan Fluida

Pada *control surface*, tegangan normal (σ) dan tegangan geser (τ) mempengaruhi gaya permukaan. Ketika sumbu $-x$ dijumlahkan, diperoleh persamaan berikut.

$$F_{sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z$$

jumlah gaya pada sumbu $-y$ diperoleh.

$$F_{sy} = \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z$$

selanjutnya, jumlah gaya pada sumbu $-z$ diperoleh.

$$F_{sz} = \left(\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) \delta x \delta y \delta z$$

sehingga total gaya permukaan dari tiga sumbu, dituliskan dalam persamaan berikut.

$$\begin{aligned} F_s &= F_{sx}i + F_{sy}j + F_{sz}k \\ F_s &= \left(-\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \hat{i} + \\ &\quad \left(-\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \hat{j} + \\ &\quad \left(-\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) \hat{k} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Asumsi yang digunakan pada penelitian ini yaitu menggunakan aliran fluida casson nano yang bersifat tidak mampu mampat dengan pengaruh dari sifat khusus fluida casson yaitu tegangan luluh, dimana fluida tidak dapat mengalir sebelum mencapai nilai tertentu. Didefinisikan fluida casson nano yang tidak dapat dimampatkan (Ismaeel dkk, 2023). Sehingga didapatkan model casson sebagai berikut:

$$\tau_{ij} = \begin{cases} 2 \left(kc + \frac{\tau_0}{\sqrt{2\pi c}} \right) e_{ij}, & \text{jika } \pi > \pi_c \\ 2 \left(kc + \frac{\tau_0}{2\sqrt{2\pi c}} \right) e_{ij}, & \text{jika } \pi < \pi_c \end{cases} \quad (4.14)$$

dengan (τ_{ij}) adalah nilai tegangan geser fluida casson. (τ_0) adalah nilai dari tegangan luluh fluida casson. (kc) adalah koefisien kekentalan fluida casson. (π_c) adalah nilai ambang dari tegangan geser. Pada fluida casson, menggunakan (τ_{ij}) pada bagian $(\pi > \pi_c)$ dikarenakan fluida casson tidak akan mengalir sampai tegangan melebihi tegangan luluh.

Penelitian ini juga dipengaruhi oleh parameter casson yang disimbolkan β , dengan

$$\beta = kc + \frac{\sqrt{2\pi c}}{\tau_0}$$

sehingga didapatkan tegangan normal dan tegangan geser fluida casson nano yang dipengaruhi oleh tegangan luluh dan paramater casson dalam persamaan berikut.

a. Tegangan normal

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_{yy} &= 2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_{zz} &= 2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\quad (4.15)$$

b. Tegangan geser

$$\begin{aligned}\tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\end{aligned}\quad (4.16)$$

Berikut ini merupakan turunan dari σ_{xx} terhadap x .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= 2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\end{aligned}\tag{4.17}$$

Berikut ini merupakan turunan dari σ_{yy} terhadap y .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= 2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\end{aligned}\tag{4.18}$$

Berikut ini merupakan turunan dari σ_{zz} terhadap y .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &= 2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\end{aligned}\tag{4.19}$$

Berikut ini merupakan turunan dari τ_{xy} terhadap x .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ &= \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)\end{aligned}\tag{4.20}$$

Berikut ini merupakan turunan dari τ_{yx} terhadap y .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ &= \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)\end{aligned}\tag{4.21}$$

Berikut ini merupakan turunan dari τ_{xz} terhadap x .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \\ &= \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)\end{aligned}\quad (4.22)$$

Berikut ini merupakan turunan dari τ_{zx} terhadap z .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \\ &= \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right)\end{aligned}\quad (4.23)$$

Berikut ini merupakan turunan dari τ_{yz} terhadap y .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) \\ &= \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right)\end{aligned}\quad (4.24)$$

Berikut ini merupakan turunan dari τ_{zy} terhadap z .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) \\ &= \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)\end{aligned}\quad (4.25)$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (4.17)-(4.25) ke

persamaan (4.13) didapatkan.

$$\begin{aligned}
 F_s &= F_{sx}i + F_{sy}j + F_{sz}k \\
 &= \left(-\frac{\partial \rho}{\partial x} + 2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \right) i + \left(-\frac{\partial \rho}{\partial y} + 2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \right) j + \left(-\frac{\partial \rho}{\partial z} + 2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) \right) k
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

didapatkan jumlah dari tegangan normal dan tegangan geser yang dipengaruhi oleh tegangan luluh adalah sebagai

berikut.

$$\begin{aligned}
 & 2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \\
 & \mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \\
 & = \mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \\
 & \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \\
 & = \mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \\
 & \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) \\
 & = \mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \nabla^2 u + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{u})
 \end{aligned}$$

Karena nilai $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ maka persamaan menjadi.

$$\mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \nabla^2 u$$

Sehingga didapatkan gaya geser pada sumbu x, y , dan z adalah

$$\begin{aligned}
 F_{sx} &= -\frac{\partial \rho}{\partial x} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \nabla^2 u \\
 F_{sy} &= -\frac{\partial \rho}{\partial y} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \nabla^2 v \\
 F_{sz} &= -\frac{\partial \rho}{\partial z} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \nabla^2 u
 \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan persamaan gaya permukaan pada

fluida casson nano sebagai berikut.

$$F_s = -\nabla \rho + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.27)$$

Penelitian ini menggunakan geometri benda berbentuk silinder berpori yang dilalui aliran fluida nano. Maka aliran tersebut terinduksi magnet dan sumber magnetnya berasal dari silinder berpori. Oleh karena itu berlaku hukum Darcy $\frac{\mu_{nf}}{K^*}$. Sehingga dapat dituliskan gaya magnetik yang bekerja seperti berikut.

$$F_m = J \times B - \frac{\mu_{nf}}{K^*} u \quad (4.28)$$

dengan (J) yaitu kepadatan arus listrik serta (B) merupakan medan magnet fluida nano berasal dari silinder berpori yang terinduksi magnet. Gaya magnetik pada aliran fluida nano juga terdapat gaya *lorentz* dituliskan seperti berikut.

$$F_m = J \times B \quad (4.29)$$

Kepadatan arus listrik menurut hukum Ohm adalah

$$J = \sigma(E + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (4.30)$$

medan magnet yang dihasilkan silinder berpori (E), nilai medan magnet total (B), serta daya hantar listrik disimbolkan (σ). Dikarenakan tidak terdapat medan listrik dari luar aliran fluida, maka nilai $E = 0$.

Substitusikan persamaan (4.30) ke (4.28), sehingga

diperoleh persamaan berikut.

$$F_m = \sigma(\mathbf{u} \times B) \times B - \frac{\mu_{nf}}{K^x}(u, v, w) \quad (4.31)$$

dengan mensubtitusikan $B = b + B_o$, dengan diketahui.

b = besarnya medan magnet dari fluida yang terbentuk oleh silinder berpori

B_o = medan magnet dari silinder berpori yang menghasilkan magnet

$b = 0$ = besaran besar induksi magnet pada fluida nano sehingga persamaan (4.31) menjadi

$$\begin{aligned} F_m &= \sigma(\mathbf{u} \times (b + B_o)) \times (b + B_o) - \frac{\mu_{nf}}{K^x}(u, v, w) \\ &= \sigma((\mathbf{u} \times b) + (\mathbf{u} \times B_o)) \times (b + B_o) - \frac{\mu_{nf}}{K^x}(u, v, w) \\ &= \sigma(\mathbf{u} \times b) \times (B_o) - \frac{\mu_{nf}}{K^x}(u, v, w) \end{aligned} \quad (4.32)$$

dengan

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times B_o) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & w \\ 0 & 0 & B_o \end{vmatrix} \\ &= (vB_o)i - (uB_o)j + 0k \end{aligned} \quad (4.33)$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times B_o) \times (B_o) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ vB_o & -uB_o & 0 \\ 0 & 0 & B_o \end{vmatrix} \\ &= -(uB_o^2)i - (vB_o^2)j + 0k \\ &= (-uB_o^2, -vB_o^2, 0) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Persamaan (4.34) yang telah didapat disubtitusikan ke persamaan (4.28), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} F_m &= \sigma(-uB_0^2, -vB_0^2, 0) - \frac{\mu_{nf}}{K^*}(u, v, w) \\ F_m &= -\sigma B_0^2 \mathbf{u} - \frac{\mu_{nf}}{K^*} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Persamaan dari (F_s) gaya permukaan dan (F_m) gaya magnet yang telah diperoleh, kemudian disubtitusikan ke persamaan (4.12). Sehingga dituliskan persamaan momentum sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \right) &= \sum F \\ \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \right) &= \sum F_s - F_m \\ &= -\nabla \rho + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \nabla^2 \mathbf{u} + \sigma B_0^2 \mathbf{u} - \frac{\mu_{nf}}{k^*} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Langkah selanjutnya persamaan (4.36) dituliskan dalam arah $-x$ dan $-y$. Maka persamaan momentum arah $-x$ adalah

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ &\quad + \sigma B_0^2 \bar{u} + \frac{\mu_{nf}}{k^*} \bar{u} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Persamaan momentum arah $-y$ adalah

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ &+ \sigma B_0^2 \bar{v} - \frac{\mu_{nf}}{k^*} \bar{v} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Diasumsikan fluida dalam keadaan diam jika $\bar{t} = 0$ sehingga tidak ada kecepatan yang terjadi dari arah \bar{x} dan \bar{y} yaitu $\bar{u} = \bar{v} = 0$. Jika $\bar{t} > 0$ ketika fluida mendapat pengaruh berupa panas di sekitar permukaan silinder tetapi fluida tidak bergerak sehingga kecepatan $\bar{u} = \bar{v} = 0$ saat $\bar{y} = 0$. Dimana \bar{y} adalah posisi terjadinya perpindahan panas aliran fluida casson nano melalui silinder berpori. Sedangkan \bar{t} menggambarkan aliran fluida dari kondisi diam ($\bar{u} = \bar{v} = 0$) hingga membentuk kecepatan ($\bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x})$) yang merupakan perwakilan aliran bebas dengan kecepatan konstan saat \bar{y} menuju tak hingga. Kondisi batas persamaan dimensional sebagai berikut.

$$\begin{aligned} &\text{jika } \bar{t} = 0; \bar{u} = \bar{v} = 0, \forall \bar{x}, \bar{y}, \\ &\text{jika } \bar{t} > 0; \bar{u} = \bar{v} = 0, \text{ saat } \bar{y} = 0, \\ &\bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), \text{ saat } \bar{y} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

B. Model Matematika Non-Dimensional

Persamaan model matematika pada aliran fluida casson nano yang awalnya berbentuk persamaan dimensional akan dilakukan transformasi menjadi persamaan non-dimensional. Tujuannya agar memudahkan dalam proses simulasi

numerik. Transformasi persamaan menggunakan perubahan parameter dan variabel dimensional menjadi non-dimensional sebagai berikut (Norasia dkk, 2021)(Jamil dkk, 2023).

$$x = \frac{\bar{x}}{a} \quad (4.39)$$

dengan

x = sumbu - x non-dimensional

\bar{x} = sumbu - x dimensional

a = jari jari silinder

$$y = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{y}}{a} \quad (4.40)$$

dengan

y = sumbu - y non-dimensional

$Re^{\frac{1}{2}}$ = bilangan reynolds

\bar{y} = sumbu - y dimensional

a = jari-jari silinder

$$u = \frac{\bar{u}}{U_{\infty}} \quad (4.41)$$

dengan

u = kecepatan searah sumbu - x non-dimensional

\bar{u} = kecepatan searah sumbu - x dimensional

U_{∞} = kecepatan aliran bebas

$$v = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}}{U_{\infty}} \quad (4.42)$$

dengan

v = kecepatan searah sumbu $-y$ non-dimensional

$Re^{\frac{1}{2}}$ = bilangan *reynolds*

\bar{v} = kecepatan searah sumbu $-y$ dimensional

U_{∞} = kecepatan aliran bebas

$$t = \frac{\bar{t}U_{\infty}}{a} \quad (4.43)$$

dengan

t = waktu non-dimensional

\bar{t} = waktu dimensional

U_{∞} = kecepatan aliran bebas

a = jari-jari silinder

$$p = \frac{\bar{p}}{\rho U_{\infty}} \quad (4.44)$$

dengan

p = tekanan non-dimensional

\bar{p} = tekanan dimensional

ρ_{nf} = massa jenis

U_{∞} = kecepatan aliran bebas

$$r = \frac{\bar{r}}{a} \quad (4.45)$$

dengan

r = jari-jari non-dimensional

\bar{r} = jari-jari dimensional

a = jari-jari silinder

Beberapa parameter non-dimensioanl yang digunakan sebagai berikut:

$$M = \frac{\sigma a B_0^2}{\rho_{nf} U_{\infty}} \quad (4.46)$$

dengan

- M = parameter magnetik
- σ = daya hantar listrik
- a = jari-jari silinder
- B_0^2 = medan magnet
- ρ_{nf} = massa jenis fluida
- U_∞ = kecepatan aliran bebas

$$\phi = \frac{a\mu_{nf}}{\rho_{nf}K^*} \quad (4.47)$$

dengan

- ϕ = parameter porositas
- a = koefisien media berpori
- μ_{nf} = kekentalan fluida nano
- ρ_{nf} = massa jenis fluida nano
- K^* = daya serap media berpori

$$Re = \frac{U_\infty a}{v_{nf}} \quad (4.48)$$

dengan

- Re = bilangan *reynolds*
- U_∞ = kecepatan aliran bebas
- a = koefisien media berpori
- v_{nf} = kekentalan kinematik

$$v_{nf} = \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \quad (4.49)$$

dengan

- v_{nf} = kekentalan kinematik
- μ_{nf} = kekentalan fluida nano
- ρ_{nf} = massa jenis fluida nano

Selanjutnya persamaan (4.39) - (4.49) disubtitusikan ke persamaan (4.9), (4.37), dan (4.38) terdapat pada lampiran 2. Sehingga diperoleh persamaan berikut.

a. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} = 0 \quad (4.50)$$

b. Persamaan Momentum Sumbu $-x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (M + \phi)u \end{aligned} \quad (4.51)$$

c. Persamaan Momentum Sumbu $-y$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \\ \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{Re} (M + \phi)u \end{aligned} \quad (4.52)$$

untuk menyederhanakan dan mempresentasikan perilaku fluida maka dibuat beberapa asumsi untuk menentukan kondisi awal dan kondisi batas berdasarkan variabel non-dimensional sebagai berikut.

jika $t = 0$; $u = v = 0$, $\forall x, y$,

jika $t > 0$; $u = v = 0$, saat $y = 0$,

$u = u_e(x)$, saat $y \rightarrow \infty$.

