

**KONTROL OPTIMAL DALAM MODEL PENULARAN VIRUS
ZIKA DENGAN PENGGUNAAN ALAT KONTRASEPSI,
PENGOBATAN, DAN PENYEMPROTAN INSEKTISIDA**

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika



Oleh : **IDA NURLATIFAH**
NIM : 2108046060

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2025

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

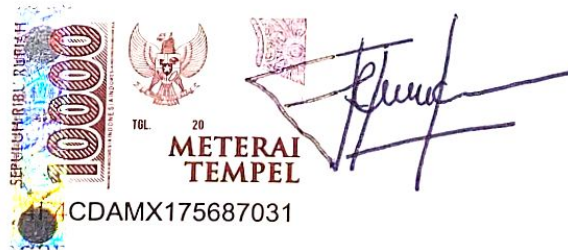
Nama : IDA NURLATIFAH
NIM : 2108046060
Jurusan/Program Studi : Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

**KONTROL OPTIMAL DALAM MODEL PENULARAN VIRUS ZIKA
DENGAN PENGGUNAAN ALAT KONTRASEPSI, PENGOBATAN,
DAN PENYEMROTAN INSEKTISIDA**

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 07 Februari 2025
Pembuat pernyataan,



IDA NURLATIFAH
NIM : 2108046060



KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **Kontrol Optimal dalam Model Penularan Virus Zika dengan Penggunaan Alat Kontrasepsi, Pengobatan, dan Penyemprotan Insektisida**

Penulis : IDA NURLATIFAH

NIM : 2108046060

Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 23 April 2025

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

Aini Fitriyah, M.Sc.

NIP : 19890929 201903 2 021

Penguji II,

Yolanda Norasia, M. Si.

NIP : 19940923 201903 2 011

Penguji III,

Eva Khoirun Nisa, M.Si.

NIP : 19870102 201903 2 010

Penguji IV,

Yulia Romadiastri, M.Sc.

NIP : 19810715 200501 2 008

Pembimbing I,

Yolanda Norasia, M. Si.

NIP : 19940923 201903 2 011

Pembimbing II,

NIP :

NOTA DINAS

Semarang, 07 Februari 2025

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : KONTROL OPTIMAL DALAM MODEL PENULARAN
VIRUS ZIKA DENGAN PENGGUNAAN ALAT
KONTRASEPSI, PENGOBATAN, DAN PENYEMROTAN
INSEKTISIDA

Nama : IDA NURLATIFAH

NIM : 2108046060

Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,



Yolanda Norasia, M. Si.

NIP : 19940923 201903 2 011

ABSTRAK

Virus Zika adalah flavivirus yang ditularkan oleh nyamuk *Aedes aegypti* dan dapat menyebabkan kondisi serius seperti mikrosefali pada bayi dan *Guillain-Barré Syndrome (GBS)*. Penelitian ini mengembangkan model matematika *SIR – SI* untuk menggambarkan penyebaran virus Zika, melibatkan dua populasi: manusia dan nyamuk. Populasi manusia dibagi menjadi tiga kategori: *Susceptible* (rentan), *Infected* (terinfeksi), dan *Recovered* (sembuh), sedangkan populasi nyamuk dibagi menjadi *Susceptible* dan *Infected*. Tiga strategi kontrol yang digunakan yaitu penggunaan alat kontrasepsi, pengobatan, dan penyemprotan insektisida, yang bertujuan untuk meminimalkan jumlah individu terinfeksi. Kontrol optimal ditentukan dengan prinsip Minimum Pontryagin dan diselesaikan secara numerik menggunakan metode *sweep* maju mundur di MATLAB R2013a. Hasil simulasi menunjukkan efektivitas strategi kontrol dalam mengurangi subpopulasi *Infected* pada manusia dan nyamuk.

Kata kunci : Kontrol Optimal, Model SIR-SI, Penyebaran Virus Zika, Simulasi Numerik metode *sweep* maju mundur, MATLAB R2013a

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan rahmat-Nya, penulis dapat menyelesaikan Skripsi yang berjudul ***"Kontrol Optimal Dalam Model Penularan Virus Zika Dengan Penggunaan Alat Kontrasepsi, Pengobatan, dan Penyemprotan Insektisida"***

Skripsi ini disusun sebagai persyaratan untuk meraih gelar Sarjana Matematika (S.Mat.) di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang. Proses penyusunan Skripsi ini tidak lepas dari doa, bantuan, bimbingan, motivasi dan peran dari banyak pihak. Sehingga penulis ingin mengucapkan rasa terima kasih kepada :

1. Prof. Dr. H. Nizar, M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
2. Prof. Dr. Musahadi, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
3. Ibu Any Muanalifah, M.Si., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika, dan Bapak Prihadi Kurniawan, M.Sc., selaku Sekretaris Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
4. Ibu Yolanda Norasia, M.Si., sebagai Dosen Pembimbing yang begitu baik dan sabar serta telah merelakan waktunya untuk membimbing penulis selama proses penulisan. Semoga Allah membalas dengan sebaik-baik balasan.
5. Ibu Nur Khasanah, M.Si., selaku Dosen Wali penulis yang telah berperan dalam memberikan motivasi kepada penulis

untuk menyelesaikan skripsi ini.

6. Seluruh dosen program studi Matematika yang telah berbagi pengetahuan dan pengalaman berharga kepada penulis.
7. Kedua orang tua ku tercinta Ayah Gunawan dan Ibu Jumarty. Terima kasih atas segala pengorbanan dan tulus kasih yang diberikan. Beliau memang tidak sempat merasakan pendidikan bangku perkuliahan, namun mereka mampu senan tiasa memberikan yang terbaik, tak kenal lelah mendoakan serta memberikan perhatian dan dukungan hingga penulis mampu menyelesaikan studinya sampai meraih gelar sarjana. Semoga ayah dan ibu sehat, panjang umur dan bahagia selalu.
8. Untuk keluarga besar yang selalu menjadi sumber dukungan dan semangat bagi penulis, yang tak henti memberikan bantuan, baik dalam bentuk materi maupun kasih sayang. Kehadiran kalian selalu menjadi pelita di setiap suka dan duka, terima kasih atas cinta yang tiada henti.
9. Teruntuk Lailatul Husna, Nazmatul Maulidya, Rofaniyati, Siska Afrilia, dan Ardiana Husni telah menjadi sahabat yang membersamai dari masa perkuliahan sampai proses penulisan Skripsi ini. Terima kasih sudah menjadi patner bertumbuh disegala kondisi yang terkadang tidak terduga, menjadi pendengar yang baik untuk penulis serta menjadi orang yang selalu memberikan semangat dan meyakinkan penulis bahwa segala masalah yang dihadapi selama proses Skripsi akan berakhir.
10. Teruntuk teman-teman satu bimbingan saya, Fanny

Widalaprita, Erlinda Diah Prawati, dan Bilqis Nur Salsabillah, terima kasih atas kebersamaan yang penuh dukungan, bantuan, dan kehangatan yang selalu menemani setiap langkah selama masa bimbingan Skripsi ini.

11. Teruntuk Siti Faridhatul Khasanah sahabat dari masa kecil dan Devia Mar'atul Lutfi yang selalu memberikan semangat kepada penulis serta menjadi patner nugas, jalan-jalan untuk melepas beban selama proses penulisan Skripsi ini.
12. Untuk seluruh sahabat alumni Pondok Darul Amanah, Goldion Generation, yang namanya tak mampu kusebutkan satu per satu, namun tetap terukir indah di hati.
13. Teman – teman program studi Matematika angkatan 2021 yang senantiasa memberikan warna indah dalam masa perkuliahan, sukses selalu buat kalian dalam mengejar mimpi masing-masing, terima kasih atas dukungan dan bantuannya sehingga penulisan Skripsi ini dapat terselesaikan.
14. Seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang memberikan bantuan dan motivasi dalam proses penyelesaian Skripsi ini. Penulis berharap semoga jasa-jasa yang telah diberikan, mendapat balasan yang setimpal dari Allah SWT.
15. Dan terakhir, terima kasih untuk diri saya sendiri Ida Nurlatifah atas segala kerja keras dan semangatnya yang tidak menyerah dalam mengerjakan Skripsi ini. Terima kasih kepada diri saya sendiri yang sudah kuat melewati semua lika liku dalam kehidupan hingga sekarang ini.

Terima kasih untuk segala perjuangan, kesabaran, dan ketekunan yang telah dilalui dalam setiap langkah yang penuh tantangan ini. Saya bangga kepada saya sendiri! pada akhirnya bisa berada di fase yang sekarang ini, meskipun tak jarang air mata dan kegelisahan datang menghampiri, yang terus maju meskipun jalan terasa berat. Berbahagialah selalu dimanapun kapanpun kamu berada, Ida. Semoga langkah kebaikan terus berada padamu dan semoga Allah selalu meridhoi setiap perbuatanmu dan selalu dalam lindungan-Nya. Aamiin.

Semoga kebaikan semuanya menjadi amal ibadah yang diterima dan mendapat pahala yang berlimpah dari Allah SWT. Aamiin.

Penulis mengetahui bahwa Skripsi ini masih memiliki banyak kekurangan dan belum dapat dikatakan sebagai Skripsi yang sempurna. Namun, penulis berharap agar Skripsi ini dapat menambah wawasan dan memberikan manfaat kepada penulis maupun pembaca.

Semarang, 04 Februari 2025

Penulis,

Ida Nurlatifah

NIM: 2108046060

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iii
NOTA PEMBIMBING I	iv
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xv
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Rumusan Masalah	7
C. Tujuan Penelitian	7
D. Manfaat Penelitian	8
E. Batasan Masalah	9
BAB II LANDASAN PUSTAKA	11
A. Virus Zika	11
B. Penyebaran Virus Zika	13
C. Persamaan Diferensial	18
1. Persamaan Diferensial Biasa	19
2. Sistem Persamaan Diferensial	21
D. Model Matematika Penyebaran Penyakit	22
1. Model Matematika SI (<i>Susceptible, Infected</i>)	23
2. Model Matematika SIR (<i>Susceptible, Infected, Recovered</i>)	25
3. Model Matematika SIR-SI (<i>(Susceptible, Infectious, Recovered)-</i> (<i>Susceptible, Infectious</i>))	27
4. Model Holling	33
E. Teori Kontrol Optimal	36
1. Syarat Perlu Kontrol Optimal	38

2.	Metode Runge-Kutta Orde 4	40
3.	Metode <i>Sweep</i> Maju-Mundur	41
F.	Kajian Penelitian Terdahulu	44
BAB III METODE PENELITIAN		49
A.	Diagram Alir Penelitian	49
B.	Metode Penelitian	49
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN		52
A.	Deskripsi Model Penyebaran Virus Zika	52
B.	Penyelesaian Kontrol Optimal pada Model Penyebaran Virus Zika	60
C.	Interpretasi Hasil Simulasi Numerik	67
BAB V PENUTUP		89
A.	Kesimpulan	89
B.	Saran	92
DAFTAR PUSTAKA		93
Lampiran-lampiran		98

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul	Halaman
Tabel 2.1	Definisi Variabel Model	27
Tabel 2.2	Definisi Parameter Model	28
Tabel 2.3	Tabel perbandingan penelitian terdahulu	45
Tabel 4.1	Nilai awal yang digunakan dalam simulasi numerik	68
Tabel 4.2	Nilai Parameter yang digunakan dalam Simulasi Numerik	68

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
Gambar 2.1	Diagram Model Matematika SIR	25
Gambar 2.2	Diagram Kompartemen Model SIR-SI Penyebaran Virus Zika Sebelum di Kontrol (Andayani, P., 2020)	28
Gambar 3.1	Diagram Alir Penelitian	49
Gambar 4.1	Diagram Kompartemen Model SIR-SI Penyebaran Virus Zika dengan Kontrol Penggunaan Alat Kontrasepsi, Pengobatan, dan Penyemprotan Insektisida	55
Gambar 4.2	Populasi Manusia SIR dan populasi nyamuk SI sebelum penambahan kontrol	69
Gambar 4.3	Subpopulasi manusia <i>Susceptible</i> sebelum dan setelah penerapan kontrol	70
Gambar 4.4	Subpopulasi manusia <i>Infected</i> sebelum dan setelah penerapan kontrol	71
Gambar 4.5	Subpopulasi manusia <i>Recovered</i> sebelum dan setelah penerapan kontrol	72
Gambar 4.6	Subpopulasi nyamuk <i>Susceptible</i> sebelum dan setelah penerapan kontrol	73
Gambar 4.7	Subpopulasi nyamuk <i>Infected</i> sebelum dan setelah penerapan kontrol	74
Gambar 4.8	Kontrol penggunaan alat kontrasepsi u_1	75
Gambar 4.9	Kontrol pengobatan u_2	76

Gambar 4.10	Kontrol penyemprotan insektisida u_3	77
Gambar 4.11	Populasi Manusia SIR dan populasi nyamuk SI sebelum penambahan kontrol	79
Gambar 4.12	Subpopulasi manusia <i>Susceptible</i> sebelum dan setelah penerapan kontrol	80
Gambar 4.13	Subpopulasi manusia <i>Infected</i> sebelum dan setelah penerapan kontrol	81
Gambar 4.14	Subpopulasi manusia <i>Recovered</i> sebelum dan setelah penerapan kontrol	82
Gambar 4.15	Subpopulasi nyamuk <i>Susceptible</i> sebelum dan setelah penerapan kontrol	83
Gambar 4.16	Subpopulasi nyamuk <i>Infected</i> sebelum dan setelah penerapan kontrol	84
Gambar 4.17	Kontrol penggunaan alat kontrasepsi u_1	85
Gambar 4.18	Kontrol pengobatan u_2	86
Gambar 4.19	Kontrol penyemprotan insektisida u_3	87

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 Program MATLAB2013a model penyebaran virus Zika dengan dan tanpa kontrol	98
Lampiran 2 Daftar Riwayat Hidup	110

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Virus Zika (ZIKV) merupakan jenis flavivirus yang ditularkan oleh nyamuk *Aedes Aegypti* dan banyak ditemukan di wilayah Afrika dan Asia. Selain melalui gigitan nyamuk, virus Zika juga dapat ditularkan pada manusia yang terinfeksi virus Zika melalui cairan tubuh seperti darah, air liur, urine, dan dapat juga ditularkan melalui hubungan seksual. Virus ini termasuk dalam kelompok yang sama dengan virus dengue, penyebab demam berdarah. Namun, gejala yang ditimbulkan oleh virus Zika berbeda dengan dengue. Infeksi virus Zika umumnya menimbulkan gejala ringan seperti demam, ruam, nyeri sendi, sakit kepala, dan mata merah (konjungtivitis). Di sisi lain, infeksi virus dengue dapat menyebabkan gejala yang lebih parah, seperti demam tinggi, sakit kepala berat, nyeri otot dan sendi, mual, muntah, ruam, serta pendarahan serius (Haddow,A.D.,dkk 2012). Pada tahun 2024, Indonesia mengalami peningkatan signifikan dalam jumlah kasus demam berdarah (DBD), dengan lebih dari 60.000 kasus tercatat hingga Maret 2024. Peningkatan ini sebagian besar disebabkan oleh perubahan iklim dan fenomena El Niño, yang memicu pertumbuhan populasi nyamuk *Aedes aegypti*, vektor utama demam berdarah dan juga virus Zika (postingnews.id).

Dengan adanya peningkatan kasus DBD ini, risiko penyebaran virus Zika menjadi semakin nyata dan mendesak untuk ditangani. Nyamuk *Aedes aegypti* tidak hanya menyebarkan DBD tetapi juga menjadi vektor utama untuk virus Zika, yang dapat menyebabkan

dampak serius seperti Mikrosefali kondisi di mana bayi lahir dengan ukuran kepala yang jauh lebih kecil dari rata-rata. Ini terjadi karena otak bayi tidak berkembang dengan normal selama kehamilan atau setelah kelahiran. Dalam konteks infeksi virus Zika, jika seorang wanita hamil terinfeksi virus ini, terutama pada trimester pertama kehamilan, virus Zika dapat menyerang dan merusak perkembangan otak janin. Hal ini meningkatkan risiko bayi lahir dengan mikrosefali, yang dapat menyebabkan keterlambatan perkembangan, masalah neurologis, dan kecacatan permanen. Mengingat kesamaan vektor ini, penelitian mengenai kontrol optimal penularan virus Zika menjadi sangat penting untuk mencegah terjadinya wabah Zika yang berpotensi muncul bersamaan dengan peningkatan kasus DBD.

Meningkatnya jumlah nyamuk *Aedes aegypti* yang berpotensi menyebarkan virus Zika di Indonesia memperkuat urgensi dan keterkaitan langsung penelitian ini dengan permasalahan kesehatan masyarakat. Dengan kondisi lingkungan yang semakin mendukung perkembangbiakan nyamuk, penting untuk mengembangkan strategi pencegahan dan pengendalian yang efektif terhadap berbagai penyakit yang ditularkan oleh nyamuk ini, termasuk virus Zika. Pendekatan yang optimal melalui penggunaan alat kontrasepsi, pengobatan, dan penyemprotan insektisida menjadi kunci dalam meminimalkan dampak dari kedua penyakit ini secara bersamaan. Namun, dalam konteks wabah virus Zika jumlah kasus sindrom Guillain-Barre (GBS) dan mikrosefalus telah meningkat yang menunjukkan dampak kesehatan.

Sindrom Guillain-Barre (GBS) adalah kondisi langka di mana sistem kekebalan tubuh menyerang sebagian sistem saraf tepi,

menyebabkan peradangan saraf yang dapat berujung pada kelemahan otot. Sementara itu, mikrosefalus adalah kondisi di mana bayi lahir dengan ukuran kepala yang lebih kecil dari normal, sering kali disertai gangguan perkembangan otak. Kedua kondisi ini dapat disebabkan oleh berbagai faktor, seperti infeksi selama kehamilan, faktor keturunan, paparan racun, dan lainnya. Namun, analisis epidemiologi menunjukkan peningkatan kasus GBS dan mikrosefalus setelah wabah virus Zika (World Health Organization, 2016).

Penyebaran virus Zika yang semakin meningkat tidak disertai dengan kesadaran masyarakat yang cukup mengenai ancaman serius yang ditimbulkannya. Virus ini tidak hanya ditularkan melalui gigitan nyamuk, tetapi juga dapat menyebar melalui kontak seksual dengan orang yang terinfeksi. Sampai saat ini, pengobatan yang tersedia hanya berfokus pada terapi terhadap gejala, sementara langkah-langkah pencegahan seperti menghindari gigitan nyamuk yang membawa virus Zika tetap menjadi prioritas utama. Gejala infeksi biasanya muncul dalam 3 hingga 12 hari setelah masa inkubasi, dan berlangsung selama 4 hingga 7 hari (World Health Organization, 2016). Namun manusia yang sedang terinfeksi virus zika tidak selalu menunjukkan gejala. Dan diperkirakan bahwa 80 % manusia yang terinfeksi virus zika tidak mengalami gejala (Moreira, 2017). Namun, dalam Al-Qur'an surah Surah At-Taghabun ayat 11 Allah SWT menegaskan bahwa tidak ada musibah yang menimpa kecuali dengan izin-Nya. Allah juga memberikan petunjuk dan ketenangan kepada hati orang-orang yang beriman ketika menghadapi ujian tersebut.

مَا أَصَابَ مِنْ مُصِيبَةٍ إِلَّا بِإِذْنِ اللَّهِ وَمَنْ يُؤْمِنْ بِاللَّهِ يَهْدِ اللَّهُ قَلْبَهُ ۚ وَاللَّهُ بِكُلِّ شَيْءٍ عَلِيمٌ

Artinya: *"Tidak ada suatu musibah pun yang menimpa seseorang kecuali dengan izin Allah; dan barang siapa beriman kepada Allah, niscaya Dia akan memberi petunjuk kepada hatinya. Dan Allah Maha Mengetahui segala sesuatu."* (Sahih International, 1997, QS. At-Taghābun: 11)

Ayat ini mengingatkan bahwa setiap musibah, termasuk penyakit atau bencana, hanya terjadi dengan izin Allah, dan iman kepada-Nya akan membawa petunjuk dan ketenangan hati bagi yang menghadapinya.

Mengingat tingginya jumlah nyamuk *Aedes aegypti* sangat tinggi di Indonesia, penyebaran Virus Zika juga sangat mungkin terjadi. Oleh karena itu, memantau suhu tubuh pendatang dari luar negeri di bandara saja tidak cukup untuk mencegah penularan, karena sebagian orang yang terinfeksi mungkin tidak menunjukkan gejala, namun tetap dapat menularkan virus.

Langkah tambahan yang perlu diambil adalah meningkatkan kesadaran masyarakat dan petugas kesehatan terhadap potensi penyebaran Virus Zika di Indonesia. Tenaga medis perlu diberi pemahaman bahwa jika ada kasus infeksi Zika, pasien harus diberikan konseling agar tidak melakukan hubungan seksual atau menggunakan alat kontrasepsi selama 60 hari guna mencegah penularan melalui hubungan seksual. Jika pasangan sedang hamil, disarankan untuk tidak berhubungan seksual atau selalu menggunakan alat kontrasepsi selama masa kehamilan. Selain itu, seperti halnya pencegahan penularan Virus Dengue, pengawasan terhadap jentik nyamuk *Aedes aegypti* dan pemberantasan sarang nyamuk (PSN) juga harus ditingkatkan (Dewa Nyoman W., 2016).

Kontrol optimal merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika terapan yang berfokus pada optimasi proses untuk

mencapai hasil terbaik (Saraswati, 2017). Berbagai penelitian telah mengeksplorasi aplikasi kontrol optimal dalam penyebaran penyakit. Sebagai contoh, pada Februari 2022, Ahmed Alshehri dan Miled El Hajji mengkaji kontrol optimal model matematika SIR-SI dalam artikel jurnal mereka berjudul *Mathematical Study for Zika Virus Transmission with General Incidence Rate*. Selain itu, berbagai peneliti telah mengembangkan model dinamika penyebaran virus Zika dengan menggunakan beragam pendekatan. Misalnya, artikel jurnal tahun 2019 oleh Maysaroh, Waluya, dan Wuryanto berjudul *Analisis dan Simulasi Model Matematika Penyakit Zika dengan Satu Serotipe Virus Zika* membahas model SEIR-SEI yang mencakup laju kelahiran manusia dan laju rekrutmen nyamuk.

Artikel jurnal tahun 2020 oleh Okyere, Olaniyi, dan Bonyah, berjudul *Analysis of Zika Virus Dynamics with Sexual Transmission Route Using Multiple Optimal Controls*, mengembangkan model 11 dimensi dengan lima kontrol optimal, termasuk perlindungan pribadi dan vaksinasi, untuk meminimalkan penyebaran virus Zika. Penelitian oleh Rizapour, Mohammadi, dan Jajarmi dalam artikel jurnal *A New Mathematical Model for Zika Virus Transmission* (2020) memperkenalkan model matematika baru yang menggunakan turunan fraksional Caputo, dengan fokus pada wilayah kelayakan sistem dan stabilitas titik keseimbangan.

Lebih lanjut, penelitian oleh Atokolo dan Ezike dalam artikel jurnal *Modeling the Control of Zika Virus Vector Population Using the Sterile Insect Technology* (2020) mengembangkan model matematika untuk mengendalikan populasi nyamuk vektor melalui Teknologi Serangga Steril (SIT), serta menganalisis keseimbangan, stabilitas, dan sensitivitas parameter. Terakhir,

penelitian oleh Sunil Maity dan Partha Sarathi Mandal dalam artikel jurnal *The Effect of Demographic Stochasticity on Zika Virus Transmission Dynamics: Probability of Disease Extinction, Sensitivity Analysis, and Mean First Passage Time* (Maret 2024) mengeksplorasi bagaimana stokastisitas demografis memengaruhi dinamika penularan virus Zika, dengan fokus pada probabilitas kepunahan penyakit dan analisis sensitivitas, namun tidak membahas strategi kontrol optimal.

