

SEMIGRUP REGULER ATAS MATRIKS DALAM ALJABAR MAX PLUS

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana matematika
dalam Matematika



Oleh : **SHERLY INDAH PRATIWI**
NIM : 2108046078

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2024

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : SHERLY INDAH PRATIWI
NIM : 2108046078
Jurusan/Program Studi : MATEMATIKA/ MATEMATIKA

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

SEMIGRUP REGULER ATAS MATRIKS DALAM ALJABAR MAX PLUS

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 20 Desember 2024

Pembuat pernyataan,



SHERLY INDAH PRATIWI
NIM : 2108046078



KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **SEMIGRUP REGULER ATAS MATRIKS DALAM
ALJABAR MAX PLUS**
Penulis : SHERLY INDAH PRATIWI
NIM : 2108046078
Jurusan : MATEMATIKA

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji
Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima
sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu
MATEMATIKA.

Semarang, 20 Desember 2024

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

Dinni Rahma O, M.Si.

NIP : 19941009 201903 1 012

Penguji II,

Prihadi Kurniawan, M.Sc.

NIP : 19901226 201903 1 012

Penguji III,

Nur Khasanah, M.Si.

NIP : 19911121 201903 1 012

Penguji IV,

Dr. Minhayati Shaleh, M.Sc.

NIP : 19760426 200604 2 001

Pembimbing I,

Any Muanalifah, M.Si., Ph.D.

NIP : 19820113 201101 2 009

NOTA DINAS

Semarang, 20 Desember 2024

Yth. Ketua Program Studi MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : SEMIGRUP REGULER ATAS MATRIKS DALAM
ALJABAR MAX PLUS
Nama : SHERLY INDAH PRATIWI
NIM : 2108046078
Jurusan : MATEMATIKA

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing,



Any Muanalifah, M.Si., Ph.D.
NIP : 19820113 201101 2 009

ABSTRAK

Penelitian ini membahas semigrup reguler pada matriks dalam aljabar Max-Plus, sebuah struktur aljabar yang dilengkapi operasi maksimum (\oplus) dan penjumlahan (\otimes). Fokus penelitian adalah menunjukkan sifat semigrup reguler dalam himpunan matriks $M_n(\mathbb{R}_{\max})$ berordo 2×2 , di mana elemen reguler sebagai matriks A yang memenuhi relasi $A \otimes B \otimes A = A$ untuk suatu matriks B . Hasil penelitian menunjukkan bahwa tidak semua matriks bersifat reguler, tetapi sifat ini dapat ditemukan pada matriks segitiga atas, segitiga bawah, dan matriks idempoten. Selain itu, elemen reguler tidak selalu memiliki invers, yang membedakannya dari semigrup reguler dalam aljabar klasik. Studi ini memberikan kontribusi teoretis pada pengembangan aljabar Max-Plus, khususnya dalam elemen reguler.

Kata kunci : aljabar max-plus, matriks aljabar max-plus, semigrup reguler

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Wr. Wb. Segala Puji syukur kepada Allah SWT, karena dengan rahmat dan karunia-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan judul "**Semigrup Reguler Atas Matriks dalam Aljabar Max-Plus**". Buku ini merupakan hasil dari pengalaman penulis dalam mempelajari dan mendalami konsep semigrup matriks di atas aljabar max-plus.

Salawat serta salam semoga senantiasa tercurah kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah menerima wahyu dari Allah dan menyebarkan ilmu pengetahuan yang membebaskan umat manusia dari kebodohan menuju kehidupan yang penuh berkah, rahmat, dan petunjuk-Nya.

Penyusunan skripsi ini merupakan bagian dari persyaratan untuk menyelesaikan studi S1 di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang. Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis menerima dukungan dan bimbingan dari berbagai pihak, baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Musahadi, M.Ag. Selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang;
2. Any Muanalifah, M.Si., Ph.D., dan Prihadi Kurniawan, M.Sc., selaku Ketua dan Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang;
3. Any Muanalifah, M.Sc., Ph.D., selaku dosen pembimbing yang telah memberikan arahan, bimbingan, dan motivasi selama penulis menyelesaikan skripsi ini;

4. Zulaikha, M.Si., selaku wali dosen yang telah mendampingi penulis sepanjang masa studi di Program Studi Matematika UIN Walisongo Semarang;
5. Segenap dosen di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang yang telah memberi ilmu yang sangat berharga selama masa perkuliahan;
6. Teman-teman seperjuangan angkatan 2021, khususnya teman-teman satu kelas, yang selalu mendukung dan memberikan semangat;
7. Keluarga, khususnya Mama dan Bapak, yang selalu mendampingi, mendoakan, dan menjadi sumber kekuatan bagi penulis;
8. Teman-teman KKN yang telah memberikan semangat dan dukungan selama proses penyelesaian skripsi ini;
9. Sahabat-sahabat dekat yang selalu hadir memberikan dukungan;
10. Rekan-rekan sesama peneliti dan asisten dosen yang telah berbagi wawasan dan pengalaman dalam diskusi akademik;
11. Panitia seminar dan workshop di lingkungan kampus yang telah membuka peluang untuk memperluas pemahaman penulis dalam bidang ini;
12. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah memberikan kontribusi hingga selesainya skripsi ini.

Penulis juga menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, dan terdapat banyak hal yang perlu diperbaiki. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang membangun. Akhir kata, penulis memohon maaf atas segala kesalahan dan kekurangan dalam penyusunan skripsi ini
Semarang, 20 Desember 2024

Penulis,

Sherly Indah Pratiwi

NIM : 2108046078

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iii
NOTA PEMBIMBING I	iv
ABSTRAK	v
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	ix
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Rumusan Masalah	3
C. Tujuan Penelitian	3
D. Tinjauan Pustaka	3
E. Metode Penelitian	5
F. Batasan Masalah	5
G. Sistematika Penulisan	6
BAB II LANDASAN TEORI	7
A. Semigrup	7
B. Aljabar Max-Plus	24
C. Matriks dalam Aljabar Max-Plus	28
BAB III SEMIGRUP REGULER ATAS MATRIKS DALAM ALJABAR MAX-PLUS	34
A. Semigrup Atas Aljabar Max-Plus	34
B. Semigrup Reguler atas Matriks dalam Aljabar Max-Plus .	38
BAB IV PENUTUP	50
DAFTAR PUSTAKA	51

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Struktur aljabar merupakan cabang penting dalam matematika yang mempelajari himpunan tak kosong dengan operasi biner. Operasi biner adalah fungsi yang memetakan dua elemen dari himpunan ke elemen lain dalam himpunan yang sama. Misal S adalah suatu himpunan tak kosong, maka operasi biner pada S didefinisikan sebagai fungsi: $\star : S \times S \rightarrow S$, yang memenuhi $\forall a, b \in S$ menghasilkan $a \star b \in S$. Operasi biner ini menjadi dasar pembentukan berbagai jenis struktur aljabar (Bylinski, 1989).

Salah satu bentuk struktur aljabar adalah grup. Grup adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma, yaitu asosiatif, memiliki elemen identitas, dan memiliki elemen invers (Redfield, 1927). Jika suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner memenuhi sifat asosiatif, maka struktur tersebut disebut sebagai semigrup (Green, 1951). Elemen x dalam semigrup (S, \star) dikatakan elemen reguler jika $x \star y \star x = x$ untuk setiap $y \in S$ (Nambooripad, 1979). Suatu semigrup disebut reguler jika setiap elemennya merupakan elemen reguler (Nambooripad, 1979).

Selain itu, terdapat struktur aljabar lain seperti ring. Ring adalah himpunan tak kosong R yang dilengkapi dua operasi biner yaitu penjumlahan (+) dan perkalian (\times) yang memenuhi sifat-sifat berikut himpunan tersebut membentuk grup abelian terhadap penjumlahan, operasi perkalian bersifat asosiatif, distributif terhadap penjumlahan, dan memiliki elemen identitas

perkalian (Nobusawa, 1964). Jika dalam operasi pertama tidak mempunyai invers, maka struktur aljabar disebut semiring (Hebisch & Weinert, 1996). Salah satu contoh semiring, yaitu aljabar max-plus. Aljabar max-plus adalah struktur aljabar yang terdiri dari himpunan bilangan real yang diperluas dengan elemen $-\infty$, dilengkapi dengan dua operasi biner, yaitu operasi maksimum dilambangkan dengan (\oplus) dan operasi penjumlahan dilambangkan dengan (\otimes) (Izhakian & Knebusch, 2013).

Semiring yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah aljabar Max-Plus. Selanjutnya, terdapat beberapa penelitian yang membahas tentang semigrup reguler yang dibentuk oleh matriks dalam aljabar Max-Plus diantaranya penelitian oleh Zur Izhakian dan Stuart W. Margolis, (2010) dengan judul "*Semigroup identities in the monoid of two-by-two tropical matrices*" menunjukkan bahwa monoid $M_2(\mathbb{T})$ dari matriks atas aljabar max-plus 2×2 merupakan semigrup identitas. Selain itu, Selanjutnya pada penelitian Zur Izhakian dan Eugenio Shustin, (2012) dengan judul "*Idempotent semigroups and tropical algebraic sets*" membahas semigrup idempoten dalam aljabar max-plus. Kemudian, penelitian Kramar Fijavž, (2017) yang berjudul "*Semigroups of max-plus linear operators*". Penelitian ini membahas tentang sifat semigrup yang beroperasi pada ruang linear Max-Plus. Penelitian tentang struktur aljabar max-plus terus dilakukan hingga kini. Selanjutnya, penelitian Aird, (2023) dalam artikelnya yang berjudul "*Semigroup identities of tropical matrix semigroups*" membahas identitas semigrup pada semigrup matriks max-plus.