Diasumsikan fluida dalam keadaan diam jika $t = 0$ sehingga

tidak ada kecepatan yang terjadi dari arah x dan y yaitu $u = v = 0$. Jika $t > 0$ ketika fluida mendapat pengaruh berupa panas di sekitar permukaan silinder tetapi fluida tidak bergerak sehingga kecepatan $u = v = 0$ saat $y = 0$. Dimana y adalah posisi terjadinya perpindahan panas aliran fluida casson nano melalui silinder berpori. Sedangkan t menggambarkan aliran fluida dari kondisi diam ($u = v = 0$) hingga membentuk kecepatan ($u = u_e(x)$) yang merupakan perwakilan aliran bebas dengan kecepatan konstan saat y menuju tak hingga.

C. Teori Lapisan Batas

Pendekatan lapisan batas digunakan untuk menyederhanakan persamaan non-dimensional dengan mensubtitusikan nilai bilangan reynolds. Bilangan Reynolds adalah angka tanpa satuan yang digunakan dalam dinamika fluida untuk memprediksi pola aliran (Nadeem dkk, 2023). Secara umum, bilangan reynolds didefinisikan sebagai perbandingan antara gaya inersia terhadap gaya viskos dalam fluida. Pada penelitian ini untuk memungkinkan penyerdehanaan persamaan momentum menjadi bentuk yang lebih sederhana akan disubtitusikan bilangan reynolds menuju tak hingga. Hasilnya ketebalan lapisan batas akan menuju nol dan memberikan batas-batas pada perilaku fluida (Schlichting dkk, 2007). Selanjutnya mensubtitusikan nilai bilangan Reynolds ($Re \rightarrow \infty$) maka ($\frac{1}{Re} \rightarrow 0$), sehingga persamaan (4.50) - (4.52) menjadi.

a. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} = 0 \quad (4.53)$$

b. Persamaan Momentum Sumbu $-x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &+ (M + \phi)u \end{aligned} \quad (4.54)$$

c. Persamaan Momentum Sumbu $-y$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.55)$$

Pada persamaan momentum sumbu y didapatkan pengaruh tekanan pada sumbu $y = 0$, maka aliran yang fluida hanya dianggap bergerak pada arah x dengan kecepatan di dalam lapisan batas arah $x = u$. Langkah selanjutnya mengganti kecepatan di dalam lapisan batas (u) menjadi kecepatan di luar lapisan batas (u_e). Tujuan langkah ini adalah untuk menyederhanakan lapisan batas pada persamaan momentum. Penelitian ini menggunakan silinder berpori, dimana kecepatan aliran di luar lapisan batasnya adalah $u_e = \sin x$ (Ingham dan Merkin, 1981). Maka persamaan (4.54) menjadi.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} \\ &+ (M + \phi)u_e \end{aligned} \quad (4.56)$$

Setelah dilakukan substitusi $u_e = \sin x$ ke dalam persamaan momentum. Didapatkan beberapa turunan yang bernilai nol dikarenakan u_e hanya bergantung pada x dan tidak bergantung pada y serta tidak ada variabel t pada $u_e = \sin x$ karena aliran u_e tidak berubah terhadap waktu maka didapat turunan terhadap $t = 0$. kecepatan aliran bebas dalam bentuk silinder yaitu $u_e(x) = \sin x$, diperoleh:

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial u_e}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0 \quad (4.57)$$

kemudian dilakukan substitusi pada persamaan (4.57) ke (4.56), sehingga didapatkan.

$$\begin{aligned} u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + (M + \phi)u_e \\ \Leftrightarrow -\frac{\partial p}{\partial x} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} - (M + \phi)u_e \end{aligned} \quad (4.58)$$

Substitusikan lagi persamaan (4.58) ke (4.54), maka persamaan dapat dituliskan.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &\quad + (M + \phi)(u - u_e) \end{aligned} \quad (4.59)$$

D. Fungsi Alir

Fungsi alir adalah suatu fungsi yang digunakan untuk menghubungkan dua fungsi kecepatan yaitu kecepatan u yang alirannya berada pada arah x dan v berada pada arah y , dengan adanya fungsi alir (ψ) dapat menyederhanakan

banyak persamaan dan secara komputasi dapat dibuat dalam satu variabel. Variabel fungsi alir adalah sebagai berikut (Mohammad, 2014).

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.60)$$

Substitusikan persamaan fungsi alir (4.60) pada persamaan kontinuitas (4.53) dan persamaan momentum sumbu - x (4.59). Diperoleh persamaan berikut.

a. Persamaan Kontinuitas

$$\begin{aligned} \frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-r \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \end{aligned} \quad (4.61)$$

b. Persamaan Momentum

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \\ &\quad + (M + \phi)(u - u_e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \\ u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + (M + \psi) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) & \end{aligned} \quad (4.62)$$

Setelah persamaan kontinuitas dan persamaan momentum disubtitusikan dengan variabel fungsi alir. Maka ditentukan kondisi batas yang dapat digunakan untuk menyederhanakan perhitungan.

jika $t = 0$; $\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \forall x, y,$

jika $t > 0$; $\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ saat $y = 0$,

$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e(x)$, saat $y \rightarrow \infty$.

Saat $t = 0$, fungsi alir (ψ) dan turunannya terhadap y bernilai 0 untuk semua x dan y karena menunjukkan saat awal fluida keadaan diam atau tidak ada aliran yang terbantuk.

Saat $t > 0$ pada permukaan $y = 0$, fungsi alir (ψ) terhadap y bernilai 0 karena kecepatan fluida dipengaruhi kekentalan fluida. disebut kondisi no-slip yang berarti fluida tidak bergerak disepanjang permukaan silinder berpori.

Saat $t > 0$ pada permukaan y menuju tak hingga kecepatan aliran fluida adalah kecepatan di luar lapisan batas dimana fluida tidak lagi dipengaruhi oleh gesekan dengan permukaan dan bergerak dengan kecepatan aliran bebas $u_e(x)$. Ini menunjukkan bahwa fluida di luar lapisan batas memiliki kecepatan yang sudah ditentukan sebagai $u_e(x)$.

E. Persamaan Similaritas

Persamaan similaritas dalam analisis fluida digunakan untuk menyederhanakan persamaan parsial menjadi persamaan

diferensial biasa. Pendekatan ini pertama kali diperkenalkan oleh Ludwig Prandtl dan kemudian dikembangkan oleh Henrich Blacius yang memperkenalkan variabel similaritas (Schlichting dkk, 2007).

$$\psi = t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t), \quad \eta = \frac{y}{t^{1/2}} \quad (4.63)$$

Penelitian ini menggunakan jenis fluida unsteady sehingga solusi dari lapisan batas bergantung pada waktu $t^{(1/2)}$. Dimana $u_e(x)$ adalah kecepatan aliran bebas yang bergantung pada x . $r(x)$ adalah faktor skala dari silinder berpori. $f(x, \eta, t)$ adalah fungsi yang menyatakan semua variabel dalam satu ekspresi yang memungkinkan untuk merubah persamaan parsial menjadi persamaan diferensial biasa. Sedangkan η sendiri adalah variabel yang digunakan untuk menyederhanakan persamaan diferensial yang kompleks. Penggunaan variabel η berfungsi untuk mendapatkan solusi universal yang tidak bergantung pada waktu (t), tetapi hanya bergantung pada (η). Membagi y dengan $t^{(1/2)}$ dapat mempermudah menyederhanakan persamaan lapisan batas. Subtitusikan variabel similaritas (4.63) pada persamaan (4.62) terdapat pada lampiran 3,

maka diperoleh.

$$\begin{aligned}
 & \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] = \\
 & t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) - \\
 & t(M + \phi) \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right)
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Untuk memudahkan analisis persamaan momentum langkah selanjutnya adalah menentukan titik stagnasi, yaitu titik dimana kecepatan fluida bernilai nol. Pada penelitian ini diambil titik stagnasi $x \approx 0$ dikarenakan adanya kaitan dengan efek kekentalan dan porositas silinder. Selanjutnya menentukan nilai u_e (kecepatan aliran bebas) dan $\frac{\partial u_e}{\partial x}$ (bentuk turunannya) untuk disubtitusikan ke dalam persamaan momentum (Ingham dan Merkin). $u_e = \sin x = 0$ dan turunannya $\frac{\partial u_e}{\partial x} = \cos x = 1$ pada saat $x = 0$, hal ini sesuai dengan konsep titik stagnasi dimana fluida melambat hingga berhenti begitu juga dengan turunannya. Tujuannya untuk menyederhanakan persamaan. Maka persamaan momentum menjadi.

$$\begin{aligned}
 & \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] \\
 & = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + 0 - t(M + \phi) \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

Kemudian profil kecepatan non-dimensional aliran fluida yaitu $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ akan dimisalkan f' . Profil ini menunjukkan

perubahan kecepatan fluida dari nol di permukaan hingga mencapai kecepatan bebas di luar lapisan batas. Persamaan (4.64) menjadi.

$$\begin{aligned} & \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) f''' + \frac{\eta}{2} f'' + t(1 - (f)^2 + f \cdot f'') \\ &= t \frac{\partial f'}{\partial t} - t(M + \phi)(f' - 1) \end{aligned} \quad (4.65)$$

dengan kondisi batas persamaan similaritas sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & \text{jika } t = 0; f = f' = 0, \forall x, \eta, \\ & \text{jika } t > 0; f = f' = 0, \text{ saat } \eta = 0, \\ & f' = 1, \text{ saat } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Saat kondisi batas $t = 0$ menunjukkan bahwa belum ada pergerakan fluida yang terjadi. Sehingga mengakibatkan fungsi f dan turunannya $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ bernilai 0. Sedangkan saat kondisi batas $t > 0$ saat berada di permukaan $\eta = 0$ terjadi kondisi *no-slip* yaitu kecepatan fluida = kecepatan permukaan bernilai 0. Jika aliran terjadi jauh dari permukaan $\eta \rightarrow \infty$ maka kecepatan fluida mencapai kecepatan bebas $u_e(x)$ di luar lapisan batas.

Terdapat beberapa variabel yang memiliki hubungan antara fluida nano dengan fluida dasar yaitu massa jenis fluida nano, kekentalan fluida nano, kalor khusus fluida nano serta konduktivitas termal fluida nano (Norasia dkk, 2021). Maka

diperoleh persamaan berikut.

$$\begin{aligned}
 v_{nf} &= \frac{\mu_{nf}}{\rho} \\
 v_{nf} &= \frac{\mu_{nf}}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{(1-\chi)\rho_f + \chi\rho_s} \\
 v_{nf} &= v_f \left(\frac{1}{(1-\chi)^{2.5}} \frac{1}{(1-\chi) + \chi(\frac{\rho_s}{\rho_f})} \right) \\
 \frac{v_{nf}}{v_f} &= \frac{1}{(1-\chi)^{2.5}((1-\chi) + \chi(\frac{\rho_s}{\rho_f}))}
 \end{aligned}$$

Pada persamaan (4.65) subtitusikan nilai $t = 0$ untuk memperoleh kondisi awal fungsi f, f', f'', f''' yang selanjutnya dapat diselesaikan dengan kondisi batas dari persamaan similaritas (4.66). Kondisi batas terlampir pada lampiran 4, didapatkan kondisi awal fungsi f, f', f'', f''' sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 f &= \eta \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2^{\frac{v_{nf}}{v_f}} (1 + \frac{1}{\beta})} \right) + 2 \sqrt{\frac{\frac{v_{nf}}{v_f} (1 + \frac{1}{\beta})}{\pi}} \left(e^{-\frac{\eta}{4A}} - 1 \right) \\
 f' &= \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2^{\frac{v_{nf}}{v_f}} (1 + \frac{1}{\beta})} \right) \\
 f'' &= \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{v_{nf}}{v_f} (1 + \frac{1}{\beta})}} e^{-\frac{\eta^2}{4^{\frac{v_{nf}}{v_f}} (1 + \frac{1}{\beta})}} \\
 f''' &= \frac{\eta}{2^{\frac{v_{nf}}{v_f}} (1 + \frac{1}{\beta}) \sqrt{\pi \frac{v_{nf}}{v_f} (1 + \frac{1}{\beta})}} e^{-\frac{\eta^2}{4^{\frac{v_{nf}}{v_f}} (1 + \frac{1}{\beta})}}
 \end{aligned}$$

Setelah dilakukan perumusan model aliran fluida casson

nano melalui silinder berpori, diperoleh persamaan akhir model sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) f''' + \frac{\eta}{2} f'' + t(1 - (f)^2 + f \cdot f'') \\ &= t \frac{\partial f'}{\partial t} - t(M + \phi)(f' - 1) \end{aligned}$$

F. Penyelesaian Numerik Model Matematika

Setelah mendapatkan model matematika, langkah berikutnya adalah mensimulasikan aliran fluida Casson nano yang melewati silinder berpori dengan solusi numerik. Setelah itu menyelesaiakannya menggunakan metode *Keller-Box*. Berikut langkah-langkah yang terdapat dalam skema *Keller-Box* (Cebeci, 2002).