Puji Andayani dan Lisa Risfana Sari melakukan penelitian berjudul "*A Modified Model of Zika Virus Spread with Saturated Incidence Rate: Modelling and Stability Analysis*" yang membahas penyebaran virus Zika pada tahun 2020 dengan menggunakan model matematika SIR-SI. Penelitian ini mencakup analisis stabilitas untuk mengetahui kondisi stabil penyebaran virus Zika. Berdasarkan hasil penelitian sebelumnya, diperlukan kajian lebih lanjut untuk memperoleh pemahaman yang lebih mendalam mengenai dinamika penyebarannya. Dalam penelitian ini, populasi dibagi menjadi lima subpopulasi, yaitu subpopulasi manusia *Susceptible* (S), subpopulasi manusia *Infected* (I), subpopulasi manusia *Recovered* (R), subpopulasi nyamuk *Susceptible* (S), dan subpopulasi nyamuk *Infected* (I).

Sebagai pengembangan dari studi sebelumnya, pendekatan kontrol optimal diimplementasikan dengan menambahkan tiga jenis kontrol, yaitu penggunaan alat kontrasepsi untuk mengurangi risiko penularan melalui kontak seksual, terutama pada pasangan yang salah satunya terinfeksi; pengobatan untuk mempercepat proses penyembuhan sekaligus meminimalkan populasi manusia yang terinfeksi; serta penyemprotan insektisida untuk menekan populasi nyamuk dan secara langsung mengurangi peluang

penyebaran virus Zika. Penambahan kontrol ini bertujuan untuk memaksimalkan pengurangan penyebaran infeksi virus Zika. Penelitian ini kemudian dikembangkan lebih lanjut sesuai dengan judul skripsi, yaitu *"Kontrol Optimal dalam Model Penularan Virus Zika dengan Penggunaan Alat Kontrasepsi, Pengobatan, dan Penyemprotan Insektisida."* Simulasi model matematika dilakukan menggunakan perangkat lunak MATLAB R2013a untuk mengevaluasi efektivitas pendekatan kontrol optimal yang diusulkan.

B. Rumusan Masalah

1. Bagaimana model matematika SIR-SI penyebaran virus zika dengan tiga strategi kontrol yaitu penggunaan alat kontrasepsi, pengobatan, dan penyemprotan insektisida?
2. Bagaimana analisis kontrol optimal model penyebaran virus zika dengan diberi tiga strategi kontrol yaitu penggunaan alat kontrasepsi, pengobatan, dan penyemprotan insektisida?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik model penyebaran virus zika dengan diberi tiga strategi kontrol yaitu penggunaan alat kontrasepsi, pengobatan, dan penyemprotan insektisida?

C. Tujuan Penelitian

1. Melakukan modifikasi terhadap model matematika SIR-SI untuk penyebaran virus Zika dengan menerapkan tiga strategi kontrol, yaitu penggunaan alat kontrasepsi, pengobatan, dan penyemprotan insektisida.

2. Mengidentifikasi hasil yang diperoleh dari penelitian mengenai model SIR-SI dalam konteks penyebaran virus Zika dengan menerapkan tiga strategi kontrol tersebut.
3. Menghasilkan simulasi numerik dari model SIR-SI terkait penyebaran virus Zika dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB R2013a.

D. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Manfaat Praktis

Manfaat praktis dari penelitian ini adalah untuk memberikan pemahaman yang lebih jelas dan terstruktur mengenai penyebaran virus Zika melalui pendekatan matematika. Dengan memanfaatkan model matematika SIR-SI, penelitian ini mampu memprediksi bagaimana penerapan tiga strategi kontrol yaitu penggunaan alat kontrasepsi, pengobatan, dan penyemprotan insektisida dapat secara efektif mengurangi laju penyebaran virus Zika.

2. Manfaat Keilmuan

Secara teoritis, penelitian ini memperkaya pengetahuan tentang modifikasi model matematika SIR-SI dalam studi penyebaran virus Zika, dengan mengintegrasikan tiga strategi kontrol optimal.

3. Manfaat bagi Penulis

Penelitian ini membantu penulis untuk memperdalam pemahaman mengenai penerapan model matematika SIR-SI

dan kontrol optimal tentang pengendalian penyebaran penyakit melalui alat kontrasepsi, pengobatan, dan penyemprotan insektisida, khususnya dalam konteks epidemiologi.

4. Manfaat bagi Mahasiswa Matematika

Penelitian ini memberikan kontribusi signifikan bagi mahasiswa Matematika dalam memperluas pengetahuan mereka tentang pemodelan matematika dan kontrol optimal. Khususnya, mereka dapat memahami penerapan model SIR-SI untuk studi penyebaran penyakit, serta bagaimana strategi kontrol seperti penggunaan kontrasepsi, pengobatan, dan penyemprotan insektisida dapat diintegrasikan ke dalam model epidemiologi.

5. Manfaat bagi Pembaca

Diharapkan penelitian ini dapat memperluas pengetahuan serta menyediakan informasi mengenai penerapan kontrol mengenai pemodelan matematika penyebaran virus Zika, serta strategi kontrol optimal yang mencakup penggunaan alat kontrasepsi, pengobatan, dan penyemprotan insektisida.

E. Batasan Masalah

Untuk mencapai pembahasan yang lebih terfokus dalam penelitian ini, terdapat beberapa batasan yang perlu diperhatikan, sebagai berikut:

1. Model matematika yang diterapkan dalam penelitian ini adalah model SIR-SI.

2. Strategi pengendalian yang diterapkan pada model dinamik penyebaran virus Zika untuk mencegah penularan virus melibatkan tiga pendekatan strategi kontrol optimal, yaitu penggunaan alat kontrasepsi, pengobatan, dan penyemprotan insektisida.
3. Penyelesaian kontrol optimal dilakukan dengan metode sweep maju mundur.
4. Solusi numerik diperoleh dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4.
5. Simulasi dilaksanakan menggunakan perangkat lunak MATLAB R2013a.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

Dalam bab ini akan menjelaskan teori-teori yang menjadi landasan dalam penulisan skripsi ini. Beberapa topik yang akan dibahas meliputi virus Zika, penyebaran virus zika, persamaan diferensial biasa, pemodelan matematika, teori kontrol optimal, serta tinjauan penelitian terdahulu.

A. Virus Zika

Virus Zika (ZIKV) merupakan bagian dari keluarga *Flaviviridae* dan genus *Flavivirus*, yang menyebar melalui gigitan nyamuk. Selain melalui gigitan nyamuk, virus Zika juga dapat ditularkan pada manusia yang terinfeksi virus Zika melalui cairan tubuh seperti darah, air liur, urine, dan dapat juga ditularkan melalui hubungan seksual. Virus ini termasuk ke dalam kelompok *arbovirus*, di mana RNA virus pertama kali ditemukan pada seekor monyet yang terinfeksi oleh nyamuk. Sejak penemuan tersebut, virus Zika telah menyebar ke berbagai bagian dunia. Penyakit ini umumnya terjadi di daerah tropis, tempat nyamuk *Aedes aegypti* hidup dan berkembang, serta dapat menginfeksi individu dari segala usia. Virus Zika memiliki hubungan yang dekat dengan virus dengue, yang juga disebarkan oleh spesies nyamuk yang sama dan berasal dari kelompok virus yang serupa. Namun, gejala yang disebabkan oleh virus Zika berbeda dari dengue. Pada orang dewasa yang terinfeksi, sekitar 20% mengalami gejala ringan seperti demam, sakit kepala, mual, ruam, dan nyeri sendi, yang seringkali mirip dengan gejala chikungunya dan demam berdarah

(Musso D., *et al.*, 2014). Bahkan, sekitar 80% dari mereka sebagian besar orang yang terkena infeksi tidak mengalami gejala apapun di awal. Berdasarkan laporan dari Kementerian Kesehatan menunjukkan bahwa gejala khas Zika hanya dialami oleh satu dari lima orang yang terinfeksi.

Penularan virus Zika telah dikaitkan dengan meningkatnya jumlah kasus *Guillain-Barré Syndrome* (GBS) serta mikrosefalus. GBS merupakan kondisi langka di mana sistem kekebalan tubuh menyerang bagian dari sistem saraf tepi. Sindrom ini dapat mempengaruhi individu dari berbagai kelompok usia, mulai dari anak-anak hingga orang dewasa, meskipun jarang terjadi pada lansia (Stockholm (2015)). Gejala biasanya muncul satu hingga dua minggu setelah infeksi saluran pernapasan atau pencernaan, yang dapat menyebabkan peradangan saraf dan berpotensi menyebabkan kelumpuhan atau kelemahan otot jika tidak ditangani dengan baik. Mikrosefalus, di sisi lain, merupakan kelainan perkembangan otak yang ditandai dengan ukuran kepala bayi yang lebih kecil dari rata-rata, sesuai dengan usia dan jenis kelamin (World Health Organization, 2016). Kondisi ini dapat mengakibatkan gangguan perkembangan otak dan berdampak pada pertumbuhan anak. Beberapa faktor, seperti infeksi selama kehamilan, faktor genetik, dan paparan racun, dapat menyebabkan kedua kondisi tersebut. Berdasarkan studi epidemiologi, terdapat peningkatan kasus GBS dan mikrosefalus setelah wabah virus Zika, meskipun bukti ilmiah yang lengkap belum tersedia, data yang mendukung keterkaitannya semakin kuat dari tahun ke tahun (Momoh, A.A., *et al.*, 2017).

B. Penyebaran Virus Zika

Zika termasuk dalam kelompok virus yang dikenal sebagai *arbovirus* (arthropod-borne virus). *Arbovirus* merupakan jenis virus yang ditularkan melalui *arthropoda*, seperti nyamuk dan kutu. Penularan virus terjadi saat *arthropoda* tersebut menggigit vertebrata, termasuk manusia, yang terinfeksi virus, sehingga virus dapat berpindah dari satu vertebrata ke vertebrata lain melalui air liur *arthropoda*. Dalam hal ini, nyamuk *Aedes aegypti* berfungsi sebagai vektor utama penularan virus Zika. Proses penularan biologis biasanya berlangsung ketika populasi yang terinfeksi mengandung darah dari inang yang membawa virus, kemudian menyuntikkan air liurnya yang terinfeksi ke inang baru, sehingga virus dapat menyebar (Musso D., *et al.*, 2014).

Nyamuk dari genus *Aedes* merupakan vektor utama dalam penyebaran virus Zika. Berbagai penelitian telah dilakukan mengenai penularan virus Zika oleh spesies dalam genus ini, dan hasilnya menunjukkan bahwa semua spesies dalam genus *Aedes* rentan terhadap infeksi virus Zika.

Pada manusia, virus Zika pertama kali diidentifikasi pada tahun 1952 melalui pengujian antibodi serum di Afrika Timur. Sekitar 80% orang yang terinfeksi virus Zika berada dalam fase asimtomatik, artinya gejala belum muncul. Setelah beberapa waktu, gejala yang serupa dengan demam berdarah, seperti demam ringan, nyeri sendi, ruam, sakit kepala, nyeri otot, dan radang mata, bisa timbul dan umumnya bertahan antara 2 hingga 7 hari (Momoh, A.A., *et al.*, 2017).

Virus Zika dapat terdeteksi dalam berbagai cairan tubuh, termasuk serum, air liur, urine, dan air mani. Penularan melalui

hubungan seksual juga telah terbukti, dengan lebih dari enam kasus yang terkonfirmasi (Momoh, A.A., *et al.*, 2017).

Penyebaran virus Zika terus terjadi di berbagai tingkatan, mulai dari komunitas, populasi, hingga skala regional, nasional, dan global. Sayangnya, meskipun penyebarannya terus meningkat, kesadaran masyarakat terhadap bahaya virus ini masih rendah. Hingga kini pengobatan yang ada hanya terbatas pada terapi untuk mengatasi gejala, serta pencegahan melalui perlindungan dari gigitan nyamuk *Aedes aegypti* yang dapat menularkan virus Zika (CDC, 2016).

Salah satu upaya untuk meminimumkan penyebaran virus Zika adalah dengan penggunaan alat kontrasepsi dan pengobatan pada manusia, serta penyemprotan insektisida pada nyamuk yang akan dijelaskan sebagai berikut.

1. Penggunaan Alat Kontrasepsi Pada Manusia

Penularan virus Zika melalui hubungan seksual telah dikonfirmasi dalam beberapa kasus, menjadikannya sebagai jalur penularan utama selain dari gigitan nyamuk. Penggunaan alat kontrasepsi, seperti kondom, adalah metode yang sangat efektif dalam mencegah penyebaran virus ini melalui kontak seksual, terutama saat berada dalam hubungan di mana salah satu pasangan telah terinfeksi virus Zika. Kondom berperan sebagai penghalang untuk mencegah penularan cairan tubuh seperti air mani dan cairan vagina yang dapat mengandung virus (Moreira, J., Peixoto, C.A., & Siqueira, A.M. (2017)).

Sebagai tindakan pencegahan yang bijaksana, individu yang tinggal di daerah dengan kasus Zika yang tinggi atau

pasangan yang sedang merencanakan kehamilan disarankan mempertimbangkan penggunaan alat kontrasepsi. WHO merekomendasikan penggunaan kondom selama enam bulan setelah infeksi Zika pada salah satu pasangan untuk mencegah virus menular ke pasangan yang sehat (World Health Organization (WHO), 2016).

Tidak hanya untuk mencegah penularan virus Zika, penggunaan alat kontrasepsi juga dapat membantu mengurangi dampak komplikasi yang terkait dengan infeksi ini, khususnya risiko mikrosefali pada bayi yang dilahirkan oleh ibu yang terinfeksi. Penyebab kondisi tersebut adalah infeksi virus Zika pada masa kehamilan yang dapat memengaruhi pertumbuhan otak bayi (Mlakar, J., Korva, M., Tul, N., et al. (2016)). Karena itu, alat kontrasepsi berperan penting dalam mencegah penularan melalui hubungan seksual.

Pentingnya edukasi tentang penggunaan alat kontrasepsi di komunitas rawan infeksi Zika sangat diperlukan untuk mencegah penyebaran lebih lanjut. Upaya meningkatkan kesadaran masyarakat tentang risiko Zika dan manfaat penggunaan alat kontrasepsi sebagai tindakan pencegahan dapat dilakukan melalui kampanye yang didukung oleh pemerintah dan organisasi kesehatan.

2. Pengobatan Pada Manusia

Hingga saat ini, belum ada terapi khusus atau vaksin yang tersedia untuk virus Zika. Pengobatan lebih bertujuan untuk mengatasi gejala yang muncul saat infeksi terjadi, seperti demam, nyeri sendi, ruam, dan sakit kepala. Pendekatan

perawatan umum sering kali melibatkan pemberian cairan untuk mencegah dehidrasi, obat penurun panas seperti parasetamol, dan obat penghilang nyeri untuk meredakan ketidaknyamanan pada otot dan sendi (Petersen, L.R., Jamieson, D.J., & Powers, A.M. (2016)).

Selain itu, tindakan pengobatan juga mencakup pencegahan terhadap kemungkinan komplikasi serius, seperti sindrom Guillain-Barré, yang merupakan gangguan saraf langka yang dapat terjadi setelah infeksi Zika. Dalam situasi semacam ini, perawatan di rumah sakit menggunakan terapi imunoglobulin intravena dapat memberikan bantuan dalam meredakan gejala dan mempercepat proses pemulihan (Musso, D., & Gubler, D.J. (2014)).

Penting bagi wanita hamil yang terinfeksi Zika untuk mendapatkan pemantauan berkala dari dokter kandungan guna mengidentifikasi potensi komplikasi pada perkembangan janin, seperti mikrosefali. Pemeriksaan ultrasonografi dan pengujian genetik pada cairan ketuban di tahap awal dapat mendukung penanganan kehamilan yang terbaik (Brasil, P., Pereira Jr., J.P., Raja Gabaglia, C., et al. (2016)).

Meningkatkan akses ke fasilitas kesehatan dan pelatihan tenaga medis dalam mendeteksi serta mengatasi kasus Zika merupakan hal yang utama. Penelitian lebih lanjut perlu dilakukan untuk menghasilkan terapi yang lebih efektif dalam mengatasi virus Zika dan dampak yang ditimbulkannya.

3. Penyemprotan Insektisida Pada Nyamuk

Nyamuk *Aedes aegypti* menjadi fokus utama dalam usaha mengurangi penyebaran virus Zika karena perannya sebagai vektor virus tersebut. Penggunaan penyemprotan insektisida merupakan cara yang sering digunakan untuk mengurangi jumlah nyamuk di wilayah yang rentan. Insektisida berbasis pirimifos-metil atau malathion dipercaya efektif membunuh nyamuk dewasa dan mengurangi risiko penyebaran virus Zika (Garcia-Rejon, J.E., Aldana, E., Loroño-Pino, M.A., et al. (2018)).

Penyemprotan insektisida dapat dilakukan dengan dua metode utama, yaitu penyemprotan residu di dalam ruangan (*Indoor Residual Spraying*, IRS) dan penyemprotan berbasis kabut (*fogging*). IRS bertujuan melapisi dinding-dinding rumah dan area dalam ruangan menggunakan insektisida yang efektif untuk membunuh nyamuk yang hinggap. Fogging digunakan di luar ruangan untuk mencakup area yang luas, terutama saat terjadi wabah, guna mengurangi populasi nyamuk secara cepat (World Health Organization (WHO)).

Meski demikian, perlu diingat untuk menggunakan insektisida dengan cermat guna mencegah nyamuk menjadi kebal terhadap zat kimia yang digunakan. Penelitian menunjukkan bahwa resistansi terhadap insektisida tertentu, seperti piretroid, mengalami peningkatan di sejumlah wilayah tropis akibat penggunaan yang tidak terkendali (Smith, L.B., Kasai, S., & Scott, J.G. (2016)). Oleh karena itu, rotasi bahan aktif dan kombinasi metode pengendalian lain, seperti pelepasan nyamuk jantan steril, dapat menjadi solusi yang efektif.

Selain itu, kesadaran masyarakat akan pentingnya menjaga kebersihan lingkungan sangat penting. Menghilangkan tempat berkembang biak nyamuk, seperti genangan air, perlu dilakukan bersamaan dengan penyemprotan insektisida untuk memastikan keberhasilan program pengendalian vektor.

C. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial (PD) merupakan sebuah persamaan yang mengandung turunan-turunan dari suatu fungsi $y(x)$ yang tidak diketahui, namun dapat ditentukan melalui persamaan tersebut (Bambang Suprihatin et al., 2013). Secara umum, persamaan diferensial dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.3.1 (Purnomo, D., 2012)

Suatu persamaan diferensial merupakan persamaan yang mencakup minimal satu diferensial atau turunan dari fungsi yang belum diketahui.

Berdasarkan banyaknya variabel persamaan diferensial dibagi menjadi dua tipe, yaitu persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP). Persamaan diferensial parsial melibatkan turunan dari beberapa variabel bebas terhadap variabel terikat. Sebaliknya, persamaan diferensial biasa hanya melibatkan satu variabel bebas (Kartono, 2012).

Selain itu, dalam persamaan diferensial terdapat istilah tingkat (*orde*) dan derajat (*degree*). Tingkat persamaan diferensial ditentukan oleh turunan tertinggi yang ada di dalamnya, sementara derajat ditentukan oleh pangkat turunan tertinggi yang

ada dalam persamaan tersebut. Berikut contoh dari persamaan diferensial biasa tingkat satu dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = 3 - 2x \quad (2.1)$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial tingkat satu dan derajat satu, karena turunan tertinggi dalam persamaan adalah turunan pertama dengan pangkat satu.

1. Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan yang mencakup turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu variabel bebas disebut persamaan diferensial biasa. Bentuk umum dari PDB dapat dituliskan sebagai berikut:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad (2.2)$$

Di mana:

- x adalah variabel bebas.
- y adalah variabel terikat (fungsi yang ingin dicari).
- $\frac{dy}{dx}$ adalah turunan pertama dari y terhadap x .
- $\frac{d^2y}{dx^2}$ adalah turunan kedua dari y terhadap x , dan seterusnya.
- n adalah urutan turunan tertinggi dalam persamaan tersebut.

Persamaan ini dapat menggambarkan hubungan yang sangat kompleks antara variabel bebas x dan variabel terikat y , serta perubahan y terhadap perubahan x pada berbagai tingkat turunan.

Berikut diberikan contoh dari Persamaan Diferensial Biasa (PDB) sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = 2 - x$$

Persamaan ini menyatakan bahwa laju perubahan y terhadap x adalah $2 - x$.

Berdasarkan sifat kelinierannya, persamaan diferensial biasa dapat dibedakan menjadi persamaan diferensial biasa linear dan non-linear. Sebagai contoh, dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 2y = 0 \quad (2.3)$$

Contoh di atas disebut sebagai *PDB* linear karena hanya mengandung turunan fungsi $y(x)$ terhadap satu variabel bebas x , serta setiap suku yang melibatkan y dan turunannya bersifat linear tanpa adanya perkalian atau eksponensiasi yang lebih tinggi.

Persamaan diferensial biasa non-linear adalah persamaan diferensial yang tidak memiliki sifat linear (Ross, 1984). Persamaan diferensial biasa nonlinier ditandai oleh beberapa karakteristik yang harus dipenuhi, antara lain:

1. Terdapat variabel tak bebas atau turunannya yang memiliki pangkat lebih dari satu.
2. Adanya fungsi transendental dari variabel tak bebas serta turunannya.
3. Terdapat perkalian antara variabel tak bebas dan turunannya.

Berikut adalah contoh dari persamaan diferensial biasa non linier:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 5y^2 = 0 \quad (2.4)$$

Berdasarkan contoh di atas, persamaan tersebut diklasifikasikan sebagai sistem persamaan diferensial non-linear karena memenuhi kriteria pertama, yaitu adanya variabel terikat pada y dengan suku $-5y^2$ yang mengandung bentuk kuadrat atau pangkat lebih dari satu, yaitu y^2 .

2. Sistem Persamaan Diferensial

Sistem PD (Sistem Persamaan Diferensial) merupakan sekumpulan persamaan diferensial yang saling berhubungan dan biasanya melibatkan dua atau lebih variabel. Dalam sistem ini, setiap persamaan dapat menggambarkan hubungan antara perubahan satu variabel dengan variabel lainnya (Martin Braun, 1991). Sistem persamaan diferensial dapat dituliskan dalam bentuk umum sebagai:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.5)$$

Di mana t adalah variabel bebas dan $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ adalah variabel terikat, dengan $F_1, F_2, \dots, F_n$ yang menggambarkan laju perubahan variabel terikat terhadap variabel bebas dan variabel terikat lainnya (Braun, 1993).

D. Model Matematika Penyebaran Penyakit

Dalam beberapa tahun terakhir, pemodelan matematika telah menjadi sorotan utama dan banyak diterapkan untuk menangani berbagai permasalahan dunia nyata. Model-model ini sangat berguna dalam merumuskan strategi pengendalian yang efektif untuk mengatasi penyebaran penyakit. Beberapa simulasi pemodelan telah berhasil memprediksi pola penyebaran penyakit (Ndii, 2018).

Pemodelan matematika merupakan cabang ilmu yang digunakan untuk mewakili dan menganalisis masalah dunia nyata dalam bentuk pernyataan matematis, dengan tujuan memperoleh solusi yang lebih terukur dan akurat. Secara sederhana, pemodelan matematika dapat digambarkan sebagai representasi suatu masalah dalam bentuk persamaan matematis, yang membantu dalam proses analisis dan perhitungan sebagai bagian dari upaya memahami masalah tersebut. Umumnya, pemodelan matematika sering diwujudkan dalam bentuk persamaan diferensial (Iswanto, 2012). Langkah awal dalam proses pemodelan adalah mengubah masalah dunia nyata menjadi bahasa matematika, yang melibatkan identifikasi variabel-variabel kunci dan pembentukan hubungan antarvariabel. Setelah variabel diidentifikasi, model matematika dikonstruksi dengan membuat beberapa asumsi terkait kondisi yang sedang dipertimbangkan.

