

**MODIFIKASI MODEL BLACK SCHOLES MERTON
MENGUNAKAN GJR-GARCH UNTUK PENETAPAN HARGA
OPSI**

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika



Oleh : **FATIMAH OKTAVIANI**
NIM : 2108046087

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2025

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : FATIMAH OKTAVIANI
NIM : 2108046087
Jurusan/Program Studi : Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

MODIFIKASI MODEL BLACK SCHOLES MERTON MENGUNAKAN GJR-GARCH UNTUK PENETAPAN HARGA OPSI

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 14 Mei 2025
Pembuat pernyataan,

FATIMAH OKTAVIANI
NIM : 2108046087



KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **MODIFIKASI MODEL BLACK SCHOLES MERTON
MENGUNAKAN GJR-GARCH UNTUK PENETAPAN
HARGA OPSI**

Penulis : FATIMAH OKTAVIANI

NIM : 2108046087

Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 26 Mei 2025

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

Penguji II,

ANY MUANALIFAH, M.Si

NIP : 198201132011012009

Penguji III,

SEFTINA DIYAH MIASARY, M.Sc.

NIP : 198709212019032010

Penguji IV,

AGUS WAYAN YULIANTO, M.Sc.

NIP : 198907162019031007

PRIHADI KURNIAWAN, M.Sc.

NIP : 199012262019031012

Pembimbing ,

EMY SISWANAH, M.Sc.

NIP : 198702022011012014

NOTA DINAS

Semarang, 14 Mei 2025

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : MODIFIKASI MODEL BLACK SCHOLES MERTON
MENGUNAKAN GJR-GARCH UNTUK PENETAPAN
HARGA OPSI
Nama : FATIMAH OKTAVIANI
NIM : 2108046087
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing ,

EMY SISWANAH,M.Sc.
NIP : 198702022011012014

ABSTRAK

Penetapan harga opsi merupakan salah satu aspek penting dalam dunia keuangan, terutama dalam mengelola risiko dan memaksimalkan keuntungan. Model Black Scholes Merton (BSM) klasik merupakan model yang banyak digunakan untuk menghitung harga opsi, namun model ini memiliki keterbatasan karena mengasumsikan volatilitas pasar yang konstan. Penelitian ini bertujuan untuk memodifikasi model Black Scholes Merton menjadi model Fraksional Black Scholes Merton dengan mengintegrasikan Volatilitas GJR-GARCH yang mampu menangkap efek asimetris dalam volatilitas pasar, guna memperoleh estimasi harga opsi yang lebih realistis. Data yang digunakan adalah harga penutupan saham harian Apple Inc. (AAPL) dari 7 Januari 2022 hingga 7 Maret 2025. Volatilitas saham diperoleh melalui variansi GJR-GARCH setelah proses identifikasi dan estimasi model ARIMA untuk data return. Selanjutnya, volatilitas tersebut digunakan dalam model Fraksional Black Scholes Merton (FBSM) dan model Black Scholes Merton untuk menghitung harga opsi call tipe Eropa. Hasil penelitian menunjukkan bahwa model FBSM dengan volatilitas GJR-GARCH menghasilkan estimasi harga opsi yang lebih akurat dibandingkan dengan model BSM klasik menggunakan volatilitas historis, berdasarkan nilai Mean Absolute Percentage Error (MAPE). ini menunjukkan model dengan GJR-GARCH lebih tepat digunakan dalam kondisi pasar yang fluktuatif.

Kata kunci : Modifikasi Black Scholes Merton, GJR-GARCH, Opsi Eropa, Volatilitas

KATA PENGANTAR

Segala Puji syukur kepada Allah SWT tidak terlihat tapi rasanya deket serta karena dengan pertolongan, rahmat dan karunia-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan judul **"Modifikasi Model Black Scholes Merton Menggunakan GJR-GARCH Untuk Penetapan Harga Opsi"**, dimaksudkan untuk memperoleh gelar sarjana Matematika (S.Mat).

Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurah kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah menerima wahyu dari Allah dan menyebarkan ilmu pengetahuan yang membebaskan umat manusia dari kebodohan menuju kehidupan yang penuh berkah, rahmat, dan petunjuk-Nya.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis menerima dukungan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak, baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis menyampaikan rasa syukur dan terima kasih kepada:

1. Fatimah Oktaviani ialah diri saya sendiri. Apresiasi sebesar-besarnya telah bertahan dan berjuang untuk menyelesaikan apa yang telah dipilih. Terimakasih untuk tetap hidup dan merayakan dirimu sendiri, walaupun seringkali overthinking. Tetaplah jadi manusia yang ceria, tidak lelah mencoba hal baru dan mau berusaha. Langkah ini hanyalah satu dari banyak langkah menuju masa depan yang berkah. *It's not IQ, but "I can" that shapes the future.;*
2. Papa Juhri dan Mama Nining Komalasari, orang tua yang luar biasa menjadi sumber inspirasi dan penyemangat saya untuk menghadapi kerasnya dunia ini. Beliau memang

tidak sempat merasakan pendidikan bangku perkuliahan, namun mereka mampu senantiasa menjadikan anaknya sarjana. Terima kasih sudah berjuang sekuat tenaga untuk memberikan saya kehidupan yang layak hingga saya bisa tumbuh dewasa dan bisa berada diposisi ini. Doa beliau yang akan membawa kesuksesan dan segala hal baik di masa depan penulis. Tolonglah jaga kesehatan dan hidup lebih lama didunia ini, izinkan saya membalas dan mengabdikan semua pengorbanan yang telah dilakukan oleh orangtua saya;

3. Ibu Hj. Emy Siswanah, M.Sc, selaku Dosen Pembimbing. Terimakasih yang sebesar besarnya atas waktu dan kesabarannya yang ibu berikan selama proses penulisan skripsi ini. Tanpa bimbingan dan dukungan Ibu, mungkin skripsi ini belum bisa selesai. Terimakasih sudah mempermudah setiap proses dan memahami setiap kesulitan yang penulis hadapi. Allah SWT senantiasa melimpahkan kesehatan, keberkahan serta balasan terbaik untuk setiap kebaikan yang Ibu berikan;
4. Zulaikha, M.Si., selaku wali dosen yang telah membantu dan mendampingi penulis sepanjang masa studi di Program Studi Matematika UIN Walisongo Semarang;
5. Any Muanalifah, M.Si., Ph.D., dan Prihadi Kurniawan, M.Sc., selaku Ketua dan Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang;
6. Seluruh jajan dosen di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang yang telah memberi

ilmu yang sangat bermanfaat selama masa perkuliahan;

7. Achla Fauziah, Amalia Arkana, Nila Fadlilatul, Faizatul Ulya dan Khoirunnisa Kusumaningsih. Terima kasih telah menjadi teman diskusi yang sabar, tempat berbagi ide dan pendengar keluh kesah saya ketika terasa berat dalam proses ini;
8. Teman-Teman kelas saya Matematika C 2021. Terima kasih atas kebersamaan yang luar biasa dari diskusi di kelas ataupun di luar kelas hingga sesi curhat di sela sela kesibukan. Tidak hanya itu, kalian juga hadir dalam momen-momen menyenangkan yang tidak kalah berarti saat liburan bersama. Semua tawa,cerita dan kebersamaan itu ialah warna yang membuat perjalanan ini jauh lebih indah dan tidak terlupakan. Kenangan ini tetep hidup dan silaturahmi harus terus terjalin walau waktu terus berjalan dan arah kita nanti berbeda;
9. Sahabat SD, SMP, dan SMA serta keluarga besar. Terima kasih atas doa, dukungan dan semangat di setiap langkah saya;
10. Teman-teman KKN moderasi beragama IV se-indonesia. Terima kasih atas semangat, dukungan dan canda tawa yang membuat setiap proses menjadi lebih ringan. KKN bukan hanya soal proker, tapi juga cerita yang akan selalu saya kenang.
11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah memberikan kontribusi secara langsung maupun tidak langsung.

Penulis juga menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, dan terdapat banyak hal yang perlu diperbaiki.

Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang membangun. Akhir kata, penulis memohon maaf atas segala kesalahan dan kekurangan dalam penyusunan skripsi ini.

Semarang, 8 Mei 2025

Penulis,

Fatimah Oktaviani

NIM : 2108046087

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iv
NOTA PEMBIMBING I	iv
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Rumusan Masalah	5
C. Batasan Masalah	6
D. Tujuan Penelitian	6
E. Manfaat Penelitian	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	8
A. Opsi	8
B. Persamaan Difusi	32
C. Distribusi Normal Standar	33
D. Black-Scholes-Merton	34
E. Volatilitas	51
F. Analisis Time Series	52
G. Identifikasi Model	55
H. Model GJR-GARCH	60
I. Penelitian Terdahulu	66
BAB III METODOLOGI PENELITIAN	69
A. Langkah Penelitian	69
B. Diagram Alur	73
BAB IV PEMBAHASAN	77
A. Merekonstruksi Model Fraksional Black Scholes Merton Dengan Menggunakan Persamaan Diferensial Parsial	77

B.	Estimasi Volatilitas Dengan Variansi GJR-GARCH	95
C.	Perhitungan Harga Opsi <i>Call</i>	119
BAB V PENUTUP		133
A.	Kesimpulan	133
B.	Saran	134
DAFTAR PUSTAKA		135

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul	Halaman
Tabel 2.1	Perhitungan Opsi <i>call</i>	12
Tabel 2.2	Perhitungan opsi <i>put</i>	14
Tabel 2.3	Ciri-Ciri ACF dan PACF Model Time series	55
Tabel 2.4	Indikator nilai MAPE	66
Tabel 4.1	Statistika Deskriptif data <i>close</i> AAPL	95
Tabel 4.2	Uji Stasioner data penutupan AAPL	97
Tabel 4.3	Uji Stasioner data Return AAPL	99
Tabel 4.4	Hasil Pendugaan Model ARMA (p, q)	101
Tabel 4.5	Uji Heteroskedastisitas ARMA (3, 3)	105
Tabel 4.6	Pendugaan Model ARCH (q) GARCH (p, q)	106
Tabel 4.7	Uji Heteroskedastisitas GARCH (1, 1)	110
Tabel 4.8	Hasil Sign Bias Test	110
Tabel 4.9	Pendugaan Model GJR-GARCH (p, q)	112
Tabel 4.10	Uji Heteroskedastisitas GJR-GARCH(1,1)	116
Tabel 4.11	Parameter Model Modifikasi BSM	119
Tabel 4.12	Perhitungan Opsi <i>call</i>	128
Tabel 4.13	Perbandingan kinerja Model	130

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
Gambar 3.1	Diagram Alur Penelitian	76
Gambar 4.1	Grafik Data <i>close</i> AAPL	97
Gambar 4.2	Grafik Data Return AAPL	98
Gambar 4.3	Plot ACF dan PACF Data Return	100
Gambar 4.4	Plot Normalitas ARMA (3, 3)	103
Gambar 4.5	Uji Autokorelasi ARMA (3, 3)	104
Gambar 4.6	Plot Normalitas GARCH (1,1)	108
Gambar 4.7	Uji Autokorelasi GARCH (1,1)	109
Gambar 4.8	Plot Normalitas GJR-GARCH(1,1)	114
Gambar 4.9	Uji Autokorelasi GJR-GARCH(1,1)	115

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Judul	Halaman
Lampiran 1	Data <i>Close</i> Harga Saham Apple Inc.	143
Lampiran 2	Uji Stasioner Dengan Uji Augmented dickey fuller (ADF)	144
Lampiran 3	Output Automatic ARIMA Forecasting	146
Lampiran 4	Output Model ARMA (p,q)	147
Lampiran 5	Uji Parameter ARMA (p,q) Terbaik	150
Lampiran 6	Output Model ARCH (q) Atau GARCH (p,q)	153
Lampiran 7	Uji Parameter Model ARCH (q) Atau GARCH (p,q) Terbaik	158
Lampiran 8	Uji Asimetri atau <i>Efek Leverage</i>	161
Lampiran 9	Output Model GJR-GARCH (p,q)	165
Lampiran 10	Uji Parameter Model GJR-GARCH (p,q) Terbaik	168
Lampiran 11	Output Hurst	171

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Kemajuan dalam ilmu matematika telah memungkinkan aplikasinya pada bidang ilmu lain. Salah satunya yaitu di bidang investasi (Widyawati et al., 2013). Investasi dibedakan menjadi dua yaitu: investasi pada aset riil (bangunan, tanah, mesin, emas dan sebagainya) dan investasi pada aset finansial (saham, obligasi, deposito dan sebagainya) (Irawan et al., 2017). Investasi dalam bentuk saham merupakan salah satu pilihan investasi yang menarik. Selain berinvestasi dengan membeli saham, investor juga dapat berinvestasi dengan cara membeli turunan dari nilai saham (*financial derivative*), salah satunya ialah opsi (Halim, 2005).

Opsi memberikan hak pemegang kontrak untuk membeli atau menjual aset tertentu dengan harga tertentu (*exercise price*) dalam batas waktu tertentu (*expiration date*) (Black & Scholes, 1973). Jika pemegang opsi tidak menggunakan haknya pada waktu jatuh tempo (*expiration date*) hak tersebut akan hilang secara otomatis, sehingga opsi tersebut tidak lagi memiliki nilai (Bodie et al., 2018). Opsi menjadi instrumen penting dalam pasar keuangan karena memberikan fleksibilitas kepada investor untuk mengelola risiko dan memaksimalkan keuntungan (Dewi & Ramli, 2018). Dengan opsi, investor dapat melindungi portofolio mereka dari potensi kerugian (*hedging*) yang disebabkan volatilitas pasar, melakukan spekulasi terhadap pergerakan harga aset tanpa harus mengeluarkan modal besar, serta memanfaatkan *leverage* untuk potensi keuntungan yang lebih tinggi (Tanjung et al., 2024). Selain

itu, opsi juga memungkinkan adanya likuiditas tambahan di pasar dan membantu dalam harga aset yang lebih efisien karena mereka mencerminkan ekspektasi pasar tentang volatilitas dan harga di masa depan (Bodie et al., 2018).

Menurut Fabozzi (2000), lima hal mempengaruhi nilai opsi: (1) nilai dari *underlying asset*, (2) *exercise price*, (3) nilai waktu uang, (4) volatilitas, (5) *time to maturity*. Opsi dikategorikan menjadi dua menurut hak pemegangnya, yakni opsi jual dan opsi beli (Hull, 2018b). Dua kategori opsi adalah opsi Amerika dan opsi Eropa, masing-masing berdasarkan jangka waktu hak yang dimiliki oleh pemegangnya (Luenberger, 1998).

Nilai opsi dapat ditentukan dengan menggunakan model Black-Scholes yang dikembangkan oleh Fischer Black dan Myron Scholes pada tahun 1973. Namun, model ini memiliki keterbatasan, seperti tidak mempertimbangkan pembayaran dividen (Black & Scholes, 1973). Merton (1973) kemudian menyempurnakan model Black-Scholes dengan penggunaan kalkulus stokastik secara eksplisit dikenal sebagai kalkulus *Itô* dan mempertimbangkan dividen, yang dikenal sebagai model Black-Scholes-Merton.

Seiring berjalannya waktu model Black-Scholes-Merton memiliki keterbatasan bahwa volatilitas pasar tidak selalu konstanta yang dikenal sebagai pengaruh asimetris atau efek *leverage*, yaitu kondisi ketika volatilitas meningkat lebih tajam setelah peristiwa negatif (penurunan harga) dibandingkan dengan peristiwa positif (kenaikan harga) (Bjork, 2009). Keberadaan efek asimetris ini membuat model *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic* (GARCH) kurang tepat untuk digunakan dalam analisis volatilitas data finansial. Oleh

karena itu, diperlukan pemodelan yang dapat menangani efek asimetris yang muncul pada volatilitas data finansial. Hal ini memicu perkembangan berbagai model variansi asimetris yaitu Glosten Jagannathan Runkle GARCH (GJR-GARCH) (Hafizhah et al., 2024).

Penelitian yang dilakukan oleh Mubarokah et al. (2020) menyatakan bahwa model *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic* (GARCH) standar tidak mampu menangkap sifat asimetris dari volatilitas. Untuk mengatasi hal ini, Glosten Jagannathan Runkle GARCH (GJR-GARCH) menambahkan parameter untuk menangkap efek ini, sehingga memberikan estimasi yang lebih akurat tentang volatilitas. Penelitian serupa oleh Nurhayati et al. (2022) menunjukkan bahwa model Glosten Jagannathan Runkle GARCH (GJR-GARCH) memberikan prediksi *Value-at-risk* (VaR) lebih akurat dibandingkan model *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic* (GARCH). Ini sangat penting bagi investor dan manajer risiko dalam mengukur potensi kerugian. Penelitian yang telah dilakukan oleh Mubarokah et al. (2020) dan Nurhayati et al. (2022) memberikan bukti bahwa penggunaan model Glosten Jagannathan Runkle GARCH (GJR-GARCH) sangat penting untuk memahami dan memprediksi perilaku volatilitas di pasar keuangan yang dinamis dan tidak pasti. Dengan kemampuannya untuk menangkap efek asimetris dan memberikan estimasi risiko yang lebih baik, model ini sangat berharga bagi para praktisi di bidang keuangan.

Sementara itu, Morales-Bañuelos et al. (2022) mengkritik Model Black-Scholes Merton menggunakan volatilitas konstan dari waktu ke waktu. Dengan adanya permasalahan tersebut, Banuelos, Muriel dan Anaya melakukan modifikasi

Black-Scholes-Merton yaitu Model Black-Scholes-Merton dengan parameter yang bervariasi dari waktu ke waktu, Model Fraksional Black-Scholes-Merton dan Model Black-Scholes Merton dengan parameter yang bervariasi dari waktu ke waktu dengan *conformable calculus*. Kemudian Model modifikasi Black Scholes Merton yang menggunakan *conformable calculus* berhasil meningkatkan akurasi penentuan harga opsi, terutama di pasar yang sedang berkembang. Melalui analisis empiris, model ini menunjukkan kinerja yang lebih ketimbang model Black-Scholes-Merton klasik dan model Fraksional Black-Scholes-Merton dalam penentuan nilai opsi Eropa di pasar derivatif meksiko. Kajian ini menyoroti pentingnya fleksibilitas parameter dan pengenalan parameter baru untuk mencerminkan dinamika pasar yang lebih realistis.

Dalam penelitian yang dilakukan oleh Morales-Bañuelos et al. (2022), volatilitas dalam modifikasi Black-Scholes-Merton dianggap konstan untuk model Black-Scholes Merton klasik dan model Fraksional Black-Scholes Merton sedangkan model Black-Scholes-Merton dengan parameter yang bervariasi dari waktu ke waktu dengan *conformable calculus* dianggap asimetris. Hal ini mendorong pengembangan berbagai model variasi asimetris, seperti GJR-GARCH.

Selain aspek volatilitas, pemilihan jenis opsi menjadi pertimbangan penting dalam penelitian. Berdasarkan Penelitian oleh Maulida et al. (2019) menunjukkan bahwa model binomial memberikan estimasi yang hampir sesuai dengan harga pasar dan menunjukkan bahwa perhitungan opsi Eropa lebih sederhana dibandingkan dengan opsi Amerika yang lebih kompleks. Hasil penelitian Purwandari (2016) menyatakan model

Black-Scholes-Merton dapat digunakan untuk menghitung harga opsi Eropa secara tepat dengan mempertimbangkan faktor-faktor seperti dividen dan volatilitas. Hal ini mencerminkan kemampuan model Black-Scholes-Merton untuk beradaptasi dengan berbagai kondisi pasar. Berdasarkan dukungan dari penelitian-penelitian sebelumnya, maka dalam penelitian ini dipilih opsi tipe Eropa karena didukung dengan kesederhanaan perhitungan, keakuratan estimasi, dan model Black-Scholes-Merton mampu beradaptasi diberbagai kondisi pasar.

Skripsi ini membahas modifikasi model Black-Scholes-Merton menggunakan GJR-GARCH untuk memberikan pemodelan volatilitas yang lebih realistis dan akurat dalam penetapan harga opsi serta membandingkan dengan Model Black-Scholes-Merton klasik. Skripsi ini berjudul "Modifikasi Model Black-Scholes-Merton Menggunakan GJR-GARCH untuk Penetapan Harga Opsi."

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka rumusan permasalahan yang akan dibahas adalah:

1. Bagaimana hasil perhitungan harga opsi menggunakan modifikasi model Black-Scholes-Merton dengan volatilitas GJR-GARCH?
2. Bagaimana perbandingan harga opsi menggunakan modifikasi model Black-Scholes-Merton dengan volatilitas GJR-GARCH dengan Black-Scholes-Merton klasik ?

C. Batasan Masalah

Pada skripsi ini membatasi penetapan harga opsi pada opsi *call* tipe Eropa. Modifikasi Model Black-Scholes-Merton yang digunakan adalah Model Black-Scholes-Merton Fraksional menggunakan volatilitas GJR-GARCH.

D. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui hasil perhitungan harga opsi menggunakan modifikasi Model Black-Scholes-Merton dengan volatilitas GJR-GARCH.
2. Mengetahui perbandingan harga opsi menggunakan modifikasi model Black-Scholes-Merton dengan volatilitas GJR-GARCH dengan Black-Scholes-Merton klasik.

E. Manfaat Penelitian

1. Untuk Penulis

Untuk menambah wawasan dan pemahaman tentang model untuk menghitung nilai opsi *call* tipe Eropa menggunakan modifikasi Model Black-Scholes-Merton dengan volatilitas GJR-GARCH.

2. Untuk Pembaca

Dapat dijadikan referensi untuk penelitian oleh berbagai kalangan yang tertarik untuk mempelajari lebih lanjut

tentang opsi khususnya opsi tipe Eropa dan metode penentuan harga opsi *call* menggunakan modifikasi model Black-Scholes-Merton dengan volatilitas GJR-GARCH.

3. Untuk Jurusan Matematika

Meningkatkan penelitian tentang aplikasi matematika terutama di bidang Keuangan, terutama masalah penentuan harga opsi.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Teori dan definisi yang diterapkan dalam skripsi ini meliputi opsi, persamaan difusi, distribusi normal standar, Black-Sholes-Merton, volatilitas, analisis time series, identifikasi model, model GJR-GARCH, dan penelitian terdahulu.

A. Opsi

Dalam bagian teori opsi akan dijelaskan terkait opsi, *hedging*, portofolio, *free of arbitrage*, proses stokastik, gerak brown, persamaan diferensial stokastik, lemma ito, gerak brown geometrik dan *Black-Scholes-Merton equation*

1. Opsi

Definisi 2.1.1 (Hull, 2012)

Opsi merupakan suatu kontrak atau perjanjian antara penjual dan pembeli opsi, di mana penjual opsi memberikan jaminan bahwa pembeli opsi memiliki hak untuk membeli atau menjual saham tertentu pada harga dan tanggal yang telah ditetapkan.

Dalam penetapan nilai suatu opsi, terdapat lima variabel utama yang memengaruhi harga opsi. Variabel-variabel tersebut adalah sebagai berikut (Hull, 2018a):

a. Harga saham saat ini (S_0)

Harga saham berbanding lurus dengan nilai opsi *call*, yang berarti jika harga saham naik, nilai opsi *call* akan

meningkat, tetapi nilai opsi *put* akan turun sebagai akibat dari penurunan nilai intrinsiknya.

- b. Harga Pelaksanaan (*Strike Price*) (K)
 Harga pelaksanaan suatu opsi akan konstan selama jangka waktu. Dengan kata lain, jika *Strike Price* turun nilai opsi *beli* akan lebih tinggi, melainkan nilai opsi *put* akan lebih tinggi jika *Strike Price* naik.
- c. Waktu jatuh tempo (T)
 Sebuah kontrak kehilangan nilainya setelah batas waktu tiba. Akibatnya, semakin lama waktu jatuh tempo suatu opsi, semakin tinggi harganya dengan asumsi faktor lain tetap. Sebaliknya, investor memiliki lebih sedikit waktu untuk berspekulasi mengenai kenaikan atau penurunan harga saham jika tanggal jatuh tempo opsi relatif pendek.
- d. Suku bunga bebas resiko (r)
 Suku bunga bebas risiko diperoleh dari tingkat suku bunga yang ditetapkan oleh bank sentral Amerika Serikat pada saat itu. Investor akan semakin tertarik untuk membeli opsi beli daripada saham pada suku bunga jangka pendek, yang berarti harga opsi beli dan jual turun.
- e. Volatilitas (σ)
 Volatilitas adalah harga yang berubah-ubah dari suatu saham. Jika semua faktor lain dianggap tetap, peningkatan volatilitas harga saham yang diharapkan akan menyebabkan kenaikan harga opsi. Hal ini disebabkan oleh meningkatnya kemungkinan terjadinya perubahan signifikan pada harga saham

ketika volatilitas lebih tinggi.

Berdasarkan jangka waktu jatuh tempo, terdapat dua macam jenis opsi, yaitu (Luenberger, 1998):

- a. Opsi tipe eropa (*European Option*) hanya dapat digunakan pada akhir waktu jatuh tempo.
- b. Opsi tipe amerika (*American Option*) adalah opsi yang dilakukan hingga tanggal jatuh tempo.

Berdasarkan jenis hak yang diberikan kepada pemegang opsi, ada dua katagori opsi yaitu (Hull, 2018b):

- a. Opsi beli (*Call Option*)

Opsi *call* dinotasikan $C = C(S, t)$, memberikan hak kepada pemegangnya untuk membeli saham pada harga tertentu dan pada tanggal jatuh tempo untuk opsi tipe Eropa atau sebelum tanggal jatuh tempo untuk opsi tipe Amerika (Rahman, 2010).

Definisi 2.1.2 (*Nilai Intrinsik Opsi Call*)

Nilai intrinsik dari opsi call adalah nilai yang dihitung dari selisih antara harga saham (S) dan strike price (K). Secara matematis, nilai intrinsik dari opsi call dinyatakan sebagai berikut (Hull, 2012):

$$C = \text{Maks}\{S - K, 0\} \quad (2.1)$$

Keterangan :

C : harga opsi beli

S : harga saham

K : harga pelaksanaan (*strike price*)

Jika *strike price* lebih tinggi daripada nilai saham, opsi *call* akan bernilai nol. Namun, ketika nilai saham lebih tinggi dari *strike price*, opsi *call* adalah selisih antara nilai saham dan *strike price*. Seperti yang ditunjukkan pada persamaan (2.1).

Berdasarkan hal ini, opsi *call* dapat diklasifikasikan tiga jenis, yaitu (Halim, 2005):

- 1) opsi *call* disebut *out of the money* jika harga saham lebih rendah daripada *strike price* $S < K$, sehingga opsi ini akan bernilai nol.
- 2) opsi *call* disebut *in the money* jika harga saham lebih tinggi daripada *strike price* $S > K$, sehingga opsi ini bernilai positif.
- 3) opsi *call* dikatakan *at the money* apabila harga saham sama dengan *strike price* $S = K$, sehingga opsi ini akan bernilai nol.

