

SUBGRUP NORMAL PADA GRUP DIHEDRAL D_{20}

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika



Oleh : **TITISARI AZIZAH WIJAYANTI**

NIM : 2108046012

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2024

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Titisari Azizah Wijayanti
NIM : 2108046012
Jurusan/Program Studi : Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

SUBGRUP NORMAL PADA GRUP DIHEDRAL D_{20}

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 18 Desember 2024

Pembuat pernyataan,



Titisari Azizah Wijayanti

NIM : 2108046012



KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **Subgrup Normal pada Grup Dihedral D_{20}**
Penulis : Titisari Azizah Wijayanti
NIM : 2108046012
Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 24 Desember 2024

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

**Dr. Minhayati Shaleh, S.Si.
M.Sc.**

NIP: 19760426 200804 2 001

Penguji II,

Dinni Rahma Oktaviani, M.Si.

NIP: 19941009 201903 2 017

Penguji III,

Prihadi Kurniawan, M.Si.

NIP: 19901226 201903 2 017

Penguji IV,

Nur Khasanah, M.Si.

NIP: 19911121 201903 2 017

Pembimbing,

Dinni Rahma Oktaviani, M.Si.

NIP: 19941009 201903 2 017

NOTA DINAS

Semarang, 18 Desember 2024

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : Subgrup Normal pada Grup Dihedral D_{20}
Nama : Titisari Azizah Wijayanti
NIM : 2108046012
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing,



Dinni Rahma Oktaviani, M.Si.
NIP : 19941009 201903 2 017

ABSTRAK

Penelitian ini berfokus pada pencarian bentuk dan pengidentifikasian karakteristik subgrup normal pada grup dihedral D_{20} . Suatu subgrup dikatakan normal apabila operasi konjugasi antara elemen di grup dengan setiap elemen subgrup tersebut menghasilkan elemen yang tetap berada di subgrup itu sendiri. Grup dihedral D_{20} adalah grup yang mempunyai order sebanyak 20, sepuluh di antaranya adalah elemen rotasi yang diputar berlawanan arah jarum jam dengan sudut sebesar 36° dan sepuluh yang lainnya adalah elemen refleksi dengan sumbu simetri vertikal sebagai garis refleksi. Pada penelitian ini, beberapa teorema digunakan untuk memperoleh hasil yang tepat. Berdasarkan pembahasan, penulis mendapatkan tujuh bentuk subgrup normal pada grup dihedral D_{20} . Dari ketujuh bentuk tersebut diperoleh karakteristik, yaitu empat bentuk subgrup normal merupakan subgrup siklik dan tiga bentuk lainnya bukanlah subgrup siklik. Dari karakterisasi subgrup normal tersebut, diperoleh bahwa $k|n$ jika dan hanya jika $H = \langle r^k \rangle$ subgrup normal pada D_{2n} dengan k, n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$. Dengan demikian grup dihedral D_{2n} mempunyai subgrup normal yang dibentuk oleh r^k dengan $k|n$.

Kata kunci : Grup Dihedral, Subgrup Normal, Kelas Konjugasi

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah Swt., Tuhan yang Maha Esa atas semua nikmat dan hidayah-Nya terutama nikmat kesehatan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "**Subgrup Normal pada Grup Dihedral D_{20}** ". Selawat dan salam semoga senantiasa terlimpah curahkan kepada Baginda Nabi Muhammad saw. beserta keluarga dan para sahabatnya hingga hari akhir zaman, amin.

Penyusunan skripsi ini dimaksudkan guna memenuhi persyaratan dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di UIN Walisongo Semarang. Penyelesaian skripsi ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Nizar, M.Ag., selaku rektor Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang
2. Bapak Prof. Dr. Musahadi, M.Ag., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang
3. Ibu Any Muanalifah, M.Si., Ph.D., selaku ketua Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang
4. Ibu Dinni Rahma Oktaviani, M.Si., selaku dosen pembimbing, atas segala bimbingan, arahan, dan saran yang diberikan kepada penulis sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik

5. Seluruh dosen Jurusan Matematika, atas semua ilmu yang telah diberikan
6. Bapak Slamet Widodo dan Ibu Tutik Yulianti selaku orang tua penulis yang selalu memberikan dukungan dan doa demi keberhasilan penulis
7. Adik Galuh Inayah Wijayanti yang senantiasa memberikan hiburan di rumah
8. Seluruh sahabat Zaramaraz (Fatma, Bilop, Ka Cut, Mba Tams, Prof Nurul, Caca, Mumu, Jir Uma) yang senantiasa memberikan motivasi dan dukungan sejak penulis masih berada di sekolah asrama
9. Nilna Salsabila Syarif yang selalu menyempatkan waktunya untuk bertemu bila penulis sedang libur kuliah
10. Ainur Rofiah, Nanda Safitri, Nelis Sa'adah, dan Siti Hidayatun Nisyak selaku sahabat dekat penulis yang selalu ada dalam susah dan senangnya penulis dan senantiasa memberikan ruang keceriaan untuk penulis selama berkuliah
11. Ketua Rani, Jirbang Khodijah, Bor Yanti, Aulia-san, Ennur, Titi, Elycha yang selalu meluangkan waktu untuk mendengarkan keluh kesah penulis
12. Teman-teman seperjuangan mahasiswa matematika 2021, atas semua pengalaman berharga dan momen tak terlupakan selama menempuh pendidikan bersama
13. Teman-teman KKN MIT Tematik Ke-18 Posko 89 yang telah menjadi bagian dari perjalanan penulis, memberikan

dukungan dan semangat selama proses penyelesaian skripsi ini

14. Lee Je-no NCT Dream, Kim Han-bin, dan Kim Jong-dae EXO yang melalui karya dan semangatnya telah menjadi inspirasi serta sumber motivasi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini
15. Seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu, tetapi turut membantu untuk menyelesaikan proses skripsi ini

Semoga kebaikan semuanya menjadi amal ibadah yang diterima dan mendapat pahala yang berlimpah dari Allah SWT. Aamiin.

Atas segala kekurangan dan kelemahan dalam skripsi ini, penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun. Semoga karya tulis yang sederhana ini dapat menjadi bacaan yang bermanfaat dan dapat dikembangkan bagi peneliti-peneliti selanjutnya.

Semarang, 12 Desember 2024

Penulis,

Titisari Azizah Wijayanti

NIM: 2108046012

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iv
NOTA PEMBIMBING	iv
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Rumusan Masalah	4
C. Tujuan Penelitian	4
D. Manfaat Penelitian	5
E. Metode Penelitian	6
F. Sistematika Penulisan	7
BAB II LANDASAN TEORI	9
A. Grup	9
1. Subgrup	13
2. Grup Siklik	15
3. Kelas Konjugasi	15
4. Koset	16
5. Subgrup Normal	18
B. Isomorfisma Grup	22
1. Fungsi	22
2. Homomorfisma Grup	25
3. Isomorfisma Grup	26
C. Grup Dihedral	28
1. Permutasi dan Grup Simetri	28
2. Grup Dihedral	31
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN	40
A. Struktur Grup Dihedral D_{20}	40

B.	Identifikasi Subgrup Normal pada Grup Dihedral D_{20} ...	47
C.	Karakteristik Subgrup Normal pada Grup Dihedral D_{20} .	54
BAB IV SIMPULAN DAN SARAN		59
A.	Kesimpulan	59
B.	Saran	60
DAFTAR PUSTAKA		61
DAFTAR RIWAYAT HIDUP		64

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul	Halaman
Tabel 3.1	Bagian pertama dari tabel Cayley untuk grup dihedral D_{20} : operasi komposisi antar elemen rotasi	45
Tabel 3.2	Bagian kedua dari tabel Cayley untuk grup dihedral D_{20} : operasi komposisi elemen rotasi dengan refleksi	46
Tabel 3.3	Bagian ketiga dari tabel Cayley untuk grup dihedral D_{20} : operasi komposisi elemen refleksi dengan rotasi	46
Tabel 3.4	Bagian keempat dari tabel Cayley untuk grup dihedral D_{20} : operasi komposisi antar elemen refleksi	47

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
Gambar 2.1	Rotasi dan refleksi pada poligon beraturan	32
Gambar 3.1	Rotasi dan refleksi pada segi sepuluh beraturan	40

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Matematika adalah ilmu yang mempelajari struktur, alat, dan prinsip yang mendasari perilaku dan hubungan di alam semesta. Matematika mencakup banyak bidang termasuk aljabar, geometri, analisis, statistika, teori bilangan, logika, topologi, dan kombinatorika. Matematika digunakan dalam berbagai aspek, mulai dari pemrosesan data hingga pengembangan aplikasi pada komputer yang membantu pekerjaan manusia, fisika, kriptografi, ekonomi, dan ilmu pengetahuan lainnya. Matematika memungkinkan manusia untuk memahami dan memodelkan dunia dengan cara yang sistematis dan logis. Dengan menggunakan matematika, manusia dapat membuat prediksi, merancang sistem, dan memecahkan masalah yang kompleks. Matematika juga memainkan peranan penting dalam pengembangan dan inovasi teknologi, karena sebagian besar teknologi modern didasarkan pada prinsip-prinsip matematika.

Teori grup merupakan topik dalam matematika yang mempelajari struktur aljabar yang disebut grup, salah satunya adalah grup dihedral. Grup dihedral merupakan jenis grup yang menarik karena penerapannya mencakup di berbagai bidang ilmu, seperti seni dan kimia. Dalam bidang seni, grup dihedral digunakan oleh Puspasari dkk. (2022) untuk mengklasifikasi pola simetri yang terbentuk dalam desain Shibori, sebuah teknik pencelupan kain yang menghasilkan motif simetris. Dalam bidang kimia, Hamada (1989) menunjukkan bahwa grup

dihedral berperan dalam memahami simetri molekul etilena, yang membantu analisis karakteristik molekul seperti polaritas dan kekiralan. Dengan demikian, grup dihedral memberikan kontribusi penting dalam memahami pola simetri pada berbagai bidang.

Grup dihedral D_{2n} , dengan $n \geq 3$, adalah kelompok simetri dari poligon beraturan (Gallian, 2021). Ada dua macam notasi berbeda untuk grup dihedral. Pada geometri, grup dihedral dinotasikan sebagai D_n , yang mana n menunjukkan jumlah sisinya. Sedangkan dalam aljabar, notasinya adalah D_{2n} , $n \geq 3$, dengan $2n$ adalah order grup atau sebagai banyak elemen dalam himpunan simetri-simetri poligon beraturan. Komponen grup dihedral D_{2n} dibentuk dari refleksi (q) dan rotasi (r) dengan sudut rotasi sebesar $\frac{2\pi}{n}$. Himpunan dari rotasinya membentuk grup siklik dengan order n . Dapat dikatakan pula bahwa rotasi (r) dan refleksi (q) adalah generator dari grup dihedral D_{2n} . Secara formal, grup dihedral D_{2n} dapat dijabarkan sebagai berikut.

$$D_{2n} = \{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}, q, qr, qr^2, \dots, qr^{n-1}\}$$

Penelitian tentang grup dihedral sebelumnya telah banyak dilakukan. Muhammad dkk. (2020) melakukan penelitian yang berfokus pada pembuktian sifat-sifat grup dihedral menggunakan fungsi. Penelitian ini juga mengkaji elemen-elemen mana dari grup tersebut yang bersifat komutatif, serta menentukan derajat komutatifitasnya. Kemudian ada Cavior (1975) yang meneliti tentang subgrup-subgrup dalam grup dihedral. Dalam papernya disebutkan sebuah teorema yang menyatakan bahwa banyaknya subgrup dalam grup dihedral D_{2n} adalah hasil penjumlahan dari banyaknya pembagi positif dari bilangan bulat positif n dengan

jumlah pembagi positifnya. Ada pula penelitian mengenai subgrup non-normal dalam grup dihedral yang dilakukan oleh Rahin dkk. (2020). Rahin dkk. (2020) meneliti mengenai graf dari dua bentuk subgrup non-normal dalam beberapa grup dihedral, yaitu D_6 , D_8 , D_{10} , D_{12} , D_{14} , dan D_{16} . Meskipun demikian, masih banyak yang dapat dipelajari tentang grup dihedral sehingga membuka peluang dilakukan penelitian lebih lanjut.