Namun, penelitian tentang semigrup reguler atas matriks dalam aljabar max-plus masih sangat terbatas. Kajian lebih lanjut diperlukan untuk mengetahui apakah sifat-sifat reguler dalam

aljabar klasik juga berlaku pada matriks dalam aljabar max-plus. Selain itu, penting untuk menentukan seperti apa matriks yang merupakan elemen reguler dalam aljabar max-plus.

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji sifat-sifat elemen reguler pada semigrup matriks dalam aljabar max-plus. Fokus utama penelitian ini adalah menemukan sifat-sifat dasar elemen reguler pada semigrup matriks dalam aljabar max-plus. Oleh karena itu, penelitian ini diberi judul "*Semigrup Reguler atas Matriks dalam Aljabar Max-Plus*". Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi bagi pengembangan teori aljabar max-plus.

B. Rumusan Masalah

Bagaimana karakteristik matriks dalam aljabar max-plus yang dapat dikategorikan sebagai elemen reguler dalam struktur semigrup?

C. Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan karakteristik matriks dalam aljabar max-plus yang dapat dikategorikan sebagai elemen reguler dalam struktur semigrup.

D. Tinjauan Pustaka

Penelitian yang dilakukan oleh Izhakian dan Margolis (2010), yang dipublikasikan dalam artikel berjudul "*Semigroup Identities in the Monoid of Two-by-Two Tropical Matrices*" membahas struktur

monoid matriks 2×2 pada aljabar max-plus membentuk semigrup identitas.

Penelitian Izhakian dan Shustin (2012) yang berjudul "*Idempotent Semigroups and Tropical Algebraic Sets*" mendalami konsep semigrup idempoten pada aljabar max-plus. Penelitian ini memaparkan peran elemen idempoten dalam struktur semigrup dan bagaimana sifat tersebut berhubungan dengan teori aljabar max-plus secara umum. Temuan ini relevan dalam mengidentifikasi elemen idempoten dalam semigrup reguler.

Penelitian Fijavž, Peperko, dan Sikolya (2017) dalam artikel berjudul "*Semigroups of Max-Plus Linear Operators*" membahas sifat semigrup operator linear pada ruang aljabar max-plus. Penelitian ini memberikan wawasan tentang bagaimana operasi semigrup dapat diterapkan pada ruang vektor max-plus, termasuk sifat-sifat stabilitas dan keteraturan semigrup.

Penelitian Aird (2023) yang dipublikasikan dengan judul "*Semigroup Identities of Tropical Matrix Semigroups*" membahas identitas semigrup dalam matriks pada aljabar max-plus. Artikel ini mengkaji berbagai identitas yang berlaku dalam semigrup matriks dan bagaimana sifat identitas tersebut memengaruhi struktur semigrup atas aljabar max-plus.

Hasil-hasil penelitian tersebut memberikan landasan teori untuk memahami semigrup reguler pada aljabar max-plus, khususnya dalam menganalisis sifat elemen reguler dan idempoten. Dalam penelitian ini, fokus utama adalah mengembangkan analisis elemen reguler pada matriks $M_n(\mathbb{R}_{\max})$ dengan operasi \otimes serta mengidentifikasi implikasi strukturalnya terhadap sifat semigrup reguler.

E. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kepustakaan (*library research*) yang dilakukan dengan menelaah, menganalisis, dan menyelidiki literatur, atau tulisan. Fokus utama penelitian ini adalah mengkaji sifat-sifat semigrup reguler dalam himpunan matriks $M_n(\mathbb{R}_{\max})$ dengan operasi \otimes pada aljabar max-plus.

Tahapan penelitian yang dilakukan meliputi:

1. Memahami konsep dasar semigrup, aljabar max-plus, dan elemen reguler berdasarkan literatur yang relevan.
2. Menyusun definisi serta sifat dasar semigrup pada aljabar max-plus, terutama sifat asosiatif dari operasi \otimes .
3. Mengidentifikasi elemen reguler $X \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ yang memenuhi persamaan $X \otimes Y \otimes X = X$ untuk suatu $Y \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$.

F. Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Matriks yang digunakan dalam penelitian ini terbatas pada matriks ordo 2×2 dalam aljabar max-plus.
2. Penelitian difokuskan pada semigrup reguler atas matriks dalam aljabar max-plus.

G. Sistematika Penulisan

Penulisan penelitian ini disusun berdasarkan sistematika berikut:

- **Bab 1: PENDAHULUAN**

Pada bab ini mencakup latar belakang masalah, tujuan penelitian, tinjauan pustaka, metodologi penelitian, dan sistematika penulisan.

- **Bab 2: LANDASAN TEORI**

Pada bab ini memuat teori-teori dasar yang digunakan dalam pembahasan. Di antaranya definisi semigrup, elemen reguler, semigrup reguler dan aljabar max-plus.

- **Bab 3: PEMBAHASAN**

Bab ini membahas semigrup atas aljabar Max-Plus, semigrup reguler pada matriks dalam aljabar max-plus, serta pembuktian teorema terhadap matriks yang memenuhi sifat elemen reguler dalam aljabar max-plus.

- **Bab 4: PENUTUP**

Bab ini berisi kesimpulan hasil penelitian dan saran untuk lebih lanjut.

BAB II

LANDASAN TEORI

Berikut ini akan dibahas definisi dan teorema teorema dasar semigrup yang diambil dari buku "*Nine Chapters on the Semigroup Art*" (Cain, 2020), selain itu, akan diberikan definisi dasar dari aljabar max-plus yang diambil dari buku "*Max Plus at Work Modeling and Analysis of Synchronized Systems: A Course on Max-Plus Algebra and its Applications*" (Heidergott dkk, 2006).

A. Semigrup

Sebelum memberikan definisi tentang semigrup, terlebih dahulu menjelaskan operasi biner. Operasi biner didefinisikan sebagai suatu hubungan antara dua elemen dalam satu himpunan. Berikut adalah definisi dari operasi biner.

Definisi 2.1.1 Operasi Biner

Misal S adalah himpunan tak kosong dan \star adalah fungsi $\star : S \times S \rightarrow S$ dengan $x \star y := x + y$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$, maka operasi \star disebut operasi biner jika $\forall x, y \in S$ berlaku:

$$x \star y \in S.$$

Contoh 2.1.2 Operasi Biner

Misal himpunan bilangan bulat \mathbb{Z} dan operasi \star didefinisikan sebagai penjumlahan biasa:

$$x \star y = x + y$$

Operasi ini merupakan operasi biner karena penjumlahan dua bilangan bulat selalu menghasilkan bilangan bulat, yaitu:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x + y \in \mathbb{Z}$$

Menurut (Whitelaw, 1995) operasi biner asosiatif dan operasi biner komutatif adalah sebagai berikut.

Definisi 2.1.3 Operasi Biner Asosiatif

Suatu operasi biner \star pada himpunan S disebut asosiatif jika memenuhi

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

untuk setiap $x, y, z \in S$.

Contoh 2.1.4 Misal S adalah himpunan matriks berukuran 2×2 dengan operasi biner (+). Untuk setiap $A, B, C \in S$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan bahwa operasi + pada himpunan S , berlaku:

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Hitung

$$\begin{aligned}
 (A + B) + C &= \left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (a_1 + b_1) + c_1 & (a_2 + b_2) + c_2 \\ (a_3 + b_3) + c_3 & (a_4 + b_4) + c_4 \end{bmatrix}, \\
 A + (B + C) &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 & b_4 + c_4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 + (b_1 + c_1) & a_2 + (b_2 + c_2) \\ a_3 + (b_3 + c_3) & a_4 + (b_4 + c_4) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Karena penjumlahan bilangan bulat bersifat asosiatif:

$$(a_1 + b_1) + c_1 = a_1 + (b_1 + c_1), \quad \text{dan seterusnya.}$$

Maka:

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Definisi 2.1.5 Operasi Biner Komutatif

Suatu operasi biner \star pada himpunan S dikatakan komutatif jika untuk setiap $x, y \in S$, memenuhi

$$x \star y = y \star x.$$

Contoh 2.1.6 Misal S adalah himpunan matriks berukuran 2×2

dengan operasi biner (+). Untuk setiap $A, B \in S$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix},$$

Akan ditunjukkan bahwa operasi + pada himpunan S , berlaku:

$$A + B = B + A.$$

Hitung

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix}.$$

$$B + A = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + a_1 & b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 & b_4 + a_4 \end{bmatrix}.$$

Karena penjumlahan bilangan real bersifat komutatif:

$$a_1 + b_1 = b_1 + a_1, \quad a_2 + b_2 = b_2 + a_2, \quad \text{dan seterusnya.}$$

Maka:

$$A + B = B + A.$$

Selanjutnya, operasi biner yang dilengkapi dengan sifat tertentu akan membentuk suatu struktur baru, salah satunya adalah semigrup yang didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.1.7 Semigrup

Himpunan tak kosong S dilengkapi dengan operasi biner \star disebut semigrup. Apabila operasi \star memenuhi sifat asosiatif, yaitu $(x \star y) \star z = x \star (y \star z) \forall x, y, z \in S$.