Contoh 2.1.3 (Halim, 2005)

Misalkan pada tanggal 15 oktober 2024, harga pasar saham PT. Jaya Mulia adalah Rp 3000 per lembar, dan Ihsan melakukan transaksi opsi *call* saham PT Jaya Mulia seharga Rp 2.500 per lembar hingga tanggal 15 november 2024, dengan harga premi opsi adalah 500 per lembar. Terlepas dari harga saham PT. Jaya Mulia, jika Ihsan membayar Rp 2.500 per lembar saham. Berikut Tabel 2.1. perhitungan opsi *call*.

Tabel 2.1. Perhitungan Opsi *call*

Harga Saham (1)	Exercise Price (2)	Nilai opsi Beli (3)	Premi opsi (4)	Labarugi (5) = (3)-(4)
Rp 1.500	Rp 2.500	Rp 0	Rp 500	Rp(-500)
Rp 2.000	Rp 2.500	Rp 0	Rp 500	Rp(-500)
Rp 2.500	Rp 2.500	Rp 0	Rp 500	Rp(-500)
Rp 3.000	Rp 2.500	Rp 500	Rp 500	Rp 0
Rp 3.500	Rp 2.500	Rp 1.000	Rp 500	Rp 500
Rp 4.000	Rp 2.500	Rp 1.500	Rp 500	Rp 1.000

Keuntungan yang diperoleh dari saham PT Jaya Mulia semakin besar, jika semakin tinggi harga saham PT Jaya Mulia seperti yang ditunjukkan pada Tabel 2.1. Ihsan melakukan transaksi opsi *call* sebesar Rp 2.500. jika harga saham di bawah Rp 2.500, Ihsan akan mengalami kerugian sebesar Rp 500, dan jika harga saham di atas Rp 2.500, Ihsan akan mengalami keuntungan sebesar selisih antara nilai opsi beli dan premi opsi.

b. Opsi jual (*put option*)

Opsi *put* dinotasikan $P = P(S, t)$, memberikan hak kepada pemegangnya untuk menjual saham pada harga tertentu pada tanggal tertentu untuk opsi tipe Eropa atau sebelum tanggal tersebut untuk opsi tipe Amerika (Tsani, 2013).

Definisi 2.1.4 (*Nilai Intrinsik Opsi Put*)

Nilai intrinsik dari opsi *put* adalah nilai yang diperoleh dari selisih antara strike price (K) dan harga saham (S). Secara matematis, nilai intrinsik dari opsi *put* dinyatakan sebagai berikut (Hull, 2012):

$$P = \text{Maks}\{K - S, 0\} \quad (2.2)$$

Keterangan :

P : harga opsi Jual

S : harga saham

K : harga pelaksanaan

Persamaan (2.2) menunjukkan opsi *put* akan bernilai nol, jika nilai saham lebih tinggi dari *strike price*. Ketika *strike price* lebih tinggi dari nilai saham maka nilai opsi *put* merupakan selisih dari *strike price* dengan nilai saham. Sehingga opsi *put* dapat dibedakan menjadi 3 jenis yaitu (Rahman, 2010):

- 1) Opsi *put* dikatakan *out of the money* jika harga saham lebih tinggi dari pada *strike price* $S > K$ dan opsi ini akan bernilai nol.
- 2) Opsi *put* dikatakan *in the money* jika harga saham lebih rendah dari *strike price* $S < K$ dan bernilai positif.
- 3) Opsi *put* dikatakan *at the money* jika harga saham sama dengan *strike price* $S = K$, sehingga opsi ini akan bernilai nol.

Contoh 2.1.5 (Hull, 2022)

Misalkan dalam waktu 3 bulan dari sekarang harga pasar saham sebuah perusahaan adalah Rp 10.000 per lembar. Hingga 3 bulan berikutnya, perusahaan menjualnya kepada investor dengan harga Rp 9.500 per lembar. Harga premi opsi adalah Rp. 500 per lembar. Tidak peduli harga saham perusahaan, sebuah perusahaan akan membayar Rp 9.500 per lembar saham jika melakukan opsinya. Berikut Tabel 2.2. Perhitungan opsi *put*.

Tabel 2.2. Perhitungan opsi *put*

Harga Saham (1)	Exercise Price (2)	Nilai opsi Jual (3)	Premi opsi (4)	Labarugi (5) = (3)-(4)
Rp 11.000	Rp 9.500	Rp 0	Rp 500	Rp(-500)
Rp 10.000	Rp 9.500	Rp 0	Rp 500	Rp(-500)
Rp 9.500	Rp 9.500	Rp 0	Rp 500	Rp(-500)
Rp 9.000	Rp 9.500	Rp 500	Rp 500	Rp 0
Rp 8.500	Rp 9.500	Rp 1.000	Rp 500	Rp 500
Rp 8.000	Rp 9.500	Rp 1.500	Rp 500	Rp 1.000

Tabel 2.2. menunjukkan bagaimana investor melakukan transaksi opsi *put* dengan harga Rp 9.500. Jika harga saham di bawah Rp 9.500, investor akan mengalami keuntungan sebesar Rp 500, dan jika harga saham di atas Rp 9.500, investor akan mengalami kerugian sebesar selisih dari harga opsi *put* dan premi opsi. Menurut penjelasan yang telah diuraikan, semakin kecil harga saham perusahaan, semakin besar keuntungan yang diperoleh investor.

Terdapat empat pihak yang terlibat dalam transaksi opsi, yaitu (Muniroh, 2008):

- Pembeli opsi *call* (*call holder*) memiliki hak untuk membeli sejumlah saham dengan harga tertentu pada waktu tertentu.
- Penjual opsi *call* (*call writer*) yang menerima pembayaran dan berjanji untuk memberikan sejumlah saham dengan harga dalam waktu tertentu.
- Pembeli opsi *put* (*put holder*) memiliki hak untuk menjual sejumlah saham dengan harga dalam periode tertentu.
- Penjual opsi *put* (*put writer*) menerima pembayaran

dan perjanjian untuk membeli sejumlah saham dengan harga dalam periode tertentu.

2. *Hedging*

Hedging merupakan strategi investasi yang digunakan oleh investor untuk menjaga nilai aset yang dimilikinya. *Hedging* bertujuan untuk mengurangi potensi kerugian yang mungkin terjadi. Dalam praktiknya, banyak investor yang menggunakan opsi saham sebagai alat *hedging* ketika berinvestasi di pasar modal (Fadhilla & Artiono, 2021). salah satu strategi untuk menjaga nilai saham merupakan *delta hedging* (Yong, 2008).

Definisi 2.1.6 (Higham, 2004)

Delta hedging (Δ) adalah turunan pertama nilai opsi saham terhadap nilai saham. Secara matematis, *delta hedging* dinyatakan sebagai

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \quad (2.3)$$

Keterangan :

Δ : *delta hedging*
 V : *harga opsi saham*
 S : *harga saham.*

3. Portofolio

Portofolio merupakan kombinasi dari berbagai aset yang dimiliki oleh seorang investor. Seperti halnya strategi lindung nilai (*hedging*), portofolio juga berfungsi sebagai upaya untuk menjaga nilai opsi saham yang dimiliki. Portofolio ini dapat dibentuk dengan mengkombinasikan

saham dan opsi saham dalam posisi yang saling berlawanan, sehingga menghasilkan suatu posisi yang bebas dari risiko (Hull, 2012). Oleh karena itu, nilai portofolio dapat disusun berdasarkan nilai saham yang dilindungi melalui strategi *delta hedging*, yaitu

$$\Pi = V - \Delta S \quad (2.4)$$

Keterangan :

Δ : *delta hedging*
 V : harga opsi saham
 S : harga saham

Perubahan portofolio terhadap waktu dt , yaitu

$$d\Pi = dV - \Delta dS. \quad (2.5)$$

4. *Free of Arbitrage*

Free of arbitrage atau ketiadaan arbitrase merujuk pada situasi di mana tidak terdapat peluang untuk memperoleh keuntungan tanpa risiko. Arbitrase biasanya dimanfaatkan oleh investor guna meraih keuntungan tanpa menanggung risiko, salah satu caranya adalah dengan bertransaksi di dua atau lebih pasar modal secara bersamaan (Hull, 2012). Kesempatan arbitrase dapat muncul apabila terdapat perbedaan harga saham antar pasar yang berbeda. Nilai *free of arbitrage* dinyatakan sebagai berikut:

$$d\Pi = r\Pi dt \quad (2.6)$$

Keterangan :

$d\Pi$: Perubahan nilai portofolio pada waktu dt
 r : suku bunga.

5. Proses Stokastik

Definisi 2.1.7 (Taylor & Karlin, 1998)

proses stokastik adalah himpunan variabel random $\{X(t), t \in T\}$ dengan t menyatakan waktu dan $X(t)$ menyatakan proses pada waktu t . Himpunan T disebut himpunan indeks dari suatu proses stokastik. Jika himpunan T adalah suatu interval waktu $t \in (0, \infty)$, maka proses stokastik dikatakan sebagai proses stokastik waktu kontinu dan dinyatakan dalam bentuk $\{X(t), t \geq 0\}$.

6. Gerak Brown

a. Gerak Brown Standar

Definisi 2.1.8 (Higham, 2004)

Suatu proses stokastik $\{W(t), t \in T\}$ dikatakan sebagai Gerak Brown standar jika proses tersebut memenuhi beberapa kriteria berikut:

- 1) $W(0) = 0$ (dengan probabilitas 1).
- 2) Untuk $0 \leq s \leq t \leq T$, perubahan $W(t) - W(s)$ berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi $(t - s)$ atau secara ekuivalen $W(t) - W(s) \sim N(0, 1)$, dengan $N(0, 1)$ menotasikan distribusi normal dengan mean 0 dan variansi 1.
- 3) untuk $0 \leq s < t < u < v \leq T$, perubahan $W(t) - W(s)$ dan $W(v) - W(u)$ saling bebas.

b. Gerak Brown Fraksional

Definisi 2.1.9 (Njomen & Djuetcha, 2019)

Gerak Brown fraksional $B_H(t)$, dengan parameter Hurst $H \in (0, 1)$, adalah suatu proses stokastik yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1) $B_H(0) = 0$ hampir pasti, dan proses ini didefinisikan untuk semua $t \geq 0$.

2) Proses ini merupakan proses Gaussian dengan

$$\mathbb{E}[B_H(t)] = 0 \quad \text{dan} \quad \mathbb{E}[B_H(t)^2] = t^{2H}, \quad \text{untuk semua } t \in \mathbb{R}.$$

3) Proses B_H memiliki inkremen yang stasioner, yang berarti bahwa untuk setiap $s, t \geq 0$, selisih $[B_H(t + s) - B_H(s)]$ memiliki sifat yang sama dengan $B_H(t)$.

4) Proses B_H memiliki lintasan yang kontinu.

Proposisi 2.1.10 (Njomen & Djuetcha, 2019)

Misalkan B_H adalah suatu gerak Brown fraksional, maka berlaku:

1) Ketika $H = 0,5$, proses tersebut bertepatan dengan gerak Brown standar.

2) Ketika $H \neq 0,5$, proses tersebut bukan merupakan semimartingal.

3) Ketika $H > 0,5$, proses B_H memiliki ketergantungan jangka panjang (long-range dependence).

7. Persamaan Diferensial Stokastik

a. Persamaan Diferensial Stokastik Klasik

Definisi 2.1.11 (Higham, 2001)

Persamaan Diferensial Stokastik memiliki bentuk sebagai berikut :

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t), t \in [0, T] \quad (2.7)$$

Keterangan :

$f(X(t))$: *fungsi deterministik (koefisien drift)*

$g(X(t))$: *fungsi stokastik (koefisien difusi)*

$dW(t)$: *gerak Brown.*

b. Persamaan Diferensial Stokastik Fraksional

Definisi 2.1.12 (Dai & Heyde, 1996)

Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ serta $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi-fungsi yang cukup halus. Sebuah proses stokastik $\{X(t) : t \in [0, T]\}$ dikatakan memenuhi Persamaan Diferensial Stokastik Fraksional (PDSF) jika berlaku:

$$dX(t) = f(X(t)) dt + g(X(t)) dB_H(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.8)$$

Keterangan :

$f(X(t))$: *fungsi deterministik (koefisien drift)*

$g(X(t))$: *fungsi stokastik (koefisien difusi)*

$dB_H(t)$: *gerak Brown fraksional.*

8. Lemma Ito

a. Lemma Ito klasik

Lemma 2.1.13 (Yoo, 2017)

Misalkan diberikan $V = V(S, t)$ adalah fungsi variabel

S dan t dimana S memenuhi persamaan diferensial stokastik sebagai berikut :

$$dS = \mu(S, t) dt + \sigma(S, t) dW_t,$$

Dengan dW_t adalah gerak Brown, $\mu(S, t) dt$ adalah komponen deterministik dan $\sigma(S, t) dW_t$ adalah komponen stokastik. Dimana nilai μ dan σ ialah parameter dari S dan t .

Maka Persamaan umum dari Ito's Lemma adalah sebagai berikut :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S, dW_t. \quad (2.9)$$

Bukti.

Untuk Fungsi $V = V(S, t)$, dengan pendekatan Taylor uraian V adalah

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial S} dt dS + \dots \quad (2.10)$$

Untuk menyederhanakan persamaan (2.10) menggunakan tabel perkalian ito (Ito's multiplication table) sebagai berikut (Byott, 2006) :

	dt	dW_t
dt	0	0
dW_t	0	dt

Serta nilai $dt dS$ yaitu,

$$\begin{aligned} dt dS &= dt \cdot (\mu S dt + \sigma S dW_t) \\ &= \mu S (dt)^2 + \sigma S dt dW_t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sehingga kita memperoleh bentuk persamaan sebagai berikut :

$$dV(t) = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS)^2. \quad (2.11)$$

Kemudian untuk mencari $(dS)^2$ menggunakan persamaan (2.19) sebagai berikut :

$$\begin{aligned} dS &= S\mu dt + \sigma S dW_t \\ &= (S\mu dt + \sigma S dW_t)^2 \\ &= (S\mu dt)^2 + 2(S\mu dt)(\sigma S dW_t) + (\sigma S dW_t)^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dengan menggunakan tabel perkalian Ito untuk menyederhanakan persamaan (2.12), sehingga memperoleh:

$$\begin{aligned} (dS)^2 &= 0 + 2 \cdot 0 \cdot (\sigma S dW_T) + (\sigma S dW_T)^2 \\ &= 0 + 0 + (\sigma S dW_T)^2 \\ &= (\sigma S dW_T)^2 \\ &= (\sigma)^2 (S)^2 (dW_T)^2 \\ &= \sigma^2 S_t^2 dt. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Substitusikan persamaan (2.19) dan persamaan (2.13) ke dalam persamaan (2.11), maka didapatkan:

$$\begin{aligned}
 dV &= \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS)^2 \\
 &= \frac{\partial V}{\partial S} (S\mu dt + \sigma S dW_t) + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (\sigma^2 S^2 dt) \\
 &= \frac{\partial V}{\partial S} S\mu dt + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S dW_t + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt \\
 &= \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW_t
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti persamaan (2.9) adalah bentuk persamaan umum lemma ito dari fungsi $V = V(S, t)$. ■

b. Lemma Ito Fraksional

Lemma 2.1.14 (Njomen & Djuetcha, 2019)

Misalkan diberikan $V = V(S, t)$ adalah fungsi variabel S dan t dimana S memenuhi persamaan diferensial stokastik sebagai berikut :

$$dS = \mu(S, t) dt + \sigma(S, t) dB_H(t),$$

Dengan nilai μ dan σ adalah parameter S dan t serta $B_H(t)$ adalah fractional Brownian motion (fBm) dengan parameter Hurst $H \in [0, 1]$. Maka Persamaan umum dari Ito's Lemma fraksional adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 dV &= \left(\frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + H(T-t)^{(2H-1)} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \\
 &\quad \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S dB_H(t).
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Bukti.

Untuk Fungsi $V = V(S, t)$, dengan pendekatan Taylor uraian V adalah

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial S} dt dS + \dots \quad (2.15)$$

Untuk menyederhanakan persamaan (2.15) dikarenakan waktu dt sangat kecil, kita dapat menganggap nilainya mendekati nol dan nilai $dt dS = 0$. Sehingga kita memperoleh bentuk persamaan sebagai berikut:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS)^2. \quad (2.16)$$

Kemudian untuk mencari $(dS)^2$ menggunakan persamaan (2.20) sebagai berikut :

$$\begin{aligned} dS &= S_\mu dt + \sigma S dB_H(t) \\ &= (S_\mu dt + \sigma S dB_H(t))^2 \\ &= (S_\mu dt)^2 + 2(S_\mu dt)(\sigma S dB_H(t)) + (\sigma S dB_H(t))^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Diketahui nilai $dt^2 = 0$ dan $dt dB_H(t) = 0$ serta nilai $(dB_H(t))^2 = 2H(T - t)^{(2H-1)} dt$ (Njomen & Djuetcha, 2019). Sehingga persamaan (2.17) diperoleh:

$$\begin{aligned} (dS)^2 &= 0 + 2 \cdot 0 + (\sigma S dB_H(t))^2 \\ &= 0 + 0 + (\sigma S dB_H(t))^2 \\ &= (\sigma S dB_H(t))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\sigma)^2 (S)^2 (dB_H(t))^2 \\
&= \sigma^2 S^2 2H(T-t)^{(2H-1)} dt. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Substitusikan persamaan (2.20) dan persamaan (2.18) ke dalam persamaan (2.16), maka didapatkan:

$$\begin{aligned}
dV &= \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS)^2 \\
&= \frac{\partial V}{\partial S} (S\mu dt + \sigma S dB_H(t)) + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \\
&\quad (\sigma^2 S^2 2H(T-t)^{(2H-1)} dt) \\
&= \frac{\partial V}{\partial S} S\mu dt + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S dB_H(t) + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \\
&\quad \sigma^2 S^2 2H(T-t)^{(2H-1)} dt \\
&= \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} 2H(T-t)^{(2H-1)} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \\
&\quad \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dB_H(t) \\
&= \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + H(T-t)^{(2H-1)} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \\
&\quad \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dB_H(t)
\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti persamaan (2.14) adalah bentuk persamaan umum lemma ito Fraksional dari fungsi $V = V(S, t)$. ■

9. Gerak Brown Geometrik

Geometric Brownian Motion (GBM) merupakan model stokastik yang paling umum digunakan dalam pemodelan harga aset di pasar keuangan. Terdapat dua versi utama: versi klasik menggunakan proses Brownian

standar, sedangkan versi fraksional menggunakan fractional Brownian motion (fBm) untuk menangkap efek memori jangka panjang.

a. Gerak Brown Geometrik

Gerak Brown geometrik adalah proses stokastik dengan waktu kontinu. Model gerak Brown geometrik dinyatakan sebagai (Karatzas & Shreve, 1998):

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t \quad (2.19)$$

Keterangan :

dS : perubahan harga saham
 S : harga saham
 μ : nilai ekspektasi *return*
 σ : volatilitas
 dW_t : gerak Brown.

b. Gerak Brown Geometrik Fraksional

Model gerak Brown geometrik Fraksional dinyatakan sebagai (Necula, 2002):

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB_H(t) \quad (2.20)$$

Keterangan :

dS : perubahan harga saham
 S : harga saham
 μ : nilai ekspektasi *return*
 σ : volatilitas
 dB_H : gerak Brown fraksional.

10. Black-Scholes-Merton Equation

a. Black-Scholes-Merton Equation

Teorema 2.1.15 (Yoo, 2017)

Misalkan nilai suatu opsi dinyatakan sebagai $V = V(S, t)$, volatilitas saham adalah σ dan tingkat suku bunga bebas resiko adalah r . Maka, harga opsi seiring waktu dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial parsial Black-Scholes-Merton berikut:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (2.21)$$

Bukti.

Membentuk suatu portofolio yang terdiri dari saham dan opsi saham. Strategi yang diterapkan melibatkan pembelian satu opsi seharga V dan penjualan sebanyak Δ lembar saham seharga S . Nilai portofolio sesuai persamaan (2.4) sebagai berikut:

$$\Pi = V - \Delta S.$$

Perubahan nilai portofolio pada periode waktu dt , sesuai persamaan (2.5) nilai opsi berubah sebesar

$$d\Pi = dV + \Delta dS.$$

kita memiliki lemma ito pada persamaan (2.9) dan persamaan (2.19) disubsitusikan pada persamaan (2.5) diperoleh :

$$d\Pi = dV - \Delta dS$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW_t \right) \\
&\quad - \Delta(S\mu dt + \sigma S dW_t) \\
&= \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} dt + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW_t \right) \\
&\quad - \Delta S\mu dt - \Delta \sigma S dW_t \\
&= \mu S \frac{\partial V}{\partial S} dt + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW_t \\
&\quad - \Delta S\mu dt - \Delta \sigma S dW_t \\
&= \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \Delta S\mu \right) dt \\
&\quad + \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dW_t. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Agar portofolio yang didapat memiliki perubahan bersifat deterministik, perubahan acak atau komponen bersifat stokastik dW_t pada persamaan (2.22) dapat dihilangkan dengan menggunakan persamaan (2.3) sebagai berikut :

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Artinya, banyaknya saham Δ sama dengan nilai $\frac{\partial V}{\partial S}$, sehingga perubahan portofolio yang bersifat deterministik yaitu :

$$\begin{aligned}
d\Pi &= \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \Delta S\mu \right) dt \\
&\quad + \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dW_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{\partial V}{\partial S} S \mu \right) dt \\
&+ \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial S} \right) dW_t \\
&= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \\
&+ \sigma S (0) dW_t \\
&= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Karena nilai portofolio tidak memuat komponen stokastik dW_t sehingga nilai portofolio merupakan nilai bebas risiko selama selang waktu dt . Oleh karena itu, nilai portofolio akan sebanding dengan nilai portofolio pada periode dt dengan tingkat suku bunga bebas resiko (r) cara untuk menghindari terjadinya *arbitrage* menggunakan persamaan (2.6) sebagai berikut :

$$d\Pi = r\Pi dt.$$

Kemudian, subsitusikan persamaan (2.23) dan persamann (2.4) ke dalam persamaan (2.6)

$$\begin{aligned}
d\Pi &= r\Pi dt \\
\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt &= r(V - \Delta S) dt \\
\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) &= r(V - \Delta S) \\
\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= rV - r\Delta S \\
\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= rV - r \frac{\partial V}{\partial S} S
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV - rS \frac{\partial V}{\partial S}. \quad (2.24)$$

Persamaan (2.24) dapat ditulis dalam bentuk berikut ini :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Dengan demikian, terbukti Persamaan diferensial parsial (PDP) Black-Scholes-Merton. ■

b. *Fractionnal Black-Scholes-Merton Equation*

Teorema 2.1.16 (Njomen & Djuetcha, 2019)

Misalkan nilai suatu opsi dinyatakan sebagai $V = V(S, t)$, volatilitas saham adalah σ dan tingkat suku bunga bebas resiko adalah r . Maka, harga opsi seiring waktu dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial parsial Fraksional Black-Scholes-Merton berikut:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(T - t)^{2H-1} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (2.25)$$

Bukti.

Membentuk suatu portofolio yang terdiri dari saham dan opsi saham. Strategi yang diterapkan melibatkan pembelian satu opsi seharga V dan penjualan sebanyak Δ lembar saham seharga S . Nilai portofolio sesuai persamaan (2.4) sebagai berikut:

$$\Pi = V - \Delta S$$

Perubahan nilai portofolio pada periode waktu dt ,

sesuai persamaan (2.5) nilai opsi berubah sebesar:

$$d\Pi = dV + \Delta dS$$

kita memiliki lemma ito fraksional pada persamaan (2.14) dan persamaan (2.20) disubsitusikan pada persamaan (2.5) diperoleh :

$$\begin{aligned}
 d\Pi &= dV - \Delta dS \\
 &= \left(\left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + H(T-t)^{2H-1} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \right. \\
 &\quad \left. + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dB_H(t) \right) - \Delta (S \mu dt + \sigma S dB_H(t)) \\
 &= \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} dt + \frac{\partial V}{\partial t} dt + H(T-t)^{2H-1} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt \right. \\
 &\quad \left. + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dB_H(t) \right) - \Delta S \mu dt - \Delta \sigma S dB_H(t) \\
 &= \mu S \frac{\partial V}{\partial S} dt + \frac{\partial V}{\partial t} dt + H(T-t)^{2H-1} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt \\
 &\quad + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dB_H(t) - \Delta S \mu dt - \Delta \sigma S dB_H(t) \\
 &= \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + H(T-t)^{2H-1} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \Delta S \mu \right) dt \\
 &\quad + \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dB_H(t) \tag{2.26}
 \end{aligned}$$

Agar portofolio yang didapat memiliki perubahan bersifat deterministik, perubahan acak atau komponen bersifat stokastik $dB_H(t)$ pada persamaan (2.26) dapat

dihilangkan dengan menggunakan persamaan (2.3) sebagai berikut :

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Artinya, banyaknya saham Δ sama dengan nilai $\frac{\partial V}{\partial S}$, sehingga perubahan portofolio yang bersifat deterministik yaitu :

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + H(T-t)^{2H-1} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \Delta S \mu \right) dt \\ &\quad + \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dB_H(t) \\ &= \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + H(T-t)^{2H-1} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{\partial V}{\partial S} S \mu \right) dt \\ &\quad + \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial S} \right) dB_H(t) \\ &= \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + H(T-t)^{2H-1} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{\partial V}{\partial S} S \mu \right) dt \\ &\quad + \sigma S(0) dB_H(t) \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + H(T-t)^{2H-1} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \quad (2.27) \end{aligned}$$

Karena nilai portofolio tidak memuat komponen stokastik dW_t sehingga nilai portofolio merupakan nilai bebas risiko selama selang waktu dt . Oleh karena itu, nilai portofolio akan sebanding dengan nilai portofolio pada periode dt dengan tingkat suku bunga bebas resiko (r) cara untuk menghindari terjadinya *arbitrage* menggunakan persamaan (2.6) sebagai berikut :

$$d\Pi = r\Pi dt$$

Kemudian substitusikan persamaan (2.4) dan persamaan (2.27) ke persamaan (2.6)

$$\begin{aligned}
 d\Pi &= r\Pi dt \\
 \left(\frac{\partial V}{\partial t} + H(T-t)^{2H-1} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt &= r(V - \Delta S) dt \\
 \left(\frac{\partial V}{\partial t} + H(T-t)^{2H-1} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt &= (rV - \Delta rS) dt \\
 \frac{\partial V}{\partial t} + H(T-t)^{2H-1} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt &= rV - \Delta rS dt \\
 \frac{\partial V}{\partial t} + H(T-t)^{2H-1} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt &= rV - \frac{\partial V}{\partial S} rS dt
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

Persamaan (2.28) dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(T-t)^{2H-1} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Sehingga terbukti persamaan diferensial parsial (PDP) Fraksional Black-Scholes-Merton. ■

B. Persamaan Difusi

Difusi merupakan peristiwa perpindahan suatu zat pelarut dari konsentrasi tinggi ke konsentrasi rendah (Yudhi, 2019). Peristiwa ini dapat diubah ke dalam persamaan difusi. Persamaan difusi adalah persamaan diferensial parsial yang memodelkan proses

difusi. Bentuk umum persamaan difusi adalah (Byott, 2006):

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.29)$$

Dengan kondisi awal $u(0, x) = u_0(x)$ Bentuk solusi Umum dari persamaan (2.14)

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}} dy. \quad (2.30)$$

C. Distribusi Normal Standar

Distribusi normal standar adalah distribusi probabilitas kontinu yang memiliki nilai rata-rata nol dan variansi satu. Variabel acak z yang mengikuti distribusi ini dilambangkan sebagai (Bain, 1992) :

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

memiliki fungsi kepadatan peluang atau *Probability Density Function* (PDF):

$$n_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)}, \quad -\infty < z < \infty. \quad (2.31)$$

Fungsi distribusi kumulatif atau *Cumulative Distribution Function* (CDF) adalah:

$$N_Z(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt. \quad (2.32)$$

D. Black-Scholes-Merton

Model Black-Scholes-Merton ialah tonggak dalam teori keuangan modern, khususnya untuk penetapan harga opsi. Sejarahnya dimulai pada tahun 1900 ketika Louis Bachelier memperkenalkan ide awal tentang penetapan harga opsi menggunakan gerak Brown, namun kurang mendapat perhatian. Pada 1960-an, para ekonomi belum berhasil mengembangkan model yang memuaskan, tetapi baru pada 1970-1971 Fischer Black dan Myron Scholes menemukan persamaan diferensial yang menjadi dasar model Black Scholes Merton. Robert Merton memperluas model ini pada 1973, dan Scholes serta Merton dianugerahi hadiah Nobel pada 1997, meskipun Black sudah meninggal. Model ini terus digunakan dalam penetapan harga opsi dan teori keuangan dan dimodifikasi hingga kini (Mackenzie, 2006).