Sehubungan dengan bahasan di atas, penulis ingin mengkaji serta menganalisa terkait "Subgrup Normal pada Grup Dihedral" yang secara khusus mengacu pada artikel *Subgroups and Normal Subgroups of Dihedral Group up to Isomorphism* oleh Gaurab Bardhan, Palash Nath, dan Himangshu Chakraborty. Subgrup normal pada grup dihedral adalah topik yang menarik untuk dikaji karena bahasannya mengenai subgrup yang invarian atau stabil terhadap operasi konjugasi (Schilling dan Piper, 1975) pada grup yang tidak komutatif (Ruatakurey dkk., 2019). Dalam penelitian yang dilakukan oleh Bardhan dkk. (2023), dibahas tentang struktur dan banyaknya subgrup dari grup dihedral D_6 hingga D_{16} yang didapat melalui geometri dasar, teori grup, dan teori bilangan. Dari hasil pengamatan, para peneliti tersebut menemukan sebuah pola yang kemudian dapat digunakan untuk membuktikan lemma dengan perspektif berbeda dari Cavior (1975). Diselidiki juga mengenai subgrup normal dari D_{16} dan D_{18} , yang mana masing-masing memiliki sebanyak 7 dan 4 buah subgrup normal. Namun dalam artikel tersebut tidak dibahas mengenai subgrup normal pada grup dihedral D_{20} , yang mana menjadi celah penelitian dan dapat dikaji lebih lanjut.

Dalam penelitian ini, penulis bermaksud untuk mengeksplorasi mengenai bentuk serta identifikasi karakteristik subgrup normal

pada grup dihedral D_{20} . Penelitian ini akan menggunakan pendekatan yang sama dalam penelitian Bardhan dkk. (2023), seperti penggunaan teorema-teorema yang diaplikasikan untuk mencari subgrup normal pada grup dihedral D_{20} . Dengan demikian, penelitian ini diharapkan dapat memberikan wawasan baru mengenai bentuk dan karakteristik subgrup normal di dalam grup dihedral, khususnya pada grup dihedral D_{20} , serta memperkaya kajian tentang struktur internal grup dihedral dalam bidang teori grup.

B. Rumusan Masalah

Berkaitan dengan latar belakang yang telah disampaikan, dapat dirumuskan pertanyaan yang menjadi fokus penelitian sebagai berikut.

1. Bagaimana bentuk subgrup normal dalam grup dihedral D_{20} ?
2. Bagaimana karakteristik subgrup normal dalam grup dihedral D_{20} ?

C. Tujuan Penelitian

Terkait dengan rumusan masalah yang telah dipaparkan, penulis menguraikan tujuan penelitian sebagai berikut.

1. Untuk mengetahui bentuk subgrup normal dalam grup dihedral D_{20} .
2. Untuk mengetahui karakteristik subgrup normal dalam grup dihedral D_{20} .

D. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan penulis untuk penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Manfaat Teoritis

Hasil penelitian ini diharapkan akan memberikan wawasan mendalam mengenai struktur grup dihedral, yang merupakan salah satu jenis grup yang banyak diteliti dalam teori grup dan dapat memberikan kontribusi dalam pengembangan ilmu pengetahuan dengan dorongan untuk mencapai prestasi, terutama dalam konteks penulisan skripsi.

2. Manfaat Praktis

Manfaat praktis yang diharapkan penulis adalah sebagai berikut.

- (a) Bagi mahasiswa, penelitian ini dapat digunakan sebagai sumber acuan dan bahan pembelajaran untuk memperdalam pemahaman tentang teori grup, khususnya grup dihedral.
- (b) Bagi universitas, hasil penelitian ini dapat menambah koleksi literatur akademik di perpustakaan universitas, yang dapat diakses oleh mahasiswa dan dosen lainnya.
- (c) Bagi dosen, penelitian ini dapat digunakan oleh dosen sebagai tambahan bahan ajar dalam mata kuliah aljabar abstrak atau teori grup.
- (d) Bagi peneliti lain, penelitian ini dapat menjadi rujukan bagi peneliti lain yang tertarik dalam bidang teori

grup atau yang sedang melakukan penelitian serupa. Hasil penelitian ini dapat membuka peluang kolaborasi penelitian di masa depan.

E. Metode Penelitian

Pada subbab ini akan dibahas mengenai metode penelitian yang mencakup langkah-langkah yang diterapkan dalam penelitian ini. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut.

1. Menelaah Artikel Utama

Penelitian dimulai dengan menelaah artikel tahun 2023 dengan judul *Subgroups and Normal Subgroups of Dihedral Group up to Isomorphism* oleh Bardhan, Nath, dan Chakraborty. Dalam langkah ini, penulis melakukan penelaahan artikel tersebut dengan menerjemahkan dan memahami artikel utama serta membuka materi-materi terkait untuk memperkuat pemahaman dasar.

2. Mengidentifikasi Celah Penelitian

Berdasarkan hasil telaah terhadap artikel oleh Bardhan (2023), penulis menemukan aspek yang belum dibahas, yaitu terkait dengan grup dihedral D_{20} . Penelitian ini akan mengeksplorasi bentuk serta mengidentifikasi karakteristik subgrup normal pada grup D_{20} , yang tidak dicakup oleh penelitian sebelumnya.

3. Pengumpulan Kajian Literatur yang Relevan

Langkah berikutnya adalah mencari dan mengumpulkan literatur relevan yang mendukung penelitian ini. Literatur yang dikaji meliputi sumber-sumber yang membahas

mengenai grup, subgrup normal, isomorfisma, dan grup dihedral.

4. Analisis Subgrup Normal dalam Grup Dihedral D_{20}

Langkah ini melibatkan analisis mendalam terhadap struktur grup dihedral D_{20} . Pencarian subgrup normal pada grup dihedral D_{20} ini menggunakan langkah yang sama seperti penelitian dalam artikel utama. Pertama, penulis mencari subgrup-subgrup dari grup dihedral D_{20} . Langkah selanjutnya, elemen-elemen dalam subgrup-subgrup itu dianalisis kelas konjugasinya untuk menentukan subgrup mana yang merupakan subgrup normal. Setelah didapat bentuk-bentuk subgrup normalnya, penulis mengidentifikasi karakteristik berdasarkan beberapa teorema yang dibuktikan.

5. Menarik Kesimpulan

Pada langkah ini, penulis menarik kesimpulan dari hasil analisis subgrup normal pada grup dihedral D_{20} . Hasil penelitian ini meliputi subgrup normal yang ditemukan sesuai dengan teorema yang telah dibuktikan. Kesimpulan ini menjawab rumusan masalah terkait bentuk-bentuk subgrup normal serta karakteristik subgrup normal pada grup dihedral D_{20} .

F. Sistematika Penulisan

Penelitian ini ditulis dalam empat bab dan beberapa subbab agar keseluruhan isi lebih mudah dipahami. Berikut adalah sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini.

1. BAB 1 PENDAHULUAN

Bab ini berisi enam subbab, yaitu latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

2. BAB 2 LANDASAN TEORI

Bab ini menjelaskan dasar-dasar teoritis yang perlu diketahui. Terbagi menjadi tiga subbab, yaitu grup, isomorfisma grup, dan grup dihedral, yang di dalam masing-masing subbab tersebut dibagi lagi menjadi subsubbab.

3. BAB 3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil penelitian yang diperoleh disajikan dalam bab ini. Ada tiga subbab dengan subbab pertama berisi pengenalan struktur grup dihedral D_{20} kemudian disusul dengan subbab yang berisi langkah-langkah pencarian subgrup normal lalu diakhiri dengan subbab yang berisi identifikasi karakteristik dari subgrup normal yang didapat.

4. BAB 4 SIMPULAN DAN SARAN

Bab ini memberikan kesimpulan yang diambil dari penelitian pada bab-bab sebelumnya dan saran untuk penelitian selanjutnya yang dapat mengkaji topik yang lebih banyak lagi.

BAB II

LANDASAN TEORI

A. Grup

Sebelum konsep tentang grup dibahas lebih lanjut, terlebih dahulu dijelaskan mengenai operasi biner, yang merupakan dasar dari struktur aljabar. Pada bagian ini juga akan dibahas konsep-konsep penting lainnya yang terkait dengan grup, yaitu subgrup, grup siklik, kelas konjugasi, koset, dan subgrup normal.

Definisi 2.1.1 (Operasi Biner, e.g (Li dan Zhao, 2022))

Operasi biner $$ pada suatu himpunan tak kosong S adalah sebuah fungsi*

$$S \times S \rightarrow S, (a, b) \mapsto a * b.$$

Suatu himpunan S yang dilengkapi operasi biner $$ disebut struktur aljabar biner, atau struktur biner, dinotasikan dengan $(S, *)$.*

Contoh 2.1.2 Operasi Biner

Diberikan operasi $*$ dengan operasi $+$ didefinisikan sebagai

$$a * b = \frac{a + b}{2}$$

Tunjukkan bahwa operasi $*$ adalah sebuah operasi biner pada himpunan \mathbb{R} .

Jawab:

1. Menunjukkan bahwa operasi $*$ adalah sebuah fungsi

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $x = y$ sehingga

$$*(x) = x * x = \frac{x+x}{2} = \frac{y+y}{2} = y * y = *(y)$$

Maka $*$ terdefinisi dengan baik.

2. Menunjukkan bahwa $*$ adalah operasi biner

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}$ sehingga

$$x * y = \frac{x+y}{2}$$

Maka $x + y \in \mathbb{R}$ sehingga $\frac{x+y}{2} \in \mathbb{R}$.

Definisi 2.1.3 (Grup, e.g (Kurniawan dan Yulianto, 2021))

Sebuah grup adalah pasangan terurut $(G, *)$ dengan G adalah suatu himpunan tak kosong dan $*$ adalah operasi yang didefinisikan pada G yang memenuhi sifat-sifat berikut.

1. Untuk semua $x, y \in G$, $x * y \in G$.
2. $x * (y * z) = (x * y) * z$ untuk semua $x, y, z \in G$.
3. Mempunyai elemen $e \in G$ yang memenuhi $e * x = x$ dan $x * e = x$ untuk setiap $x \in G$.
4. Untuk setiap $x \in G$, ada $y \in G$ yang memenuhi $x * y = e$ dan $y * x = e$.

Contoh 2.1.4 Grup

Himpunan $D = \{4^m, m \in \mathbb{Z}\}$ dengan operasi \circ yang didefinisikan untuk sebarang $4^a, 4^b$ dengan $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $4^a \circ 4^b = 4^{a+b}$. Cek apakah himpunan tersebut grup atau bukan.

Jawab:

- Cek apakah himpunan D tidak kosong

Telah diketahui bahwa $D = \{4^m, m \in \mathbb{Z}\}$, jadi keberadaan anggota D telah dijamin oleh pangkatnya yakni dari anggota bilangan bulat, maka $D \neq \emptyset$.

- Cek apakah himpunan D tertutup terhadap operasi \circ

Ambil sebarang anggota di D , misal $4^{m_1}, 4^{m_2} \in D$

$$4^{m_1} \circ 4^{m_2} = 4^{m_1+m_2}$$

Karena $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ maka $m_1 + m_2 \in \mathbb{Z}$, sehingga $4^{m_1} \circ 4^{m_2} \in D$. Jadi, himpunan D tertutup terhadap operasi \circ .

- Cek apakah operasi \circ pada himpunan D bersifat asosiatif

Ambil sebarang anggota di D , misal $4^{m_1}, 4^{m_2}, 4^{m_3} \in D$

$$\begin{aligned} (4^{m_1} \circ 4^{m_2}) \circ 4^{m_3} &= 4^{m_1+m_2} \circ 4^{m_3} \\ &= 4^{(m_1+m_2+m_3)} \\ &= 4^{m_1+(m_2+m_3)} \\ &= 4^{m_1} \circ 4^{(m_2+m_3)} \\ &= 4^{m_1} \circ 4^{m_2+m_3} \\ &= 4^{m_1} \circ (4^{m_2} \circ 4^{m_3}) \end{aligned}$$

maka,

$$(4^{m_1} \circ 4^{m_2}) \circ 4^{m_3} = 4^{m_1} \circ (4^{m_2} \circ 4^{m_3})$$

Jadi, operasi \circ pada himpunan D bersifat asosiatif.

- Cek apakah himpunan D mempunyai elemen identitas

Ambil sebarang anggota di D , misal $4^m, 4^k \in D$

$$4^m \circ e = 4^m \circ 4^k$$

$$4^m \circ e = 4^{m+k}$$

$$4^m = 4^{m+k}$$

sehingga $m = m + k$ yang mana berarti $k = 0$. Karena $0 \in \mathbb{Z}$ maka D mempunyai elemen identitas yakni $e = 4^0$.

- Cek apakah setiap anggota himpunan D mempunyai invers

Ambil sebarang bilangan di D , misal $4^m, 4^h \in D$. Telah diketahui bahwa identitas di D adalah 4^0 , maka

$$4^m \circ 4^h = 4^0$$

$$4^{m+h} = 4^0$$

sehingga $m+h=0$, ini berarti $h=-m$. Karena $m \in \mathbb{Z}$ maka $-m \in \mathbb{Z}$ dan untuk setiap anggota himpunan D mempunyai invers.