1. Melakukan pemisalan agar persamaan yang sebelumnya berorde tinggi menjadi orde pertama. Menghasilkan sistem yang lebih mudah dipecahkan dengan teknik numerik dan memudahkan langkah diskritisasi.
2. Melakukan proses diskritisasi menggunakan metode beda hingga pusat.
3. Menerapkan metode Newton yang berbentuk matriks vektor digunakan untuk memperoleh persamaan-persamaan melalui proses linearisasi. Digunakan untuk mendekati solusi non-linear dengan iterasi sehingga sistem menjadi lebih mudah dihitung dalam setiap iterasi.

4. Melakukan eliminasi matriks blok tridiagonal setelah mendapatkan hasil dari proses linearisasi. Tujuannya agar sistem linier dapat diselesaikan dengan lebih cepat dan akurat.

Simulasi model matematika selanjutnya dilakukan dengan memasukkan data ke dalam software MATLAB r2024b, yang menghasilkan output yang menunjukkan pengaruh parameter fraksi volum (χ), parameter casson (β), dan parameter porositas (ϕ) terhadap partikel nano tembaga dan alumina.

a. Pemisalan Notasi

Pemisalan notasi dilakukan untuk mempermudah penyelesaian skema *Keller-Box* yang harus berbentuk persamaan orde satu. Berikut persamaan dalam pemisalan notasi.

$$\begin{aligned} f' &= u \\ u' &= v \end{aligned} \tag{4.67}$$

Subtitusi persamaan (4.67) ke (4.65), persamaan ordo satu didapatkan seperti berikut

$$\begin{aligned} \frac{v_v f}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) v' + \frac{\eta}{2} v + t(1 - (u)^2 + fv) + \\ t(M + \phi)(u - 1) = t \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \tag{4.68}$$

b. Diskritisasi Model

Pada persamaan (4.67) - (4.68) akan dilakukan pendiskritisasi melalui metode beda hingga. Persamaan (4.67) berbentuk linear sehingga proses diskritisasi

terdapat pada titik tengah atau titik pusat garis V_1, V_2 yaitu $(y_{i-1/2}, t_n)$. Persamaan (4.68) berbentuk non-linear sehingga diskritisasi terlatak pada titik pusat garis V_1, V_2, V_3, V_4 yaitu $(y_{i-1/2}, t_{n-1/2})$. Sehingga didapatkan hasil diskritasi sebagai berikut.

$$\frac{(f_j^n - f_{j-1}^n)}{l_j} = u_{j-\frac{1}{2}}^n \rightarrow \frac{1}{l_j} (f_j^n + f_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (4.69)$$

$$\frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{l_j} = v_{j-\frac{1}{2}}^n \rightarrow \frac{1}{l_j} (u_j^n + u_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (v_j^n + v_{j-1}^n) \quad (4.70)$$

Diskritisasi persamaan (4.68) diperoleh:

$$\frac{1}{2} \left[(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = t^{n-\frac{1}{2}} \left[\frac{u_{j-\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right]$$

dengan

$$\begin{aligned} (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left[\frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) v' + \frac{\eta}{2} v + t(1 - (u)^2 + fv) \right. \\ &\quad \left. + t(M + \phi)(u - 1) = t \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \\ &= \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^n \\ &\quad + t^n (1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n) + t^n (M + \phi) \\ &\quad (u_{j-\frac{1}{2}}^n - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left[\frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) v' + \frac{\eta}{2} v + +t(1 - (u)^2 + fv) \right. \\
&\quad \left. + t(M + \phi)(u - 1) = t \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&= \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&\quad + t^{n-1} (1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + t^{n-1} \\
&\quad (M + \phi)(u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 1)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
&\frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^n + t^n \\
&(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n) + t^n (M + \phi)(u_{j-\frac{1}{2}}^n - 1) + \\
&\frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + t^{n-1} \\
&(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + t^{n-1} (M + \phi)(u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 1) \\
&= 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

atau dapat dituliskan:

$$\begin{aligned}
 & \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^n + t^n \\
 & (1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n) + t^n (M + \phi) (u_{j-\frac{1}{2}}^n - 1) - \\
 & 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} \right) + \\
 & \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + t^{n-1} (1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + t^{n-1} \\
 & (M + \phi) (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 1) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

c. Linearisasi Model

Setelah mendapatkan hasil dari diskritisasi model, kemudian dilakukan linierisasi model pada persamaan (4.69) - (4.71) dilinearisasi dengan metode Newton. Bentuk iterasi (*i*) dari metode Newton, yaitu:

$$\begin{aligned}
 f_j^{i+1} &= f_j^i + \delta f_j^i \\
 u_j^{i+1} &= u_j^i + \delta u_j^i \\
 v_j^{i+1} &= v_j^i + \delta v_j^i
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

Substitusikan (4.72) ke (4.69) - (4.71), diperoleh

$$\begin{aligned}
 & (\delta f_j^n - \delta f_{j-1}^n) - \frac{l_j}{2} (\delta p_j - \delta p_{j-1}) \\
 & = - (f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (u_j^n - u_{j-1}^n)
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta u_j^n - \delta u_{j-1}^n) - \frac{l_j}{2} (\delta v_j - \delta v_{j-1}) \\
&= - (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (v_j^n - v_{j-1}^n)
\end{aligned} \tag{4.74}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{(\delta v_j - \delta v_{j-1})}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} \\
& \left(v_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{(\delta u_j - \delta u_{j-1})}{l_j} \right) + t^n \left[1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n + \right. \\
& \left. \frac{(\delta u_j - \delta u_{j-1})}{l_j} \right)^2 + \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{(\delta f_j - \delta f_{j-1})}{l_j} \right) (v_{j-\frac{1}{2}}^n + \right. \\
& \left. \frac{(\delta v_j - \delta v_{j-1})}{l_j} \right] + t^n (M + \phi) \left((u_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{(\delta u_j - \delta u_{j-1})}{l_j} - 1) \right. \\
& \left. - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) = R1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\delta_j - \delta v_{j-1}}{l_j} \right) - t^n 2 u_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) \\
& - t^n \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right)^2 + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) + t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& \left(\frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) + t^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) + t^n \\
& \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) + t^n (M + \phi) \\
& \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) = \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^n - t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n - t^n (M + \phi) \\
& (u_{j-\frac{1}{2}}^n - 1) + t^n (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n + R1
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Selanjutnya menghilangkan orde tinggi pada $\delta f_j^i, \delta p_j^i, \delta q_j^i$ yaitu dengan menyederhanakan persamaan sehingga diperoleh.

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta u_j - \delta u_{j-1}) = (r_1)_j \tag{4.76}$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta v_j - \delta v_{j-1}) = (r_2)_j \tag{4.77}$$

$$\begin{aligned}
& (a_1)_j \delta f_j + (a_2)_j \delta f_{j-1} + (a_3)_j \delta u_j + (a_4)_j \delta u_{j-1} \\
& + (a_5)_j \delta v_j + (a_6)_j \delta v_{j-1} = (r_3)_j
\end{aligned} \tag{4.78}$$

dengan

$$\begin{aligned}
(r_1)_j &= - (f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (u_j^n - u_{j-1}^n) \\
(r_2)_j &= - (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (v_j^n - v_{j-1}^n) \\
(r_3)_j &= - \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^n - t^n \\
& (1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n) - t^n (M + \phi) (u_{j-\frac{1}{2}}^n - 1) \\
& + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} \right) \\
& - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - t^{n-1} (1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\
& - t^{n-1} (M + \phi) (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 1) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\text{dimisalkan } V = -\frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$(a_1)_j = \frac{1}{2} t^n v_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_2)_j = (a_1)_j$$

$$(a_3)_j = t^n u_{j-\frac{1}{2}}^n - (M + \phi)t^n - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}$$

$$(a_4)_j = -t^n u_{j-\frac{1}{2}}^n - (M + \phi)t^n - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}$$

$$(a_5)_j = \frac{V}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{1}{2} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_6)_j = -\frac{V}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{1}{2} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

dengan melihat kondisi batas pada persamaan similaritas, diperoleh persamaan kondisibatas berikut ini.

$$\delta f_0 = 0, \quad \delta p_0 = 0, \quad \delta p_N = 0$$

d. Penyelesaian Linearisasi Model

Untuk menyelesaikan persamaan (4.76)-(4.78), teknik yang digunakan adalah mengeliminasi blok yang terbentuk oleh elemen-elemen matriks dengan pendekatan Keller-Box.

Untuk menyelesaikan masalah ini, elemen-elemen matriks pada blok tridiagonal dalam persamaan (4.76)-(4.78) harus ditentukan terlebih dahulu dengan cara mengklasifikasikannya menjadi tiga kondisi berikut.

1. $J = 1$

2. $J = N - 1$

3. $J = N$

1.) Kondisi saat $J = 1$, maka diperoleh persamaan (4.76) - (4.78) sebagai berikut/

$$(\delta f_1 - \delta f_0) - \frac{l_1}{2} (\delta u_1 - \delta u_0) = (r_1)_1 \quad (4.79)$$

$$(\delta u_1 - \delta u_0) - \frac{l_1}{2} (\delta v_1 - \delta v_0) = (r_2)_1 \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} (a_1)_1 \delta f_1 + (a_2)_1 \delta f_0 + (a_3)_1 \delta u_1 + (a_4)_1 \delta u_0 \\ + (a_5)_1 \delta v_1 + (a_6)_1 \delta v_0 = (r_3)_1 \end{aligned} \quad (4.81)$$

dari kondisi batas yang sudah diketahui bahwa $\delta f_0 = 0$, $\delta u_0 = 0$. Persamaan (4.79) - (4.81) dapat diubah dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{l_1}{2} & 0 & -\frac{l_1}{2} \\ (a_2)_1 & (a_3)_1 & (a_1)_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta f_0 \\ \delta u_1 \\ \delta v_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ (a_5)_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta f_1 \\ \delta u_2 \\ \delta v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1)_1 \\ (r_2)_2 \\ (r_3)_3 \end{bmatrix}$$

pada kondisi ini, matriks dapat dituliskan dalam persamaan berikut.

$$[A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_3] = [r_1]$$

2.) Kondisi saat $J = N-1$, maka dapat dituliskan persamaan

(4.76) - (4.78) sebagai berikut.

$$(\delta f_{N-1} - \delta f_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2} (\delta u_{N-1} - \delta u_{N-2}) = (r_1)_{N-1} \quad (4.82)$$

$$(\delta u_{N-1} - \delta u_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2} (\delta v_{N-1} - \delta v_{N-2}) = (r_2)_{N-1} \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} (a_1)_{N-1} \delta f_{N-1} + (a_2)_{N-1} \delta f_{N-2} + (a_3)_{N-1} \delta u_{N-1} + \\ (a_4)_{N-1} \delta u_{N-2} + (a_5)_{N-1} \delta v_{N-1} + (a_6)_{N-1} \delta v_{N-2} = (r_3)_{N-1} \end{aligned} \quad (4.84)$$

dibentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l_{(N-1)}}{2} \\ 0 & (a_4)_{(N-1)} & (a_2)_{(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta f_{(N-3)} \\ \delta u_{(N-2)} \\ \delta v_{(N-2)} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{l_{(N-1)}}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{l_{(N-1)}}{2} \\ (a_2)_{(N-1)} & (a_3)_{(N-1)} & (a_1)_{(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta f_{(N-2)} \\ \delta u_{(N-1)} \\ \delta v_{(N-1)} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{l_{(N-1)}}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ (a_5)_{(N-1)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta f_{(N-1)} \\ \delta u_{(N-2)} \\ \delta v_{(N-3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1)_{(N-1)} \\ (r_2)_{(N-2)} \\ (r_3)_{(N-3)} \end{bmatrix}$$

pada kondisi ini, dapat dituliskan matriks menjadi persamaan berikut.

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][r_j] + [C_j][\delta_{j+1}] = [r_j], \forall j = 2, 3, \dots, N-1$$

3.) Kondisi saat $J = N$, maka persamaan (4.76) sampai (4.78) diperoleh.

$$(\delta f_N - \delta f_{N-1}) - \frac{l_N}{2} (\delta u_N - \delta u_{N-1}) = (r_1)_N \quad (4.85)$$

$$(\delta u_N - \delta u_{N-1}) - \frac{l_N}{2} (\delta v_N - \delta v_{N-1}) = (r_2)_N \quad (4.86)$$

$$(a_1)_N \delta f_N + (a_2)_N \delta f_{N-1} + (a_3)_N \delta u_N + (a_4)_N \delta u_{N-1} \quad (4.87)$$

$$+ (a_5)_N \delta v_N + (a_6)_N \delta v_{N-1} = (S_3)_N$$

dari kondisi batas yang telah diketahui bahwa $\delta f_0 = 0$, $\delta u_0 = 0$. Persamaan (4.85) sampai (4.87) dapat diubah dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{l_N}{2} & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ 0 & (a_4)_N & (a_2)_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta f_{N-2} \\ \delta u_{N-1} \\ \delta v_{N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{l_N}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ (a_6)_N & (a_3)_N & (a_1)_N \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta f_{N-1} \\ \delta u_N \\ \delta v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1)_N \\ (r_2)_N \\ (r_3)_N \end{bmatrix}$$

pada kondisi ini, dituliskan matriks dalam bentuk persamaan seperti berikut.