Contoh 2.1.8 Misal S adalah himpunan matriks berukuran 2×2 dengan operasi biner (\times) . Himpunan S terdiri dari matriks-matriks berikut:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right\}.$$

Akan ditunjukkan bahwa operasi (\times) pada himpunan S memenuhi sifat asosiatif yaitu untuk setiap elemen $A, B, C \in S$

1. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
2. $A \times (C \times B) = (A \times C) \times B$

Misal:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Untuk persamaan satu $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

Hitung $A \times B$:

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kemudian, hitung $(A \times B) \times C$:

$$\begin{aligned}
 (A \times B) \times C &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{11} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{21} \\ (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{12} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{22} \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{11} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{21} \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{12} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}c_{11} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{22}c_{21} \\ a_{11}b_{11}c_{12} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{11}b_{12}c_{22} + a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{11} + a_{22}b_{21}c_{11} + a_{21}b_{12}c_{21} + a_{22}b_{21}c_{21} \\ a_{21}b_{12}c_{12} + a_{22}b_{22}c_{12} + a_{21}b_{12}c_{22} + a_{22}b_{22}c_{12} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, hitung $B \times C$:

$$B \times C = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{pmatrix}.$$

Lalu, hitung $A \times (B \times C)$:

$$\begin{aligned}
 A \times (B \times C) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{12}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) \\ a_{11}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{12}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{22}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) \\ a_{21}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{22}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{12}b_{22}c_{21} \\ a_{11}b_{11}c_{12} + a_{11}b_{12}c_{22} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{11} + a_{21}b_{12}c_{21} + a_{22}b_{21}c_{11} + a_{22}b_{22}c_{21} \\ a_{21}b_{11}c_{12} + a_{21}b_{12}c_{22} + a_{22}b_{21}c_{12} + a_{22}b_{22}c_{22} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Untuk persamaan dua $A \times (C \times B) = (A \times C) \times B$

Hitung $C \times B$

$$C \times B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}b_{11} + c_{12}b_{21} & c_{11}b_{12} + c_{12}b_{22} \\ c_{21}b_{11} + c_{22}b_{21} & c_{21}b_{12} + c_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Kemudian, hitung $A \times (C \times B)$

$$\begin{aligned} A \times (C \times B) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{11}b_{11} + c_{12}b_{21} & c_{11}b_{12} + c_{12}b_{22} \\ c_{21}b_{11} + c_{22}b_{21} & c_{21}b_{12} + c_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(c_{11}b_{11} + c_{12}b_{21}) + a_{12}(c_{21}b_{11} + c_{22}b_{21}) \\ a_{11}(c_{11}b_{12} + c_{12}b_{22}) + a_{12}(c_{21}b_{12} + c_{22}b_{22}) \\ a_{21}(c_{11}b_{11} + c_{12}b_{21}) + a_{22}(c_{21}b_{11} + c_{22}b_{21}) \\ a_{21}(c_{11}b_{12} + c_{12}b_{22}) + a_{22}(c_{21}b_{12} + c_{22}b_{22}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Selanjutnya hitung $A \times C$

$$A \times C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{pmatrix}$$

Lalu hitung $(A \times C) \times B$

$$\begin{aligned} (A \times C) \times B &= \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21})b_{11} + (a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22})b_{21} \\ (a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21})b_{12} + (a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22})b_{22} \\ (a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21})b_{11} + (a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22})b_{21} \\ (a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21})b_{12} + (a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22})b_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh asosiatif.

Sebelum melanjutkan ke konsep monoid, perlu dipahami bahwa monoid adalah semigrup yang memiliki elemen identitas. Berikut adalah definisi monoid.

Definisi 2.1.9 Monoid

Semigrup (S, \star) dikatakan monoid jika ada elemen e ini ada $e \in S$ maka disebut elemen identitas yang memenuhi $e \star x = x \star e = x, \forall x \in S$.

Contoh 2.1.10 Misal (S, \times) adalah himpunan matriks 2×2 dengan operasi perkalian matriks. Untuk setiap matriks $A \in S$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

Akan ditunjukkan matriks identitas I berfungsi sebagai elemen identitas. Dapat dilihat bahwa:

$$I \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A,$$

dan

$$A \times I = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A.$$

Karena $I \times A = A$ dan $A \times I = A$, maka matriks I berfungsi sebagai elemen identitas untuk operasi perkalian matriks. Dengan demikian, himpunan matriks 2×2 dengan operasi perkalian matriks membentuk monoid, di mana elemen identitasnya adalah matriks identitas I .

Contoh 2.1.11 Himpunan bilangan bulat \mathbb{Z} dengan operasi penjumlahan $(+)$ membentuk monoid. Operasi penjumlahan pada

bilangan bulat bersifat asosiatif, dan elemen identitasnya adalah 0.

Definisi elemen idempoten dalam semigrup adalah sebagai berikut.

Definisi 2.1.12 Idempoten

Misal S adalah semigrup dengan operasi biner \star . Untuk setiap elemen $x \in S$ dan x^2 didefinisikan sebagai $x \star x$. Elemen $x \in S$ disebut idempoten jika $x^2 = x$. Himpunan elemen-elemen idempoten dari S dinotasikan dengan $E(S)$. Jika setiap elemen dalam S adalah idempoten, maka S disebut sebagai semigrup idempoten.

Contoh 2.1.13 Contoh Elemen Idempoten pada Matriks

Misal (S, \times) adalah himpunan matriks ukuran 2×2 dengan operasi perkalian matriks. Dipunyai matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sehingga diperoleh

$$A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

Karena $A \times A = A$, maka A adalah elemen idempoten.

Contoh 2.1.14 Misal $S = \{0, 1\}$ adalah semigrup dengan operasi \star dengan $0 \star 0 = 0$, $1 \star 1 = 1$, dan $0 \star 1 = 1 \star 0 = 0$. S adalah semigroup idempoten karena setiap elemen memenuhi $a^2 = a$.

Selanjutnya, perluasan konsep semigrup mencakup semigrup

komutatif, di mana selain memenuhi sifat asosiatif, operasi binernya juga bersifat komutatif.

Definisi 2.1.15 Semigrup komutatif

Semigrup komutatif (S, \star) adalah semigrup, sedemikian sehingga operasi biner \star memenuhi sifat komutatif, yaitu $\forall x, y \in S$, berlaku $x \star y = y \star x$.

Contoh 2.1.16 Misal dipunyai matriks $A, B \in S$ dengan $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Akan ditunjukkan perkalian matriks A dan B bersifat komutatif.

Hitung $A \times B$:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \times 0 + 0 \times 1) & (1 \times 1 + 0 \times 0) \\ (0 \times 0 + 1 \times 1) & (0 \times 1 + 1 \times 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kemudian, hitung $B \times A$:

$$B \times A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0 \times 1 + 1 \times 0) & (0 \times 0 + 1 \times 1) \\ (1 \times 1 + 0 \times 0) & (1 \times 0 + 0 \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena $A \times B = B \times A$, maka memenuhi sifat komutatif.

Dalam semigrup, invers kiri dan kanan adalah elemen yang berfungsi untuk mengembalikan elemen semigrup ke bentuk tertentu melalui operasi biner. Definisi ini akan dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 2.1.17 Invers Kanan

Misal (M, \star) monoid. Elemen $x' \in M$ disebut invers kanan dari $x \in M$ apabila

$$x \star x' = 1$$

Definisi 2.1.18 Invers Kiri

Misal (M, \star) monoid. Elemen x' disebut invers kiri dari $x \in S$ apabila

$$x' \star x = 1$$

Contoh 2.1.19 Invers Kanan dan Invers Kiri dengan Operasi Penjumlahan

Misal $(M_2(R), +)$ adalah monoid. Matriks $A, B \in M_2(R)$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Penjumlahan matriks $A+B$ dan $B+A$, akan ditunjukkan B adalah invers kanan dari A

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, $A + B = 0$, maka B adalah invers kanan dari A . Akan ditunjukkan A adalah invers kiri dari B

$$B + A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena $B + A = 0$, maka A juga berfungsi sebagai invers kiri dari B . Dengan demikian, A dan B saling invers kanan dan invers kiri.

Contoh 2.1.20 Invers Kanan dan Invers Kiri dengan Operasi Perkalian

Misal $(M_2(R), \times)$ adalah monoid. Matriks $A, B \in M_2(R)$ dengan

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ adalah matriks identitas. Akan

ditunjukkan A dan B merupakan invers kanan dan invers kiri.

Hitung $A \times B = I$:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Karena $A \times B = I$, maka A adalah invers kanan dari B .

Selanjutnya, hitung $B \times A = I$:

$$B \times A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Karena $B \times A = I$, maka B adalah invers kiri dari A .

Oleh karena itu, A dan B saling merupakan invers kanan dan invers kiri satu sama lain.