Proses pembuatan asumsi ini terdiri dari beberapa tahapan. Pertama, alur pemikiran harus dirancang sedemikian rupa sehingga model tersebut dapat mencerminkan kondisi fisik yang kompleks dari masalah yang ingin dipecahkan. Tahap berikutnya adalah merumuskan sistem persamaan yang menggambarkan

keterkaitan antar variabel tersebut. Langkah ini merupakan salah satu bagian tersulit dan membutuhkan pengujian ulang asumsi agar persamaan yang terbentuk realistis. Setelah sistem persamaan tersusun, langkah selanjutnya adalah menyelesaikan persamaan tersebut. Pada tahap ini, diperlukan ketelitian untuk memastikan bahwa model yang dikembangkan akurat dan sesuai dengan kenyataan. Langkah terakhir adalah menginterpretasikan solusi yang diperoleh, menghubungkannya kembali dengan masalah dunia nyata. Salah satu metode yang sering digunakan untuk menampilkan solusi ini adalah dengan grafik, yang menggambarkan hasil numerik secara visual (Putri, D. T., & Subhan, M., 2023). Model matematika untuk penyebaran penyakit dalam pemodelan ini akan dibahas lebih lanjut sebagai berikut:

1. Model Matematika SI (*Susceptible, Infected*)

Pada model dinamika *Susceptible-Infected* (SI) yang terdiri dari subpopulasi *Susceptible* (S) dan subpopulasi *Infected* (I), penelitian ini akan difokuskan pada dinamika penyebaran virus Zika melalui populasi nyamuk. Populasi *Susceptible* (S) mengacu pada individu yang belum terinfeksi, tetapi berpotensi terinfeksi ketika terpapar virus, sementara populasi *Infected* (I) merupakan individu yang telah terjangkit virus tersebut. Selain itu, selama proses penyebaran, individu terinfeksi dapat berkontribusi pada penyebaran virus ke populasi rentan lainnya, yang pada akhirnya dapat mempengaruhi tingkat kematian lebih tinggi di populasi terinfeksi.

Model berikut disusun dalam bentuk sistem persamaan diferensial untuk menggambarkan dinamika perubahan jumlah individu dalam dua subpopulasi, yaitu subpopulasi *Susceptible*

(S) atau rentan, dan subpopulasi *Infectious* (I) atau terinfeksi, terhadap waktu (t):

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta S + \gamma I, \\ \frac{dI}{dt} = \beta S - \gamma I, \end{cases} \quad (2.6)$$

Sistem persamaan diferensial di atas dapat dijelaskan sebagai berikut:

1. Laju transisi dari subpopulasi *Susceptible* (S) per satuan waktu :

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S + \gamma I$$

menyatakan laju perubahan jumlah individu dalam populasi *Susceptible* (S). Komponen $-\beta S$ merepresentasikan penurunan jumlah individu rentan akibat interaksi dengan individu terinfeksi, di mana β adalah parameter yang menunjukkan laju penularan. Sementara itu, komponen γI menyatakan adanya peningkatan jumlah individu rentan yang berasal dari individu terinfeksi yang kembali ke status rentan dengan laju pemulihan γ .

2. Laju perubahan subpopulasi *Infectious* (I) per satuan waktu :

$$\frac{dI}{dt} = \beta S - \gamma I$$

menggambarkan laju perubahan jumlah individu dalam subpopulasi *Infectious* (I). Komponen βS menunjukkan peningkatan populasi terinfeksi akibat penularan dari

individu rentan. Sedangkan γI menunjukkan pengurangan jumlah individu terinfeksi karena proses pemulihan yang menyebabkan mereka berpindah kembali ke populasi rentan.

2. Model Matematika SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*)

Pada model *Susceptible-Infected-Recovered* (SIR) adalah model klasik yang pertama kali dirumuskan oleh W.O. Kermack dan A.G. McKendrick dalam makalah berjudul *A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemic* pada tahun 1927. Model ini digunakan untuk menggambarkan dinamika penyebaran penyakit menular di dalam populasi. Dalam model SIR, terdapat tiga subpopulasi utama, yaitu: subpopulasi S (*Susceptible*) yang terdiri dari individu-individu sehat tetapi rentan terhadap infeksi, subpopulasi I (*Infected*) yang mewakili individu yang telah terinfeksi, serta subpopulasi R (*Recovered*) yang menggambarkan individu yang telah pulih dari infeksi. Model ini banyak digunakan untuk mempelajari penyebaran penyakit dan bagaimana berbagai faktor memengaruhi perkembangan wabah di suatu populasi, sebagaimana dijelaskan oleh Chasnov (2009). Model SIR dapat digambarkan dalam diagram arah berikut ini :



Gambar 2.1. Diagram Model Matematika SIR

Dengan merujuk pada diagram arah yang telah ditampilkan di atas, diperoleh serangkaian persamaan dalam bentuk persamaan diferensial sebagai berikut:

1. Laju transisi dari S (*Susceptible*) ke I (*Infected*) per satuan waktu dapat dinyatakan dengan persamaan:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI$$

di mana α adalah laju transisi dari S menuju I .

2. Laju transisi dari I (*Infected*) ke R (*Recovered*) per satuan waktu dituliskan dalam persamaan:

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta IR$$

di mana β adalah laju transisi dari I menuju R .

3. Laju perubahan R (*Recovered*) per satuan waktu dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{dR}{dt} = \beta IR$$

Dengan demikian, berdasarkan diagram arah dan penjelasan yang ada, didapatkan sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta IR \\ \frac{dR}{dt} = \beta IR \end{cases} \quad (2.7)$$

Total populasi dapat dirumuskan sebagai:

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$$

di mana $N(t)$ merepresentasikan total populasi dan t adalah

waktu.

3. Model Matematika SIR-SI ((*Susceptible, Infected, Recovered*)-(*Susceptible, Infected*))

Dalam penelitian ini akan menggunakan sistem kontrol optimal penggunaan alat kontrasepsi, pengobatan berupa terapi, dan penyemprotan insektisida yang akan digunakan pada model SIR-SI untuk menganalisis penyebaran virus Zika, sebagaimana pengembangan yang dijelaskan dalam jurnal yang ditulis oleh Puji Andayani dan Lisa Risfana Sari (2020) berjudul *A Modified Model of Zika Virus Spread with Saturated Incidence Rate: Modelling and Stability Analysis*. Pada Tabel 2.1 adalah definisi variabel dari model SIR-SI. Model ini mencakup lima kompartemen, yaitu subpopulasi *Susceptible* (S), *Infected* (I), dan *Recovered* (R) untuk populasi manusia, serta *Susceptible* (S) dan *Infected* (I) untuk populasi nyamuk, di mana kedua populasi ini saling berinteraksi. Jumlah individu di setiap subpopulasi akan berubah seiring berjalannya waktu, sehingga jumlah individu dinyatakan dengan notasi S_h , I_h , dan R_h untuk populasi manusia, serta S_v dan I_v untuk populasi nyamuk. Berikut ini merupakan tabel definisi dari variabel serta parameter yang akan digunakan dalam penelitian ini, yaitu sebagai berikut :

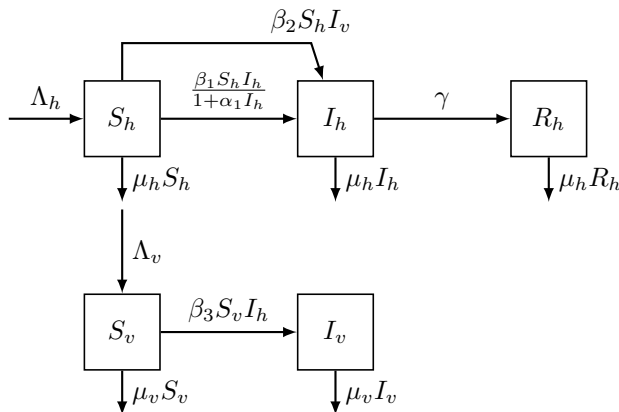
Tabel 2.1. Definisi Variabel Model

Variabel	Definisi
S_h	Jumlah populasi manusia <i>Susceptible</i>
I_h	Jumlah populasi manusia <i>Infected</i>
R_h	Jumlah populasi manusia <i>Recovered</i>
S_v	Jumlah populasi nyamuk <i>Susceptible</i>
I_v	Jumlah populasi nyamuk <i>Infected</i>

Tabel 2.2. Definisi Parameter Model

Parameter	Definisi
Λ_h	Laju pertambahan individu manusia <i>susceptible</i> .
Λ_v	Laju pertambahan individu nyamuk <i>susceptible</i> .
β_1	Laju penularan penyakit secara langsung.
β_2	Laju penularan penyakit dari nyamuk ke manusia.
β_3	Probabilitas penularan penyakit dari manusia ke nyamuk.
γ	Laju kesembuhan per kapita dari populasi yang terinfeksi.
μ_h	Laju kematian manusia.
μ_v	Laju kematian nyamuk.
α_1	ukuran penghambatan.

Model penyebaran virus Zika ini menggunakan diagram kompartemen SIR-SI, yang mencakup subpopulasi *Susceptible* (S) dan *Infected* (I) untuk nyamuk, serta *Susceptible* (S), *Infected* (I), dan *Recovered* (R) untuk manusia. Berikut ini adalah diagram model sebelum kontrol diterapkan:



Gambar 2.2. Diagram Kompartemen Model SIR-SI Penyebaran Virus Zika Sebelum di Kontrol (Andayani, P, 2020)

Berdasarkan persamaan diferensial dan definisi variabel serta

parameter yang disajikan, berikut adalah deskripsi dari model tersebut:

1. Persamaan untuk populasi manusia

$$\frac{dS_h}{dt} = \Lambda_h - \frac{\beta_1 S_h I_h}{1 + \alpha_1 I_h} - \beta_2 S_h I_v - \mu_h S_h \quad (2.8)$$

Persamaan ini menggambarkan laju perubahan subpopulasi manusia yang rentan terhadap infeksi seiring berjalannya waktu (S_h). Jumlah individu yang rentan akan bertambah dengan Λ_h , yang merepresentasikan laju kelahiran atau masuknya individu baru yang belum terinfeksi. Di sisi lain, jumlah ini berkurang melalui tiga mekanisme utama, yaitu: pertama berkurangnya subpopulasi *Susceptible* pada manusia akibat infeksi antar manusia karena adanya interaksi subpopulasi *Susceptible* dan subpopulasi *Infected* pada manusia $\frac{\beta_1 S_h I_h}{1 + \alpha_1 I_h}$ yang merupakan penerapan dari fungsi respon Holling Tipe II dengan model $\frac{\beta SI}{1 + \alpha I}$ yang memperhitungkan keterbatasan sumber daya pengobatan sehingga laju pengobatan tidak bisa terus-menerus meningkat tanpa batas (Kumar & Nilam, 2017); kedua infeksi tidak langsung melalui gigitan nyamuk dengan laju $\beta_2 S_h I_v$ dimana I_v adalah populasi nyamuk terinfeksi; ketiga penurunan akibat kematian alami subpopulasi *Susceptible* pada manusia dengan laju $\mu_h S_h$.

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{\beta_1 S_h I_h}{1 + \alpha_1 I_h} + \beta_2 S_h I_v - \gamma I_h - \mu_h I_h \quad (2.9)$$

Persamaan ini menggambarkan laju perubahan jumlah subpopulasi manusia yang terinfeksi seiring berjalannya waktu (I_h). Jumlah subpopulasi manusia yang terinfeksi

meningkat melalui dua mekanisme utama, yaitu: pertama bertambahnya subpopulasi *Infected* pada manusia akibat infeksi antar manusia karena adanya interaksi subpopulasi *Susceptible* dan subpopulasi *Infected* pada manusia $\frac{\beta_1 S_h I_h}{1 + \alpha_1 I_h}$ yang merupakan penerapan dari fungsi respon Holling Tipe II dengan model $\frac{\beta SI}{1 + \alpha I}$ yang memperhitungkan keterbatasan sumber daya pengobatan sehingga laju pengobatan tidak bisa terus-menerus meningkat tanpa batas (Kumar & Nilam, 2017), dan bertambah karena infeksi tidak langsung melalui gigitan nyamuk dengan laju $\beta_2 S_h I_v$ dimana I_v adalah populasi nyamuk terinfeksi. Namun, jumlah populasi *Infected* juga menurun melalui proses kesembuhan dengan laju γI_h serta akibat kematian alami subpopulasi *Infected* pada manusia dengan laju $\mu_h I_h$.

$$\frac{dR_h}{dt} = \gamma I_h - \mu_h R_h \quad (2.10)$$

Persamaan ini menunjukkan laju perubahan jumlah subpopulasi manusia *Recovered* seiring berjalannya waktu (R_h). Subpopulasi *Recovered* pada manusia bertambah melalui proses kesembuhan dari subpopulasi *Infected* dengan laju γI_h serta berkurang akibat kematian alami subpopulasi *Recovered* pada manusia dengan laju $\mu_h R_h$.

2. Persamaan untuk populasi nyamuk

$$\frac{dS_v}{dt} = \Lambda_v - \beta_3 S_v I_v - \mu_v S_v \quad (2.11)$$

Persamaan ini menunjukkan laju perubahan jumlah subpopulasi nyamuk *Susceptible* seiring berjalannya waktu

(S_v). Subpopulasi *Susceptible* pada nyamuk bertambah dengan laju Λ_v yang mempresentasikan laju kelahiran atau masuknya individu nyamuk yang rentan terhadap infeksi dan berkurangnya subpopulasi *Susceptible* pada nyamuk akibat adanya interaksi antara subpopulasi *Susceptible* dan subpopulasi *Infected* pada nyamuk dengan laju $\beta_3 S_v I_v$ dan berkurang akibat kematian alami subpopulasi *Susceptible* pada nyamuk dengan laju $\mu_h S_v$.

$$\frac{dI_v}{dt} = \beta_3 S_v I_v - \mu_v I_v \quad (2.12)$$

Persamaan ini menggambarkan laju perubahan subpopulasi individu nyamuk *Infected* seiring berjalannya waktu (I_v). Subpopulasi *Infected* pada nyamuk bertambah akibat adanya interaksi antara subpopulasi *Susceptible* dan subpopulasi *Infected* pada nyamuk dengan laju $\beta_3 S_v I_v$ dan berkurang akibat kematian alami subpopulasi *Infected* pada nyamuk dengan laju $\mu_h I_v$.

Model matematika untuk penyebaran virus Zika tanpa adanya kontrol dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$\begin{cases} \frac{dS_h}{dt} = \Lambda_h - \frac{\beta_1 S_h I_h}{1 + \alpha_1 I_h} - \beta_2 S_h I_v - \mu_h S_h \\ \frac{dI_h}{dt} = \frac{\beta_1 S_h I_h}{1 + \alpha_1 I_h} + \beta_2 S_h I_v - \gamma I_h - \mu_h I_h \\ \frac{dR_h}{dt} = \gamma I_h - \mu_h R_h \\ \frac{dS_v}{dt} = \Lambda_v - \beta_3 S_v I_v - \mu_v S_v \\ \frac{dI_v}{dt} = \beta_3 S_v I_v - \mu_v I_v \end{cases} \quad (2.13)$$

Model (2.13) merupakan model yang dikemukakan oleh Andayani dan Sari (2020) dalam artikel jurnal yang memperhitungkan laju penularan antara manusia dan nyamuk, laju kesembuhan, serta laju kematian untuk menggambarkan penyebaran virus Zika dalam populasi manusia dan nyamuk.

Pada model matematika penyebaran virus zika ini memiliki asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Model ini mengelompokkan populasi manusia ke dalam tiga kompartemen: *Susceptible* (S_h), *Infected* (I_h), dan *Recovered* (R_h). Populasi nyamuk terbagi menjadi *Susceptible* (S_v) dan *Infected* (I_v).
2. Infeksi antar manusia terjadi dengan laju β_1 yang dipengaruhi oleh faktor saturasi α_1 . Penularan infeksi dari nyamuk ke manusia dengan laju β_2 , dan penularan infeksi dari manusia *Susceptible* terhadap nyamuk *Infected* dengan laju β_3 .
3. Kematian individu manusia dan nyamuk terjadi dengan laju μ_h dan μ_v . Proses kesembuhan manusia dari infeksi berlangsung dengan laju γ .
4. Penggunaan alat kontrasepsi (u_1) mengurangi jumlah manusia *Susceptible*, pengobatan terapi (u_2) mempercepat kesembuhan individu *Infected*, dan penyemprotan insektisida (u_3) mengurangi jumlah nyamuk *Susceptible* dan *Infected*.

4. Model Holling

Fungsi respon dalam ekologi adalah jumlah makanan yang dimakan oleh *predator* sebagai fungsi kepadatan makanan. Holling (1965) memperkenalkan tiga fungsi respon, yaitu fungsi respon Holling tipe I, fungsi respon Holling tipe II, dan fungsi respon Holling tipe III (Ni'mah & Savitri, 2022).

1. Fungsi respon Holling tipe I

Fungsi Respon Tipe I terjadi pada predator yang cenderung pasif atau lebih memilih menunggu kedatangan mangsanya. Pada tipe ini, diasumsikan bahwa waktu yang dibutuhkan untuk mencari dan mengolah makanan diabaikan secara bersamaan. Secara umum, model fungsi ini dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(x) = cN$$

Dengan:

- $c \geq 0$: jumlah laju interaksi populasi mangsa dan pemangsa yang dikonsumsi oleh satu predator.
- $N \geq 0$: kepadatan populasi mangsa.

(Daud et al., 2022)

2. Fungsi respon Holling tipe II

Fungsi Respon Tipe II muncul pada predator yang aktif dalam memburu mangsanya. Pada fungsi ini, waktu yang diperlukan untuk memproses makanan saat predator memakan mangsanya sudah diperhitungkan. Ciri khasnya adalah laju serangan predator terhadap mangsa menjadi

semakin lambat (Daud et al., 2022). Dapat diturunkan secara langsung melalui langkah-langkah berikut:

- T adalah total waktu yang tersedia.
- T_h adalah waktu penanganan untuk setiap mangsa.
- N adalah jumlah potensi mangsa.
- V adalah jumlah mangsa yang berhasil ditangkap.

Diasumsikan bahwa jumlah mangsa yang berhasil ditangkap V sebanding dengan jumlah mangsa potensial dan waktu yang tersedia untuk mencari mangsa. Secara matematis, hubungan ini dituliskan sebagai:

$$V = \alpha(T - VT_h)N$$

Dimana α merupakan konstanta proporsionalitas. Dengan menyelesaikan persamaan tersebut untuk V , diperoleh:

$$V = \alpha(T - VT_h)N$$

$$V = \alpha TN - \alpha VT_h N$$

$$V + \alpha VT_h N = \alpha TN$$

$$V(1 + \alpha T_h N) = \alpha TN$$

$$\frac{V}{T} = \frac{\alpha N}{1 + \alpha T_h N}$$

Sehingga fungsi respon Holling tipe II diperoleh persamaan:

$$f(x) = \frac{\alpha N}{1 + \alpha T_h N}$$

Fungsi ini sering kali direpresentasikan dalam bentuk alternatif:

$$f(x) = \frac{cN}{a + N}$$

Dengan:

- $N \geq 0$: kepadatan populasi mangsa.
- $c \geq 0$: laju interaksi populasi mangsa dan pemangsa.
- $a \geq 0$: konstanta setengah jenuh (*half-saturation constant*)

(Kot, M., 2001).

Persamaan tersebut dapat diperoleh dari bentuk awal melalui proses penyederhanaan berikut:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\alpha N}{1 + \alpha T_h N} \\ &= \frac{\frac{(\alpha N)}{(\alpha T_h)}}{\frac{(1 + \alpha T_h N)}{(\alpha T_h)}} \\ &= \frac{(\frac{1}{T_h} N)}{(\frac{1}{\alpha T_h} + N)} \end{aligned}$$

Dari penyederhanaan tersebut maka diambil nilai $c = \frac{1}{T_h}$ dan $a = \frac{1}{\alpha T_h}$. Sehingga, bentuk alternatif fungsi respons Holling tipe II diperoleh sebagai:

$$f(x) = \frac{cN}{a + N}$$

3. Fungsi respon Holling tipe III

Fungsi Respon Tipe III terjadi pada predator yang cenderung beralih mencari populasi mangsa lain ketika jumlah mangsa utama yang biasa dimakan mulai menurun, sehingga variabel mangsa berubah menjadi p^2 dan menyebabkan percepatan laju pertumbuhan populasi. Secara umum, fungsi ini dapat dimodelkan sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{cN^2}{(a + N)^2}$$

Dengan:

- $N \geq 0$: kepadatan populasi mangsa.
- $c \geq 0$: laju interaksi populasi mangsa dan pemangsa.
- $a \geq 0$: konstanta setengah jenuh (*half-saturation constant*)

(Daud et al., 2022)

E. Teori Kontrol Optimal

Kontrol optimal merupakan salah satu bidang penting dalam matematika dan teknik, dengan prinsip penerapannya yang mirip dengan optimasi, yaitu mencari solusi terbaik (Syukron, 2022). Seiring dengan perkembangan waktu, kontrol optimal terus mengalami kemajuan. Pada tahun 1957 Richard Bellman memperkenalkan metode *dynamic programming* dan pada saat itu perkembangan signifikan dimulai setelah Perang Dunia II. Kemudian, pada tahun 1962, Pontryagin melanjutkan pengembangan tersebut dengan memperkenalkan metode

maximum principle untuk optimalitas dalam sistem kontrol yang mana untuk mencapai kontrol optimal harus ada kondisi tertentu yang dipenuhi (Venkateswarlu, 1996).

Masalah kontrol optimal yang berbentuk persamaan diferensial umumnya diasumsikan dengan $u(t)$ sebagai variabel kontrol dan $x(t)$ sebagai variabel *state* yang bersifat kontinu terhadap waktu t yang bisa disebut sebagai fungsi kendala. Fungsi tujuan dalam masalah kontrol optimal bertujuan meminimumkan atau memaksimumkan sebuah persamaan dilambangkan dengan J , biasanya dioptimalkan melalui perubahan pada variabel kontrol $u(t)$. Misalkan $I \subseteq \mathbb{R}$ dan terdapat $u(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu, serta $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu, apabila $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu dalam tiga variabel $(t, x(t), u(t))$, maka dapat dinyatakan dengan:

$$x'(t) = g(t, x(t), u(t)) \quad (2.14)$$

Persamaan diferensial akan berubah apabila variabel kontrol diubah. Hubungan variabel kontrol dan *state* dapat ditulis dengan $u(t) \rightarrow x = x(u)$, dalam artian $x(u)$ menunjukkan bahwa variabel x tidak bergantung pada t , melainkan bergantung pada variabel u . Kontrol optimal bertujuan menemukan kontrol yang kontinu $u(t)$ yang akan memaksimumkan atau meminimalkan fungsi tujuan (J) dengan variabel kontrol $u(t)$ dan variabel *state* yaitu:

$$\min_u \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.15)$$

dengan,

$$x'(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad \text{dan} \quad x(t_1) \text{ bebas.} \quad (2.16)$$

Kontrol maksimasi di atas disebut kontrol optimal dengan $x(t_1)$ bebas, yang artinya nilai $x(t_1)$ tidak dibatasi. Dalam konteks ini, fungsi f dan g dianggap selalu memiliki turunan yang kontinu terhadap semua variabel yang terlibat, yaitu $(t, x(t), u(t))$. Karena kontrol berupa $u(t)$ adalah fungsi yang selalu kontinu, maka keadaan-keadaan terkait akan selalu memiliki turunan sebagian demi sebagian. Sehingga fungsi tujuan dapat dirumuskan dengan:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.17)$$

dimana $x = x(u)$ adalah *state* yang sesuai.