\therefore Dapat disimpulkan bahwa $D = \{4^m, m \in \mathbb{Z}\}$ dengan operasi \circ merupakan grup.

Definisi 2.1.5 (Order Grup, e.g (Suryanti, 2017))

Diberikan G merupakan grup. Banyaknya anggota suatu grup disebut order. Suatu grup dinamakan grup berhingga jika ordernya berhingga. Sebaliknya, jika ordernya tak berhingga, maka grup tersebut dinamakan grup tak hingga. Dinotasikan $|G|$ untuk menunjukkan order dari G .

Contoh 2.1.6 Order Grup

Grup bilangan bulat yang biasa dilambangkan dengan \mathbb{Z} di bawah operasi penjumlahan memiliki order tak hingga.

Definisi 2.1.7 (Order Elemen, e.g (Khanna dan Bhambri, 2020))

Misalkan (G, \cdot) adalah sebuah grup dengan elemen $e, a \in G$, e adalah elemen identitas. Jika untuk $a \in G$, terdapat bilangan bulat positif terkecil m yang memenuhi $a^m = e$ maka m disebut order dari a . Dinotasikan dengan $o(a)$ untuk menunjukkan order dari elemen a .

Contoh 2.1.8 Order Elemen

Diberikan grup $(\mathbb{Z}, +)$. Elemen identitasnya, yakni 0, memiliki order elemen 1, dinotasikan $o(0) = 1$. Sedangkan elemen-elemen lain di grup tersebut selain 0 memiliki order elemen tak terhingga karena tidak ada bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi $a + a + \dots + a = 0$, dengan $a \in \mathbb{Z}$.

1. Subgrup

Definisi 2.1.9 (Subgrup, e.g (Clark, 2001))

Misalkan G adalah suatu grup. Subgrup dari G adalah himpunan bagian H dari G dengan H juga merupakan grup di bawah operasi biner yang sama di G dan memenuhi tiga syarat berikut:

1. Jika $a, b \in H$, maka $ab \in H$.
2. $e \in H$.
3. Jika $a \in H$, maka ada $a^{-1} \in H$.

Dinotasikan dengan $H \leq G$ untuk menunjukkan bahwa H subgrup dari G .

Contoh 2.1.10 Subgrup

Himpunan $(\mathbb{R}, +)$ adalah grup. Cek apakah $(2\mathbb{Z}, +)$ subgrup dari $(\mathbb{R}, +)$.

Jawab:

- Cek apakah himpunan $(2\mathbb{Z}, +)$ tidak kosong

Ambil $4 \in 2\mathbb{Z}$, karena $4 = 2(2k)$, $2k \in \mathbb{Z}$ maka $2\mathbb{Z} \neq \emptyset$, dan $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$.

- Cek apakah himpunan $(2\mathbb{Z}, +)$ tertutup terhadap operasi $+$

Ambil sebarang anggota di $2\mathbb{Z}$, misal $a = 2k, b = 2l \in 2\mathbb{Z}$ dengan $k, l \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} a + b &= 2k + 2l \\ &= 2(k + l) \end{aligned}$$

Karena $k + l \in \mathbb{Z}$ maka $2(k + l) \in 2\mathbb{Z}$ sehingga $a + b \in 2\mathbb{Z}$.
Jadi himpunan $(2\mathbb{Z}, +)$ tertutup terhadap operasi $+$.

- Cek apakah himpunan $(2\mathbb{Z}, +)$ mempunyai elemen identitas

Ambil sebarang anggota di $2\mathbb{Z}$, misal $a = 2k$ dan $b = 2m$ dengan $k, m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} a + e &= a + b \\ 2k + e &= 2k + 2m \\ 2k &= 2k + 2m \end{aligned}$$

yang memenuhi $2k = 2k + 2m$ adalah $2m = 0$. Karena $0 \in \mathbb{Z}$ dan $0 = 2(0) \in 2\mathbb{Z}$, maka elemen identitas pada $(2\mathbb{Z}, +)$ adalah 0.

- Cek apakah setiap anggota $(2\mathbb{Z}, +)$ mempunyai invers

Ambil sebarang anggota di $2\mathbb{Z}$, misal $a = 2k$ dan $b = 2f$ dengan $k, f \in \mathbb{Z}$. Telah diketahui bahwa identitas di $(2\mathbb{Z}, +)$ adalah 0

$$a + b = 0$$

$$2k + 2f = 0$$

ini berarti $2f = -2k$. Karena $-2k \in 2\mathbb{Z}$ ($-k \in \mathbb{Z}$) maka $-2k \in 2\mathbb{Z}$ dan untuk setiap anggota $(2\mathbb{Z}, +)$ mempunyai invers.

\therefore Dapat disimpulkan bahwa $(2\mathbb{Z}, +)$ merupakan subgrup.

2. Grup Siklik

Definisi 2.1.11 (Grup Siklik, e.g (Dummit dan Foote, 2004))

Sebuah grup G disebut grup siklik jika terdapat sebuah elemen $a \in G$, sedemikian sehingga setiap elemen G dapat dinyatakan sebagai sebuah pangkat dari a . Dalam hal ini, a disebut generator dari G . Grup siklik dapat dinotasikan dengan $G = \langle a \rangle$ atau $G = (a)$.

Dengan demikian, G disebut siklik jika sebuah elemen $a \in G$ sedemikian sehingga $G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$.

Contoh 2.1.12 Grup Siklik

Diberikan grup $(\mathbb{Z}, +)$. Grup $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup siklik. Elemen 1 dan -1 adalah generator untuk grup tersebut.

3. Kelas Konjugasi

Definisi 2.1.13 (Kelas Konjugasi, e.g (Gallian, 2021))

Misalkan a dan b adalah elemen dari sebuah grup G . Dinyatakan bahwa a dan b adalah konjugat dalam G (dan menyebut b sebagai konjugat dari a) jika ada x dalam G sehingga $b = xax^{-1}$. Kelas konjugasi dari a adalah himpunan $cl(a) = \{xax^{-1} | x \in G\}$.

Contoh 2.1.14 Kelas Konjugasi

Carilah kelas konjugasi dari elemen 3 di grup $(3\mathbb{Z}, +)$.

Jawab:

Diketahui $3\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$. Kelas konjugasi dari elemen 3 dalam grup $(3\mathbb{Z}, +)$ dapat ditentukan dengan menganalisis semua hasil kali $x3x^{-1}$, dengan x merupakan elemen dari $(3\mathbb{Z}, +)$, seperti yang dijelaskan berikut ini:

⋮

$$\bullet -6 + 3 + 6 = 3$$

$$\bullet -3 + 3 + 3 = 3$$

$$\bullet 0 + 3 + 3 = 3$$

$$\bullet 3 + 3 + (-3) = 3$$

$$\bullet 6 + 3 + (-6) = 3$$

⋮

Dapat disimpulkan bahwa himpunan kelas konjugasi dari elemen $3 \in (3\mathbb{Z}, +)$ adalah $cl(3) = \{3\}$.

4. Koset

Definisi 2.1.15 (Koset, e.g (Hill dan Thron, 2023))

Misalkan G adalah grup dan H adalah subgrup dari G . Koset kiri dari H dengan $g \in G$ didefinisikan sebagai himpunan berikut:

$$gH = \{gh : h \in H\}.$$

Koset kanan dari H dengan $g \in G$ didefinisikan sebagai himpunan berikut:

$$Hg = \{hg : h \in H\}.$$

Contoh 2.1.16 Koset

Diberikan grup $(3\mathbb{Z}, +)$ yang dapat dituliskan sebagai:

$$3\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

Diberikan $(6\mathbb{Z}, +)$ subgrup dari $(3\mathbb{Z}, +)$ dengan

$$6\mathbb{Z} = \{\dots, -12, -6, 0, 6, 12, \dots\}$$

Tentukan semua koset kanan dan koset kirinya.

Jawab:

- Koset kanan

⋮

$$6\mathbb{Z} + (-6) = \{\dots, -18, -12, -6, 0, 6, \dots\}$$

$$6\mathbb{Z} + (-3) = \{\dots, -15, -9, -3, 3, 9, \dots\}$$

$$6\mathbb{Z} + 0 = 6\mathbb{Z}$$

$$6\mathbb{Z} + 3 = \{\dots, -9, -3, 3, 9, 15, \dots\}$$

$$6\mathbb{Z} + 6 = \{\dots, -6, 0, 6, 12, 18, \dots\}$$

⋮

- Koset kiri

⋮

$$-6 + 6\mathbb{Z} = \{\dots, -18, -12, -6, 0, 6, \dots\}$$

$$-3 + 6\mathbb{Z} = \{\dots, -15, -9, -3, 3, 9, \dots\}$$

$$\begin{aligned}
0 + 6\mathbb{Z} &= 6\mathbb{Z} \\
3 + 6\mathbb{Z} &= \{\dots, -9, -3, 3, 9, 15, \dots\} \\
6 + 6\mathbb{Z} &= \{\dots, -6, 0, 6, 12, 18, \dots\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Hasilnya koset kanan adalah $6\mathbb{Z} + (-6) = 6\mathbb{Z} + 6 = 6\mathbb{Z} + 0$, dan $6\mathbb{Z} + (-3) = 6\mathbb{Z} + 3$, ada dua koset berbeda. Sedangkan koset kiri, $-6 + 6\mathbb{Z} = 6 + 6\mathbb{Z} = 0 + 6\mathbb{Z}$, dan $-3 + 6\mathbb{Z} = 3 + 6\mathbb{Z}$, juga ada dua koset yang berbeda.

Teorema 2.1.17 (Teorema Lagrange)

Misalkan G adalah grup berhingga dan H adalah subgrup dari G . Maka $|G|/|H| = [G : H]$ adalah banyak koset kiri yang berbeda dari H di G . Secara khusus, banyak elemen di H harus membagi banyak elemen di G .

Bukti. (Judson, 2012)

Grup G dapat dibagi menjadi $[G : H]$ koset-koset kiri yang berbeda. Setiap koset kiri berisi $|H|$ elemen. Karena tidak ada elemen dalam G yang muncul di lebih dari satu koset kiri, jumlah total elemen dalam G sama dengan jumlah koset kiri dikalikan dengan jumlah elemen di setiap koset kiri. Dengan kata lain:

$$|G| = [G : H] \cdot |H|.$$



5. Subgrup Normal

Definisi 2.1.18 (Subgrup Normal, e.g (Denton, 2013))

Suatu subgrup H dari grup G disebut normal dalam G jika $gH = Hg$ untuk setiap $g \in G$. Dengan kata lain, subgrup normal dari grup

G adalah subgrup dengan koset kanan dan kiri persis sama. Notasi dari subgrup normal yaitu \triangleleft .

Li dan Zhao (2022) menyatakan bahwa ada beberapa kondisi yang apabila salah satunya terpenuhi, subgrup dapat dikatakan subgrup normal. Kondisi-kondisi tersebut dijelaskan dalam teorema berikut.

Teorema 2.1.19 (e.g (Li dan Zhao, 2022))

Diberikan (G, \cdot) adalah grup dan $H \leq G$. Maka tiga pernyataan berikut ini ekuivalen:

- (1) $gHg^{-1} \subseteq H, \forall g \in G$ (yaitu $ghg^{-1} \in H, \forall g \in G, h \in H$);
- (2) $gHg^{-1} = H, \forall g \in G$;
- (3) $gH = Hg, \forall g \in G$.

Catatan. ghg^{-1} disebut konjugasi $h \in H$ dengan $g \in G$.

Bukti.

1. (1) \Rightarrow (2).

Akan dibuktikan bahwa jika $gHg^{-1} \subseteq H, \forall g \in G$ maka $gHg^{-1} = H$. Untuk membuktikan bahwa $gHg^{-1} = H$, akan ditunjukkan $gHg^{-1} \subseteq H$ dan $H \subseteq gHg^{-1}$. Dari asumsi telah diketahui bahwa $gHg^{-1} \subseteq H$ maka hanya akan ditunjukkan $H \subseteq gHg^{-1}$.

Ambil sebarang $h' \in H$. Karena $gHg^{-1} \subseteq H$, maka $g^{-1}h'g \in$

H. Dengan demikian

$$\begin{aligned}h &= g^{-1}h'g \in H \\gh &= gg^{-1}h'g \in H \\ghg^{-1} &= gg^{-1}h'gg^{-1} \in H \\ghg^{-1} &= h' \in H\end{aligned}$$

$h' = ghg^{-1} \in H$ yang berarti $h' = ghg^{-1} \in gHg^{-1}$.

Karena $h' \in H$ maka $H \subseteq gHg^{-1}$. Dengan demikian $gHg^{-1} = H$.

2. (2) \Rightarrow (3).