Dalam studi semigrup, elemen reguler membantu dalam memahami struktur dan sifat semigrup. Elemen reguler didefinisikan berdasarkan kemampuannya untuk memenuhi kondisi tertentu yang berhubungan dengan operasi biner dalam semigrup. Definisi mengenai elemen reguler dalam semigrup adalah sebagai berikut:

Definisi 2.1.21 Elemen Reguler

Misal (S, \star) adalah semigrup. Elemen $x \in S$ disebut elemen reguler

jika terdapat elemen $y \in S$ berlaku

$$x \star y \star x = x.$$

Contoh 2.1.22 Elemen Reguler pada Matriks 2×2 atas \mathbb{R}

Misal dipunyai matriks $A, B \in S$ dengan $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B =$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in S. \text{ Akan ditunjukkan } A \times B \times A = A.$$

Hitung $A \times B$:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Kemudian, hitung $A \times B \times A$:

$$A \times B \times A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Karena $A \times B \times A = A$, maka matriks A adalah elemen reguler.

Contoh 2.1.23 Elemen Reguler

Misal $S = \{0, 1, 2\}$ adalah semigrup dengan operasi \star yang didefinisikan sebagai perkalian modulo 3, yaitu $\forall x, y \in S, x \star y = (x \cdot y) \bmod 3$. Untuk $x = 0$, jelas bahwa $0 \star y \star 0 = 0, \forall y \in S$, sehingga 0 adalah elemen reguler. Untuk $x = 1, (1 \star y) \star 1 = y \star 1 = y, \forall y \in S$, y bukan reguler, tetapi 1 adalah reguler karena terdapat $1 \in S$ sedemikian sehingga $1 \star 1 \star 1 = 1$. Namun, untuk $x = 2$, karena $2 \star y \star 2$ tidak selalu sama dengan 2 (misalnya, $2 \star 1 \star 2 = 1$), 2 bukan elemen reguler. Dengan demikian, elemen reguler dalam semigrup ini adalah 0 dan 1.

Sebelum mendefinisikan semigrup reguler dan semigrup invers, perlu memahami konsep dasar yang mendasari kedua konsep tersebut. Semigrup reguler adalah semigrup di mana setiap elemen memiliki sifat tertentu yang memungkinkan adanya elemen yang memenuhi kondisi khusus dalam struktur semigrup tersebut. Salah satu konsep yang berkaitan erat dengan semigrup reguler adalah invers, yang mengacu pada elemen yang memenuhi kriteria tertentu dalam semigrup tersebut. Konsep ini akan dijelaskan lebih lanjut melalui definisi dan proposisi berikut.

Definisi 2.1.24 Semigrup Reguler

Semigrup S disebut semigrup reguler jika setiap elemen S reguler.

Contoh 2.1.25 Semigrup Reguler dengan Matriks 2×2

Ambil sebarang matriks $A, B \in S$ dengan $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ adalah

matriks idempoten, dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks identitas.

Akan ditunjukkan bahwa A dan B memenuhi sifat elemen reguler, sehingga membentuk semigrup reguler.

Untuk menunjukkan bahwa A adalah elemen reguler, ditunjukkan bahwa

$$A \times B \times A = A.$$

Hitung $A \times B$:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kemudian, hitung $A \times B \times A$:

$$A \times B \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena $A \times B \times A = A$, maka A adalah elemen reguler.

Contoh 2.1.26 Semigrup Reguler

Diberikan semigrup $S = \{0, 1\}$ dengan operasi penjumlahan yang berlaku pada semigrup tersebut, yaitu $0+0 = 0, 0+1 = 1, 1+0 = 1$, dan $1 + 1 = 0$. Untuk membuktikan apakah S adalah semigrup reguler, periksa setiap elemen $x \in S$. Untuk $x = 0$, memiliki $0 + y + 0 = 0 + 0 = 0$, yang memenuhi kondisi reguler. Untuk $x = 1$, memiliki $1 + y + 1 = 1$, yang juga memenuhi kondisi reguler. Karena setiap elemen $x \in S$ memenuhi $x + y + x = x$ untuk semua $y \in S$, maka S adalah semigrup reguler.

Definisi 2.1.27 Elemen Invers pada Semigrup

Misal S adalah semigrup. Sebuah elemen $x' \in S$ dikatakan sebagai invers dari x jika memenuhi kondisi $x = xx'x$ dan $x'xx' = x'$.

Contoh 2.1.28 Misal $(S, +)$ adalah semigrup. Matriks $A, B \in S$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan bahwa B merupakan invers dari A dengan operasi penjumlahan matriks.

Untuk $A = A + B + A$ adalah sebagai berikut

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kemudian, tambahkan A ke hasil tersebut

$$A + B + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

Dengan demikian, $A = A + B + A$ terpenuhi.

Untuk $B = B + A + B$ sebagai berikut

$$B + A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kemudian, tambahkan B ke hasil tersebut:

$$B + A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

Dengan demikian, $B = B + A + B$ juga terpenuhi.

Oleh karena itu, B adalah invers dari A dalam semigrup matriks dengan operasi penjumlahan.

Contoh 2.1.29 Misal (S, \times) adalah semigrup. Matriks $A, B \in S$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Untuk menunjukkan B merupakan invers dari A dengan operasi penjumlahan matriks.

Untuk $A = A \times B \times A$ sebaga berikut

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, kalikan hasil tersebut dengan A :

$$(A \times B) \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

Dengan demikian $A = A \times B \times A$ terpenuhi.

Untuk $B = B \times A \times B$ sebagai berikut.

$$B \times A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kemudian, kalikan hasil tersebut dengan B :

$$(B \times A) \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Dengan demikian, $B = B \times A \times B$ juga terpenuhi.

Oleh karena itu, A dan B memenuhi kedua kondisi semigrup invers.

Proposisi 2.1.30 *S adalah semigrup. Untuk setiap elemen $x \in S$, elemen x memiliki invers jika dan hanya jika x adalah elemen reguler.*

Bukti. Jika x memiliki invers, maka x adalah elemen reguler. Sebaliknya, jika x adalah elemen reguler, maka terdapat elemen $y \in S$ yang memenuhi $xyx = x$. Definisikan $x' = yxy$. Dengan

demikian,

$$xx'x = x(yxy)x = (xyx)yx = xyx = x$$

dan

$$x'xx' = (yxy)x(yxy) = y(xyx)yxy = yxyxy = y(xyx)y = yxy = x',$$

membuktikan bahwa x' adalah invers dari x . ■

B. Aljabar Max-Plus

Sebelum mendefinisikan semiring dan aljabar Max-Plus, perlu dipahami bahwa semiring adalah suatu himpunan tak kosong dilengkapi dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan dan perkalian, yang memenuhi aksioma asosiatif, elemen identitas, distributif dan elemen nol, namun semiring pada operasi penjumlahan dan perkalian tidak memiliki invers. Salah satu contoh semiring adalah aljabar max-plus yang merupakan himpunan bilangan real \mathbb{R} diberikan himpunan tak kosong $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup -\infty$ dengan dua operasi biner yaitu operasi maksimum (\oplus) dan penjumlahan biasa (\otimes). Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R} \cup -\infty$, operasi maksimum (\oplus) didefinisikan sebagai $x \oplus y = \max(x, y)$, sedangkan operasi penjumlahan biasa (\otimes) didefinisikan sebagai $x \otimes y = x + y$. Dalam struktur ini, elemen identitas untuk operasi \oplus adalah $-\infty$, sedangkan untuk operasi \otimes adalah 0 , (Bacelli, 2001). Aljabar max-plus memenuhi seluruh aksioma semiring, berikut diberikan definisi semiring dan aljabar max-plus.

Definisi 2.2.1 Misal terdapat suatu himpunan tak kosong A dengan dua operasi biner $+$ dan \times . Struktur $(A, +, \times)$ disebut *semiring* jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $(A, +)$ adalah monoid komutatif dengan elemen identitas yang dinotasikan dengan 0 ;
2. (A, \times) merupakan monoid dengan elemen identitas yang dinotasikan dengan 1 ;
3. Untuk setiap $x, y, z \in A$, berlaku $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$ dan $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$ (*distributif kiri dan kanan*);
4. Untuk setiap $x \in A$, berlaku $0 \times x = x \times 0 = 0$.

Contoh 2.2.2 Misal terdapat himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan dua operasi biner, yaitu \oplus dan \otimes , yang didefinisikan sebagai berikut:

$$x \oplus y = \max(x, y),$$

$$x \otimes y = x + y,$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Struktur aljabar $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ adalah semiring dan akan disebut aljabar max-plus. Berdasarkan aksioma-aksioma dari definisi 2.2.1 di dapat pembuktian sebagai berikut.

1. Asosiatif

Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$:

$$\begin{aligned} x \oplus (y \oplus z) &= x \oplus \max(y, z) \\ &= \max(x, \max(y, z)) \\ &= \max(\max(x, y), z) \\ &= (x \oplus y) \oplus z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \otimes (y \otimes z) &= x \otimes (y + z) \\ &= x + (y + z) \\ &= (x + y) + z \\ &= (x \otimes y) \otimes z. \end{aligned}$$

2. Identitas

Elemen identitas \oplus adalah $-\infty$, karena:

$$\begin{aligned} x \oplus (-\infty) &= \max(x, -\infty) = x, \\ (-\infty) \oplus x &= \max(-\infty, x) = x. \end{aligned}$$

Elemen identitas \otimes adalah 0, karena:

$$\begin{aligned} x \otimes 0 &= x + 0 = x, \\ 0 \otimes x &= 0 + x = x. \end{aligned}$$

3. Distributif kiri dan kanan

Operasi \otimes distributif terhadap \oplus :

- **Distribusi kiri:**

$$\begin{aligned}
 x \otimes (y \oplus z) &= x \otimes \max(y, z) \\
 &= x + \max(y, z) \\
 &= \max(x + y, x + z) \\
 &= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z).
 \end{aligned}$$

- **Distribusi kanan:**

$$\begin{aligned}
 (x \oplus y) \otimes z &= \max(x, y) \otimes z \\
 &= \max(x + z, y + z) \\
 &= (x \otimes z) \oplus (y \otimes z).
 \end{aligned}$$

4. Elemen nol untuk \otimes

Untuk setiap $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$:

$$\begin{aligned}
 x \otimes (-\infty) &= x + (-\infty) = -\infty, \\
 (-\infty) \otimes x &= (-\infty) + x = -\infty.
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, struktur $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ memenuhi semua aksioma semiring.