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] = [r_j]$$

persamaan dapat ditulis lebih sederhana seperti berikut.

$$J = 1 \Rightarrow [A_1][S_1] + [C_1][S_2] = [r_1]$$

$$J = 2 \Rightarrow [B_2][S_1] + [A_2][S_2] + [C_2][S_3] = [r_2]$$

$$J = 3 \Rightarrow [B_3][S_2] + [A_3][S_3] + [C_3][S_4] = [r_3]$$

$$\vdots$$

$$J = N - 1 \Rightarrow [B_{N-1}][S_{N-2}] + [A_{N-1}][S_{N-1}] + [C_{N-1}][S_N] = [r_{N-1}]$$

$$J = N \Rightarrow [B_N][S_{N-1}] + [A_N][S_N] = [r_N]$$

atau dapat ditulis menjadi.

$$A\delta = p \quad (4.88)$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} [A_1] & [C_1] & & & & & \\ [B_2] & [A_2] & [C_2] & & & & \\ & [B_3] & [A_2] & \vdots & & & \\ & & \vdots & \vdots & [C_{N-2}] & & \\ & & & [B_{N-1}] & [A_{N-1}] & [C_{N-1}] & \\ & & & & [B_N] & [A_N] & \end{bmatrix}$$

$$\delta = \begin{bmatrix} [\delta_1] \\ [\delta_2] \\ \vdots \\ [\delta_{N-1}] \\ [\delta_N] \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} [p_1] \\ [p_2] \\ \vdots \\ [p_{N-1}] \\ [p_N] \end{bmatrix}$$

Pada persamaan (4.88) diketahui bahwa elemen-elemen bukan nol pada matriks A terdapat pada tiga diagonal utama, sementara elemen bernilai nol terdapat pada elemen lainnya. Sehingga persamaan (4.88) diselesaikan menggunakan teknik yang mengeliminasi blok-bloknya (Widodo dkk, 2017). Matriks A

diasumsikan tidak singular agar dapat dilakukan faktorisasi.

$$A = LU \quad (4.89)$$

dimana matriks L dan U seperti berikut.

$$L = \begin{bmatrix} [\alpha_1] & & & & & \\ [B_2] & [\alpha_2] & & & & \\ & & [B_3] & \vdots & & \\ & & & \vdots & \vdots & \\ & & & & [B_{N-1}] & [\alpha_{N-1}] \\ & & & & & [B_N] & [a_N] \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} [I] & [\Gamma_1] & & & & \\ & [I] & [\Gamma_2] & & & \\ & & \vdots & \vdots & & \\ & & & \vdots & \vdots & \\ & & & & [I] & [\Gamma_{N-1}] \\ & & & & & [I] \end{bmatrix}$$

dimana matriks $[I]$ merupakan matriks identitas yang memiliki ukuran 3×3 , sedangkan untuk matriks $[\alpha_1]$ dan $[\Gamma_j]$ adalah matriks dengan ukuran 3×3 yang elemen-elemennya ditentukan dalam persamaan berikut.

$$[\alpha_1] = [A_1]$$

$$[\alpha_1][\Gamma_1] = [C_1]$$

$$[\alpha_j] = [A_j] - [B_j][\Gamma_{j-1}], j = 2, 3, \dots, N$$

$$[\alpha_j][\Gamma_j] = [C_j], j = 2, 3, \dots, N - 1$$

Selanjutnya persamaan (4.89) disubtitusikan ke (4.88) sehingga diperoleh persamaan.

$$LU\delta = p \quad (4.90)$$

dengan definisi berikut.

$$U\delta = W \quad (4.91)$$

sehingga persamaan (4.90) menjadi

$$LW = p \quad (4.92)$$

dimana

$$W = \begin{bmatrix} [W_1] \\ [W_2] \\ \vdots \\ [W_{N-1}] \\ [W_N] \end{bmatrix}$$

Matriks $[W_j]$ adalah matriks yang memiliki ukuran 3×1 dimana setiap elemennya didapatkan dari persamaan (4.92) berikut.

$$[\alpha_1][W_1] = [p_1]$$

$$[\alpha_j][W_j] = [p_j] - [B_j][W_{j-1}], \quad 2 \leq j \leq N-1$$

Saat nilai δ sudah didapatkan, persamaan (4.76)-(4.78) dipakai untuk menyelesaikan persamaan (4.72) sampai iterasi menunjukkan konvergensi. Alwawi dkk (2020) menyatakan bahwa kriteria konvergen ditunjukkan oleh parameter $v(0, t)$, yang mengharuskan perulangan perhitungan sampai terpenuhi kriteria konvergen serta perhitungan dihentikan saat $\left[\delta v_0^{(i)} \right] < \varepsilon_1$. Untuk

penelitian aliran fluida casson nano ini menggunakan $\varepsilon_1 = 10^{(-5)}$ (Abu, 2018).

G. Analisis Hasil Simulasi Numerik

Analisis hasil dilakukan setelah menyelesaikan simulasi numerik menggunakan metode beda hingga skema Keller-Box, kemudian tahapan selanjutnya adalah melakukan simulasi numerik dengan menggunakan software MATLAB. Pada tahap simulasi numerik ini digunakan beberapa variasi dan beberapa parameter guna melihat bagaimana pengaruhnya terhadap kecepatan dan temperatur aliran fluida nano melalui silinder berpori dibawah pengaruh parameter fraksi *volume*, parameter casson, dan parameter porositas. Pada tahap simulasi ini, simulasi dilakukan dengan banyak partisi $\eta = 60$ (banyaknya jumlah grid untuk menghitung solusi di setiap titik diskrit) dengan $\delta\eta = l_j = 0.1$ (jarak antara 2 grid partisi η) sehingga jumlah grid η adalah $(\delta\eta \cdot \eta = 60 \cdot 0.05 = 6)$. Serta partisi $t = 33$ (variasi waktu untuk menghitung solusi) dengan $\delta t = 0.05$. Pada penelitian ini, partikel nano yang digunakan dalam simulasi numerik adalah *Cu* dan *Al₂O₃* dengan fluida dasarnya adalah darah. Berikut ini merupakan nilai dari kapasitas panas c_p , densitas ρ , dan konduktivitas termal k dari fluida nano.

Tabel 4.1. Tabel Karakteristik Fisik (Norasia dkk, 2024)

Parameter	Alumina	Temabaga	Fluida Dasar (Darah)
Densitas	3970	8933	1063
Kapasitas Panas	765	385	3594
Konduktivitas Termal	40	400	0.492

Tabel 4.1 menunjukkan nilai-nilai yang nantinya akan

digunakan dalam proses simulasi numerik. Tujuannya untuk mengetahui pengaruh parameter fraksi *volume*, parameter casson, dan parameter prositas terhadap aliran fluida casson nano melalui silinder berpori. Hasil akhir simulasi menunjukkan kurva kecepatan aliran fluida yang dirumuskan pada persamaan berikut.

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{-\frac{\partial P}{\partial x}}{\mu_{nf}}$$

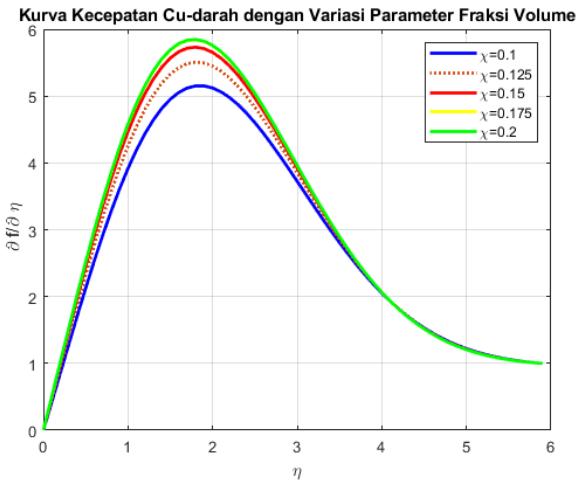
dengan $(\frac{\partial f}{\partial \eta})$ menggambarkan profil kecepatan berubah di sepanjang lapisan batas. $(-\frac{\partial P}{\partial x})$ adalah tekanan dalam aliran. (μ_{nf}) adalah kekentalan fluida nano. Dari rumus ini, kecepatan fluida berbanding terbalik dengan kekentalan. Jika kekentalan meningkat maka kecepatan fluida menurun. Sebaliknya, jika kekentalan menurun maka kecepatan fluida meningkat.

Berikut ini adalah hasil simulasi dari model matematika aliran fluida casson nano melalui silinder berpori.

1. Pengaruh parameter fraksi *volume* (χ) pada fluida dengan partikel nano *Cu*

Pada simulasi ini diperoleh bagaimana pengaruh parameter fraksi *volume* terhadap kecepatan fluida casson nano dengan partikel nano *Cu* dan fluida dasar darh dengan menggunakan variasi fraksi *volume* yaitu $\chi = 0.1, 0.125, 0.15, 0.175$ dan 0.2 . Selain parameter fraksi *volume*, parameter lain yang digunakan dalam penelitian ini adalah magnetik dengan nilai awal $M = 1$, parameter porositas $\phi = 1$, dan parameter casson $\beta = 1$.

Gambar 4.2 Menunjukkan adanya kenaikan kecepatan berawal dari nilai $\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0$ sampai $\frac{\partial f}{\partial \eta} = 5.83$ mulai stabil pada $\frac{\partial f}{\partial \eta} \approx 1$. Dimana $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ berhubungan langsung dengan dengan fraksi *volume*

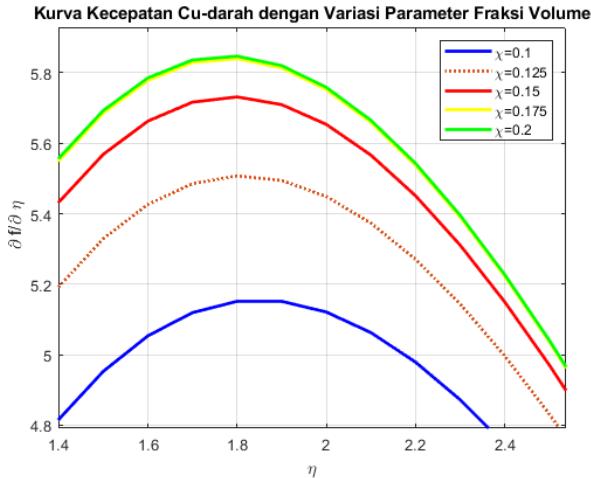


Gambar 4.2. Kecepatan parameter fraksi *volume* (χ) dengan partikel nano *Cu*

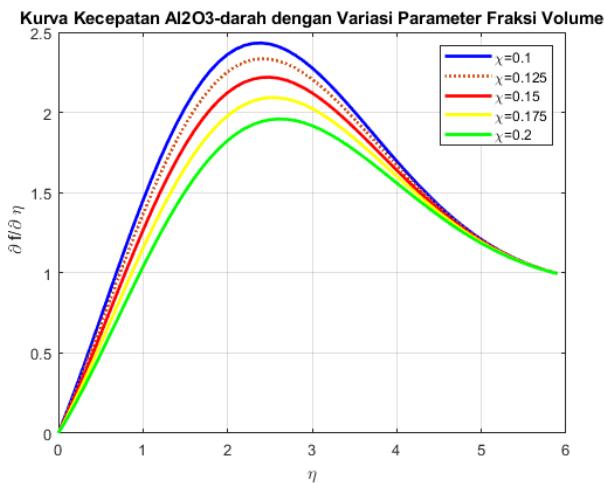
(χ) melalui kekentalan fluida nano $\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1-\chi)^{2.5}}$. Sehingga ketika (χ) meningkat, kekentalan fluida bertambah tetapi tidak secara signifikan dikarenakan sifat Cu memiliki konduktivitas termal yang cukup tinggi. Mengakibatkan $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ tetap tinggi dan kecepatan meningkat.

2. Pengaruh parameter fraksi *volume* (χ) pada fluida dengan partikel nano Al_2O_3

Hasil simulasi ini diperoleh pengaruh perubahan parameter fraksi *volume* terhadap kecepatan fluida casson nano yang mengandung partikel nano Al_2O_3 dan fluida dasar darah, dengan variasi nilai fraksi *volume* yang digunakan (χ) = 0.1, 0.125, 0.15, 0.175, dan 0.2. Terdapat juga parameter lain selain fraksi *volume*, dimana penelitian ini juga mempertimbangkan parameter dengan nilai awal $M = 1$, parameter porositas $\phi = 1$, dan parameter casson



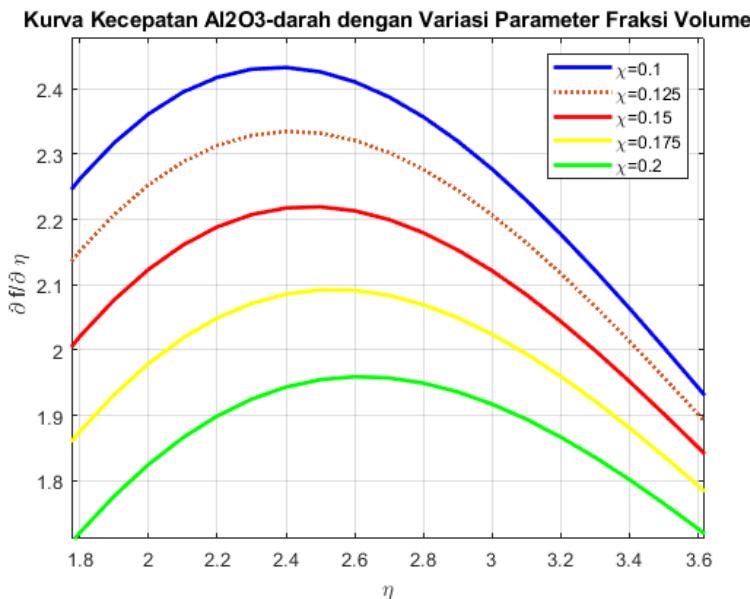
Gambar 4.3. Kecepatan parameter fraksi volume (χ) dengan partikel nano Cu pada jarak (1.4 - 2.5)



Gambar 4.4. Pengaruh parameter fraksi volume (χ) dengan partikel nano Al_2O_3

$$\beta = 1.$$

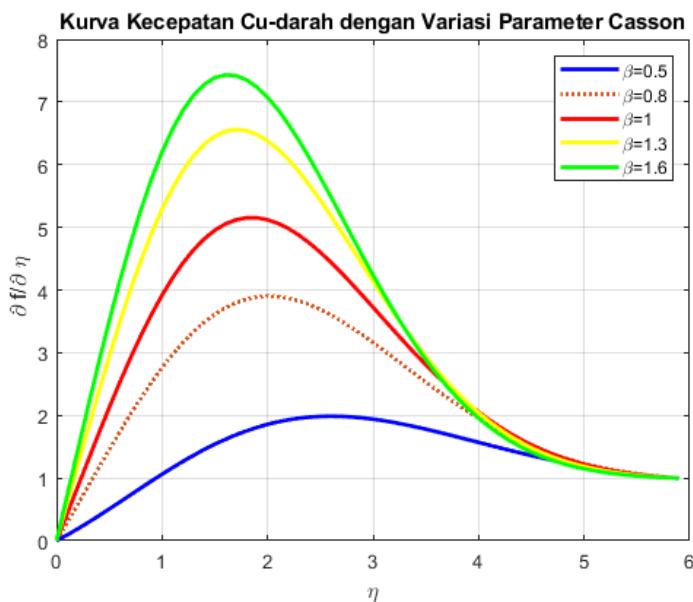
Gambar 4.4 Menunjukkan adanya penurunan kecepatan berawal dari nilai $\frac{\partial f}{\partial \eta} = 2.43$ sampai $\frac{\partial f}{\partial \eta} = 1.95$ mulai stabil pada $\frac{\partial f}{\partial \eta} \approx 1$. Kecepatan fluida mengalami penurunan dikarenakan meningkatnya variasi fraksi *volume* yang berakibat pada nilai kekentalan fluida semakin meningkat. Ketika kekentalan fluida semakin meningkat, maka akan terjadi gesekan antar partikel yang semakin besar. Hal ini mengakibatkan kecepatan akan berkurang seiring dengan peningkatan nilai fraksi *volume*.