Akan dibuktikan bahwa jika $gHg^{-1} = H, \forall g \in G$ maka $gH = Hg, \forall g \in G$. Untuk membuktikan bahwa $gH = Hg$, akan ditunjukkan $gH \subseteq Hg$ dan $Hg \subseteq gH$.

(a) $gH \subseteq Hg$

Ambil sebarang $h \in H$. Karena $gHg^{-1} = H$, maka $ghg^{-1} \in H$. Dengan kata lain ada $h' \in H$ sehingga

$$\begin{aligned}ghg^{-1} &= h' \\ghg^{-1}g &= h'g \\gh &= h'g\end{aligned}$$

Oleh karena itu $gH \subseteq Hg$.

(b) $Hg \subseteq gH$

Ambil sebarang $h' \in H$. Karena $gHg^{-1} = H$, maka

$ghg^{-1} \in H$. Dengan kata lain ada $h \in H$ sehingga

$$\begin{aligned}g^{-1}h'g &= h \\gg^{-1}h'g &= gh \\h'g &= gh\end{aligned}$$

Oleh karena itu $Hg \subseteq gH$.

Maka terbukti $gH = Hg$.

3. (3) \Rightarrow (1).

Akan dibuktikan bahwa jika $gH = Hg, \forall g \in G$ maka $gHg^{-1} \subseteq H, \forall g \in G$.

Ambil sebarang $h \in H$. Karena $gH = Hg$ maka $gh = h'g$ untuk $h' \in H$.

$$\begin{aligned}gh &= h'g \\ghg^{-1} &= h'gg^{-1} \\ghg^{-1} &= h'\end{aligned}$$

Karena $h' \in H$ sehingga $ghg^{-1} \in H$. Dengan demikian terbukti $gHg^{-1} \subseteq H$.

■

Contoh 2.1.20 Subgrup Normal

Merujuk pada Contoh 2.1.16, telah ditunjukkan hasil dari koset kanan dan koset kiri dan menghasilkan bahwa koset kanan dan koset kiri sama ($gH = Hg$). Sehingga dapat disimpulkan bahwa $(6\mathbb{Z}, +) \triangleleft (3\mathbb{Z}, +)$.

B. Isomorfisma Grup

Pada subbab ini, dibahas mengenai konsep isomorfisma yang memiliki keterkaitan erat dengan fungsi dan homomorfisma. Sebelum memahami isomorfisma, diperlukan pemahaman tentang fungsi sebagai dasar dalam mendefinisikan relasi antara dua himpunan. Selanjutnya, konsep homomorfisma juga diperkenalkan. Isomorfisma kemudian menjadi fokus utama sebagai homomorfisma yang bersifat bijektif, yang menunjukkan kesetaraan struktur antara dua grup.

1. Fungsi

Definisi 2.2.1 (Fungsi, e.g (Fine dkk., 2014))

Jika A dan B adalah dua himpunan yang tidak kosong, maka sebuah fungsi dari A ke B adalah suatu korespondensi yang mengaitkan setiap elemen $a \in A$ dengan elemen unik $b \in B$. Biasanya diberikan nama pada fungsi tersebut, seperti f , dan menggunakan notasi $f : A \rightarrow B$ untuk menunjukkan bahwa fungsi ini memetakan dari A ke B . Terkadang juga dapat ditulis $A \xrightarrow{f} B$. Jika $a \in A$ dan $f(a) = b$, maka dikatakan bahwa b adalah peta dari a di bawah f dan a disebut sebagai prapeta dari b .

Jika $f : A \rightarrow B$ maka himpunan A disebut domain dari fungsi tersebut sedangkan B adalah kodomainnya. Tidak semua elemen dari B harus merupakan peta dari elemen A . Himpunan peta dari elemen-elemen A dilambangkan dengan $f(A)$ yang dapat ditulis sebagai berikut.

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\}.$$

Peta selalu merupakan subset dari kodomain, $f(A) \subset B$.

Contoh 2.2.2 Fungsi

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$. Perhatikan fungsi

$$f : 1 \rightarrow a, 2 \rightarrow b, 3 \rightarrow a, 4 \rightarrow b, 5 \rightarrow a.$$

Maka peta dari f adalah $f(A) = \{a, b\}$. Untuk $E = \{1, 3, 5\}$, petanya adalah $f(E) = \{a\}$. Tetapi prapeta dari $F = \{c, d\}$ adalah kosong, $f^{-1}(F) = \emptyset$ karena tidak ada apapun di A yang dipetakan ke c atau d .

Definisi 2.2.3 (Klasifikasi Fungsi, e.g (Khanna dan Bhambri, 2020))

Sebuah fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut satu-satu atau injektif jika elemen-elemen yang berbeda dari f memiliki peta yang berbeda, yaitu $x \neq y, x, y \in A \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Sebuah fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut onto atau surjektif jika setiap elemen dari B mempunyai prapeta di A , yaitu $f(A) = B$.

Sebuah fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut bijektif jika fungsi tersebut bersifat injektif dan surjektif.

Contoh 2.2.4 (Klasifikasi Fungsi)

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{a, b, c, d, e\}$. Perhatikan fungsi berikut.

$$f : 1 \rightarrow a, 2 \rightarrow b, 3 \rightarrow c, 4 \rightarrow d.$$

Bentuk klasifikasi f adalah sebagai berikut.

Perhatikan bahwa:

- $f(1) = a$
- $f(2) = b$
- $f(3) = c$

$$\bullet f(4) = d$$

Dari hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa $\forall a, b \in A$ dengan $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ sehingga fungsi f termasuk fungsi injektif.

Definisi 2.2.5 (Komposisi Fungsi, e.g (Fine dkk., 2014))

Jika $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ maka komposisi $g \circ f = gf : A \rightarrow C$, yang diberikan oleh $g \circ f(a) = gf(a) = g(f(a))$, secara simbolis $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Sehingga $g \circ f$ memiliki domain A dan kodomain C .

Contoh 2.2.6 Komposisi Fungsi

Misalkan $G = \mathbb{R}^*$ adalah himpunan bilangan real tanpa 0 di bawah operasi perkalian. Didefinisikan f dan g sebagai berikut.

1. $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ didefinisikan sebagai $f(x) = x^2$.
2. $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ didefinisikan sebagai $g(x) = \frac{1}{x}$.

Jawab:

Langkah pertama adalah terlebih dahulu dibuktikan bahwa f dan g merupakan fungsi.

1. Fungsi $f(x) = x^2$ dari $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{R}^*$ dengan $a = b$ sehingga

$$f(a) = a^2 = b^2 = f(b).$$

Dengan demikian, f terdefinisi dengan baik.

2. Fungsi $g(x) = \frac{1}{x}$ dari $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ Ambil sebarang $k, l \in \mathbb{R}^*$ dengan $k = l$ sehingga

$$g(k) = \frac{1}{k} = \frac{1}{l} = g(l).$$

Dengan demikian, g terdefinisi dengan baik.

Langkah selanjutnya dihitung komposisi fungsinya, $(g \circ f)(x)$ yang berarti $g(f(x))$ sehingga

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \frac{1}{x^2}.$$

Teorema 2.2.7 (e.g (Li dan Zhao, 2022))

Misalkan S merupakan suatu himpunan tak kosong. Diberikan f, g, h adalah fungsi-fungsi yang memetakan elemen-elemen dari S ke elemen-elemen di S itu sendiri. Maka $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. Dengan kata lain, komposisi dari fungsi adalah asosiatif.

Bukti. Akan dibuktikan komposisi dari fungsi adalah asosiatif. Diketahui bahwa f, g, h adalah fungsi-fungsi yang memetakan elemen-elemen dari S ke S , dengan kata lain $f : S \rightarrow S, g : S \rightarrow S$, dan $h : S \rightarrow S$. Ambil sebarang $a \in S$ sehingga

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h)(a) &= (f \circ g)(h(a)) \\ &= f(g(h(a))) \\ &= f((g \circ h)(a)) \\ &= (f \circ (g \circ h))(a) \end{aligned}$$

Maka $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. ■

2. Homomorfisma Grup

Definisi 2.2.8 (Homomorfisma, e.g (Hill dan Thron, 2023))

Suatu homomorfisma antara grup $(G, *)$ dan (H, \circ) adalah suatu fungsi $f : G \rightarrow H$ yang memenuhi:

$$f(g_1 * g_2) = f(g_1) \circ f(g_2)$$

untuk semua $g_1, g_2 \in G$. Daerah hasil dari f di H disebut peta homomorfik dari f .

Contoh 2.2.9 Homomorfisma Grup

Diberikan $(\mathbb{Z}, +)$. Didefinisikan $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dengan aturan $a \mapsto 2a$.

Cek bahwa f homomorfisma.

Jawab:

Langkah pertama adalah membuktikan bahwa f terdefinisi dengan baik.

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$ dengan $x = y$ sehingga

$$f(x) = 2x = 2y = f(y)$$

Maka f terdefinisi dengan baik.

Kemudian ditunjukkan bahwa f homomorfisma.

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(a + b) &= 2(a + b) \\ &= 2a + 2b \\ &= f(a) + f(b) \end{aligned}$$

Maka terbukti bahwa f homomorfisma.

3. Isomorfisma Grup

Definisi 2.2.10 (Isomorfisma, e.g (Gallian, 2021))

Suatu isomorfisma ϕ dari grup G ke grup G' adalah fungsi yang berkorespondensi satu-satu dari G ke G' yang mempertahankan operasi grup. Artinya:

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \quad \text{untuk semua } a, b \text{ di } G.$$

Jika ada isomorfisma dari G ke G' , dikatakan bahwa G dan G' isomorfik dan ditulis $G \cong G'$.

Contoh 2.2.11 Isomorfisma

Diberikan $(\mathbb{R}, +)$ dan (\mathbb{R}^+, \cdot) . \mathbb{R}^+ adalah himpunan bilangan real positif. Didefinisikan $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ dengan aturan $\phi : 2^x$. Cek bahwa $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^+$.

Jawab:

Ada tiga syarat yang harus dipenuhi untuk membuktikan dua grup saling isomorfik, yaitu terbukti bahwa $+$ dan \cdot terdefinisi dengan baik, homomorfisma, dan bijektif.

1. Akan dibuktikan bahwa ϕ terdefinisi dengan baik

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a = b$. Sehingga

$$\phi(a) = 2^a = 2^b = \phi(b)$$

Maka terbukti bahwa ϕ terdefinisi dengan baik.

2. Akan dibuktikan bahwa ϕ adalah homomorfisma

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{R}$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \phi(a + b) &= 2^{a+b} \\ &= 2^a \cdot 2^b \\ &= \phi(a)\phi(b) \end{aligned}$$

Maka terbukti bahwa ϕ adalah homomorfisma.

3. Akan dibuktikan bahwa ϕ bijektif

Bijektif merupakan perpaduan dari fungsi injektif dan surjektif. Oleh karenanya, akan ditunjukkan bahwa ϕ injektif dan surjektif.

(a) Akan ditunjukkan bahwa ϕ injektif

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{R}$, maka $\phi(a) = \phi(b)$ sehingga $2^a = 2^b$ yang berarti $a = b$. Dengan itu ϕ adalah injektif.

(b) Akan ditunjukkan bahwa ϕ surjektif

Ambil sebarang $b \in \mathbb{R}^+$ maka $\log_2(b) \in \mathbb{R}$ sehingga $\phi(\log_2(b)) = 2^{\log_2(b)} = b$. Oleh karena itu, ϕ adalah surjektif.

Maka terbukti bahwa ϕ bijektif.

Karena ϕ terbukti terdefinisi dengan baik, homomorfisma, dan bijektif maka $(\mathbb{R}, +)$ dan (\mathbb{R}^+, \cdot) saling isomorfik.

C. Grup Dihedral

Grup dihedral merupakan grup khusus dari grup simetri karena grup dihedral adalah simetri-simetri dari poligon beraturan. Untuk memahami konsep ini, terlebih dahulu akan diperkenalkan konsep permutasi dan grup simetri sebagai dasar. Permutasi digunakan untuk merepresentasikan elemen-elemen dalam grup dihedral dalam bentuk fungsi bijektif, yang memberikan gambaran lebih jelas tentang struktur grup tersebut. Dengan pengenalan ini, pembahasan selanjutnya mengenai sifat-sifat dan karakteristik grup dihedral akan menjadi lebih mudah dipahami.

1. Permutasi dan Grup Simetri

Definisi 2.3.1 (*Permutasi, e.g (Judson, 2012)*)

Untuk setiap himpunan S , fungsi satu-satu dan onto $\pi : S \rightarrow S$ disebut sebagai permutasi dari S .