Berdasarkan kondisi yang diperlukan, Pontryagin pada tahun 1950 memperkenalkan fungsi *costate* atau fungsi adjoint untuk menambahkan persamaan diferensial pada fungsi tujuan. Fungsi *costate* memiliki tujuan yang sama dengan pengali *lagrange* pada kalkulus multivariat, yaitu untuk menambahkan batasan pada fungsi di beberapa variabel yang dimaksimalkan atau diminimumkan (Lenhart & Workman, 2007).

1. Syarat Perlu Kontrol Optimal

Salah satu cara untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal adalah dengan menggunakan syarat perlu kontrol optimal, di mana u^* adalah kontrol optimal, sementara x^* sebagai variabel *state* yaitu $J(u) \leq J(u^*) < \infty$ untuk semua kontrol u . Kemudian dimisalkan $h(t)$ adalah fungsi yang kontinu sebagian demi sebagian dan $\varepsilon \in \mathbb{R}$ merupakan bilangan real kecil yang menuju nol $\varepsilon \rightarrow 0$, maka bentuk kontrol dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$u^\varepsilon(t) = u^*(t) + \varepsilon h(t) \quad (2.18)$$

Persamaan (2.18) adalah fungsi kontrol yang terdiri dari beberapa bagian fungsi kontinu yang terdefinisikan secara terpisah pada interval-interval tertentu. Misalkan x^ε adalah *state* yang sesuai dengan kontrol u^ε , maka x^ε memenuhi:

$$\frac{d}{dt}x^\varepsilon(t) = g(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) \quad (2.19)$$

Di mana x^ε adalah fungsi yang kontinu. Karena semua lintasan menuju ke *state* yang sama, maka diambil $x^\varepsilon(t_0) = x_0$. Diketahui $u^\varepsilon(t) \rightarrow u^*(t)$ untuk semua $\varepsilon \rightarrow 0$. Maka ini juga berlaku untuk semua t .

$$\left. \frac{\partial u^\varepsilon(t)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = h(t) \quad (2.20)$$

Selain itu, fungsi tujuan dari u^ε didefinisikan sebagai:

$$J(u^\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) dt \quad (2.21)$$

diperoleh syarat optimalitas dalam bentuk:

$$f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_u(t, x^*(t), u^*(t)) = 0 \quad (2.22)$$

untuk setiap $t_0 \leq t \leq t_1$.

Untuk menyusun kondisi optimal secara lebih sistematis, tidak perlu lagi menurunkan ulang turunan parsial $f_u + \lambda g_u$ secara manual setiap kali. Sebagai gantinya, bisa menggunakan pendekatan *Hamiltonian*, yang mendefinisikan fungsi:

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda \cdot g(t, x, u)$$

Fungsi ini menyatukan dua komponen utama: integran $f(t, x, u)$ dan bagian *adjoint* $\lambda \cdot g(t, x, u)$. Dengan menggunakan Hamiltonian, seluruh syarat optimal dapat diperoleh cukup dengan melakukan turunan parsial dari satu fungsi saja. Kondisi-kondisi tersebut meliputi:

- **Kondisi stasioner**

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

- **Persamaan *state***

$$x'(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

- **Persamaan *costate***

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

(Lenhart dan Workman, 2007)

2. Metode Runge-Kutta Orde 4

Dalam menyelesaikan permasalahan kontrol optimal, metode yang biasanya digunakan adalah metode Runge-Kutta orde 4 karena memberikan tingkat akurasi yang lebih baik dibandingkan metode Euler maupun metode Runge-Kutta dengan orde yang lebih rendah. Dengan metode Runge-Kutta orde 4, solusi yang diperoleh akan lebih mendekati nilai sebenarnya dari sistem yang dianalisis. Hasil yang diperoleh tersebut sangat penting dalam kontrol optimal di mana keputusan harus didasarkan pada prediksi

yang akurat. Diberikan langkah sebagai berikut (Lenhart & Workman, 2007):

$$x(t) = x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

dengan,

$$k_1 = f(x(t))$$

$$k_2 = f\left(x(t) + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x(t) + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(x(t) + hk_3)$$

3. Metode Sweep Maju-Mundur

Penelitian ini menggunakan prinsip minimum pontryagin untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal. Prinsip ini bertujuan untuk menentukan kontrol optimal dalam sistem dinamis, yang membawa sistem dari *state* awal ke *state* akhir dengan cara memaksimalkan fungsi objektif. Prinsip ini dikembangkan oleh L.S. Pontryagin pada tahun 1950 dan kemudian dikenal sebagai prinsip maksimum pontryagin. Kontrol $u(t)$ dibatasi dalam himpunan U , yaitu $u(t) \in U$. Prinsip ini secara umum menyatakan bahwa persamaan Hamiltonian harus dimaksimalkan dalam himpunan kontrol (Bryson & Ho, 1975). Berikut adalah tahapan dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal dengan menggunakan prinsip minimum pontryagin:

1. Membentuk Fungsi Hamiltonian

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) g_i(t, x, u) \quad (2.23)$$

di mana f adalah integral dari fungsi tujuan yang dioptimalkan dan g merupakan persamaan *state*, dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Fungsi Hamiltonian dilambangkan dengan H , dan terdiri dari empat variabel, yaitu variabel waktu (t), variabel kontrol (u), variabel *state* (x), variabel *costate* λ .

2. Menentukan u_k^* yang memenuhi kondisi stasioner

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0, \forall k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.24)$$

dengan $0 \leq u_k \leq 1$, maka nilai kontrol optimal $u_k(t)$ dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$u_k^* = \min\{\max(0, u_k), 1\}, \forall k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.25)$$

3. Menentukan persamaan *state* dan *costate*

$$\dot{x}'(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.26)$$

$$\dot{\lambda}'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \forall j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.27)$$

4. Menetapkan kondisi optimal dengan mensubstitusikan u_k^* pada persamaan *state* dan *costate*.

Kemudian, untuk mengatasi permasalahan kontrol optimal, salah satu pendekatan numerik yang diterapkan yaitu metode *sweep* maju mundur dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde-4 untuk menganalisis kontrol dalam model penyebaran virus Zika, yang bertujuan untuk memperoleh solusi numerik. Langkah-langkah dalam metode *sweep* maju mundur dapat dijelaskan sebagai berikut (Lenhart dan Workman, 2007):

1. Menentukan dugaan nilai awal untuk variabel kontrol u .
2. Untuk menyelesaikan persamaan *state*, digunakan nilai awal u dan kondisi awal $x(0) = x_0$ melalui langkah maju dengan metode Runge-Kutta orde-4.

$$\begin{aligned}
 i &= 1 : N \\
 k_1 &= f(x_i, u_i), \\
 k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}k_1, \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1})\right), \\
 k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}k_2, \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1})\right), \\
 k_4 &= f(x_i + hk_3, u_{i+1}), \\
 x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).
 \end{aligned}$$

3. Untuk menyelesaikan persamaan *costate*, digunakan nilai u , x , dan kondisi transversal $\lambda(t_1) = 0$ melalui langkah mundur dengan metode Runge-Kutta orde-4.

$$\begin{aligned}
i &= 1 : N \\
j &= N + 2 - i, \\
k_1 &= f(\lambda_j, x_j, u_j), \\
k_2 &= f\left(\lambda_j - \frac{h}{2}k_1, \frac{1}{2}(x_j + x_{j-1}), \frac{1}{2}(u_j + u_{j-1})\right), \\
k_3 &= f\left(\lambda_j - \frac{h}{2}k_2, \frac{1}{2}(x_j + x_{j-1}), \frac{1}{2}(u_j + u_{j-1})\right), \\
k_4 &= f(\lambda_j - hk_3, x_{j-1}, u_{j-1}), \\
\lambda_{j-1} &= \lambda_j - \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).
\end{aligned}$$

4. Untuk memperoleh kontrol optimal u perlu menggantikan nilai x dan λ yang baru ke dalam karakteristik u .
5. Memeriksa konvergensi solusi, jika error sudah cukup kecil, maka hasil dianggap sebagai solusi optimal dan iterasi dihentikan. Jika belum, maka proses dilanjutkan kembali ke langkah kedua. Pada metode Runge-Kutta orde-4, nilai error tidak otomatis berhenti, sehingga batas toleransi error ditentukan sendiri sesuai kebutuhan analisis.

F. Kajian Penelitian Terdahulu

Berikut beberapa penelitian terdahulu yang berkaitan dengan kontrol optimal penyebaran penyakit yang digunakan sebagai acuan oleh peneliti dalam penelitian ini.

Tabel 2.3. Tabel perbandingan penelitian terdahulu

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
1	Penelitian oleh Denua, D., & Son, H. (2022) pada artikel jurnal <i>Analysis and optimal control of a deterministic Zika virus model</i>.	Sama-sama membahas penyebaran virus Zika dengan menambahkan kontrol optimal berupa pengobatan.	Pada artikel jurnal ini, terdapat dua kontrol optimal yang digunakan, yaitu pencegahan kontak antara manusia dan nyamuk serta pengobatan. artikel Jurnal ini tidak hanya berfokus pada kontrol optimal tetapi juga mencakup analisis kestabilan. Sementara itu, penelitian ini menggunakan tiga strategi kontrol optimal, yaitu penggunaan alat kontrasepsi, pengobatan, dan penyemprotan insektisida, dengan fokus utama pada kontrol optimal saja.

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
2	Artikel jurnal berjudul <i>The effect of demographic stochasticity on Zika virus transmission dynamics: Probability of disease extinction, sensitivity analysis, and mean first passage time</i> oleh Maity, S. dan Mandal, P.S. (2024).	Sama-sama menggunakan topik penyebaran virus Zika.	Populasi dalam artikel jurnal ini dibagi menjadi empat subpopulasi (<i>Susceptible - Infected</i>) pada manusia dan nyamuk, tanpa menerapkan strategi kontrol optimal, dan berfokus pada analisis kestabilan. Sementara itu, dalam penelitian ini, terdapat tambahan subpopulasi (<i>recovered</i>) pada populasi manusia sehingga menggunakan model <i>SIR-SI</i> . Penelitian ini berfokus pada strategi kontrol optimal, yaitu penggunaan alat kontrasepsi, pengobatan, dan penyemprotan insektisida.

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
3	Penelitian analisis kestabilan virus Zika pada artikel jurnal <i>A new mathematical model for Zika virus transmission</i> oleh Rezapour Shahram, dkk (2020).	Sama-sama menggunakan topik penyebaran virus Zika dan menggunakan model matematika <i>SIR-SI</i> .	Artikel jurnal ini fokus pada analisis kestabilan dengan menggunakan turunan fraksional Caputo, sedangkan penelitian ini berfokus pada kontrol optimal.
4	Penelitian terdahulu <i>Mathematical model of Zika virus dynamics with vector control and sensitivity analysis</i> oleh Biswas, S.K. dkk (2019).	Sama-sama membahas tentang penyebaran virus Zika.	Artikel jurnal ini menggunakan model matematika <i>SEIR-SEI</i> , sedangkan penelitian ini kompartemen <i>E</i> pada manusia dan nyamuk diabaikan sehingga menggunakan model <i>SIR-SI</i> .

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
5	Artikel jurnal berjudul <i>Mathematical Study For Zika Virus Transmission With General Incidence Rate</i> oleh Alshehri, A., & El Hajji, M. (2022).	Sama-sama menggunakan model matematika SIR-SI dan kontrol optimal berupa pengobatan.	Penelitian pada jurnal ini mengenai analisis kestabilan serta penambahan kontrol optimal berupa pengobatan. Sedangkan, pada penelitian ini lebih berfokus pada penerapan kontrol optimal saja dengan tiga strategi kontrol optimal.

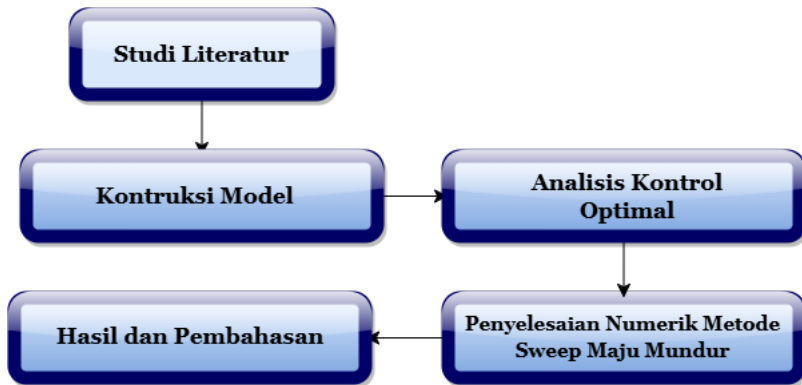
Dengan demikian, meskipun penelitian-penelitian ini memiliki kesamaan dalam topik yang dibahas, yaitu penyebaran virus Zika, terdapat perbedaan dalam pendekatan dan metode yang digunakan, yang memberikan perspektif yang berbeda terhadap permasalahan yang sama.

BAB III

METODE PENELITIAN

A. Diagram Alir Penelitian

Pada bagian ini, disajikan diagram alir yang menggambarkan tahapan-tahapan dalam penelitian ini. Diagram alir ini memberikan gambaran umum tentang prosedur yang digunakan, mulai dari studi literatur, pengembangan model, hingga analisis kontrol optimal, penyelesaian simulasi numerik, dan akhirnya hasil serta kesimpulan yang diperoleh.



Gambar 3.1. Diagram Alir Penelitian

B. Metode Penelitian

Di dalam bab ini dijelaskan serangkaian tahapan dan prosedur yang diterapkan dalam penelitian, mencakup studi literatur, pengembangan model, analisis kontrol optimal, penyelesaian

simulasi numerik dengan metode maju mundur, serta penyajian hasil dan kesimpulan.

1. Studi Literatur

Tahap ini dilakukan untuk mengidentifikasi masalah melalui pengumpulan teori-teori yang relevan dan pencarian materi pendukung dari berbagai referensi seperti buku, jurnal, makalah, artikel, dan sumber lainnya yang relevan dengan penelitian mengenai penyebaran virus Zika.

2. Pengembangan Model

Tahap pertama dalam penelitian ini adalah melakukan modifikasi pada model penyebaran virus Zika dengan menciptakan model baru. Model yang akan dimodifikasi merupakan model yang sebelumnya telah dipaparkan oleh Andayani (2020).

3. Analisis Kontrol Optimal

Beberapa langkah dalam tahap ini meliputi pengembangan model kontrol optimal penyebaran virus Zika, yang kemudian diselesaikan menggunakan metode sweep maju mundur. Langkah-langkah yang ditempuh mencakup pembentukan fungsi Hamilton, penetapan persamaan *state* dan *costate*, serta identifikasi kondisi batas yang perlu dipenuhi untuk menentukan kontrol yang optimal.

4. Penyelesaian Simulasi Numerik dengan Metode Sweep Maju Mundur

Setelah sistem yang optimal ditemukan, langkah selanjutnya adalah mencari penyelesaian simulasi numeriknya

menggunakan *software* MATLAB R2013a. Tahap pertama dalam penyelesaian simulasi numerik ini adalah menetapkan variabel serta nilai parameter yang akan dipakai. Penyelesaian simulasi numerik dari model matematika dilakukan menggunakan metode sweep maju mundur, di mana *state* berperan sebagai langkah maju (*forward*) dan *costate* sebagai langkah mundur (*backward*), dengan penerapan metode Runge Kutta Orde 4.

5. Hasil dan Pembahasan

Pada tahap ini, setelah hasil simulasi diperoleh, peneliti akan menarik kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan. Selain itu, peneliti akan menyampaikan saran untuk pengembangan penelitian ini agar dapat ditingkatkan untuk studi-studi yang akan datang.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini, akan dibahas secara rinci mengenai pemodelan matematika ($SIR - SI$) dalam penyebaran virus Zika dengan mempertimbangkan tiga strategi kontrol optimal yang dapat digunakan, yaitu (u_1) penggunaan alat kontrasepsi, (u_2) pengobatan, dan (u_3) penyemprotan insektisida. Selain itu, dilakukan analisis numerik menggunakan perangkat lunak MATLAB R2013a.

A. Deskripsi Model Penyebaran Virus Zika

Model dinamika yang diterapgunakan dalam penelitian ini merupakan hasil modifikasi dari model yang telah dipaparkan dalam jurnal yang ditulis oleh Puji Andayani dan Lisa Risfana Sari dengan judul "*A Modified Model of Zika Virus Spread with Saturated Incidence Rate: Modelling and Stability Analysis*". Model ini dikonstruksi ulangsusun dengan sejumlah asumsi yang dibuat agar lebih sesuai dengan kondisi yang akan dianalisis dalam penelitian ini. Asumsi-asumsi tersebut adalah sebagai berikut:

1. Model terdiri dari dua populasi, yaitu populasi manusia (N_h) dan populasi nyamuk (N_v), yang masing-masing dibagi ke dalam beberapa sub-populasi, antara lain:

Populasi manusia (N_h):

- S_h merupakan individu dalam kategori *Susceptible*, yaitu mereka yang masih rentan terhadap infeksi virus

Zika.

- I_h merupakan individu dalam kategori *Infected*, yaitu mereka yang telah terinfeksi virus Zika.
- R_h merupakan individu dalam kategori *Recovered*, yaitu mereka yang sedang dalam proses pemulihan dari infeksi virus Zika.

Populasi nyamuk (N_v):

- S_v merupakan nyamuk dalam kategori *Susceptible*, yaitu yang belum terinfeksi virus Zika tetapi berisiko tertular.
- I_v merupakan nyamuk dalam kategori *Infected*, yaitu yang telah terinfeksi virus Zika dan berpotensi menularkan virus ke manusia.

Jumlah total populasi manusia dan nyamuk dinyatakan sebagai:

$$N_h(t) = S_h(t) + I_h(t) + R_h(t)$$

$$N_v(t) = S_v(t) + I_v(t)$$

2. Parameter-paramater dalam model dinamik ini didefinisikan sebagai berikut:

- Λ_h merupakan laju pertambahan individu manusia yang masuk ke dalam populasi manusia *susceptible*
- Λ_v merupakan laju pertambahan individu nyamuk yang masuk ke dalam populasi nyamuk *susceptible*
- β_1 merupakan laju penularan penyakit secara langsung

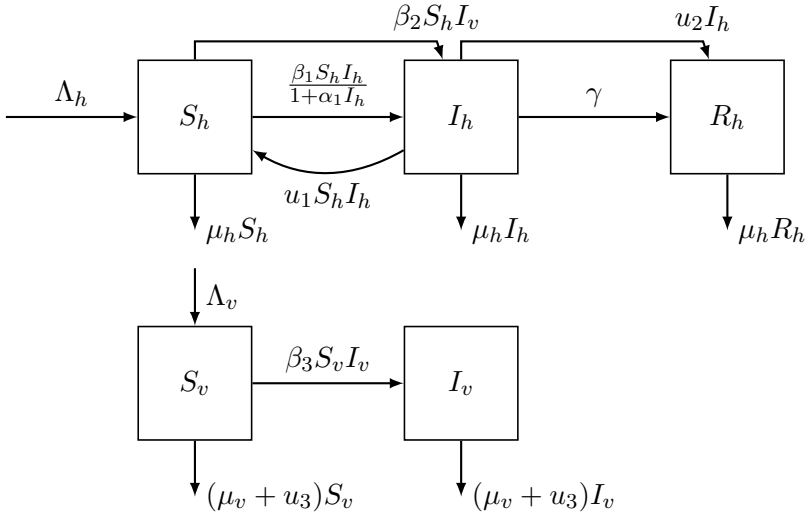
- β_2 merupakan laju penularan penyakit dari nyamuk ke manusia
- β_3 merupakan probabilitas penularan penyakit dari manusia ke nyamuk
- γ merupakan laju kesembuhan per kapita dari populasi yang terinfeksi
- α_1 merupakan ukuran penghambatan
- μ_h merupakan laju kematian manusia
- μ_v merupakan laju kematian nyamuk

3. Kontrol optimal dalam model dinamik ini didefinisikan sebagai berikut:

- u_1 merupakan kontrol terhadap penggunaan alat kontrasepsi
- u_2 merupakan kontrol terhadap pengobatan bagi individu manusia yang terinfeksi dengan terapi
- u_3 merupakan kontrol terhadap penyemprotan insektisida

Total jumlah populasi manusia dinyatakan dengan $N_h = S_h + I_h + R_h$ dan total jumlah populasi nyamuk dinyatakan dengan $H_v = S_v + I_v$. Dimana S_h, I_h, R_h, S_v , dan I_v merupakan notasi variabel yang menyatakan jumlah individu manusia dan nyamuk pada masing-masing sub-populasi.

Berikut ini merupakan diagram kompartemen untuk model matematika $SIR - SI$ pada penyebaran virus Zika dan asumsi-asumsi yang telah disebutkan, dengan penambahan kontrol optimal penggunaan alat kontrasepsi, pengobatan, dan penyemprotan insektisida.



Gambar 4.1. Diagram Kompartemen Model SIR-SI Penyebaran Virus Zika dengan Kontrol Penggunaan Alat Kontrasepsi, Pengobatan, dan Penyemprotan Insektisida

Berdasarkan diagram kompartemen model penularan virus Zika di atas, uraian detailnya adalah sebagai berikut:

1. Persamaan untuk populasi manusia

$$\frac{dS_h}{dt} = \Lambda_h - \frac{\beta_1 S_h I_h}{1 + \alpha_1 I_h} - \beta_2 S_h I_v - \mu_h S_h + u_1 S_h I_h \quad (4.1)$$

Persamaan ini menggambarkan laju perubahan subpopulasi manusia yang rentan terhadap infeksi seiring berjalannya waktu (S_h). Jumlah individu yang rentan akan bertambah dengan Λ_h , yang merepresentasikan laju kelahiran atau masuknya individu baru yang belum terinfeksi. Di sisi lain, jumlah ini berkurang melalui tiga mekanisme utama,

yaitu: pertama berkurangnya subpopulasi *Susceptible* pada manusia akibat infeksi antar manusia karena adanya interaksi subpopulasi *Susceptible* dan subpopulasi *Infected* pada manusia $\frac{\beta_1 S_h I_h}{1 + \alpha_1 I_h}$ yang merupakan penerapan dari fungsi respon Holling Tipe II dengan model $\frac{\beta SI}{1 + \alpha I}$ yang memperhitungkan keterbatasan sumber daya pengobatan sehingga laju pengobatan tidak bisa terus-menerus meningkat tanpa batas (Kumar & Nilam, 2017), sehingga terdapat penambahan kontrol dengan penggunaan alat kontrasepsi yang bertujuan untuk mencegah penularan oleh subpopulasi *Susceptible* yang berinteraksi dengan subpopulasi *Infected* pada manusia melalui hubungan seksualitas (interaksi kontak badan dengan subpopulasi manusia yang terinfeksi virus Zika) dengan laju $u_1 S_h I_h$; kedua infeksi tidak langsung melalui gigitan nyamuk dengan laju $\beta_2 S_h I_v$ dimana I_v adalah populasi nyamuk terinfeksi; ketiga penurunan akibat kematian alami subpopulasi *Susceptible* pada manusia dengan laju $\mu_h S_h$.