Contoh 2.2.3 Operasi dalam Aljabar Max-Plus

Misal $x = 3 \in \mathbb{R}_{\max}$ dan $y = 5 \in \mathbb{R}_{\max}$, maka operasi maksimum dan penjumlahan dalam aljabar Max-Plus adalah:

$$x \oplus y = \max(3, 5) = 5$$

$$x \otimes y = 3 + 5 = 8$$

Definisi 2.2.4 Semiring Idempoten

Suatu semiring $(S, +, \times)$ dikatakan idempoten jika operasi penjumlahan $(+)$ pada semiring bersifat idempoten, yaitu untuk setiap elemen $x \in S$, berlaku

$$x + x = x.$$

Pada struktur aljabar max-plus, perpangkatan dalam aljabar max-plus menurut (Rudhito, 2016) sebagai berikut.

Definisi 2.2.5 Untuk setiap $y \in \mathbb{R}_{\max}$ dan $m \in \mathbb{N}$, jika $m \neq 0$, maka

$$y^{\otimes m} = \underbrace{y \otimes y \otimes y \otimes \cdots \otimes y}_{m \text{ kali}} = \underbrace{y + y + y + \cdots + y}_{m \text{ kali}}.$$

Sedangkan untuk $m = 0$, didefinisikan $y^{\otimes 0} = 0$.

C. Matriks dalam Aljabar Max-Plus

Konsep aljabar max-plus dapat diterapkan pada matriks berukuran $x \times y$. Sebagai contoh, untuk sembarang $x, y \in \mathbb{N}$ matriks berukuran $x \times y$ dalam aljabar max-plus adalah matriks yang elemen-elemennya merupakan anggota dari \mathbb{R}_{\max} , yang dinotasikan sebagai $\mathbb{R}_{\max}^{x \times y}$, dalam konteks ini berlaku operasi \oplus dan \otimes . Terlebih dahulu dinotasikan $[x] = \{1, \dots, x\}$ dan $[y] = \{1, 2, \dots, y\}$.

Operasi aritmatika dalam aljabar max-plus dapat diterapkan pada matriks. Berdasarkan penjelasan (Farlow, 2009), operasi ini pada matriks dalam aljabar max-plus memiliki aturan tertentu yang dirumuskan sebagai berikut.

Definisi 2.3.1 Penjumlahan Matriks

Misal terdapat dua matriks M dan N yang masing-masing merupakan anggota dari $\mathbb{R}_{\max}^{x \times y}$, di mana $M = (m_{ij})$ dan $N = (n_{ij})$. Penjumlahan matriks M dan N dinyatakan dengan notasi

$$M \oplus N := \max(m_{ij}, n_{ij})$$

dengan i diambil dari himpunan $[x]$ dan j diambil dari himpunan $[y]$.

Berikut contoh penjumlahan pada matriks dalam aljabar max-plus.

Contoh 2.3.2 Penjumlahan pada Matriks dalam Aljabar Max-Plus

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 \oplus 1 & 7 \oplus 5 \\ 2 \oplus 6 & 8 \oplus 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(4, 1) & \max(7, 5) \\ \max(2, 6) & \max(8, 3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Berikut ini adalah definisi perkalian matriks dan perkalian skalar dalam aljabar maksimum-plus:

Definisi 2.3.3 Perkalian Matriks dalam Aljabar Max-Plus

Misal terdapat matriks M dan N dalam aljabar max-plus. Misal $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$. Definisi perkalian matriks dan perkalian skalar dalam aljabar max-plus dinyatakan sebagai berikut.

$$(M \otimes N)_{ij} := \max_k (m_{ik} + n_{kj}) \quad (2.2)$$

dan

$$(\alpha \otimes M)_{ij} := \alpha + m_{ij}. \quad (2.3)$$

Berikut ini merupakan contoh perkalian pada matriks atas aljabar max-plus.

Contoh 2.3.4 Perkalian pada Matriks

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (1 \otimes 5) \oplus (4 \otimes 2) \\ (3 \otimes 5) \oplus (-\infty \otimes 2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(1 + 5, 4 + 2) \\ \max(3 + 5, -\infty + 2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(6, 6) \\ \max(8, -\infty) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Contoh 2.3.5 Perkalian Skalar dengan Matriks

$$\begin{aligned} 3 \otimes \begin{bmatrix} 1 & -\infty \\ 2 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 + 1 & 3 + -\infty \\ 3 + 2 & 3 + 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -\infty \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matriks idempoten dalam aljabar max-plus didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.6 Matriks Idempoten

Misal $A \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$. Matriks A dikatakan idempoten jika $A \otimes A = A$.

Contoh 2.3.7 Matriks Idempoten

Misal matriks $A \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dengan $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Akan ditunjukkan bahwa matriks A adalah idempoten. Diperoleh

$$\begin{aligned} A \otimes A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \max(0+0, -1+(-1)) & \max(0+(-1), -1+0) \\ \max(-1+0, 0+(-1)) & \max(-1+(-1), 0+0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \max(0, -2) & \max(-1, -1) \\ \max(-1, -1) & \max(-2, 0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Karena $A \otimes A = A$, maka A adalah idempoten.

Dalam aljabar Max-Plus, matriks reguler memastikan setiap baris memiliki elemen yang bukan elemen identitas. Berikut diberikan definisi matriks reguler.

Definisi 2.3.8 Matriks Reguler

Sebuah matriks $A \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$. Matriks A dikatakan reguler jika pada setiap baris terdapat paling tidak satu elemen yang tidak sama dengan identitas.

Contoh 2.3.9 Matriks Reguler

Misal A adalah matriks 2×2 dalam aljabar max-plus yang didefinisikan

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 5 \end{pmatrix}$$

Matriks A disebut reguler karena setiap barisnya memiliki minimal satu elemen yang tidak bernilai $-\infty$.

Definisi 2.3.10 Elemen Reguler dalam $M_2(\mathbb{R}_{\max})$

Sebuah matriks $A \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dikatakan elemen reguler jika terdapat matriks $B \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ diperoleh

$$A \otimes B \otimes A = A,$$

dengan operasi biner \otimes adalah operasi matriks dalam aljabar max-plus, yaitu $(A \otimes B)_{ij} = \max(A_{ik} + B_{kj})$.

Relasi urutan pada matriks dalam aljabar max-plus, sebagaimana dijelaskan oleh (Helena, 2016), dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.11 Relasi Urutan Matriks atas Aljabar Max-Plus

Misal diberikan dua matriks $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij}) \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$, relasi $B \leq A$ berlaku jika dan hanya jika

$$b_{ij} \leq a_{ij}, \quad \text{untuk setiap } i \text{ dan } j.$$

Contoh 2.3.12 Misal A, B adalah matriks dari $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dengan operasi biner \oplus didefinisikan

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -\infty & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\infty & 5 \end{pmatrix}$$

Akan ditunjukkan $B \leq A$, untuk itu hitung $A \oplus B$:

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -\infty & 7 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\infty & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \max(3, 0) & \max(5, -\infty) \\ \max(-\infty, -\infty) & \max(7, 5) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -\infty & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

BAB III

SEMIGRUP REGULER ATAS MATRIKS DALAM ALJABAR MAX-PLUS

A. Semigrup Atas Aljabar Max-Plus

Pada bab ini membahas semigrup reguler atas matriks dalam aljabar max-plus. Sebelum membahas lebih lanjut mengenai semigrup reguler atas matriks dalam aljabar max-plus, terlebih dahulu membahas tentang semigrup atas aljabar max-plus. langkah pertama yang perlu dilakukan adalah memastikan bahwa himpunan matriks $M_n(\mathbb{R}_{\max})$ dengan operasi \otimes memenuhi sifat dasar semigrup. Berikut ini adalah definisi semigrup atas aljabar max-plus.

Definisi 3.1.1 (*Semigrup atas Aljabar Max-Plus*) (Daviaud & Kambites, 2016)

Misal $M_n(\mathbb{R}_{\max})$ adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan elemen elemennya di \mathbb{R}_{\max} dilengkapi dengan operasi \otimes . Maka $(M_n(\mathbb{R}_{\max}), \otimes)$ disebut semigrup jika untuk setiap $A, B, C \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$, berlaku $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.

Contoh 3.1.2 Misal matriks $A, B, C \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dengan $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ akan ditunjukkan bahwa $M_2\mathbb{R}_{\max}$ terhadap operasi \otimes bersifat $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.