Secara Matematis, model pergerakan harga saham yang menjadi dasar dalam pembentukan model penilaian opsi adalah *Geometric Brownian Motion*. Model ini mengasumsikan bahwa return saham berdistribusi normal. Artinya, perubahan harga tidak bisa diprediksi secara pasti, tetapi memiliki pola rata rata dan tingkat fluktuasi tertentu. Berdasarkan asumsi ini, pergerakan harga saham dapat dijelaskan dengan persamaan diferensial stokastik yang mengikuti *Geometric Brownian Motion* (Brigo, D.et al., 2008). Misal $V = V(S, t)$ menyatakan nilai suatu opsi Eropa sebagai fungsi variabel dari harga saham S dan waktu t . Dimana S memenuhi persamaan (2.19) sebagai berikut (Karatzas & Shreve, 1998):

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t$$

Keterangan:

dS : perubahan harga saham

S : harga saham

μ : nilai ekspektasi return

σ : volatilitas

dW_T : Perubahan acak (*Brownian motion*).

Persamaan (2.19) memiliki dua komponen, yaitu $\mu S dt$ adalah komponen deterministik yang menggambarkan tingkat pertumbuhan rata-rata disebut drift dan $\sigma S dW_t$ adalah komponen stokastik yang menggambarkan fluktuasi acak dalam pergerakan harga saham disebut difusi.

Tujuan dari penggunaan *Geometric Brownian Motion* adalah untuk memodelkan dinamika harga saham secara stokastik yang mencerminkan sifat pasar keuangan nyata. Model ini dengan menerapkan kalkulus stokastik, khususnya Lemma Ito pada persamaan (2.9), untuk menurunkan persamaan diferensial parsial Black-Scholes-Merton dapat dilihat pada persamaan (2.21) yang akan digunakan dalam perhitungan harga opsi model Black-Scholes-Merton.

Asumsi-asumsi yang mendasari penurunan persamaan diferensial Black-Scholes-Merton adalah sebagai berikut (Hull, 2018a):

1. Harga saham diasumsikan bergerak secara acak dengan distribusi lognormal, dimana *mean* μ dan volatilitas σ yang konstan.
2. Penjualan pendek sekuritas diperkenankan dengan hasil

penjualannya penuh.

3. Tidak ada biaya transaksi atau pajak. Semua sekuritas dapat dibagi dengan sempurna.
4. Saham tidak membayar dividen hingga masa berlaku derivatif.
5. Tidak tersedia peluang arbitrase bebas risiko.
6. Perdagangan sekuritas dilakukan secara kontinu.
7. Tingkat suku bunga bebas risiko r diasumsikan konstan dan sama untuk semua jatuh tempo.

Kemudian untuk mendapatkan rumus perhitungan harga opsi model Black Scholes Merton untuk opsi *call* pada opsi saham tipe Eropa menggunakan persamaan diferensial parsial (PDP) Black-Scholes-Merton. untuk Opsi *Call* dinotasikan $C = C(S, t)$, maka persamaan (2.21) menjadi sebagai berikut (Sidarto, 2019):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0, \quad 0 \leq t < T, S \geq 0 \quad (2.33)$$

Syarat awal dan syarat batas dari persamaan (2.33) :

$$\begin{aligned} C(S, T) &= \text{Maks}\{S - K, 0\} \\ C(0, t) &= 0, & \text{, untuk } 0 \leq t \leq T \\ C(S, t) &\approx S, & \text{, untuk } S \text{ besar.} \end{aligned}$$

Solusi persamaan diferensial parsial (PDP) Black-Scholes-Merton untuk kontrak *call* sebagai berikut (Sidarto, 2019) :

Mentransformasi variabel S , C dan t ditransformasi menjadi x , v dan τ yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\left\{ \begin{array}{l} S = Ke^x \quad \text{atau} \quad x = \ln \frac{S}{K} \\ t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \quad \text{atau} \quad \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t) \\ C(S, t) = Kv(x, \tau) \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Dari persamaan (2.34) diketahui $x = \ln \frac{S}{K}$ diturunkan secara parsial terhadap S diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\ln \frac{S}{K} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial S} (\ln S - \ln K) \\ &= \frac{1}{S} - 0 \\ &= \frac{1}{S}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Karena $C(S, t) = Kv(x(S), \tau(t))$, maka turunan pertama parsial C terhadap S diperoleh menggunakan turunan parsial rantai :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial S} (Kv(x(S), \tau(t))) \\ &= K \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial S} \right) \\ &= K \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{S} + \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot 0 \right) \\ &= K \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{S} + 0 \right) \\ &= K \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{S} \\ &= K \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{e^x K} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{e^x} \\
&= v_x e^{-x}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Dengan melakukan turunan secara parsial lagi terhadap S kita memperoleh turunan kedua dari C terhadap S adalah

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} (v_x \cdot e^{-x}) \\
&= e^{-x} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial S} + v_x \cdot \frac{\partial(e^{-x})}{\partial S}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Hitung turunan $\frac{\partial(e^{-x})}{\partial S}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial S}(e^{-x}) &= \frac{\partial}{\partial S}(e^{-x}) \cdot \frac{\partial x}{\partial S} \\
&= -e^{-x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} \\
&= -e^{-x} \cdot \frac{1}{S}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Hitung turunan $\frac{\partial v_x}{\partial S}$ karena $v(x, \tau)$ diperoleh :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial S} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} \\
&= v_{xx} \cdot \frac{1}{S}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Substitusikan persamaan (2.38) dan persamaan (2.39) ke dalam persamaan (2.37) sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= e^{-x} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial S} + v_x \cdot \frac{\partial e^{-x}}{\partial S} \\
&= e^{-x} \cdot v_{xx} \cdot \frac{1}{S} + v_x \cdot -e^{-x} \cdot \frac{1}{S}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-x} \cdot v_{xx} \cdot \frac{e^{-x}}{K} - e^{-x} \cdot v_x \cdot \frac{e^{-x}}{K} \\
&= \frac{e^{-2x}}{K} \cdot v_{xx} - \frac{e^{-2x}}{K} \cdot v_x r \\
&= \frac{e^{-2x}}{K} (v_{xx} - v_x). \tag{2.40}
\end{aligned}$$

Dari persamaan (2.34) diketahui $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$ diturunkan secara parsial terhadap t , diperoleh :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sigma^2}{2}(T - t) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sigma^2}{2}T - \frac{\sigma^2}{2}t \right) \\
&= -\frac{\sigma^2}{2}. \tag{2.41}
\end{aligned}$$

Karena $C(S, t) = Kv(x(S), \tau(t))$, maka turunan pertama parsial C terhadap t menggunakan turunan parsial rantai diperoleh :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (Kv(x(S), \tau(t))) \\
&= K \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \\
&= K \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot \left(-\frac{\sigma^2}{2} \right) \right) \\
&= K \left(0 + \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot \left(-\frac{\sigma^2}{2} \right) \right) \\
&= K \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot \left(-\frac{\sigma^2}{2} \right) \right) \\
&= -K \cdot \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot \frac{\sigma^2}{2} \\
&= -K \cdot \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \tau}
\end{aligned}$$

$$= -K \cdot \frac{\sigma^2}{2} \cdot v_\tau. \quad (2.42)$$

Hasil transformasi yaitu persamaan (2.36), persamaan (2.40) dan persamaan (2.42) disubsitusikan ke dalam persamaan (2.33) ialah persamaan Diferensial Parsial (PDP) Black-Sholes-Merton untuk opsi *call* Eropa sehingga diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \\ & -K \cdot \frac{\sigma^2}{2} \cdot v_\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 e^{-2x} \cdot K^{-1}(v_{xx} - v_x) \\ & \quad + rS v_x e^{-x} - rKv = 0 \\ & -K \cdot \frac{\sigma^2}{2} \cdot v_\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 (K^2 e^{2x}) e^{-2x} \cdot K^{-1}(v_{xx} - v_x) \\ & \quad + r(K e^x) v_x e^{-x} - rKv = 0 \\ & -\frac{\sigma^2}{2} v_\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{2x} e^{-2x} (v_{xx} - v_x) + r e^x v_x e^{-x} - r v = 0 \\ & -v_\tau + e^{2x} e^{-2x} (v_{xx} - v_x) + \frac{2r}{\sigma^2} e^x v_x e^{-x} - \frac{2r}{\sigma^2} v = 0 \\ & -v_\tau + (v_{xx} - v_x) + \frac{2r}{\sigma^2} v_x - \frac{2r}{\sigma^2} v = 0 \\ & \quad , k = \frac{2r}{\sigma^2} \\ & -v_\tau + v_{xx} + v_x(k - 1) - kv = 0 \\ & v_\tau = v_{xx} + v_x(k - 1) - kv. \quad (2.43) \end{aligned}$$

Kemudian untuk memperoleh syarat awal dan syarat batas

$$\begin{aligned} Kv(x, 0) &= C(S, t) \\ &= \text{Maks}\{S - K\} \\ &= \text{Maks}\{K e^x - K\} \end{aligned}$$

$$= \text{Maks} \{K(e^x - 1)\} \quad (2.44)$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} Kv(x, 0) &= \text{Maks} \{K(e^x - 1)\} \\ v(x, 0) &= \frac{\text{Maks} \{K(e^x - 1)\}}{K} \\ &= \text{Maks} \{e^x - 1\} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Karena

$$\lim_{S \rightarrow 0} x = -\infty$$

maka

$$\lim_{S \rightarrow 0} C(S, t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} Kv(x, \tau) = 0$$

Sehingga syarat batas kiri persamaan (2.44) adalah

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x, \tau) = 0 \quad (2.46)$$

Karena

$$\lim_{S \rightarrow 0} x = 0$$

maka

$$\lim_{S \rightarrow \infty} C(S, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} Kv(x, \tau) = Ke^x = S$$

Sehingga syarat batas kanan persamaan (2.44) adalah

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v(x, \tau) = e^x. \quad (2.47)$$

Hasil akhir transformasi variabel menghasilkan Persamaan Diferensial Parsial (PDP) sebagai berikut :

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_\tau = v_{xx} + v_x(k-1) - kv, & -\infty < x < \infty, \quad 0 < \tau < \frac{\sigma^2}{2}T \\ v(x, 0) = \text{Maks}\{e^x - 1\}, \\ v(x, \tau) = 0, & \text{jika } x \rightarrow -\infty \\ v(x, \tau) = e^x, & \text{jika } x \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (2.48)$$

Kemudian PDP akan diubah menjadi bentuk kanonik yang lebih sederhana menjadi PDP koefisien konstan seperti persamaan difusi, dengan mendefinisikan $v(x, \tau)$ menjadi bentuk:

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \quad (2.49)$$

Kemudian persamaan (2.49) dioperasikan turunan pertama $v(x, \tau)$ dan kedua $v(x, \tau)$ terhadap x serta turunan pertama $v(x, \tau)$ terhadap τ .

Turunan pertama $v(x, \tau)$ terhadap x

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \right) \\ &= e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + u(x, \tau) \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\alpha x + \beta \tau} \right) \\ &= e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + u(x, \tau) \cdot \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \\ &= e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + \alpha u(x, \tau) \right) \\ &= e^{\alpha x + \beta \tau} (u_x + \alpha u). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Turunan kedua dari $v(x, \tau)$ terhadap x .

Substitusikan persamaan (2.50) ke persamaan (2.51)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right) \right) \quad (2.51) \\
&= e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\alpha x + \beta \tau} \right) \\
&= e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right) \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \\
&= e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} \cdot u \\
&= e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 u \right) \\
&= e^{\alpha x + \beta \tau} (\alpha^2 u + 2\alpha u_x + u_{xx}) .
\end{aligned}$$

Turunan pertama dari $v(x, \tau)$ terhadap τ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left(e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \right) \\
&= e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} + u(x, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(e^{\alpha x + \beta \tau} \right) \\
&= e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} + u(x, \tau) \cdot \beta e^{\alpha x + \beta \tau} \\
&= e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} + \beta u(x, \tau) \right) \\
&= e^{\alpha x + \beta \tau} \cdot (\beta u + u_\tau) . \quad (2.52)
\end{aligned}$$

Dengan mensubsitusikan Persamaan (2.50), persamaan (2.51) dan persamaan (2.52) ke dalam persamaan (2.48), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
v_\tau &= v_{xx} + v_x(k-1) - kv \\
e^{\alpha x + \beta \tau} (\beta u + u_\tau) &= e^{\alpha x + \beta \tau} (\alpha^2 u + 2\alpha u_x + u_{xx}) \\
&\quad + e^{\alpha x + \beta \tau} (\alpha u + u_x)(k-1) - kv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\beta u + u_\tau) &= (\alpha^2 u + 2\alpha u_x + u_{xx}) + (\alpha u + u_x) \\
&\quad \cdot (k - 1) - ku \\
(\beta u + u_\tau) &= \alpha^2 u + \alpha u(k - 1) - ku + 2\alpha u_x \\
&\quad + u_x(k - 1) + u_{xx} \\
(\beta u + u_\tau) &= (\alpha^2 u + \alpha(k - 1) - k)u \\
&\quad + (2\alpha + (k - 1))u_x + u_{xx} \\
u_\tau &= (\alpha^2 u + \alpha(k - 1) - k - \beta)u \\
&\quad + (2\alpha + (k - 1))u_x + u_{xx} \tag{2.53}
\end{aligned}$$

Agar koefisien u_x dan u menjadi nol, nilai $\alpha = \frac{1-k}{2}$ dan $\beta = -\frac{(k+1)^2}{4}$. Sehingga diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.54}$$

Kemudian untuk memperoleh syarat awal menggunakan persamaan (2.45)

$$\begin{aligned}
v(x, 0) &= \text{Maks}\{e^x - 1\} \\
v(x, \tau) &= e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau), \text{ jika } \tau = 0 \\
&= e^{\alpha x + \beta(0)} u(x, 0) \\
&= e^{\alpha x} u(x, 0) \\
\text{Maks}\{e^x - 1\} &= e^{\alpha x} u(x, 0) \\
\frac{\text{Maks}\{e^x - 1\}}{e^{\alpha x}} &= u(x, 0) \\
u(x, 0) &= \text{Maks}\{e^x - 1\} e^{-\alpha x} \\
&= \text{Maks}\{e^x - 1\} e^{-\frac{(1-k)}{2} x} \\
&= \text{Maks}\{e^x - 1\} e^{\frac{(k-1)}{2} x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Maks} \left\{ e^x \left(e^{\frac{(k-1)}{2}x} \right) - 1 \left(e^{\frac{(k-1)}{2}x} \right) \right\} \\
&= \text{Maks} \left\{ e^{\frac{(k-1)}{2}x+x} - e^{\frac{(k-1)}{2}x} \right\}.
\end{aligned}$$

Syarat awal dapat dipeoleh sebagai berikut:

$$u(x, 0) = \text{Maks} \left\{ e^{\left(\frac{k+1}{2}\right)x} - e^{\left(\frac{k-1}{2}\right)x} \right\}. \quad (2.55)$$

Dengan demikian, bentuk kanonik dari Persamaan Diferensial Parsial (PDP) adalah:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ atau } u_\tau = u_{xx}, -\infty < x < \infty, \tau > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \text{Maks} \left\{ e^{\left(\frac{k+1}{2}\right)x} - e^{\left(\frac{k-1}{2}\right)x}, 0 \right\} \end{cases} \quad (2.56)$$

Solusi dari persamaan (2.56) menggunakan persamaan (2.30) sebagai berikut :

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds \quad (2.57)$$

Dengan syarat awal

$$u(s, 0) = u_0(s) = \text{Maks} \left\{ e^{\left(\frac{k+1}{2}\right)s} - e^{\left(\frac{k-1}{2}\right)s}, 0 \right\}. \quad (2.58)$$

Kemudian substitusikan syarat awal persamaan (2.58) kepersamaan (2.57).

$$\begin{aligned}
u(x, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\text{Maks} \left\{ e^{\left(\frac{k+1}{2}\right)s} - e^{\left(\frac{k-1}{2}\right)s}, 0 \right\} \right) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{\infty} \left(e^{\left(\frac{k+1}{2}\right)s} - e^{\left(\frac{k-1}{2}\right)s} \right) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty (e^{(\frac{k+1}{2})s} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}}) ds \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty (e^{(\frac{k-1}{2})s} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}}) ds \\
&= I_1 - I_2
\end{aligned} \tag{2.59}$$

dengan

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty (e^{(\frac{k+1}{2})s} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}}) ds \\
I_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty (e^{(\frac{k-1}{2})s} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}}) ds.
\end{aligned}$$

Berikut solusi penyelesaian I_1

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty (e^{(\frac{k+1}{2})s} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}}) ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty e^{(\frac{k+1}{2})s - \frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty e^{\frac{2\tau s(k+1) - (x-s)^2}{4\tau}} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty e^{\frac{2\tau s(k+1) - (x^2 - 2xs + s^2)}{4\tau}} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty e^{\frac{2\tau s(k+1) - x^2 + 2xs - s^2}{4\tau}} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty e^{\frac{-s^2 + 2s[\tau(k+1) + x] - x^2}{4\tau}} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty e^{\frac{-(s^2 - 2s[\tau(k+1) + x]) - x^2}{4\tau}} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty e^{\frac{1}{4\tau} (-(s - [\tau(k+1) + x])^2 + [\tau(k+1) + x]^2 - x^2)} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{s - [\tau(k+1) + x]}{\sqrt{2\tau}} \right)^2 + \frac{1}{4\tau} [\tau^2(k+1)^2 + 2x\tau(k+1) + x^2 - x^2]} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s - [\tau(k+1)+x]}{\sqrt{2\tau}}\right)^2 + \frac{[\tau(k+1)^2+2x(k+1)]}{4}} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{\frac{[\tau(k+1)^2+2x(k+1)]}{4}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s - [\tau(k+1)+x]}{\sqrt{2\tau}}\right)^2} ds \quad (2.60)
\end{aligned}$$

Dengan transformasi

$$\begin{aligned}
\text{Misalkan } z &= \frac{s - [\tau(k+1) + x]}{\sqrt{2\tau}} \\
z\sqrt{2\tau} &= s - [\tau(k+1) + x] \\
s &= z\sqrt{2\tau} + \tau(k+1) + x \\
ds &= \sqrt{2\tau} dz
\end{aligned}$$

Ketika $s = 0$, maka: $z = \frac{0 - [\tau(k+1) + x]}{\sqrt{2\tau}} = -\frac{\tau(k+1) + x}{\sqrt{2\tau}}$

Ketika $s = \infty$, maka: $z = \infty$

Sehingga persamaan (2.60) ditransformasi memperoleh

$$\begin{aligned}
\iff I_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{\frac{[\tau(k+1)^2+2x(k+1)]}{4}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s - [\tau(k+1)+x]}{\sqrt{2\tau}}\right)^2} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{\frac{[\tau(k+1)^2+2x(k+1)]}{4}} \int_{-\frac{[\tau(k+1)+x]}{\sqrt{2\tau}}}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} \sqrt{2\tau} dz \\
&= e^{\frac{[\tau(k+1)^2+2x(k+1)]}{4}} \frac{\sqrt{2\tau}}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\frac{[\tau(k+1)+x]}{\sqrt{2\tau}}}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= e^{\frac{[\tau(k+1)^2+2x(k+1)]}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{[\tau(k+1)+x]}{\sqrt{2\tau}}}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= e^{\frac{[\tau(k+1)]^2+2x(k+1)]}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{[\tau(k+1)+x]}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= e^{\frac{[\tau(k+1)^2+2x(k+1)]}{4}} N\left(\frac{[\tau(k+1) + x]}{\sqrt{2\tau}}\right) \\
&= e^{\frac{[\tau(k+1)^2+2x(k+1)]}{4}} N(d_1). \quad (2.61)
\end{aligned}$$

Solusi penyelesaian I_2

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty (e^{(\frac{k-1}{2})s} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}}) ds \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty e^{(\frac{k-1}{2})s} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty e^{\frac{2\tau s(k-1) - (x-s)^2}{4\tau}} ds \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty e^{\frac{2\tau s(k-1) - (x^2 - 2xs + s^2)}{4\tau}} ds \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty e^{\frac{2\tau s(k-1) - x^2 + 2xs - s^2}{4\tau}} ds \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty e^{\frac{-s^2 + 2s[\tau(k-1) + x] - x^2}{4\tau}} ds \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty e^{\frac{-(s^2 - 2s[\tau(k-1) + x] - x^2)}{4\tau}} ds \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty e^{\frac{1}{4\tau}(-(s - [\tau(k-1) + x])^2 + [\tau(k-1) + x]^2) - x^2} ds \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s - [\tau(k-1) + x]}{\sqrt{2\tau}}\right)^2 + \frac{1}{4\tau}(\tau^2(k-1)^2 + 2x\tau(k-1) + x^2 - x^2)} ds \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s - [\tau(k-1) + x]}{\sqrt{2\tau}}\right)^2 + \frac{1}{4}(\tau(k-1)^2 + 2x(k-1))} ds \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{\frac{1}{4}(\tau(k-1)^2 + 2x(k-1))} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s - [\tau(k-1) + x]}{\sqrt{2\tau}}\right)^2} ds \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \cdot e^{\frac{[\tau(k-1)^2 + 2x(k-1)]}{4}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s - [\tau(k-1) + x]}{\sqrt{2\tau}}\right)^2} ds \quad (2.62)
 \end{aligned}$$

Dengan transformasi

$$\begin{aligned}
 \text{Misalkan } z &= \frac{s - [\tau(k-1) + x]}{\sqrt{2\tau}} \\
 z\sqrt{2\tau} &= s - [\tau(k-1) + x] \\
 s &= z\sqrt{2\tau} + \tau(k-1) + x
 \end{aligned}$$

$$ds = \sqrt{2\tau} dz$$

Ketika $s = 0$, maka: $z = \frac{0 - [\tau(k-1) + x]}{\sqrt{2\tau}} = -\frac{\tau(k-1) + x}{\sqrt{2\tau}}$

Ketika $s = \infty$, maka: $z = \infty$

Sehingga persamaan (2.62) dengan transformasi memperoleh

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow I_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \cdot e^{\frac{[\tau(k-1)^2 + 2x(k-1)]}{4}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{s - [\tau(k-1) + x]}{\sqrt{2\tau}} \right)^2} ds \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \cdot e^{\frac{[\tau(k-1)^2 + 2x(k-1)]}{4}} \int_{-\frac{\tau(k-1) + x}{\sqrt{2\tau}}}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} \sqrt{2\tau} dz \\
 &= e^{\frac{[\tau(k-1)^2 + 2x(k-1)]}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2\tau}}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\frac{\tau(k-1) + x}{\sqrt{2\tau}}}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
 &= e^{\frac{[\tau(k-1)^2 + 2x(k-1)]}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\tau(k-1) + x}{\sqrt{2\tau}}}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
 &= e^{\frac{[\tau(k-1)^2 + 2x(k-1)]}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\tau(k-1) + x}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
 &= e^{\frac{[\tau(k-1)^2 + 2x(k-1)]}{4}} \cdot N\left(\frac{\tau(k-1) + x}{\sqrt{2\tau}}\right) \\
 &= e^{\frac{[\tau(k-1)^2 + 2x(k-1)]}{4}} \cdot N(d_2). \tag{2.63}
 \end{aligned}$$

Kemudian subsitusikan persamaan (2.62) dan persamaan (2.63) ke persamaan (2.59) sehingga memperoleh

$$\begin{aligned}
 u(x, \tau) &= I_1 - I_2 \\
 &= e^{\frac{[\tau(k+1)^2 + 2x(k+1)]}{4}} N(d_1) - e^{\frac{[\tau(k-1)^2 + 2x(k-1)]}{4}} \cdot N(d_2). \tag{2.64}
 \end{aligned}$$

Kemudian dilakukan substitusi persamaan (2.64) ke persamaan (2.49)

$$\begin{aligned}
v(x, \tau) &= e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \\
&= e^{\frac{(1-k)}{2}x + \frac{-(k+1)^2}{4}\tau} \left\{ e^{\frac{\tau(k+1)^2 + 2x(k+1)}{4}} N(d_1) \right\} \\
&\quad - \left\{ e^{\frac{\tau(k-1)^2 + 2x(k-1)}{4}} N(d_2) \right\} \\
&= e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \left\{ e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau + \frac{1}{2}(k+1)x} N(d_1) \right\} \\
&\quad - \left\{ e^{\frac{1}{4}(k-1)^2\tau + \frac{1}{2}kK-1)x} N(d_2) \right\} \\
&= e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \cdot e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau + \frac{1}{2}(k+1)x} N(d_1) \\
&\quad - e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \cdot e^{\frac{1}{4}(k-1)^2\tau + \frac{1}{2}(k-1)x} N(d_2) \\
&= e^x N(d_1) - e^{\frac{1}{4}[(k-1)^2 - (k+1)^2]\tau} N(d_2) \\
&= e^x N(d_1) - e^{-k\tau} N(d_2) \tag{2.65}
\end{aligned}$$

Substitusi persamaan (2.65) ke persamaan (2.34) yaitu $C(S, t) = K \cdot v(x, \tau)$, $x = \ln\left(\frac{S}{K}\right)$, $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$ dan memisalkan $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ maka diperoleh solusi dari Persamaan Diferensial Parsial (PDP) Black-Scholes-Merton yaitu rumus Black-Scholes-Merton sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
C(S, t) &= K \cdot v(x, \tau) \\
&= K \left[e^x N(d_1) - e^{-k\tau} N(d_2) \right] \\
&= K e^x N(d_1) - K e^{-k\tau} N(d_2) \\
&= S \cdot N(d_1) - K e^{-k\tau} N(d_2) \\
&= S \cdot N(d_1) - e^{\left((- \frac{2r}{\sigma^2}) \cdot \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right)} \cdot K \cdot N(d_2) \\
&= S \cdot N(d_1) - e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot N(d_2) \tag{2.66}
\end{aligned}$$

Diketahui

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\tau(k+1) + x}{\sqrt{2\tau}} \\
 &= \frac{[\frac{\sigma^2}{2}(T-t)(\frac{2r}{\sigma^2} + 1) + \ln(\frac{S}{K})]}{\sqrt{2 \cdot \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}} \\
 &= \frac{[\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\frac{2r}{\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \cdot 1 + \ln(\frac{S}{K})]}{\sqrt{2 \cdot \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}} \\
 &= \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{2.67}
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \frac{\tau(k-1) + x}{\sqrt{2\tau}} \\
 &= \frac{[\frac{\sigma^2}{2}(T-t)(\frac{2r}{\sigma^2} - 1) + \ln(\frac{S}{K})]}{\sqrt{2 \cdot \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}} \\
 &= \frac{[\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\frac{2r}{\sigma^2} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \cdot 1 + \ln(\frac{S}{K})]}{\sqrt{2 \cdot \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}} \\
 &= \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{2.68}
 \end{aligned}$$

E. Volatilitas

Volatilitas adalah ukuran variasi harga suatu saham. Terdapat hubungan positif antara volatilitas dan harga opsi. Ketika volatilitas meningkat, harga opsi cenderung ikut naik (Andriyanto, 2009). Berikut lima langkah yang perlu dilakukan untuk mengestimasi volatilitas (Siswanah et al., 2023):

1. *Return* harian diperoleh dari logaritma natural harga relatif dan hasil dari suatu investasi dalam periode waktu tertentu yang menunjukkan tingkat keuntungan (*capital gain*) atau kerugian (*capital loss*).

$$R_t = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \quad (2.69)$$

Keterangan:

R_t : *Return* saham

S_t : Harga saham pada saat ini

S_{t-1} : Harga saham pada periode sebelumnya

2. Menghitung estimasi *mean* dari *return* saham harian

$$\bar{R}_t = \frac{\sum_{t=1}^n R_t}{n} \quad (2.70)$$

Dengan:

n : Jumlah data saham

3. Menghitung estimasi volatilitas menggunakan variansi dari *return* saham harian

$$\sigma = \sqrt{a \cdot \frac{\sum_{t=1}^n (R_t - \bar{R}_t)^2}{n - 1}} \quad (2.71)$$

Jumlah hari perdagangan dalam satu tahun adalah a . Jika datanya harian maka periode perdagangannya juga harian dengan yaitu 252 hari (Hull, 2015).