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{\beta_1 S_h I_h}{1 + \alpha_1 I_h} + \beta_2 S_h I_v - \gamma I_h - \mu_h I_h - u_1 S_h I_h - u_2 I_h \quad (4.2)$$

Persamaan ini menggambarkan laju perubahan jumlah subpopulasi manusia yang terinfeksi seiring berjalannya waktu (I_h). Jumlah subpopulasi manusia yang terinfeksi meningkat melalui dua mekanisme utama, yaitu: pertama bertambahnya subpopulasi *Infected* pada manusia akibat infeksi antar manusia karena adanya interaksi subpopulasi *Susceptible* dan subpopulasi *Infected* pada manusia $\frac{\beta_1 S_h I_h}{1 + \alpha_1 I_h}$

yang merupakan penerapan dari fungsi respon Holling Tipe II dengan model $\frac{\beta SI}{1+\alpha I}$ memperhitungkan keterbatasan sumber daya pengobatan sehingga laju pengobatan tidak bisa terus-menerus meningkat tanpa batas (Kumar & Nilam, 2017), dan bertambah karena infeksi tidak langsung melalui gigitan nyamuk dengan laju $\beta_2 S_h I_v$ dimana I_v adalah populasi nyamuk terinfeksi. Namun, jumlah populasi *Infected* juga menurun melalui empat mekanisme, yaitu: pertama berkurang karena adanya proses kesembuhan dengan laju γI_h ; kedua berkurang akibat kematian alami subpopulasi *Infected* pada manusia dengan laju $\mu_h I_h$; ketiga berkurang karena terdapat penambahan kontrol dengan penggunaan alat kontrasepsi yang bertujuan untuk mencegah penularan oleh subpopulasi *Susceptible* yang berinteraksi dengan subpopulasi *Infected* pada manusia melalui hubungan seksualitas (interaksi kontak badan dengan subpopulasi manusia yang terinfeksi virus Zika) dengan laju $u_1 S_h I_h$; keempat berkurang karena adanya penambahan upaya kontrol optimal berupa pengobatan dengan melakukan terapi simptomatik seperti acetaminophen untuk demam, antihistamin untuk ruam, serta pengembangan vaksin (Maulana et al., 2022) dengan laju $u_2 I_h$.

$$\frac{dR_h}{dt} = \gamma I_h - \mu_h R_h + u_2 I_h \quad (4.3)$$

Persamaan ini menunjukkan laju perubahan jumlah subpopulasi manusia *Recovered* seiring berjalannya waktu (R_h). Subpopulasi *Recovered* pada manusia bertambah

melalui proses kesembuhan dari subpopulasi *Infected* dengan laju γI_h dan bertambah karena adanya penambahan upaya kontrol optimal berupa pengobatan dengan melakukan terapi simptomatik seperti acetaminophen untuk demam, antihistamin untuk ruam, serta pengembangan vaksin (Maulana et al.,2022) dengan laju $u_2 I_h$, serta berkurang akibat kematian alami subpopulasi *Recovered* pada manusia dengan laju $\mu_h R_h$.

2. Persamaan untuk populasi nyamuk

$$\frac{dS_v}{dt} = \Lambda_v - \beta_3 S_v I_v - \mu_v S_v - u_3 S_v \quad (4.4)$$

Persamaan ini menunjukkan laju perubahan jumlah subpopulasi nyamuk *Susceptible* seiring berjalannya waktu (S_v). Subpopulasi *Susceptible* pada nyamuk bertambah dengan laju Λ_v yang mempresentasikan laju kelahiran atau masuknya individu nyamuk yang rentan terhadap infeksi dan berkurangnya subpopulasi *Susceptible* pada nyamuk akibat adanya interaksi antara subpopulasi *Susceptible* dan subpopulasi *Infected* pada nyamuk dengan laju $\beta_3 S_v I_v$. Selain itu, subpopulasi *Susceptible* pada nyamuk akan berkurang akibat kematian alami dengan laju $\mu_h S_v$ dan berkurang karena adanya penambahan upaya kontrol optimal berupa penyemprotan insektisida dengan sistem pengasapan menggunakan Laden50ec (Malathion 500 g/l) yang bertujuan untuk mengurangi jumlah populasi nyamuk (Latif, Sunarsih, & Windusari, 2023) dengan laju $u_3 S_v$.

$$\frac{dI_v}{dt} = \beta_3 S_v I_v - \mu_v I_v - u_3 I_v \quad (4.5)$$

Persamaan ini menggambarkan laju perubahan subpopulasi individu nyamuk *Infected* seiring berjalannya waktu (I_v). Subpopulasi *Infected* pada nyamuk bertambah akibat adanya interaksi antara subpopulasi *Susceptible* dan subpopulasi *Infected* pada nyamuk dengan laju $\beta_3 S_v I_v$. Sedangkan subpopulasi *Infected* pada nyamuk berkurang akibat kematian alami dengan laju $\mu_h I_v$ dan berkurang karena adanya penambahan upaya kontrol optimal berupa penyemprotan insektisida dengan sistem pengasapan menggunakan Laden50ec (Malathion 500 g/l) yang bertujuan untuk mengurangi jumlah populasi nyamuk (Latif, Sunarsih, & Windusari, 2023) dengan laju $u_3 I_v$.

Dari penjabaran diatas dapat dituliskan model matematika penyebaran virus Zika setelah diberikan tiga strategi kontrol optimal adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS_h}{dt} &= \Lambda_h - \frac{\beta_1 S_h I_h}{1 + \alpha_1 I_h} - \beta_2 S_h I_v - \mu_h S_h + u_1 S_h I_h \\ \frac{dI_h}{dt} &= \frac{\beta_1 S_h I_h}{1 + \alpha_1 I_h} + \beta_2 S_h I_v - \gamma I_h - \mu_h I_h - u_1 S_h I_h - u_2 I_h \\ \frac{dR_h}{dt} &= \gamma I_h - \mu_h R_h + u_2 I_h \\ \frac{dS_v}{dt} &= \Lambda_v - \beta_3 S_v I_v - \mu_v S_v - u_3 S_v \\ \frac{dI_v}{dt} &= \beta_3 S_v I_v - \mu_v I_v - u_3 I_v \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dari formulasi model matematika penyebaran penularan virus

Zika tersebut akan dilakukan analisis kontrol optimal.

B. Penyelesaian Kontrol Optimal pada Model Penyebaran Virus Zika

Permasalahan kontrol optimal dapat diselesaikan dengan memenuhi syarat yang ditetapkan dalam Prinsip Minimum Pontryagin. Penyelesaian ini dilakukan menggunakan metode *forward-backward sweep* sebagai berikut:

1. Menentukan Fungsi Tujuan

Fungsi objektif dalam masalah ini dirumuskan untuk meminimalkan jumlah sub-populasi manusia yang terinfeksi virus Zika (I_h) dan sub-populasi nyamuk yang terinfeksi virus Zika (I_v) dengan diberikan tindakan kontrol optimal penggunaan alat kontrasepsi, pengobatan, dan penyemprotan insektisida. Kontrol penggunaan alat kontrasepsi berfungsi untuk mengurangi risiko penularan melalui kontak seksual, terutama pada pasangan yang salah satu terinfeksi virus Zika. Pengobatan berfungsi untuk mempercepat proses penyembuhan, serta meminimalisir populasi manusia yang terinfeksi virus Zika. Sedangkan kontrol penyemprotan insektisida dilakukan untuk mengurangi populasi nyamuk yang secara langsung mengurangi peluang penyebaran virus Zika karena nyamuk menjadi vektor utama penyebaran virus Zika. Sehingga diperoleh fungsi tujuan setelah diberikan kontrol sebagai berikut:

$$J(u_1, u_2, u_3) = \int_{t_0}^T (I_h + I_v + Au_1^2 + Bu_2^2 + Cu_3^2) dt \quad (4.7)$$

Fungsi tujuan ini bertujuan untuk menekan jumlah populasi manusia dan nyamuk yang terinfeksi, sekaligus meminimalkan biaya yang dikeluarkan untuk menerapkan kontrol.

Selanjutnya yaitu menentukan kontrol optimal u_1^*, u_2^*, u_3^* sedemikian sehingga berlaku :

$$J(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = \min\{J(u_1, u_2, u_3) | u_1, u_2, u_3 \in U\} \quad (4.8)$$

dengan himpunan kontrol U didefinisikan sebagai:

$$U = \{(u_1, u_2, u_3) | 0 \leq u_1 \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 1, 0 \leq u_3 \leq 1\}$$

Berdasarkan buku *Optimal Control Applied to Biological Models*, Lenhart dan Workman menjelaskan bahwa kontrol u_i (dengan $i = 1, 2, 3$) sering kali merepresentasikan proporsi dari suatu tindakan atau intervensi, seperti tingkat penggunaan obat atau vaksinasi. Oleh karena itu, nilai kontrol dibatasi dalam interval $[0, 1]$, di mana nilai 0 berarti tidak ada kontrol yang diterapkan dan nilai 1 berarti kontrol diterapkan secara penuh atau 100%. Batasan ini mencerminkan kenyataan biologis bahwa penerapan kontrol tidak dapat melebihi kapasitas maksimal atau 100%, sehingga nilai di luar rentang tersebut tidak diperkenankan (Lenhart & Workman, 2007).

2. Menentukan Persamaan Hamiltonian

Persamaan Hamiltonian H dirumuskan dengan menggabungkan fungsi tujuan dengan hasil perkalian fungsi kendala dan pengali *lagrange*. Persamaan yang diperoleh memiliki bentuk sebagai berikut:

$$H = I_h + I_v + Au_1^2 + Bu_2^2 + Cu_3^2 + \sum_{i=1}^5 \lambda_i g_i \quad (4.9)$$

Dengan g_i sebagai kendala atau *state*, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{dS_h}{dt} = \Lambda_h - \frac{\beta_1 S_h I_h}{1 + \alpha_1 I_h} - \beta_2 S_h I_v - \mu_h S_h + u_1 S_h I_h \\ g_2 &= \frac{dI_h}{dt} = \frac{\beta_1 S_h I_h}{1 + \alpha_1 I_h} + \beta_2 S_h I_v - \gamma I_h - \mu_h I_h - u_1 S_h I_h - u_2 I_h \\ g_3 &= \frac{dR_h}{dt} = \gamma I_h - \mu_h R_h + u_2 I_h \\ g_4 &= \frac{dS_v}{dt} = \Lambda_v - \beta_3 S_v I_v - \mu_v S_v - u_3 S_v \\ g_5 &= \frac{dI_v}{dt} = \beta_3 S_v I_v - \mu_v I_v - u_3 I_v \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dan λ_i adalah pengali *lagrange* sebagai variabel *costate* dengan λ_1 untuk g_1 , λ_2 untuk g_2 , λ_3 untuk g_3 , λ_4 untuk g_4 , dan λ_5 untuk g_5 . Jika dijabarkan maka diperoleh Persamaan Hamiltonian sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H &= I_h + I_v + Au_1^2 + Bu_2^2 + Cu_3^2 \\ &+ \lambda_1 \left(\Lambda_h - \frac{\beta_1 S_h I_h}{1 + \alpha_1 I_h} - \beta_2 S_h I_v - \mu_h S_h + u_1 S_h I_h \right) \\ &+ \lambda_2 \left(\frac{\beta_1 S_h I_h}{1 + \alpha_1 I_h} + \beta_2 S_h I_v - \gamma I_h - \mu_h I_h - u_1 S_h I_h - u_2 I_h \right) \\ &+ \lambda_3 (\gamma I_h - \mu_h R_h + u_2 I_h) \\ &+ \lambda_4 (\Lambda_v - \beta_3 S_v I_v - \mu_v S_v - u_3 S_v) \\ &+ \lambda_5 (\beta_3 S_v I_v - \mu_v I_v - u_3 I_v) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Solusi optimal dari persamaan Hamiltonian diperoleh jika memenuhi tiga syarat, yaitu kondisi stasioner, persamaan *state*, dan persamaan *costate*.

3. Kondisi Stasioner

Kondisi stasioner diperoleh dengan mengoptimalkan kontrol. Kondisi stasioner sendiri adalah kondisi dimana kontrol optimal u_1 , u_2 , dan u_3 , dapat meminimumkan bentuk Hamiltonian terhadap waktu. Dimana turunan pertama persamaan Hamiltonian terhadap masing-masing kontrol u_1 , u_2 , dan u_3 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 &\iff 2Au_1 + \lambda_1 S_h I_h - \lambda_2 S_h I_h \\ &\iff 2Au_1 = (\lambda_2 - \lambda_1) S_h I_h \\ &\iff u_1 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) S_h I_h}{2A}\end{aligned}\tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 &\iff 2Bu_2 - \lambda_2 I_h + \lambda_3 I_h \\ &\iff 2Bu_2 = \lambda_2 I_h - \lambda_3 I_h \\ &\iff u_2 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_3) I_h}{2B}\end{aligned}\tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u_3} = 0 &\iff 2Cu_3 - \lambda_4 S_v - \lambda_5 I_v \\ &\iff 2Cu_3 = \lambda_4 S_v + \lambda_5 I_v \\ &\iff u_3 = \frac{\lambda_4 S_v + \lambda_5 I_v}{2C}\end{aligned}\tag{4.14}$$

Diketahui bahwa $0 \leq u_1 \leq 1$, $0 \leq u_2 \leq 1$, dan $0 \leq u_3 \leq 1$, maka nilai kontrol optimal u_1^* , u_2^* , dan u_3^* dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$u_1^* = \min\{1, \max(0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) S_h I_h}{2A})\}\tag{4.15}$$

$$u_2^* = \min\{1, \max(0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_3) I_h}{2B})\}\tag{4.16}$$

dan

$$u_3^* = \min\{1, \max(0, \frac{\lambda_4 S_v + \lambda_5 I_v}{2C})\} \quad (4.17)$$

4. Persamaan State

Dalam masalah kontrol optimal, persamaan *state* juga dikenal sebagai persamaan kendala. Persamaan ini dapat diperoleh dengan menurunkan persamaan Hamiltonian terhadap variabel *costate* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} &= \frac{dS_h}{dt} = \Lambda_h - \frac{\beta_1 S_h I_h}{1 + \alpha_1 I_h} - \beta_2 S_h I_v - \mu_h S_h + u_1 S_h I_h \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} &= \frac{dI_h}{dt} = \frac{\beta_1 S_h I_h}{1 + \alpha_1 I_h} + \beta_2 S_h I_v - \gamma I_h - \mu_h I_h - u_1 S_h I_h - u_2 I_h \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} &= \frac{dR_h}{dt} = \gamma I_h - \mu_h R_h + u_2 I_h \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_4} &= \frac{dS_v}{dt} = \Lambda_v - \beta_3 S_v I_v - \mu_v S_v - u_3 S_v \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_5} &= \frac{dI_v}{dt} = \beta_3 S_v I_v - \mu_v I_v - u_3 I_v \end{aligned} \quad (4.18)$$

dimana diketahui bahwa kondisi awal $Sh(0) = Sh_0, Ih(0) = Ih_0, Rh(0) = Rh_0, Sv(0) = Sv_0, Iv(0) = Iv_0$.

5. Persamaan Costate

Persamaan *costate* diperoleh dengan menurunkan fungsi Hamiltonian terhadap variabel *state* dan mengambil nilainya secara negatif. Dengan demikian, persamaan *costate* yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial S_h} \\
&= \lambda_1 \left(\frac{\beta_1 I_h}{1 + \alpha_1 I_h} + \beta_2 I_v + \mu_h - u_1 I_h \right) \\
&\quad - \lambda_2 \left(\frac{\beta_1 I_h}{1 + \alpha_1 I_h} + \beta_2 I_v - u_1 I_h \right), \\
\frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial I_h} \\
&= -1 + \lambda_1 \left(\frac{\beta_1 S_h}{1 + \alpha_1 I_h} - u_1 S_h \right) \\
&\quad - \lambda_2 \left(\frac{\beta_1 S_h}{1 + \alpha_1 I_h} - \gamma - \mu_h - u_2 - u_1 S_h \right) \\
&\quad - \lambda_3 (\gamma + u_2), \\
\frac{d\lambda_3}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial R_h} \\
&= \lambda_3 \mu_h, \\
\frac{d\lambda_4}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial S_v} \\
&= \lambda_4 (\beta_3 I_v + \mu_v + u_3) \\
&\quad - \lambda_5 \beta_3 I_v, \\
\frac{d\lambda_5}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial I_v} \\
&= -1 + \lambda_1 \beta_2 S_h \\
&\quad - \lambda_2 \beta_2 S_h \\
&\quad + \lambda_4 (\beta_3 S_v) \\
&\quad - \lambda_5 (\beta_3 S_v + \mu_v + u_3).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

dengan kondisi transversal $\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = \lambda_4(T) = \lambda_5(T) = 0$.

6. Menentukan Kondisi Optimal

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.18) yang mana u_1^* (4.15), u_2^* (4.16), dan u_3^* (4.17) diperoleh kondisi optimal:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\lambda_1^*} &= \frac{dS_h^*}{dt} = \Lambda_h - \frac{\beta_1 S_h^* I_h^*}{1 + \alpha_1 I_h^*} - \beta_2 S_h^* I_v^* - \mu_h S_h^* + u_1 S_h^* I_h^* \\
 \frac{\partial H}{\lambda_2^*} &= \frac{dI_h^*}{dt} = \frac{\beta_1 S_h^* I_h^*}{1 + \alpha_1 I_h^*} + \beta_2 S_h^* I_v^* - \gamma I_h^* - \mu_h I_h^* - u_1 S_h^* I_h^* - u_2 I_h^* \\
 \frac{\partial H}{\lambda_3^*} &= \frac{dR_h^*}{dt} = \gamma I_h^* - \mu_h R_h^* + u_2 I_h^* \\
 \frac{\partial H}{\lambda_4^*} &= \frac{dS_v^*}{dt} = \Lambda_v - \beta_3 S_v^* I_v^* - \mu_v S_v^* - u_3 S_v^* \\
 \frac{\partial H}{\lambda_5^*} &= \frac{dI_v^*}{dt} = \beta_3 S_v^* I_v^* - \mu_v I_v^* - u_3 I_v^*
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.19) yang mana u_1^* (4.15), u_2^* (4.16), dan u_3^* (4.17) diperoleh kondisi optimal:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\lambda_1^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial S_h^*} \\
 &= \lambda_1^* \left(\frac{\beta_1 I_h^*}{1 + \alpha_1 I_h^*} + \beta_2 I_v^* + \mu_h - u_1^* I_h^* \right) \\
 &\quad - \lambda_2^* \left(\frac{\beta_1 I_h^*}{1 + \alpha_1 I_h^*} + \beta_2 I_v^* - u_1^* I_h^* \right), \\
 \frac{d\lambda_2^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial I_h^*} \\
 &= -1 + \lambda_1^* \left(\frac{\beta_1 S_h^*}{1 + \alpha_1 I_h^*} - u_1^* S_h^* \right) \\
 &\quad - \lambda_2^* \left(\frac{\beta_1 S_h^*}{1 + \alpha_1 I_h^*} - \gamma - \mu_h - u_2^* - u_1^* S_h^* \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\lambda_3^* (\gamma + u_2^*), \\
\frac{d\lambda_3^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial R_h^*} \\
&= \lambda_3^* \mu_h. \\
\frac{d\lambda_4^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial S_v^*} \\
&= \lambda_4 (\beta_3 I_v^* + \mu_v + u_3^*) \\
&\quad - \lambda_5 \beta_3 I_v^*, \\
\frac{d\lambda_5^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial I_v^*} \\
&= -1 + \lambda_1 \beta_2 S_h^* \\
&\quad - \lambda_2 \beta_2 S_h^* + \lambda_4 (\beta_3 S_v^*) \\
&\quad - \lambda_5 (\beta_3 S_v + \mu_v + u_3^*).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

C. Interpretasi Hasil Simulasi Numerik

Setelah melakukan perhitungan dengan analisis kontrol optimal, langkah selanjutnya adalah melakukan simulasi numerik untuk memahami perilaku model penyebaran virus Zika. Pada model diberikan tiga kontrol berupa u_1 sebagai kontrol penggunaan alat kontrasepsi yang diberikan dikarenakan adanya interaksi pada subpopulasi *Susceptible* dan *Infected* pada populasi manusia, u_2 sebagai kontrol pengobatan yang diberikan terhadap subpopulasi *Infected* pada populasi manusia, dan u_3 sebagai kontrol penyemprotan insektisida yang diberikan terhadap subpopulasi *Susceptible* dan *Infected* pada populasi nyamuk. Langkah pertama akan diberikan nilai awal pada subpopulasi dan nilai masing-masing parameter yang akan

digunakan pada simulasi numerik.

Tabel 4.1. Nilai awal yang digunakan dalam simulasi numerik

Parameter	Nilai Parameter	Satuan	Sumber
S_h	0.20	Individu	(Andayani & Sari, 2020)
I_h	0.20	Individu	(Andayani & Sari, 2020)
R_h	0.15	Individu	(Asumsi)
S_v	0.25	Individu	(Asumsi)
I_v	0.10	Individu	(Andayani & Sari, 2020)

Tabel 4.2. Nilai Parameter yang digunakan dalam Simulasi Numerik

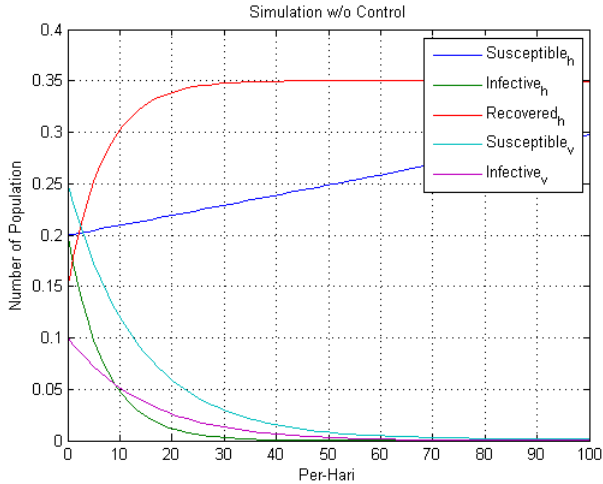
Parameter	Nilai Parameter	Satuan	Sumber
Λ_h	0.001	Hari	(Andayani & Sari, 2020)
Λ_v	0.0001	Hari	(Asumsi)
β_1	0.001	Hari	(Andayani & Sari, 2020)
β_2	0.002	Hari	(Andayani & Sari, 2020)
β_3	0.03	Hari	(Andayani & Sari, 2020)
μ_h	0.00004215	Hari	(Andayani & Sari, 2020)
μ_v	0.0714	Hari	(Andayani & Sari, 2020)
α_1	0.01	Hari	(Kaddar, A., 2019)
γ	0.1428	Hari	(Andayani & Sari, 2020)

Akan ditunjukkan pengaruh kontrol optimal terhadap penyebaran virus Zika berdasarkan nilai awal pada Tabel 4.1 dan nilai parameter pada Tabel 4.2 melalui simulasi numerik menggunakan MATLAB R2013a dengan metode *sweep* maju-mundur. Dalam skripsi ini, simulasi akan dilakukan untuk melihat perubahan jumlah subpopulasi dalam model penyebaran virus Zika sebelum dan sesudah penerapan kontrol, yaitu penggunaan alat kontrasepsi, pengobatan, dan penyemprotan insektisida, sebagai berikut.