Hitung $A \times B$:

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \max(a_{11} + b_{11}, a_{12} + b_{21}) & \max(a_{11} + b_{12}, a_{12} + b_{22}) \\ \max(a_{21} + b_{11}, a_{22} + b_{21}) & \max(a_{21} + b_{12}, a_{22} + b_{22}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Selanjutnya hitung

$$\begin{aligned} &(A \otimes B) \otimes C \\ &= \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11} \otimes b_{11}) \oplus (a_{12} \otimes b_{21}) & (a_{11} \otimes b_{12}) \oplus (a_{12} \otimes b_{22}) \\ (a_{21} \otimes b_{11}) \oplus (a_{22} \otimes b_{21}) & (a_{21} \otimes b_{12}) \oplus (a_{22} \otimes b_{22}) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(a_{11} + b_{11}, a_{12} + b_{21}) & \max(a_{11} + b_{12}, a_{12} + b_{22}) \\ \max(a_{21} + b_{11}, a_{22} + b_{21}) & \max(a_{21} + b_{12}, a_{22} + b_{22}) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (d_{11} \otimes c_{11}) \oplus (d_{12} \otimes c_{21}) & (d_{11} \otimes c_{12}) \oplus (d_{12} \otimes c_{22}) \\ (d_{21} \otimes c_{11}) \oplus (d_{22} \otimes c_{21}) & (d_{21} \otimes c_{12}) \oplus (d_{22} \otimes c_{22}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(d_{11} + c_{11}, d_{12} + c_{21}) & \max(d_{11} + c_{12}, d_{12} + c_{22}) \\ \max(d_{21} + c_{11}, d_{22} + c_{21}) & \max(d_{21} + c_{12}, d_{22} + c_{22}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3.1)

dengan

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \max(\max(a_{11} + b_{11}, a_{12} + b_{21}) + c_{11}, \max(a_{11} + b_{12}, a_{12} + b_{22}) + c_{21}) \\
&= \max(\max(a_{11} + b_{11} + c_{11}, a_{12} + b_{21} + c_{11}), \\
&\quad \max(a_{11} + b_{12} + c_{21}, a_{12} + b_{22} + c_{21})) \\
&= \max(a_{11} + b_{11} + c_{11}, a_{12} + b_{21} + c_{12}, a_{11} + b_{12} + c_{21}, a_{12} + b_{22} + c_{21}) \\
e_{12} &= \max(\max(a_{11} + b_{11}, a_{12} + b_{21}) + c_{12}, \max(a_{11} + b_{12}, a_{12} + b_{22}) + c_{22}) \\
&= \max(\max(a_{11} + b_{11} + c_{12}, a_{12} + b_{21} + c_{12}), \\
&\quad \max(a_{11} + b_{12} + c_{22}, a_{12} + b_{22} + c_{22})) \\
&= \max(a_{11} + b_{11} + c_{12}, a_{12} + b_{21} + c_{12}, a_{11} + b_{12} + c_{22}, a_{12} + b_{22} + c_{22}) \\
e_{21} &= \max(\max(a_{21} + b_{11}, a_{22} + b_{21}) + c_{11}, \max(a_{21} + b_{12}, a_{22} + b_{22}) + c_{21}) \\
&= \max(\max(a_{21} + b_{11} + c_{11}, a_{22} + b_{21} + c_{11}), \\
&\quad \max(a_{21} + b_{12} + c_{21}, a_{22} + b_{22} + c_{21})) \\
&= \max(a_{21} + b_{11} + c_{11}, a_{22} + b_{21} + c_{11}, a_{21} + b_{12} + c_{21}, a_{22} + b_{22} + c_{21}) \\
e_{22} &= \max(\max(a_{21} + b_{11}, a_{22} + b_{21}) + c_{12}, \max(a_{21} + b_{12}, a_{22} + b_{22}) + c_{22}) \\
&= \max(\max(a_{21} + b_{11} + c_{12}, a_{22} + b_{21} + c_{12}), \\
&\quad \max(a_{21} + b_{12} + c_{22}, a_{22} + b_{22} + c_{22})) \\
&= \max(a_{21}, b_{11} + c_{12}, a_{22} + b_{21} + c_{12}, a_{21} + b_{12} + c_{22}, a_{22} + b_{22} + c_{22})
\end{aligned}$$

Diperhatikan juga:

$$\begin{aligned}
& A \otimes (B \otimes C) \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} (b_{11} \otimes c_{11}) \oplus (b_{12} \otimes c_{21}) & (b_{11} \otimes c_{12}) \oplus (b_{12} \otimes c_{22}) \\ (b_{21} \otimes c_{11}) \oplus (b_{22} \otimes c_{21}) & (b_{21} \otimes c_{12}) \oplus (b_{22} \otimes c_{22}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \max(b_{11} + c_{11}, b_{12} + c_{21}) & \max(b_{11} + c_{12}, b_{12} + c_{22}) \\ \max(b_{21} + c_{11}, b_{22} + c_{21}) & \max(b_{21} + c_{12}, b_{22} + c_{22}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a_{11} \otimes f_{11}) \oplus (a_{12} \otimes f_{21}) & (a_{11} \otimes f_{12}) \oplus (a_{12} \otimes f_{22}) \\ (a_{21} \otimes f_{11}) \oplus (a_{22} \otimes f_{21}) & (a_{21} \otimes f_{12}) \oplus (a_{22} \otimes f_{22}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(a_{11} + f_{11}, a_{12} + f_{21}) & \max(a_{11} + f_{12}, a_{12} + f_{22}) \\ \max(a_{21} + f_{11}, a_{22} + f_{21}) & \max(a_{21} + f_{12}, a_{22} + f_{22}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(3.2)

dengan:

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \max(a_{11} + \max(b_{11} + c_{11}, b_{12} + c_{21}), a_{12} + \max(b_{21} + c_{11}, b_{22} + c_{21})) \\
&= \max(\max(a_{11} + b_{11} + c_{11}, a_{11} + b_{12} + c_{21}), \\
&\quad \max(a_{12} + b_{21} + c_{11}, a_{12} + b_{22} + c_{21})) \\
&= \max(a_{11} + b_{11} + c_{11}, a_{11} + b_{12} + c_{21}, a_{12} + b_{21} + c_{11}, a_{12} + b_{22} + c_{21}) \\
g_{12} &= \max(a_{11} + \max(b_{11} + c_{12}, b_{12} + c_{22}), a_{12} + \max(b_{21} + c_{12}, b_{22} + c_{22})) \\
&= \max(\max(a_{11} + b_{11} + c_{12}, a_{11} + b_{12} + c_{22}), \\
&\quad \max(a_{12} + b_{21} + c_{12}, a_{12} + b_{22} + c_{22})) \\
&= \max(a_{11} + b_{11} + c_{12}, a_{11} + b_{12} + c_{22}, a_{12} + b_{21} + c_{12}, a_{12} + b_{22} + c_{22}) \\
g_{21} &= \max(a_{21} + \max(b_{11} + c_{11}, b_{12} + c_{21}), a_{22} + \max(b_{21} + c_{11}, b_{22} + c_{21})) \\
&= \max(\max(a_{21} + b_{11} + c_{11}, a_{21} + b_{12} + c_{21}), \\
&\quad \max(a_{22} + b_{21} + c_{11}, a_{22} + b_{22} + c_{21})) \\
&= \max(a_{21} + b_{11} + c_{11}, a_{21} + b_{12} + c_{21}, a_{22} + b_{21} + c_{11}, a_{22} + b_{22} + c_{21}) \\
g_{22} &= \max(a_{21} + \max(b_{11} + c_{12}, b_{12} + c_{22}), a_{22} + \max(b_{21} + c_{12}, b_{22} + c_{22})) \\
&= \max(\max(a_{21} + b_{11} + c_{12}, a_{21} + b_{12} + c_{22}), \\
&\quad \max(a_{22} + b_{21} + c_{12}, a_{22} + b_{22} + c_{22})) \\
&= \max(a_{21} + b_{11} + c_{12}, a_{21} + b_{12} + c_{22}, a_{22} + b_{21} + c_{12}, a_{22} + b_{22} + c_{22})
\end{aligned}$$

Jadi karena (1) = (2) maka $M_n(\mathbb{R}_{\max})$ bersifat asosiatif. Karena $M_n(\mathbb{R}_{\max})$ bersifat asosiatif terhadap operasi \otimes , maka $M_n(\mathbb{R}_{\max})$ merupakan semigrup.

B. Semigrup Reguler atas Matriks dalam Aljabar Max-Plus

Setelah memahami semigrup atas aljabar max-plus, selanjutnya mendalami konsep elemen reguler. Elemen reguler

memiliki sifat khusus dalam semigrup yang memungkinkan adanya elemen lain yang berinteraksi dengan elemen tersebut sedemikian rupa sehingga menghasilkan elemen itu sendiri. Berikut ini adalah definisi mengenai elemen reguler.

