

**PERUMUMAN T -DEKOMPOSISI NILAI SINGULAR
TERHADAP MATRIKS DUAL-NUMBER**

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika



Oleh : **RINA ANGGITA NAWANGWULAN**
NIM : 2108046085

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2024

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Rina Anggita Nawangwulan
NIM : 2108046085
Jurusan/Program Studi : Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

PERUMUMAN T -DEKOMPOSISI NILAI SINGULAR TERHADAP MATRIKS DUAL-NUMBER

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 18 Desember 2024
Pembuat pernyataan,



Rina Anggita Nawangwulan
NIM : 2108046085



KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **PERUMUMAN T -DEKOMPOSISI NILAI SINGULAR
TERHADAP MATRIKS DUAL-NUMBER**
Penulis : Rina Anggita Nawangwulan
NIM : 2108046085
Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang tugas akhir oleh Dewan Penguji
Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima
sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu
Matematika.

Semarang, 24 Desember 2024

DEWAN PENGUJI

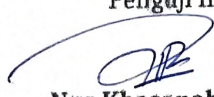
Penguji I,


Prihadi Kurniawan, M.Si
NIP : 19901226 201903 2 017

Penguji II,


Dinni Rahma Oktaviani, M.Si
NIP : 19941009 201903 2 017


Penguji III,


Nur Khasanah, M.Si
NIP : 19911121 201903 2 017

Penguji IV,


**Hidayati Shaleh, S.Si.,
M.Sc**
NIP : 19760426 200604 2 001

Pembimbing,


Dinni Rahma Oktaviani, M.Si
NIP : 19941009 201903 2 017

NOTA DINAS

Semarang, 18 Desember 2024

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : PERUMUMAN T -DEKOMPOSISI NILAI SINGULAR
TERHADAP MATRIKS DUAL-NUMBER
Nama : Rina Anggita Nawangwulan
NIM : 2108046085
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing,



Dinni Rahma Oktaviani, M.Si
NIP : 19941009 201903 2 017

ABSTRAK

Perumuman yang dilakukan pada penelitian ini bertujuan untuk memperluas konsep dekomposisi nilai singular yang umumnya ada pada matriks bilangan real sehingga dapat diterapkan ke matriks *dual number*. *Dual number* memiliki bentuk $a + b\epsilon$ dengan sifat $\epsilon^2 = 0$, yang kemudian akan dibentuk matriks *dual number* yaitu matriks yang elemen-elemennya *dual number*. Matriks *dual number* tersebut akan didekomposisi menggunakan dekomposisi nilai singular yang secara umum berlaku pada matriks real, sehingga diperoleh bentuk $M = U\Sigma V$. Melalui pendekatan teoretis, dengan cara pendefinisian matriks *dual number* dan sifat-sifat operasinya kemudian diikuti dengan perluasan konsep dekomposisi nilai singular untuk matriks *dual number*. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pembuktian teorema yang saling berkaitan, sehingga membuktikan bahwa *T*-Dekomposisi Nilai Singular dapat diperumum untuk matriks *dual number* dengan penyesuaian pada komponen real dan infinitesimal.

Kata kunci : Perumuman, Dekomposisi Nilai Singular, *Dual Number*

KATA PENGANTAR

Dengan memanjatkan puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul "**Perumuman T -Dekomposisi Nilai Singular terhadap Matriks $Dual-Number$** ", sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Sarjana (S1) Jurusan Matematika.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah memberikan bantuan, dukungan, serta bimbingan. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Prof. Nizar, M.Ag, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk menempuh pendidikan di universitas ini dan mendukung terselenggaranya berbagai fasilitas pendidikan yang sangat membantu dalam penyelesaian skripsi ini.
2. Ibu Any Muanalifah, M.Si, Ph.D., selaku Ketua Program Studi Matematika, yang selalu memberikan arahan serta kebijakan yang mendukung kelancaran studi dan penyusunan skripsi ini.
3. Ibu Dinni Rahma Oktaviani, M.Si., selaku dosen pembimbing yang telah memberikan bimbingan, saran, dan motivasi dalam penyusunan skripsi ini. Berkat arahan dan kesabaran Ibu, penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

4. Seluruh Dosen Program Studi Matematika, yang telah memberikan ilmu dan wawasan yang sangat berharga selama penulis menempuh pendidikan.
5. Bapak Mulyadi dan Ibu Murni sebagai Orang Tua penulis yang selalu berharap penulis segera lulus. Terima kasih atas dukungan, dorongan, doa, dan harapan yang menjadi sumber motivasi terbesar bagi penulis untuk menyelesaikan skripsi ini. Terima kasih atas cinta, pengorbanan, dan kesabaran yang tiada henti.
6. Adik penulis, Rachmad Yogi Allatief yang tanpa disadari telah menguji kesabaran dan memberikan semangat tambahan untuk menyelesaikan skripsi ini. Kehadiranmu membawa warna tersendiri dalam proses ini. Semoga bisa selalu saling mendukung dan tumbuh bersama.
7. Anabul kesayangan yang telah menjadi teman setia selama menyusun skripsi ini. Kehadiranmu membawa kebahagiaan dan kenyamanan yang tak tergantikan. Meskipun kini entah dimana, kenangan bersamamu akan selalu tersimpan dalam hati.
8. Teman-teman seperjuangan di Program Studi Matematika, khususnya kelas C angkatan 2021, yang selalu menjadi tempat berbagi cerita, dukungan, dan motivasi selama proses penyelesaian skripsi ini.
9. Seseorang yang namanya tidak dapat disebutkan, terima kasih atas luka dan patah hati yang memotivasi penulis menyelesaikan skripsi ini dan menjadi pribadi yang lebih

baik. Terima kasih telah menjadi bagian dari pendewasaan dan mengajarkan keikhlasan.

10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu, namun telah memberikan bantuan, dukungan, dan doa selama proses penyelesaian skripsi ini.

Semoga kebaikan semuanya menjadi amal ibadah yang diterima dan mendapat pahala yang berlimpah dari Allah SWT. Aamiin.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis terbuka terhadap saran dan kritik yang membangun demi kesempurnaan karya ini. Semoga karya tulis yang sederhana ini dapat menjadi bacaan yang bermanfaat dan dapat dikembangkan bagi peneliti-peneliti selanjutnya.

Semarang, 18 Desember 2024

Rina Anggita Nawangwulan
NIM : 2108046085

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iv
NOTA PEMBIMBING I	iv
ABSTRAK	v
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	ix
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Rumusan Masalah	4
C. Tujuan Penelitian	4
D. Manfaat Penelitian	4
E. Batasan Penelitian	4
F. Metode Penelitian	5
G. Sistematika Penulisan	5
BAB II LANDASAN PUSTAKA	7
A. Matriks	7
1. Pengertian Matriks	7
2. Operasi Matriks dalam Aljabar Linier	8
3. Jenis-Jenis Matriks	13
4. Struktur Ruang Vektor	20
B. <i>Dual Number</i>	35
C. Dekomposisi Nilai Singular	36
BAB III PEMBAHASAN	55
A. Teorema Spektral	56
B. Teorema Keunikan Nilai Eigen <i>dual number</i>	61
C. <i>T</i> -Dekomposisi Nilai Singular Pada Matriks <i>dual number</i>	65
BAB IV PENUTUP	85
A. Kesimpulan	85
B. Saran	87
DAFTAR PUSTAKA	88

DAFTAR RIWAYAT HIDUP 91

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Aljabar didefinisikan sebagai representasi matematika yang melibatkan variabel, konstanta, operasi hitung, dan penggunaan simbol serta huruf untuk mengekspresikan hubungan matematika (Andriani, 2015). Aljabar sebagai cabang matematika, umumnya mengembangkan konsep dari aritmetika dan merupakan pondasi penting bagi disiplin ilmu matematika lainnya (Stacey and MacGregor, 1999). Aljabar mencakup berbagai bidang, seperti aljabar abstrak, aljabar komutatif, dan aljabar linier. Di antara bidang-bidang tersebut, aljabar linier menjadi salah satu topik utama yang banyak dikembangkan.

Aljabar linier mencakup berbagai konsep penting, seperti matriks, transformasi linier, vektor, dan determinan. Di antara konsep-konsep tersebut, matriks menjadi topik utama yang dibahas. Matriks merupakan sekumpulan bilangan-bilangan yang tersusun secara sistematis dalam bentuk baris dan kolom, membentuk struktur persegi atau persegi panjang, yang dinyatakan di antara dua tanda kurung () atau [] (Kurniawan, 2020). Matriks yang memiliki m baris dan n kolom disebut sebagai matriks dengan ukuran $m \times n$. Matriks dapat dilambangkan dengan huruf kapital seperti A, B, C , dan seterusnya, sedangkan entri atau elemennya dilambangkan dengan huruf kecil seperti a_{11}, a_{12} , dan seterusnya (Ruminta, 2014). Elemen a_{ij} dalam matriks menunjukkan elemen pada baris ke- i dan kolom ke- j .

Pada konsep yang lebih lanjut, matematika memperkenalkan

dual number, yaitu konsep yang memperluas bilangan real dengan menambahkan elemen ϵ yang umumnya ditulis sebagai $z = a + b\epsilon$ dengan sifat bahwa $\epsilon^2 = 0$ dan $\epsilon \neq 0$ (Gutin, 2022). *Dual number* ini dapat menjadi elemen dari suatu matriks, yang kemudian disebut matriks *dual number*, yang mana elemen-elemennya merupakan *dual number*.

Dalam menganalisis struktur matriks dapat menggunakan dekomposisi matriks (Gu and Luh, 1987). Hal ini akan mengarah pada pemahaman bagaimana dekomposisi matriks dapat diperluas dan diterapkan pada matriks *dual number*. Dekomposisi matriks merupakan proses mengubah suatu matriks menjadi beberapa matriks lain yang apabila dijumlahkan atau dikalikan akan membentuk kembali matriks awal, dimana proses penguraian suatu matriks ini disesuaikan dengan sifat-sifat tertentu (Kasse and Nurjannah, 2016). Tujuan dari dekomposisi ini adalah untuk mempermudah operasi atau analisis lebih lanjut terhadap matriks tersebut. Beberapa jenis dekomposisi yang umum digunakan antara lain dekomposisi LU, dekomposisi QR, dekomposisi nilai singular, dan lain sebagainya (Gregoria, 2010).

Pada penelitian ini, fokus utama adalah dekomposisi nilai singular, atau yang dikenal dengan *Singular Value Decomposition* (SVD), yang mana proses analisisnya berkaitan dengan nilai singular suatu matriks. Dekomposisi nilai singular untuk matriks A ukuran $m \times n$ dinyatakan dalam bentuk $A = U\Sigma V^T$ dimana Σ merupakan matriks diagonal berukuran $m \times n$ serta matriks U ukuran $m \times m$ dan V ukuran $n \times n$ adalah matriks ortogonal (Ghoffari, 2023). Dikatakan matriks ortogonal jika suatu matriks persegi A memiliki sifat $A^{-1} = A^T$ (Ruminta, 2014). Pembentukan matriks ortogonal U dan V serta matriks diagonal Σ memerlukan

nilai eigen dan vektor eigen. Persamaan $Ax = \lambda x$ dengan $x \neq 0$, dapat dijelaskan bahwa skalar λ disebut nilai eigen dari A dan vektor $x \neq 0$ disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan λ (Gregoria, 2010).