1. Simulasi I

Pada simulasi pertama, menggunakan bobot penggunaan

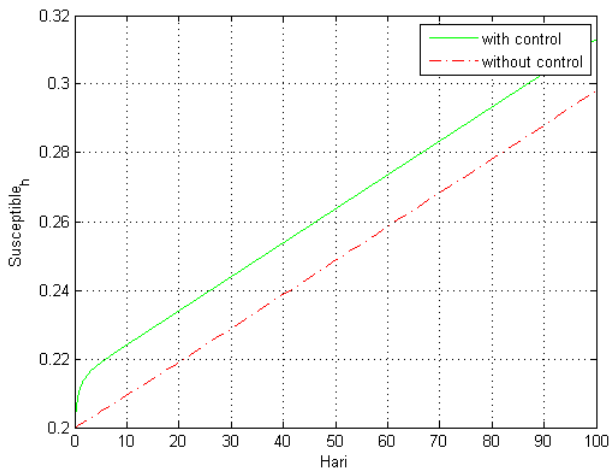
alat kontrasepsi sebesar $R=20$, bobot pengobatan sebesar $S=10$, dan bobot penyemprotan insektisida sebesar $T=15$, Hasil simulasi numerik disajikan dalam grafik berikut:



Gambar 4.2. Populasi Manusia SIR dan populasi nyamuk SI sebelum penambahan kontrol

Pada Gambar 4.2 grafik berikut menunjukkan semua subpopulasi dalam model SIR-SI sebelum diberi kontrol, pada garis berwarna biru jumlah subpopulasi manusia *Susceptible* S_h menunjukkan peningkatan dari nilai awal $S_h(0) = 0.20$ sebelum dikontrol, dan terus mengalami peningkatan. Sebaliknya, garis berwarna hijau jumlah subpopulasi manusia *Infected* I_h yang menurun dari $I_h(0) = 0.20$ hingga hari ke-30 mendekati nol. Dan garis berwarna merah, jumlah subpopulasi manusia *Recovered* R_h yang mengalami peningkatan dari nilai awal $R_h(0) = 0.15$ hingga hari ke-30. Kemudian garis berwarna hijau toska,

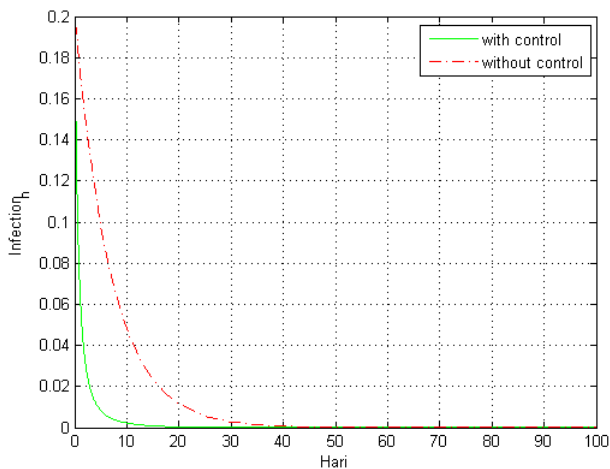
jumlah subpopulasi nyamuk *Susceptible* S_v menurun dari nilai awal $S_v(0) = 0.25$ hingga hari ke-60 mendekati nol, sedangkan garis berwarna ungu jumlah subpopulasi nyamuk *Infected* I_v yang mengalami penurunan dari nilai awal $I_v(0) = 0.10$ hingga pada hari ke-50 mendekati nol.



Gambar 4.3. Subpopulasi manusia *Susceptible* sebelum dan setelah penerapan kontrol

Pada Gambar 4.3 menunjukkan grafik perubahan subpopulasi S_h (*Susceptible*) pada populasi manusia terhadap dua kondisi, yang pertama garis merah putus putus merupakan garis tanpa kontrol yang meningkat dengan laju yang lebih lambat dengan nilai awal subpopulasi manusia *Susceptible* dengan nilai awal $S_h(0) = 0.20$ dan terus meningkat seiring waktu, sedangkan kondisi kedua dengan garis berwarna hijau merupakan garis dengan kontrol pada subpopulasi manusia *Susceptible* S_h yang mengalami

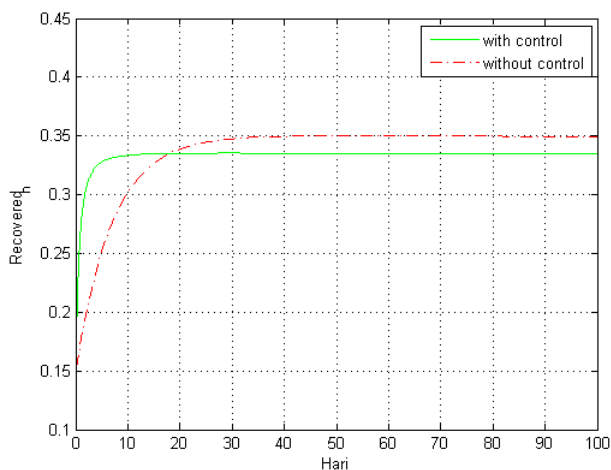
peningkatan yang lebih cepat sebelum diberikan kontrol dalam periode yang sama, dengan nilai awal $S_h(0) = 0.20$ dan terus meningkat seiring waktu. Hal ini menunjukkan bahwa penambahan kontrol berupa penggunaan alat kontrasepsi untuk mengantisipasi penularan virus Zika dapat mempercepat peningkatan jumlah subpopulasi S_h (*Susceptible*), sementara tanpa kontrol peningkatannya lebih lambat.



Gambar 4.4. Subpopulasi manusia *Infected* sebelum dan setelah penerapan kontrol

Pada Gambar 4.4 menunjukkan grafik subpopulasi I_h (*Infected*) pada populasi manusia sebelum dan setelah penerapan kontrol. Garis merah putus-putus mewakili jumlah subpopulasi I_h sebelum dikontrol, yang mengalami penurunan dari nilai awal $I_h(0) = 0.20$ hingga hari ke-30. Sementara itu, garis hijau menunjukkan jumlah

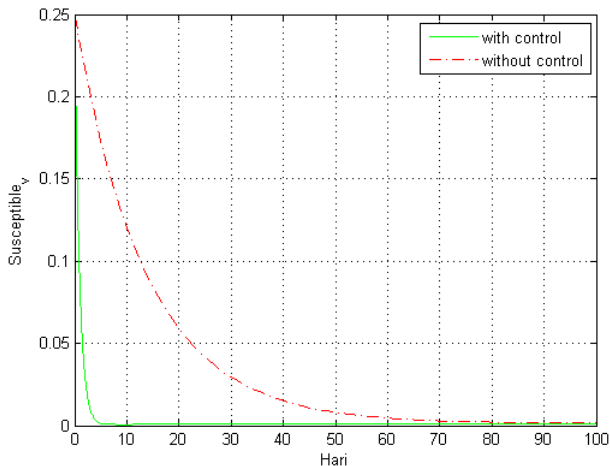
subpopulasi I_h setelah diberi kontrol, yang mengalami penurunan lebih cepat, yakni hanya dalam waktu 10 hari. Hal ini menunjukkan bahwa penerapan kontrol, seperti penggunaan alat kontrasepsi untuk mengurangi kontak fisik antara subpopulasi S_h (*Susceptible*) dan I_h (*Infected*), serta pengobatan pada subpopulasi I_h (*Infected*), dapat secara signifikan mempercepat penurunan jumlah individu yang terinfeksi. Pengobatan yang diberikan dapat berupa terapi simptomatik, seperti penggunaan acetaminophen untuk demam, antihistamin untuk ruam, pencegahan gigitan nyamuk, isolasi pasien, serta pengembangan vaksin (Maulana et al. (2022)).



Gambar 4.5. Subpopulasi manusia *Recovered* sebelum dan setelah penerapan kontrol

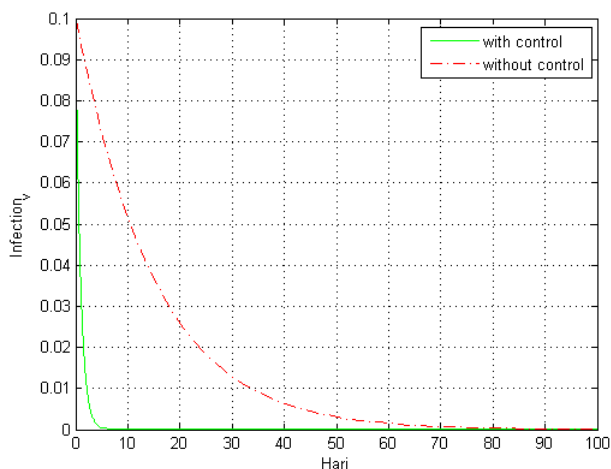
Pada Gambar 4.5 menunjukkan grafik subpopulasi R_h (*Recovered*) populasi manusia sebelum dan setelah

dikontrol. Garis merah putus-putus mewakili jumlah subpopulasi R_h sebelum dikontrol, yang mengalami kenaikan dari nilai awal $R_h(0) = 0.15$ hingga hari ke-30. Sedangkan garis hijau menunjukkan jumlah subpopulasi R_h setelah diberi kontrol, yang mengalami penurunan lebih cepat dari nilai awal $R_h(0) = 0.15$ hingga hari ke-10. Hal ini menunjukkan bahwa dengan adanya kontrol pengobatan berupa terapi simptomatik seperti acetaminophen untuk demam, antihistamin untuk ruam, serta pengembangan vaksin pada subpopulasi R_h (*Recovered*) dapat memperlambat laju peningkatan jumlah individu yang sembuh, dengan sedikit lebih rendah dibandingkan tanpa kontrol karena pengaruh dari subpopulasi I_h yang juga menurun setelah diberikan kontrol.



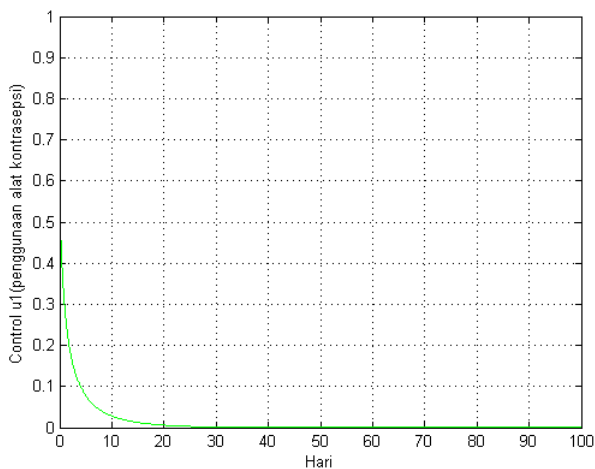
Gambar 4.6. Subpopulasi nyamuk *Susceptible* sebelum dan setelah penerapan kontrol

Pada Gambar 4.6 menunjukkan grafik subpopulasi S_v (*Susceptible*) pada populasi nyamuk sebelum dan setelah dikontrol. Garis merah putus-putus mewakili jumlah subpopulasi S_v sebelum dikontrol, yang mengalami penurunan dari nilai awal $S_v(0) = 0.25$ hingga hari ke-70. Sedangkan garis hijau menunjukkan jumlah subpopulasi S_v setelah diberi kontrol, yang mengalami penurunan lebih cepat dibandingkan sebelum dikontrol, yaitu hanya dalam waktu 5 hari. Hal ini menunjukkan bahwa penerapan kontrol berupa penyemprotan insektisida dengan sistem pengasapan menggunakan insektisida berupa Laden50ec (Malathion 500 g/l) dapat menurunkan jumlah subpopulasi S_v (*Susceptible*) pada populasi nyamuk (Latif, Sunarsih, & Windusari, 2023).



Gambar 4.7. Subpopulasi nyamuk *Infected* sebelum dan setelah penerapan kontrol

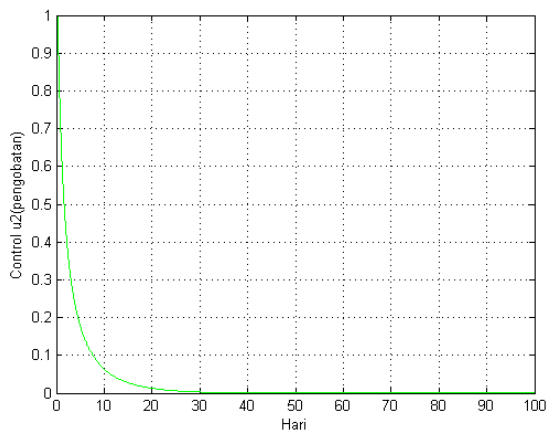
Pada Gambar 4.7 menunjukkan grafik subpopulasi I_v (*Infected*) pada populasi nyamuk sebelum dan setelah dikontrol. Garis merah putus-putus mewakili jumlah subpopulasi I_v sebelum dikontrol, yang mengalami penurunan dari nilai awal $I_v(0) = 0.10$ hingga hari ke-70. Sedangkan garis hijau menunjukkan jumlah subpopulasi I_v setelah diberi kontrol, yang mengalami penurunan lebih cepat dibandingkan sebelum dikontrol, yaitu hanya dalam waktu 5 hari. Hal ini menunjukkan bahwa penerapan kontrol berupa penyemprotan insektisida dengan sistem pengasapan menggunakan insektisida berupa Laden50ec (Malathion 500 g/l) dapat menurunkan jumlah subpopulasi S_v (*Susceptible*) dan I_v (*Infected*) pada populasi nyamuk (Latif, Sunarsih, & Windusari, 2023).



Gambar 4.8. Kontrol penggunaan alat kontrasepsi u_1

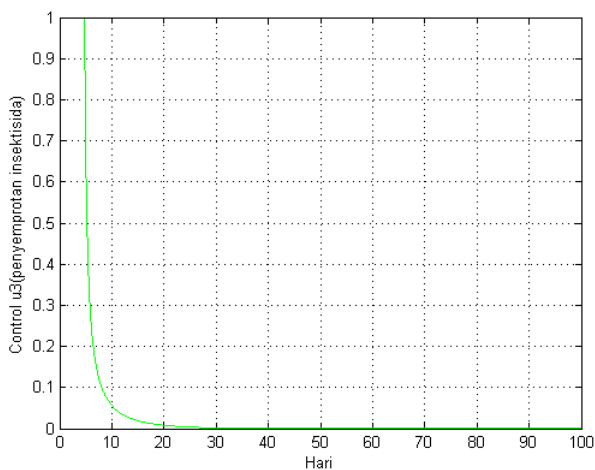
Pada Gambar 4.8 menunjukkan simulasi kontrol u_1 berupa

penggunaan alat kontrasepsi bagi subpopulasi I_h (*Infected*) pada populasi manusia untuk mencegah penularan virus Zika antar individu yang terinfeksi selama 100 hari. Berdasarkan gambar, dapat dilihat bahwa pada awal periode, kontrol u_1 diberikan sebesar 0.5 dan menurun secara kontinu hingga mencapai 0 sekitar hari ke-20 mendekati nol. Hal ini dipengaruhi karena penggunaan alat kontrasepsi digunakan secara bertahap karena memerlukan waktu untuk sosialisasi atau edukasi terhadap masyarakat serta kesadaran masyarakat sendiri, oleh karena itu kontrol penggunaan alat kontrasepsi tidak digunakan secara penuh sejak awal. Dari grafik diatas menunjukkan keefektifan kontrol penggunaan alat kontrasepsi yang diberikan walaupun tidak 100% penuh dalam pemberian bobot kontrol, yang ditandai dengan menurunnya jumlah subpopulasi I_h setelah penerapan kontrol.



Gambar 4.9. Kontrol pengobatan u_2

Pada Gambar 4.9 menunjukkan simulasi kontrol u_2 berupa pengobatan melalui terapi pada subpopulasi I_h (*Infected*) dalam populasi manusia untuk pengobatan individu yang telah terinfeksi selama 100 hari. Berdasarkan gambar, dapat dilihat bahwa periode pengendalian awal bernilai 1, atau dapat dinyatakan sebagai 100% penuh dalam pemberian bobot pengobatan pada hari ke-0, kemudian menurun secara bertahap hingga sekitar hari ke-30. Hal ini menunjukkan efektivitas kontrol pengobatan, dengan terapi simptomatik seperti penggunaan acetaminophen untuk demam, antihistamin untuk ruam, pencegahan gigitan nyamuk, isolasi pasien, serta pengembangan vaksin (Maulana et al. (2022)). Efektivitas kontrol ini ditandai dengan menurunnya jumlah subpopulasi I_h setelah penerapan pengobatan.

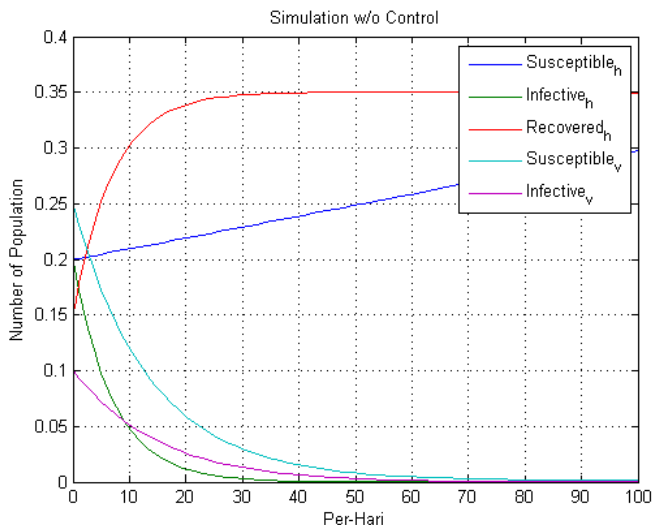


Gambar 4.10. Kontrol penyemprotan insektisida u_3

Pada Gambar 4.10 menunjukkan simulasi kontrol u_3 berupa penyemprotan insektisida pada subpopulasi S_v (*Susceptible*) dan I_v (*Infected*) dalam populasi nyamuk untuk meminimumkan jumlah populasi nyamuk selama 100 hari. Berdasarkan gambar, dapat dilihat bahwa pada awal periode, kontrol u_3 diberikan sebesar 1, atau dapat dinyatakan sebagai 100% penuh dalam pemberian bobot penyemprotan insektisida, dari hari ke-0 hingga hari ke-5. Selanjutnya, kontrol ini menurun secara kontinu hingga mencapai 0 sekitar hari ke-25. Hal ini menunjukkan efektivitas kontrol penyemprotan insektisida yang diberikan, yaitu dengan sistem pengasapan menggunakan insektisida Laden50ec (Malathion 500 g/l), yang mampu menurunkan jumlah subpopulasi S_v (*Susceptible*) dan I_v (*Infected*) pada populasi nyamuk (Latif, Sunarsih, & Windusari, 2023). Efektivitas ini ditandai dengan berkurangnya jumlah subpopulasi S_v dan I_v setelah penerapan kontrol.

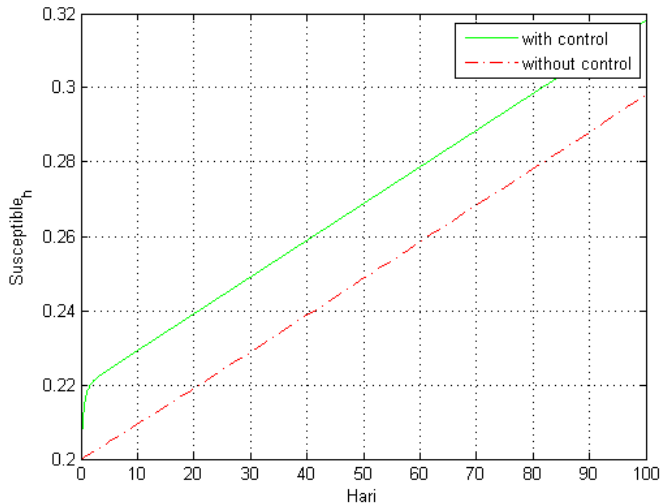
2. Simulasi II

Pada simulasi kedua, menggunakan bobot yang berbeda pada simulasi pertama, dengan memberikan bobot pada penggunaan alat kontrasepsi sebesar $R=55$, bobot pengobatan sebesar $S=55$, dan bobot penyemprotan insektisida sebesar $T=55$, Hasil simulasi numerik yang diperoleh akan disajikan dalam grafik berikut:



Gambar 4.11. Populasi Manusia SIR dan populasi nyamuk SI sebelum penambahan kontrol

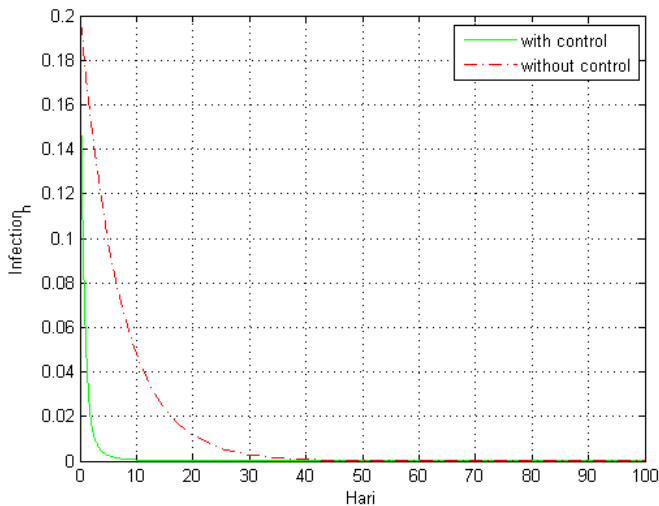
Pada Gambar 4.11 grafik berikut menunjukkan semua subpopulasi dalam model SIR-SI sebelum diberi kontrol, pada garis berwarna biru jumlah subpopulasi S_h menunjukkan peningkatan dari nilai awal $S_h(0) = 0.20$ sebelum dikontrol, dan terus mengalami peningkatan. Sebaliknya, garis berwarna hijau jumlah subpopulasi I_h menurun dari $I_h(0) = 0.20$ hingga hari ke-30. Dan garis berwarna merah, jumlah subpopulasi R_h meningkat dari $R_h(0) = 0.15$ hingga hari ke-30. Kemudian garis berwarna hijau toska, jumlah subpopulasi S_v menurun dari $S_v(0) = 0.25$ hingga hari ke-60, sedangkan garis berwarna ungu jumlah subpopulasi I_v menurun dari $I_v(0) = 0.10$ hingga pada hari ke-50.



Gambar 4.12. Subpopulasi manusia *Susceptible* sebelum dan setelah penerapan kontrol

Pada Gambar 4.12 menunjukkan grafik perubahan subpopulasi S_h (*Susceptible*) pada populasi manusia terhadap dua kondisi, yang pertama garis merah putus putus merupakan garis tanpa kontrol yang meningkat dengan laju yang lebih lambat dengan nilai awal $S_h(0) = 0.20$ dan terus meningkat, sedangkan kondisi kedua dengan garis berwarna hijau merupakan garis dengan kontrol pada subpopulasi S_h (*Susceptible*) mengalami peningkatan yang lebih cepat dalam periode yang sama, dimana pada saat jumlah populasi 0.22 pada hari ke-2 dan terus mengalami peningkatan hingga hari ke-100. Hal ini menunjukkan bahwa penambahan kontrol berupa penggunaan alat kontrasepsi untuk mengantisipasi penularan virus Zika

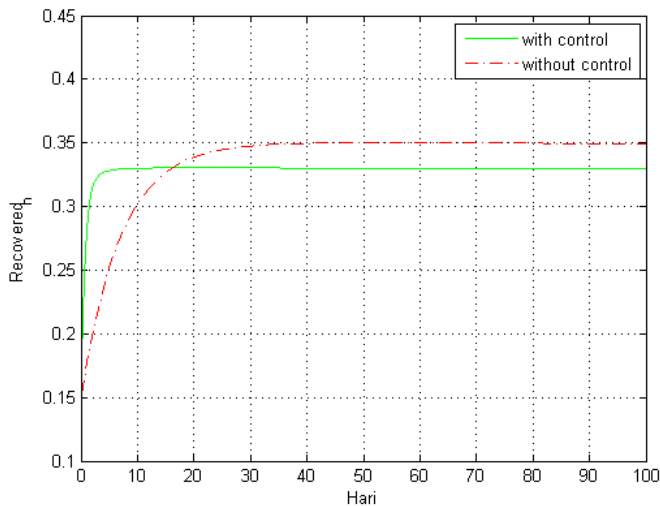
dapat mempercepat peningkatan jumlah subpopulasi S_h (*Susceptible*), sementara tanpa kontrol peningkatannya lebih lambat.