Definisi 3.2.1 (*Elemen Reguler atas Aljabar Max-plus*)

Misal $(M_n(\mathbb{R}_{\max}), \otimes)$ *adalah semigrup reguler. Elemen* $X \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ *disebut elemen reguler, ada elemen* $Y \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ *sedemikian sehingga*

$$X \otimes Y \otimes X = X.$$

Contoh 3.2.2 Misal matriks $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\infty & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$, dan

$Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\infty & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$, akan ditunjukkan $X \otimes Y \otimes X$:

$$\begin{aligned} X \otimes Y &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(0+0, 2+(-\infty)) & \max(0+(-1), 2+0) \\ \max(-\infty+0, 0+(-\infty)) & \max(-\infty+(-1), 0+0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(0, -\infty) & \max(-1, 2) \\ \max(-\infty, -\infty) & \max(-\infty, 0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kemudian hitung

$$\begin{aligned}
X \otimes Y \otimes X &= (X \otimes Y) \otimes X \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(0+0, 2+(-\infty)) & \max(0+2, 2+0) \\ \max(-\infty+0, 0+(-\infty)) & \max(-\infty+2, 0+0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(0, -\infty) & \max(2, 2) \\ \max(-\infty, -\infty) & \max(-\infty, 0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Karena hasilnya X , maka X adalah elemen reguler.

Setelah memahami konsep elemen reguler pada semigrup atas aljabar max-plus, langkah berikutnya adalah mengkaji konsep semigrup reguler. Semigrup reguler yaitu setiap elemen dalam semigrup tersebut merupakan elemen reguler. Oleh karena itu, berikut ini definisi semigrup reguler atas aljabar max-plus.

Definisi 3.2.3 (*Semigrup Reguler atas Aljabar Max-Plus*)

Misal $(M_n(\mathbb{R}_{\max}), \otimes)$ disebut semigrup jika setiap elemen $(M_n(\mathbb{R}_{\max}), \otimes)$ adalah elemen reguler.

Berdasarkan Proposisi (2.1.30) dijelaskan bahwa semigrup S dikatakan reguler jika dan hanya jika x mempunyai invers. Dalam aljabar klasik, sifat reguler pada semigrup menyatakan bahwa setiap elemen memiliki invers. Namun, di aljabar max-plus, proposisi ini tidak berlaku. Sebagai contoh, matriks A merupakan elemen reguler tetapi tidak memiliki invers. Hal ini dapat ditunjukkan melalui contoh penyangkal berikut: Misal $A, B \in$

$M_2(\mathbb{R}_{\max})$, dengan

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Akan ditunjukkan bahwa A elemen reguler.

Langkah pertama adalah menghitung $A \otimes B$:

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \max(0+0, -2+(-4)) & \max(0+(-7), -2+0) \\ \max(-3+0, 0+(-4)) & \max(-3+(-7), 0+0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \max(0, -6) & \max(-7, -2) \\ \max(-3, -4) & \max(-10, 0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya adalah menghitung $A \otimes B \otimes A$:

$$\begin{aligned} A \otimes B \otimes A &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \max(0+0, -2+(-3)) & \max(0+(-2), -2+0) \\ \max(-3+0, 0+(-3)) & \max(-3+(-2), 0+0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \max(0, -5) & \max(-2, -2) \\ \max(-3, -3) & \max(-5, 0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Karena $A \otimes B \otimes A = A$, maka A elemen reguler.

Setelah diketahui bahwa matriks A elemen reguler, selanjutnya matriks yang memenuhi sifat elemen reguler, yaitu matriks segitiga atas dan segitiga bawah. Berikut ini definisi matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah dalam aljabar max-plus.

Definisi 3.2.4 (*Matriks Segitiga Atas 2×2 dalam Aljabar Max-Plus*)
Himpunan semua matriks segitiga atas berukuran 2×2 dilambangkan dengan $UT_2(\mathbb{R}_{\max})$ didefinisikan sebagai

$$UT_2(\mathbb{R}_{\max}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R}_{\max} \right\}.$$

Contoh 3.2.5 Matriks $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\infty & 0 \end{pmatrix}$ merupakan matriks segitiga atas 2×2 dalam aljabar max-plus $A \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$.

Definisi 3.2.6 (*Matriks Segitiga Bawah 2×2 dalam Aljabar Max-Plus*)

Himpunan semua matriks segitiga bawah berukuran 2×2 dilambangkan dengan $LT_2(\mathbb{R}_{\max})$ didefinisikan sebagai

$$LT_2(\mathbb{R}_{\max}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ b & 0 \end{bmatrix} \mid b \in \mathbb{R}_{\max} \right\}.$$

Contoh 3.2.7 Matriks $A = \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ merupakan matriks segitiga bawah berukuran 2×2 dalam aljabar max-plus $A \in M_2\mathbb{R}_{\max}$.

Setelah diketahui definisi matriks segitiga atas dan segitiga bawah, langkah selanjutnya adalah membuktikan sifat tersebut melalui dua teorema berikut.

Teorema 3.2.8 *Jika A dan B adalah matriks segitiga dalam aljabar max-plus, dengan A adalah matriks idempoten dan $B \leq A$ maka $A \otimes B \otimes A = A$.*

Bukti.

Untuk Matriks Segitiga Atas

Ambil sebarang $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} \\ -\infty & 0 \end{pmatrix} \in UT_2(\mathbb{R}_{max})$ yang memenuhi

$A \otimes A = A$ selain itu terdapat matriks $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{11} \\ -\infty & 0 \end{pmatrix} \in UT_2(\mathbb{R}_{max})$ dengan $b_{11} \leq a_{11}$. Akan ditunjukkan bahwa $A \otimes B \otimes A = A$.

Diperoleh

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{pmatrix} 0 & a_{11} \\ -\infty & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & b_{11} \\ -\infty & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \max(0+0, a_{11} + (-\infty)) & \max(0+b_{11}, a_{11}+0) \\ \max(-\infty+0, 0+(-\infty)) & \max(-\infty+b_{11}, 0+0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \max(0, -\infty) & \max(b_{11}, a_{11}) \\ \max(-\infty, -\infty) & \max(-\infty, 0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Karena $b_{11} \leq a_{11}$, maka $\max(b_{11}, a_{11}) = a_{11}$ dengan demikian

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} \\ -\infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya, karena $A \otimes B = A$, maka:

$$A \otimes B \otimes A = A \otimes A = A.$$

Karena hasilnya adalah matriks A . Maka A elemen reguler. ■

Bukti.**Unuk Matriks Segitiga Bawah**

Ambil sebarang $A, B \in LT_2(\mathbb{R}_{\max})$, dengan

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

di mana $b_{21} \leq a_{21}$, dan A memenuhi $A \otimes A = A$. Akan ditunjukkan bahwa $A \otimes B \otimes A = A$. Diperoleh

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \max(0+0, -\infty+b_{21}) & \max(0+(-\infty), -\infty+0) \\ \max(a_{21}+0, 0+b_{21}) & \max(a_{21}+(-\infty), 0+0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ \max(a_{21}, b_{21}) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Karena $b_{21} \leq a_{21}$, maka $\max(a_{21}, b_{21}) = a_{21}$, sehingga diperoleh:

$$A \otimes B = A.$$

Selanjutnya, karena $A \otimes B = A$, maka:

$$A \otimes B \otimes A = A \otimes A = A.$$

Karena hasilnya adalah matriks A . Maka A elemen reguler. ■

Setelah diketahui bahwa matriks segitiga atas dan segitiga bawah memenuhi sifat elemen reguler, salah satu jenis matriks lain yang juga memenuhi sifat elemen reguler adalah matriks Linde-de la Puente. Matriks ini didefinisikan dengan elemen-elemen di

luar diagonal utama yang berada dalam interval tertentu. Berikut diberikan definisi dan lemma terkait matriks Linde-de la Puente.

Definisi 3.2.9 (Matriks Linde-de la Puente) (Linde, & de la Puente 2015)

Untuk sembarang bilangan real $r \leq 0$, menyatakan dengan $[2r, r]_n$ matriks $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sedemikian sehingga elemen diagonal $a_{ii} = 0$ untuk setiap $i \in [n]$, elemen non-diagonal $a_{ij} \in [2r, r]$ untuk $i, j \in [n]$ dengan $i \neq j$ disebut matriks Linde-de la Puente.

Contoh 3.2.10 (Matriks Linde-de la Puente)

Misal $r = -1$ maka matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ disebut matriks Linde-de la puente karena $a_{ii} = 0, a_{ij} \in [2(-1, -1)], i \neq j$.

Lemma 3.2.11 (Matriks Linde-de la Puente) (Linde, & de la Puente 2015)

Untuk setiap dua matriks Linde-de la Puente $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, $M_2(\mathbb{R}) \in [2r, r]$ dan $r \leq 0$ berlaku $A \otimes B = B \otimes A = A \oplus B$

Bukti. Misal $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, di mana $a_{11} = a_{22} = b_{11} = b_{22} = 0$, serta $a_{12}, a_{21}, b_{12}, b_{21} \in [2r, r]$. Berdasarkan definisi aljabar Max-Plus, diperoleh

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \max(a_{11} + b_{11}, a_{12} + b_{21}) & \max(a_{11} + b_{12}, a_{12} + b_{22}) \\ \max(a_{21} + b_{11}, a_{22} + b_{21}) & \max(a_{21} + b_{12}, a_{22} + b_{22}) \end{pmatrix}.$$

Substitusi $a_{11} = a_{22} = b_{11} = b_{22} = 0$, diperoleh:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \max(0 + 0, a_{12} + b_{21}) & \max(0 + b_{12}, a_{12} + 0) \\ \max(a_{21} + 0, 0 + b_{21}) & \max(a_{21} + b_{12}, 0 + 0) \end{pmatrix}.$$

Diperoleh

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \max(0, a_{12} + b_{21}) & \max(b_{12}, a_{12}) \\ \max(a_{21}, b_{21}) & \max(a_{21} + b_{12}, 0) \end{pmatrix}.$$