Dekomposisi nilai singular telah banyak dikembangkan dan diterapkan secara luas pada matriks real, misalnya penelitian yang dilakukan oleh J. Raghavendar dan V. Dharmiah yang menjelaskan bagaimana dekomposisi nilai singular menguraikan matriks menjadi tiga komponen dalam matriks bilangan real (Raghavendar and Dharmiah, 2017). Meskipun penelitian yang membahas mengenai *dual number* masih terbatas, terdapat penelitian yang dilakukan oleh Liqun Qi dan Chunfeng Cui yang berkaitan dengan matriks *dual number* yang selalu memiliki nilai eigen *dual number* positif dengan vektor eigen *dual number* positif (Qi and Cui, 2023).

dual number memiliki struktur yang berbeda dari bilangan real karena adanya penambahan ϵ , yang mana himpunan bilangan real dilambangkan dengan \mathbb{R} dan dapat dinyatakan $a \in \mathbb{R}$ (Hernadi, 2008) sehingga pendekatan standar pada matriks real tidak dapat diterapkan secara langsung. Maka dari itu, dalam penelitian ini akan dibahas lebih lanjut tentang perumusan dekomposisi nilai singular terhadap matriks dual-number, yang secara khusus mengacu pada jurnal *Generalizations of Singular Value Decomposition to Dual-Numbered Matrices* oleh Ran Gutin (Gutin, 2022).

Gutin (2022) memperkenalkan dua jenis dekomposisi nilai singular dari matriks *dual number*, yaitu T -Dekomposisi Nilai Singular dan $*$ -Dekomposisi Nilai Singular. T -Dekomposisi Nilai Singular merupakan dekomposisi nilai singular pada matriks

bilangan real sedangkan *-Dekomposisi Nilai Singular merupakan dekomposisi nilai singular pada matriks bilangan kompleks. Pada penelitian ini akan terfokus pada perumuman T -Dekomposisi Nilai Singular karena perumuman yang dilakukan untuk memperluas konsep dekomposisi nilai singular yang umumnya ada pada matriks bilangan real sehingga dapat diterapkan ke matriks *dual number*.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana perumuman T -Dekomposisi Nilai Singular terhadap matriks *dual number*?

C. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah menjelaskan perumuman T -Dekomposisi Nilai Singular terhadap matriks *dual number*.

D. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah dapat memberikan wawasan tentang perumuman T -Dekomposisi Nilai Singular terhadap matriks *dual number*.

E. Batasan Penelitian

Batasan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Penelitian ini dibatasi pada matriks *dual number*, yang dinyatakan dalam bentuk $a + b\epsilon$ dengan sifat $\epsilon^2 = 0$.

2. Analisis akan difokuskan pada penerapan T -Dekomposisi Nilai Singular, tanpa mempertimbangkan teknik dekomposisi lainnya.

F. Metode Penelitian

Berikut ini disajikan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini.

1. Mempelajari definisi, operasi, dan jenis matriks.
2. Mempelajari dan menerapkan dekomposisi nilai singular pada matriks.
3. Mengkaji definisi dan konsep dasar *dual number* dari berbagai literatur.
4. Meninjau literatur tentang matriks *dual number*.
5. Meninjau dan mempelajari berbagai literatur terkait definisi dan teorema yang relevan tentang T -Dekomposisi Nilai Singular.
6. Membuktikan teorema yang relevan tentang T -Dekomposisi Nilai Singular.
7. Menerapkan T -Dekomposisi Nilai Singular pada matriks *dual number*.

G. Sistematika Penulisan

Penelitian ini ditulis dalam 4 bab serta beberapa sub-bab guna mempermudah dalam memahami keseluruhan isi di dalamnya.

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. BAB I PENDAHULUAN

Dalam bab ini berisi latar belakang, yang kemudian disusul dengan rumusan masalah, tujuan, manfaat, batasan, metode serta sistematika penulisan penelitian.

2. BAB II LANDASAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan dasar teori yang perlu diketahui. Yakni teori tentang *dual number* dan matriks yang terbentuk atasnya, serta dekomposisi nilai singular.

3. BAB III PEMBAHASAN

Bab ini merupakan inti kajian yang membahas teorema pembuktian tentang T -Dekomposisi Nilai Singular yang dapat diperumum dari matriks bilangan real ke matriks *dual number*.

4. BAB IV PENUTUP

Bab ini berisikan kesimpulan dari kajian pada bab sebelumnya serta saran penelitian selanjutnya.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

Bab ini akan mengulas dasar-dasar teori matriks dalam aljabar linier, termasuk *dual number* dan dekomposisi nilai singular. Topik yang akan dibahas meliputi konsep matriks, jenis-jenis matriks, operasi matriks dalam aljabar linier, *dual number* dan matriks *dual number*, serta dekomposisi nilai singular dalam konteks bilangan real. Struktur penulisan bab ini mencakup teori kemudian diikuti oleh contoh yang mengilustrasikan konsep yang telah dijelaskan.

A. Matriks

1. Pengertian Matriks

Matriks merupakan sekumpulan bilangan-bilangan yang tersusun secara sistematis dalam bentuk baris dan kolom, membentuk struktur persegi atau persegi panjang, yang dinyatakan di antara dua tanda kurung () atau [] (Kurniawan, 2020). Matriks dilambangkan dengan huruf kapital seperti A , B , C , dan seterusnya. Matriks dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$. Elemen matriks A yang berada di baris ke i dan kolom ke j umumnya dilambangkan dengan a_{ij} . Matriks yang memiliki m baris dan n kolom disebut sebagai matriks dengan ukuran $m \times n$. Himpunan matriks dengan elemen bilangan real berukuran $m \times n$ disebut sebagai $\mathbb{R}^{m \times n}$, dan hal ini juga berlaku untuk himpunan-himpunan lainnya.

2. Operasi Matriks dalam Aljabar Linier

a. Penjumlahan Matriks

Definisi 2.1.1 (Sari, 2012)

Misal terdapat matriks A dan matriks B , maka operasi penjumlahannya:

$$A + B = [(a + b)_{ij}] = a_{ij} + b_{ij}$$

dimana $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$

Pada penjumlahan dua matriks atau lebih haruslah memiliki ukuran yang sama.

Contoh 2.1.2

Diketahui matriks A dan B :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka matriks $A + B$:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 + 1 & 1 + 0 & -2 + 3 \\ 0 + 2 & -1 + 1 & 3 + -1 \\ 0 + 3 & 0 + -2 & 2 + 2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

b. Perkalian Matriks Dengan Skalar

Definisi 2.1.3 (Sari, 2012)

Misal $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dan skalar $k \in \mathbb{R}$ maka operasi perkalian matriks dengan skalar, dimana $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$ adalah sebagai berikut:

$$k \times A = k \times [a_{ij}] = [k \times a_{ij}]$$

Maka matriks $k \times A$ adalah hasil dari perkalian setiap elemen matriks A dengan nilai k , atau dapat dikatakan operasi skalar pada matriks melibatkan perkalian setiap elemen matriks dengan nilai skalar tertentu.

Contoh 2.1.4

Diketahui k dan matriks A :

$$k = 3, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Maka perkalian skalar k dengan matriks A :

$$k \times A = 3 \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$k \times A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

c. Perkalian Matriks

Definisi 2.1.5 (Sari, 2012)

Misal $A \in \mathbb{R}^{m \times r}$ dan matriks $B \in \mathbb{R}^{r \times n}$ maka operasi perkalian matriks menghasilkan matriks $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$$A \times B = C$$

Dua matriks dapat dikalikan jika banyak kolom matriks pertama sama dengan banyak baris matriks kedua.

Contoh 2.1.6

Diketahui matriks A dan B :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Maka matriks $A \times B$:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 \times 0 + (-2) \times 1 & 1 \times 3 + (-2) \times (-1) \\ 0 \times 0 + 3 \times 1 & 0 \times 3 + 3 \times (-1) \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

d. Panjang Vektor

Definisi 2.1.7 (Ghoffari, 2023) Misal \vec{v} adalah vektor di \mathbb{R} , maka

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

dimana v_1, v_2, \dots, v_n adalah komponen vektor \vec{v} yang merupakan skalar bilangan real.

Definisi 2.1.8 (Ghoffari, 2023)

Misal suatu vektor sebarang \vec{v} , maka panjang vektor \vec{v} disebut *norm* dari \vec{v} dan dinyatakan $\|\vec{v}\|$, maka

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k v_i^2}$$

dimana $v_i = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Contoh 2.1.9

Diketahui \vec{v} sebagai berikut:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

e. Tranpose Matriks

Definisi 2.1.10 (Sari, 2012)

Misalkan $A = (a_{ij})$ berukuran $m \times n$, maka transpose dari matriks A , yaitu A^T dengan ukuran $n \times m$. $A^T = (a_{ji})$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, m$.

Dalam hal ini:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Sehingga menjadi:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.1.11

Diketahui matriks A :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Jenis-Jenis Matriks

a. Matriks Persegi

Definisi 2.1.12 (Sari, 2012)

Misal matriks A memiliki banyak n baris dan n kolom, maka matriks A ukuran $n \times n$ adalah matriks persegi.

Contoh 2.1.13

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

b. Matriks Diagonal

Definisi 2.1.14 (Sari, 2012)

Misal matriks A ukuran $n \times n$ dengan elemen a_{ij} untuk $i \neq j$ bernilai nol, sedangkan elemen diagonal utamanya terdiri dari elemen a_{ii} dimana $i = 1, 2, \dots, n$ dapat memiliki nilai selain nol, maka A disebut matriks diagonal.

Contoh 2.1.15

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

c. Matriks Identitas

Definisi 2.1.16 (Sari, 2012)

Matriks identitas adalah matriks diagonal dengan semua elemen-elemen pada diagonal utamanya sama dengan satu.

Matriks identitas dinyatakan dengan $I = (a_{ij})$ dimana

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = j, \\ 0, & \text{jika } i \neq j. \end{cases}$$

Contoh 2.1.17

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d. Invers Matriks

Definisi 2.1.18 (Sari, 2012)

Misal A merupakan matriks persegi, jika

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

dimana I adalah matriks identitas, maka A dikatakan dapat dibalik (invertible) dan matriks A^{-1} disebut sebagai invers dari matriks A .

Contoh 2.1.19

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.20 (Sari, 2012)

Misal A adalah matriks persegi, determinan matriks A dapat

didefinisikan dengan $\det(A)$. Jika $\det(A) \neq 0$, maka matriks A invertible dan $\det(A) = 0$ maka matriks tersebut tidak memiliki invers.

Contoh 2.1.21

Diketahui matriks A :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$$\det(A) = (3)(4) - (5)(2) = 12 - 10 = 2$$

e. Matriks Ortogonal

Definisi 2.1.22 (Ghoffari, 2023)

Misal suatu matriks persegi A dengan $A^{-1} = A^T$ disebut matriks ortogonal.

Diperoleh sifat matriks ortogonal sebagai berikut:

$$AA^T = A^T A = I$$

Contoh 2.1.23

Diketahui matriks A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks A merupakan matriks ortogonal karena

$$AA^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga $AA^T = A^T A = I$

f. Matriks Ortonormal

Definisi 2.1.24 (Ghoffari, 2023)

Jika vektor-vektor kolom dari suatu matriks ortogonal adalah vektor satuan (memiliki norm 1) maka matriks ortogonal tersebut disebut matriks ortonormal.

Contoh 2.1.25

Diketahui matriks A :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

dimana,

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Cek ortogonalitas

$$AA^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$AA^T = A^T A = I$, maka matriks A ortogonal.

Cek panjang vektor untuk A

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

Karena kedua kolom memiliki norm 1, maka keduanya adalah vektor satuan.