F. Analisis Time Series

1. Stasioneritas

Data yang tidak mengalami peningkatan atau penurunan disebut stasioner (Makridakis et al., 1998). Ini terjadi ketika rata-rata (*mean*), varians, dan kovariansnya tetap konstan terhadap waktu (Thomas, 1997). Data dianggap tidak stasioner dengan menggunakan aplikasi *eviews* yaitu dengan metode grafik yang ditandai dengan grafik garisnya yang cenderung menaik, namun pengujian metode akar unit (*unit root test*) dilakukan agar lebih akurat dan yakin (Winarno, 2017). Uji akar unit yang dikenal sebagai (*unit root test*), dilakukan dengan membandingkan nilai statistik *Augmented Dickey-Fuller* (ADF) terhadap nilai kritis dari distribusi statistiknya (Basuki & Yuliadi, 2015). Untuk mengetahui data yang digunakan stasioner atau tidak, nilai statistik *Augmented Dickey-Fuller* (ADF) dibandingkan dengan distribusi statistik, atau nilai kritisnya.

Hipotesa :

H_0 : Data Tidak Stasioner

H_1 : Data Stasioner

Nilai statistik *Augmented Dickey-Fuller* (ADF) lebih besar dari nilai kritis 1%, 5%, dan 10%, maka hipotesis H_0 tidak ditolak yang berarti data tidak stasioner. Sebaliknya, ketika nilai statistik *Augmented Dickey-Fuller* (ADF) lebih kecil, maka H_0 ditolak yang mengindikasikan data stasioner (Basuki, 2014). Apabila data belum stasioner maka dapat dilakukan *difference* pada tingkat *first difference* ataupun *two difference* (Agus Widarjono, 2018).

2. *Autocorrelation Function* dan *Partial Autocorrelation Function*

a. *Autocorrelation Function (ACF)*

Autocorrelation Function (ACF) ialah hubungan antara r_t dan r_{t-j} yang berguna dalam analisis deret waktu, khususnya mengidentifikasi ordo yang sesuai dalam pemodelan ARIMA (Inlistya, 2017). Persamaan untuk *Autocorrelation Function (ACF)* dapat dituliskan berikut: (Tsay, 2010)

$$\hat{\rho}_j = \frac{\sum_{t=1}^{n-j} (r_t - \bar{r})(r_{t-j} - \bar{r})}{\sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.72)$$

Keterangan:

$\hat{\rho}_j$: Koefisien autokorelasi pada lag ke- j

r_t : *return* pada waktu t

$\bar{r}$: Rata-rata *return*

n : Jumlah total observasi data

b. *Partial Autocorrelation Function (PACF)*

Partial Autocorrelation Function (PACF) Fungsi autokorelasi parsial (PACF) dapat didefinisikan sebagai korelasi antara r_t dengan r_{t+j} dengan mengabaikan $r_{t+j-1}, r_{t+j-2}, \dots, r_{t+1}$, Sehingga PACF dapat dinyatakan sebagai: (Wei, 2006)

$$r_{t+j} = \varphi_{j1}r_{t+j-1} + \varphi_{j2}r_{t+j-2} + \dots + \varphi_{jj}r_t + \epsilon_{t+j} \quad (2.73)$$

Keterangan:

φ_{ji} : Parameter regresi lag ke- i

ϵ_{t+j} : Error dengan rata-rata 0 dan tidak berkorelasi dengan r_{t+j-k} , untuk $k = 1, 2, \dots, j$

G. Identifikasi Model

1. Penentuan Model ARIMA (p,d,q)

kita dapat memperkirakan model yang paling sesuai dengan data dengan melihat plot ACF dan PACF pada data stasioner (Inlistya, 2017). Ada standar untuk memperkirakan model ARIMA (Izaa, 2014)

Tabel 2.3. Ciri-Ciri ACF dan PACF Model Time series

Model	ACF	PACF
AR (p)	Penurunan perlahan setelah lag ke-1.	Pemotongan pada lag p , setelah itu mendekati nol
MA (q)	Pemotongan setelah lag q , kemudian mendekati nol	Penurunan perlahan setelah lag ke-1
ARMA (p, q)	Pola Kompleks tergantung pada nilai p dan q	Pola Kompleks tergantung pada nilai p dan q

Pembagian serta penjabaran mengenai model ARMA (p,q) adalah sebagai berikut:

a. Model *Autoregressive* (AR)

Secara umum Model Autoregresif (AR) dengan ordo p dijelaskan sebagai berikut: (Tsay, 2010)

$$r_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} + \cdots + \varphi_p r_{t-p} + \alpha_t \quad (2.74)$$

Keterangan:

r_t	: Nilai variabel dependen pada waktu t
$r_{t-1}, \dots, r_{t-p}$	: Nilai variabel independen
φ_0	: Konstanta
φ_p	: Koefisien AR pada lag ke- p
α_t	: Galat pada waktu t

b. Model *Moving Average* (MA)

Secara umum *Moving Average* (MA) dengan ordo q sebagai berikut : (Tsay, 2010)

$$r_t = \theta_0 + \alpha_t + \theta_1 \alpha_{t-1} + \dots + \theta_q \alpha_{t-q} \quad (2.75)$$

Keterangan:

r_t	: Nilai variabel dependen pada waktu t
θ_0	: Konstanta
α_{t-q}	: Galat pada waktu $t - q$
θ_q	: Koefisien MA pada lag ke- q
α_t	: Galat pada waktu t

c. Model *Autoregressive Moving Average* (ARMA)

Penggabungan model *autoregressive* (AR) dan *moving average* (MA), yaitu *autoregressive moving average* (ARMA) dengan ordo (p,q) (Gujarati, 2003). Bentuk umum model ARMA adalah sebagai berikut (Tsay, 2010):

$$r_t = \varphi_0 + \varphi_1 r_{t-1} + \dots + \varphi_p r_{t-p} + \theta_1 \alpha_{t-1} + \dots + \theta_q \alpha_{t-q} + \alpha_t \quad (2.76)$$

Keterangan:

r_t	: Nilai variabel dependen
$r_{t-1}, \dots, r_{t-p}$	: Nilai variabel independen
φ_0	: Konstanta model
φ_p	: Koefisien AR pada lag ke- p
α_{t-q}	: Galat pada waktu sebelumnya (lag ke- q)
α_t	: Galat pada waktu t
θ_q	: Koefisien MA ordo ke- q

2. Penentuan Model Varian

Model ARCH (q), GARCH (p, q), dan GJR-GARCH (p, q) digunakan untuk memodelkan varians.

a. ARCH (q)

Varian residual ketika terdapat heterokedastisitas dimodelkan menggunakan ARCH, yang pertama kali dibuat oleh Engle (1982). Dalam kebanyakan kasus, model ARCH yang menggunakan ordo q dirumuskan dengan (Tsay, 2010):

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2\end{aligned}\tag{2.77}$$

Dengan syarat:

$$\begin{aligned}\alpha_0 > 0 & : \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \geq 0 \\ \epsilon & : \quad \text{residual}\end{aligned}$$

b. GARCH (p, q)

Bollerslev (1986) mengembangkan model GARCH

(p,q) sebagai pengembangan model ARCH, di mana (q) merujuk pada ARCH dan (p) merujuk pada GARCH. Model GARCH memiliki karakteristik respon volatilitas terhadap guncangan adalah serupa, baik guncangan positif maupun negatif (Mubarakah et al., 2020). Secara umum, model GARCH dapat dinyatakan sebagai (Tsay, 2010):

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q \epsilon_{t-q}^2 \\ &\quad + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{t-p}^2 \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2\end{aligned}\quad (2.78)$$

Dengan syarat:

$$\alpha_0 > 0 \quad ; \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \geq 0 \quad ; \quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p \geq 0$$

Keterangan:

$\alpha_q \epsilon_{t-q}^2$: Komponen ARCH (q)

$\beta_p \sigma_{t-p}^2$: Komponen GARCH (p,q)

Pada data finansial, tidak semua data menunjukkan respons volatilitas yang seragam terhadap guncangan tertentu. Beberapa data menunjukkan adanya perbedaan dalam besar perubahan volatilitas saat terjadi pergerakan nilai return, yang dikenal sebagai efek asimetris atau efek *leverage*.

Asimetri ini dapat berupa korelasi negatif atau positif antara nilai return saat ini dan volatilitas

yang akan datang. Korelasi negatif menunjukkan bahwa volatilitas cenderung menurun saat return meningkat dan sebaliknya, volatilitas akan meningkat ketika return mengalami penurunan. Keberadaan efek asimetris ini membuat GARCH (p,q) kurang tepat untuk digunakan dalam analisis. Oleh karena itu, diperlukan pemodelan yang dapat menangani efek asimetris yang muncul pada banyak data finansial. GARCH (p,q) asimetris, seperti Exponential GARCH (EGARCH (p,q)) dan Glosten, Jagannathan, dan Runkle GARCH (GJR-GARCH (p,q)) (Susanti et al., 2016).

c. GJR-GARCH (p,q)

Glosten, Jagannathan, dan Runkle (1993) memperkenalkan model GARCH asimetris, yaitu model GJR-GARCH. Keunggulan dari model GJR-GARCH adalah kemampuannya untuk mengukur volatilitas yang disebabkan oleh efek berbeda dari berita buruk dan berita baik. Perbedaan antara model GJR-GARCH dan model GARCH adalah bahwa model GJR-GARCH memiliki komponen yang merepresentasikan sifat asimetris (Dritsaki, 2017). Model GJR-GARCH (p,q) dinyatakan sebagai berikut (Brooks, 2008):

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \gamma_i l_{t-i} \varepsilon_{t-i}^2 \quad (2.79)$$

dengan:

$$l_{t-i} = \begin{cases} 1, & \text{jika } \varepsilon_{t-i} < 0 \\ 0, & \text{jika } \varepsilon_{t-i} \geq 0 \end{cases}$$

Keterangan:

ω : Konstan

α_i : Parameter ARCH

j : Parameter GARCH

γ_i : Parameter *leverage*

l_{t-i} : variabel dummy

ε_{t-i} : bernilai nol maka positif

ε_{t-i} : bernilai satu maka negatif

Jika parameter $\gamma_i > 0$, maka kesalahan residual negatif $\varepsilon_{t-i} < 0$, yang berarti bahwa pengaruh berita buruk akan lebih besar terhadap volatilitas dibandingkan dengan pengaruh berita baik atau adanya efek *leverage* dalam data (Dritsaki, 2017).

H. Model GJR-GARCH

1. Estimasi Parameter Model

Perkiraan parameter model ARIMA (p, d, q) dan perkiraan parameter model varian menggunakan *Maksimum Likelihood Estimation* (MLE) dengan bantuan software Eviews 10 (Natasha, 2015). Kemudian parameter diuji signifikansi (Makridakis et al., 1998).

Hipotesis :

H_0 : Tidak Signifikan

H_1 : Signifikan

Statistika Uji:

$$t_{hitung} = \frac{\text{Pendugaan parameter}}{\text{Standar deviasi parameter}}, \quad (2.80)$$

dengan standar deviasi parameter $\neq 0$

Kreteria Pengujian :

Dengan $\alpha = 0,05$, jika $|t_{hitung}| > t_{\alpha/2, (n-p-1)}$, maka H_0 ditolak artinya parameter model signifikan atau menggunakan kriteria $p - value$, jika $p - value < \alpha$ maka H_0 diterima parameter model signifikan.

2. Pengujian Diagnostik Model

Setelah pendugaan parameter signifikan dan memperoleh model terbaik tahap berikutnya pengujian diagnostik model dilakukan untuk memastikan kecukupan model. Uji autokorelasi dengan pengujian Fungsi Autokorelasi (ACF) dan Fungsi autokorelasi parsial (PACF), uji distribusi normal dengan uji Jarque Bera, dan uji heteroskedasitaS ialah asumsi yang dipenuhi.

a. Uji autokorelasi

Autokorelasi didefinisikan sebagai korelasi antara anggota dari serangkaian observasi yang diurutkan berdasarkan waktu seperti data deret waktu atau ruang seperti dalam data *cross-sectional* (Gujarati & Porter, 2009). Autokorelasi terjadi ketika data menjadi tidak stasioner. Oleh karena itu, ketika data stasioner, autokorelasi akan hilang sendirinya. Untuk menghilangkan autokorelasi dengan cara transformasi data yang tidak stasioner menjadi data stasioner

(Sugiyanto et al., 2022). Cara mendeteksi kasus autokorelasi terjadi ketika ada lag autokorelasi keluar dari garis Bartlett (Agus Widarjono, 2018).

b. Uji Normalitas

Langkah-langkah berikut diambil untuk menguji asumsi normalitas (Wahyudi, 2016):

Hipotesis :

H_0 : Data berdistribusi normal

H_1 : Data tidak berdistribusi normal

Statistik uji :

$$JB = n \left(\frac{S^2}{6} + \frac{(K - 3)^2}{24} \right) \quad (2.81)$$

$$\text{Skewness} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{3/2}}$$

$$\text{Kurtosis} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2}$$

Keterangan:

S : koefisien skewness

K : koefisien kurtosis

n : banyak data

Kriteria Pengujian :

Jika $\alpha = 0,05$ dan $JB < X_{\alpha;2}^2$, maka H_0 diterima yang menunjukkan bahwa residual model berdistribusi normal. Jika $p - value > \alpha$, maka H_0 diterima yang juga menunjukkan bahwa residual model berdistribusi normal.

c. Uji Heterokedastisitas

Uji Heteroskedastisitas digunakan untuk mengidentifikasi keberadaan proses ARCH, yaitu ketidakhomogenan residual memiliki varians tidak sama yang dipengaruhi residual kuadrat pada periode sebelumnya, yang dikenal juga sebagai varians error bersyarat (*conditional heteroscedasticity*) (Natasha, 2015).

Hipotesa :

H_0 : Homokedastisitas

H_1 : Heterokedastisitas

Statistik uji :

$$LM = NR^2 \quad (2.82)$$

Keterangan:

R^2 : Koefisien determinasi

N : Jumlah Observasi

Dengan Rumus koefisien determinasi R^2 :

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

Dengan:

SSE : *Sum of Squared Errors* , yaitu jumlah kuadrat dari residual regresi.

$$SSE = \sum_{t=1}^T (\epsilon_t^2 - \hat{\epsilon}_t^2)^2$$

Keterangan:

ϵ_t^2 : residual kuadrat yang diamati.

$\hat{\epsilon}_t^2$: nilai residual kuadrat yang diprediksi oleh model.

SST : *Sum of Squares*, yaitu jumlah kuadrat dari penyimpangan residual kuadrat terhadap rata-rata.

$$SST = \sum_{t=1}^T (\epsilon_t^2 - \bar{\epsilon}^2)^2$$

Keterangan:

$\bar{\epsilon}^2$: rata-rata dari residual kuadrat.

Nilai R^2 berkisar antara 0 dan 1 :

$R^2 = 0$, Model tidak menjelaskan variansi data sama sekali.

$R^2 = 1$, Model menjelaskan seluruh variansi data dengan sempurna.

Kreteria Pengujian :

Jika $LM > X_{\alpha;m}^2$ atau $p - value < \alpha$, maka H_0 ditolak yang mengindikasikan adanya efek ARCH atau heterokedastisitas dalam data. sebaliknya, jika $p - value > \alpha$, maka H_0 gagal ditolak menunjukkan residual model tidak ada efek ARCH .

3. Kreteria Pemilihan Model Terbaik

Setelah melakukan Pendugaan parameter model, kriteria yang digunakan untuk menentukan model terbaik ARIMA (p,d,q), ARCH (p) /GARCH (p,q) , dan GJR-GARCH (p,q) adalah sebagai berikut (Samsiah, 2008):

a. Akaike's Information Criterion (AIC)

Akaike pertama kali mengembangkan Kriteria Informasi Akaike untuk membantu pemilihan model

dengan pendekatan *penalized maximum likelihood*. Rumus AIC yang digunakan dalam proses seleksi model adalah sebagai berikut:

$$AIC(P) = n \ln \hat{\sigma}_b^2 + 2M \quad (2.83)$$

Keterangan :

P : Jumlah Parameter pada model

$\hat{\sigma}_b^2$: Estimator maximum likelihood

n : jumlah observasi

Model terbaik dipilih dengan membandingkan nilai *Akaike's Information Criterion* (AIC). Model yang memiliki nilai AIC paling rendah memiliki kualitas model dengan performa terbaik (Winarno, 2017).

Kreteria yang digunakan untuk pemilihan model Black Scholes Merton volatilitas historical dan GJR-GARCH dan model Fraksional Black Scholes volatilitas historical dan GJR-GARCH untuk menentukan nilai opsi *call* yang terbaik yaitu:

b. Rata-rata Persentase Kesalahan Absolut

Mean Absolute Percent Error (MAPE) yaitu *mean* presentase absolut antara selisih nilai peramalan dan nilai aktual. Nilai MAPE dapat dihitung menggunakan rumus berikut (Putro et al., 2018):

$$MAPE = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{Y_t - \hat{Y}_t}{Y_t} \right| \right) \times 100\% \quad (2.84)$$

Keterangan :

Y_t : nilai aktual pada data t

$\hat{Y}_t$: nilai peramalan pada data t

n : Banyak data

Dalam evaluasi hasil prediksi penggunaan MAPE dapat menghindari pengukuran yang tidak terhadap besarnya nilai aktual dan nilai prediksi. Tabel 2.4 menunjukkan Indikator nilai MAPE (Chang.P.C et al., 2007).

Tabel 2.4. Indikator nilai MAPE

Nilai MAPE	Kriteria
$< 10\%$	Sangat Baik
$10\% - 20\%$	Baik
$20\% - 50\%$	Cukup
$> 50\%$	Buruk

I. Penelitian Terdahulu

1. Hernita Eka Kurniati (2020). Berjudul "*Modeling of GJR-GARCH with Quasi Maximum Likelihood Method (Case Study on Stock Price Data of Jakarta Islamic Index)*". Berfokus pada analisis data harga aset Jakarta Islamic Index (JII) dari Januari 2019 hingga Februari 2020. Penelitian ini bertujuan untuk mengimplementasikan model GJR-GARCH, yang merupakan pengembangan dari model GARCH dengan tambahan variabel dummy, untuk menganalisis volatilitas harga aset. Hasilnya Model ARIMA(1,0,1) dipilih untuk mengakomodasi komponen trend dan musiman dalam data, sementara GJR-GARCH(1,1) fokus pada analisis volatilitas.

Kombinasi kedua model ini menghasilkan pemodelan yang lebih akurat dan terbaik dalam menganalisis dan meramalkan harga aset.

2. Muriel, Fernández-Anaya, dan Morales-Bañuelos (2022). Berjudul "*A Modified Black-Scholes-Merton Model for Option Pricing*" mengeksplorasi peningkatan pada model Black-Scholes-Merton (BSM) tradisional, khususnya untuk penetapan harga opsi di pasar berkembang. Hasil Melalui analisis empiris, model BSM konformabel menunjukkan kinerja yang lebih baik dibandingkan model BSM klasik dan model BSM fraksional menggunakan memori panjang dalam sebagian besar skenario di pasar keuangan yang efisien semi-kuat. Penelitian ini menekankan perlunya modifikasi pada model BSM untuk menangani tantangan penetapan harga di pasar yang kurang stabil, serta memberikan kontribusi penting dalam pengembangan teori penetapan harga derivatif. bukti empiris mengenai efektivitas modifikasi model BSM dan menunjukkan potensi model konformabel untuk meningkatkan akurasi penetapan harga opsi di pasar berkembang.
3. Yasir Maulana (2022). Berjudul " Pemodelan Volatilitas Indeks Harga Saham Sektoral di Indonesia". Penelitian ini bertujuan untuk mengidentifikasi model volatilitas dari sepuluh Indeks aset Sektoral di Bursa Efek Indonesia, serta melakukan analisis *leverage effect* dan peramalan menggunakan model terbaik yang diperoleh. Hasil dari analisis volatilitas indeks harga aset sektoral di Indonesia dengan model GJR-GARCH dan EGARCH menunjukkan

bahwa model GJR-GARCH lebih baik dalam menangkap efek leverage pada beberapa sektor.

4. Nurhayati, Wiwin Apriani, Ariestha W Bustan (2022). Berjudul "*Value At Risk Prediction For The GJR-GARCH Aggregation Model*". Penelitian ini menunjukkan bahwa model GJR-GARCH(1,1) lebih efektif dalam memprediksi Value at Risk (VaR) untuk pengembalian agregat dari dua aset, yaitu ASII dan AALI, dibandingkan dengan GARCH(1,1). GJR-GARCH lebih baik dalam menangkap asimetri volatilitas dan memberikan prediksi VaR yang lebih akurat, terutama pada tingkat kepercayaan yang lebih tinggi (99%, 95%, dan 90%). Oleh karena itu, model GJR-GARCH dianggap paling sesuai untuk memodelkan pengembalian saham agregat berdasarkan kinerja prediktifnya dan proporsi VaR yang benar.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini dipaparkan langkah-langkah dalam penyusunan Tugas Akhir. Adapun tahapan penelitian ini antara lain :

A. Langkah Penelitian

1. Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan pencarian dan pengumpulan bahan pustaka yang mendukung penelitian. Bahan pustaka yang digunakan adalah buku-buku literatur, jurnal ilmiah, maupun artikel dari internet.

2. Pengambilan Data

Data yang diambil oleh Apple Inc. (AAPL) dapat diakses di <https://finance.yahoo.com/> data dikumpulkan pada tanggal 22 Maret 2025. Pada periode 7 Januari 2022 – 7 Maret 2025 data yang diambil meliputi : (1) harga saham harian (*S*), (2) opsi beli (*C*), (3) harga pelaksanaan (*K*). Data (*Close*) harga saham Apple Inc. dikumpulkan dalam frekuensi harian kecuali hari libur. Data *strike price* dikumpulkan pada tanggal jatuh tempo, dalam kasus ini tanggal jatuh tempo pada 25 April 2025. Sementara itu, suku bunga yang digunakan pada saat itu adalah tingkat suku bunga bebas resiko harian bank Amerika Serikat.

3. Merekonstruksi model Fraksional Black-Scholes-Merton dengan menggunakan persamaan diferensial parsial .

4. Menghitung estimasi volatilitas Variansi GJR-GARCH.

Pemodelan Variansi GJR-GARCH dilakukan dengan bantuan software Microsoft Excel 2016 dan software Eviews 10. Berikut langkah-langkah estimasi volatilitas variansi GJR-GARCH:

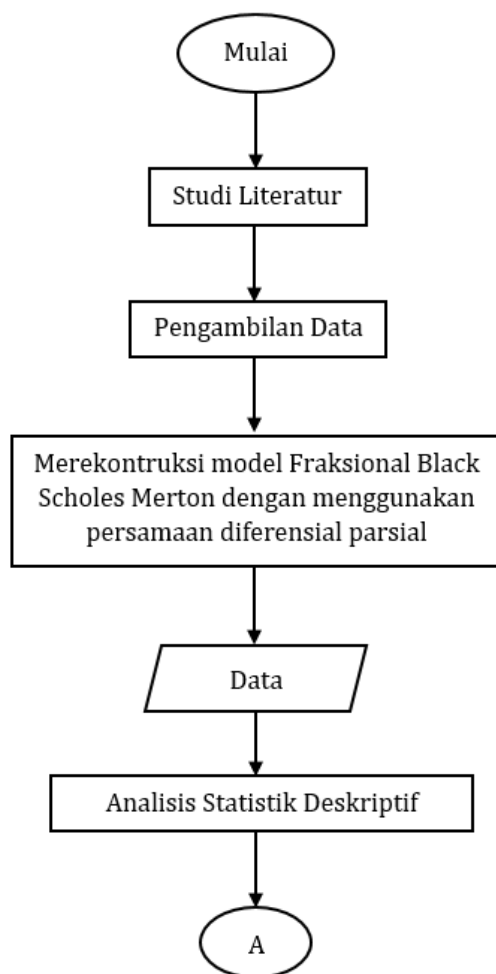
- a. Mengambil Data penutupan (*Close*) harga saham Apple Inc. pada periode 7 januari 2022 – 7 maret 2025.
- b. Melakukan analisis statistik deskriptif dan uji stasioner pada penutupan (*Close*) harga saham Apple Inc. Jika penutupan (*Close*) harga saham Apple Inc. Jika data *close* Tidak stasioner ubah data ke dalam bentuk *continuously compounded return* (2.69).
- c. Melakukan uji stasioner data *return* .
- d. Penentuan model ARIMA (p,d,q) dengan menganalisis plot ACF dan PACF dari data yang stasioner. Jika plot ACF dan PACF tidak terpenuhi, maka ARIMA (p,d,q) akan ditentukan secara *automatic* bantuan software Eviews 10.
- e. Melakukan perkiraan parameter model ARIMA (p,d,q) kemudian model ARMA (p,q) terbaik dipilih dengan membandingkan nilai AIC.
- f. Pengujian parameter ARIMA (p,d,q) terbaik dengan melakukan uji distribusi normal persamaan (2.81), uji autokorelasi, Uji heteroskedastisitas persamaan (2.82).
- g. Identifikasi model ARCH (q) atau GARCH (p,q) dengan hasil uji heteroskedastisitas menunjukkan adanya ARCH (q) atau GARCH (p,q).