Notasi permutasi:

Misal $T = \{1, 2, \dots, n\}$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Contoh 2.3.2 Permutasi

Diberikan himpunan tak kosong $I = \{1, 2, 3\}$. Maka dapat dibentuk fungsi bijektif pada I :

• a_1 :

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

• a_2 :

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

• a_3 :

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

• a_4 :

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

• a_5 :

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

• a_6 :

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.3.3 (Grup Simetri, e.g (Clark, 2001))

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, himpunan S_n dari permutasi pada $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ merupakan sebuah grup di bawah komposisi fungsi. S_n disebut grup simetri derajat n .

Contoh 2.3.4 Grup Simetri

Diberikan $[2] = \{1, 2\}$. Cek apakah $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ adalah grup.

Jawab:

\circ	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Dari tabel Cayley tersebut, didapat:

- Operasi \circ tertutup
- Asosiatif, dijamin oleh Teorema 2.2.7
- Elemen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ adalah identitas di S_2
- Elemen identitasnya invers dengan dirinya sendiri. Elemen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ invers dengan dirinya sendiri.

Maka S_2 adalah grup.

Komposisi Dua Permutasi

Jika ν dan κ adalah elemen dari S_n , maka $\nu\kappa$ didefinisikan sebagai

komposisi fungsi ν dan κ . Aturannya ditulis sebagai berikut (Holmes, 2018).

$$\nu\kappa(a) = \nu(\kappa(a)), \text{ untuk setiap } a \in [n]$$

Contoh 2.3.5 Komposisi Dua Permutasi

Diberikan $\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dan $\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Komposisikan dua permutasi tersebut.

Jawab:

$$\nu\kappa(1) = \nu(\kappa(1)) = \nu(3) = 2$$

$$\nu\kappa(2) = \nu(\kappa(2)) = \nu(2) = 3$$

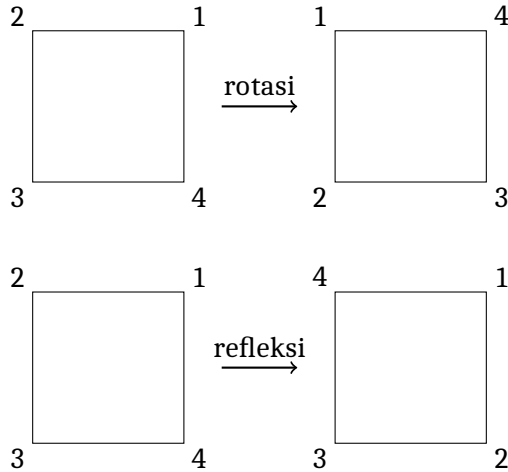
$$\nu\kappa(3) = \nu(\kappa(3)) = \nu(1) = 1$$

Maka $\nu\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Grup Dihedral

Simetri-simetri dari setiap poligon beraturan bersisi n membentuk sebuah grup (Hill dan Thron, 2023). Grup dihedral ke- n didefinisikan sebagai grup simetri dari sebuah poligon beraturan, yang biasanya dilambangkan dengan D_{2n} atau D_n , dengan $n \geq 3$. Grup dihedral, D_n , adalah grup dengan order $2n$ (Hill dan Thron, 2023). Komponen grup dihedral D_{2n} dibentuk dari refleksi (q) dan rotasi (r) dengan sudut rotasi sebesar $\frac{2\pi}{n}$.

Gambar berikut adalah ilustrasi grup dihedral D_8 dengan $n = 4$ yang merepresentasikan segi empat dengan rotasi sebesar sudut 90° , diputar berlawanan arah jarum jam dan refleksi dengan sumbu diagonal 1 – 3 yang menjadi garis refleksi.



Gambar 2.1: Rotasi dan refleksi pada poligon beraturan

Berikut adalah pengkarakterisasian elemen-elemen refleksi dan rotasi dalam grup dihedral. Telah dipahami sebelumnya bahwa elemen-elemen grup dihedral terdiri dari n rotasi (Hill dan Thron, 2023):

$$id, \frac{360^\circ}{n}, 2 \cdot \frac{360^\circ}{n}, \dots, (n-1) \cdot \frac{360^\circ}{n}.$$

Rotasi sebesar $\frac{360^\circ}{n}$ dinotasikan dengan r yang dapat ditulis perumumannya:

$$r^k = \text{rotasi dengan } k \cdot \frac{360^\circ}{n} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

notasi r^k berarti mengkomposisikan r sebanyak k kali dengan r itu sendiri. Jika $k = 0$ maka:

$$r^0 = \text{rotasi dengan } 0 \cdot \frac{360^\circ}{n} = id.$$

Berlaku juga untuk $k = n$ maka:

$$r^n = \text{rotasi dengan } n \cdot \frac{360^\circ}{n} = id.$$

Elemen-elemen grup dihedral juga terdiri dari n refleksi yang

dapat dituliskan himpunannya sebagai berikut (Hill dan Thron, 2023):

$$\{s, s \circ r, s \circ r^2, \dots, s \circ r^{n-1}\}$$

Himpunan elemen $2n$ dari D_n dapat dituliskan sebagai (Hill dan Thron, 2023):

$$\{\text{id}, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, s \circ r, s \circ r^2, \dots, s \circ r^{n-1}\},$$

atau

$$\{s^j \circ r^k, (j = 0, 1; k = 0, 1, \dots, n-1)\},$$

dengan notasi $s^0 = r^0 = \text{id}$. Setiap elemen dari grup D_n , $n \geq 3$, terdiri dari semua komposisi dari dua elemen r dan s , yang memenuhi relasi (Hill dan Thron, 2023):

1. $r^n = \text{id}$
2. $s^2 = \text{id}$
3. $r^p \circ s = s \circ r^{n-p}$ untuk $0 < p < n$.
4. $r \circ s = s \circ r^{-1}$
5. $r^i \circ s = s \circ r^{-i}$, untuk setiap $0 \leq i \leq n$.

Ada sebuah teorema yang dapat membantu untuk mengetahui banyaknya keseluruhan subgrup dalam grup dihedral D_{2n} . Berikut adalah teoremanya.

Teorema 2.3.6 (Cavior, 1975)

Jumlah total subgrup dalam D_{2n} adalah sama dengan $\tau(n) + \sigma(n)$, dengan $\tau(n)$ adalah banyaknya pembagi positif dari bilangan bulat n dan $\sigma(n)$ merupakan jumlah pembagi positif dari bilangan bulat n .

Bukti. Elemen D_{2n} terdiri dari n rotasi dan n refleksi. Subgrup dalam D_{2n} memiliki dua tipe: (1) Subgrup yang hanya berisi rotasi, dan (2) Subgrup yang berisi rotasi dan refleksi.

1. Subgrup yang hanya berisi rotasi

$\tau(n)$ menotasikan banyaknya pembagi positif dari bilangan bulat n . Misal $d, n \in \mathbb{Z}^+$ dan d membagi n maka ada bilangan bulat positif m sehingga $m = \frac{n}{d}$. Oleh karena itu ada elemen r^d yang membangun himpunan rotasi $\{r^d, r^{2d}, \dots, r^n\}$. Himpunan tersebut adalah subgrup dan menjelaskan beberapa hal.

- (a) Setiap pangkat dari r yang merupakan pembagi dari n membentuk subgrup dari elemen rotasi;
- (b) Setiap kelipatan d yang bukan pembagi n membentuk subgrup yang sama dengan r^d ;
- (c) Setiap pangkat dari r yang relatif prima dengan n membentuk subgrup yang sama dengan r .

Jadi dapat disimpulkan bahwa jumlah subgrup dari D_{2n} yang hanya berisi rotasi (termasuk subgrup yang hanya berisi elemen identitas) adalah sama dengan banyaknya pembagi positif dari n .

2. Subgrup yang berisi rotasi dan refleksi

$\sigma(n)$ menotasikan jumlah pembagi positif dari bilangan bulat n yang mana setara dengan banyak subgrup di grup dihedral D_{2n} yang mengandung elemen refleksi. Misal $p, n, d \in \mathbb{Z}^+$ dan d membagi n , $\sigma(n) = p + d$ dengan $0 \leq a_i \leq d$, $a_i = 1, 2, \dots, d$. Elemen r^d dan qr^{a_i} membangun subgrup:

$$\bullet \{e, r^d, r^{2d}, \dots, q, qr^d, qr^{2d}, \dots\};$$

- $\{e, r^d, r^{2d}, \dots, qr, qr^{d+1}, \dots\}$; dan
- $\{e, r^d, r^{2d}, \dots, qr^{d-1}, \dots\}$.

Setiap subgrup yang dihasilkan atau dibangun oleh r^d dan qr^{a_i} mencakup elemen-elemen tertentu dari himpunan $\{q, qr, qr^2, \dots, qr^{d-1}\}$. Setiap kombinasi elemen refleksi qr^{a_i} dengan rotasi membentuk subgrup yang berbeda. Ini memastikan bahwa setiap pembagi d menghasilkan tepat d subgrup yang mengandung refleksi. Dengan demikian, banyak subgrup yang mengandung refleksi sama dengan jumlah pembagi dari n .

Dari penjelasan tersebut, jelas bahwa jumlah total subgrup dalam D_{2n} adalah sama dengan $\tau(n) + \sigma(n)$. ■

Selanjutnya untuk memperjelas pemahaman mengenai konsep-konsep yang telah dijelaskan akan diberikan sejumlah contoh terkait order grup, order elemen, operasi dalam grup dihedral, kelas konjugasi, koset, dan subgrup normal.

Contoh 2.3.7 Grup dihedral D_8 dengan $n = 4$ merepresentasikan segi empat. Himpunan anggotanya:

$$D_8 = \{e, r, r^2, r^3, q, qr, qr^2, qr^3\}$$

Berikut adalah deskripsi dari elemen-elemen dalam D_8 :

e : elemen identitas.

r : elemen rotasi dengan sudut 90° , diputar berlawanan arah jarum jam.

r^2 : elemen rotasi dengan sudut 180° , diputar berlawanan arah jarum jam.

- r^3 : elemen rotasi dengan sudut 270° , diputar berlawanan arah jarum jam.
- q : elemen refleksi, pada elemen ini penulis memilih sumbu diagonal tertentu sebagai garis refleksi.
- qr : elemen yang dirotasikan 90° dahulu kemudian direfleksikan sesuai garis refleksi.
- qr^2 : elemen yang dirotasikan 180° dahulu kemudian direfleksikan sesuai garis refleksi.
- qr^3 : elemen yang dirotasikan 270° dahulu kemudian direfleksikan sesuai garis refleksi.

Elemen-elemen pada D_8 dapat dituliskan bentuk permutasinya sebagai berikut.

Rotasi	Refleksi
$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$qr = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$qr^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
$r^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$qr^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Contoh 2.3.8 Order Grup dalam Grup Dihedral

Grup dihedral D_8 , $n = 4$, memiliki $2n$ order grup yang mana berarti $|D_8| = 8$.

Contoh 2.3.9 Order Elemen dalam Grup Dihedral

Order dari elemen r^3 di D_8 adalah 4. Karena $(r^3)^4 = e$ maka $o(r^3) = 4$.

Contoh 2.3.10 Operasi dalam Grup Dihedral

Diberikan grup dihedral $D_8, n = 4$, dengan himpunan anggota grup dihedral D_8 yang dapat dituliskan sebagai:

$$D_8 = \{e, r, r^2, r^3, q, qr, qr^2, qr^3\}$$

Hitung hasil dari $r^2 \circ qr$.

Jawab:

Telah diketahui: $r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan $qr = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

maka,

$$\begin{aligned} r^2 \circ qr &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

yang mana hasil tersebut sama dengan qr^3 . Jadi, $r^2 \circ qr = qr^3$.

Contoh 2.3.11 Kelas Konjugasi dalam Grup Dihedral

Carilah kelas konjugasi dari elemen q di grup dihedral D_8 .

Jawab:

Diketahui $D_8 = \{e, r, r^2, r^3, q, qr, qr^2, qr^3\}$. Kelas konjugasi dari elemen q di grup D_8 dapat ditentukan dengan menganalisis semua hasil kali xqx^{-1} , dengan x merupakan elemen dari D_8 , seperti yang dijelaskan berikut ini:

- $e \circ q \circ e^{-1} = e \circ q \circ e = q$
- $r \circ q \circ r^{-1} = r \circ q \circ r^3 = qr^2$
- $r^2 \circ q \circ (r^2)^{-1} = r^2 \circ q \circ r^2 = q$

- $r^3 \circ q \circ (r^3)^{-1} = r^3 \circ q \circ r = qr^2$
- $q \circ q \circ q^{-1} = q \circ q \circ q = q$
- $qr \circ q \circ qr^{-1} = qr \circ q \circ qr = qr^2$
- $qr^2 \circ q \circ (qr^2)^{-1} = qr^2 \circ q \circ qr^2 = q$
- $qr^3 \circ q \circ (qr^3)^{-1} = qr^3 \circ q \circ qr^3 = qr^2$

Dapat disimpulkan bahwa himpunan kelas konjugasi dari elemen $q \in D_8$ adalah $cl(q) = \{q, qr^2\}$.