Gambar 4.13. Subpopulasi manusia *Infected* sebelum dan setelah penerapan kontrol

Pada Gambar 4.13 menunjukkan grafik subpopulasi I_h (*Infected*) dalam populasi manusia sebelum dan sesudah dikontrol. Garis merah putus-putus menggambarkan jumlah subpopulasi I_h sebelum diberi kontrol, yang mengalami penurunan dari nilai awal $I_h(0) = 0.20$ hingga hari ke-30. Sedangkan garis berwarna hijau menunjukkan jumlah subpopulasi I_h setelah diberi kontrol, yang mengalami penurunan lebih cepat dibandingkan sebelumnya, yaitu hanya dalam waktu 5 hari. Hal ini menunjukkan bahwa penerapan kontrol berupa penggunaan alat kontrasepsi

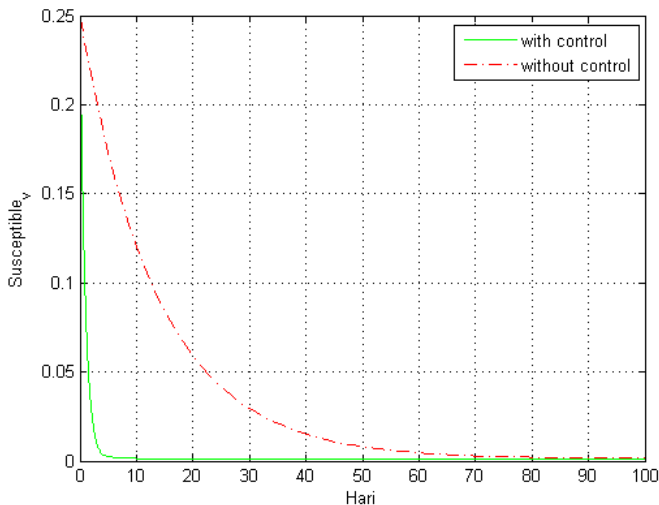
sebagai langkah antisipatif terhadap kontak fisik antara subpopulasi S_h (*Susceptible*) dan I_h (*Infected*), serta pengobatan pada subpopulasi I_h (*Infected*), efektif dalam menurunkan jumlah individu yang terinfeksi dalam waktu yang lebih singkat. Dengan pengobatan berupa terapi simptomatik seperti acetaminophen untuk demam, antihistamin untuk ruam, pencegahan gigitan nyamuk, isolasi pasien, serta pengembangan vaksin (Maulana et al. (2022)).



Gambar 4.14. Subpopulasi manusia *Recovered* sebelum dan setelah penerapan kontrol

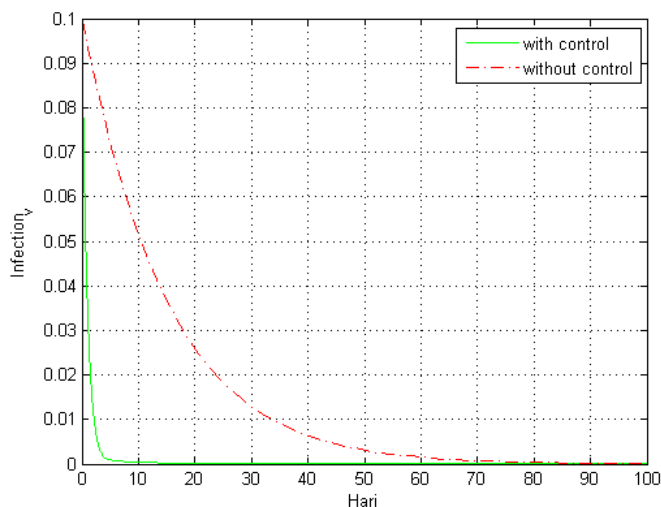
Pada Gambar 4.14 menunjukkan grafik subpopulasi R_h (*Recovered*) dalam populasi manusia sebelum dan sesudah dikontrol. Garis merah putus-putus menunjukkan jumlah subpopulasi R_h sebelum dikontrol, yang mengalami

kenaikan dari nilai awal $R_h(0) = 0.15$ hingga hari ke-30. Sedangkan garis hijau menunjukkan jumlah subpopulasi R_h setelah diberi kontrol, yang mengalami penurunan lebih cepat dibandingkan sebelumnya, yaitu dari nilai awal $R_h(0) = 0.15$ hingga hari ke-8. Hal ini menunjukkan bahwa penerapan kontrol berupa pengobatan berupa terapi simptomatik seperti acetaminophen untuk demam, antihistamin untuk ruam, pencegahan gigitan nyamuk, isolasi pasien, serta pengembangan vaksin pada subpopulasi R_h (*Recovered*) dapat memperlambat laju peningkatan jumlah individu yang sembuh, dengan sedikit lebih rendah dibandingkan tanpa kontrol karena pengaruh dari subpopulasi I_h (*Infected*) yang juga menurun setelah diberikan kontrol.



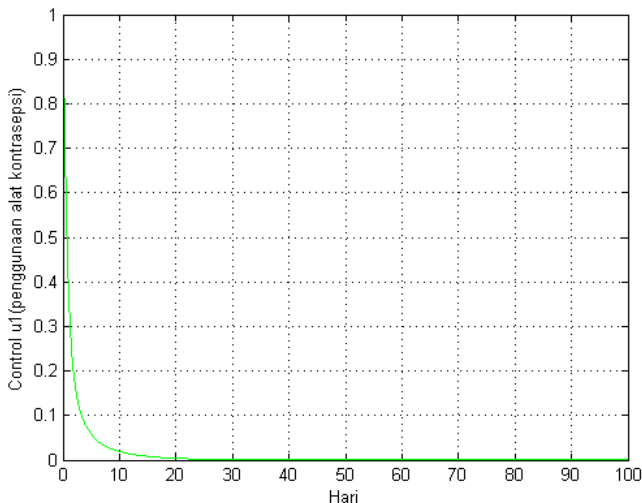
Gambar 4.15. Subpopulasi nyamuk *Susceptible* sebelum dan setelah penerapan kontrol

Pada Gambar 4.15 menunjukkan grafik subpopulasi S_v (*Susceptible*) pada populasi nyamuk sebelum dan sesudah dikontrol. Garis merah putus-putus menunjukkan jumlah subpopulasi S_v sebelum dikontrol, yang mengalami penurunan dari nilai awal $S_v(0) = 0.25$ hingga hari ke-70. Sedangkan garis berwarna hijau menunjukkan jumlah subpopulasi S_v setelah diberi kontrol, yang mengalami penurunan lebih cepat dibandingkan sebelumnya, yaitu hanya dalam waktu 5 hari. Hal ini menunjukkan bahwa penerapan kontrol berupa penyemprotan dengan sistem pengasapan menggunakan insektisida berupa Laden50ec (Malathion 500 g/l) dapat menurunkan jumlah subpopulasi S_v (*Susceptible*) pada populasi nyamuk (Latif, Sunarsih, & Windusari, 2023).



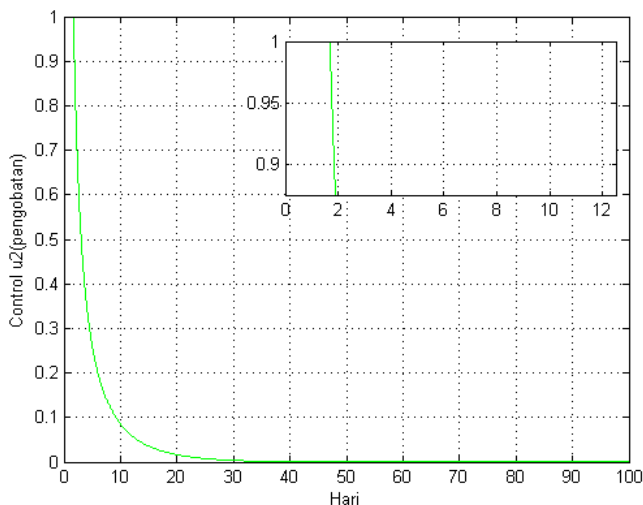
Gambar 4.16. Subpopulasi nyamuk *Infected* sebelum dan setelah penerapan kontrol

Pada Gambar 4.16 menunjukkan grafik subpopulasi I_v (*Infected*) pada populasi nyamuk sebelum dan sesudah dikontrol. Garis merah putus-putus menunjukkan jumlah subpopulasi I_v sebelum dikontrol, yang mengalami penurunan dari nilai awal $I_v(0) = 0.10$ hingga hari ke-70. Sedangkan garis berwarna hijau menunjukkan jumlah subpopulasi I_v setelah diberi kontrol, yang mengalami penurunan lebih cepat dibandingkan sebelumnya, yaitu hanya dalam waktu 5 hari. Hal ini menunjukkan bahwa penerapan kontrol berupa penyemprotan dengan sistem pengasapan menggunakan insektisida berupa Laden50ec (Malathion 500 g/l) dapat menurunkan jumlah subpopulasi S_v (*Susceptible*) dan I_v (*Infected*) pada populasi nyamuk (Latif, Sunarsih, & Windusari, 2023).



Gambar 4.17. Kontrol penggunaan alat kontrasepsi u_1

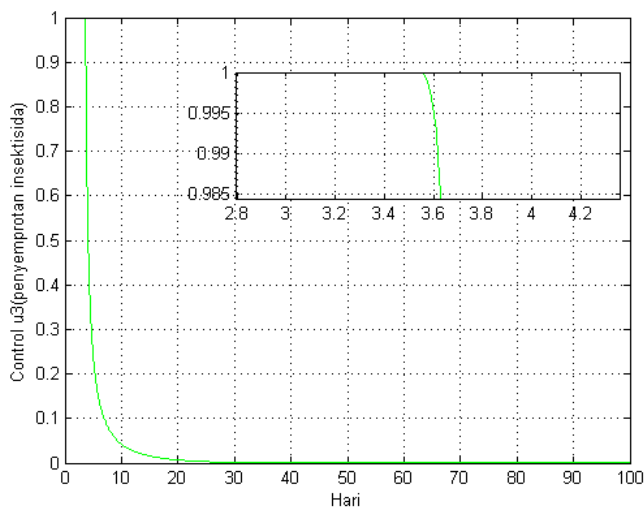
Pada Gambar 4.17 menunjukkan simulasi kontrol u_1 berupa penggunaan alat kontrasepsi bagi subpopulasi I_h (*Infected*) pada populasi manusia untuk mencegah penularan virus Zika antar individu yang terinfeksi selama 100 hari. Berdasarkan gambar, dapat dilihat bahwa periode pengendalian awal adalah 1 atau dapat dinyatakan 100% penuh dalam pemberian bobot penggunaan alat kontrasepsi pada hari ke-0, kemudian bergerak menurun secara kontinu hingga mencapai 0 pada sekitar hari ke-20. Hal ini menunjukkan efektivitas kontrol penggunaan alat kontrasepsi yang diberikan, yang ditandai dengan menurunnya jumlah subpopulasi I_h setelah diberi kontrol.



Gambar 4.18. Kontrol pengobatan u_2

Pada Gambar 4.18 menunjukkan simulasi kontrol u_2 berupa pengobatan berupa terapi pada subpopulasi I_h (*Infected*)

pada populasi manusia untuk pengobatan individu yang sudah terinfeksi selama 100 hari. Berdasarkan gambar, dapat dilihat bahwa pada awal periode kontrol u_2 diberikan sebesar 1 atau dapat dinyatakan 100% penuh dalam pemberian bobot pengobatan pada hari ke-0 sampai hari ke-2, dan kemudian menurun secara kontinu hingga mencapai 0 pada sekitar hari ke-25. Hal ini menunjukkan efektivitas dari kontrol pengobatan, dengan pengobatan berupa terapi simptomatik seperti acetaminophen untuk demam, antihistamin untuk ruam, pencegahan gigitan nyamuk, isolasi pasien, serta pengembangan vaksin (Maulana et al. (2022)), yang ditandai dengan menurunnya jumlah subpopulasi I_h setelah diberi kontrol.



Gambar 4.19. Kontrol penyemprotan insektisida u_3

Pada Gambar 4.19 menunjukkan simulasi kontrol u_3 berupa

penyemprotan insektisida pada subpopulasi S_v dan I_v (*Susceptible*) dan (*Infected*) pada populasi nyamuk untuk meminimumkan jumlah populasi nyamuk selama 100 hari. Berdasarkan gambar, dapat dilihat bahwa pada awal periode kontrol u_3 diberikan sebesar 1 atau dapat dinyatakan 100% penuh dalam pemberian bobot penyemprotan insektisida pada hari ke-0 sampai hari ke-3.6, dan kemudian menurun secara kontinu hingga mencapai 0 pada sekitar hari ke-25. Hal ini menunjukkan efektivitas dari kontrol penyemprotan insektisida yang diberikan, berupa penyemprotan dengan sistem pengasapan menggunakan insektisida Laden50ec (Malathion 500 g/l), yang dapat menurunkan jumlah subpopulasi S_v (*Susceptible*) dan I_v (*Infected*) pada populasi nyamuk (Latif, Sunarsih, & Windusari, 2023). Efektivitas ini ditandai dengan menurunnya jumlah subpopulasi S_v dan I_v setelah diberi kontrol.

Hasil kedua simulasi menunjukkan bahwa penggunaan alat kontrasepsi dan pengobatan efektif dalam mengurangi subpopulasi *Infected* pada manusia, sementara kontrol penyemprotan insektisida berperan dalam menekan jumlah *Infected* pada nyamuk dalam penyebaran virus Zika. Selain itu, perbandingan antara simulasi pertama dan kedua mengindikasikan strategi optimal dalam menyeimbangkan biaya seminimal mungkin untuk mencapai hasil yang maksimal.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan analisis kontrol optimal yang telah dilakukan dalam skripsi ini, dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Penelitian ini telah merumuskan masalah kontrol optimal dengan fungsi tujuan yang bertujuan untuk memaksimalkan pengurangan penyebaran virus Zika dalam subpopulasi *Infected* pada populasi manusia dan nyamuk. Pengurangan ini dicapai melalui penerapan kontrol optimal, yaitu penggunaan alat kontrasepsi, pengobatan, dan penyemprotan insektisida. Model matematika yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS_h}{dt} &= \Lambda_h - \frac{\beta_1 S_h I_h}{1 + \alpha_1 I_h} - \beta_2 S_h I_v - \mu_h S_h + u_1 S_h I_h \\ \frac{dI_h}{dt} &= \frac{\beta_1 S_h I_h}{1 + \alpha_1 I_h} + \beta_2 S_h I_v - \gamma I_h - \mu_h I_h - u_1 S_h I_h - u_2 I_h \\ \frac{dR_h}{dt} &= \gamma I_h - \mu_h R_h + u_2 I_h \\ \frac{dS_v}{dt} &= \Lambda_v - \beta_3 S_v I_v - \mu_v S_v - u_3 S_v \\ \frac{dI_v}{dt} &= \beta_3 S_v I_v - \mu_v I_v - u_3 I_v\end{aligned}$$

2. Perhitungan kontrol optimal menghasilkan nilai optimal untuk u_1^* , u_2^* dan u_3^* sebagai berikut :

$$u_1^* = \text{Min}\{\text{Max}(0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)S_h I_h}{2A}), 1\}$$

$$u_2^* = \text{Min}\{\text{Max}(0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)I_h}{2B}), 1\}$$

dan

$$u_3^* = \text{Min}\{\text{Max}(0, \frac{\lambda_4 S_v + \lambda_5 I_v}{2C}), 1\}$$

Berdasarkan hasil u_1^* , u_2^* dan u_3^* diperoleh *state* yang optimal yaitu :

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\lambda_1^*} &= \frac{dS_h^*}{dt} = \Lambda_h - \frac{\beta_1 S_h^* I_h^*}{1 + \alpha_1 I_h^*} - \beta_2 S_h^* I_v^* - \mu_h S_h^* + u_1 S_h^* I_h^* \\ \frac{\partial H}{\lambda_2^*} &= \frac{dI_h^*}{dt} = \frac{\beta_1 S_h^* I_h^*}{1 + \alpha_1 I_h^*} + \beta_2 S_h^* I_v^* - \gamma I_h^* - \mu_h I_h^* - u_1 S_h^* I_h^* - u_2 I_h^* \\ \frac{\partial H}{\lambda_3^*} &= \frac{dR_h^*}{dt} = \gamma I_h^* - \mu_h R_h^* + u_2 I_h^* \\ \frac{\partial H}{\lambda_4^*} &= \frac{dS_v^*}{dt} = \Lambda_v - \beta_3 S_v^* I_v^* - \mu_v S_v^* - u_3 S_v^* \\ \frac{\partial H}{\lambda_5^*} &= \frac{dI_v^*}{dt} = \beta_3 S_v^* I_v^* - \mu_v I_v^* - u_3 I_v^*\end{aligned}$$

Selanjutnya, diperoleh juga *costate* yang optimal yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_1^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial S_h^*} \\
&= \lambda_1^* \left(\frac{\beta_1 I_h^*}{1 + \alpha_1 I_h^*} + \beta_2 I_v^* + \mu_h - u_1^* I_h^* \right) \\
&\quad - \lambda_2^* \left(\frac{\beta_1 I_h^*}{1 + \alpha_1 I_h^*} + \beta_2 I_v^* - u_1^* I_h^* \right), \\
\frac{d\lambda_2^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial I_h^*} \\
&= -1 + \lambda_1^* \left(\frac{\beta_1 S_h^*}{1 + \alpha_1 I_h^*} - u_1^* S_h^* \right) \\
&\quad - \lambda_2^* \left(\frac{\beta_1 S_h^*}{1 + \alpha_1 I_h^*} - \gamma - \mu_h - u_2^* - u_1^* S_h^* \right) \\
&\quad - \lambda_3^* (\gamma + u_2^*), \\
\frac{d\lambda_3^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial R_h^*} \\
&= \lambda_3^* \mu_h. \\
\frac{d\lambda_4^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial S_v^*} \\
&= \lambda_4^* (\beta_3 I_v^* + \mu_v + u_3^*) - \lambda_5^* \beta_3 I_v^*, \\
\frac{d\lambda_5^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial I_v^*} \\
&= -1 + \lambda_1^* \beta_2 S_h^* - \lambda_2^* \beta_2 S_h^* + \lambda_4^* (\beta_3 S_v^*) \\
&\quad - \lambda_5^* (\beta_3 S_v^* + \mu_v + u_3^*).
\end{aligned}$$

3. Hasil simulasi numerik yang dilakukan menggunakan MATLAB 2013a menunjukkan efektifan kontrol u_1 yang mewakili penggunaan alat kontrasepsi, u_2 yang mewakili pengobatan, dan u_3 yang mewakili penyemprotan insektisida. Simulasi ini menunjukkan bahwa kontrol penggunaan alat kontrasepsi dan pengobatan dapat

mengurangi subpopulasi I_h (*Infected*) pada populasi manusia, sementara kontrol penyemprotan insektisida efektif dalam menekan subpopulasi I_v (*Infected*) pada populasi nyamuk, yang berperan dalam penyebaran virus Zika.

B. Saran

Penulis menyadari bahwa penelitian ini, yang berfokus pada kontrol optimal model $SIR-SI$ terkait penyebaran virus Zika dan merupakan pengembangan dari studi Andayani dan Sari (2020), masih memiliki keterbatasan. Skripsi ini hanya menganalisis kontrol optimal dengan tiga strategi utama, yakni penggunaan alat kontrasepsi, pengobatan, dan penyemprotan insektisida. Untuk penelitian selanjutnya, disarankan agar dilakukan penambahan subpopulasi atau variasi tindakan kontrol lain agar diperoleh hasil yang lebih optimal dalam mengendalikan penyebaran virus Zika.

DAFTAR PUSTAKA

- Haddow, A.D., dkk 2012 *Genetic Characterization of Zika Virus Strains: Geographic Expansion of the Asian Lineage*. PloS Negl Trop Dis.
- World Health Organization, 2016 *Zika Situation Report: Neurological Syndrome and Congenital Anomalies*. World Health Organization Report.
- Andayani, P. 2020 *A Modified Model of Zika Virus Spread with Saturated Incidence Rate: Modelling and Stability Analysis*. Department of Informatics, Universitas Internasional Semen Indonesia
- Maity, S. 2024 *The effect of demographic stochasticity on Zika virus transmission dynamics: Probability of disease extinction, sensitivity analysis, and mean first passage time*.
- Momoh, A.A. & Fugenschuh, A. (2017). *Optimal Control of Intervention Strategies and Cost Effectiveness Analysis for Zika Virus Model*, Operations Research for Health Care.
- Moreira, J., Peixoto, T.M., Siqueira, A.M., & Lamas, C.C. (2017). *Sexually acquired Zika virus: a systematic review*, Clinical Microbiology and Infection 23(5), 296–305.
- Wirawan, D.N. (2016). Pemantauan dan Pencegahan Penularan Virus Zika di Indonesia. *Public Health and Preventive Medicine Archive (PHPMA)*, 4(1), 1-2.
- Stockholm (2015). *Zika Virus Epidemic In Americas : Potential Association With Microcephaly And Guillain Barre*

- Syndrome*, European Centre for Disease Prevention and Control.
- Musso, D., dkk. (2014). *Zika Virus Transmission Through Blood Transfusion Demonstrated*. Euro Surveill.
- Suprihatin, B., Bangun, P. B. J., & Arhami, M. (2013). *Persamaan Diferensial Biasa* (F. S. Suyantoro (Ed.); edisi pertama). Penerbit ANDI Yogyakarta.
- Lumbantoruan, J. H. (2019). Buku materi pembelajaran persamaan diferensial. Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Kristen Indonesia, BMP.UKI:JHS-O1-PD-PM-III-2019.
- Kartono, P. D. B. (2012). PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA, Model Matematika Fenomena Perubahan. In *Yogyakarta: Graha Ilmu* (pertama). GRAHA ILMU.
- Ross, S. L. (1984). *Differential Equations Third Edition (ketiga)*. WIE.
- Braun, M. (1993). *Second-order linear differential equations*. In: *Differential Equations and Their Applications. Texts in Applied Mathematics*, vol 11. Springer, New York, NY.
- Kermack, W. O., & McKendrick, A. G. (1927). *A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 115(772), 700–721.