Jadi matriks A adalah matriks ortonormal karena kolom-kolomnya saling ortogonal dan merupakan vektor satuan.

g. Matriks Simetris

Definisi 2.1.26 (Thresye, Huda, et al., 2018)

Setiap matriks persegi jika $A = A^T$, yaitu $a_{ij} = a_{ji}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, n$ maka dikatakan matriks simetris.

Contoh 2.1.27

Diketahui matriks A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 7 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 7 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Karena $A = A^T$, maka matriks A simetris.

h. Matriks Positif Definit

Definisi 2.1.28 (Arma, Yanita, and Bakar, 2019)

Bentuk kuadrat dari x_1, x_2, \dots, x_n adalah:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

yang mana A merupakan matriks ukuran $n \times n$.

Definisi 2.1.29 (Arma, Yanita, and Bakar, 2019)

Setiap matriks simetris A dikatakan positif definit jika memenuhi:

$$\vec{x}^T A \vec{x} > 0, \quad \vec{x} \neq 0$$

yang mana $x^T Ax$ merupakan bentuk kuadrat yang positif definit.

Contoh 2.1.30

Diketakui matriks simetris A sebagai berikut berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan A positif definit.

Penyelesaian

Misalkan $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, maka

$$\begin{aligned} \vec{x}^T A \vec{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 2x_2^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 > 0 \end{aligned}$$

Jadi, matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah positif definit karena bentuk kuadratnya $\vec{x}^T A \vec{x}$ bernilai non-negatif untuk setiap $x \neq 0$.

4. Struktur Ruang Vektor

a. Ruang Vektor

Definisi 2.1.31 (Mudhiani, Arnawa, and Bakar, 2019)

Misalkan V adalah himpunan. V disebut ruang vektor terhadap suatu lapangan bilangan skalar F , dimana semua elemennya disebut vektor, yang memuat 0 dan dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar, sehingga memenuhi:

Untuk semua $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$, berlaku:

$$(a) \vec{u} + \vec{v} \in V$$

$$(b) 0 + \vec{v} = \vec{v}$$

$$(c) \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$(d) \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

Untuk semua $\vec{u}, \vec{v} \in V$ dan $r, s \in F$ berlaku:

$$(a) r\vec{v} \in V$$

$$(b) 1\vec{v} = \vec{v}$$

$$(c) 0\vec{v} = 0$$

$$(d) r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$$

$$(e) (r + s)\vec{v} = r\vec{v} + s\vec{v}$$

$$(f) (rs)\vec{v} = r(s\vec{v})$$

Definisi 2.1.32 (Mudhiani, Arnawa, and Bakar, 2019)

Misalkan V adalah ruang vektor, maka subruang dari ruang vektor V adalah suatu himpunan bagian $U \subseteq V$ yang dilengkapi dengan operasi yang sama dengan V dan tetap memenuhi sifat-sifat ruang vektor.

Contoh 2.1.33

Misalkan V adalah ruang vektor \mathbb{R}^3 . Jika

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

dengan $x = y$, akan ditunjukkan bahwa $U \subseteq V$.

(a) Mempunyai elemen identitas (vektor nol)

Vektor nol dalam ruang vektor \mathbb{R}^3 adalah $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Substitusi $x = y = 0$ dan $z = 0$, sehingga $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Oleh karena itu, vektor nol ada dalam himpunan U .

(b) Tertutup terhadap penjumlahan

Misalkan $\vec{u}, \vec{v} \in U$, maka

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$$

Diketahui $x = y$ sehingga $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. Diperoleh $\vec{u} + \vec{v} \in U$ Artinya, U tertutup terhadap operasi penjumlahan.

(c) Tertutup terhadap penjumlahan skalar

Misalkan $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ z \end{bmatrix}$ adalah vektor dalam U , dan s adalah suatu skalar. Perkalian skalar $s \cdot \vec{u}$ adalah:

$$s \cdot \vec{u} = s \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot x \\ s \cdot y \\ s \cdot z \end{bmatrix}.$$

Hasil perkalian skalar ini juga tetap memenuhi $x = y$, sehingga $s\vec{u} \in U$. Artinya, U tertutup terhadap perkalian skalar.

Jadi, U adalah subruang dari ruang vektor \mathbb{R}^3 .

b. Kombinasi Linier

Definisi 2.1.34 (Sari, 2012)

Vektor \vec{v} dikatakan kombinasi linier dari vektor-vektor $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ jika memenuhi $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n$ atau:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n c_i \vec{v}_i$$

dimana c_1, c_2, \dots, c_n adalah skalar.

Contoh 2.1.35

Misalkan terdapat $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ di \mathbb{R}^2 .

Kombinasi linier dari vektor \vec{v}_1 dan \vec{v}_2 dapat ditulis sebagai:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$$

di mana c_1 dan c_2 adalah skalar yang dapat dipilih.

Misalkan $c_1 = 2$ dan $c_2 = -1$, maka kombinasi liniernya adalah:

$$\begin{aligned} 2\vec{v}_1 + (-1)\vec{v}_2 &= 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jadi, kombinasi linier dari \vec{v}_1 dan \vec{v}_2 dengan skalar $c_1 = 2$ dan $c_2 = -1$ menghasilkan vektor:

$$2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

c. Basis

Definisi 2.1.36 (Mudhiani, Arnawa, and Bakar, 2019)

Himpunan vektor $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ pada ruang vektor V dikatakan basis jika:

(a) Bebas linier, yaitu jika persamaan

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_r\vec{v}_n = \vec{0}$$

hanya memiliki solusi trivial, yaitu

$$c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0$$

(b) Merentang, yaitu setiap vektor $\vec{u} \in V$ dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari basis:

$$\vec{u} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n,$$

dengan $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Contoh 2.1.37

Misalkan diberikan dua vektor di ruang \mathbb{R}^2 :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Untuk menunjukkan bebas linier, jika terdapat skalar c_1 dan c_2 sehingga:

$$\begin{aligned} c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

menghasilkan $c_1 = 0$ dan $c_2 = 0$, yang menunjukkan bahwa kombinasi linier ini hanya mungkin jika $c_1 = c_2 = 0$. Oleh karena itu, vektor-vektor ini bebas linier.

Untuk menunjukkan Merentang di \mathbb{R}^2 , misal setiap vektor $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari basis tersebut:

$$\vec{u} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, setiap vektor \vec{u} merupakan hasil

penjumlahan skalar dari vektor-vektor basis $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

d. Transformasi Linier

Definisi 2.1.38 (Mudhiani, Arnawa, and Bakar, 2019)

Fungsi $T : V \rightarrow W$ disebut transformasi linier jika:

(a) Aditivitas, yaitu untuk semua $\vec{u}, \vec{v} \in V$:

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}).$$

(b) Homogenitas, yaitu untuk semua $\vec{u} \in V$ dan $c \in \mathbb{R}$:

$$T(c\vec{u}) = cT(\vec{u}).$$

Definisi 2.1.39 (Mudhiani, Arnawa, and Bakar, 2019)

Jika $T : V \rightarrow W$ adalah transformasi linier, maka transformasi matriks dapat direpresentasikan oleh matriks A yang mengubah koordinat vektor $\vec{v} \in V$ menjadi koordinat vektor $T(\vec{v}) \in W$, dapat dinyatakan sebagai:

$$T(\vec{v}) = A\vec{v}$$

Contoh 2.1.40

Misalkan pemetaan $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dengan

$$f \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan bahwa f transformasi linier.

Penyelesaian

Ambil vektor sembarang $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ dan $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

(a) Aditivitas

$$\begin{aligned}
 f(\vec{x} + \vec{y}) &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) \\ -(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (x_1 + 3x_2) + (y_1 + 3y_2) \\ (-x_1 + 2x_2) + (-y_1 + 2y_2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (x_1 + 3x_2) \\ (-x_1 + 2x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (y_1 + 3y_2) \\ (-y_1 + 2y_2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
 &= f(\vec{x}) + f(\vec{y})
 \end{aligned}$$

(b) Homogenitas

$$\begin{aligned}
 f(k\vec{x}) &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} kx_1 + 3kx_2 \\ -kx_1 + 2kx_2 \end{bmatrix} \\
 &= k \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \\
 &= kf(\vec{x})
 \end{aligned}$$

e. Kernel dan Peta

Definisi 2.1.41 (Sintiari et al., 2024)

Transformasi linier $T : V \rightarrow W$, di mana V dan W adalah ruang vektor, maka

$$(a) \ker(T) = \{\vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = 0\}$$

$$(b) \text{Im}(T) = \{T(\vec{v}) \in W \mid \vec{v} \in V\}$$

Contoh 2.1.42

Misalkan transformasi linier $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ didefinisikan oleh:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x + 2y \\ y + 3z \end{bmatrix}$$

Akan dicari $\ker(T)$ dan $\text{Im}(T)$.

Penyelesaian

$$\ker(T) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{v}) = 0\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x + 2y \\ y + 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Untuk } \begin{bmatrix} x + 2y \\ y + 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = -3z$$

$$x = -2y$$

$$x = -2(-3z) = 6z$$

Sehingga,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6z \\ -3z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} z$$

Kernel dari T adalah:

$$\ker(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} z \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

Peta dari T adalah:

$$\begin{aligned} \text{Im}(T) &= \{T(\vec{v}) \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \left\{ T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x + 2y \\ y + 3z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} z \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

f. Dimensi

Definisi 2.1.43 (Wibowo, 2022)

Dimensi dari ruang vektor V dinotasikan dengan $\dim(V)$, didefinisikan sebagai banyaknya vektor-vektor pada suatu basis untuk V . Selain itu, ruang vektor nol didefinisikan

berdimensi nol.

Teorema 2.1.44 (Sintiari et al., 2024)

Jika $T : V \rightarrow W$ adalah transformasi linier, maka berlaku

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{im}(T)),$$

di mana $\dim(\ker(T))$ adalah dimensi kernel (ruang null) dari T , dan $\dim(\operatorname{im}(T))$ adalah dimensi ruang peta T .

Bukti

Misalkan $T : V \rightarrow W$ adalah transformasi linier. Definisikan:

$$\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$$

$$\operatorname{im}(T) = \{T(v) : v \in V\}.$$

Jika $\ker(T)$ memiliki basis $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, sehingga $\dim(\ker(T)) = k$. Dan $\operatorname{im}(T)$ memiliki basis $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, di mana setiap $w_i = T(v_i)$, dan $\dim(\operatorname{im}(T)) = m$.

Setiap vektor $v \in V$ dapat dipisahkan sebagai $v = v_{\ker} + v_{\operatorname{im}}$, di mana:

$$v_{\ker} \in \ker(T) \quad \text{dan} \quad v_{\operatorname{im}} \in \operatorname{im}(T).$$

Dengan demikian, ruang V dapat dibagi menjadi dua subruang $\ker(T)$ dan $\operatorname{im}(T)$.

$\ker(T)$ dan $\operatorname{im}(T)$ adalah subruang saling bebas, karena tidak

ada elemen non-nol di $\ker(T)$ yang dipetakan ke ruang peta (setiap vektor non-nol di $\ker(T)$ dipetakan ke 0 oleh T). Oleh karena itu, basis dari V dapat dianggap sebagai gabungan basis dari $\ker(T)$ dan $\text{im}(T)$.

Maka dimensi ruang V adalah jumlah dimensi dari basis $\ker(T)$ dan $\text{im}(T)$:

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{im}(T)).$$

Contoh 2.1.45

Misalkan dimiliki ruang vektor $V = \mathbb{R}^3$. Basis untuk \mathbb{R}^3 adalah kumpulan tiga vektor yang saling bebas linier, misalnya:

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Sehingga dimensi dari ruang vektor $V = \mathbb{R}^3$ adalah 3.