Contoh 2.3.12 Koset dalam Grup Dihedral

Diberikan grup dihedral D_8 , $n = 4$, dengan himpunan anggota grup dihedral D_8 yang dapat dituliskan sebagai:

$$D_8 = \{e, r, r^2, r^3, q, qr, qr^2, qr^3\}$$

Diberikan L subgrup dari D_8 dengan $L = \{e, r, r^2, r^3\}$. Tentukan koset kanan dan koset kirinya.

Jawab:

- Koset kanan

$$L \circ e = L$$

$$L \circ r = \{r, r^2, r^3, e\}$$

$$L \circ r^2 = \{r^2, r^3, e, r\}$$

$$L \circ r^3 = \{r^3, e, r, r^2\}$$

$$L \circ q = \{q, qr^3, qr^2, qr\}$$

$$L \circ qr = \{qr, q, qr^3, qr^2\}$$

$$L \circ qr^2 = \{qr^2, qr, q, qr^3\}$$

$$L \circ qr^3 = \{qr^3, qr^2, qr, q\}$$

- Koset kiri

$$e \circ L = L$$

$$r \circ L = \{r, r^2, r^3, e\}$$

$$r^2 \circ L = \{r^2, r^3, e, r\}$$

$$r^3 \circ L = \{r^3, e, r, r^2\}$$

$$q \circ L = \{q, qr, qr^2, qr^3\}$$

$$qr \circ L = \{qr, qr^2, qr^3, q\}$$

$$qr^2 \circ L = \{qr^2, qr^3, q, qr\}$$

$$qr^3 \circ L = \{qr^3, q, qr, qr^2\}$$

Pada koset kanan, $L \circ e = L \circ r = L \circ r^2 = L \circ r^3$ dan $L \circ q = L \circ qr = L \circ qr^2 = L \circ qr^3$. Sedangkan pada koset kiri $e \circ L = r \circ L = r^2 \circ L = r^3 \circ L$ dan $q \circ L = qr \circ L = qr^2 \circ L = qr^3 \circ L$.

Contoh 2.3.13 Subgrup Normal dalam Grup Dihedral

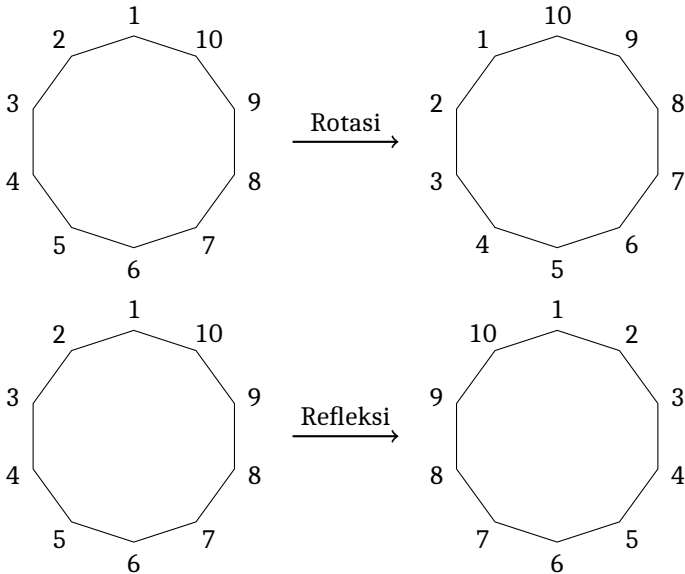
Merujuk pada Contoh 2.3.12, telah ditunjukkan hasil dari koset kanan dan koset kiri dan menghasilkan bahwa koset kanan dan koset kiri sama ($gH = Hg$). Sehingga dapat disimpulkan bahwa $L \triangleleft D_8$.

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Struktur Grup Dihedral D_{20}

Diketahui grup dihedral D_{20} dengan $n = 10$ adalah grup yang memiliki order grup sebanyak 20 ($|D_{20}| = 20$). Grup dihedral D_{20} merepresentasikan segi sepuluh. Anggotanya meliputi refleksi (q) dan rotasi (r) dengan sudut rotasi sebesar $\frac{2\pi}{10} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$. Gambar berikut menunjukkan representasi grup dihedral D_{20} , $n = 10$, dengan rotasi sebesar sudut 36° , diputar berlawanan arah jarum jam dan refleksi terhadap sumbu simetri vertikal yang membagi poligon menjadi dua bagian yang kongruen.



Gambar 3.1: Rotasi dan refleksi pada segi sepuluh beraturan

Himpunan anggota grup dihedral D_{20} dapat dituliskan sebagai berikut.

$$D_{20} = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9, q, qr, qr^2, qr^3, qr^4, qr^5, qr^6, qr^7, qr^8, qr^9\}.$$

Berikut adalah deskripsi dari elemen-elemen dalam D_{20} .

e : elemen identitas.

r : elemen rotasi dengan sudut 36° , diputar berlawanan arah jarum jam.

r^2 : elemen rotasi dengan sudut 72° , diputar berlawanan arah jarum jam.

r^3 : elemen rotasi dengan sudut 108° , diputar berlawanan arah jarum jam.

r^4 : elemen rotasi dengan sudut 144° , diputar berlawanan arah jarum jam.

r^5 : elemen rotasi dengan sudut 180° , diputar berlawanan arah jarum jam.

r^6 : elemen rotasi dengan sudut 216° , diputar berlawanan arah jarum jam.

r^7 : elemen rotasi dengan sudut 252° , diputar berlawanan arah jarum jam.

r^8 : elemen rotasi dengan sudut 288° , diputar berlawanan arah jarum jam.

r^9 : elemen rotasi dengan sudut 324° , diputar berlawanan arah jarum jam.

q : elemen refleksi, pada elemen ini penulis memilih sumbu simetri vertikal sebagai garis refleksi.

qr : elemen yang dirotasikan 36° dahulu kemudian direfleksikan sesuai garis refleksi.

- qr^2 : elemen yang dirotasikan 72° dahulu kemudian direfleksikan sesuai garis refleksi.
- qr^3 : elemen yang dirotasikan 108° dahulu kemudian direfleksikan sesuai garis refleksi.
- qr^4 : elemen yang dirotasikan 144° dahulu kemudian direfleksikan sesuai garis refleksi.
- qr^5 : elemen yang dirotasikan 180° dahulu kemudian direfleksikan sesuai garis refleksi.
- qr^6 : elemen yang dirotasikan 216° dahulu kemudian direfleksikan sesuai garis refleksi.
- qr^7 : elemen yang dirotasikan 252° dahulu kemudian direfleksikan sesuai garis refleksi.
- qr^8 : elemen yang dirotasikan 288° dahulu kemudian direfleksikan sesuai garis refleksi.
- qr^9 : elemen yang dirotasikan 324° dahulu kemudian direfleksikan sesuai garis refleksi.

Elemen-elemen pada D_{20} dapat dituliskan bentuk permutasinya sebagai berikut.

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$r^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$r^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$r^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$r^6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$r^7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$r^8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$r^9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$qr = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$qr^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$qr^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

$$qr^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$qr^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$qr^6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$qr^7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$qr^8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$qr^9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Setelah elemen-elemen dalam grup dihedral D_{20} dituliskan dalam bentuk permutasi, berikut ini disajikan contoh pengoperasian antara elemen-elemen tersebut dan tabel Cayley untuk mempermudah visualisasi hasil operasi antar elemen.

Contoh 3.1.1 Diberikan elemen $r^4, qr^5 \in D_{20}$ dengan bentuk permutasinya:

$$r^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$qr^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Hasil komposisi dari $r^4 \circ qr^5$ adalah

$$r^4 qr^5(1) = r^4(qr^5(1)) = r^4(6) = 10$$

$$r^4 qr^5(2) = r^4(qr^5(2)) = r^4(5) = 9$$

$$r^4 qr^5(3) = r^4(qr^5(3)) = r^4(4) = 8$$

$$r^4 qr^5(4) = r^4(qr^5(4)) = r^4(3) = 7$$

$$r^4 qr^5(5) = r^4(qr^5(5)) = r^4(2) = 6$$

$$\begin{aligned}
r^4qr^5(6) &= r^4(qr^5(6)) = r^4(1) = 5 \\
r^4qr^5(7) &= r^4(qr^5(7)) = r^4(10) = 4 \\
r^4qr^5(8) &= r^4(qr^5(8)) = r^4(9) = 3 \\
r^4qr^5(9) &= r^4(qr^5(9)) = r^4(8) = 2 \\
r^4qr^5(10) &= r^4(qr^5(10)) = r^4(7) = 1
\end{aligned}$$

Maka $r^4 \circ qr^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ atau yang mana bentuk permutasi di atas adalah elemen qr . Jadi $r^4 \circ qr^5 = qr$.

Tabel 3.1: Bagian pertama dari tabel Cayley untuk grup dihedral D_{20} : operasi komposisi antar elemen rotasi

\circ	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9
e	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	e
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	e	r
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	e	r	r^2
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	e	r	r^2	r^3
r^5	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	e	r	r^2	r^3	r^4
r^6	r^6	r^7	r^8	r^9	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5
r^7	r^7	r^8	r^9	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
r^8	r^8	r^9	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
r^9	r^9	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8

Tabel 3.2: Bagian kedua dari tabel Cayley untuk grup dihedral D_{20} : operasi komposisi elemen rotasi dengan refleksi

\circ	q	qr	qr^2	qr^3	qr^4	qr^5	qr^6	qr^7	qr^8	qr^9
e	q	qr	qr^2	qr^3	qr^4	qr^5	qr^6	qr^7	qr^8	qr^9
r	qr^9	q	qr	qr^2	qr^3	qr^4	qr^5	qr^6	qr^7	qr^8
r^2	qr^8	qr^9	q	qr	qr^2	qr^3	qr^4	qr^5	qr^6	qr^7
r^3	qr^7	qr^8	qr^9	q	qr	qr^2	qr^3	qr^4	qr^5	qr^6
r^4	qr^6	qr^7	qr^8	qr^9	q	qr	qr^2	qr^3	qr^4	qr^5
r^5	qr^5	qr^6	qr^7	qr^8	qr^9	q	qr	qr^2	qr^3	qr^4
r^6	qr^4	qr^5	qr^6	qr^7	qr^8	qr^9	q	qr	qr^2	qr^3
r^7	qr^3	qr^4	qr^5	qr^6	qr^7	qr^8	qr^9	q	qr	qr^2
r^8	qr^2	qr^3	qr^4	qr^5	qr^6	qr^7	qr^8	qr^9	q	qr
r^9	qr	qr^2	qr^3	qr^4	qr^5	qr^6	qr^7	qr^8	qr^9	q

Tabel 3.3: Bagian ketiga dari tabel Cayley untuk grup dihedral D_{20} : operasi komposisi elemen refleksi dengan rotasi

\circ	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9
q	q	qr	qr^2	qr^3	qr^4	qr^5	qr^6	qr^7	qr^8	qr^9
qr	qr	qr^2	qr^3	qr^4	qr^5	qr^6	qr^7	qr^8	qr^9	q
qr^2	qr^2	qr^3	qr^4	qr^5	qr^6	qr^7	qr^8	qr^9	q	qr
qr^3	qr^3	qr^4	qr^5	qr^6	qr^7	qr^8	qr^9	q	qr	qr^2
qr^4	qr^4	qr^5	qr^6	qr^7	qr^8	qr^9	q	qr	qr^2	qr^3
qr^5	qr^5	qr^6	qr^7	qr^8	qr^9	q	qr	qr^2	qr^3	qr^4
qr^6	qr^6	qr^7	qr^8	qr^9	q	qr	qr^2	qr^3	qr^4	qr^5
qr^7	qr^7	qr^8	qr^9	q	qr	qr^2	qr^3	qr^4	qr^5	qr^6
qr^8	qr^8	qr^9	q	qr	qr^2	qr^3	qr^4	qr^5	qr^6	qr^7
qr^9	qr^9	q	qr	qr^2	qr^3	qr^4	qr^5	qr^6	qr^7	qr^8

Tabel 3.4: Bagian keempat dari tabel Cayley untuk grup dihedral D_{20} : operasi komposisi antar elemen refleksi

\circ	q	qr	qr^2	qr^3	qr^4	qr^5	qr^6	qr^7	r^8	r^9
q	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9
qr	r^9	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8
qr^2	r^8	r^9	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
qr^3	r^7	r^8	r^9	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
qr^4	r^6	r^7	r^8	r^9	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5
qr^5	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	e	r	r^2	r^3	r^4
qr^6	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	e	r	r^2	r^3
qr^7	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	e	r	r^2
qr^8	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	e	r
qr^9	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	e

B. Identifikasi Subgrup Normal pada Grup Dihedral D_{20}

Dalam subbab ini, dijelaskan mengenai langkah-langkah dalam menentukan subgrup normal pada grup dihedral D_{20} .