Gambar 4.5. Pengaruh parameter fraksi *volume* (χ) dengan partikel nano Al_2O_3 pada jarak (1.8 - 3.6)

3. Pengaruh parameter casson (β) pada fluida dengan partikel nano *Cu*

Simulasi ini menunjukkan pengaruh dari variasi parameter Casson terhadap kecepatan fluida nano yang berisi partikel nano Cu dan fluida dasar darah dengan dengan nilai parameter Casson yang digunakan adalah $\beta = 0.5, 0.8, 1, 1.3$ dan 1.6 . Selain parameter casson, penelitian ini juga mempertimbangkan parameter dengan nilai awal $M = 1$, parameter porositas $\phi = 1$, dan parameter fraksi volume $\chi = 0.1$.



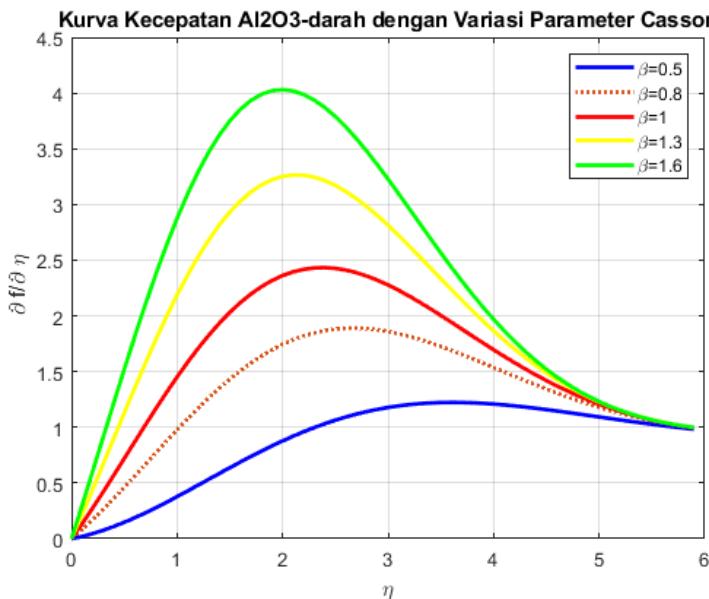
Gambar 4.6. Kecepatan parameter casson (β) partikel nano Cu

Gambar 4.6 Menunjukkan terjadinya peningkatan kecepatan berawal dari nilai $\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0$ sampai $\frac{\partial f}{\partial \eta} = 7.4$ mulai stabil pada $\frac{\partial f}{\partial \eta} \approx 1$. Selain itu, saat nilai parameter casson β ditingkatkan, dapat diamati bahwa kecepatan aliran fluida semakin meningkat. Peningkatan kecepatan ini disebabkan karena adanya pengaruh tegangan luluh fluida casson (τ_0) yang tidak berbanding lurus

dengan kekentalan fluida casson (kc). Sehingga meningkatnya parameter (β) mengakibatkan kecepatan aliran fluida semakin meningkat dimana $\beta = kc + \frac{\sqrt{2\pi c}}{\tau_0}$.

4. Pengaruh parameter casson pada fluida dengan partikel nano Al_2O_3

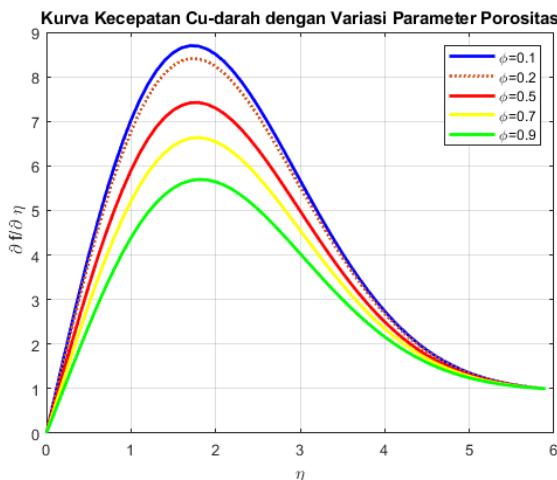
Pada simulasi ini diperoleh bagaimana pengaruh parameter casson terhadap kecepatan fluida nano dengan partikel nano Al_2O_3 dan fluida dasar darah dengan menggunakan variasi parameter casson yaitu $\beta = 0.5, 0.8, 1, 1.3$ dan 1.6 . Selain parameter casson, parameter lain yang digunakan dalam penelitian ini adalah magnetik dengan nilai awal $M = 1$, parameter porositas $\phi = 1$, dan parameter fraksi *volume* $\chi = 0.1$.



Gambar 4.7. Kecepatan parameter casson (β) partikel nano Al_2O_3

Gambar 4.7 Menunjukkan terjadinya peningkatan kecepatan berawal dari nilai $\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0$ sampai $\frac{\partial f}{\partial \eta} = 4.1$ mulai stabil pada $\frac{\partial f}{\partial \eta} \approx 1$. Selain itu, saat nilai parameter casson β ditingkatkan, maka didapatkan juga bahwa terjadi peningkatan pada kecepatan fluida. Peningkatan ini disebabkan karena adanya pengaruh tegangan luluh fluida casson (τ_0) yang tidak berbanding lurus dengan kekentalan fluida casson (kc). Sehingga meningkatnya parameter (β) mengakibatkan kecepatan aliran fluida semakin meningkat dimana $\beta = kc + \frac{\sqrt{2\pi c}}{\tau_0}$.

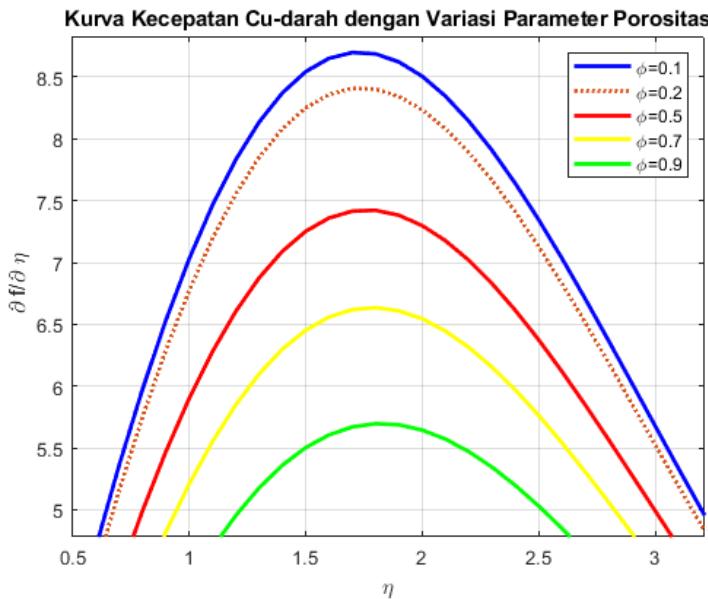
5. Pengaruh parameter porositas (ϕ) pada fluida partikel nano Cu



Gambar 4.8. Kecepatan parameter porositas (ϕ) dengan partikel nano Cu

Hasil simulasi ini akan menunjukkan kecepatan fluida dengan parameter porositas silinder berpori yang menggunakan partikel nano Cu serta fluida dasar darah. Nilai dari variasi parameter

porositas yang digunakan yaitu $\phi = 0.1, 0.2, 0.5, 0.7$ dan 0.9 . Serta parameter lain dengan nilai awal magnetik $M=1$, casson (β) = 1, dan fraksi *volume* $\chi = 0.1$.



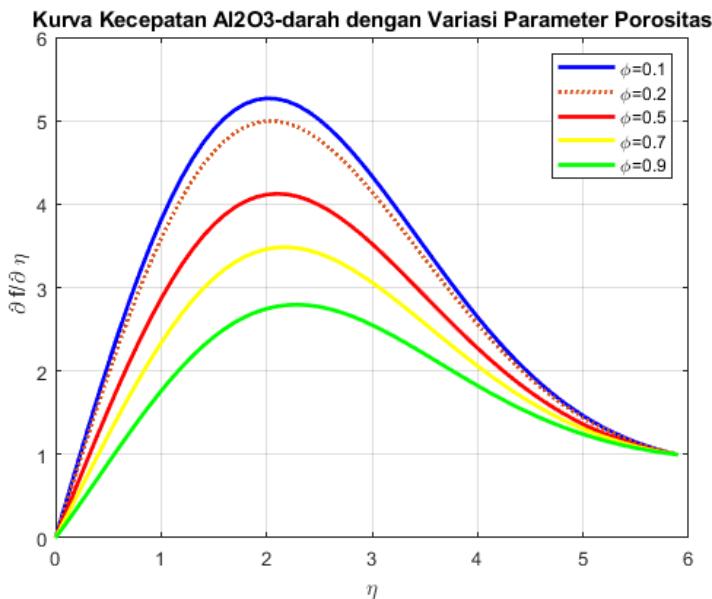
Gambar 4.9. Kecepatan parameter porositas (ϕ) dengan partikel nano *Cu* pada jarak (0.5 - 3.25)

Gambar 4.8 Menunjukkan terjadinya penurunan kecepatan berawal dari nilai $\frac{\partial f}{\partial \eta} = 8.8$ sampai $\frac{\partial f}{\partial \eta} = 5.6$ mulai stabil pada $\frac{\partial f}{\partial \eta} \approx 1$. Kecepatan aliran fluida mengalami penurunan seiring meningkatnya nilai parameter porositas. Hal ini disebabkan oleh hubungan dari kekentalan dinamik (μ_{nf}) yang berbanding terbalik dengan massa jenis fluida nano (ρ_{nf}). Sehingga parameter porositas yang meningkat akan meningkatkan nilai kekentalan dinamik yang menurunkan massa jenis fluida. Akibat penurunan massa jenis dan peningkatan porositas, kecepatan aliran fluida juga

berkurang.

6. Pengaruh parameter porositas (ϕ) pada fluida dengan partikel nano Al_2O_3

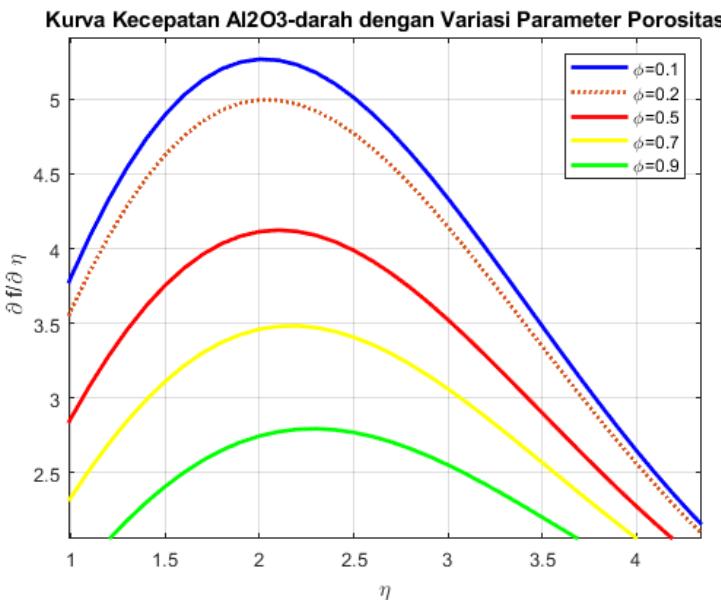
Hasil simulasi ini akan menunjukkan kecepatan fluida dengan parameter porositas silinder berpori yang menggunakan partikel nano Cu serta fluida dasar darah. Nilai dari variasi parameter porositas yang digunakan yaitu $\phi = 0.1, 0.2, 0.5, 0.7$ dan 0.9 . Serta parameter lain dengan nilai awal magnetik $M=1$, casson (β) = 1, dan fraksi *volume* $\chi = 0.1$.