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3.$$

g. Endomorfisme Linier

Definisi 2.1.46 (*Rubowo, Pramasdyahsari, et al., 2018*)

Transformasi linier yang memetakan suatu ruang vektor V kembali ke ruang vektor tersebut, dinyatakan sebagai $T : V \rightarrow V$ disebut endomorfisme linier.

Contoh 2.1.47

Misalkan $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dengan:

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x + y \\ 2y \end{bmatrix}.$$

Untuk $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 + 1 \\ 2 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Transformasi tersebut tetap berada di \mathbb{R}^2 , sehingga konsisten sebagai endomorfisma linier.

h. Injektif

Definisi 2.1.48 (Sadieda, 2014)

Transformasi linier $f : V \rightarrow W$ disebut injektif jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in V$ dengan $f(a) = f(b)$, berlaku $a = b$.

Contoh 2.1.49

Misalkan $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dengan $f(a) = a^3$.

Fungsi f dikatakan injektif karena

$$f(a) = a^3$$

$$f(b) = b^3$$

berlaku $a = b$.

i. Diagonalisasi

Definisi 2.1.50 (Husni, 2022)

Suatu matriks persegi dapat didiagonalkan jika ada matriks P yang invertible sedemikian sehingga $P^{-1}AP = P^TAP = D$, dengan D adalah matriks diagonal maka matriks P dikatakan mendiagonalisasi A .

Contoh 2.1.51

Diketahui matriks A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

Menentukan nilai eigen

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 6 & -1 - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 0 \cdot 6 = 0$$

$$(1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 0 = 0$$

$$(1 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -1$$

Untuk $\lambda_1 = 1$ diperoleh

$$\begin{aligned} \det((A^T B + B^T A) - \lambda I)\vec{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 6 & -1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lakukan Operasi Baris Elementer

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 2 dengan dibagi 2

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

Maka diperoleh,

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x_1 &= \frac{1}{3}x_2 \end{aligned}$$

Sehingga, basis untuk ruang eigen λ_1 adalah

$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} x_2$$

Untuk $\lambda_2 = -1$ diperoleh

$$\det(A - \lambda I)\vec{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 6 & -1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lakukan Operasi Baris Elementer

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 1 dan baris 2 dengan dibagi 2

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Maka diperoleh,

$$x_1 = 0 \quad \text{dan} \quad x_2 = x_2$$

Sehingga, basis untuk ruang eigen λ_2 adalah

$$\vec{p}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_2$$

Maka matriks P

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Menentukan determinan matriks P

$$\det(A) = \frac{1}{3} \cdot 1 - 0 \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

Menentukan matriks diagonal

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

B. Dual Number

Konsep matematika dalam memperluas bilangan real dengan menambahkan elemen ϵ disebut *dual number*. Bentuk umumnya, yaitu $z = a + b\epsilon$ dimana a dan b adalah bilangan real dan ϵ adalah bilangan yang menunjukkan kontribusi infinitesimal dari *dual number*. Infinitesimal merupakan bilangan bukan nol tetapi lebih kecil daripada bilangan real manapun, sehingga *dual number* memenuhi sifat $\epsilon^2 = 0$ dan $\epsilon \neq 0$. Operasi-operasinya dapat didefinisikan sebagai berikut:

1. $(a + b\epsilon) + (c + d\epsilon) = (a + c) + (b + d)\epsilon$
2. $(a + b\epsilon)(c + d\epsilon) = ac + (ad + bc)\epsilon$
3. $(a + b\epsilon)^{-1} = a^{-1} - \epsilon ba^{-2}$

Misalkan \mathbb{D} menyatakan himpunan *dual number*, maka $M \in \mathbb{D}^n$ menyatakan himpunan matriks M berukuran $n \times n$ dengan elemen-elemen *dual number* yang disebut sebagai matriks *dual number*. Matriks *dual number* direpresentasikan sebagai berikut:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11}\epsilon & a_{12} + b_{12}\epsilon & \cdots & a_{1n} + b_{1n}\epsilon \\ a_{21} + b_{21}\epsilon & a_{22} + b_{22}\epsilon & \cdots & a_{2n} + b_{2n}\epsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1}\epsilon & a_{n2} + b_{n2}\epsilon & \cdots & a_{nn} + b_{nn}\epsilon \end{bmatrix}$$

Contoh 2.2.1

Matriks *dual number*

$$M = \begin{bmatrix} 9 + \epsilon & 4 + 3\epsilon \\ 4 + 5\epsilon & 2 + 3\epsilon \end{bmatrix}$$

C. Dekomposisi Nilai Singular

Dekomposisi nilai singular atau yang dikenal dengan *Singular Value Decomposition* adalah proses menguraikan suatu matriks menjadi beberapa matriks yang mana proses analisisnya berkaitan dengan nilai singular suatu matriks (Ghoffari, 2023). Sebelum membahas topik dekomposisi nilai singular, terlebih dahulu akan dijelaskan konsep nilai eigen, vektor eigen, nilai singular, serta hubungan antara ketiganya berdasarkan definisi yang diberikan.

Definisi 2.3.1 (Gregoria, 2010)

Misal matriks persegi real A berisi skalar λ dan vektor bukan nol \vec{x} , sehingga

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \qquad \vec{x} \neq 0$$

λ merupakan nilai eigen dari matriks A dan $\vec{x} \neq 0$ disebut vektor eigen yang terkait dengan λ .

Nilai eigen λ dari matriks A dapat diperoleh dengan mengubah persamaan pada Definisi 2.3.1:

$$\begin{aligned}
 A\vec{x} &= \lambda\vec{x} \\
 A\vec{x} - \lambda I\vec{x} &= 0 \\
 (A - \lambda I)\vec{x} &= 0
 \end{aligned}$$

di mana I adalah matriks identitas. Supaya persamaan ini memiliki solusi non-trivial (tidak nol) untuk \vec{x} , determinan dari $A - \lambda I$ harus nol, maka

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Jika persamaan ini memiliki solusi non-trivial, maka akan didapatkan vektor eigen \vec{x} yang sesuai.

Definisi 2.3.2 (Qi and Cui, 2023)

Misal M adalah matriks dual number, sehingga $M = A + B\epsilon$, $\lambda = \lambda_A + \lambda_B\epsilon$, dan $\vec{x} = \vec{x}_A + \vec{x}_B\epsilon$, maka Definisi 2.3.1 ekuivalen dengan :

$$A\vec{x}_A = \lambda_A\vec{x}_A,$$

dimana $\vec{x}_A \neq 0$, yaitu λ_A adalah sebuah nilai eigen dari A dengan sebuah vektor eigen \vec{x}_A , dan

$$(A - \lambda_A I)\vec{x}_B - \lambda_B\vec{x}_A = -B\vec{x}_A.$$

dimana λ_B adalah sebuah nilai eigen dari B dengan sebuah vektor eigen \vec{x}_B .

Contoh 2.3.3

Diketahui matriks A :

$$M = \begin{bmatrix} 1 + 2\epsilon & 1 + 1\epsilon \\ 4 + 1\epsilon & 1 + 2\epsilon \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka,

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(1 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) - 4 \cdot 1 = 0$$

$$(1 - \lambda)^2 = 4$$

$$(1 - \lambda) = \pm 2$$

Diperoleh dua nilai eigen komponen real, yaitu:

$$\lambda_{A1} = 1 - 2 = -1 \quad \text{dan} \quad \lambda_{A2} = 1 + 2 = 3$$

Untuk $\lambda_{A1} = -1$ diperoleh

$$\det(A - \lambda I)\vec{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh,

$$2x_1 + x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 = -x_2$$

Sehingga,

$$v_{A1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda_{A2} = 3$ diperoleh

$$\det(A - \lambda I)\vec{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh,

$$-2x_1 + x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 = x_2$$

Sehingga,

$$v_{A1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Menentukan nilai eigen λ_{B1} komponen infinitesimal

$$(A - \lambda_{A1}I)x_{B1} - \lambda_{B1}x_{A1} = -Bx_{A1}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda_{B1} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_1 + 1x_2 \\ 4x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\lambda_{B1} \\ -\lambda_{B1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eliminasi

$$4x_1 + 2x_2 - 2\lambda_{B1} = -6 \quad (2.1)$$

$$4x_1 + 2x_2 + \lambda_{B1} = 0 \quad (2.2)$$

Eliminasi Persamaan (2.1) dan (2.2) menghasilkan $\lambda_{B1} = 2$.

Menentukan nilai eigen λ_{B2} komponen infinitesimal

$$(A - \lambda_{A2}I)x_{B2} - \lambda_{B2}x_{A2} = -Bx_{A2}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda_{B1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2x_1 + 1x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\lambda_{B1} \\ \lambda_{B1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Eliminasi

$$4x_1 - 2x_2 + 2\lambda_{B1} = 10 \quad (2.3)$$

$$4x_1 - 2x_2 - \lambda_{B1} = -4 \quad (2.4)$$

Eliminasi Persamaan (2.3) dan (2.4) menghasilkan $\lambda_{B2} = \frac{14}{3}$.

Definisi 2.3.4 (Gregoria, 2010)

Misal matriks A berukuran $m \times n$, maka nilai singular σ adalah akar kuadrat dari nilai eigen positif dari matriks $A^T A$ (atau AA^T).

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

Contoh 2.3.5

Diketahui matriks A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{sehingga} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diperoleh:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(2 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) - 1 \cdot 1 = 0$$

$$1 - 3\lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \lambda_{1,2} &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Maka nilai singularnya,

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \quad \text{dan} \quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

Definisi 2.3.6 (Gregoria, 2010)

Misal terdapat matriks A ukuran $m \times n$, jika ada vektor tak nol $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ dan $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, maka matriks A memiliki nilai singular berupa bilangan real positif σ .

$$A\vec{v} = \sigma\vec{u}$$

dan

$$A^T\vec{u} = \sigma\vec{v}$$

dimana \vec{u} adalah vektor singular kiri dan \vec{v} adalah vektor singular kanan.

Definisi 2.3.7 (Ghoffari, 2023)

Misal suatu matriks A berukuran $m \times n$ maka bentuk faktorisasi dekomposisi nilai singularnya:

$$A = U\Sigma V^T$$

Dengan U dan V merupakan matriks ortogonal, dimana U berukuran $m \times m$ dan V berukuran $n \times n$. Ukuran matriks tersebut menyesuaikan ukuran matriks asli A . Kolom-kolom dari matriks U merupakan vektor-vektor singular kiri dan oklom-kolom dari matriks V merupakan vektor-vektor singular kanan dari matriks A .

Kemudian terdapat Σ yang merupakan matriks diagonal yang mengandung nilai-nilai singular pada diagonal utamanya dengan ukuran $m \times n$. Secara umum, matriks diagonal berbentuk persegi, namun dalam dekomposisi nilai singular, matriks diagonal Σ dapat tidak berbentuk persegi karena ukurannya disesuaikan dengan ukuran matriks asli A . Matriks diagonal berukuran $m \times n$ dengan entri umum a_{ij} berarti matriks dengan m baris dan n kolom di mana hanya elemen-elemen pada diagonal utamanya yaitu (a_{ii}) di mana $i = 1, 2, \dots, \min(m, n)$ yang bernilai bukan nol, dan semua entri lainnya adalah nol.