Langkah pertama dalam menentukan subgrup normal adalah mencari subgrup-subgrup dalam grup dihedral D_{20} . Ada dua teorema yang digunakan untuk membantu mencari subgrup-subgrup dalam grup dihedral D_{20} . Teorema yang pertama adalah Teorema 2.3.6 yang dapat membantu untuk menentukan jumlah total subgrup dalam grup dihedral D_{2n} . Teorema kedua yang digunakan adalah teorema Lagrange (Teorema 2.1.17). Teorema Lagrange digunakan untuk menguraikan subgrup berdasarkan ordernya.

Subgrup-subgrup dalam grup dihedral D_{20} dapat dicari dengan kedua teorema tersebut. Grup dihedral D_{20} memiliki $n = 10$, maka ada empat pembagi positif dari 10, yakni 1, 2, 5, dan 10.

Jumlah keempat pembagi positifnya adalah 18. Dengan demikian menurut Teorema 2.3.6 ada 22 subgrup dalam grup dihedral D_{20} . Berikut adalah subgrup-subgrup dalam grup dihedral D_{20} yang diuraikan berdasarkan order subgrupnya karena order dari subgrup pasti membagi order grupnya sesuai dengan teorema Lagrange (Teorema 2.1.17).

1. Order satu

- $A = \{e\}$

2. Order dua

- $B_1 = \{e, r^5\}$
- $B_2 = \{e, q\}$
- $B_3 = \{e, qr\}$
- $B_4 = \{e, qr^2\}$
- $B_5 = \{e, qr^3\}$
- $B_6 = \{e, qr^4\}$
- $B_7 = \{e, qr^5\}$
- $B_8 = \{e, qr^6\}$
- $B_9 = \{e, qr^7\}$
- $B_{10} = \{e, qr^8\}$
- $B_{11} = \{e, qr^9\}$

3. Order empat

- $C_1 = \{e, r^5, q, qr^5\}$
- $C_2 = \{e, r^5, qr, qr^6\}$
- $C_3 = \{e, r^5, qr^2, qr^7\}$
- $C_4 = \{e, r^5, qr^3, qr^8\}$
- $C_5 = \{e, r^5, qr^4, qr^9\}$

4. Order lima

- $D = \{e, r^2, r^4, r^6, r^8\}$

5. Order sepuluh

- $E_1 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9\}$
- $E_2 = \{e, r^2, r^4, r^6, r^8, q, qr^2, qr^4, qr^6, qr^8\}$
- $E_3 = \{e, r^2, r^4, r^6, r^8, qr, qr^3, qr^5, qr^7, qr^9\}$

6. Order dua puluh

- D_{20}

Langkah kedua adalah menentukan subgrup-subgrup mana yang termasuk subgrup normal. Telah dituliskan sebelumnya dalam Teorema 2.1.19 bahwa terdapat tiga kondisi yang apabila salah satunya terpenuhi, subgrup dapat dikatakan subgrup normal. Dalam langkah ini, digunakan kondisi yang pertama, yaitu suatu subgrup dikatakan normal jika konjugasi setiap elemen dalam subgrup tersebut dengan elemen-elemen di grup selalu menghasilkan elemen yang tetap berada di dalam subgrup tersebut. Adapun analisis konjugasi pada setiap elemen sebagai berikut.

1. Subgrup berorder satu hanya ada $\{e\}$

Analisis kelas konjugasi dari e :

- $e \circ e \circ e^{-1} = e \circ e \circ e = e$
- $r \circ e \circ r^{-1} = r \circ e \circ r^9 = e$
- $r^2 \circ e \circ (r^2)^{-1} = r^2 \circ e \circ r^8 = e$
- \vdots

Maka $cl(e) = \{e\} \subseteq \{e\}$. Oleh karenanya subgrup tersebut normal.

2. Subgrup berorder dua

Berikut adalah analisis kelas konjugasi dari elemen-elemen di $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{11}$.

(a) Kelas konjugasi dari elemen e

Hasil operasi konjugasi dari elemen identitas e akan selalu menghasilkan dirinya sendiri seperti yang telah dilakukan pada analisis kelas konjugasi subgrup berorder satu.

(b) Kelas konjugasi dari elemen r^5

$$\begin{aligned} & \bullet e \circ r^5 \circ e^{-1} = e \circ r^5 \circ e = r^5 \\ & \bullet r \circ r^5 \circ r^{-1} = r \circ r^5 \circ r^9 = r^5 \\ & \bullet r^2 \circ r^5 \circ (r^2)^{-1} = r^2 \circ r^5 \circ r^8 = r^5 \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

Maka $cl(r^5) = \{r^5\}$.

(c) Kelas konjugasi dari elemen q

$$\begin{aligned} & \bullet e \circ q \circ e^{-1} = e \circ q \circ e = q \\ & \bullet r \circ q \circ r^{-1} = r \circ q \circ r^9 = qr^8 \\ & \bullet r^2 \circ q \circ (r^2)^{-1} = r^2 \circ q \circ r^8 = qr^6 \\ & \bullet r^3 \circ q \circ (r^3)^{-1} = r^3 \circ q \circ r^7 = qr^4 \\ & \bullet r^4 \circ q \circ (r^4)^{-1} = r^4 \circ q \circ r^6 = qr^2 \\ & \bullet r^5 \circ q \circ (r^5)^{-1} = r^5 \circ q \circ r^5 = q \\ & \bullet r^6 \circ q \circ (r^6)^{-1} = r^6 \circ q \circ r^6 = qr^8 \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

Maka $cl(q) = \{q, qr^2, qr^4, qr^6, qr^8\}$.

(d) Kelas konjugasi dari elemen qr

$$\begin{aligned} & \bullet e \circ qr \circ e^{-1} = e \circ qr \circ e = qr \\ & \bullet r \circ qr \circ r^{-1} = r \circ qr \circ r^9 = qr^9 \\ & \bullet r^2 \circ qr \circ (r^2)^{-1} = r^2 \circ qr \circ r^8 = qr^7 \\ & \bullet r^3 \circ qr \circ (r^3)^{-1} = r^3 \circ qr \circ r^7 = qr^5 \end{aligned}$$

- $r^4 \circ qr \circ (r^4)^{-1} = r^4 \circ qr \circ r^6 = qr^3$
- $r^5 \circ qr \circ (r^5)^{-1} = r^5 \circ qr \circ r^5 = qr$
- $r^6 \circ qr \circ (r^6)^{-1} = r^6 \circ qr \circ r^6 = qr^9$
- \vdots

Maka $cl(qr) = \{qr, qr^3, qr^5, qr^7, qr^9\}$.

(e) Kelas konjugasi dari elemen qr^2

- $e \circ qr^2 \circ e^{-1} = e \circ qr^2 \circ e = q$
- $r \circ qr^2 \circ r^{-1} = r \circ qr^2 \circ r^9 = qr^8$
- $r^2 \circ qr^2 \circ (r^2)^{-1} = r^2 \circ qr^2 \circ r^8 = qr^6$
- $r^3 \circ qr^2 \circ (r^3)^{-1} = r^3 \circ qr^2 \circ r^7 = qr^4$
- $r^4 \circ qr^2 \circ (r^4)^{-1} = r^4 \circ qr^2 \circ r^6 = qr^2$
- $r^5 \circ qr^2 \circ (r^5)^{-1} = r^5 \circ qr^2 \circ r^5 = q$
- $r^6 \circ qr^2 \circ (r^6)^{-1} = r^6 \circ qr^2 \circ r^6 = qr^8$
- \vdots

Maka $cl(qr^2) = \{q, qr^2, qr^4, qr^6, qr^8\}$.

(f) Kelas konjugasi dari elemen qr^3

- $e \circ qr^3 \circ e^{-1} = e \circ qr^3 \circ e = qr$
- $r \circ qr^3 \circ r^{-1} = r \circ qr^3 \circ r^9 = qr^9$
- $r^2 \circ qr^3 \circ (r^2)^{-1} = r^2 \circ qr^3 \circ r^8 = qr^7$
- $r^3 \circ qr^3 \circ (r^3)^{-1} = r^3 \circ qr^3 \circ r^7 = qr^5$
- $r^4 \circ qr^3 \circ (r^4)^{-1} = r^4 \circ qr^3 \circ r^6 = qr^3$
- $r^5 \circ qr^3 \circ (r^5)^{-1} = r^5 \circ qr^3 \circ r^5 = qr$
- $r^6 \circ qr^3 \circ (r^6)^{-1} = r^6 \circ qr^3 \circ r^6 = qr^9$
- \vdots

Maka $cl(qr^3) = \{qr, qr^3, qr^5, qr^7, qr^9\}$.

(g) Dapat disimpulkan bahwa $cl(q) = cl(qr^2) = cl(qr^4) = cl(qr^6) = cl(qr^8) = \{q, qr^2, qr^4, qr^6, qr^8\}$ dan $cl(qr) = cl(qr^3) = cl(qr^5) = cl(qr^7) = cl(qr^9) = \{qr, qr^3, qr^5, qr^7, qr^9\}$.

Dengan itu, $cl(q) = \{q, qr^2, qr^4, qr^6, qr^8\}$ bukanlah subset dari $B_2, B_4, B_6, B_8, B_{10}$ dan $cl(qr) = \{qr, qr^3, qr^5, qr^7, qr^9\}$ bukanlah subset dari $B_3, B_5, B_7, B_9, B_{11}$. Namun $cl(e) \subseteq B_1$ dan $cl(r^5) \subseteq B_1$, oleh karena itu B_1 adalah satu-satunya subgrup berorder dua yang merupakan subgrup normal.

3. Subgrup berorder empat

Telah dianalisis sebelumnya kelas konjugasi dari elemen q dan qr . Maka didapat $cl(q)$ dan $cl(qr)$ bukanlah subset dari C_1, C_2, \dots, C_5 . Maka semua subgrup yang berorder empat tidak ada yang termasuk subgrup normal.

4. Subgrup berorder lima hanya ada D

Berikut adalah analisis elemen-elemen pada D .

(a) Kelas konjugasi dari elemen r^2

- $e \circ r^2 \circ e^{-1} = e \circ r^2 \circ e = r^2$
- $r \circ r^2 \circ r^{-1} = r \circ r^2 \circ r^9 = r^2$
- $r^2 \circ r^2 \circ (r^2)^{-1} = r^2 \circ r^2 \circ r^8 = r^2$
- \vdots

Maka $cl(r^2) = \{r^2\}$.

(b) Kelas konjugasi dari elemen r^4

- $e \circ r^4 \circ e^{-1} = e \circ r^4 \circ e = r^4$
- $r \circ r^4 \circ r^{-1} = r \circ r^4 \circ r^9 = r^4$

$$\bullet r^2 \circ r^4 \circ (r^2)^{-1} = r^2 \circ r^4 \circ r^8 = r^4$$

$$\vdots$$

Maka $cl(r^4) = \{r^4\}$.

(c) Dapat disimpulkan bahwa hasil operasi konjugasi dari elemen-elemen rotasi adalah dirinya sendiri.

Maka $cl(e), cl(r^2), cl(r^4), cl(r^6), cl(r^8)$ adalah subset dari D sehingga D adalah subgrup normal.

5. Subgrup berorder sepuluh

Telah disimpulkan sebelumnya bahwa hasil operasi konjugasi dari elemen-elemen rotasi akan menghasilkan dirinya sendiri. Maka kelas-kelas konjugasinya akan selalu subset dengan subgrupnya sehingga subgrup E_1 adalah subgrup normal. Kemudian telah dianalisis sebelumnya kelas konjugasi dari elemen q dan qr , didapat $cl(q) \subseteq E_2$ dan $cl(qr) \subseteq E_3$, maka E_2 dan E_3 adalah subgrup normal. Dengan demikian ketiga subgrup berorder sepuluh adalah subgrup normal.

6. Subgrup berorder dua puluh

Semua kelas konjugasi dari seluruh elemen pada grup dihedral D_{20} akan selalu subset dengan grupnya sehingga D_{20} termasuk subgrup normal pada dirinya sendiri.

Dari analisis konjugasi yang telah dilakukan, didapat bahwa banyaknya subgrup normal pada grup dihedral D_{20} adalah tujuh subgrup normal.

C. Karakteristik Subgrup Normal pada Grup Dihedral D_{20}

Telah diketahui sebelumnya bahwa terdapat tujuh subgrup normal dalam grup dihedral D_{20} , yang dituliskan sebagai berikut.