Gambar 4.10. Kecepatan parameter porositas (ϕ) dengan partikel nano Al_2O_3

Gambar 4.10 Menunjukkan terjadinya penurunan kecepatan berawal dari nilai $\frac{\partial f}{\partial \eta} = 5.4$ sampai $\frac{\partial f}{\partial \eta} = 2.8$ mulai stabil pada $\frac{\partial f}{\partial \eta} \approx 1$. Peningkatan nilai parameter porositas yang

menyebabkan penurunan kecepatan aliran fluida terjadi karena porositas berhubungan langsung dengan kekentalan dinamik μ_{nf} dan berbanding terbalik dengan massa jenis fluida nano ρ_{nf} . Seiring bertambahnya nilai porositas, kekentalan dinamik fluida nano juga meningkat, yang menyebabkan penurunan massa jenis fluida. Penurunan massa jenis dan peningkatan porositas tersebut menyebabkan kecepatan fluida menurun.



Gambar 4.11. Kecepatan parameter porositas (ϕ) dengan partikel nano Al_2O_3 pada jarak (1 - 4.25)

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Hasil analisis dan pembahasan mengenai pengaruh parameter fraksi *volume*, parameter casson, dan parameter porositas terhadap perlakuan partikel nano *Cu* dan *Al₂O₃* yang menggunakan fluida dasar darah menghasilkan beberapa kesimpulan dan saran berikut.

1. Pemodelan matematika aliran fluida casson nano dengan fluida dasar darah serta partikel nano *Cu* dan *Al₂O₃* di bawah pengaruh parameter fraksi *volume*, parameter casson, dan parameter porositas melalui silinder berpori. Persamaan kontinuitas dan momentum diperoleh dari penerapan hukum konservasi massa serta hukum II Newton pada aliran melalui silinder berpori, kemudian disederhanakan menjadi bentuk non-dimensional dan similaritas untuk memperoleh model akhir.

$$\begin{aligned} \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) f''' + \frac{\eta}{2} f'' + t(1 - (f)^2 + f \cdot f'') \\ = t \frac{\partial f'}{\partial t} - t(M + \psi)(f' - 1) \end{aligned}$$

2. Hasil persamaan similaritas pada model matematika aliran fluida casson nano melalui silinder berpori diselesaikan menggunakan skema *Keller Box* dengan metode beda hingga pusat. Persamaan similaritas orde tinggi diubah menjadi persamaan orde pertama dengan pemisalan notasi,

selanjutnya dilakukan diskritasi persamaan, dan dilinearkan dengan metode Newton yang disajikan dalam bentuk matriks blok tridiagonal.

$$\begin{aligned}
 & \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^n + t^n \\
 & (1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n) + t^n(M + \phi)(u_{j-\frac{1}{2}}^n - 1) - \\
 & 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} \right) + \\
 & \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + t^{n-1}(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + t^{n-1} \\
 & (M + \phi)(u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 1) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
 \end{aligned}$$

3. Hasil pemodelan numerik terhadap aliran fluida casson nano melalui silinder berpori yang melibatkan parameter fraksi *volume* (χ), parameter casson (β), dan parameter porositas (ϕ) terhadap perilaku partikel nano *Cu* dan *Al₂O₃* yang menggunakan fluida dasar darah. Diperoleh hasil sebagai berikut.
 - a. Apabila variasi nilai parameter fraksi *volume* ditingkatkan (χ) = 0.1, 0.125, 0.15, 0.175, 0.2 maka kecepatan aliran fluida terhadap partikel nano *Cu* mengalami peningkatan sedangkan terhadap partikel nano *Al₂O₃* mengalami penurunan.
 - b. Apabila variasi nilai parameter casson ditingkatkan (β) = 0.5, 0.8, 1, 1.3, 1.6 maka kecepatan aliran fluida terhadap partikel nano *Cu* dan *Al₂O₃* sama-sama mengalami peningkatan.

- c. Apabila variasi nilai parameter porositas ditingkatkan (ϕ) = 0.1, 0.2, 0.5, 0.7, 0.9 maka kecepatan aliran fluida terhadap partikel nano Cu dan Al_2O_3 sama-sama mengalami penurunan.

B. Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, diharapkan peneliti selanjutnya dapat mengkaji aliran fluida pada wilayah yang tidak berada di titik stagnasi atau ($x \neq 0$), sehingga dapat diperoleh kurva kecepatan disekitar silinder berpori. Diharapkan untuk penelitian selanjutnya juga melibatkan temperatur yang menghasilkan persamaan energi, sehingga simulasi yang dihasilkan tidak hanya kurva kecepatan tetapi juga kurva temperatur.

DAFTAR PUSTAKA

- Abu, M. 2018. *Aliran Fluida Nano Melalui Bola Berpori Dibawah Pengaruh Konveksi Campuran dan Medan Magnet.* Tesis. Surabaya: Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data Institut Teknologi Sepuluh November.
- Ali, M.Y. Reza-E-Rabbi, S.F. Ahmmmed, M.N Nabi, A.K Azad, S.M. Muyeen. 2024. Hydromagnetic flow of Casson nano-fluid across a stretched sheet in the presence of thermoelectric and radiation. *International Journal of Thermofluids.* 21 (2024) 100484.
- Alwawi F.A, Hamzah T.A, Ruwaidiah I. 2020. Heat transfer analysis of ethylene glycol-based Casson nanofluid around a horizontal circular cylinder with MHD effect. *Journal of Mechanical Engeneering Science.* Vol. 234. Issue. 13.
- Bambang Agus Kironoto. 2016. *Statika Fluida.* Yogyakarta: UGM Press.
- Choi. 1995. Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles. *ASME Int. Mech. Eng.* 66 (1995) 99–105.
- Das, S.K. Thiesen, P. Roetzel, W. 2003. Temperature dependence of thermal conductivity enchanment for nanofluid. *Jurnal of heat transfer.* (2003) ASME, Vol. 125, pp 567-574.
- Heris, S.J, Esfahany, M.N. Etemad, S.Gh. 2006. Experimental Investigation of Convective Heat Transfer of Al₂O₃/Water Nanofluid in Circular Tube. *International Journal of Heat and Fluid Flow.* (2006). 28: 203-210.

- Islam, S. Rana, B.M.J, M.S. Parvez, Md.Shahadat Hossain, M.M. Rahman. 2023. Electroosmotic flow in ternary (TiO₂-SiO₂-Al₂O₃) blood-based sutterby nanomaterials with bio-active mixers. International Journal of Thermofluids. 18 (2023) 100363.
- Ismaeel, A.M, R.S. Kamel, M.R. Hedar, F.M. Hady. 2023. Numerical simulation for a Casson nanofuid over an inclined vessel surrounded by hot tissue at the microscale. SN Applied Sciences. (2023) 5:223.
- Jamil, D.F, S. Uddin, M. Kazi, R. Roslan, M.R. Gorji, M. Kamalrulzaman M. Akhir. 2023. MHD blood flow effects of Casson fluid with Caputo-Fabrizio fractional derivatives through an inclined blood vessels with thermal radiation. Heliyon. 9 (2023) e21780.
- Ketchate, C.G.N, P.T Kaben, D. Fokwa, G. Tchuen. 2021. Stability analysis of non-Newtonian blood flow conveying hybrid magnetic nanoparticles as target drug delivery in presence of inclined magnetic field and thermal radiation: Application to therapy of cancer. Informatics in Medicine Unlocked. 27 (2021) 100800.
- Mahdi, R. A, Mohammed, H. A, Munisamy, K. M, Saeid, N. H. Review of convection heat transfer and fluid flow in porous media with nanofluid. Renewable and Sustainable Energy Reviews. (2015). 41, 715–734.
- Manvi, B.K, S.B. Kerur, J.V. Tawade, J.J. Nieto, S.N. Sankeshwari, H. Ahmad, V. Govindan. MHD Casson nanofluid boundary layer flow in presence of radiation and non-uniform heat

source/sink. Mathematical Modelling and Control. 3(3): 152–167.

Nagarani P, V.M. Job, P.V.S.N. Murthy. The effect of peristalsis on dispersion in Casson fluid flow. Ain Shams Engineering Journal. 15 (2024) 102758.

Norasia Y, Zulaikha. *Pengaruh Partikel Nano Zn dan ZnO terhadap Aliran MHD Fluida Nano pada Lapisan Batas Bola Bermagnet*. SQUARE : Journal of Mathematics and Mathematics Education. Volume 1. No. 2. (2019). pp. 133-142.

Norasia Y, Basuki Widodo, Dieky Adzkiya. *Pergerakan Aliran MHD Ag-AIR Melewati Bola Pejal*. Journal of Mathematics and Its Applications. Vol. 18, No. 1, Mei 2021, 15-21.

Norasia Y, Nisa Ajeng Oxa, Sumardi.S.R. The Effect of Nanoparticles on Drug Distribution in The Mathematical Model of Blood Flow. Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika. Vol (Number) Month 2022, pp. 51 - 60.

Purnaditya N.P. 2020. *Penerapan Konsep Lagrangian-Eularian Dalam Pengembangan Dasar Model Matematika Hidraulika Aliran dan Transportasi Polutan: Sebuah Kajian Literatur*. Jurnal Fondasi. Volume 9 No. 2.

Rafique, M. A. Imran, M. I. Anwar, M. Misiran, A. Ahmadian. Energy and mass transport of Casson nanofluid flow over a slanted permeable inclined surface. J Therm Anal Calorim. (2021) 144:2031–2042.

Rahman Mohammad.M, Ioan Pop. Effects of Second-Order Slip and Viscous Dissipation on the Analysis of the Boundary Layer Flow and Heat Transfer Characteristics of a Casson Fluid. SQU Journal for Science. (2016) 21(1), 48-63.

Reddy, B.P, P.M. Matao, J.M. Sunzu. A finite difference study of radiative mixed convection MHD heat propagating Casson fluid past an accelerating porous plate including viscous dissipation and Joule heating effects. *Heliyon.* 10 (2024) e28591.

Wei, Q., Y. Pan, Z. Zhang, S. Yan, Zhiyang Li. Copper-based nanomaterials for biomedical applications. *Chemical Engineering Journal.* 483 (2024) 149040.

Widodo, B., Arif, D. K., Aryany, D., Asiyah, N., Widjajati, F. A., Kamiran, K. (2017). The Effect Of Magnetohydrodynamic Nano Fluid Flow Through Porous Cylinder. *AIP Conference Proceedings*, 1867(August 2017).

Yousef, N.S., A.M. Megahed, N.I. Ghoneim, M. Elsafi, E. Fares. Chemical reaction impact on MHD dissipative Casson-Williamson nanofluid flow over a slippery stretching sheet through porous medium. *Alexandria Engineering Journal* (2022) 61, 10161–10170.

DAFTAR NOTASI

DAFTAR NOTASI

β	: Parameter Casson
η	: Variabel Similaritas
μ	: Kekentalan Dinamik
ρ	: Massa Jenis Fluida
σ	: Konduktivitas Listrik
ν	: Kekentalan Kinematik
Φ	: Parameter Porositas
χ	: Parameter Fraksi Volume
\mathbf{B}	: Gaya Magnet
\mathbf{b}	: Induksi Medan Magnet
\mathbf{E}	: Medan Magnet
\mathbf{F}	: Gaya
J	: Kerapatan Arus Listrik
\mathbf{M}	: Magnetik
Re	: Bilangan Reynolds
t	: Waktu
\mathbf{u}	: Kecepatan Fluida pada Vektor
u	: Kecepatan Searah sumbu x
v	: Kecepatan Searan sumbu y
K^*	: Permeabilitas
Ψ	: Fungsi Alir
τ	: Tegangan Geser Fluida
\hat{n}	: Vektor Normal Keluar Masuk Elemen dA
C_p	: Kalor Khusus Fluida
u_e	: Kecepatan di Luar Lapisan Batas
U_∞	: Kecepatan Bebas Fluida
M_{sys}	: Massa Suatu System
erf	: <i>error function</i>

Lampiran 1. Pembuktian Awal Mula Parameter Casson β

Membuktikan bahwa $kc + \frac{\tau_0}{\sqrt{2\pi c}} = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$

$$\begin{aligned}
 & kc + \frac{\tau_0}{\sqrt{2\pi c}} \frac{\sqrt{2\pi c}}{\sqrt{2\pi c}} \\
 \iff & kc + \frac{\tau_0 \sqrt{2\pi c}}{2\pi c} \\
 \iff & \frac{kc2\pi c + \tau_0 \sqrt{2\pi c}}{2\pi c} \\
 \iff & \frac{kc2\pi c}{kc2\pi c} + \frac{\tau_0 \sqrt{2\pi c}}{kc2\pi c} \\
 \iff & 1 + \frac{\tau_0 \sqrt{2\pi c}}{kc2\pi c} \\
 \iff & 1 + \frac{\tau_0 \sqrt{2\pi c}}{kc2\pi c} \\
 \iff & 1 + \left(\frac{\tau_0 \sqrt{2\pi c}}{kc2\pi c} \frac{\sqrt{2\pi c}}{\sqrt{2\pi c}} \right) \\
 \iff & 1 + \left(\frac{\tau_0 2\pi c}{2\pi c k c \sqrt{2\pi c}} \right) \\
 \iff & 1 + \left(\frac{\tau_0}{k c \sqrt{2\pi c}} \right)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, substitusikan nilai $\beta = \frac{kc\sqrt{2\pi c}}{\tau_0}$ ke dalam persamaan diatas sehingga diperoleh

$$\frac{\tau_0}{k c \sqrt{2\pi c}} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\frac{kc\sqrt{2\pi c}}{\tau_0}} \iff kc + \frac{\tau_0}{\sqrt{2\pi c}} = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

Sehingga terbukti bahwa $kc + \frac{\tau_0}{\sqrt{2\pi c}} = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$.

Lampiran 2. Transformasi Persamaan Dimensional menjadi Persamaan Non-Dimensional

Persamaan non-dimensional diperoleh dengan mensubstitusi nilai parameter dan variabel dimensional (4.39)-(4.49) ke persamaan kontinuitas dan momentum dimensional.