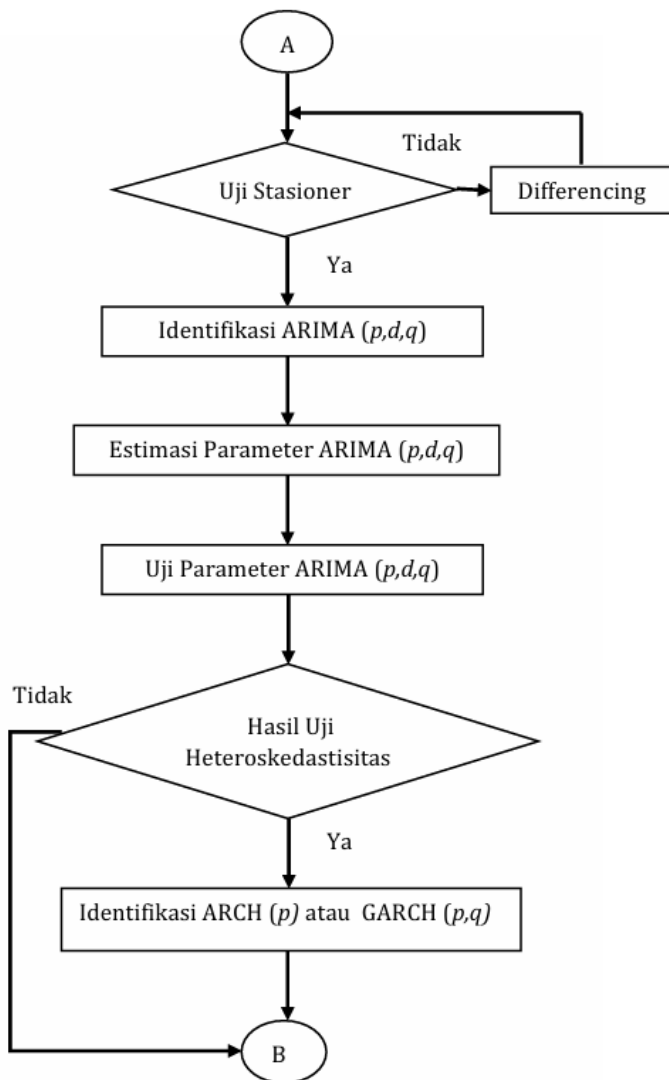
- h. Perkiraan parameter model ARCH(q) atau GARCH (p,q) kemudian pilih model ARCH(q) atau GARCH (p,q) terbaik dengan membandingkan nilai AIC.
- i. Pengujian parameter ARCH(q) atau GARCH (p,q) terbaik dengan melakukan uji distribusi normal persamaan (2.81), uji autokorelasi, Uji heteroskedastisitas persamaan (2.82) serta Uji Asimetris.
- j. Identifikasi model GJR-GARCH (p,q) dengan melakukan uji efek asimetris dari taraf signifikansi sebesar 0,05% pada model sebelumnya.
- k. Melakukan pendugaan parameter model GJR-GARCH (p,q) kemudian model GJR-GARCH(p,q) terbaik dipilih dengan membandingkan nilai AIC.
- l. Pengujian parameter GJR-GARCH (p,q) terbaik dengan melakukan uji distribusi normal persamaan (2.81), uji autokorelasi, Uji heteroskedastisitas persamaan (2.82)
- m. Menghitung nilai volatilitas variansi GJR-GARCH (p,q) menggunakan persamaan (2.79).

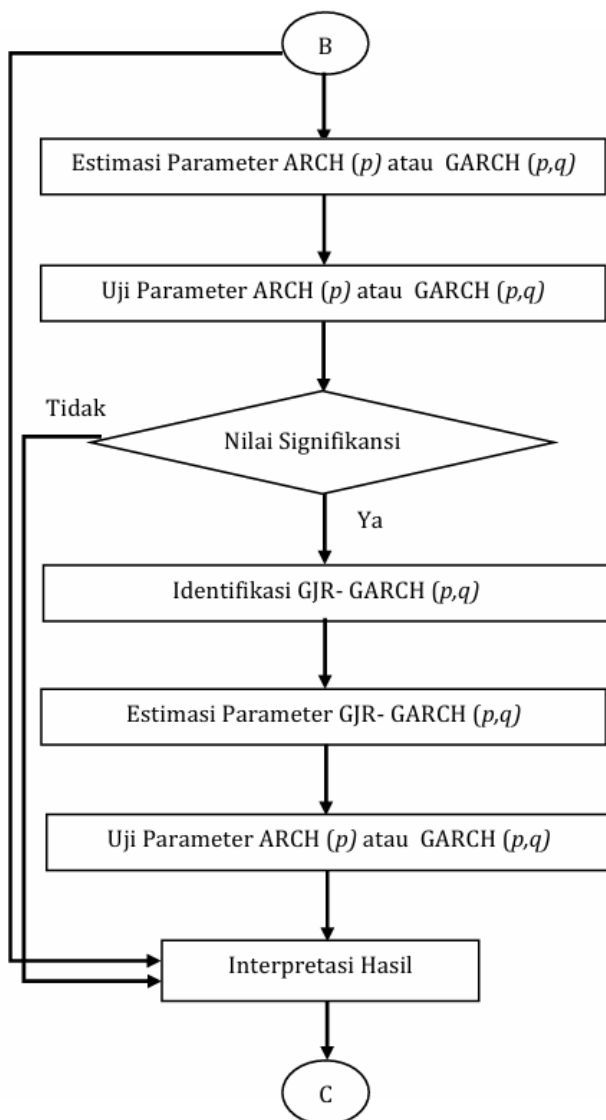
5. Perhitungan harga opsi *call* Eropa

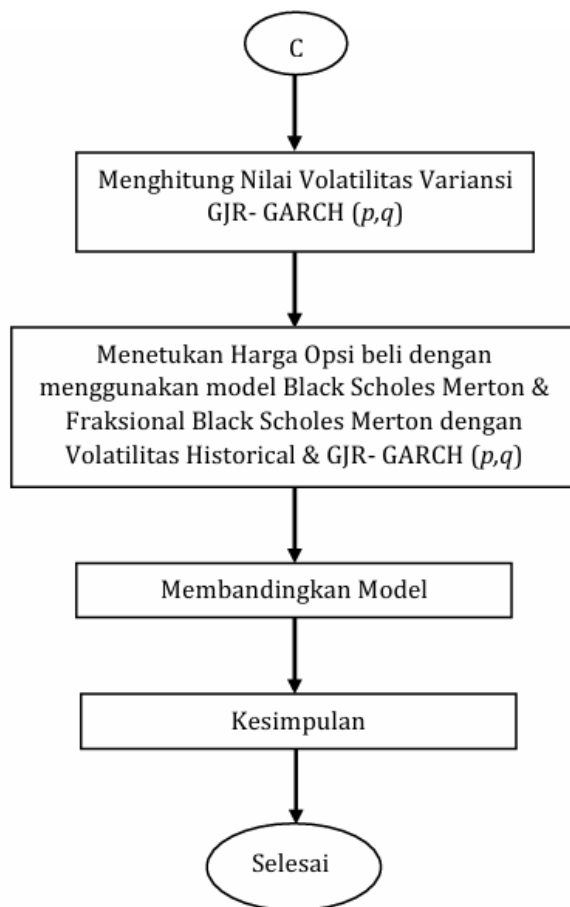
- a. Penentuan parameter model Black-Scholes-Merton dan Fraksional Black-Scholes-Merton yaitu harga saham (S), *strike price* (K), waktu jatuh tempo (T), suku bunga bebas risiko (r), Hurst (H) dan volatilitas (σ).
- b. Melakukan perhitungan harga opsi *call* dengan menggunakan model Black-Scholes-Merton persamaan (2.66) dengan persamaan (2.67) dan persamaaan (2.68) menggunakan volatilitas historical.

- c. Melakukan perhitungan harga opsi *call* dengan menggunakan model Fraksional Black-Scholes-Merton dengan persamaan (4.34) dengan persamaan (4.34) dan persamaan (4.35) menggunakan volatilitas historical.
 - d. Melakukan perhitungan harga opsi *call* dengan menggunakan model Black-Scholes-Merton persamaan (2.66) dengan persamaan (2.67) dan persamaaan (2.68) menggunakan volatilitas variansi GJR-GARCH (p,q) .
 - e. Melakukan perhitungan harga opsi *call* dengan menggunakan model Fraksional Black-Scholes-Merton persamaan (4.34) dengan persamaan (4.34) dan persamaan (4.35) menggunakan volatilitas variansi GJR-GARCH (p,q) .
 - f. Membandingkan model Black-Scholes-Merton model Fraksional Black-Scholes-Merton dengan volatilitas berbeda yaitu volatilitas historical volatilitas variansi GJR-GARCH (p,q) menggunakan MAPE persamaan (2.84).
6. Menyimpulkan hasil perhitungan modifikasi model Black-Scholes-Merton menggunakan GJR-GARCH

B. Diagram Alur







Gambar 3.1. Diagram Alur Penelitian

BAB IV

PEMBAHASAN

Pembahasan Pada bab ini ialah rekontruksi *Model Fraksional Black-Scholes-Merton* menggunakan persamaan diferensial parsial, Estimasi Volatilitas dengan Variansi GJR-GARCH dan Perhitungan Harga Opsi *Call*.

A. Merekonstruksi Model Fraksional Black Scholes Merton Dengan Menggunakan Persamaan Diferensial Parsial

Fractional Brownian Motion merupakan salah satu pengembangan model gerak *Geometric Brownian Motion* dengan parameter Hurst $H \in [0, 1]$ cocok digunakan untuk keuangan matematis yang bersifat self-similar dan ketergantungan jangka panjang (Njomen & Djuetcha, 2019). Mengusulkan sebuah rumus dengan mengembangkan model Black Scholes Merton menggunakan faktor $\lambda_H = 2H(T - t)^{2H-1}$ untuk opsi Eropa. Harga opsi pada waktu $t \in [0, T]$ diperluas bergantung $H(T - t)$ dan harga saham S (Necula, 2007).

Misal $V = V(S, t)$ menyatakan nilai suatu opsi Eropa sebagai fungsi variabel dari harga saham S dan waktu t dengan parameter Hurst $H \in [0, 1]$. Dimana S memenuhi persamaan diferensial Stokastik yang mengikuti Gerak Brown Geometrik Fraksional pada persamaan (2.12) sebagai berikut (Necula, 2002):

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB_H(t) \quad (4.1)$$

Keterangan:

S : Harga saham

μ : nilai ekspektasi *return*

σ : Volatilitas

$dB_H(t)$: gerak Brown Fraksional dengan parameter Hurst (H)

Tujuan dari penggunaan Gerak Brown Geometrik Fraksional adalah untuk memodelkan dinamika harga saham yang menunjukkan sifat memori jangka panjang atau ketergantungan waktu secara stokastik. Model ini dengan menerapkan kalkulus stokastik, khususnya Lemma ito fraksional pada persamaan (2.14), untuk menurunkan persamaan diferensial parsial fraksional Black-Scholes-Merton dapat dilihat pada persamaan (2.20) yang akan digunakan dalam perhitungan harga opsi model Fraksional Black-Scholes-Merton.

Kemudian untuk mendapatkan rumus perhitungan harga opsi Model Fraksional Black Scholes Merton untuk opsi *call* pada opsi saham tipe Eropa menggunakan persamaan diferensial parsial (PDP) Fraksional Black-Scholes-Merton. untuk Opsi *Call* dinotasikan $C = C(S, t)$, maka persamaan (2.25) menjadi sebagai berikut (Njomen & Djuetcha, 2019):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + H(T-t)^{2H-1} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad S \geq 0 \quad (4.2)$$

Syarat awal dan syarat batas dari persamaan (4.2):

$$\begin{aligned} C(S, T) &= \text{Maks}\{S - K, 0\} \\ C(0, t) &= 0, \quad \text{untuk } S = 0 \\ C(S, t) &\approx S, \quad \text{untuk } S \text{ yang besar} \end{aligned}$$

Solusi persamaan diferensial parsial Black Scholes Merton Fraksional untuk opsi *call*.

Mentransformasi variabel S , C dan t ditransformasi menjadi x , v dan τ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} S = Ke^x \quad \text{atau} \quad x = \ln \frac{S}{K} \\ t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \quad \text{atau} \quad \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t) \\ C(S, t) = Kv(x, \tau) \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Dari persamaan (4.3) diketahui $x = \ln \frac{S}{K}$ diturunkan secara parsial terhadap S diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\ln \frac{S}{K} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial S} (\ln S - \ln K) \\ &= \frac{1}{S} - 0 \\ &= \frac{1}{S}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Karena $C(S, t) = Kv(x(S), \tau(t))$, maka turunan pertama parsial C terhadap S diperoleh menggunakan turunan parsial rantai :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial S} (Kv(x(S), \tau(t))) \\ &= K \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial S} \right) \\ &= K \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{S} + \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot 0 \right) \\ &= K \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{S} + 0 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= K \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{S} \\
 S \cdot \frac{\partial C}{\partial S} &= K \cdot \frac{\partial v}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dengan melakukan turunan secara parsial lagi terhadap S kita memperoleh turunan kedua dari C terhadap S adalah

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(K \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{S} \right) \\
 &= K \frac{\partial}{\partial S} (v_x \cdot S^{-1}) \\
 &= K \cdot v_x \cdot \frac{\partial}{\partial S} (S^{-1}) + K \cdot (S^{-1}) \cdot \frac{\partial}{\partial S} (v_x)
 \end{aligned}$$

Hitung turunan $\frac{\partial}{\partial S} (S^{-1})$

$$\frac{\partial}{\partial S} (S^{-1}) = -S^{-2} \tag{4.6}$$

Hitung turunan $\frac{\partial v_x}{\partial S}$ karena $v(x, \tau)$ diperoleh :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_x}{\partial S} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} \\
 &= v_{xx} \cdot \frac{1}{S}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Substitusikan persamaan (4.6) dan persamaan (4.7) ke persamaan (4.5) Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= K \cdot v_x \cdot \frac{\partial}{\partial S} (S^{-1}) + K \cdot S^{-1} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial S} \\
 &= K \cdot v_x \cdot (-S^{-2}) + K \cdot S^{-1} \cdot v_{xx} \cdot \frac{1}{S} \\
 &= -S^{-2} \cdot K \cdot v_x + S^{-2} \cdot K \cdot v_{xx}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{K}{S^2} (v_{xx} - v_x) \\
\Leftrightarrow \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= \frac{K}{S^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= K \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Dari persamaan (4.3) diketahui $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$ diturunkan secara parsial terhadap t , diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sigma^2}{2}(T - t) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sigma^2}{2}T - \frac{\sigma^2}{2}t \right) \\
&= -\frac{\sigma^2}{2}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Karena $C(S, t) = Kv(x(S), \tau(t))$, maka turunan pertama parsial C terhadap t menggunakan turunan parsial rantai diperoleh :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (Kv(x(S), \tau(t))) \\
&= K \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \\
&= K \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot \left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) \right) \\
&= K \left(0 + \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot \left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) \right) \\
&= K \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot \left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) \right) \\
&= -K \cdot \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot \frac{\sigma^2}{2} \\
&= -K \cdot \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \tau}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Persamaan (4.5), persamaan (4.8) dan persamaan (4.10) disubsitusikan ke dalam persamaan (4.2) untuk opsi *call* eropa sehingga menghasilkan persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial C}{\partial t} + H(T-t)^{2H-1} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \\
& -K \cdot \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + H(T-t)^{2H-1} \sigma^2 \cdot \left(K \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\
& \quad + r \left(K \frac{\partial v}{\partial x} \right) - rKv = 0 \\
& -K \cdot \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + H(T-t)^{2H-1} \sigma^2 \left(K \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - K \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
& \quad + rK \frac{\partial v}{\partial x} - rKv = 0 \\
& -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + H(T-t)^{2H-1} \sigma^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
& \quad + r \frac{\partial v}{\partial x} - rv = 0 \\
& -\frac{\partial v}{\partial \tau} + 2H(T-t)^{2H-1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
& \quad + \frac{2r}{\sigma^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2} v = 0, \quad k = \frac{2r}{\sigma^2} \\
& -\frac{\partial v}{\partial \tau} + 2H(T-t)^{2H-1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + k \frac{\partial v}{\partial x} \\
& \quad -kv = 0 \\
& -\frac{\partial v}{\partial \tau} + 2H(T-t)^{2H-1} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2H(T-t)^{2H-1} \frac{\partial v}{\partial x} + k \frac{\partial v}{\partial x} \\
& \quad -kv = 0 \\
& \frac{\partial v}{\partial \tau} - 2H(T-t)^{2H-1} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2H(T-t)^{2H-1} \frac{\partial v}{\partial x} - k \frac{\partial v}{\partial x} \\
& \quad +kv = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - 2H(T-t)^{2H-1} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (2H(T-t)^{2H-1} - k) \frac{\partial v}{\partial x} + kv = 0$$

Misal $\lambda_H = 2H(T-t)^{2H-1}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} - \lambda_H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda_H - k) \frac{\partial v}{\partial x} + kv &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \lambda_H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (\lambda_H - k) \frac{\partial v}{\partial x} - kv \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \lambda_H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k - \lambda_H) \frac{\partial v}{\partial x} - kv \end{aligned} \quad (4.11)$$

Kemudian untuk memperoleh syarat awal dan syarat batas

$$\begin{aligned} Kv(x, 0) &= C(S, T) = \text{Maks}\{S - K\} \\ &= \text{Maks}\{Ke^x - K\} \\ &= \text{Maks}\{K(e^x - 1)\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} Kv(x, 0) &= \text{Maks}\{K(e^x - 1)\} \\ v(x, 0) &= \frac{\text{Maks}\{K(e^x - 1)\}}{K} \\ v(x, 0) &= \text{Maks}\{e^x - 1\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Karena

$$\lim_{S \rightarrow 0} x = -\infty$$

maka

$$\lim_{S \rightarrow 0} C(S, t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} Kv(x, \tau) = 0$$

Sehingga syarat batas kiri persamaan (4.13) adalah

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x, \tau) = 0 \quad (4.14)$$

Karena

$$\lim_{S \rightarrow 0} x = 0$$

maka

$$\lim_{S \rightarrow \infty} C(S, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} K v(x, \tau) = K e^x = S$$

Sehingga syarat batas kanan persamaan (4.13) adalah

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v(x, \tau) = e^x \quad (4.15)$$

Hasil akhir transformasi variabel menghasilkan PDP sebagai berikut :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial \tau} = \lambda_H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k - \lambda_H) \frac{\partial v}{\partial x} - kv, -\infty < x < \infty, 0 < \tau < \frac{\sigma^2}{2} T \\ v(x, 0) = \text{Maks}\{e^x - 1\}, \\ v(x, \tau) = 0, \quad \text{jika } x \rightarrow -\infty \\ v(x, \tau) = e^x, \quad \text{jika } x \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Kemudian PDP akan diubah menjadi bentuk kanonik yang lebih sederhana dengan mendefinisikan $v(x, \tau)$ menjadi bentuk:

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \quad (4.17)$$

Kemudian persamaan (4.17) dioperasikan turunan pertama $v(x, \tau)$ dan kedua $v(x, \tau)$ terhadap x serta turunan pertama $v(x, \tau)$ terhadap τ .

Turunan pertama $v(x, \tau)$ terhadap x

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \right) \\
 &= e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + u(x, \tau) \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\alpha x + \beta \tau} \right) \\
 &= e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + u(x, \tau) \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \\
 &= e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + \alpha u(x, \tau) \right) \\
 &= \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Turunan kedua $v(x, \tau)$ terhadap x

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right) \right) \\
 &= e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\alpha x + \beta \tau} \right) \\
 &= e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right) \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \\
 &= e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} + \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} u \\
 &= e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 u \right) \\
 &= e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\
 &= \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} u + 2\alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x} + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

turunan pertama $v(x, \tau)$ terhadap τ .

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} + u(x, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(e^{\alpha x + \beta \tau} \right) \\
&= e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} + u(x, \tau) \beta e^{\alpha x + \beta \tau} \\
&= e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} + \beta u(x, \tau) \right) \\
&= \beta e^{\alpha x + \beta \tau} u + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau}. \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan bentuk kanonik, persamaan (4.18), persamaan (4.19) dan persamaan (4.20) disubsitusikan ke dalam persamaan (4.16) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial \tau} = \lambda_H \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + (k - \lambda_H) \frac{\partial v}{\partial x} - kv \\
e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta u \right) &= \lambda_H \left(e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right) \\
&\quad + (k - \lambda_H) \left(e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right) \right) - ku \\
\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta u \right) &= \lambda_H \left(\alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\
&\quad + (k - \lambda_H) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right) - ku \\
\frac{\partial u}{\partial \tau} &= \lambda_H \alpha^2 u + \lambda_H 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k) \frac{\partial u}{\partial x} \\
&\quad + (k) \alpha u - \lambda_H \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda_H \alpha u - ku - \beta u \\
\frac{\partial u}{\partial \tau} &= \lambda_H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda_H 2\alpha + k - \lambda_H) \frac{\partial u}{\partial x} \\
&\quad + (\lambda_H \alpha^2 + (K) \alpha - \lambda_H \alpha - k - \beta) u \\
\frac{\partial u}{\partial \tau} &= \lambda_H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda_H 2\alpha + K - \lambda_H) \frac{\partial u}{\partial x}
\end{aligned}$$

$$+ (\lambda_H \alpha^2 + (K - \lambda_H) \alpha - K - \beta) u. \quad (4.21)$$

Agar koefisien u_x dan u menjadi nol, nilai $\alpha = \frac{\lambda_H - k}{2\lambda_H}$ dan $\beta = -\frac{(k + \lambda_H)^2}{4\lambda_H}$. Sehingga memperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \lambda_H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 0 \\ &= \lambda_H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Kemudian untuk memperoleh syarat awal

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \text{maks}\{e^x - 1\} \\ v(x, \tau) &= e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau), \text{ jika } \tau = 0 \\ &= e^{\alpha x + \beta(0)} u(x, 0) \\ &= e^{\alpha x} u(x, 0) \\ \text{maks}\{e^x - 1\} &= e^{\alpha x} u(x, 0) \\ \frac{\text{maks}\{e^x - 1\}}{e^{\alpha x}} &= u(x, 0) \\ u(x, 0) &= \text{maks}\{e^x - 1\} e^{-\alpha x} \\ &= \text{maks}\{e^x - 1\} e^{-\left(\frac{\lambda_H - k}{2\lambda_H}\right)x} \\ &= \text{maks}\{e^x - 1\} e^{\left(\frac{k - \lambda_H}{2\lambda_H}\right)x} \\ &= \text{maks}\left\{e^x \left(e^{\left(\frac{k - \lambda_H}{2\lambda_H}\right)x}\right) - 1 \left(e^{\left(\frac{k - \lambda_H}{2\lambda_H}\right)x}\right)\right\} \\ &= \text{maks}\left\{e^{\left(\frac{k - \lambda_H}{2\lambda_H}\right)x + x} - e^{\left(\frac{k - \lambda_H}{2\lambda_H}\right)x}\right\} \end{aligned}$$

Syarat awal dapat dipeoleh sebagai berikut

$$u(x, 0) = \text{maks} \left\{ e^{\left(\frac{k+\lambda_H}{2\lambda_H}\right)x} - e^{\left(\frac{k-\lambda_H}{2\lambda_H}\right)x} \right\} \quad (4.23)$$

Dengan demikian, bentuk kanonik dari PDP adalah:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \lambda_H \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ atau } u_\tau = \lambda_H \cdot u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \tau > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \text{maks} \left\{ e^{\left(\frac{k+\lambda_H}{2\lambda_H}\right)x} - e^{\left(\frac{k-\lambda_H}{2\lambda_H}\right)x}, 0 \right\} \end{cases} \quad (4.24)$$

Solusi dari persamaan bentuk kanonik dari PDP sebagai berikut

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau\lambda_H}} ds \quad (4.25)$$

Dengan syarat awal

$$u(s, 0) = u_0(s) = \left(e^{\left(\frac{k+\lambda_H}{2\lambda_H}\right)s} - e^{\left(\frac{k-\lambda_H}{2\lambda_H}\right)s}, 0 \right) \quad (4.26)$$

Kemudian substitusikan persamaan (4.26) ke persamaan (4.25)

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau\lambda_H}} ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\text{Maks} \left\{ e^{\left(\frac{k+\lambda_H}{2\lambda_H}\right)s} - e^{\left(\frac{k-\lambda_H}{2\lambda_H}\right)s} \right\} \right) \\ &\quad e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau\lambda_H}} ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^{\infty} \left(e^{\left(\frac{k+\lambda_H}{2\lambda_H}\right)s} - e^{\left(\frac{k-\lambda_H}{2\lambda_H}\right)s} \right) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau\lambda_H}} ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^{\infty} e^{\left(\frac{k+\lambda_H}{2\lambda_H}\right)s} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau\lambda_H}} ds \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^{\infty} e^{\left(\frac{k-\lambda_H}{2\lambda_H}\right)s} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau\lambda_H}} ds \end{aligned}$$

$$= I_1 - I_2 \quad (4.27)$$

Dengan

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^\infty e^{\left(\frac{k+\lambda_H}{2\lambda_H}\right)s} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau\lambda_H}} ds$$

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^\infty e^{\left(\frac{k-\lambda_H}{2\lambda_H}\right)s} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau\lambda_H}} ds$$