Ortonormalisasi Gram Schmidt adalah proses mengubah sekumpulan vektor bebas linier menjadi sekumpulan vektor ortonormal (Eliyati and Resti, 2017). Misalkan dimiliki sekumpulan vektor $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$, maka akan menghasilkan vektor ortonormal $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ (Eliyati and Resti, 2017):

1. Normalisasi vektor pertama:

$$\hat{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$$

2. Proyeksi dan ortogonalitas:

$$\vec{w}_k = \vec{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \text{proj}_{\hat{u}_i}(\vec{v}_k) \quad \text{dengan} \quad \text{proj}_{\hat{u}_i}(\vec{v}_k) = \frac{\langle \vec{v}_k, \hat{u}_i \rangle}{\langle \hat{u}_i, \hat{u}_i \rangle} \hat{u}_i$$

3. Normalisasi vektor ortogonal:

$$\hat{u}_k = \frac{\vec{w}_k}{\|\vec{w}_k\|}$$

4. Ulangi hingga semua vektor ortonormal $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n\}$ diperoleh.

Contoh 2.3.8

Misalkan $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ dan $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$.

Maka akan menghasilkan vektor ortonormal \hat{u}_1 dan \hat{u}_2 , sebagai berikut:

Normalisasi vektor \vec{v}_1 :

$$\hat{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

Proyeksi \vec{v}_2 ke \hat{u}_1 :

$$\text{proj}_{\hat{u}_1}(\vec{v}_2) = \frac{\left\langle (1, 0, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right\rangle}{\left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right\rangle} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

Hitung \vec{w}_2 :

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \text{proj}_{\hat{u}_1}(\vec{v}_2) = (1, 0, 1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right)$$

Normalisasi \vec{w}_2 menjadi \hat{u}_2 :

$$\hat{u}_2 = \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|} = \frac{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right)}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

Contoh 2.3.9

Tentukan dekomposisi nilai singular dari matriks A berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

1. Menentukan $A^T A$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan nilai eigen dari $A^T A$

$$\det(A^T A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 10 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 10 - \lambda & 2 & 6 \\ 2 & 2 - \lambda & -2 \\ 6 & -2 & 10 - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
(10 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) \cdot (10 - \lambda) + 2 \cdot (-2) \cdot 6 + 6 \cdot 2 \cdot (-2) - \\
(6 \cdot (2 - \lambda)6 + (-2) \cdot (-2) \cdot (10 - \lambda) + (10 - \lambda) \cdot 2 \cdot 2) &= 0 \\
-96\lambda + 22\lambda^2 - \lambda^3 &= 0 \\
\lambda^3 - 22\lambda^2 + 96\lambda &= 0 \\
\lambda(\lambda - 16)(\lambda - 6) &= 0
\end{aligned}$$

Maka diperoleh nilai eigen, yaitu:

$$\lambda_1 = 16$$

$$\lambda_2 = 6$$

$$\lambda_3 = 0$$

Nilai-nilai singular dari nilai eigen yang tidak nol adalah

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{6}$$

3. Menentukan matriks V

Untuk $\lambda_1 = 16$

$$(A^T A - \lambda I)\vec{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 10 - \lambda & 2 & 6 \\ 2 & 2 - \lambda & -2 \\ 6 & -2 & 10 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -6 & 2 & 6 \\ 2 & -14 & -2 \\ 6 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lakukan Operasi Baris Elementer

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -14 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & -6 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 3 = Baris 3 + Baris 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -14 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 1 dan Baris 2 dengan dibalik, kemudian Baris 1 dan Baris 2 dibagi 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 2 = Baris 2 + (3 × Baris 1)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 2 dengan dibagi -20

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 1 = Baris 1 - (7 × Baris 2)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Maka diperoleh,

$$x_1 - x_3 = 0 \quad \text{dan} \quad x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_3$$

Sehingga,

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_1$$

Untuk $\lambda_2 = 6$

$$(A^T A - \lambda I)\vec{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 10 - \lambda & 2 & 6 \\ 2 & 2 - \lambda & -2 \\ 6 & -2 & 10 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & -4 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 6x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 1 dan Baris 2 dengan dibalik, kemudian Baris 1,2,3 dibagi 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 2 = Baris 2 - (2 × Baris 1) dan eliminasi Baris 3 = Baris 3 - (3 × Baris 1)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 3 = Baris 3 - Baris 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 2 dengan dibagi 5

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 1 = Baris 1 + (2 × Baris 2)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Maka diperoleh,

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 = 0 & \quad \text{dan} \quad x_2 + x_3 = 0 \\ \Leftrightarrow x_1 = -x_3 & \quad \quad \quad \Leftrightarrow x_2 = -x_3 \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

Untuk $\lambda_3 = 0$

$$(A^T A - \lambda I)\vec{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 10 - \lambda & 2 & 6 \\ 2 & 2 - \lambda & -2 \\ 6 & -2 & 10 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lakukan Operasi Baris Elementer

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 10 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & 10 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 1 dan Baris 2 dengan dibalik, kemudian eliminasi Baris 1,2,3 dengan dibagi 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 2 = Baris 2 - (5 × Baris 1) dan eliminasi Baris 3 = Baris 3 - (3 × Baris 1)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 3 = Baris 3 - Baris 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 2 dibagi -4

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 1 = Baris 1 - Baris 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Maka diperoleh,

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 & \text{dan} & & x_2 - 2x_3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x_1 &= -x_3 & & & \Leftrightarrow x_2 &= 2x_3 \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

4. Ortonormalisasi dengan Gram-Schmidt pada $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$

$$\hat{v}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\hat{v}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{(-1, -1, 1)}{\sqrt{-1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\hat{v}_3 = \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = \frac{(-1, 2, 1)}{\sqrt{-1^2 + 2^2 + 1^2}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Maka matriks V

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$$V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

5. Menentukan matriks U

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A \vec{v}_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Ortonormalisasi dengan Gram-Schmidt pada \vec{u}_1, \vec{u}_2

$$\hat{u}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})}{\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\hat{u}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} = \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})}{\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Diperoleh matriks U

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Matriks diagonal (Σ) yang berukuran 2×3 adalah

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \end{bmatrix}$$

6. Hasil dari dekomposisi nilai singular

$$A = U\Sigma V^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan membahas perumuman T -Dekomposisi Nilai Singular terhadap matriks *dual number*, yang diawali dengan pembuktian teorema-teorema yang saling berkaitan. Perumuman ini dilakukan karena terdapat perbedaan mendasar dalam memperoleh nilai eigen untuk matriks *dual number*. Perbedaan nilai eigen ini disebabkan oleh struktur tambahan pada matriks *dual number*, yaitu keberadaan komponen infinitesimal. Dengan demikian, perhitungan nilai eigen untuk matriks *dual number* harus dilakukan secara terpisah antara komponen real dan infinitesimal untuk memastikan kesesuaian dengan Definisi 2.3.2. Maka dari itu, perlu pembuktian teorema-teorema yang memastikan keterhubungan antara sifat-sifat nilai eigen dari komponen real dan infinitesimal dengan struktur matriks *dual number* secara keseluruhan.

Dimulai dengan teorema spektral yang memungkinkan diagonalitas matriks ortogonal P sehingga $A = PDP^T$. Prinsip ini diperluas untuk matriks *dual number* simetris M , yang juga dapat didiagonalisasi secara ortogonal yang memisahkan komponen real dan infinitesimal dengan transformasi matriks ortogonal untuk menghasilkan bentuk diagonal $M'' = PM'P^T$. Selanjutnya, setiap matriks *dual number* persegi yang invertible terbukti memiliki T -Dekomposisi Nilai Singular melalui dekomposisi matriks simetris $M^T M$ yang memungkinkan perhitungan akar kuadrat nilai eigen. Teorema-teorema yang saling terkait tersebut akan membentuk dasar bagi penerapan T -Dekomposisi Nilai Singular terhadap matriks *dual number*.

Definisi 3.0.1 (*T*-Dekomposisi Nilai Singular) (Gutin, 2022)

Misal terdapat matriks simetris A maka bentuk faktorisasi *T*-Dekomposisi Nilai Singular:

$$A = U\Sigma V^T$$

dimana U dan V merupakan matriks ortogonal $n \times n$, serta Σ adalah matriks diagonal $n \times n$.

A. Teorema Spektral**Teorema 3.1.1** (*Teorema Spektral Matriks Simetris Real*) (Gutin, 2022)

Jika A adalah matriks simetris berukuran $n \times n$ dengan elemen-elemen real, maka A dapat didiagonalisasi secara ortogonal. Dengan kata lain, jika A adalah matriks real sehingga $A = A^T$, maka ada matriks P sehingga $P^T P = I$ dan $A = P D P^T$ untuk suatu matriks diagonal D .

Bukti.

Misalkan A matriks simetris real ukuran $n \times n$, berdasarkan Definisi 2.3.1 karena A simetris sehingga $A = A^T$, maka

$$\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{x}^T A^T \vec{x} = (A \vec{x})^T \vec{x} = (\lambda \vec{x})^T \vec{x} = \lambda (\vec{x}^T \vec{x})$$

$\vec{x}^T \vec{x}$ adalah bilangan real positif karena,

$$\vec{x}^T \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^T \vec{x} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

$$\vec{x}^T \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}^T \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

hal ini menunjukkan bahwa $\vec{x}^T \vec{x}$ adalah kuadrat dari panjang vektor (norm) \vec{x} , dan $\vec{x}^T A \vec{x}$ juga bilangan real, sehingga λ (nilai eigen) haruslah bilangan real. Ini membuktikan bahwa semua nilai eigen dari matriks simetris real adalah bilangan real.

Misalkan \vec{x}_1 dan \vec{x}_2 adalah dua vektor eigen dari matriks simetris A yang berkaitan dengan nilai eigen λ_1 dan λ_2 dengan $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dengan persamaan berikut:

$$A \vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_1 \tag{3.1}$$

$$A \vec{x}_2 = \lambda_2 \vec{x}_2 \tag{3.2}$$

karena A matriks simetris, maka

$$\vec{x}_1^T A \vec{x}_2 = \vec{x}_1^T A^T \vec{x}_2 = (A \vec{x}_1)^T \vec{x}_2$$

1. Hitung $\vec{x}_1^T A \vec{x}_2$

$$\vec{x}_1^T A \vec{x}_2 = \vec{x}_1^T (\lambda_2 \vec{x}_2) = \lambda_2 (\vec{x}_1^T \vec{x}_2)$$

2. Hitung $(A \vec{x}_1)^T \vec{x}_2$

$$(A \vec{x}_1)^T \vec{x}_2 = (\lambda_1 \vec{x}_1)^T \vec{x}_2 = \lambda_1 (\vec{x}_1^T \vec{x}_2)$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}\lambda_2 \left(\vec{x}_1^T \vec{x}_2 \right) &= \lambda_1 \left(\vec{x}_1^T \vec{x}_2 \right) \\ (\lambda_2 - \lambda_1) \left(\vec{x}_1^T \vec{x}_2 \right) &= 0\end{aligned}$$

Karena $\lambda_1 \neq \lambda_2$ maka $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, sehingga $\left(\vec{x}_1^T \vec{x}_2 \right) = 0$. Dengan demikian, telah terbukti bahwa untuk matriks simetris A , jika dua vektor eigen \vec{x}_1 dan \vec{x}_2 berkaitan dengan nilai eigen yang berbeda, maka vektor-vektor tersebut adalah ortogonal satu sama lain.