- Lenhart, S., & Workman, J.T. (2007). *Optimal Control Applied to Biological Models*. In *Optimal Control Applied to Biological Models*. <https://doi.org/10.1201/9781420011418>
- Moreira, J., Peixoto, C.A., & Siqueira, A.M. (2017). Sexual transmission of Zika virus: Implications for public health control challenges. *Emerging Infectious Diseases*, 23(3), 419–421.
- World Health Organization (WHO). (2016). Zika Virus: Interim guidance on prevention of sexual transmission. Geneva: WHO.
- Mlakar, J., Korva, M., Tul, N., et al. (2016). Zika Virus Associated with Microcephaly. *New England Journal of Medicine*, 374, 951–958.
- Petersen, L.R., Jamieson, D.J., & Powers, A.M. (2016). Zika Virus. *New England Journal of Medicine*, 374, 1552–1563.
- Musso, D., & Gubler, D.J. (2014). Zika Virus. *Clinical Microbiology Reviews*, 29(3), 487–524.
- Brasil, P., Pereira Jr., J.P., Raja Gabaglia, C., et al. (2016). Zika Virus Infection in Pregnant Women in Rio de Janeiro. *New England Journal of Medicine*, 375, 2321–2334.
- Garcia-Rejon, J.E., Aldana, E., Loroño-Pino, M.A., et al. (2018). Impact of insecticide-treated materials and indoor residual spray on *Aedes aegypti* populations. *Parasites & Vectors*, 11, 32.
- Smith, L.B., Kasai, S., & Scott, J.G. (2016). Pyrethroid resistance in *Aedes aegypti* and *Aedes albopictus*: Important mosquito

- vectors of human diseases. *Pesticide Biochemistry and Physiology*, 133, 1–12.
- World Health Organization (WHO). (2017). *Vector Control: Methods for use by individuals and communities*. Geneva: WHO.
- Andayani, P., & Sari, L. R. (2020). A modified model of Zika virus spread with saturated incidence rate: Modelling and stability analysis. *Proceedings of the International Conference on Science, Technology, and Environment 2020*.
- Maulana, R.R., Antasionasti, I., Fatimawali, & Tallei, T. (2022). Evolution of Zika Virus: Perkembangan Virus Zika. *PHARMACON: Program Studi Farmasi, FMIPA, Universitas Sam Ratulangi*, 11(2), 1495.
- Boesri, H. & Boewono, D.T. Pengendalian nyamuk *Aedes aegypti* dan *Culex quinquefasciatus* dengan penyemprotan sistem pengasapan (thermal fogging) menggunakan insektisida LADEN 500EC. *Balai Besar Penelitian dan Pengembangan Vektor dan Reservoir Penyakit, Salatiga*.
- Latif, H., Sunarsih, E., & Windusari, Y. (2023). Resistensi insektisida malation, DDT, piretroid, dan cypermethrin terhadap nyamuk *Aedes aegypti* dan *Aedes albopictus*: Study literature. *Jurnal Ilmiah Permas: Jurnal Ilmiah STIKES Kendal*, 13(3), 761-770. e-ISSN 2549-8134; p-ISSN 2089-0834. Retrieved from <http://journal.stikeskendal.ac.id/index.php/PSKM>

- Sahih International. (1997). *The Qur'an: Arabic text with corresponding English meanings*. Abul-Qasim Publishing House.
- Sharma, S., & Sharma, P. K. (2023). Stability analysis of an SIR model with alert class modified saturated incidence rate and Holling functional type-II treatment. *Computational and Mathematical Biophysics*, 11(1), 47–64. <https://doi.org/10.1515/cmb-2022-0145>
- Kot, M. (2001). *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge University Press.
- Daud, Y., Cahyono, E., Muhtar, N., Sani, A., & Arman. (2022). Analisis model matematika mangsa-pemangsa Holling tipe II dengan faktor pemanenan dan daya dukung lingkungan. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika..*
- Ni'mah, F., & Savitri, D. (2022). Analisis kestabilan model eko-epidemiologi dengan fungsi respon Holling tipe I. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 10(1).
- Kumar, A., & Nilam. (2017). Stability of a time delayed SIR epidemic model along with nonlinear incidence rate and Holling type-II treatment rate. *International Journal of Computational Methods*, Published 7 December 2017.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Program MATLAB2013a model penyebaran virus Zika dengan dan tanpa kontrol

```

clc;
clear all;
close all;
test = -1;

N = 10000;
tf = 100; %t akhir
t0 = 0; %t awal
h = (tf-t0)/N;
%tf = 0:h:25;
h2 = h/2;
ite=1;

lambdah=0.001; %laju pertambahan
individu manusia yang masuk kedalam
populasi manusia rentan
lambdav=0.0001; %laju pertambahan
individu nyamuk yang masuk kedalam
populasi nyamuk rentan
beta1=0.001; %laju penularan penyakit
secara langsung antar manusia
beta2=0.002; %laju penularan penyakit
dari nyamuk ke manusia
beta3=0.03; %laju penularan penyakit
dari nyamuk ke nyamuk
miuh=0.00004215;% laju kematian manusia
miuv=0.0714; %laju kematian nyamuk
gamma=0.1428; %laju kesembuhan populasi
yang terinfeksi
alfa=0.01; %asumsi / faktor saturasi
(Kaddar, A., 2019)
R=20; %bobot u_1 (kontrol penggunaan alat
kontrasepsi) %diubah2
S=10; %bobot u_2 (kontrol pengobatan)
%diubah2
T=15; %bobot u_3 (kontrol penyemprotan
insektisida) %diubah2

tau=0.02;%untuk hitung backward RK

```

```

%=====KONTROL OPTIMAL
ABCDE=====
u = zeros(1,N+1); %kontrol u1
m = zeros(1,N+1); %kontrol u2
n = zeros(1,N+1); %kontrol u3

A = zeros(1,N+1);
B = zeros(1,N+1);
C = zeros(1,N+1);
D = zeros(1,N+1);
E = zeros(1,N+1);

% initial conditions
A(1) = 0.20;
B(1) = 0.20;
C(1) = 0.15;
D(1) = 0.25;
E(1) = 0.10;
N0 = 1;
%costate
Si1 = zeros(1,N+1);
Si2 = zeros(1,N+1);
Si3 = zeros(1,N+1);
Si4 = zeros(1,N+1);
Si5 = zeros(1,N+1);

for i = 0:N
    tt(i+1) = t0 + i*h;
end

%MODEL PENYEBARAN HIV ABCDE A=X(1) B=X(2)
C=X(3) D=X(4) E=X(5) SETELAH KONTROL
%      a1=lambdah-
((beta1*A(i)*B(i))/(1+alfa*B(i)))-
beta2*A(i)*E(i)-miuh*A(i)+u(i)*A(i)*B(i);
%
b1=((beta1*A(i)*B(i))/(1+alfa*B(i)))+beta
2*A(i)*E(i)-gamma*B(i)-miuh*B(i)-
u(i)*A(i)*B(i)-m(i)*B(i);
%      c1=gamma*B(i)-
miuh*C(i)+m(i)*B(i);
%      d1=lambdav-beta3*D(i)*E(i)-
miuv*D(i)-n(i)*D(i);

```

```

%           e1=beta3*D(i)*E(i)-miuv*E(i)-
n(i)*E(i);
%MODEL TANPA KONTROL OPTIMAL U1,U2, dan
U3
f=inline('[0.001-
((0.001*x(1)*x(2))/(1+0.01*x(2)))-
0.002*x(1)*x(5)-
0.00004215*x(1);((0.001*x(1)*x(2))/(1+0.0
1*x(2)))+0.002*x(1)*x(5)-0.1428*x(2)-
0.00004215*x(2);0.1428*x(2)-
0.00004215*x(3);0.0001-0.03*x(4)*x(5)-
0.0714*x(4);0.03*x(4)*x(5)-
0.0714*x(5)]','t','x');
[t x]=ode45(f,[0 tf],[0.20 0.20 0.15 0.25
0.10]);

figure(1)
plot(t,x(:,1),t,x(:,2),t,x(:,3),t,x(:,4),
t,x(:,5))
legend('Susceptible_h','Infective_h','Rec
overed_h','Susceptible_v','Infective_v')
xlabel('Per-Hari'); ylabel('Number of
Population')
title('Simulation w/o Control')
grid on

while(test < 0)
    oldu = u;
    oldm = m;
    oldn = n;
    oldA = A;
    oldB = B;
    oldC = C;
    oldD = D;
    oldE = E;
    oldSi1 = Si1;
    oldSi2 = Si2;
    oldSi3 = Si3;
    oldSi4 = Si4;
    oldSi5 = Si5;
    Ne=1;

    %forward rk4

```

```

%MODEL DENGAN KONTROL OPTIMAL u1, u2,
dan u3
for i=1:N
    a1=lambdah-
    ((beta1*A(i)*B(i))/(1+alfa*B(i)))-
    beta2*A(i)*E(i)-miuh*A(i)+u(i)*A(i)*B(i);

    b1=((beta1*A(i)*B(i))/(1+alfa*B(i)))+beta
    2*A(i)*E(i)-gamma*B(i)-miuh*B(i)-
    u(i)*A(i)*B(i)-m(i)*B(i);
    c1=gamma*B(i)-
    miuh*C(i)+m(i)*B(i);
    d1=lambdav-beta3*D(i)*E(i)-
    miuv*D(i)-n(i)*D(i);
    e1=beta3*D(i)*E(i)-miuv*E(i)-
    n(i)*E(i);

    % (S(i)+h2*s1)
    % u(i)+u(i+1)
    a2=lambdah-
    ((beta1*(A(i)+h2*a1)*(B(i)+h2*b1))/(1+alf
    a*(B(i)+h2*b1)))-
    beta2*(A(i)+h2*a1)*(E(i)+h2*e1)-
    miuh*(A(i)+h2*a1)+(0.5*(u(i)+u(i+1)))*(A(
    i)+h2*a1)*(B(i)+h2*b1);

    b2=((beta1*(A(i)+h2*a1)*(B(i)+h2*b1))/(1+
    alfa*(B(i)+h2*b1)))+beta2*(A(i)+h2*a1)*(E
    (i)+h2*e1)-gamma*(B(i)+h2*b1)-
    miuh*(B(i)+h2*b1)-
    (0.5*(u(i)+u(i+1)))*(A(i)+h2*a1)*(B(i)+h2
    *b1)-(0.5*(m(i)+m(i+1)))*(B(i)+h2*b1);
    c2=gamma*(B(i)+h2*b1)-
    miuh*(C(i)+h2*c1)+(0.5*(m(i)+m(i+1)))*(B(
    i)+h2*b1);
    d2=lambdav-
    beta3*(D(i)+h2*d1)*(E(i)+h2*e1)-
    miuv*(D(i)+h2*d1)-
    (0.5*(n(i)+n(i+1)))*(D(i)+h2*d1);

    e2=beta3*(D(i)+h2*d1)*(E(i)+h2*e1)-
    miuv*(E(i)+h2*e1)-
    (0.5*(n(i)+n(i+1)))*(E(i)+h2*e1);

```

```

a3=lambdah-
((beta1*(A(i)+h2*a2)*(B(i)+h2*b2))/(1+alfa*
(B(i)+h2*b2)))-
beta2*(A(i)+h2*a2)*(E(i)+h2*e2)-
miuh*(A(i)+h2*a2)+(0.5*(u(i)+u(i+1)))*(A(
i)+h2*a2)*(B(i)+h2*b2);

b3=((beta1*(A(i)+h2*a2)*(B(i)+h2*b2))/(1+
alfa*(B(i)+h2*b2)))+beta2*(A(i)+h2*a2)*(E
(i)+h2*e2)-gamma*(B(i)+h2*b2)-
miuh*(B(i)+h2*b2)-
(0.5*(u(i)+u(i+1)))*(A(i)+h2*a2)*(B(i)+h2
*b2)-(0.5*(m(i)+m(i+1)))*(B(i)+h2*b2);
c3=gamma*(B(i)+h2*b2)-
miuh*(C(i)+h2*c2)+(0.5*(m(i)+m(i+1)))*(B(
i)+h2*b2);
d3=lambdav-
beta3*(D(i)+h2*d2)*(E(i)+h2*e2)-
miuv*(D(i)+h2*d2)-
(0.5*(n(i)+n(i+1)))*(D(i)+h2*d2);

e3=beta3*(D(i)+h2*d2)*(E(i)+h2*e2)-
miuv*(E(i)+h2*e2)-
(0.5*(n(i)+n(i+1)))*(E(i)+h2*e2);

a4=lambdah-
((beta1*(A(i)+h*a3)*(B(i)+h*b3))/(1+alfa*
(B(i)+h*b3)))-
beta2*(A(i)+h*a3)*(E(i)+h*e3)-
miuh*(A(i)+h*a3)+(u(i+1))*(A(i)+h*a3)*(B(
i)+h2*b3);

b4=((beta1*(A(i)+h*a3)*(B(i)+h*b3))/(1+al
fa*(B(i)+h*b3)))+beta2*(A(i)+h*a3)*(E(i)+
h*e3)-gamma*(B(i)+h*b3)-miuh*(B(i)+h*b3)-
(u(i+1))*(A(i)+h*a3)*(B(i)+h2*b3)-
(m(i+1))*(B(i)+h*b3);
c4=gamma*(B(i)+h*b3)-
miuh*(C(i)+h*c3)+(m(i+1))*(B(i)+h*b3);
d4=lambdav-
beta3*(D(i)+h*d3)*(E(i)+h*e3)-
miuv*(D(i)+h*d3)-(n(i+1))*(D(i)+h*d3);

```

```

        e4=beta3*(D(i)+h*d3)*(E(i)+h*e3)-
        miuv*(E(i)+h*e3)-(n(i+1))*(E(i)+h*e3);

        A(i+1) = A(i) + (h/6)*(a1 + 2*a2
+ 2*a3 + a4);
        B(i+1) = B(i) + (h/6)*(b1 + 2*b2
+ 2*b3 + b4);
        C(i+1) = C(i) + (h/6)*(c1 + 2*c2
+ 2*c3 + c4);
        D(i+1) = D(i) + (h/6)*(d1 + 2*d2
+ 2*d3 + d4);
        E(i+1) = E(i) + (h/6)*(e1 + 2*e2
+ 2*e3 + e4);

    end
    %backward rk4 For lambda
    %turunan Halmitonian
    for i=1:N
        j = N + 2 - i;

        si11=Si1(j)*(((beta1*B(j))/(1+alfa*B(j)))
+beta2*E(j)+miuh-u(j)*B(j))-
        Si2(j)*(((beta1*B(j))/(1+alfa*B(j)))+beta
2*E(j)-u(j)*B(j));
        si21=-
        1+Si1(j)*(((beta1*A(j))/(1+alfa*B(j)))-
        u(j)*A(j))-
        Si2(j)*(((beta1*A(j))/(1+alfa*B(j)))-
        gamma-miuh-m(j)-u(j)*A(j))-
        Si3(j)*(gamma+m(j));
        si31=Si3(j)*miuh;

        si41=Si4(j)*(beta3*E(j)+miuv+n(j))-
        Si5(j)*beta3*E(j);
        si51=-1+Si1(j)*beta2*A(j)-
        Si2(j)*beta2*A(j)+Si4(j)*beta3*D(j)-
        Si5(j)*(beta3*D(j)+miuv+n(j));

        si12=(Si1(j)-
        h2*si11)*(((beta1*(0.5*(B(j)+B(j-
        1))))/(1+alfa*(0.5*(B(j)+B(j-
        1))))) +beta2*(0.5*(E(j)+E(j-1)))+miuh-

```

```

(0.5*(u(j)+u(j-1)))*(0.5*(B(j)+B(j-1))))-
(Si2(j)-h2*si21)*(((beta1*(0.5*(B(j)+B(j-
1))))/(1+alfa*(0.5*(B(j)+B(j-
1)))))+beta2*(0.5*(E(j)+E(j-1))))-
(0.5*(u(j)+u(j-1)))*(0.5*(B(j)+B(j-1)))));
si22=-1+(Si1(j)-
h2*si11)*(((beta1*(0.5*(A(j)+A(j-
1))))/(1+alfa*(0.5*(B(j)+B(j-1)))))-
(0.5*(u(j)+u(j-1)))*(0.5*(A(j)+A(j-1))))-
(Si2(j)-h2*si21)*(((beta1*(0.5*(A(j)+A(j-
1))))/(1+alfa*(0.5*(B(j)+B(j-1)))))-
gamma-miuh-(0.5*(m(j)+m(j-1))))-
(0.5*(u(j)+u(j-1)))*(0.5*(A(j)+A(j-1))))-
(Si3(j)-h2*si31)*(gamma+(0.5*(m(j)+m(j-
1)))));
si32=(Si3(j)-h2*si31)*miuh;
si42=(Si4(j)-
h2*si41)*(beta3*(0.5*(E(j)+E(j-
1)))+miuv+(0.5*(n(j)+n(j-1))))-(Si5(j)-
h2*si51)*beta3*(0.5*(E(j)+E(j-1)))));
si52=-1+(Si1(j)-
h2*si11)*beta2*(0.5*(A(j)+A(j-1)))-
(Si2(j)-h2*si21)*beta2*(0.5*(A(j)+A(j-
1)))+(Si4(j)-
h2*si41)*beta3*(0.5*(D(j)+D(j-1)))-
(Si5(j)-h2*si51)*(beta3*(0.5*(D(j)+D(j-
1)))+miuv+(0.5*(n(j)+n(j-1)))));

si13=(Si1(j)-
h2*si12)*(((beta1*(0.5*(B(j)+B(j-
1))))/(1+alfa*(0.5*(B(j)+B(j-
1)))))+beta2*(0.5*(E(j)+E(j-1)))+miuh-
(0.5*(u(j)+u(j-1)))*(0.5*(B(j)+B(j-1))))-
(Si2(j)-h2*si22)*(((beta1*(0.5*(B(j)+B(j-
1))))/(1+alfa*(0.5*(B(j)+B(j-
1)))))+beta2*(0.5*(E(j)+E(j-1)))-
(0.5*(u(j)+u(j-1)))*(0.5*(B(j)+B(j-1)))));
si23=-1+(Si1(j)-
h2*si12)*(((beta1*(0.5*(A(j)+A(j-
1))))/(1+alfa*(0.5*(B(j)+B(j-1)))))-
(0.5*(u(j)+u(j-1)))*(0.5*(A(j)+A(j-1))))-
(Si2(j)-h2*si22)*(((beta1*(0.5*(A(j)+A(j-
1))))/(1+alfa*(0.5*(B(j)+B(j-1)))))-gamma

```

```

-miuh-(0.5*(m(j)+m(j-1)))-(0.5*(u(j)+u(j-1)))*(0.5*(A(j)+A(j-1)))-(Si3(j)-
h2*si32)*(gamma+(0.5*(m(j)+m(j-1))));
    si33=(Si3(j)-h2*si32)*miuh;
    si43=(Si4(j)-
h2*si42)*(beta3*(0.5*(E(j)+E(j-1)))+miuv+(0.5*(n(j)+n(j-1)))-(Si5(j)-
h2*si52)*beta3*(0.5*(E(j)+E(j-1))));
    si53=-1+(Si1(j)-
h2*si12)*beta2*(0.5*(A(j)+A(j-1)))-
(Si2(j)-h2*si22)*beta2*(0.5*(A(j)+A(j-1)))+(Si4(j)-
h2*si42)*beta3*(0.5*(D(j)+D(j-1)))-
(Si5(j)-h2*si52)*(beta3*(0.5*(D(j)+D(j-1)))+miuv+(0.5*(n(j)+n(j-1))));

%4

    si14=(Si1(j)-
h2*si13)*((beta1*(B(j-1)))/(1+alfa*(B(j-1)))+beta2*(E(j-1))+miuh-(u(j-1))*(B(j-1))-(Si2(j)-h2*si23)*((beta1*(B(j-1)))/(1+alfa*(B(j-1)))+beta2*(E(j-1))-(u(j-1))*(B(j-1))));
    si24=-1+(Si1(j)-
h2*si13)*((beta1*(A(j-1)))/(1+alfa*(B(j-1)))-(u(j-1))*(A(j-1))-(Si2(j)-
h2*si23)*((beta1*(A(j-1)))/(1+alfa*(B(j-1)))-gamma-miuh-(m(j-1))-(u(j-1))*(A(j-1)))-(Si3(j)-h2*si33)*(gamma+(m(j-1))));
    si34=(Si3(j)-h2*si33)*miuh;
    si44=(Si4(j)-
h2*si43)*(beta3*(E(j-1))+miuv+(n(j-1)))-(Si5(j)-h2*si53)*beta3*(E(j-1));
    si54=-1+(Si1(j)-
h2*si13)*beta2*(A(j-1))-(Si2(j)-
h2*si23)*beta2*(A(j-1))+(Si4(j)-
h2*si43)*beta3*(D(j-1))-(Si5(j)-
h2*si53)*(beta3*(D(j-1))+miuv+(n(j-1))));

```



```

        Si1(j-1) = Si1(j) - (h/6)*(si11 +
2*si12 + 2*si13 + si14);
        Si2(j-1) = Si2(j) - (h/6)*(si21 +
2*si22 + 2*si23 + si24);
        Si3(j-1) = Si3(j) - (h/6)*(si31 +
2*si32 + 2*si33 + si34);
        Si4(j-1) = Si4(j) - (h/6)*(si41 +
2*si42 + 2*si43 + si44);
        Si5(j-1) = Si5(j) - (h/6)*(si51 +
2*si52 + 2*si53 + si54);

    end
    %Update u
    u1=(A.*B.*(Si2-Si1))/2*R;
    u11=min(1,max(0,u1));
    u=0.5*(u11+oldu);

    m1=B.*(Si2-Si3)/2*S;
    m11=min(1,max(0,m1));
    m=0.5*(m11+oldm);

    n1=((D.*(Si4)+E.*(Si5))/(2*T));
    n11=min(1,max(0,n1));
    n=0.5*(n11+oldn);

    %Convergence Test
    temp1 = alfa*sum(abs(u)) -
sum(abs(oldu - u));
    temp2 = alfa*sum(abs(m)) -
sum(abs(oldm - m));
    temp3 = alfa*sum(abs(n)) -
sum(abs(oldn - n));

    temp4 = alfa*sum(abs(A)) -
sum(abs(oldA - A));
    temp5 = alfa*sum(abs(B)) -
sum(abs(oldB - B));
    temp6 = alfa*sum(abs(C)) -
sum(abs(oldC - C));
    temp7 = alfa*sum(abs(D)) -
sum(abs(oldD - D));
    temp8 = alfa*sum(abs(E)) -
sum(abs(oldE - E));

```

```

        temp9 = alfa*sum(abs(Si1)) -
sum(abs(oldSi1 - Si1));
        temp10 = alfa*sum(abs(Si2)) -
sum(abs(oldSi2 - Si2));
        temp11 = alfa*sum(abs(Si3)) -
sum(abs(oldSi3 - Si3));
        temp12 = alfa*sum(abs(Si4)) -
sum(abs(oldSi4 - Si4));
        temp13 = alfa*sum(abs(Si5)) -
sum(abs(oldSi5 - Si5));

        test = min(temp1, min(temp2,
min(temp3, min(temp4, min(temp5,
min(temp6, min(temp7, min(temp8,
min(temp9, min(temp10, min(temp11,
min(temp12, temp13 ))))))))));
        %       ite=ite+1
    end
    y(1,:)=tt;
    y(2,:)=A;
    y(3,:)=B;
    y(4,:)=C;
    y(5,:)=D;
    y(6,:)=E;
    y(7,:)=Si1;
    y(8,:)=Si2;
    y(9,:)=Si3;
    y(10,:)=Si4;
    y(11,:)=Si5;
    y(12,:)=u;
    y(13,:)=m;
    y(14,:)=n;

    figure(2)
    plot(y(1,:),y(2,:), '-g', 'linewidth',1)
    xlim([0 tf])
    hold on
    grid on
    plot(t,x(:,1), '-.r', 'linewidth',1)
    xlim([0 tf])
    legend('with control', 'without control')
    xlabel('Hari')
    ylabel('Susceptible_h')

```

```

figure(3)
plot(y(1,:),y(3,:), '-g', 'linewidth',1)
xlim([0 tf])
hold on
grid on
plot(t,x(:,2), '-.r', 'linewidth',1)
xlim([0 tf])
legend('with control', 'without control')
xlabel('Hari')
ylabel('Infection_h')

figure(4)
plot(y(1,:),y(4,:), '-g', 'linewidth',1)
xlim([0 tf])
hold on
grid on
plot(t,x(:,3), '-.r', 'linewidth',1)
xlim([0 tf])
legend('with control', 'without control')
xlabel('Hari')
ylabel('Recovered_h')
%
figure(5)
plot(y(1,:),y(5,:), '-g', 'linewidth',1)
xlim([0 tf])
hold on
grid on
plot(t,x(:,4), '-.r', 'linewidth',1)
xlim([0 tf])
legend('with control', 'without control')
xlabel('Hari')
ylabel('Susceptible_v')

figure(6)
plot(y(1,:),y(6,:), '-g', 'linewidth',1)
xlim([0 tf])
hold on
grid on
plot(t,x(:,5), '-.r', 'linewidth',1)
xlim([0 tf])
legend('with control', 'without control')
xlabel('Hari')
ylabel('Infection_v')

```

```
figure(7)
plot(y(1,:),y(12,:), '-g', 'linewidth',1)
xlim([0 tf])
ylim([0 1])
xlabel('Hari')
ylabel('Control u1 (penggunaan alat
kontrasepsi)')
grid on

figure(8)
plot(y(1,:),y(13,:), '-g', 'linewidth',1)
xlim([0 tf])
ylim([0 1])
xlabel('Hari')
ylabel('Control u2 (pengobatan)')
grid on

figure(9)
plot(y(1,:),y(14,:), '-g', 'linewidth',1)
xlim([0 tf])
ylim([0 1])
xlabel('Hari')
ylabel('Control u3 (penyemprotan
insektisida)')
grid on
```

Lampiran 2. Daftar Riwayat Hidup**DAFTAR RIWAYAT HIDUP****A. Identitas Diri**

Nama Lengkap : Ida Nurlatifah
 Tempat, Tanggal Lahir : Kabupaten Semarang, 30 April 2003
 Alamat : Desa Wonorejo, Sambiroto RT 02 RW 05 Kecamatan Pringapus
 Nomor HP : 083847964494
 E-mail : iddalatifah04@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. TK Ratnasari lulus tahun 2009
2. SD Negeri Wonorejo 03 lulus tahun 2015
3. MTs Darul Amanah Sukorejo Kendal lulus tahun 2018
4. MA Darul Amanah Sukorejo Kendal lulus tahun 2021