1. Persamaan kontinuitas non-dimensional

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}\bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{r}\bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\ \frac{\partial(aruU_\infty)}{\partial(xa)} + \frac{\partial(arvU_\infty Re^{\frac{1}{2}})}{\partial(ayRe^{\frac{1}{2}})} &= 0 \\ \frac{\partial ru}{\partial x} \frac{aU_\infty}{a} + \frac{\partial rv}{\partial y} \frac{aU_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{aRe^{\frac{1}{2}}} &= 0 \\ \frac{\partial ru}{\partial x} U_\infty + \frac{\partial rv}{\partial y} U_\infty &= 0 \\ U_\infty \left(\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

2. Persamaan momentum non-dimensional sumbu $-x$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu_{nf} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_0^2 \bar{u} - \frac{\mu_{nf}}{k^*} \bar{u} \end{aligned}$$

Ruas Kiri

$$\begin{aligned}
 & \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \\
 \iff & \rho \left(\frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(atU_\infty^{-1})} + uU_\infty \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(xa)} + vU_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(yaRe^{-\frac{1}{2}})} \right) \\
 \iff & \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{U_\infty}{aU_\infty^{-1}} + u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{tU_\infty^2}{a} + v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{tU_\infty^2}{a} \right) \\
 \iff & \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{U_\infty^2 a}{a} u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{tU_\infty^2}{a} + v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{tU_\infty^2}{a} \right) \\
 \iff & \frac{\rho U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

Ruas Kanan

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu_{nf} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_0^2 \bar{u} + \frac{\mu_{nf}}{k^*} \bar{u} \\
 \iff & - \frac{\partial(p\rho U_\infty^2)}{\partial(xa)} + \mu_{nf} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2(uU_\infty)}{\partial(xa)^2} + \frac{\partial^2(uU_\infty)}{\partial(\frac{ya}{Re^{\frac{1}{2}}})^2} \right) \\
 & + \sigma B_0^2 u U_\infty^2 + \frac{\mu_{nf}}{k^*} u U_\infty^2 \\
 \iff & - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\rho U_\infty^2}{a} + \mu_{nf} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{U_\infty}{a^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{U_\infty Re}{a^2} \right) \\
 & + \sigma B_0^2 u U_\infty^2 + \frac{\mu_{nf}}{k^*} u U_\infty^2 \\
 \iff & - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\rho U_\infty^2}{a} + \mu_{nf} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{U_\infty}{a^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{1}{Re^{-1}} \right) \\
 & + \sigma B_0^2 u U_\infty^2 + \frac{\mu_{nf}}{k^*} u U_\infty^2
 \end{aligned}$$

Diperoleh persamaan dengan menggabungkan kedua ruas yaitu

ruas kiri = ruas kanan.

$$\begin{aligned} \rho \frac{U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\rho U_\infty^2}{a} + \mu_{nf} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \\ &\quad \frac{U_\infty}{a^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{1}{Re^{-1}} \right) \\ &\quad + \sigma B_0^2 u U_\infty^2 + \frac{\mu_{nf}}{k^*} u U_\infty^2 \end{aligned}$$

Selanjutnya kedua ruas dibagi dengan $\rho \frac{U_\infty}{a}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{nf}}{\rho U_\infty a} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{1}{Re^{-1}} \right) + \frac{\sigma a}{\rho U_\infty} B_0^2 u + \frac{a \mu_{nf}}{\rho k^*} u \\ &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{a U_\infty} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{1}{Re^{-1}} \right) + M u + \phi u \\ &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{Re V_f} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &\quad + (M + \phi) u \\ &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{v_{nf}}{v_f} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (M + \phi) u \end{aligned}$$

dengan $a U_\infty = Re V_f$

3. Persamaan momentum non-dimensional sumbu $-y$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu_{nf} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_0^2 \bar{v} - \frac{\mu_{nf}}{k^*} \bar{v}$$

Ruas Kiri

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) \\ \iff & \rho \left(\frac{\partial(vU_\infty Re^{-\frac{1}{2}})}{\partial(atU_\infty^{-1})} + uU_\infty \frac{\partial(vU_\infty Re^{-\frac{1}{2}})}{\partial(xa)} \right. \\ & \quad \left. + vU_\infty Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial(vU_\infty Re^{-\frac{1}{2}})}{\partial(yaRe^{-\frac{1}{2}})} \right) \\ \iff & \rho \left(Re^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{U_\infty^2}{a} + u \frac{\partial v}{\partial x} Re^{-\frac{1}{2}} \frac{U_\infty^2}{a} \right. \\ & \quad \left. + v \frac{\partial v}{\partial y} Re^{-\frac{1}{2}} \frac{U_\infty^2}{a} \right) \\ \iff & \rho Re^{-\frac{1}{2}} \frac{U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Ruas Kanan

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu_{nf} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_0^2 \bar{v} - \frac{\mu_{nf}}{K^*} \bar{v} \\
 & = -\frac{\partial(p\rho U_\infty^2)}{\partial(yaRe^{-\frac{1}{2}})} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\partial^2(vU_\infty Re^{-\frac{1}{2}})}{\partial(xa)^2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial^2(vU_\infty Re^{-\frac{1}{2}})}{\partial(yaRe^{-\frac{1}{2}})^2} \right) + \sigma B_0^2 v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} + \frac{\mu_{nf}}{K^*} v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \\
 & = -\rho \frac{U_\infty^2}{aRe^{-\frac{1}{2}}} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{U_\infty}{a^2 Re^{-\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{U_\infty Re^{-\frac{1}{2}}}{a^2 Re^{-1}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \sigma B_0^2 v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} + \frac{\mu_{nf}}{K^*} v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \\
 & = -\rho \frac{U_\infty^2}{aRe^{-\frac{1}{2}}} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{U_\infty}{a^2 Re^{-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
 & \quad + \sigma B_0^2 v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} + \frac{\mu_{nf}}{K^*} v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Diperoleh persamaan dengan menggabungkan kedua ruas yaitu ruas kiri = ruas kanan.

$$\begin{aligned}
 \rho Re^{-\frac{1}{2}} \frac{U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) & = -\rho \frac{U_\infty^2}{aRe^{-\frac{1}{2}}} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \\
 & \quad \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{U_\infty}{a^2 Re^{-\frac{1}{2}}} \\
 & \quad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
 & \quad + \sigma B_0^2 v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \\
 & \quad + \frac{\mu_{nf}}{K^*} v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya kedua ruas dibagi dengan $\rho \frac{U_\infty^2}{aRe^{-\frac{1}{2}}}$ maka didapatkan.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{Re^{-1}}{\rho a U_\infty} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \\
 &\quad \left. + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{aRe^{-1}}{\rho U_\infty} \sigma B_0^2 v \\
 &\quad + \frac{a\mu_{nf}}{Re\rho K^*} v \\
 &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{Re^{-1}}{\rho a U_\infty} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \\
 &\quad \left. + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{aRe^{-1}}{\rho U_\infty} \\
 &\quad + Re^{-1} \left(\frac{\sigma a B_0^2}{\rho U_\infty} \right) v + \frac{1}{Re} \phi v \\
 &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
 &\quad + \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{Re} M v \\
 &\quad + \frac{1}{Re} \phi v
 \end{aligned}$$

Lampiran 3. Persamaan Similaritas

Persamaan Momentum

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \\
 &+ (M + \phi) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \\
 u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + (M + \psi) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right)
 \end{aligned}$$

dengan

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{t^{1/2}} \right) = \frac{1}{t^{1/2}}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{y}{t^{1/2}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{t}{t^{1/2}} \frac{1}{t} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t) \frac{1}{t^{1/2}} \right) \\
 &= \frac{t^{1/2} u_e(x) r(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\
 &= u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t) \right) \\
&= t^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} (u_e(x) r(x) f(x, \eta, t)) \\
&= r(x) t^{1/2} f(x, \eta, t) \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} + t^{1/2} u_e(x) f(x, \eta, t) \frac{\partial r(x)}{\partial x} \\
&\quad + t^{1/2} u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x} + t^{1/2} u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= u_e(x) r(x) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{1}{t^{(1/2)}} \\
&= \frac{u_e(x) r(x)}{t^{(1/2)}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{u_e(x) r(x)}{t^{(1/2)}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) \frac{\partial r(x)}{\partial x} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\
&\quad + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left(u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= u_e(x) r(x) \left(\frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \left(-\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right) \\
&\quad + u_e(x) r(x) \left(\frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta} \right) \\
&= -\frac{u_e(x) r(x)}{t} \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \\
&\quad + u_e(x) r(x) \left(\frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\
&= \left(\frac{u_e(x) r(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_e(x) r(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \frac{u_e(x) r(x)}{t} \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3}
\end{aligned}$$

Selanjutnya $u_e(x) = u_e$, $r(x)=r$, dan $f(x, \eta, t) = f$ sehingga diperoleh persamaan similaritas untuk persamaan momentum sebagai berikut.

Ruas Kiri

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\
&= \frac{1}{r} \left(-\frac{u_e r}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \right) + \frac{1}{r^2} \left(u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left(\frac{du_e}{dr} r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right. \\
&\quad \left. + u_e \frac{dr}{dx} \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) - \frac{1}{r^3} \frac{dr}{dx} \left(u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\
&\quad - \frac{1}{r^2} \left(t^{1/2} \frac{du_e}{dr} r f + t^{1/2} u_e \frac{dr}{dx} f + t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{u_e r}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\
&= -\frac{1}{r} \frac{u_e r}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + \frac{1}{r^2} u_e r^2 \frac{du_e}{dr} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{r^2} (u_e)^2 r \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} (u_e)^2 r^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \\
&\quad - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} (u_e)^2 r^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - t^{1/2} f r \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e \frac{1}{r} c \\
&\quad - t^{1/2} f u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e \frac{1}{r} \frac{1}{t^{1/2}} - t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
&= -\frac{u_e \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{du_e}{dr} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + (u_e)^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \\
&\quad - u_e f \frac{du_e}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - f (u_e)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{1}{r} - (u_e)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

Ruas Kanan

$$\begin{aligned}
& u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + (M + \phi) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) \\
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{1}{r} \frac{1}{t} u_e r \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + (M + \phi) \left(\frac{1}{r} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} - u_e \right) \\
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + u_e (M + \phi) \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Diperoleh ruas kiri = ruas kanan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 & - \frac{ue}{t} \frac{\eta \partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{du_e}{dr} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + (u_e)^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \\
 & - u_e f \frac{du_e}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - f(u_e)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{1}{r} - (u_e)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \\
 & + \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + u_e (M + \phi) \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

Kemudian kedua ruas dibagi dengan $\frac{u_e}{t}$ maka diperoleh.

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\eta \partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t \frac{du_e}{dr} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + u_e t \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \\
 & - t f \frac{du_e}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - f u_e t \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{1}{r} - u_e t \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = t \frac{\partial u_e}{\partial x} \\
 & + \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + t (M + \phi) \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) \\
 & = \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t u_e \left[\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] - t (M + \phi) \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

Lampiran 4. Penurunan Kondisi Awal

Persamaan momentum

$$\begin{aligned} & \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) f''' + \frac{\eta}{2} f'' + t(1 - (f)^2 + f \cdot f'') \\ &= t \frac{\partial f'}{\partial t} - t(M + \phi)(f' - 1) \end{aligned}$$

dengan mensubtitusikan $t = 0$ maka diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) f''' + \frac{\eta}{2} f'' = 0$$

Selanjutnya, dilakukan penyelesaian untuk mendapatkan f' dengan memisalkan $f'' = z$ sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

dengan $z' = \frac{dz}{d\eta}$ maka diperoleh persamaan berikut.

$$\begin{aligned} & \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{dz}{d\eta} + \frac{\eta}{2} z = 0 \\ & \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) dz + \frac{\eta}{2} z d\eta = 0 \end{aligned}$$

selanjutnya kedua ruas dibagi dengan z maka diperoleh.

$$\frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{1}{z} dz + \frac{\eta}{2} d\eta = 0$$

kemudian kedua ruas diintegralkan, diperoleh.

$$\int \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{1}{z} dz + \int \frac{\eta}{2} d\eta = \int 0 d\eta$$

$$\frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \ln z + \frac{\eta^2}{4} = C_1$$

dilakukan pemisalan

$$A = \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

persamaan diperoleh.

$$A - \ln z = C_1 - \frac{\eta^2}{4}$$

$$\ln z = \frac{C_1}{A} - \frac{\eta^2}{4A}$$

$$z = e^{\frac{C_1}{A} - \frac{\eta^2}{4A}}$$

karena $z = f''$, maka persamaan menjadi

$$f'' = e^{\frac{C_1}{A} - \frac{\eta^2}{4A}}$$

$$f' = \int e^{\frac{C_1}{A} - \frac{\eta^2}{4A}} d\eta$$

$$f' = e^{\frac{C_1}{A}} \int e^{-\frac{\eta^2}{4A}} d\eta$$

dengan menggunakan rumus integral eksponensial yang melibatkan fungsi error erf yaitu.

$$\int e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4c}} \operatorname{erf}(\sqrt{cx})$$

dengan $c = \frac{1}{A}$ dan $x^2 = \eta^2$, diperoleh.

$$f' = e^{\frac{C_1}{A}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{4\frac{1}{4A}}} \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\eta^2}{4A}} \right)$$

$$f' = \sqrt{\pi A} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2A} \right) e^{\frac{C_1}{A}} + C_2$$

dengan menggunakan kondisi batas sebagai berikut.

$$t > 0; f = f' = 0, \text{ pada } \eta = 0$$

$$f' = 1, \text{ pada } \eta \rightarrow \infty$$

Selanjutnya, akan ditentukan nilai dari C_2 dengan mensubtitusikan kondisi batas $f' = 0$ pada saat $\eta = 0$.