Berikut solusi penyelesaian I_1

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^\infty \left[e^{\left(\frac{k+\lambda_H}{2\lambda_H}\right)s} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau\lambda_H}} \right] ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^\infty e^{\left(\frac{k+\lambda_H}{2\lambda_H}\right)s - \frac{(x-s)^2}{4\tau\lambda_H}} ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^\infty e^{\frac{2\tau s(k+\lambda_H) - (x-s)^2}{4\tau\lambda_H}} ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^\infty e^{\frac{2\tau s(k+\lambda_H) - (x^2 + 2xs + s^2)}{4\tau\lambda_H}} ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^\infty e^{\frac{-s^2 + 2s[\tau(k+\lambda_H) + x] - x^2}{4\tau\lambda_H}} ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^\infty e^{\frac{1}{4\tau\lambda_H} \left(-(s - [\tau(k+\lambda_H) + x])^2 \right)} \\ &\quad \cdot e^{\frac{1}{4\tau\lambda_H} ([\tau(K+\lambda_H) + x]^2 - x^2)} ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{s - [\tau(k+\lambda_H) + x]}{\sqrt{2\tau\lambda_H}} \right)^2} \\ &\quad \cdot e^{\frac{1}{4\tau\lambda_H} (\tau^2(k+\lambda_H)^2 + 2x\tau(k+\lambda_H) + x^2 - x^2)} ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{s - [\tau(k+\lambda_H) + x]}{\sqrt{2\tau\lambda_H}} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot e^{\frac{1}{4}[\tau(k+\lambda_H)^2+2x(k+\lambda_H)]} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-[\tau(k+\lambda_H)+x]}{\sqrt{2\tau\lambda_H}}\right)^2} \\
& \cdot e^{\frac{\tau(k+\lambda_H)^2+2x(k+\lambda_H)}{4\lambda_H}} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \cdot e^{\frac{\tau(k+\lambda_H)^2+2x(k+\lambda_H)}{4\lambda_H}} \\
& \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-[\tau(k+\lambda_H)+x]}{\sqrt{2\tau\lambda_H}}\right)^2} ds \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Dengan transformasi

$$\begin{aligned}
z &= \frac{s - [\tau(k + \lambda_H) + x]}{\sqrt{2\tau\lambda_H}} \\
z\sqrt{2\tau\lambda_H} &= s - [\tau(k + \lambda_H) + x] \\
s &= z\sqrt{2\tau\lambda_H} + [\tau(k + \lambda_H) + x] \\
ds &= \sqrt{2\tau\lambda_H} dz
\end{aligned}$$

ketika $s = 0$

$$\begin{aligned}
z &= \frac{0 - [\tau(k + \lambda_H) + x]}{\sqrt{2\tau\lambda_H}} \\
z &= -\frac{\tau(k + \lambda_H) + x}{\sqrt{2\tau\lambda_H}}
\end{aligned}$$

ketika $s = \infty \rightarrow z = \infty$

kemudian persamaan (4.28) ditransformasi menjadi

$$\Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \cdot e^{\frac{\tau(k+\lambda_H)^2+2x(k+\lambda_H)}{4\lambda_H}} \cdot \int_0^\infty e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{s-[\tau(k+\lambda_H)+x]}{\sqrt{2\tau\lambda_H}}\right)^2\right)} ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \cdot e^{\frac{\tau(k+\lambda_H)^2+2x(k+\lambda_H)}{4\lambda_H}} \int_{-\frac{\tau(k+\lambda_H)+x}{\sqrt{2\tau\lambda_H}}}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} \cdot \sqrt{2\tau\lambda_H} dz \\
&= e^{\frac{\tau(K+\lambda_H)^2+2x(k+\lambda_H)}{4\lambda_H}} \cdot \frac{\sqrt{2\tau\lambda_H}}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_{-\frac{\tau(k+\lambda_H)+x}{\sqrt{2\tau\lambda_H}}}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} dz \\
&= e^{\frac{\tau(k+\lambda_H)^2+2x(k+\lambda_H)}{4\lambda_H}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\tau(k+\lambda_H)+x}{\sqrt{2\tau\lambda_H}}}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} dz \\
&= e^{\frac{\tau(k+\lambda_H)^2+2x(k+\lambda_H)}{4\lambda_H}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\tau(k+\lambda_H)+x}{\sqrt{2\tau\lambda_H}}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz \\
&= e^{\frac{\tau(k+\lambda_H)^2+2x(k+\lambda_H)}{4\lambda_H}} \cdot N\left(\frac{\tau(k+\lambda_H)+x}{\sqrt{2\tau\lambda_H}}\right) \\
&= e^{\frac{\tau(k+\lambda_H)^2+2x(k+\lambda_H)}{4\lambda_H}} \cdot N(d_1)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Solusi penyelesaian I_2

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^{\infty} \left\{ e^{\left(\frac{k-\lambda_H}{2\lambda_H}\right)s} \cdot e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau\lambda_H}} \right\} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^{\infty} e^{\left(\frac{k-\lambda_H}{2\lambda_H}\right)s} \cdot e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau\lambda_H}} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^{\infty} e^{\frac{2\tau s(k-\lambda_H)-(x-s)^2}{4\tau\lambda_H}} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^{\infty} e^{\frac{2\tau s(k-\lambda_H)-(x^2-2xs+s^2)}{4\tau\lambda_H}} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^{\infty} e^{\frac{-s^2+2s[\tau(k-\lambda_H)+x]-x^2}{4\tau\lambda_H}} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^{\infty} e^{\frac{-[s-(\tau(k-\lambda_H)+x)]^2+[\tau(k-\lambda_H)+x]^2-x^2}{4\tau\lambda_H}} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-[\tau(k-\lambda_H)+x]}{\sqrt{2\tau\lambda_H}}\right)^2} \\
&\quad \cdot e^{\frac{1}{4\tau\lambda_H}(\tau^2(k-\lambda_H)^2+2x\tau(k-\lambda_H))} ds
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \cdot e^{\frac{\tau(k-\lambda_H)^2+2x(k-\lambda_H)}{4\lambda_H}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-[\tau(k-\lambda_H)+x]}{\sqrt{2\tau\lambda_H}}\right)^2} ds \quad (4.30)$$

Dengan transformasi

$$\begin{aligned} z &= \frac{s - [\tau(k - \lambda_H) + x]}{\sqrt{2\tau\lambda_H}} \\ z\sqrt{2\tau\lambda_H} &= s - [\tau(k - \lambda_H) + x] \\ s &= z\sqrt{2\tau\lambda_H} + [\tau(k - \lambda_H) + x] \\ ds &= \sqrt{2\tau\lambda_H} dz \end{aligned}$$

Ketika $s = 0$

$$\begin{aligned} z &= \frac{0 - [\tau(k - \lambda_H) + x]}{\sqrt{2\tau\lambda_H}} \\ z &= -\frac{\tau(k - \lambda_H) + x}{\sqrt{2\tau\lambda_H}} \end{aligned}$$

Ketika $s = \infty$ maka $z = \infty$

kemudian persamaan (4.30) ditransformasi menjadi

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow I_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \cdot e^{\frac{\tau(k-\lambda_H)^2+2x(k-\lambda_H)}{4\lambda_H}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-[\tau(k-\lambda_H)+x]}{\sqrt{2\tau\lambda_H}}\right)^2} ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \cdot e^{\frac{\tau(k-\lambda_H)^2+2x(k-\lambda_H)}{4\lambda_H}} \cdot \int_{-\frac{\tau(k-\lambda_H)+x}{\sqrt{2\tau\lambda_H}}}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \sqrt{2\tau\lambda_H} dz \\ &= e^{\frac{\tau(k-\lambda_H)^2+2x(k-\lambda_H)}{4\lambda_H}} \cdot \frac{\sqrt{2\tau\lambda_H}}{2\sqrt{\pi\tau\lambda_H}} \cdot \int_{-\frac{\tau(k-\lambda_H)+x}{\sqrt{2\tau\lambda_H}}}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= e^{\frac{\tau(k-\lambda_H)^2+2x(k-\lambda_H)}{4\lambda_H}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\frac{\tau(k-\lambda_H)+x}{\sqrt{2\tau\lambda_H}}}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\frac{\tau(k-\lambda_H)^2+2x(K-\lambda_H)}{4\lambda_H}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\tau(k-\lambda_H)+x}{\sqrt{2\tau\lambda_H}}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz \\
&= e^{\frac{\tau(k-\lambda_H)^2+2x(k-\lambda_H)}{4\lambda_H}} \cdot N\left(\frac{\tau(k-\lambda_H)+x}{\sqrt{2\tau\lambda_H}}\right) \\
&= e^{\frac{\tau(k-\lambda_H)^2+2x(k-\lambda_H)}{4\lambda_H}} \cdot N(d_2)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Kemudian substitusikan persamaan (4.30) dan persamaan (4.31) ke dalam persamaan (4.27) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
u(x, \tau) &= I_1 - I_2 \\
&= e^{\frac{\tau(k+\lambda_H)^2+2x(k+\lambda_H)}{4\lambda_H}} \cdot N(d_1) - e^{\frac{\tau(k-\lambda_H)^2+2x(k-\lambda_H)}{4\lambda_H}} \cdot N(d_2)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Kemudian substitusi persamaan (4.32) ke persamaan (4.17)

$$\begin{aligned}
v(x, \tau) &= e^{\alpha x + \beta \tau} \cdot u(x, \tau) \\
&= e^{\left(\left(\frac{k-\lambda_H}{2\lambda_H}\right)x + \frac{-(k+\lambda_H)^2}{4\lambda_H}\tau\right)} \left\{ e^{\frac{\tau(k+\lambda_H)^2+2x(k+\lambda_H)}{4\lambda_H}} \cdot N(d_1) \right\} \\
&\quad - \left\{ e^{\frac{\tau(k-\lambda_H)^2+2x(k-\lambda_H)}{4\lambda_H}} \cdot N(d_2) \right\} \\
&= e^{-\frac{1}{2\lambda_H}(k-\lambda_H)x - \frac{1}{4\lambda_H}(k+\lambda_H)^2\tau} \\
&\quad \cdot \left(e^{\frac{1}{4\lambda_H}(k+\lambda_H)^2\tau + \frac{1}{2\lambda_H}(k+\lambda_H)x} \cdot N(d_1) \right) \\
&\quad - e^{-\frac{1}{2\lambda_H}(k-\lambda_H)x - \frac{1}{4\lambda_H}(k+\lambda_H)^2\tau} \\
&\quad \cdot \left(e^{\frac{1}{4\lambda_H}(k-\lambda_H)^2\tau + \frac{1}{2\lambda_H}(k-\lambda_H)x} \cdot N(d_2) \right) \\
&= e^x \cdot N(d_1) - e^{\frac{1}{4\lambda_H}[(k-\lambda_H)^2 - (k+\lambda_H)^2]\tau} \cdot N(d_2) \\
&= e^x \cdot N(d_1) - e^{-k\tau} \cdot N(d_2)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Substitusi persamaan (4.33) ke persamaan (4.3) yaitu $C(S, t) = K \cdot v(x, \tau)$. $x = \ln \frac{S}{K}$, $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$, dan memisalkan $k = \frac{2r}{\sigma^2}$. Maka diperoleh solusi untuk PDP Fraksional Black-Scholes-Merton yaitu rumus Black-Scholes-Merton Fraksional berikut:

$$\begin{aligned}
 C(S, t) &= K \cdot v(x, \tau) \\
 &= K \left[e^x \cdot N(d_1) - e^{-k\tau} \cdot N(d_2) \right] \\
 &= K e^x \cdot N(d_1) - K e^{-k\tau} \cdot N(d_2) \\
 &= S \cdot N(d_1) - K e^{-k\tau} \cdot N(d_2) \\
 &= S \cdot N(d_1) - e^{-\frac{2r}{\sigma^2} \cdot \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \cdot K \cdot N(d_2) \\
 &= S \cdot N(d_1) - e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot N(d_2) \tag{4.34}
 \end{aligned}$$

Diketahui

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\tau(k + \lambda_H) + x}{\sqrt{2\tau\lambda_H}} \\
 &= \frac{\frac{\sigma^2}{2}(T - t) \left(\frac{2r}{\sigma^2} + \lambda_H \right) + \ln \left(\frac{S}{K} \right)}{\sqrt{2 \cdot \frac{\sigma^2}{2}(T - t)\lambda_H}} \\
 &= \frac{\frac{\sigma^2}{2}(T - t) \cdot \frac{2r}{\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2}(T - t) \cdot \lambda_H + \ln \left(\frac{S}{K} \right)}{\sqrt{2 \cdot \frac{\sigma^2}{2}(T - t)\lambda_H}} \\
 &= \frac{r(T - t) + \frac{\sigma^2}{2}(T - t)\lambda_H + \ln \left(\frac{S}{K} \right)}{\sqrt{\sigma^2(T - t)\lambda_H}} \\
 d_1 &= \frac{\ln \left(\frac{S}{K} \right) + \left(r + \frac{1}{2}\lambda_H\sigma^2 \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{\lambda_H(T - t)}} \tag{4.35}
 \end{aligned}$$

dan

$$d_2 = \frac{\tau(k - \lambda_H) + x}{\sqrt{2\tau\lambda_H}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\sigma^2}{2}(T-t) \left(\frac{2r}{\sigma^2} - \lambda_H \right) + \ln \left(\frac{S}{K} \right)}{\sqrt{2 \cdot \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \lambda_H}} \\
&= \frac{\frac{\sigma^2}{2}(T-t) \cdot \frac{2r}{\sigma^2} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \cdot \lambda_H + \ln \left(\frac{S}{K} \right)}{\sqrt{2 \cdot \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \lambda_H}} \\
&= \frac{r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \lambda_H + \ln \left(\frac{S}{K} \right)}{\sqrt{\sigma^2(T-t) \lambda_H}} \\
d_2 &= \frac{\ln \left(\frac{S}{K} \right) + \left(r - \frac{\lambda_H}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{\lambda_H(T-t)}}, \\
&\text{dengan } \lambda_H = 2H(T-t)^{2H-1} \tag{4.36}
\end{aligned}$$

B. Estimasi Volatilitas Dengan Variansi GJR-GARCH

1. Analisis Statistik Dekriptif

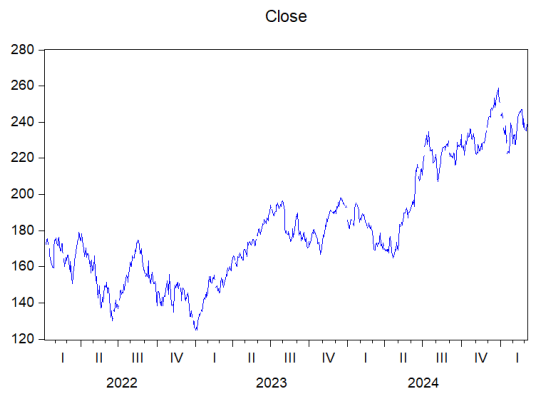
Sebelum melakukan analisis data, analisis deksriptif adalah langkah awal yang sangat penting untuk mempermudah pemahaman terhadap data. Ringkasan statistik deskriptif data penutupan (*close*) harga saham AAPL dari tanggal 7 januari 2022 hingga 7 maret 2025 ditunjukkan dalam Tabel 4.1.

Tabel 4.1. Statistika Deskriptif data *close* AAPL

CLOSE (\$)	
Mean	181.4826
Median	175.0100
Maximum	259.0200
Minimum	125.0200

Std. Dev.	31.40057
Skewness	0.535747
Kurtosis	2.360543
Jarque-Bera	51.44603
Probability	0.000000
Sum	143915.7
Sum Sq. Dev.	780908.6
Observations	793

Tabel 4.1 menunjukkan 793 data penutupan (*close*) harga saham AAPL. Rata rata penutupan (*close*) harga saham AAPL dalam kurun waktu 38 bulan sebesar 181.4826. Nilai terkecil dan terbesar dari penutupan (*close*) harga saham yaitu 125.0200 dan 259.0200. Ukuran yang digunakan untuk mengetahui keekstriman pada data yaitu kurtosis dengan nilai kurtosis 2.360543 yang lebih kecil dari nilai normal kurtosis sebesar 3, mengindikasikan kurva data bersifat *platykurtic*, yaitu puncak kurva yang relatif landai dan ekor yang lebih ringan dibandingkan distribusi normal. Sementara itu, nilai skewness sebesar 0.535747 berarti skewness pada data menunjukkan nilai positif dengan sebaran data lebih condong ke kanan (Mei et al., 2017). Hal ini menggambarkan adanya ketidaksimetrisan pada sebaran data. Berikut grafik data penutupan harga saham AAPL



Gambar 4.1. Grafik Data *close* AAPL

Pola pergerakan harga penutupan saham AAPL turun dan naik terutama meningkat setelah pertengahan tahun 2023 memperlihatkan pola yang fluktuasi ditunjukkan pada Gambar 4.1. Pola ini menunjukkan adanya ketidakstasioneran pada data penutupan AAPL, ditandai dengan *mean* dan *varians* yang berubah-ubah sepanjang waktu. Melanjutkan kepastian data penutupan AAPL telah stasioner atau tidak akan diuji menggunakan uji ADF yang diringkas dalam Tabel 4.2 serta secara rinci pada lampiran 2.

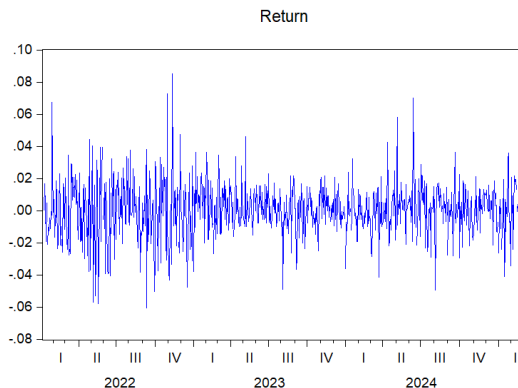
Tabel 4.2. Uji Stasioner data penutupan AAPL

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.697924	0.8451
Test critical values:		
1% level	-3.438381	
5% level	-2.864974	
10% level	-2.568654	

Pada Tabel 4.2. hasil *Augmented Dickey Fuller test* data penutupan AAPL memperoleh hasil $t - statistik > t - tabel$ serta $P - Value = 0,8451 > \alpha = 0,05$ maka hipotesis nol gagal ditolak yaitu terdapat *Unit Root* dapat disimpulkan data penutupan AAPL tidak stasioner. Dikarenakan data penutupan (*close*) harga saham AAPL belum terpenuhi kestasioneran maka perlu dilakukan transformasi data menggunakan logaritma natural.

2. Uji Stasioneritas

Data penutupan Harga saham AAPL tidak stasioner dalam *mean* dan variansi, selanjutnya data ditransformasi ke bentuk *continuously compounded return* menggunakan logaritma natural pada persamaan (2.62) agar data menjadi stasioner. Grafik data return harga saham AAPL ditunjukkan di bawah ini.



Gambar 4.2. Grafik Data Return AAPL

Gambar 4.2 Pola pergerakan data return saham AAPL memperlihatkan fluktuasi acak disekitar rata-rata nol dengan variansi relatif konstan sepanjang waktu. Hal ini mengindikasi data return saham AAPL telah stasioner. Melanjutkan kepastian data return AAPL telah stasioner atau tidak akan diuji menggunakan uji ADF yang diringkas pada Tabel 4.3 serta secara lengkap pada lampiran 2 lanjutan.

Tabel 4.3. Uji Stasioner data Return AAPL

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-20.70028	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.438402	
5% level	-2.864984	
10% level	-2.568659	

Pada Tabel 4.3. hasil *Augmented Dickey Fuller test* data return AAPL memperoleh Hasil $t - statistik < t - tabel$ serta $P - Value = 0,0000 < \alpha = 0,05$ maka hipotesis nol H_0 ditolak berarti hipotesis satu H_1 diterima dapat disimpulkan data return AAPL telah stasioner.

3. Pemodelan ARMA (p,q)

a. Penentuan Model ARMA (p,q)

Penentuan model ARMA (p,q) akan dilakukan setelah data dikatakan telah stasioner dan tidak perlu melakukan *difference* pada data return AAPL. Dengan cara manual melihat plot ACF menandakan model *moving average* (p) dan PACF menandakan model *autoregressive* (q) yang keluar garis *Bartlett* (Agus Widarjono, 2018). Dilihat pada Gambar 4.3

Date: 05/10/25 Time: 15:40
Sample: 1/07/2022 3/07/2025
Included observations: 792

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.015	0.015	0.1687	0.681
		2	-0.050	-0.050	2.1216	0.346
		3	-0.018	-0.016	2.3747	0.498
		4	0.004	0.002	2.3849	0.665
		5	0.025	0.023	2.8809	0.718
		6	0.007	0.007	2.9258	0.818
		7	-0.009	-0.007	2.9978	0.885
		8	-0.044	-0.042	4.5293	0.806
		9	0.051	0.052	6.6497	0.674
		10	-0.058	-0.065	9.3667	0.498
		11	0.025	0.031	9.8762	0.542
		12	-0.057	-0.063	12.459	0.410
		13	0.045	0.052	14.116	0.366
		14	-0.023	-0.034	14.558	0.409
		15	-0.019	-0.012	14.858	0.462
		16	-0.029	-0.033	15.532	0.486
		17	-0.014	-0.008	15.689	0.546
		18	0.048	0.036	17.566	0.485
		19	0.022	0.028	17.951	0.526
		20	0.040	0.033	19.244	0.506
		21	-0.015	0.002	19.430	0.558
		22	-0.013	-0.023	19.562	0.610
		23	0.009	0.019	19.631	0.664
		24	-0.026	-0.043	20.183	0.686
		25	-0.013	-0.004	20.322	0.730
		26	-0.025	-0.033	20.842	0.750
		27	0.017	0.018	21.083	0.782
		28	0.032	0.031	21.914	0.785
		29	0.025	0.023	22.410	0.803
		30	-0.063	-0.055	25.709	0.690
		31	-0.014	-0.010	25.873	0.727
		32	-0.008	-0.018	25.929	0.767
		33	-0.033	-0.033	26.811	0.768
		34	0.035	0.031	27.832	0.763
		35	0.022	0.032	28.217	0.785
		36	-0.005	-0.009	28.237	0.819

Gambar 4.3. Plot ACF dan PACF Data Return

Berdasarkan Gambar 4.3 menunjukkan plot autokorelasi dan korelasi parsial tidak ada yang keluar dari garis *Bartlett* akibatnya, penentuan ARMA secara manual tidak dapat dilakukan. Cara lain untuk mengidentifikasi model ARMA dapat diperoleh secara otomatis dengan *automatic ARIMA forecasting* bantuan software Eviews 10 dan dapat ditemukan pada lampiran 3. Model ARMA yang terbentuk dari *automatic ARIMA forecasting* yaitu ARMA (3, 3) dan kita membandingkan dengan AR (3) dan MA (3) .

b. Estimasi Parameter Model ARMA (p,q)

setelah memperoleh model sementara dari penentuan model ARMA (p,q), langkah berikutnya yaitu pendugaan parameter model ARMA (p,q) menggunakan metode *Maksimum Likelihood Estimation* (MLE) untuk dipilih model ARMA (p,q) terbaik . Berikut pendugaan parameter dan hasil uji signifikansi model ARMA (p,q) secara ringkas pada Tabel 4.4. dan secara rinci terdapat pada lampiran 4.

Tabel 4.4. Hasil Pendugaan Model ARMA (p,q)

Model ARMA	Parameter	Koefisien	P-Value	AIC	Keterangan
ARMA (3,0)	AR(1)	0.014484	0.6432	-5.298787	Tidak Signifikan
	AR(2)	-0.049490	0.1604		
	AR(3)	-0.016353	0.6286		
ARMA (0,3)	MA(1)	0.014622	0.6410	-5.298703	Tidak Signifikan
	MA(2)	-0.048364	0.1702		
	MA(3)	-0.015520	0.6425		
ARMA (3,3)	AR(1)	0.313817	0.0000	-5.316741	Signifikan
	AR(2)	0.298883	0.0000		
	AR(3)	-0.948575	0.0000		
	MA(1)	-0.333982	0.0000		
	MA(2)	-0.332635	0.0000		
	MA(3)	0.998452	0.0000		

Tabel 4.4 memperlihatkan hasil nilai parameter model ARMA (p,q) menggunakan Uji- t dikatakan signifikan dengan $p - value < \alpha(0,05)$ yaitu model ARMA (3,3). Model ARMA (0,3) dan ARMA (3,0) hipotesis nol gagal ditolak mengindikasikan parameter

tidak signifikan. Model ARMA (3,3) adalah model terbaik dikarenakan memiliki nilai AIC terkecil sebesar -5,316741 dan signifikan. Persamaan model ARMA (3,3) adalah

$$\begin{aligned} r_t = & 0.000415 + 0.313817 \cdot r_{t-1} + 0.298883 \cdot r_{t-2} \\ & - 0.948575 \cdot r_{t-3} - 0.333982 \cdot \alpha_{t-1} - 0.332635 \cdot \alpha_{t-2} \\ & + 0.998452 \cdot \alpha_{t-3} + \alpha_t \end{aligned}$$

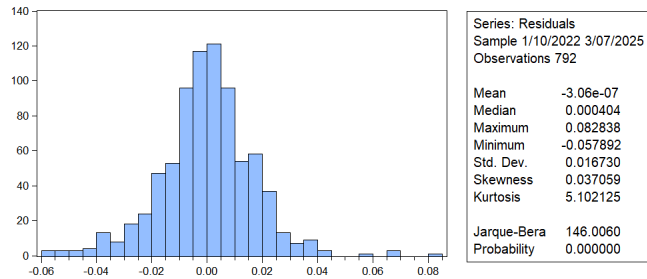
r_t nilai variabel dependennya yaitu return pada waktu t yang stasioner. $r_{t-1} \dots, r_{t-3}$ merupakan return satu, dua, tiga periode sebelumnya dan $\alpha_{t-1}, \dots, \alpha_{t-3}$ ialah error satu, dua, tiga sebelumnya.

c. Memeriksa Diagnostik Model ARMA (p,q)

Langkah berikutnya yaitu memeriksa diagnostik model ARMA (p,q) setelah memperoleh model ARMA (p,q) terbaik. Memeriksa Diagnostik Model ARMA (3,3) sebagai berikut:

1) Uji Normalitas

Setelah memilih model ARMA (p,q) terbaik yaitu ARMA (3,3). Uji normalitas dilakukan untuk mengetahui apakah residual model ARMA (p,q) berdistribusi normal.



Gambar 4.4. Plot Normalitas ARMA (3, 3)

Pada Gambar 4.4 ditampilkan hasil uji normalitas terhadap residual model ARMA (3, 3) menggunakan metode Jarque-Bera dengan tingkat signifikansi 5%. Hasil pengujian menunjukkan bahwa nilai probabilitas uji tersebut lebih kecil dari 5%, sehingga hipotesis nol (H_0) ditolak. Dengan demikian, residual tidak mengikuti distribusi normal, yang mengindikasikan adanya efek ARCH.