Karena vektor-vektor eigen dari A saling ortogonal, maka matriks P dapat dibuat ortonormal. Sehingga matriks P dapat didefinisikan untuk vektor-vektor eigen $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$, sehingga

$$P = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n]$$

Matriks P dikatakan mendiagonalisasi A sehingga

$$\begin{aligned}AP &= A[\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n] \\ &= [A\hat{x}_1, A\hat{x}_2, \dots, A\hat{x}_n] \\ &= [\lambda_1\hat{x}_1, \lambda_2\hat{x}_2, \dots, \lambda_n\hat{x}_n] \\ &= DP\end{aligned}$$

Maka,

$$AP = PD \tag{3.3}$$

dimana matriks diagonal D berisi nilai-nilai eigen dari A yaitu $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Dengan mengalikan kedua sisi Persamaan 3.3 dengan P^T , maka

$$P^T AP = P^T PD$$

$$P^T AP = ID$$

$$P^T AP = D$$

Maka,

$$A = PDP^T$$

Setiap matriks simetris real A dapat didiagonalisasi secara ortogonal, yaitu ada matriks ortogonal P dan matriks diagonal D sehingga $A = PDP^T$ ■

Teorema 3.1.2 (*Teorema Spektral dual number*) (Gutin, 2022)

Misal terdapat matriks dual number simetris $M \in \mathbb{D}^n$, maka

$$M = V\Sigma V^T$$

untuk suatu matriks V ortogonal dan matriks diagonal Σ , sehingga setiap matriks simetris dapat didiagonalisasi secara ortogonal.

Bukti.

Misalkan M adalah matriks *dual number* simetris, sehingga $M = M_A + M_B$.

$$M_A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad M_B = \begin{bmatrix} b_{11}\epsilon & b_{12}\epsilon & \cdots & b_{1n}\epsilon \\ b_{21}\epsilon & b_{22}\epsilon & \cdots & b_{2n}\epsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}\epsilon & b_{n2}\epsilon & \cdots & b_{nn}\epsilon \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Teorema 3.1.1, matriks M_A dapat didiagonalisasi,

sehingga membentuk:

$$M'_A = SM_A S^T$$

dimana M'_A adalah matriks diagonal, yaitu $M'_A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Karena terdapat komponen infinitesimal di M_B , sehingga ada pengaruh transformasi M_B ke basis eigen M_A , maka $M'_B = SM_B S^T$ akan berbentuk blok untuk tetap mempertahankan komponen infinitesimal, yaitu:

$$M'_B = \begin{bmatrix} \epsilon B_{11} & \epsilon B_{12} & \cdots & \epsilon B_{1n} \\ \epsilon B_{12}^T & \epsilon B_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \epsilon B_{n-1n} \\ \epsilon B_{1n}^T & \cdots & \epsilon B_{n-1n}^T & \epsilon B_{nn} \end{bmatrix},$$

dimana B_{ii} adalah simetris. Maka M' :

$$M' = SM S^T = SM_A S^T + \epsilon(SM_B S^T)$$

$$M' = \begin{bmatrix} \lambda_1 I + \epsilon B_{11} & \epsilon B_{12} & \cdots & \epsilon B_{1n} \\ \epsilon B_{12}^T & \lambda_2 I + \epsilon B_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \epsilon B_{n-1n} \\ \epsilon B_{1n}^T & \cdots & \epsilon B_{n-1n}^T & \lambda_n I + \epsilon B_{nn} \end{bmatrix},$$

Untuk menghilangkan elemen non-diagonal dari matriks M' , asumsikan $P = I + \epsilon Q$, sehingga:

$$\begin{aligned} P M' P^T &= (I + \epsilon Q)(M_A + \epsilon M_B)(I - \epsilon Q) \\ &= M_A + \epsilon M_B + \epsilon Q M_A - \epsilon M_A Q \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan matriks diagonal dari $PM'P^T$, maka elemen non diagonal harus nol. Sehingga diperoleh elemen non diagonal:

$$\epsilon M_B + \epsilon Q M_A - \epsilon M_A Q = 0$$

$$B_{ij} + Q_{ij}\lambda_j - \lambda_i Q_{ij} = 0$$

$$B_{ij} + Q_{ij}(-\lambda_i + \lambda_j) = 0$$

$$Q_{ij} = \frac{B_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}$$

dan $P^T P = I$, sehingga $Q^T = -Q$.

Matriks P diperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} I & \frac{\epsilon B_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} & \cdots & \frac{\epsilon B_{1n}}{\lambda_1 - \lambda_n} \\ -\frac{\epsilon B_{12}^T}{\lambda_1 - \lambda_2} & I & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{\epsilon B_{n-1n}}{\lambda_{n-1} - \lambda_n} \\ -\frac{\epsilon B_{1n}^T}{\lambda_1 - \lambda_n} & \cdots & -\frac{\epsilon B_{n-1n}^T}{\lambda_{n-1} - \lambda_n} & I \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_i \neq \lambda_j$. Sehingga hasil akhirnya didapatkan matriks diagonal M'' yang berisi nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, dimana $M'' = PM'P^T$. Transformasi ini menghasilkan matriks M'' : $M'' = \text{diag}(\lambda_1 I + \epsilon B_{11}, \lambda_2 I + \epsilon B_{22}, \dots, \lambda_n I + \epsilon B_{nn})$. ■

B. Teorema Keunikan Nilai Eigen dual number

Teorema 3.2.1 (Keunikan Nilai Eigen dual number) (Gutin, 2022)

Misal dimiliki basis eigen untuk sebuah endomorfisme linier

$$T : D^n \rightarrow D^n$$

maka basis tersebut terkait dengan himpunan multi-set nilai eigen yang unik.

Bukti.

Misalkan e_1, e_2, \dots, e_n adalah basis yang terdiri dari vektor-vektor eigen dari T . Misalkan nilai-nilai eigen yang bersesuaian adalah $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Klaim 1

Misalkan \vec{e} adalah vektor eigen dari T dengan nilai eigen λ . Klaim bahwa $\lambda = \lambda_i$ untuk setiap i .

Bukti klaim 1

Misalkan klaim ini kontradiksi, maka dimiliki

$$\vec{e} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i$$

Karena \vec{e} adalah vektor eigen dengan nilai eigen λ , maka berdasarkan Definisi 2.1.39 $T(\vec{e}) = \lambda \vec{e}$, sehingga diperoleh:

$$\lambda \vec{e} = \lambda \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i \right),$$

dan di sisi lain diperoleh:

$$T(\vec{e}) = T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \vec{e}_i$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\lambda \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i \right) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \vec{e}_i \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda \vec{e}_i &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \vec{e}_i \\ \alpha_i \lambda &= \alpha_i \lambda_i \\ \alpha_i (\lambda - \lambda_i) &= 0\end{aligned}$$

Hal ini menyatakan bahwa $\lambda - \lambda_i \neq 0$, maka α_i harus infinitesimal untuk setiap i . Namun, jika α_i infinitesimal, vektor \vec{e} menjadi infinitesimal, yang bertentangan dengan sifat \vec{e} sebagai vektor eigen.

Jadi, terdapat kontradiksi, dan klaim bahwa $\lambda = \lambda_i$ untuk setiap i terbukti benar.

Klaim 2

Misalkan $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ adalah vektor-vektor eigen yang memiliki nilai eigen λ , dan tidak ada \vec{e}_i lainnya yang memiliki nilai eigen λ . Klaim bahwa $st(e_1), st(e_2), \dots, st(e_k)$ untuk komponen real membentuk himpunan pembentuk dari V_λ , bagian standar dari ruang eigen yang bersesuaian dengan λ .

Bukti klaim 2

Misalkan $st(e) \in V_\lambda$, dimana \vec{e} sebagai:

$$\vec{e} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i.$$

Karena \vec{e} adalah vektor eigen dengan nilai eigen λ , maka $T(e) = \lambda\vec{e}$, sehingga diperoleh:

$$\lambda st(e) = \lambda \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i \right),$$

dan di sisi lain diperoleh:

$$T(\vec{e}) = T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \vec{e}_i$$

$$\lambda \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \vec{e}_i$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \vec{e}_i$$

$$\alpha_i \lambda = \alpha_i \lambda_i$$

$$\alpha_i (\lambda_i - \lambda) = 0$$

Karena $\lambda \neq \lambda_i$, maka α_i infinitesimal, sehingga:

$$st(e) = \sum_{i=1}^k st(\alpha_i) st(e_i).$$

Klaim 3

Klaim bahwa $st(e_1), st(e_2), \dots, st(e_k)$ membentuk himpunan yang bebas linier.

Bukti klaim 3

Asumsikan bahwa terdapat α_i (bilangan real) sehingga:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i st(e_i) = 0.$$

Jika $\alpha_j \neq 0$ untuk setiap j , maka

$$\sum_{i=1}^k \epsilon \alpha_i \vec{e}_i = 0,$$

akan kontradiksi dengan kebebasan linier e_1, e_2, \dots, e_n . Jadi, semua α_i harus sama dengan nol.

Jadi, karena $st(e_1), st(e_2), \dots, st(e_k)$ membentuk basis dari V_λ , maka $k = \dim(V_\lambda)$. Oleh karena itu, setiap basis eigen dari T harus memiliki sebanyak $\dim(V_\lambda)$ vektor dengan nilai eigen λ . ■

C. T -Dekomposisi Nilai Singular Pada Matriks *dual number*

Teorema 3.3.1 (*T -Dekomposisi Nilai Singular Pada Matriks *dual number* untuk Matriks Invertible*) (Gutin, 2022)

Diberikan sebuah matriks *dual number* persegi $M \in \mathbb{D}^n$. Setiap matriks invertible M mempunyai T -Dekomposisi Nilai Singular.

Bukti.

Misalkan M adalah matriks *dual number*, dengan $M^T M$ adalah matriks simetris. Maka berdasarkan Teorema 3.1.2:

$$M^T M = V \Sigma V^T$$

dimana V matriks ortogonal dan Σ merupakan matriks diagonal

dari M .

Jika matriks M invertible, maka $M^T M$ bersifat positif definit. Sehingga dapat diambil akar kuadrat dari $M^T M$, yaitu $\sqrt{M^T M}$ yang dapat dinyatakan sebagai

$$\sqrt{M^T M} = V\sqrt{\Sigma}V^T$$

$\sqrt{M^T M}$ merupakan bentuk akar kuadrat sehingga hanya akan memengaruhi nilai eigen, bukan vektor eigen. Maka hanya matriks Σ yang perlu disesuaikan. V merupakan matriks ortogonal ($V^T V = I$) yang berisi vektor eigen yang memastikan $\sqrt{M^T M}$ tetap mempertahankan struktur $M^T M$ dan berfungsi sebagai operator transformasi yang mengubah basis ke ruang eigen tanpa memengaruhi nilai eigen, sehingga tidak perlu mengubah V .

Didefinisikan matriks ortogonal U , sebagai:

$$U = M(\sqrt{M^T M})^{-1}$$

Membalikkan efek $M^T M$ melalui inversnya, $(\sqrt{M^T M})^{-1}$, akan menormalkan panjang vektor-vektor M . Ketika M dikalikan dengan $(\sqrt{M^T M})^{-1}$, setiap vektor \vec{m}_i dinormalisasi dengan membaginya oleh normanya, yang dihitung sebagai akar dari nilai diagonal matriks $M^T M$. Dengan demikian, panjang setiap vektor \vec{u}_i dari matriks U menjadi 1, yaitu: $\|\vec{u}_i\| = 1$. Sehingga, diperoleh matriks M :

$$M = U\sqrt{M^T M}$$

$$M = U(V\sqrt{\Sigma}V^T)$$

$$M = (UV)\sqrt{\Sigma}V^T$$

$$\sqrt{M^T M} = V\sqrt{\Sigma}V^T$$

dinyatakan sebagai T -Dekomposisi Nilai Singular. ■

Teorema 3.3.2 (*T -Dekomposisi Nilai Singular Pada Matriks dual number*) (Gutin, 2022)

Diberikan sebuah matriks dual number persegi $M \in \mathbb{D}^n$, matriks tersebut dapat diuraikan sebagai:

$$M = U\Sigma V^T$$

di mana U dan V adalah matriks ortogonal yang memenuhi

$$U^T U = I \quad \text{dan} \quad V^T V = I,$$

dan Σ adalah matriks diagonal.