$$f' = \sqrt{\pi A} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2A} \right) e^{\frac{C_1}{A}} + C_2$$

$$C_2 = 0$$

Selanjutnya pada saat $f' = 1$ dan $\eta \rightarrow \infty$ diperoleh $e^{\frac{C_1}{A}}$, dengan $\operatorname{erf}(\infty) = 1$, maka diperoleh.

$$f' = \sqrt{\pi A} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2A} \right) e^{\frac{C_1}{A}}$$

$$1 = \sqrt{\pi A} \operatorname{erf}(\infty) e^{\frac{C_1}{A}}$$

$$1 = \sqrt{\pi A} e^{\frac{C_1}{A}}$$

$$e^{\frac{C_1}{A}} = \frac{1}{\sqrt{\pi A}}$$

Selanjutnya, dengan melakukan substitusi C_2 dan $e^{\frac{C_1}{A}}$ pada f' ,

maka diperoleh.

$$f' = \sqrt{\pi A} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2A} \right) e^{\frac{C_1}{A}}$$

$$f' = \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2A} \right)$$

Selanjutnya dengan mengintegralkan f' , maka diperoleh.

$$f = \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2A} \right) d\eta$$

$$f = \eta \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2A} \right) + 2 \sqrt{\frac{A}{\pi}} \left(e^{-\frac{\eta}{4A}} \right) + C_3$$

Selanjutnya dengan mensubtitusikan $f = 1$ pada saat $\eta \rightarrow \infty$, maka diperoleh

$$1 = \eta \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2A} \right) + 2 \sqrt{\frac{A}{\pi}} \left(e^{-\frac{\eta}{4A}} \right) + C_3$$

$$C_3 = -1$$

Sehingga diperoleh.

$$f = \eta \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2A} \right) + 2 \sqrt{\frac{A}{\pi}} \left(e^{-\frac{\eta}{4A}} - 1 \right)$$

Selanjutnya dengan menurunkan f' maka diperoleh.

$$\begin{aligned} f'' &= \frac{df'}{d\eta} \\ f'' &= \frac{d}{d\eta} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2A} \right) \right) \\ f'' &= \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2A} \right) \\ f'' &= \frac{1}{\sqrt{\pi A}} e^{-\frac{\eta^2}{4A}} \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menurunkan f'' , maka diperoleh.

$$\begin{aligned} f''' &= \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi A}} e^{-\frac{\eta^2}{4A}} \right) \\ f''' &= -\frac{\eta}{2A\sqrt{\pi A}} e^{-\frac{\eta^2}{4A}} \end{aligned}$$

Didapatkan kondisi awal fungsi f, f', f'', f''' dengan mensubtitusikan kembali $A = \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
f &= \eta \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2 \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)} \right) + 2 \sqrt{\frac{\frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)}{\pi}} \left(e^{-\frac{\eta}{4A}} - 1 \right) \\
f' &= \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2 \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)} \right) \\
f'' &= \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)}} e^{-\frac{\eta^2}{4 \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)}} \\
f''' &= \frac{\eta}{2 \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \sqrt{\pi \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)}} e^{-\frac{\eta^2}{4 \frac{v_{nf}}{v_f} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)}}
\end{aligned}$$

Lampiran 5. Program Matlab

LAMPIRAN 5. PROGRAM MATLAB

```
clear all
clc
close all
%chi=[0.1 0.125 0.15 0.175 0.2];
M=1;
%Beta=[0.5 0.8 1 1.3 1.6];
B=1;
Porositas=[0.1 0.2 0.5 0.7 0.9];
%Po=1; %Parameter Porositas
np = 60;% banyak partisi eta
nt = 33; % banyak partisi waktu
nt1= 1.65; % banyak partisi waktu untuk small
time
deleta = 0.1; % step size dari eta
delt = 0.05; % step size dari waktu
eta(1) = 0.0; %eta
etac(1) = 0.0; %diskrit eta
N=0.1; %input chi pada nanofluid

%Koefisien parameter fluida nano
%Fluida dasar (darah)
rhof = 1063; %densitas
kf = 0.492; %kunduktivitas termal
cn = 3594; %kapasitas panas
Bf=0.00021; % thermal expansion coefficient of the
base fluid fraction

%Partikel nano Cu (tembaga)
%rhos = 8933; %densitas
%ks = 400; %kunduktivitas termal
%cs = 385; %kapasitas panas
%Bs=0.0000085;

%Partikel nano Al203 (alumina)
rhos = 3970; %densitas
ks = 40; %kunduktivitas termal
```

```

cs = 765; %kapasitas panas
Bs=0.0000085;

%% Penghitungan eta dan eta^{j-1/2}
for j = 2:np
    eta(j) = eta(j-1) + deleta;
    etac(j) = 0.5*(eta(j) + eta(j-1));
end

%% Penghitungan waktu t dan t^{n-1/2}
for n = 1 : nt
    if n == 1
        t(1) = 0;
        t1(1) = 0;
    else
        t(n) = t(n-1) + delt;
        t1(n) = 0.5*(t(n) + t(n-1));
    end
end

for i=1:5
    %N=chi(i);
    %B=Beta(i);
    Po=Porositas(i);
for n = 1:nt
    k=1;
    stop = 1;
    while stop > 0.00001
        V=((rhof/((1-N)*rhof+N*rhos))*(1/((1-
N)^2.5))*(B+1)/B));

        %% Initial Condition
        for j = 1:np
            if n == 1
                f(j,1,n) =
            eta(j)*erf(0.5*exp((1/2)*log(1/V))*eta(j))+(2/(exp
((1/2)*log(pi/V))))*(exp(-
0.25*(1/V)*(eta(j)^2))-1);

```

```

        u(j,1,n) =
erf(0.5*eta(j)*(exp((1/2)*log(1/V))));           /<-----> P
        v(j,1,n) = exp((1/2)*log(1/V*pi))*exp(-
0.25*1/V*((eta(j))^2));
        else
            f(j,1,n) = ff(j,n-1);           /<-----> P
            u(j,1,n) = uu(j,n-1);
            v(j,1,n) = vv(j,n-1);
        end
    end

    for j = 2:np
        if n == 1
            cfb(j,n) = 0; cub(j,n) = 0;
            cvb(j,n) = 0; cdervb(j,n) = 0;
            cfvfvb(j,n) = cfb(j,n)*cvb(j,n);
            cunb(j,n)=cub(j,n)^2;
        else
            cfb(j,n)= ffb(j,n-1);
            cub(j,n)= utb(j,n-1);
            cvb(j,n)= vvb(j,n-1);
            cunb(j,n)=cub(j,n)^2;
            cfvfvb(j,n)= cfb(j,n)*cvb(j,n);
            cdervb(j,n)= ddervb(j,n-1);
        end
        fb(j,k,n) = 0.5*(f(j,k,n)+f(j-1,k,n));
        ub(j,k,n) = 0.5*(u(j,k,n)+u(j-1,k,n));
        vb(j,k,n) = 0.5*(v(j,k,n)+v(j-1,k,n));
        dervb(j,k,n) = (v(j,k,n)-v(j-1,k,n))/deleta;
        fvfvb(j,k,n) = fb(j,k,n)*vb(j,k,n);
        unb(j,k,n) = ub(j,k,n)^2;

        if n < nt1+1
            a1(j,k) = (1/2)*t1(n)*vb(j,k,n);
            a2(j,k) = (1/2)*t1(n)*vb(j-1,k,n);
            a3(j,k) = t1(n)*ub(j,k,n) + 0.5*(M+Po)*t1(n) -
t1(n)/delt;
        end
    end
end

```

```

a4(j,k) = -t1(n)*ub(j-1,k,n) +
0.5*(M+Po)*t1(n) - t1(n)/delt;
a5(j,k) = (V/deleta) + 0.25*etac(j) +
(1/2)*t1(n)*fb(j,k,n);
a6(j,k) = (-V/deleta) + 0.25*etac(j) +
(1/2)*t1(n)*fb(j-1,k,n);

r1(j,k) = f(j-1,k,n)-
f(j,k,n)+deleta*ub(j,k,n);
r2(j,k) = u(j-1,k,n)-
u(j,k,n)+deleta*vb(j,k,n);
r4(j,k) = -V*cdervb(j,n) -
0.5*etac(j)*cvb(j,n) -t1(n)*(1-cunb(j,n) +
cfvfvb(j,n)) -(M+Po)*t1(n)*(cub(j,n)-1) +
2*t1(n)*cub(j,n)/delt - V*dervb(j,k,n) -
0.5*etac(j)*vb(j,k,n) - t1(n)*(1-unb(j,k,n) +
fvfvb(j,k,n)) -(M+Po)*t1(n)*(ub(j,k,n)-1) -
2*t1(n)*ub(j,k,n)/delt;
end
end

% Matrices
a{2,k} = [0 1 0; -0.5*deleta 0 -
0.5*deleta;a6(2,k) a1(2,k) a5(2,k)];
for j = 3:np
a{j,k} = [-0.5*deleta 1 0; -1 0 -
0.5*deleta; a4(j,k) a1(j,k) a5(j,k)];
b{j,k} = [0 -1 0; 0 0 -0.5*deleta; 0
a2(j,k) a6(j,k)];
end;
for j = 2:np
c{j,k} =[-0.5*deleta 0 0;1 0 0; a3(j,k) 0
0];
end;
alfa{2,k} = a{2,k};
gamma{2,k} = inv(alfa{2,k})*c{2,k};
for j = 3:np
alfa{j,k} =a{j,k}-(b{j,k})*gamma{j-1,k});

```

```

        gamma{j,k} = inv(alfa{j,k})*c{j,k};
    end;
    for j = 2:np
        rr{j,k} =[r1(j,k);r2(j,k);r4(j,k)];
    end;
    ww{2,k} =inv(alfa{2,k})*rr{2,k};
    for j = 3:np
        ww{j,k} =inv(alfa{j,k})*(rr{j,k} -
(b{j,k}*ww{j-1,k}));;
    end;

    %% backward sweep
    delu(1,k) = 0;
    delf(1,k) = 0;
    delu(np,k) = 0;
    dell{np,k} = ww{np,k};

    for j = np-1:-1:2
        dell{j,k} =ww{j,k} -
(gamma{j,k}*dell{j+1,k});
    end;
    delv(1,k) = dell{2,k}(1,1);
    delf(2,k) = dell{2,k}(2,1);
    delv(2,k) = dell{2,k}(3,1);

    for j = np:-1:3
        delu(j-1,k) = dell{j,k}(1,1);
        delf(j,k) = dell{j,k}(2,1);
        delv(j,k) = dell{j,k}(3,1);
    end;

    %% Newton's Method
    for j = 1:np
        f(j,k+1,n) = f(j,k,n) + delf(j,k);
        u(j,k+1,n) = u(j,k,n) + delu(j,k);
        v(j,k+1,n) = v(j,k,n) + delv(j,k);
    end;
    stop = abs(delv(1,k));

```

```

kmax = k;
k = k + 1;
end

for j = 1:np
    ff(j,n) = f(j,k,n);
    uu(j,n) = u(j,k,n);
    vv(j,n) = v(j,k,n);
end
for j=1:np
    ffb(j,n) = fb(j,kmax,n);
    utb(j,n) = ub(j,kmax,n);
    vvb(j,n) = vb(j,kmax,n);
    ddervb(j,n) = dervb(j,kmax,n);
end
end

if(i==1)
    a11=u(:,kmax,nt);
figure(1)
plot(eta,u(:,kmax,nt),'b', 'linewidth', 2)
hold on;

elseif(i==2)
    a12=u(:,kmax,nt);
figure(1)
plot(eta,u(:,kmax,nt),':', 'linewidth', 2)
hold on;

elseif(i==3)
    a13=u(:,kmax,nt);
figure(1)
plot(eta,u(:,kmax,nt),'r', 'linewidth', 2)
hold on;

elseif(i==4)
    a14=u(:,kmax,nt);
figure(1)

```

```
plot(eta,u(:,kmax,nt), 'y', 'linewidth', 2)
hold on;

elseif(i==5)
    a15=u(:,kmax,nt);
figure(1)
plot(eta,u(:,kmax,nt), 'g', 'linewidth', 2)
hold on;

%title('Kurva Kecepatan Cu-darah dengan Variasi
%Parameter Fraksi Volume')
%title('Kurva Kecepatan Cu-darah dengan Variasi
%Parameter Casson')
%title('Kurva Kecepatan Cu-darah dengan Variasi
%Parameter Porositas')
%title('Kurva Kecepatan Al203-darah dengan Variasi
%Parameter Fraksi Volume')
%title('Kurva Kecepatan Al203-darah dengan Variasi
%Parameter Casson')
title('Kurva Kecepatan Al203-darah dengan Variasi
Parameter Porositas')
%legend('\chi=0.1', '\chi=0.125', '\chi=0.15', '\chi=
0.175', '\chi=0.2')
legend('\phi=0.1', '\phi=0.2', '\phi=0.5', '\phi=0.7'
, '\phi=0.9')
%legend('\beta=0.5', '\beta=0.8', '\beta=1', '\beta=1
.3', '\beta=1.6')

xlabel('\eta')
ylabel(' \partial f / \partial \eta')
grid on;

end
end
```

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

1. Nama Lengkap : Bilqis Nur Salsabillah
2. Tempat & Tgl. Lahir : Batam, 28 Maret 2003
3. Alamat Rumah : Perum. Graha Pesona Jatisari
B1.15 Kec. Mijen Kota Semarang
4. No. HP : 085706485170
5. E-mail : bilqisnur0303@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. Pendidikan Formal:
 - a. SD Negeri Jatisari (2009–2015)
 - b. SMP Negeri 16 Semarang (2015–2018)
 - c. SMA Negeri 5 Brawijaya Kediri (2018–2021)
2. Pendidikan Non-Formal:
 - a. Ponpes Ma'had Ummul Quran Geringging Kota Kediri

Semarang, 12 Desember 2024

Bilqis Nur Salsabillah

NIM: 2108046093