2) Uji Autokorelasi

Uji autokorelasi Dengan melihat $p - value$ grafik ACF dan PACF untuk mengevaluasi apakah residual model ARMA (3,3) bersifat acak atau *white noise*.

Date: 05/10/25 Time: 15:44

Sample: 1/07/2022 3/07/2025

Included observations: 792

Q-statistic probabilities adjusted for 6 ARMA terms

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.027	0.027	0.5700	
		2	-0.015	-0.015	0.7436	
		3	-0.017	-0.016	0.9790	
		4	0.001	0.001	0.9795	
		5	-0.009	-0.010	1.0503	
		6	-0.004	-0.004	1.0652	
		7	-0.021	-0.021	1.4293	0.232
		8	-0.020	-0.019	1.7387	0.419
		9	0.064	0.065	5.0636	0.167
		10	-0.032	-0.038	5.9079	0.206
		11	0.016	0.019	6.1053	0.296
		12	-0.065	-0.065	9.4729	0.149
		13	0.013	0.016	9.6190	0.211
		14	-0.029	-0.031	10.289	0.245
		15	-0.023	-0.023	10.699	0.297
		16	-0.003	0.000	10.707	0.381
		17	-0.002	-0.004	10.711	0.468
		18	0.062	0.058	13.870	0.309
		19	0.007	0.005	13.914	0.380
		20	0.031	0.027	14.685	0.400
		21	-0.035	-0.026	15.668	0.404
		22	-0.008	-0.014	15.722	0.473
		23	0.011	0.019	15.817	0.537
		24	-0.005	-0.012	15.841	0.604
		25	-0.010	-0.004	15.924	0.662
		26	-0.019	-0.020	16.229	0.702
		27	-0.001	-0.008	16.229	0.757
		28	0.025	0.028	16.742	0.777
		29	0.012	0.001	16.870	0.816
		30	-0.051	-0.038	18.997	0.752
		31	-0.010	-0.010	19.077	0.793
		32	0.006	0.010	19.107	0.832
		33	-0.038	-0.041	20.314	0.817
		34	0.033	0.037	21.207	0.817
		35	0.005	0.005	21.225	0.851
		36	-0.003	-0.010	21.232	0.881

Gambar 4.5. Uji Autokorelasi ARMA (3, 3)

Gambar 4.5 menjelaskan semua nilai p – *value* lebih besar dari taraf signifikan 0,05. maka hipotesis H_0 gagal ditolak yaitu residual data tidak terdapat autokorelasi atau bersifat acak.

3) Uji heteroskedastisitas

Uji heteroskedastisitas untuk mengevaluasi tidak adanya efek heteroskedastisitas dalam data dilihat residual kuadrat ARMA (3,3).

Tabel 4.5. Uji Heteroskedastisitas ARMA (3, 3)

Heteroskedasticity Test: ARCH			
	Statistic		Prob.
F-statistic	9.209752	Prob. F(1,789)	0.0025
Obs*R-squared	9.126566	Prob. Chi-Square(1)	0.0025

Seperti yang terlihat pada Tabel 4.5, p – $value = 0,0025 < 0,05$, sehingga hipotesis nol H_0 ditolak. Hal ini menunjukkan bahwa residual model mengalami efek heteroskedastisitas. Oleh karena itu, langkah selanjutnya adalah melanjutkan analisis dengan menggunakan model ARCH (q) atau GARCH (p,q).

4. Pemodelan ARCH (q) atau GARCH (p,q)

Solusi permasalahan adanya heteroskedastisitas pada model ARMA(3,3) dengan melanjutkan pemodelan volatilitas varians ARCH (q) atau GARCH (p,q) pada data return AAPL. Dengan langkah-langkah dibawah ini:

a. Penentuan Model ARCH (q) atau GARCH (p,q)

Untuk mengidentifikasi model alternatif, digunakan model ARCH (q) atau GARCH (p,q) dengan order q dan p kurang dari 2 (Rosadi, 2011). Model awal yang terbentuk dengan *mean* ARMA (3,3) ialah ARCH(1), ARCH(2), GARCH(1,1), GARCH (1,2), dan GARCH(2,2).

b. Estimasi Parameter Model ARCH (q) atau GARCH (p,q)

setelah memperoleh model alternatif dari penentuan model ARCH (q) atau GARCH (p,q). Tabel

4.6 menunjukkan pendugaan parameter model ARCH (q) atau GARCH (p,q) yang akan dipilih sebagai ARCH (q) atau GARCH (p,q) terbaik dengan bantuan software Eviews 10, dan hasil lengkap tersedia dalam lampiran 6.

Tabel 4.6. Pendugaan Model ARCH (q) GARCH (p, q)

Model ARCH (q)/GARCH (p,q)	Parameter	Koefisien	P-Value	AIC	Keterangan
ARCH(1)	α_0	0,000264	0,0000	- 5,399377	Signifikan
	α_1	0,114642	0,0513		Tidak Signifikan
ARCH(2)	α_0	0,000213	0,0000	- 5,403338	Signifikan
	α_1	0,242596	0,0006		Signifikan
	α_2	0,056496	0,2627		Tidak Signifikan
GARCH(1,1)	α_0	$1,92 \times 10^{-6}$	0,2680	-5,444546	Tidak Signifikan
	α_1	0,037823	0,0034		Signifikan
	β_1	0,955922	0,0000		Signifikan
GARCH(1,2)	α_0	$2,64 \times 10^{-6}$	0,3675	-5,442433	Tidak Signifikan
	α_1	0,052724	0,1289		
	β_1	0,535466	0,5321		
	β_2	0,403183	0,6234		
GARCH(2,2)	α_0	$2,27 \times 10^{-6}$	0,5336	-5,440036	Tidak Signifikan
	α_2	0,064967	0,2366		
	α_2	- 0,019042	0,8397		
	β_1	0,680764	0,6372		
	β_2	0,265835	0,8469		

Tabel 4.6 memperlihatkan hasil nilai parameter model ARCH (q)/GARCH (p,q) dikatakan signifikan dengan $p - value < \alpha = 0,05$ ialah model GARCH (1,1) . Model ARCH (1), ARCH(2), GARCH (1,2) dan GARCH (2,2) hipotesis nol gagal ditolak

mengindikasikan parameter tidak signifikan. Model GARCH (1,1) juga adalah model terbaik dikarenakan memiliki nilai AIC terkecil sebesar -5,444546 dan signifikan. Persamaan model GARCH (1,1) dibawah ini

$$\begin{aligned} r_t &= 0.000793 - 0.119516 r_{t-1} - 0.370675 r_{t-2} \\ &\quad - 0.306739 r_{t-3} + 0.184652 \varepsilon_{t-1} - 0.392142 \varepsilon_{t-2} \\ &\quad + 0.284200 \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= 1.92 \times 10^{-6} + 0.037823 \varepsilon_{t-1}^2 + 0.955922 \sigma_{t-1}^2 \end{aligned}$$

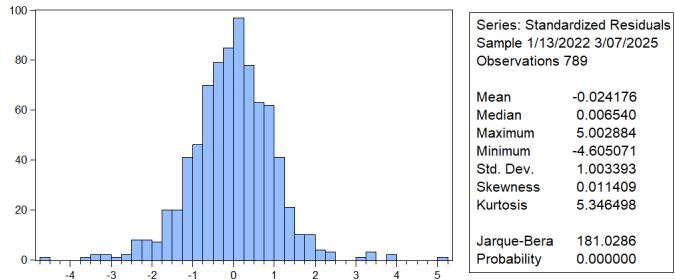
Dengan σ_t^2 yaitu volatilitas variansi GARCH (1,1) data return AAPL, r_t nilai variabel dependennya yaitu return pada waktu t dan ε_t ialah residual pada waktu ke t .

- c. Memeriksa Diagnostik Model ARCH (q) atau GARCH (p,q)

Tahapan selanjutnya yaitu memeriksa diagnostik model ARCH (q)/GARCH (p,q) setelah memperoleh model ARCH (q)/GARCH (p,q) terbaik. Memeriksa Diagnostik Model GARCH (1,1) berikut ini:

1) Uji Normalitas

Setelah memperoleh model terbaik yaitu GARCH (1,1) akan dilakukan Uji normalitas untuk menguji apakah residual dari model GARCH (1,1) berdistribusi normal.



Gambar 4.6. Plot Normalitas GARCH (1,1)

Pada Gambar 4.6 menampilkan hasil uji normalitas terhadap residual model GARCH (1,1) menggunakan metode Jarque-Bera dengan taraf signifikan 0,05. Hasil pengujian menunjukkan bahwa nilai probabilitas uji tersebut lebih kecil dari 0,05, sehingga hipotesis satu (H_1) diterima. Oleh karena itu, residual tidak mengikuti distribusi normal, yang mengindikasikan adanya respon volatilitas yang tidak asimetris.

2) Uji Autokorelasi

Autocorrelation Test dengan melihat $p - value$ grafik ACF dan PACF untuk mengevaluasi apakah residual model GARCH(1,1) bersifat acak atau white noise. Sebagai Brikut:

Date: 05/10/25 Time: 15:49
Sample: 1/07/2022 3/07/2025
Included observations: 789
Q-statistic probabilities adjusted for 6 ARMA terms

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob*
		1 -0.029	-0.029	0.6696	
		2 0.002	0.001	0.6715	
		3 -0.015	-0.015	0.8555	
		4 0.034	0.033	1.7503	
		5 -0.021	-0.019	2.1075	
		6 0.035	0.034	3.1118	
		7 -0.002	0.001	3.1138	0.078
		8 -0.029	-0.030	3.7698	0.152
		9 0.039	0.040	5.0131	0.171
		10 -0.024	-0.024	5.4561	0.244
		11 0.008	0.007	5.5043	0.357
		12 -0.051	-0.049	7.5568	0.272
		13 0.021	0.014	7.9084	0.341
		14 -0.016	-0.010	8.1265	0.421
		15 -0.025	-0.032	8.6242	0.473
		16 -0.029	-0.025	9.2825	0.506
		17 -0.030	-0.034	10.019	0.529
		18 0.024	0.024	10.492	0.573
		19 0.019	0.022	10.793	0.628
		20 0.038	0.037	11.968	0.609
		21 -0.029	-0.019	12.662	0.628
		22 0.027	0.021	13.262	0.654
		23 0.017	0.023	13.499	0.702
		24 -0.025	-0.031	14.022	0.728
		25 -0.022	-0.020	14.420	0.759
		26 -0.005	-0.010	14.441	0.807
		27 0.019	0.015	14.725	0.836
		28 0.007	0.008	14.766	0.872
		29 0.029	0.022	15.477	0.877
		30 -0.067	-0.058	19.128	0.745
		31 -0.006	-0.012	19.155	0.790
		32 0.026	0.027	19.700	0.806
		33 -0.026	-0.031	20.254	0.820
		34 0.013	0.022	20.388	0.850
		35 0.024	0.028	20.873	0.864
		36 -0.010	-0.009	20.955	0.889

*Probabilities may not be valid for this equation specification.

Gambar 4.7. Uji Autokorelasi GARCH (1,1)

Gambar 4.7 memaparkan semua nilai p -value lebih besar dari tingkat signifikan 0,05. maka hipotesis H_1 ditolak yang berarti H_0 diterima yaitu residual data tidak terdapat autokorelasi atau bersifat *white noise*.

3) Uji Heteroskedastisitas

Heteroskedasticity Test untuk memeriksa tidak adanya efek heteroskedastisitas dalam data dilihat residual kuadrat GARCH (1,1).

Tabel 4.7. Uji Heteroskedastisitas GARCH (1, 1)

Heteroskedasticity Test: ARCH			
	Statistic		Prob.
F-statistic	0.323711	Prob. F(1,789)	0.5695
Obs*R-squared	0.324401	Prob. Chi-Square(1)	0.5690

Seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4.7, $p - value = 0,5690 > 0,05$, sehingga hipotesis nol H_0 gagal ditolak. Hal ini menunjukkan bahwa residual model tidak mengalami efek heteroskedastisitas. Oleh karena itu, Tahapan selanjutnya adalah melanjutkan analisis dengan menggunakan model GARCH (p,q) asimetris.

Untuk lebih memastikan data apakah ada sifat asimetris atau tidak agar dapat melanjutkan analisis menggunakan model GARCH (p,q) asimetris maka akan diuji *Sign Bias* dan output secara rinci dala lampiran 8.

Tabel 4.8. Hasil Sign Bias Test

Parameter	P-value
<i>Sign Bias</i>	0,0000
<i>Negative Sign Bias</i>	0,1121
<i>Positive Sign Bias</i>	0,0000
<i>Joint Effect</i>	0,0000

Berdasarkan hasil uji *sign bias* Tabel 4.8, diperoleh bahwa nilai $p - value$ untuk *Negative Size Bias* sebesar 0,1121 sehingga hipotesis nol

H_0 gagal ditolak artinya tidak signifikan yang menandakan shock negatif besar sudah ditangkap model dengan baik. Sementara itu $p - value$ untuk *Sign Bias* sebesar 0,0000 dan *Positive Size Bias* sebesar 0,0000 sehingga hipotesis nol H_0 ditolak menunjukkan adanya asimetris yang signifikan dalam reaksi volatilitas terhadap shock. serta nilai *Join effect* sebesar 0,0000 sehingga hipotesis nol H_0 ditolak menegaskan bahwa secara keseluruhan model GARCH (1,1) tidak cukup untuk menangkap seluruh bentuk asimetris yang ada. Hal ini memperkuat data bersifat Asimetris, maka dari itu dapat melanjutkan analisis model menggunakan GARCH asimetris yaitu GJR-GARCH yang mampu menangani perilaku asimetris dalam volatilitas pasar secara baik.

5. Pemodelan GJR-GARCH(p,q)

Model GJR-GARCH (p,q) adalah salah satu pengembangan dari model ARCH/GARCH. Model ini mampu mengatasi kelemahan model ARCH/GARCH yang tidak dapat menangkap efek asimetri.

a. Penentuan model GJR-GARCH (p,q)

Model GJR-GARCH yang terbentuk dengan *mean* ARMA (3,3) yaitu GJR-GARCH(1,1), GJR-GARCH(1,2) dan GJR-GARCH(2,2).

b. Estimasi Parameter Model GJR-GARCH (p,q)

setelah mendapatkan model sementara dari penentuan model GJR-GARCH (p,q). Tabel 4.9 menunjukkan pendugaan parameter model GJR-GARCH

(p,q) yang akan dipilih sebagai GJR-GARCH (p,q) terbaik dengan bantuan software Eviews 10, dan hasil lengkap tersedia dalam lampiran 9.

Tabel 4.9. Pendugaan Model GJR-GARCH (p, q)

Model GJR-GARCH (p, q)	Parameter	Koefisien	P-Value	AIC	Keterangan
GJR-GARCH (1,1)	α_0	$2,41 \times 10^{-6}$	0,1366	-5,453030	Tidak Signifikan
	α_1	0,008596	0,5143		Signifikan
	γ_1	0,056173	0,0092		Signifikan
	β_1	0,954707	0,0000		Signifikan
GJR-GARCH (1,2)	α_0	$1,84 \times 10^{-6}$	0,4416	-5,453012	Tidak Signifikan
	α_1	0,009532	0,5011		
	γ_1	0,031462	0,4407		
	β_1	1,345613	0,0906		
	β_2	-0,377255	0,6186		
GJR-GARCH (2,2)	α_0	0,000104	0,0006	-5,402901	Signifikan
	α_1	0,025471	0,4865		Tidak Signifikan
	γ_1	0,133153	0,1363		
	α_2	-0,060413	0,0111		
	γ_2	0,280023	0,0375		
	β_1	0,457657	0,0927		
	β_2	0,026609	0,8824		

kreteria uji parameter dilihat dari $p - value$ yang diperoleh, jika $p - value$ lebih dari 0,05 dapat disimpulkan bahwa parameter tersebut tidak signifikan. sebaliknya, apabila $p - value$ kurang dari 0,05 disebut parameter signifikan. Berdasarkan Tabel 4.9 model GJR-GARCH (1,1) terbaik dikarenakan

signifikan pada parameternya serta memiliki nilai AIC terkecil sebesar -5,453030. Bentuk persamaan GJR-GARCH (1,1) yaitu :

$$\begin{aligned} r_t &= 0.000597 - 0.755789 \cdot r_{t-1} + 0.148425 \cdot r_{t-2} \\ &\quad + 0.000271 \cdot r_{t-3} + 0.824275 \cdot \epsilon_{t-1} - 0.136443 \cdot \epsilon_{t-2} \\ &\quad - 0.028324 \cdot \epsilon_{t-3} + \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= 2.41 \times 10^{-6} + 0.008596 \cdot \epsilon_{t-1}^2 \\ &\quad + 0.056173 \cdot \epsilon_{t-1}^2 \cdot I(\epsilon_{t-1} < 0) + 0.954707 \cdot \sigma_{t-1}^2 \end{aligned}$$

Dengan σ_t^2 yaitu volatilitas variansi GJR-GARCH (1,1), r_t nilai variabel dependennya yaitu return pada waktu t dan ϵ_t ialah residual pada waktu ke t . Sementara itu, koefisien γ_i bernilai positif dan signifikan menggambarkan adanya *leverage effect* dalam volatilitas return yang berarti *negative shocks* atau penurunan return pada periode sebelumnya memberikan dampak lebih besar dalam meningkatkan volatilitas dibandingkan *positive effect*

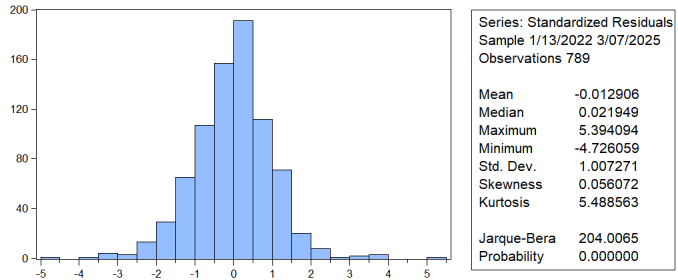
c. Memeriksa Diagnostik Model GJR-GARCH(p,q)

Tahapan berikutnya yaitu memeriksa diagnostik model GJR-GARCH(p,q) terbaik ialah model GJR-GARCH(1,1) berikut ini :

1) Uji Normalitas

Setelah memilih model GJR-GARCH(p,q) terbaik yaitu GJR-GARCH(1,1). Uji normalitas dilakukan untuk menelaah apakah residual model

GJR-GARCH(1,1) berdistribusi normal.



Gambar 4.8. Plot Normalitas GJR-GARCH(1,1)

Pada Gambar 4.8 menjelaskan hasil uji normalitas terhadap residual model GJR-GARCH(1,1) menggunakan metode Jarque-Bera dengan tingkat signifikan 0,05. Hasil pengujian menunjukkan bahwa nilai probabilitas uji tersebut lebih kecil dari 0,05, sehingga hipotesis nol H_0 ditolak yang berarti residual tidak mengikuti distribusi normal mengindikasikan volatilitas yang tinggi yang sering terjadi dalam data keuangan.

2) Uji Autokorelasi

Uji autokorelasi Dengan melihat $p - value$ grafik ACF dan PACF untuk mengevaluasi apakah residual model ARMA (3,3) bersifat acak atau *white noise*.

Date: 05/10/25 Time: 16:00
Sample: 1/07/2022 3/07/2025
Included observations: 789
Q-statistic probabilities adjusted for 6 ARMA terms

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob*
		1 -0.031 -0.031	0.7783		
		2 0.011 0.010	0.8794		
		3 -0.020 -0.020	1.2060		
		4 0.023 0.022	1.6369		
		5 -0.024 -0.023	2.1116		
		6 0.033 0.031	2.9798		
		7 0.003 0.006	2.9870	0.084	
		8 -0.023 -0.025	3.4114	0.182	
		9 0.045 0.046	5.0175	0.171	
		10 -0.021 -0.020	5.3612	0.252	
		11 0.008 0.006	5.4108	0.368	
		12 -0.047 -0.045	7.2196	0.301	
		13 0.022 0.015	7.5963	0.370	
		14 -0.019 -0.012	7.8751	0.446	
		15 -0.020 -0.027	8.1958	0.515	
		16 -0.032 -0.029	9.0105	0.531	
		17 -0.027 -0.031	9.6179	0.565	
		18 0.029 0.029	10.315	0.588	
		19 0.021 0.023	10.664	0.639	
		20 0.042 0.040	12.089	0.599	
		21 -0.023 -0.014	12.518	0.639	
		22 0.027 0.022	13.132	0.663	
		23 0.011 0.019	13.238	0.720	
		24 -0.027 -0.033	13.850	0.739	
		25 -0.025 -0.023	14.349	0.763	
		26 -0.005 -0.010	14.370	0.811	
		27 0.017 0.013	14.598	0.843	
		28 0.002 0.001	14.600	0.879	
		29 0.026 0.019	15.167	0.889	
		30 -0.054 -0.046	17.579	0.823	
		31 -0.008 -0.015	17.635	0.858	
		32 0.031 0.034	18.410	0.860	
		33 -0.023 -0.026	18.852	0.875	
		34 0.015 0.023	19.036	0.897	
		35 0.019 0.024	19.328	0.913	
		36 -0.010 -0.010	19.413	0.931	

*Probabilities may not be valid for this equation specification.

Gambar 4.9. Uji Autokorelasi GJR-GARCH(1,1)

Gambar 4.9 memaparkan semua nilai p -value lebih besar dari tingkat signifikansi 0,05. maka hipotesis H_0 gagal ditolak yaitu residual data tidak terdapat autokorelasi atau bersifat acak.

3) Uji heteroskedastisitas

Uji heteroskedastisitas untuk mengetahui tidak adanya efek heteroskedastisitas dalam data dilihat residual kuadrat GJR-GARCH(1,1).

Tabel 4.10. Uji Heteroskedastisitas GJR-GARCH(1,1)

Heteroskedasticity Test: ARCH			
	Statistic		Prob.
F-statistic	0.369349	Prob. F(1,789)	0.54355
Obs*R-squared	0.370115	Prob. Chi-Square(1)	0.5429

Seperti yang terlihat pada Tabel 4.10, p – $value = 0,5429 > 0,05$, sehingga hipotesis nol H_0 gagal ditolak. Hal ini menunjukkan bahwa residual model tidak mengalami efek heteroskedastisitas.

6. Estimasi Nilai Volatilitas

a. Volatilitas Variansi GJR-GARCH (1,1)

Perhitungan estimasi nilai volatilitas varians GJR-GARCH(1,1) dengan menggunakan persamaan (2.63) berikut ini:

$$\sigma_t^2 = 2,41 \times 10^{-6} + 0,008596 \varepsilon_{t-1}^2 + 0,954707 \sigma_{t-1}^2 + 0,056173 \varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1}$$

Selanjutnya, peramalan untuk periode selanjutnya dilakukan yang dimana seluruh data berjumlah 793 dan tujuan peramalan adalah untuk mengetahui periode selanjutnya, yaitu 794. Hasil peramalannya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sigma_{794}^2 &= 2,41 \times 10^{-6} + (0,008596) \varepsilon_{t-1}^2 + 0,954707 \sigma_{t-1}^2 \\ &\quad + 0,056173 \varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1} \\ &= 2,41 \times 10^{-6} + (0,008596) \varepsilon_{793}^2 + 0,954707 \sigma_{793}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 0,056173\varepsilon_{793}^2 I_{793} \\
& = 2,41 \times 10^{-6} + (0,008596)(0,01498)^2 \\
& \quad + 0,954707(0,000259) + 0,056173(0,01498)^2(0) \\
& = 2,41 \times 10^{-6} + (0,008596)(0,000224) + \\
& \quad 0,954707(0,000259) + 0,056173(0,000224)(0) \\
& = 0,00000241 + 0,00000193 + 0,000247 + 0 \\
& = 0,00025134 \\
\sigma_{794}^2 & \approx 0,000251 \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Nilai varians GJR-GARCH(1,1) yang dihitung secara manual dan bantuan software Eviews 10 sama sebesar 0,000251.

Sehingga nilai Volatilitas menggunakan persamaan (2.71).

$$\begin{aligned}
\text{Volatilitas} & = \sqrt{\text{Varians GJR-GARCH} \times 252} \\
& = \sqrt{0,000251 \times 252} \\
& = \sqrt{0,063252} \\
& = 0,25149950 \\
& \approx 0,251500 \tag{4.38}
\end{aligned}$$

Maka hasil volatilitas dengan varians GJR-GARCH (1,1) yaitu 0,251500.

b. Volatilitas historical

Langkah- langkah berikut diambil untuk mengestimasi volatilitas :

1) Mengambil Data penutupan (*Close*) harga saham

Apple Inc. pada periode 7 januari 2022 – 7 maret 2025.

- 2) Melakukan perhitungan return harian menggunakan persamaan (2.69) dengan bantuan Excel dapat dilihat pada lampiran 1.
- 3) Selanjutnya melakukan perhitungan *mean* menggunakan persamaan (2.70)

$$\begin{aligned}\bar{R}_t &= \frac{\sum_{t=1}^{793} R_t}{793} \\ &= \frac{0,328274}{793} \\ &= 0,000414\end{aligned}$$

- 4) Terakhir melakukan perhitungan volatilitas variansi *ln* return menggunakan persamaan (2.71).

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{a \cdot \frac{\sum_{t=1}^n (R_t - \bar{R}_t)^2}{n - 1}} \\ &= \sqrt{252 \cdot \frac{0,229519}{793 - 1}} \\ &= \sqrt{252 \cdot \frac{0,229519}{792}} \\ &= \sqrt{252 \cdot 0,0002898} \\ &= \sqrt{0,0730296} \\ &= 0,27023989 \\ &\approx 0,270240\end{aligned}\tag{4.39}$$

Maka hasil volatilitas Histoircal yaitu 0,270240.

C. Perhitungan Harga Opsi Call

Diketahui harga saham Apple Inc.(AAPL) melalui <https://finance.yahoo.com/> dipasar pada tanggal 22 Maret 2025 adalah 218,27. Dengan suku bunga bank sentral Amerika saat ini ialah 4,5%. Persamaan (4.39) yaitu nilai volatilitas histori sebesar 0,270240, persamaan (4.38) nilai volatilitas GJR-GARCH (1,1) sebesar 0,251500, nilai hurst yaitu 0,5390113 lampiran 11, serta batas jatuh tempo sampai tanggal 25 April 2025. untuk menghitung harga kontrak *Call* ada 4 kondisi yaitu menghitung harga kontrak *Call* model Black-scholes-Merton dengan volatilitas GJR-GARCH, Model Fraksional Black-Scholes-Merton dengan volatilitas GJR-GARCH, Model Black-Scholes-Merton dengan volatilitas historical dan Model Fraksional Black-Scholes-Merton dengan volatilitas historical. oleh karena itu, harga opsi *Call* dapat dihitung menggunakan persamaan (2.66) dan persamaan (4.34).