Bukti.

Misalkan $T : V \rightarrow V$ adalah sebuah endomorfisme linier pada \mathbb{D} ukuran tertentu.

Ada operator T sehingga $T^T T$ merupakan operator simetris. Maka, dengan menerapkan Teorema 3.1.1 pada $T^T T$, akan mendapatkan basis ortonormal $H = (\hat{h}_1, \hat{h}_2, \dots, \hat{h}_n)$.

Jika $\hat{h}_i \in H$ dan $T(\hat{h}_i)$ memiliki norma besar (tidak mendekati nol atau tak hingga), maka h_i berkontribusi pada V_A . Dan jika $h_i \in H$ dan $T(\hat{h}_i) \rightarrow \infty$, maka \hat{h}_i berkontribusi pada V_B .

Amati bahwa T adalah injektif di V_A , sehingga untuk setiap $\hat{h}_1, \hat{h}_2 \in V_A$, jika $T(\hat{h}_1) = T(\hat{h}_2)$, maka $\hat{h}_1 = \hat{h}_2$, yaitu jika dua vektor dipetakan ke hasil yang sama, maka kedua vektor tersebut harus sama. Dengan kata lain, kernel dari T hanya berisi vektor nol:

$$\ker(T) = \{\hat{0}\}.$$

Misalkan ruang peta I adalah hasil dari pemetaan V_A melalui

T , maka

$$I = \{T(\hat{h}) | \hat{h} \in V_A\}$$

Jika T injektif, maka $\dim(\ker(T)) = 0$, sehingga Teorema 2.1.44 menjadi:

$$\dim(V) = \dim(\text{im}(T))$$

Jika T injektif di V_A , maka dimensi ruang peta T pada V_A adalah sama dengan dimensi V_A , yaitu:

$$\dim(V_A) = \dim(\text{im}(T|_{V_A})),$$

sehingga, dimensi ruang peta I yang merupakan hasil pemetaan V_A melalui T adalah sama dengan dimensi V_A , yaitu:

$$\dim(I) = \dim(V_A).$$

Dengan demikian, ada sebuah operator ortogonal U sehingga $U(I) = V_A$, serta $T(V_A) = I$, maka U dan T memetakan V_A ke diri sendiri:

$$UT(V_A) = U(I) = V_A$$

Amati bahwa $UT(V_B) \subseteq V_B$. Karena $UT|_{V_A}$ adalah sebuah endomorfisma linier, maka T -Dekomposisi Nilai Singular dapat diterapkan pada $UT|_{V_A}$ karena sifat invertibilitasnya. Dan $UT|_{V_B}$ memetakan setiap argumen ke infinitesimal, sehingga menghasilkan nilai singular infinitesimal. Dengan menggabungkan $UT|_{V_A}$ dan $UT|_{V_B}$ sebagai jumlahan langsung, akan menghasilkan T -Dekomposisi Nilai Singular dari UT .

$$T = U\Sigma V^T,$$

di mana U dan V adalah matriks ortogonal, dan Σ adalah matriks diagonal dengan nilai singular $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$.



Proses Perhitungan T -Dekomposisi Nilai Singular Pada Matriks *dual number*

1. Menentukan $M^T M$ pada matriks *dual number*

$$M^T M = (A + B\epsilon)^T (A + B\epsilon)$$

$$M^T M = A^T A + (A^T B + B^T A)\epsilon$$

2. Memisahkan matriks menjadi komponen real (A) dan infinitesimal (B)

$$A = A^T A$$

$$B = (A^T B + B^T A)\epsilon$$

3. Menentukan nilai eigen komponen real dan infinitesimal

Nilai eigen diperoleh berdasarkan Definisi 2.3.2:

Nilai eigen komponen real

$$A\vec{x}_A = \lambda_A \vec{x}_A,$$

Nilai eigen komponen infinitesimal

$$(A - \lambda_A I)\vec{x}_B - \lambda_B \vec{x}_A = -B\vec{x}_A.$$

4. Menentukan Matriks V

\vec{v}_i menjadi kolom dari matriks V , yang mana \vec{v}_i merupakan vektor eigen dari A dan B .

5. Menentukan matriks diagonal

Matriks diagonal diperoleh dari nilai singular matriks, yang mana nilai singular dari matriks real diperoleh sesuai dengan Definisi 2.3.4:

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

Terdapat perbedaan ketika nilai singular diterapkan di *dual number*, sehingga memerlukan penyesuaian pada nilai λ yaitu:

$$\lambda = \lambda_A + \lambda_B \epsilon$$

dimana, λ_A di komponen real dan $\lambda_B \epsilon$ di komponen infinitesimal.

Nilai singular pada matriks *dual number* dapat diperoleh menggunakan ekspansi Taylor berikut (Kenwright, 2012):

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!} (\Delta x)^2 + \dots$$

dimana:

$f(x_0)$ = nilai fungsi di x_0

$f'(x_0)$ = turunan pertama fungsi $f(x)$ di x_0

$f''(x_0)$ = turunan kedua fungsi $f(x)$ di x_0

Δx = $x - x_0$ (perubahan)

Ekspansi Taylor memungkinkan untuk menangani komponen infinitesimal λ_B secara sistematis, memberikan nilai singular dalam bentuk *dual number* yang terdiri dari komponen real dan komponen infinitesimal.

Karena $\sigma = \sqrt{\lambda}$, sehingga dengan memisalkan fungsi akar $f(x) = \sqrt{x}$ di sekitar x_0 , turunan pertamanya adalah

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Maka untuk $x_0 = \lambda_A$ dan $\Delta x = \lambda_B \epsilon$ diperoleh:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!} (\Delta x)^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_A + \lambda_B \epsilon} &\approx \sqrt{\lambda_A} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_A}} (\lambda_B \epsilon) + 0 + \dots \\ &\approx \sqrt{\lambda_A} + \frac{\lambda_B \epsilon}{2\sqrt{\lambda_A}} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai singular:

$$\sigma = \sqrt{\lambda_A} + \frac{\lambda_B \epsilon}{2\sqrt{\lambda_A}}$$

Karena sifat $\epsilon^2 = 0$, maka pengaruhnya hanya ada di orde pertama.

6. Menentukan Matriks U

Kolom-kolom matriks U berisi \vec{u}_i , di mana \vec{u}_i diperoleh melalui hubungan Definisi 2.3.6, yaitu

$$\vec{u}_i = \frac{1}{\sigma} M \vec{v}_i$$

7. Menggabungkan hasil komponen real dan infinitesimal

$$\begin{aligned} M &= (U_A + U_B \epsilon)(\Sigma_A + \Sigma_B \epsilon)(V_A + V_B \epsilon)^T \\ &= U_A \Sigma_A V_A^T + (U_A \Sigma_A V_B^T + U_A \Sigma_B V_A^T + U_B \Sigma_A V_A^T) \epsilon \end{aligned}$$

Contoh 3.3.3

Jika dimiliki matriks M sebagai matriks *dual number*, akan ditentukan T -Dekomposisi Nilai Singular dari matriks M sebagai berikut:

$$M = \begin{bmatrix} 3 + 1\epsilon & 2 \\ 2 & 3 + 1\epsilon \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

1. Menentukan $M^T M$

$$\begin{aligned} M^T M &= \begin{bmatrix} 3 + 1\epsilon & 2 \\ 2 & 3 + 1\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 + 1\epsilon & 2 \\ 2 & 3 + 1\epsilon \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 13 + 6\epsilon & 12 + 4\epsilon \\ 12 + 4\epsilon & 13 + 6\epsilon \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \epsilon \end{aligned}$$

2. Memisahkan matriks menjadi komponen real (A) dan infinitesimal (B)

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Menentukan nilai eigen real A

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 13 - \lambda & 12 \\ 12 & 13 - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(13 - \lambda)(13 - \lambda) - 12 \cdot 12 = 0$$

$$(13 - \lambda)^2 - 144 = 0$$

$$169 - 26\lambda + \lambda^2 - 144 = 0$$

$$\lambda^2 - 26\lambda + 25 = 0$$

Dengan menggunakan rumus kuadrat:

$$\lambda = \frac{-(-26) \pm \sqrt{(-26)^2 - 4(1)(25)}}{2(1)}$$

$$\lambda = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{2}$$

$$\lambda = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{2}$$

$$\lambda = \frac{26 \pm 24}{2}$$

Sehingga,

$$\lambda_{A1} = \frac{26 + 24}{2} = 25$$

$$\lambda_{A2} = \frac{26 - 24}{2} = 1$$

4. Menentukan matriks V_A untuk komponen real

Untuk $\lambda_{A1} = 25$ diperoleh

$$\det(A - \lambda I)\vec{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 13 - \lambda & 12 \\ 12 & 13 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -12 & 12 \\ 12 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lakukan Operasi Baris Elementer

$$\left[\begin{array}{cc|c} -12 & 12 & 0 \\ 12 & -12 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 1 dan Baris 2 dengan dibagi 12

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

Maka diperoleh,

$$-x_1 + x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Sehingga,

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda_{A2} = 1$ diperoleh

$$\det(A - \lambda I)\vec{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 13 - \lambda & 12 \\ 12 & 13 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ 12 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lakukan Operasi Baris Elementer

$$\left[\begin{array}{cc|c} 12 & 12 & 0 \\ 12 & 12 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 1 dan Baris 2 dengan dibagi 12

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Maka diperoleh,

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -x_2$$

Sehingga,

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ortonormalisasi dengan Gram-Schmidt pada v_1, v_2

$$\hat{v}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Proj}_{\hat{v}_1}(v_2) &= \frac{\left\langle (1, -1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle}{\left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{\left\langle 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle}{\left\langle \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \right\rangle} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\hat{v}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{(1, -1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Maka matriks V_A

$$V_A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$$V_A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

5. Menentukan nilai eigen komponen infinitesimal B
Menentukan nilai eigen λ_{B1} komponen infinitesimal

$$(A - \lambda_{A1}I)x_{B1} - \lambda_{B1}x_{A1} = -Bx_{A1}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 13 - \lambda & 12 \\ 12 & 13 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda_{B1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -12x_1 + 12x_2 \\ 12x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_{B1} \\ \lambda_{B1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Eliminasi

$$-12x_1 + 12x_2 - \lambda_{B1} = -10 \quad (3.4)$$

$$12x_1 - 2x_2 - \lambda_{B1} = -10 \quad (3.5)$$

$$(3.6)$$

Eliminasi Persamaan 3.5 dan 3.6 menghasilkan $\lambda_{B1} = 10$.

Menentukan nilai eigen λ_{B2} komponen infinitesimal

$$(A - \lambda_{A2}I)x_{B2} - \lambda_{B2}x_{A2} = -Bx_{A2}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 13 - \lambda & 12 \\ 12 & 13 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda_{B1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 12x_1 + 12x_2 \\ 12x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_{B1} \\ -\lambda_{B1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Eliminasi

$$12x_1 + 12x_2 - \lambda_{B1} = -2 \quad (3.7)$$

$$12x_1 + 2x_2 + \lambda_{B1} = 2 \quad (3.8)$$

$$(3.9)$$

Eliminasi Persamaan 3.8 dan 3.9 menghasilkan $\lambda_{B2} = 2$.