1. $A = \{e\}$
2. $B_1 = \{e, r^5\}$
3. $D = \{e, r^2, r^4, r^6, r^8\}$
4. $E_1 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9\}$
5. $E_2 = \{e, r^2, r^4, r^6, r^8, q, qr^2, qr^4, qr^6, qr^8\}$
6. $E_3 = \{e, r^2, r^4, r^6, r^8, qr, qr^3, qr^5, qr^7, qr^9\}$
7. $D_{20} = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9, q, qr, qr^2, qr^3, qr^4, qr^5, qr^6, qr^7, qr^8, qr^9\}$

Dari hasil tersebut diperoleh bahwa subgrup dari grup dihedral yang dapat dibentuk dari elemen rotasi saja adalah subgrup normal yang mana eksistensi subgrup ini dijamin oleh teorema berikut.

Teorema 3.3.1 (e.g (Bardhan dkk., 2023))

Untuk setiap $k|n$, D_{2n} memiliki grup siklik order k .

Bukti. Akan dibuktikan bahwa D_{2n} memiliki grup siklik order k bila untuk setiap $k|n$.

Grup D_{2n} memiliki order $2n$ yang terdiri dari n rotasi dan n refleksi. Pada pembuktian ini fokus kepada komponen rotasi. Grup dihedral D_{2n} memiliki rotasi yang dihasilkan oleh r yaitu:

$$\langle r \rangle = \{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$$

dengan $r^n = e$ dan r adalah rotasi sebesar $\frac{2\pi}{n}$.

Diketahui bahwa $k|n$, ada $m \in \mathbb{Z}^+$ sehingga $n = mk$ maka ada elemen r^m sehingga $\langle r^m \rangle$.

Untuk r^m kembali ke identitas maka harus ada pengoperasian sebanyak t terhadap dirinya sendiri, yang dapat dituliskan $(r^m)^t = e$.

Karena $r^n = e$ dalam hal ini berarti

$$n = mt$$

$$mk = mt$$

sehingga $k = t$.

Dengan demikian $\langle r^m \rangle$ adalah subgrup siklik yang dihasilkan oleh r^m dan memiliki order k . ■

Dari Teorema 3.3.1 dapat diidentifikasi karakteristik dari tujuh subgrup normal tersebut. Subgrup normal A, B_1, D , dan E_1 adalah subgrup normal yang elemen-elemennya hanya berupa rotasi dan merupakan subgrup siklik karena dapat dinyatakan secara berurutan sebagai $\langle e \rangle, \langle r^5 \rangle, \langle r^2 \rangle$, dan $\langle r \rangle$. Keempat subgrup normal tersebut dapat dibangun hanya dengan satu elemen di masing-masing subgrup normalnya saja, alias elemen-elemen tersebut adalah generator.

Hal ini berbeda dengan tiga subgrup normal lainnya, yakni E_2, E_3 , dan D_{20} yang tidak dapat dibangun oleh hanya satu elemennya saja karena elemen-elemennya berupa rotasi dan refleksi. Ketiga subgrup normal tersebut adalah contoh subgrup normal yang bukan merupakan subgrup siklik.

Dari karakterisasi subgrup normal pada grup dihedral D_{20} , diperoleh lemma sebagai berikut.

Lemma 3.3.2 Misal k, n bilangan bulat positif, $n \geq 3$. $k|n$ jika dan hanya jika $H = \langle r^k \rangle$ subgrup normal pada D_{2n} .

Bukti.

1. \Rightarrow (Pembuktian ke kanan)

Akan dibuktikan jika $k|n$ maka $H = \langle r^k \rangle$ subgrup normal pada D_{2n} .

Diketahui bahwa $k|n$ maka ada $m \in \mathbb{Z}^+$ sehingga $n = mk$.

$H = \{e, r^k, r^{2k}, \dots, r^{(m-1)k}\}$ dengan order H yaitu $m = \frac{n}{k}$.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa H subgrup normal dengan Teorema 2.1.19 pada kondisi yang pertama, yaitu $gHg^{-1} \subseteq H, \forall g \in G$. Dalam hal ini D_{2n} adalah G . D_{2n} memiliki dua bentuk elemen, yakni rotasi dan refleksi. Oleh karena itu, maka

- jika $g \in D_{2n}$ adalah elemen rotasi dengan kata lain $r^f \in D_{2n}$ sehingga untuk setiap $h = r^{ak} \in H$ dengan $a = 0, 1, 2, \dots, (m-1)$ maka

$$\begin{aligned} ghg^{-1} &= r^f r^{ak} (r^f)^{-1} \\ &= r^f r^{ak} r^{-f} \\ &= r^{ak} \in H \end{aligned}$$

- jika $g \in D_{2n}$ adalah elemen refleksi dengan kata lain $qr^f \in D_{2n}$ sehingga untuk setiap $h = r^{ak} \in H$ dengan $a = 0, 1, 2, \dots, (m-1)$ maka

$$\begin{aligned}
 ghg^{-1} &= qr^f r^{ak} (qr^f)^{-1} \\
 &= qr^f r^{ak} r^{-f} q \\
 &= qr^{ak} q \\
 &= r^{-ak}
 \end{aligned}$$

r^{-ak} adalah invers dari r^{ak} , $r^{-ak} \in H$.

Jadi, H adalah subgrup normal. Maka dari itu (\Rightarrow) terbukti.

2. \Leftarrow (Pembuktian ke kiri)

Akan dibuktikan jika $H = \langle r^k \rangle$ subgrup normal pada D_{2n} maka $k|n$.

Diketahui bahwa $H = \langle r^k \rangle$ adalah subgrup siklik yang normal. H adalah subgrup dari subgrup grup dihedral yang hanya berisi seluruh elemen rotasinya saja. Misal subgrup dari grup dihedral yang hanya berisi seluruh elemen rotasinya saja dinotasikan R maka $H \leq R$. R juga merupakan subgrup siklik, sehingga R dapat dinotasikan dengan $R = \langle r \rangle$. R memiliki sebanyak n anggota yang berbeda, sehingga $(r^1)^n = e$, karena order grup siklik sama dengan order dari generatornya (n adalah bilangan bulat positif terkecil sehingga $r^n = e$).

H sendiri dapat dituliskan sebagai berikut.

$H = \{e, r^k, r^{2k}, \dots, r^{(m-1)k}\}$ dengan $|H| = m$ karena H memiliki sebanyak m anggota yang berbeda sehingga $(r^k)^m = e$, dalam konteks ini m juga merupakan bilangan bulat positif terkecil.

Dengan sifat $r^n = e$, ini berarti $r^{km} = e$. Karena $r^n = e$, maka

km harus menjadi kelipatan dari n , sehingga $n = km$ dan ini menunjukkan bahwa $k|n$. Oleh karena itu (\Leftarrow) terbukti.

Dengan demikian lemma ini terbukti. ■

Karakterisasi empat subgrup normal di atas telah dibuktikan dengan Lemma 3.3.2 bahwa setiap grup dihedral D_{2n} memiliki subgrup normal yang dibentuk oleh r^k dengan $k|n$.

BAB IV

SIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal mengenai subgrup normal dalam grup dihedral D_{20} , yaitu:

1. Subgrup normal yang diperoleh dari analisis konjugasi adalah sebanyak tujuh subgrup normal yang mana dapat dituliskan sebagai berikut.

(a) $A = \{e\}$

(b) $B_1 = \{e, r^5\}$

(c) $D = \{e, r^2, r^4, r^6, r^8\}$

(d) $E_1 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9\}$

(e) $E_2 = \{e, r^2, r^4, r^6, r^8, q, qr^2, qr^4, qr^6, qr^8\}$

(f) $E_3 = \{e, r^2, r^4, r^6, r^8, qr, qr^3, qr^5, qr^7, qr^9\}$

(g) $D_{20} = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, r^9, q, qr, qr^2, qr^3, qr^4, qr^5, qr^6, qr^7, qr^8, qr^9\}$

2. Ada empat subgrup normal yang merupakan grup siklik, yaitu A, B_1, D , dan E_1 . Tiga subgrup normal yang lain, yakni E_2, E_3 , dan D_{20} bukanlah grup siklik. Dari karakterisasi subgrup normal tersebut, telah dibuktikan bahwa setiap grup dihedral D_{2n} mempunyai subgrup normal yang dibentuk oleh r^k dengan k yang membagi n .

B. Saran

Dalam penelitian ini, penulis hanya membahas mengenai subgrup normal pada grup dihedral D_{20} dan karakteristiknya. Penulis menyarankan agar pembaca dapat melanjutkan penelitian ini dengan mengkaji topik yang lebih banyak lagi, misalnya mengenai grup dihedral yang lebih tinggi dan karakterisasi subgrup normal terkait konsep lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Bardhan, G., Nath, P., dan Chakraborty, H.. 2023. Subgroups and Normal Subgroups of Dihedral Group up to Isomorphism. *Advances in Pure and Applied Algebra: Proceedings of the CONIAPS XXVII International Conference 2021* (109-114), Berlin, Boston: 26-28 Oktober 2021. Hal. 109-114.
- Cavior, S. R.. 1975. The Subgroups of the Dihedral Group. *Math. Mag*, 48(2): 107.
- Clark, W. E.. 2001. *Elementary Abstract Algebra*. University of South Florida.
- Denton, Tom. 2013. *Introduction to Algebraic Structures*. Diunduh di <https://math.libretexts.org/> tanggal 29 Desember 2024.
- Dummit, D. S. dan Foote, R. M.. 2004. *Abstract Algebra Third Edition*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.
- Fine, B., Gaglione, A. M., dan Rosenberger, G.. 2014. *Introduction to Abstract Algebra: From Rings, Numbers, Groups, and Fields to Polynomials and Galois Theory*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.
- Gallian, J. A.. 2021. *Contemporary Abstract Algebra Tenth Edition*. New York: Chapman and hall/CRC.
- Hamada, Keinosuke. 1989. Molecular Structures of Ethylene, Allene and Ethylene Oxide and Bridged π -Bond. *An International Journal for Rapid Communication*, 22(8): 1093-1100.

- Hill, J. dan Thron, C.. 2023. *Elementary Abstract Algebra: Examples and Applications*. Diunduh di <https://dl.icdst.org/> tanggal 12 Oktober 2024.
- Holmes, R. R.. 2018. *Abstract Algebra I*. Diunduh di <https://web.auburn.edu/> tanggal 29 Desember 2024.
- Judson, T. W.. 2012. *Abstract Algebra: Theory and Applications*. Diunduh di <https://www.math.colostate.edu/> tanggal 12 Oktober 2024.
- Khanna, V. K. dan Bhambri, S. K.. 2020. *Modern Algebra*. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.
- Kurniawan, P. dan Yulianto, A. W.. 2021. *Pengantar Teori Grup*. Semarang: Perkumpulan Pegiat Sains Madrasah.
- Li, Libin dan Zhao, Kaiming. 2022. *Introduction to Abstract Algebra*. Paris: EDP Sciences.
- Muhammad, H., Susilowati, L., dan Fatmawati. 2020. The Proof of Properties of Dihedral Group and Its Commutative Elements. *Journal of Physics: Conference Series* 1494: 1-7.
- Puspasari, R., Hartanto, S., Gufron, M., Wijayanti, P., dan Budiarto, M. T.. 2022. Frieze Pattern on Shibori Fabric. *Journal of Medives: Journal of Mathematics Education IKIP Veteran Semarang*, 6(1): 67-78.
- Rahin, N. F., Sarmin, N. H., dan Ilangovan, S.. 2020. The Non-Normal Subgroup Graph of Some Dihedral Groups. *ASM Science Journal*, 13: 1-7.

- Ruatakurey, M., Montolalu, C. E. J. C., dan Mananohas, M. L.. 2019. Kelas Konjugat pada Grup Simetri S_n , ($n = 3, 4, 5, 6$) dan Grup Dihedral D_n , ($n = 3, 12, 60, 360$). *d'Cartesian: Jurnal Matematika dan Aplikasi*, 8(1): 53-58.
- Schilling, O. F. G. dan Piper, W. S.. 1975. *Basic Abstract Algebra*. Boston: Allyn and Bacon, Inc..
- Suryanti, Sri. 2017. *Teori Grup (Struktur Aljabar 1)*. Gresik: UMG Press.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

1. Nama Lengkap : Titisari Azizah Wijayanti
2. Tempat dan Tgl. Lahir : Magelang, 27 Juni 2003
3. Alamat Rumah : Perum Permata Trias blok A2/17,
Cibitung, Bekasi, Jawa Barat
4. HP : 081299265645
5. E-mail : 2108046012@student.walisongo.ac.id

B. Riwayat Pendidikan

1. SDIT Az-Zahra (2009 – 2015)
2. MTs Attaqwa Pusat Putri (2015 – 2018)
3. MA Attaqwa Pusat Putri (2018 – 2021)

Semarang, 12 Desember 2024

Titisari Azizah Wijayanti

NIM: 2108046012