Hitung $B \otimes A$: Dengan cara serupa, diperoleh:

$$B \otimes A = \begin{pmatrix} \max(0, b_{12} + a_{21}) & \max(a_{12}, b_{12}) \\ \max(b_{21}, a_{21}) & \max(b_{21} + a_{12}, 0) \end{pmatrix}.$$

Karena \max dan operasi $(+)$ dalam aljabar Max-Plus bersifat komutatif, maka $A \otimes B = B \otimes A$. Hitung $A \oplus B$:

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} \max(a_{11}, b_{11}) & \max(a_{12}, b_{12}) \\ \max(a_{21}, b_{21}) & \max(a_{22}, b_{22}) \end{pmatrix}.$$

Substitusi $a_{11} = a_{22} = b_{11} = b_{22} = 0$, diperoleh:

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} 0 & \max(a_{12}, b_{12}) \\ \max(a_{21}, b_{21}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Dari hasil perhitungan $A \otimes B$, $B \otimes A$, dan $A \oplus B$, diperoleh:

$$A \otimes B = B \otimes A = A \oplus B.$$

Dengan demikian, Lemma terbukti. ■

Contoh 3.2.12 Misal matriks $A, B \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dan $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ adalah matriks *Linde-de la Puente* akan ditunjukkan $A \otimes B =$

$$B \otimes A = A \oplus B.$$

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \max(0+0, -4+(-5)) & \max(0+(-6), -4+0) \\ \max(-3+0, 0+(-5)) & \max(-3+(-6), 0+0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \max(0, -9) & \max(-6, -4) \\ \max(-3, -5) & \max(-9, 0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Karena matriks $A, B \in M_2\mathbb{R}$ bersifat komutatif, maka $A \otimes B = B \otimes A$.

Berdasarkan lemma 3.2.11 matriks *Linde-de la Puente* dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} A \otimes B &= A \oplus B \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \max(0, 0) & \max(-4, -6) \\ \max(-3, -5) & \max(0, 0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dengan demikian $A \otimes B = A \oplus B$.

Berdasarkan definisi dan lemma mengenai matriks *Linde-de la Puente*, bahwa jenis matriks ini memenuhi sifat elemen reguler. Hal ini diperkuat melalui pembuktian bahwa untuk $A, B \in [2r, r]$

dengan $B \leq A$, hubungan $A \otimes B \otimes A = A$ selalu terpenuhi. Berikut ini disajikan teorema yang menunjukkan bahwa matriks Linde-de la Puente memenuhi sifat elemen reguler beserta pembuktiannya.

Teorema 3.2.13 Jika $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{2 \times 2}, \mathbb{R}_{\max}^{2 \times 2}$ adalah matriks Linde-de la Puente dan $B \leq A$ maka $A \otimes B \otimes A = A$

Bukti. Berdasarkan lemma 3.2.11 dijelaskan bahwa untuk matriks $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ yang merupakan matriks *Linde-de la Puente* berlaku hubungan $A \otimes B = A \oplus B$. Berdasarkan hal ini, kita dapat menuliskan:

$$A \otimes B \otimes A = A \otimes (B \oplus A).$$

Karena $B \leq A$, maka diperoleh:

$$A \otimes B \otimes A = A \otimes A.$$

Berdasarkan matriks *Linde-de la Puente*, dapat disimpulkan bahwa:

$$A \otimes B \otimes A = A \oplus A = A.$$

■

Contoh 3.2.14 Misal matriks $A, B \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dan $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ adalah matriks *Linde-de la Puente* akan ditunjukkan $A \otimes B \otimes A = A$.

$$\begin{aligned} A \otimes B \otimes A &= A \otimes (B \oplus A) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \max(0, 0) & \max(-9, -6) \\ \max(-7, -5) & \max(0, 0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Karena $B \leq A$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
 A \otimes B \otimes A &= A \otimes A \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

diperoleh:

$$\begin{aligned}
 A \otimes B \otimes A &= A \oplus A \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \max(0,0) & \max(-6,-6) \\ \max(-5,-5) & \max(0,0) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh $A \otimes B \otimes A = A$.

Jadi di dalam aljabar max-plus himpunan yang memenuhi semigrup reguler adalah himpunan semua matriks segitiga atas, matriks segitiga bawah dan matriks *Linnde-de la Puente*.

BAB IV

PENUTUP

A. Kesimpulan

Semigrup dalam aljabar Max-Plus dibangun di atas himpunan matriks $M_n(\mathbb{R}_{\max})$ dengan operasi \otimes , yang bersifat asosiatif. Namun demikian, semigrup ini tidak bersifat reguler sepenuhnya karena tidak semua elemen X pada himpunan tersebut memenuhi relasi $X \otimes Y \otimes X = X$ untuk sembarang Y . Penelitian ini menunjukkan bahwa sifat idempoten pada matriks segitiga atas $UT_2(\mathbb{R}_{\max})$ dan matriks segitiga bawah $LT_2(\mathbb{R}_{\max})$ memenuhi semigrup reguler, terutama melalui relasi $A \otimes B \otimes A = A$ saat $B \leq A$. Selain itu, matriks Linde-de la Puente juga memenuhi sifat elemen reguler ketika $B \leq A$, dengan struktur yang ditentukan oleh elemen-elemen di luar diagonal utama yang berada dalam interval tertentu.

B. Saran

Pada skripsi ini, ruang lingkup yang dibahas terbatas pada elemen reguler pada semigrup atas matriks pada aljabar max-plus. Oleh karena itu, peneliti menyarankan untuk penelitian yang akan datang mengkaji elemen reguler pada struktur semigrup lain atau meneliti lebih lanjut sifat-sifat invers dan idempoten dalam aljabar max-plus guna memperoleh pemahaman yang lebih mendalam mengenai peran elemen-elemen tersebut dalam struktur semigrup tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- Aird, T. D. (2023). *Semigroup identities of tropical matrix semigroups*. PhD thesis, Department of Mathematics, School of Natural Sciences, University of Manchester.
- Bacelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., & Quadrat, J. P. (2001). *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*. Paris: INDRIA.
- Bylinski, C. (1989). Binary operations. *Journal of Formalized Mathematics*, 1(198), 9.
- Cain, A. J. (2020). *Nine chapters on the semigroup art: Lecture notes for a tour through semigroups*. Porto & Lisbon.
- Daviaud, L., Johnson, M., & Kambites, M. (2016). Identities in upper triangular tropical matrix semigroups and the bicyclic monoid. *Journal of Algebra*, 452, 311–345.
- Farlow, G. K. (2009). *Max-plus algebra* (Master's thesis). Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia.
- Green, J. A. (1951). On the structure of semigroups. *Annals of Mathematics*, 54(1), 163–172.
- Hebisch, U., & Weinert, H. J. (1996). Semirings and semifields. *Handbook of Algebra*, 1, 425–462.
- Heidergott, B., Olsder, G. J., & van der Woude, J. (2006). *Max Plus at work: Modeling and analysis of synchronized systems: A course on Max-Plus algebra and its applications*. Princeton University Press.

- Helena, M. (2016). Interval Max-Plus Matrix Equations. *Linear Algebra and its Applications*, 492, 111–127.
- Izhakian, Z., Knebusch, M., & Rowen, L. (2013). Algebraic structures of tropical mathematics. *arXiv preprint arXiv:1305.3906*.
- Izhakian, Z., & Margolis, S. W. (2010). Semigroup identities in the monoid of two-by-two tropical matrices. *Semigroup Forum*, 80, 191–218.
- Izhakian, Z., & Shustin, E. (2012). Idempotent semigroups and tropical algebraic sets. *Journal of European Mathematical Society*, 14, 489–520.
- J. Linde and M.J. de la Puente, Matrices commuting with a given normal tropical matrix. *Linear Algebra and its Applications*, vol. 482, pp. 101-121, 2015.
- Kramar Fijavž, M., Peperko, A., & Sikolya, E. (2017). Semigroups of max-plus linear operators. *Semigroup Forum*, 94(2), 243–266.
- Nambooripad, K. S. S. (1979). *Structure of regular semigroups. I* (No. 22-224). American Mathematical Society.
- Nobusawa, N. (1964). On a generalization of the ring theory. *Mathematics Journal, Volume Unknown*, 81–89.
- Redfield, J. Howard. The theory of group-reduced distributions. *American Journal of Mathematics*, vol. 49, no. 3, 1927, pp. 433-455.

Rudhito, M. A. (2016). *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya*. Yogyakarta: Program Studi Matematika Universitas Sanata Dharma.

Whitelaw, T. A. (1995). *Introduction to Abstract Algebra*. New York: Blackie Academic & Professional.

RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

1. Nama : Sherly Indah Pratiwi
2. Tempat & Tgl. Lahir : Jakarta, 29 Mei 2002
3. Alamat Rumah : Jl. Mangga 3 blok A no 4, RT. 007/ RW. 09,
Kec. Koja, Kel. Lagoa Jakarta Utara
4. Hp : 0895340814499
5. Email : sherlyndahp29@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. Pendidikan Formal
 - a. SDN Lagoa 01
 - b. SMPN 84 Jakarta
 - c. SMAN 75 Jakarta
 - d. UIN Walisongo Semarang

Semarang, 19 Desember 2024

Sherly Indah Pratiwi

NIM : 2108046078