6. Menentukan matriks V_B untuk komponen infinitesimal

Untuk $\lambda_{B1} = 10$ diperoleh

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I)\vec{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 - \lambda & 4 \\ 4 & 6 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lakukan Operasi Baris Elementer

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 1 dan Baris 2 dengan dibagi 4

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

Maka diperoleh,

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda_{B2} = 2$ diperoleh

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I)\vec{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 - \lambda & 4 \\ 4 & 6 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lakukan Operasi Baris Elementer

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminasi Baris 1 dan Baris 2 dengan dibagi 4

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Maka diperoleh,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x_1 &= -x_2 \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ortonormalisasi dengan Gram-Schmidt pada \vec{v}_1, \vec{v}_2

$$\hat{v}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Proj}_{\hat{v}_1}(\vec{v}_2) &= \frac{\left\langle (1, -1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle}{\left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
 &= \frac{\left\langle \left(1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle}{\left\langle \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \right\rangle} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\hat{v}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{(1, -1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Maka matriks V_B

$$V_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$$V_B^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

7. Matriks diagonal Σ

Nilai singular

$$\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda_A + \lambda_B \epsilon}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \sqrt{\lambda_{A1}} + \frac{\lambda_{B1}}{2\sqrt{\lambda_{A1}}} \epsilon \\
 &= \sqrt{25} + \frac{10}{2\sqrt{25}} \epsilon \\
 &= 5 + 1\epsilon
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_2 &= \sqrt{\lambda_{A2}} + \frac{\lambda_{B2}}{2\sqrt{\lambda_{A2}}}\epsilon \\
 &= \sqrt{1} + \frac{2}{2\sqrt{1}}\epsilon \\
 &= 1 + 1\epsilon
 \end{aligned}$$

Maka matriks diagonal yang diperoleh sebagai berikut:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 + 1\epsilon & 0 \\ 0 & 1 + 1\epsilon \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\Sigma_A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \Sigma_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Menentukan matriks U_A untuk komponen real

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_{A1}} A \vec{v}_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sigma_{A2}} A \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{1}} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ortonormalisasi dengan Gram-Schmidt pada \vec{u}_1, \vec{u}_2

$$\hat{u}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$Proj_{\hat{u}_1}(\vec{u}_2) = \frac{\left\langle (1, -1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle}{\left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left\langle \left(1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle}{\left\langle \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \right\rangle} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 0 \\
\hat{u}_2 &= \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} = \frac{(1, -1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Maka matriks U_A

$$U_A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

9. Menentukan matriks U_B untuk komponen infinitesimal

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \frac{1}{\sigma_{B1}} B \vec{v}_1 = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\vec{u}_2 &= \frac{1}{\sigma_{B2}} B \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ortonormalisasi dengan Gram-Schmidt pada \vec{u}_1, \vec{u}_2

$$\begin{aligned}
\hat{u}_1 &= \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
\text{Proj}_{\hat{u}_1}(\vec{u}_2) &= \frac{\left\langle (1, -1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle}{\left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{\left\langle \left(1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle}{\left\langle \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \right\rangle} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\hat{u}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} = \frac{(1, -1)}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Maka matriks U_B

$$U_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

10. Menggabungkan hasilnya

Diperoleh hasil T -Dekomposisi Nilai Singular di komponen real:

$$U_A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \Sigma_A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Diperoleh hasil T -Dekomposisi Nilai Singular di komponen infinitesimal:

$$U_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \Sigma_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_B^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
 & (U_A + U_B\epsilon)(\Sigma_A + \Sigma_B\epsilon)(V_A + V_B\epsilon)^T = \\
 & \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \epsilon \right) \left(\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \epsilon \right) \\
 & \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \epsilon \right) \\
 & = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \\
 & \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \right. \\
 & \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \\
 & \left. \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right) \epsilon \\
 & = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \epsilon \\
 & = \begin{bmatrix} 3 + 1\epsilon & 2 \\ 2 & 3 + 1\epsilon \end{bmatrix} \\
 & = M
 \end{aligned}$$

BAB IV

PENUTUP

A. Kesimpulan

Pada penelitian ini, telah dibahas perumuman T -Dekomposisi Nilai Singular terhadap matriks *dual number* melalui serangkaian pembuktian teorema yang saling berkaitan. Pertama, melalui teorema spektral, matriks simetris $T^T T$ dapat didiagonalisasi sehingga menghasilkan basis ortonormal H , yang membagi ruang vektor V menjadi subruang V_A dan V_B . Kedua, sifat injektif T di V_A menjamin bahwa kernel dari T hanya berisi nol, sehingga dimensi ruang peta T sama dengan dimensi V_A , didukung oleh teorema dimensi. Ketiga, operator ortogonal U digunakan untuk memetakan V_A ke diri sendiri, memungkinkan penerapan T -Dekomposisi Nilai Singular pada $UT|_{V_A}$ yang menghasilkan nilai singular real dan $UT|_{V_B}$ menghasilkan nilai singular infinitesimal, sehingga menjamin bahwa matriks *dual number* dapat didekomposisi dalam bentuk T -Dekomposisi Nilai Singular sebagai:

$$M = U\Sigma V^T$$

dengan U dan V merupakan matriks ortogonal berukuran $n \times n$, serta Σ sebagai matriks diagonal berukuran $n \times n$. Melalui langkah perhitungan sebagai berikut:

1. Menentukan $M^T M$ pada matriks *dual number*

$$M^T M = A^T A + (A^T B + B^T A)\epsilon$$

2. Memisahkan matriks menjadi komponen real (A) dan infinitesimal (B)

3. Menentukan nilai eigen komponen real dan infinitesimal

Nilai eigen komponen real

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Nilai eigen komponen infinitesimal

$$\det(B - \lambda I) = 0$$

4. Menentukan matriks diagonal

$$\sigma = \sqrt{\lambda_A} + \frac{\lambda_B \epsilon}{2\sqrt{\lambda_A}}$$

5. Menentukan Matriks V

\vec{v}_i menjadi kolom-kolom dari matriks V , yang mana \vec{v}_i merupakan vektor eigen dari A dan B .

6. Menentukan Matriks U

Kolom-kolom matriks U berisi \vec{u}_i , yaitu:

$$\vec{u}_i = \frac{1}{\sigma} M \vec{v}_i$$

7. Menggabungkan hasil komponen real dan infinitesimal

$$\begin{aligned} M &= (U_A + U_B \epsilon)(\Sigma_A + \Sigma_B \epsilon)(V_A + V_B \epsilon)^T \\ &= U_A \Sigma_A V_A^T + (U_A \Sigma_A V_B^T + U_A \Sigma_B V_A^T + U_B \Sigma_A V_A^T) \epsilon \end{aligned}$$

B. Saran

Penelitian ini hanya bersifat teoritis, yaitu membuktikan konsep perumuman T -Dekomposisi Nilai Singular terhadap matriks *dual number*. Pada penelitian selanjutnya dapat mencoba mengaplikasikan konsep Dekomposisi Nilai Singular pada aplikasi untuk matriks *dual number* di bidang ilmu komputer, grafika komputer, atau robotika, yang memanfaatkan *dual number*.

DAFTAR PUSTAKA

- Andriani, Parhaini (2015). “Penalaran aljabar dalam pembelajaran matematika”. *Beta: Jurnal Tadris Matematika* 8.1, pp. 1–13.
- Arma, Sovia, Yanita Yanita, and Nova Noliza Bakar (2019). “SIFAT-SIFAT OPERASI HADAMARD PADA MATRIKS”. *Jurnal Matematika UNAND* 7.4, pp. 61–68.
- Eliyati, Ning and Yulis Resti (2017). “Gram-Schmidt dalam Menghitung Nilai Eigen Suatu Matriks”. *Jurnal Penelitian Sains* 10.1.
- Ghoffari, Lalu Hasan (2023). “DEKOMPOSISI NILAI SINGULAR PADA RUANG VEKTOR:(The Spectral Decompositions on a Vector Space)”. *Fraction: Jurnal Teori dan Terapan Matematika* 3.1, pp. 1–7.
- Gregoria, A (2010). “Dekomposisi Nilai Singular Dan Aplikasinya”. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika:” Peningkatan Kontribusi Penelitian dan Pembelajaran Matematika dalam Upaya Pembentukan Karakter Bangsa*.
- Gu, You-Liang and J Luh (1987). “Dual-number transformation and its applications to robotics”. *IEEE Journal on Robotics and Automation* 3.6, pp. 615–623.
- Gutin, Ran (2022). “Generalizations of singular value decomposition to dual-numbered matrices”. *Linear and Multilinear Algebra* 70.20, pp. 5107–5114.
- Hernadi, Julan (2008). “Metoda pembuktian dalam matematika”. *Jurnal Pendidikan Matematika* 2.1, pp. 1–14.

- Husni, Muhammad Naoval (2022). "Diagonalisasi Operator Linear". *UJMC (Unisda Journal of Mathematics and Computer Science)* 8.2, pp. 7–14.
- Kasse, Irwan and Nurjannah Nurjannah (2016). "PENYELESAIAN INVERS MOORE-PENROSE MENGGUNAKAN DEKOMPOSISI NILAI SINGULAR". *Jurnal Matematika dan Statistika serta Aplikasinya* 4.1.
- Kenwright, Ben (2012). "A beginners guide to dual-quaternions: what they are, how they work, and how to use them for 3D character hierarchies".
- Kurniawan, Prihadi (2020). *Aljabar Linear Elementer untuk Perguruan Tinggi*. CV. Global Edukasi Teknologi.
- Mudhiani, Lathifah, I Made Arnawa, and Nova Noliza Bakar (2019). "Sifat Transformasi Linier Isometri, Operator Simetris, dan Teorema Spektral". *Jurnal Matematika UNAND* 8.1, pp. 171–178.
- Qi, Liqun and Chunfeng Cui (2023). "Dual Number Matrices with Primitive and Irreducible Nonnegative Standard Parts". *arXiv preprint arXiv:2306.16140*.
- Raghavendar, J and V Dharmiah (2017). "Geometrical interpretation of singular value decomposition (svd) and applications of svd". *International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research* 5.4, pp. 23–26.
- Rubowo, Maya Rini, Agnita Siska Pramasdyahsari, et al. (2018). *Teori Ring*.
- Ruminta, Dr (2014). "Matriks Persamaan Linier dan Pemograman Linier". *Rekayasa Sains*.
- Sadieda, LU (2014). *Struktur Aljabar 1*.
- Sari, DI (2012). "Aljabar Linear Elementer". *Bangkalan: STKIP*.

- Sintiari, Ni Luh Dewi et al. (2024). *Aljabar Linear: Teori dan Aplikasi*. CV. Gita Lentera.
- Stacey, Kaye and Mollie MacGregor (1999). "Implications for mathematics education policy of research on algebra learning". *Australian Journal of Education* 43.1, pp. 58–71.
- Thresye, Thresye, Nurul Huda, et al. (2018). "Invers Dari Matriks Sirkulan Simetris Atas Skew Field". *EPSILON: JURNAL MATEMATIKA MURNI DAN TERAPAN* 12.1, pp. 31–42.
- Wibowo, Agus (2022). "Aljabar Linier". Penerbit Yayasan Prima Agus Teknik, pp. 1–172.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

1. Nama Lengkap : Rina Anggita Nawangwulan
2. Tempat dan Tgl. Lahir : Wonogiri, 23 Juni 2003
3. Alamat Rumah : Ngampel RT 01/RW 06, Tirtosuworo,
Giriwoyo, Wonogiri, Jawa Tengah
4. HP : 081327630543
5. E-mail : 2108046085@student.walisongo.ac.id

B. Riwayat Pendidikan

1. SD Negeri 3 Tirtosworo (2009-2015)
2. SMP Negeri 1 Giriwoyo (2015-2018)
3. SMA Negeri 1 Baturetno (2018-2021)

Semarang, 18 Desember 2024



Rina Anggita Nawangwulan
NIM : 2108046085