Tabel 4.11. Parameter Model Modifikasi BSM

Parameter	Nilai
Harga Saham (S)	\$218,27
Harga pelaksana (K)	\$215
Suku Bunga Bebas Risiko (r)	4,5%
Volatilitas Historis (σ)	0,270240
Volatilitas GJR-GARCH (σ)	0,251500
Waktu Jatuh Tempo (T)	$\frac{35}{365} \text{ hari} = 0,095890$
Hurst (H)	0,5390113
λ_H	0,8978077

Berikut merupakan langkah-langkah perhitungan harga opsi call.

1. Perhitungan Model Black Scholes Merton menggunakan Volatilitas Historical

- a. Langkah 1: menghitung nilai d_1 sesuai persamaan (2.67) dan d_2 sesuai persamaan (2.68)

1) Nilai d_1

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) (T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\
 &= \frac{\ln \frac{218,27}{215} + \left(0,045 + \frac{1}{2}(0,270240)^2\right) (0,095890 - 0)}{0,270240\sqrt{0,095890 - 0}} \\
 &= \frac{0,015095 + \left(0,045 + \frac{1}{2} \cdot 0,073030\right) (0,095890)}{0,270240 \cdot \sqrt{0,095890}} \\
 &= \frac{0,015095 + 0,081515 \cdot 0,095890}{0,270240 \cdot 0,309661} \\
 &= \frac{0,015095 + 0,007816}{0,083683} \\
 &= \frac{0,022911}{0,083683} \\
 &= 0,273783
 \end{aligned}$$

2) Nilai d_2

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) (T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\
 &= \frac{\ln \frac{218,27}{215} + \left(0,045 - \frac{1}{2}(0,270240)^2\right) (0,095890 - 0)}{0,270240\sqrt{0,095890 - 0}} \\
 &= \frac{0,015095 + \left(0,045 - \frac{1}{2} \cdot 0,073030\right) (0,095890)}{0,270240 \cdot \sqrt{0,095890}} \\
 &= \frac{0,015095 + 0,008485 \cdot 0,095890}{0,270240 \cdot 0,309661} \\
 &= \frac{0,015095 + 0,000814}{0,083683}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{0,015909}{0,083683} \\
&= 0,190110
\end{aligned}$$

- b. Langkah 2 : menghitung nilai $N(d_1)$ dan $N(d_2)$ menggunakan software Excel 2010 dengan perintah NORMSDIST

$$N(d_1) = N(0,273783) = 0,607874 \quad (4.40)$$

$$N(d_2) = N(0,190110) = 0,575389 \quad (4.41)$$

- c. Langkah 3 : melakukan perhitungan nilai opsi *call* menggunakan Model Black-Scholes-Merton
Substitusikan persamaan (4.40) dan persamaan (4.41) kepersamaan (2.66)

$$\begin{aligned}
C(S, t) &= S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2) \\
&= 218,27 \cdot 0,607874 \\
&\quad - e^{-0,045 \cdot (0,095890 - 0)} \cdot 215 \cdot 0,575389 \\
&= 132,681 - 0,995694 \cdot 215 \cdot 0,575389 \\
&= 132,681 - 123,176 \\
&= 9,505 \\
&\approx 9,51
\end{aligned}$$

Jadi, harga opsi beli Model Black Scholes Merton menggunakan Volatilitas historical dengan *strike price* \$215 adalah \$9,51

2. Perhitungan Model Fraksional Black Scholes Merton menggunakan Volatilitas Historical

- a. Langkah 1 : menghitung nilai d_1 sesuai persamaan (4.35) dan d_2 sesuai persamaan (4.36)

1) Nilai d_1

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\lambda_H}{2} \sigma^2\right) (T - t)}{\sigma \sqrt{\lambda_H (T - t)}} \\
 \lambda_H &= 2H(T - t)^{2H-1} = 0,8978077 \\
 d_1 &= \frac{\ln \frac{218,27}{215} + \left(0,045 + \frac{0,8978077}{2} (0,270240)^2\right) (0,095890 - 0)}{0,270240 \cdot \sqrt{0,8978077 \cdot (0,095890 - 0)}} \\
 &= \frac{0,015095 + (0,045 + 0,448903 \cdot 0,073030) (0,095890)}{0,270240 \cdot \sqrt{0,8978077 \cdot 0,095890}} \\
 &= \frac{0,015095 + 0,077783 \cdot 0,095890}{0,270240 \cdot 0,293412} \\
 &= \frac{0,015095 + 0,007459}{0,079292} \\
 &= \frac{0,022554}{0,079292} \\
 &= 0,284442
 \end{aligned}$$

2) Nilai d_2

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left(r - \frac{\lambda_H}{2} \sigma^2\right) (T - t)}{\sigma \sqrt{\lambda_H (T - t)}} \\
 \lambda_H &= 2H(T - t)^{2H-1} = 0,8978077 \\
 d_2 &= \frac{\ln \frac{218,27}{215} + \left(0,045 - \frac{0,8978077}{2} (0,270240)^2\right) (0,095890 - 0)}{0,270240 \cdot \sqrt{0,8978077 \cdot (0,095890 - 0)}} \\
 &= \frac{0,015095 + (0,045 - 0,448903 \cdot 0,073030) (0,095890)}{0,270240 \cdot \sqrt{0,8978077 \cdot 0,095890}} \\
 &= \frac{0,015095 + 0,012217 \cdot 0,095890}{0,270240 \cdot 0,293412} \\
 &= \frac{0,015095 + 0,001171}{0,079292} \\
 &= \frac{0,016266}{0,079292}
 \end{aligned}$$

$$= 0,205140$$

- b. Langkah 2 : menghitung nilai $N(d_1)$ dan $N(d_2)$ menggunakan software Excel 2010 dengan perintah NORMSDIST

$$N(d_1) = N(0,284442) = 0,611964 \quad (4.42)$$

$$N(d_2) = N(0,205140) = 0,581269 \quad (4.43)$$

- c. Langkah 3 : melakukan perhitungan nilai opsi call menggunakan Model Fraksional Black-Scholes-Merton Substitusikan persamaan (4.42) dan persamaan (4.43) kepersamaan (4.34)

$$\begin{aligned} C(S, t) &= S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2) \\ &= 218,27 \cdot 0,611964 \\ &\quad - e^{-0,045 \cdot (0,095890-0)} \cdot 215 \cdot 0,581269 \\ &= 133,5734 - 0,995694 \cdot 215 \cdot 0,581269 \\ &= 133,5734 - 124,4347 \\ &= 9,1387 \\ &\approx 9,14 \end{aligned}$$

Jadi, harga opsi beli Model Fraksional Black Scholes Merton menggunakan Volatilitas historical dengan *strike price* \$215 adalah \$9,14

3. Perhitungan Model Black Scholes Merton dengan Volatilitas GJR-GARCH (1,1)

- a. Langkah 1 : menghitung nilai d_1 sesuai persamaan (2.67)

dan d_2 sesuai persamaan (2.68)

1) Nilai d_1

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) (T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\
 &= \frac{\ln \frac{218,27}{215} + \left(0,045 + \frac{1}{2}(0,251500)^2\right) (0,095890 - 0)}{0,251500\sqrt{0,095890 - 0}} \\
 &= \frac{0,015095 + \left(0,045 + \frac{1}{2} \cdot 0,063252\right) (0,095890)}{0,251500\sqrt{0,095890}} \\
 &= \frac{0,015095 + 0,076626 \cdot 0,095890}{0,251500 \cdot 0,309661} \\
 &= \frac{0,015095 + 0,007348}{0,077880} \\
 &= \frac{0,022443}{0,077880} \\
 &= 0,288174
 \end{aligned}$$

2) Nilai d_2

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) (T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\
 &= \frac{\ln \frac{218,27}{215} + \left(0,045 - \frac{1}{2}(0,251500)^2\right) (0,095890 - 0)}{0,251500\sqrt{0,095890 - 0}} \\
 &= \frac{0,015095 + \left(0,045 - \frac{1}{2} \cdot 0,063252\right) (0,095890)}{0,251500\sqrt{0,095890}} \\
 &= \frac{0,015095 + 0,013374 \cdot 0,095890}{0,251500 \cdot 0,309661} \\
 &= \frac{0,015095 + 0,001282}{0,077880} \\
 &= \frac{0,016377}{0,077880} \\
 &= 0,210285
 \end{aligned}$$

- b. Langkah 2 : menghitung nilai $N(d_1)$ dan $N(d_2)$ menggunakan software Excel 2010 dengan perintah NORMSDIST.

$$N(d_1) = N(0,288174) = 0,613393 \quad (4.44)$$

$$N(d_2) = N(0,210285) = 0,583277 \quad (4.45)$$

- c. Langkah 3 : melakukan perhitungan nilai opsi *call* menggunakan Model Black-Scholes-Merton
Substitusikan Persamaan (4.44) dan persamaan (4.45) kepersamaan (2.66)

$$\begin{aligned} C(S, t) &= S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2) \\ &= 218,27 \cdot 0,613393 - e^{-0,045 \cdot (0,095890-0)} \cdot 215 \cdot 0,583277 \\ &= 133,885 - 0,995694 \cdot 215 \cdot 0,583277 \\ &= 133,885 - 124,865 \\ &= 9,02 \end{aligned}$$

Jadi, harga opsi beli Model Black-Scholes-merton Volatilitas GJR-GARCH (1,1) dengan *strike price* \$215 adalah \$9,02

4. Perhitungan Model Fraksional Black Scholes Merton menggunakan Volatilitas GJR-GARCH (1,1)

- a. Langkah 1 : menghitung nilai d_1 sesuai persamaan (4.35) dan d_2 sesuai persamaan (4.36)

1) Nilai d_1

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\lambda_H}{2} \sigma^2\right) (T - t)}{\sigma \sqrt{\lambda_H (T - t)}}$$

$$\lambda_H = 2H(T - t)^{2H-1} = 0,8978077$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln \frac{218,27}{215} + \left(0,045 + \frac{0,8978077}{2}(0,251500)^2\right) (0,095890 - 0)}{0,251500 \sqrt{0,8978077 \cdot (0,095890 - 0)}} \\ &= \frac{0,015095 + (0,045 + 0,448903 \cdot 0,063252) (0,095890)}{0,251500 \sqrt{0,8978077 \cdot 0,095890}} \\ &= \frac{0,015095 + 0,073394 \cdot 0,095890}{0,251500 \cdot 0,293412} \\ &= \frac{0,015095 + 0,007038}{0,073793} \\ &= \frac{0,022133}{0,073793} \\ &= 0,299934 \end{aligned}$$

2) Nilai d_2

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left(r - \frac{\lambda_H}{2} \sigma^2\right) (T - t)}{\sigma \sqrt{\lambda_H (T - t)}} \\ \lambda_H &= 2H(T - t)^{2H-1} = 0,8978077 \\ d_2 &= \frac{\ln \frac{218,27}{215} + \left(0,045 - \frac{0,8978077}{2}(0,251500)^2\right) (0,095890 - 0)}{0,251500 \sqrt{0,8978077 \cdot (0,095890 - 0)}} \\ &= \frac{0,015095 + (0,045 - 0,448903 \cdot 0,063252) (0,095890)}{0,251500 \sqrt{0,8978077 \cdot 0,095890}} \\ &= \frac{0,015095 + 0,016606 \cdot 0,095890}{0,251500 \cdot 0,293412} \\ &= \frac{0,015095 + 0,001592}{0,073793} \\ &= \frac{0,016687}{0,073793} \\ &= 0,226132 \end{aligned}$$

- b. Langkah 2 : menghitung nilai $N(d_1)$ dan $N(d_2)$ menggunakan software Excel 2010 dengan perintah NORMSDIST.

$$N(d_1) = N(0,299934) = 0,617886 \quad (4.46)$$

$$N(d_2) = N(0,226132) = 0,589451 \quad (4.47)$$

- c. Langkah 3 : melakukan perhitungan nilai opsi *call* menggunakan Model Fraksional Black-Scholes-Merton Menyesubstitusikan persamaan (4.46) dan persamaan (4.47) kepersamaan (4.34)

$$\begin{aligned} C(S, t) &= S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2) \\ &= 218,27 \cdot 0,617886 \\ &\quad - e^{-0,045 \cdot (0,095890-0)} \cdot 215 \cdot 0,589451 \\ &= 134,8660 - 0,995694 \cdot 215 \cdot 0,589451 \\ &= 134,8660 - 126,1863 \\ &= 8,6797 \\ &\approx 8,68 \end{aligned}$$

Jadi, harga opsi beli Model Fraksional Black-Scholes-Merton menggunakan Volatilitas GJR-GARCH (1,1) dimana *strike price* \$215 adalah 8,68

Dengan tahapan-tahapan yang serupa untuk memperoleh nilai opsi *call* dengan nilai harga pelaksanaan yang berbeda menggunakan 4 model kondisi yaitu : Black-Scholes-Merton dengan volatilitas historical, Fraksional Black-Scholes-Merton dengan volatilitas historical, Black-Scholes-Merton dengan volatilitas GJR-GARCH (1,1) dan Fraksional Black-Scholes-Merton

dengan GJR-GARCH (1,1) ditampilkan di Tabel 4.12

Tabel 4.12. Perhitungan Opsi *call*

No	S_0	Strike Price	Waktu	Volatilitas	Harga Opsi Beli	Jenis Model
1	218,27	200	0,095890	0,270240	20,34	BSM
	218,27	200	0,095890	0,251500	20,08	BSM
	218,27	200	0,095890	0,270240	20,14	FBSM
	218,27	200	0,095890	0,251500	19,92	FBSM
2	218,27	215	0,095890	0,270240	9,51	BSM
	218,27	215	0,095890	0,251500	9,02	BSM
	218,27	215	0,095890	0,270240	9,14	FBSM
	218,27	215	0,095890	0,251500	8,68	FBSM
3	218,27	225	0,095890	0,270240	4,85	BSM
	218,27	225	0,095890	0,251500	4,37	BSM
	218,27	225	0,095890	0,270240	4,49	FBSM
	218,27	225	0,095890	0,251500	4,03	FBSM
4	218,27	230	0,095890	0,270240	3,29	BSM
	218,27	230	0,095890	0,251500	2,86	BSM
	218,27	230	0,095890	0,270240	2,96	FBSM
	218,27	230	0,095890	0,251500	2,56	FBSM
5	218,27	235	0,095890	0,270240	2,15	BSM
	218,27	235	0,095890	0,251500	1,79	BSM
	218,27	235	0,095890	0,270240	1,88	FBSM
	218,27	235	0,095890	0,251500	1,55	FBSM

Tabel 4.12 menunjukkan perhitungan harga opsi *call* menggunakan model Black-Scholes-Merton (BSM) menggunakan volatilitas historical dan GJR GARCH(1,1) serta Model Fraksional Black-Scholes-Merton (FBSM) menggunakan volatilitas historical dan GJR-GARCH(1,1) dengan diketahui harga saham, *strike price*, waktu, volatilitas historical, volatilitas GJR-GARCH(1,1), Hurst

dan suku bunga bebas resiko. Sebagai contoh hasil perhitungan opsi *call* pada Tabel 4.12 dengan volatilitas 0,270240 dan model BSM untuk *strike price* 200 adalah 20,34, sedangkan *strike price* 235 turun menjadi 2,15. sementara itu untuk model FBSM untuk *strike price* 200 adalah 20,14, sedangkan *strike price* 235 turun menjadi 1,88. Hal ini sesuai dengan teori opsi beli yaitu semakin tinggi harga pelaksanaan, maka opsi beli memiliki nilai intrinsik yang lebih kecil atau harga opsi beli semakin menurun. lalu peningkatan volatilitas mengakibatkan peningkatan harga opsi beli secara konsisten pada kedua model. Sebagai contoh, pada *strike price* 215 dengan model BSM volatilitas 0,251500 yaitu 9,02 menjadi 9,51 dengan volatilitas 0,270240. Di sisi lain model FBSM dengan volatilitas 0,251500 yaitu 8,68 menjadi 9,14 dengan volatilitas 0,270240. Dan sebagai contoh lagi pada harga pelaksanaan 225 dengan volatilitas 0,270240 harga opsi BSM ialah 4,85 sedangkan FBSM ialah 4,49 melainkan dengan volatilitas 0,251500 harga opsi BSM ialah 4,37 sedangkan FBSM ialah 4,03. Hal ini menggambarkan secara konsisten keseluruhan harga opsi yang dihitung menggunakan FBSM selalu lebih kecil dibandingkan dengan BSM dalam semua kombinasi *strike price* dan volatilitas. Perbedaan ini menunjukkan FBSM memberikan estimasi nilai opsi yang lebih konservatif. Selanjutnya, mengevaluasi hasil *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) digunakan sebagai mengukur tingkat akurasi masing-masing performa model.

Nilai MAPE digunakan untuk menghitung selisih persentase absolut rata-rata antara nilai opsi *call* di pasar dan nilai opsi *call* dihitung menggunakan persamaan (2.77) Nilai MAPE ini digunakan untuk mengukur perbandingan kinerja antar model ditunjukkan di Tabel 4.13

Tabel 4.13. Perbandingan kinerja Model

K	Opsi di Pasar	Opsi BSM Historical	Opsi FBSM Historical	Opsi BSM GJR-GARCH (1,1)	Opsi FBSM GJR-GARCH (1,1)
200	20,10	20,34	20,14	20,08	19,92
215	9,50	9,51	9,14	9,02	8,68
225	4,33	4,85	4,49	4,37	4,03
230	2,54	3,29	2,96	2,86	2,56
235	1,50	2,15	1,88	1,79	1,55
MAPE	-	17,25%	9,86%	7,57%	4,08%

Berdasarkan Tabel 4.13, Model Black-Scholes-Merton volatilitas historical mempunyai harga kontrak pasar yaitu \$20,10, \$9,50, \$4,33, \$2,54, \$1,50 memiliki harga kontrak pasar yang lebih rendah daripada harga opsi yang dihitung, sehingga investor direkomendasikan untuk membeli opsi saham. Model Fraksional Black-Scholes-Merton volatilitas historical mempunyai nilai opsi pasar yaitu \$20,10, \$4,33, \$2,54, \$1,50 memiliki harga opsi pasar yang lebih rendah daripada estimasi harga opsi merekomendasi untuk dibeli. Dilain sisi \$9,50 memiliki harga opsi pasar yang lebih tinggi daripada estimasi harga opsi, sehingga tidak disarankan menjalankan opsi beli alangkah baiknya untuk menjual opsi. Model Black-Scholes-Merton volatilitas GJR-GARCH(1,1) mempunyai nilai opsi pasar yaitu \$4,33, \$2,54, \$1,50 yang lebih rendah daripada estimasi nilai opsi, merekomendasikan untuk dibeli. Sedangkan \$20,10, \$9,50 memiliki harga pasar opsi yang lebih besar daripada estimasi nilai opsi, sehingga tidak disarankan menjalankan opsi beli alangkah baiknya untuk menjual opsi. Model Fraksional Black-Scholes-Merton volatilitas GJR-GARCH(1,1) mempunyai nilai opsi pasar yaitu \$2,54, \$1,50 memiliki nilai opsi pasar yang lebih rendah daripada estimasi harga opsi, merekomendasikan untuk dibeli. Sementara itu \$20,10, \$9,50, \$4,33, memiliki nilai opsi pasar yang lebih tinggi daripada estimasi

nilai opsi, sehingga tidak disarankan menjalankan opsi beli alangkah baiknya untuk menjual opsi.

Hasil Perhitungan nilai opsi *call* menggunakan data *strike price* \$215 sebagai contoh perhitungan secara manual dan harga opsi pasarnya sebesar 9,50. Dengan hasil perhitungan model Black Scholes Merton volatilitas Historical 9,51, model Fraksional Black-Scholes-Merton volatilitas Historical 9,14, model Black Scholes Merton volatilitas GJR-GARCH(1,1) 9,02, dan Model Fraksional Black Scholes Merton Volatilitas GJR-GARCH(1,1) 8,68. Dari hasil contoh perhitungan secara manual bahwa model Black Scholes Merton volatilitas Historical menghasilkan harga opsi *call* yang mendekati harga opsi dipasar pada *strike price* \$215 dengan selisih 0,01. Akan tetapi, perbandingan performa model tidak cukup hanya dinilai berdasarkan satu data *strike price*, melainkan dari seluruh perhitungan harga opsi *call* dengan data *strike price* lainnya yaitu \$200, \$225, \$230, \$235 dan termasuk \$215 menggunakan Mean Absolute Percentage Error (MAPE).

Berdasarkan Table 4.13, perbandingan harga opsi beli dengan data *strike price* yang berbeda menggunakan Model Black-Scholes-Merton volatilitas Historical, Model Fraksional Black-Scholes-Merton volatilitas Historical, Model Black-Scholes-Merton dengan volatilitas GJR-GARCH(1,1), dan Model Fraksional Black-Scholes-Merton dengan Volatilitas GJR-GARCH(1,1) didapatkan nilai MAPE untuk opsi beli terkecil berada pada Model Fraksional Black-Scholes-Merton Volatilitas GJR-GARCH(1,1) sebesar 4,08% dengan katagori sangat baik. Model ini menunjukkan performa terbaik diseluruh lima *strike price* berbeda. Hal ini menunjukkan hubungan antara model Fraksional Black Scholes Merton dan volatilitas dipasar yang

dinamis dan tidak pasti atau bersifat asimetris yaitu GJR-GARCH memberikan pendekatan yang lebih realitas dan akurat dalam penetapan harga opsi call tipe eropa.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Hasil perhitungan harga opsi *call* tipe Eropa menggunakan modifikasi model Black-Scholes-Merton dengan volatilitas GJR-GARCH(1,1) yaitu model Fraksional Black-Scholes-Merton dengan volatilitas GJR-GARCH(1,1) menunjukkan mampu menangkap karakter volatilitas pasar yang bersifat asimetris dan fluktuatif.
2. Modifikasi model Black-Scholes-Merton dengan volatilitas GJR-GARCH(1,1) yaitu model Fraksional Black-Scholes-Merton dengan volatilitas GJR-GARCH(1,1) memberikan harga opsi yang lebih mendekati harga opsi aktual dan lebih akurat dibandingkan model Black-Scholes-Merton klasik. Hal ini dapat dilihat dari nilai MAPE sebesar 4,08% dengan kategori baik sekali, dibanding model Black-Scholes-Merton klasik memiliki MAPE sebesar 17,25% dengan kategori baik. Hal ini menunjukkan Model dengan GJR-GARCH (1,1) lebih realitis dan lebih tepat dalam penetapan harga opsi *call* tipe Eropa pada dinamika pasar dengan volatilitas fluktuatif dan asimetris.

B. Saran

Berdasarkan hasil penelitian, peneliti memberikan rekomendasi untuk penelitian selanjutnya ialah Modifikasi Model Black Scholes Merton dengan volatilitas GJR-GARCH untuk penetapan harga opsi *put* tipe Eropa dan Modifikasi Model Black Scholes Merton dengan volatilitas GJR-GARCH untuk penetapan harga opsi *put* dan *call* tipe Amerika.

DAFTAR PUSTAKA

- Agus Widarjono, P. D. (2018). *Ekonometrika Pengantar dan Aplikasinya Disertai Panduan Eviews*. Yogyakarta: UPP STIM YKPN.
- Andriyanto. (2009). *Model Investasi Harga Saham Tipe Eropa dengan Menggunakan Model Black Scholes*. Skripsi FMIPA. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.
- Basuki, A. T. (2014). *Regresi Model PAM, ECM dan Data Panel dengan EVIEWS 7*. Yogyakarta: Katalog Dalam Terbitan (KDT).
- Basuki, A. T., & Yuliadi, I. (2015). *Ekonometrika: Teori dan Aplikasi*. Yogyakarta: Mitra Pustaka Nurani.
- Bain, L.J. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Second Edition. Duxbury Press, An Imprint of Wadsworth Publishing Company, Belmont, California.
- Bjork, T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time* (Third Edition). New York: Oxford University Press.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Chicago Journal*, 81(3), 637–654.
- Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. J. (2018). *Investments* (Eleventh Edition). New York: McGraw-Hill Education.
- Brooks, C. (2008). *Introductory Econometrics for Finance* (Second Edition). Cambridge: Cambridge University Press.

- Brigo, D., Mercurio, F. (2008). *Discrete Time vs Continuous Time Stock-Price Dynamics and Implications for Option Pricing*.
- Byott, N. (2006). *MASM006 Financial Mathematics: The Black-Scholes Equation*. Lecture notes, University of Exeter.
- Chang, P. C., Wang, Y. W., & Liu, C. H. (2007). The development of a weighted evolving fuzzy neural network for PCB sales forecasting. *Expert Systems with Applications*, 32(1), 86–96.
- Chalamandaris, G., & Malliaris, A. G. (2008). *Itô's Calculus and the Derivation of the Black-Scholes Option-Pricing Model*. Akan dimuat dalam *Handbook of Quantitative Finance*, disunting oleh C. F. Lee dan Alice C. Lee, Springer.
- Dai, W. dan Heyde, C.C., 1996. Ito's Formula with Respect to Fractional Brownian Motion and Its Application. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 9(4), pp.439–448.
- Dewi, S., & Ramli, I. (2018). Opsi Saham Pada Pasar Modal Di Indonesia (Studi Pasar Opsi Saat Pasar Opsi Masih Berlangsung Di Bursa Efek Indonesia). *Jurnal Muara Ilmu Ekonomi Dan Bisnis*, 2(2), 300–312.
- Dritsaki, C. (2017). An empirical evaluation in GARCH volatility modeling: Evidence from the Stockholm Stock Exchange. *Journal of Economic and Financial Studies*, 7(2), 366–390.
- Fabozzi, F. J. (2000). *Manajemen Investasi* (Buku 2, Edisi Pertama). Jakarta: Salemba Empat.
- Fadhilla, P., & Artiono, R. (2021). Penggunaan strategi hedging (lindung nilai) pada pemodelan opsi saham karyawan

- yang mengalami pergerakan perdagangan secara statis dan dinamis. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 9(3), 532–541.
- Gujarati, D. N. (2003). *Basic Econometrics* (Fourth Edition). America: The McGraw-Hill.
- Gujarati, D. N., & Porter, D. C. (2009). *Basic Econometrics* (Fifth Edition). America: The McGraw-Hill.
- Hafizhah, A. R., Maruddani, D. A. I., & Santoso, R. (2024). Perbandingan Metode Exponential Garch (EGARCH) Dan Glosten Jagannathan Runkle Garch (GJR-GARCH) Pada Model Volatilitas Saham Tunggal. *Jurnal Gaussian*, 13(1), 199–209.
- Halim, A. (2005). *Analisis Investasi* (Edisi Kedua). Jakarta: Salemba Empat.
- Higham, D.J. 2001. An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations. *SIAM Review*, 43. (3). 525-546.
- Higham, Desmond J. (2004). *An Introduction To Financial Option Valuation*. UK: Cambridge University Press.
- Hull, J. C. (2012). *Options, Futures and Other Derivatives* (Eighth Edition). United States Of America: Pearson Education.
- Hull, J. C. (2015). *Options, Futures, and Other Derivatives: Solutions Manual* (Ninth Edition). United States Of America: Pearson Education.
- Hull, J. C. (2018a). *Options, Futures, and Other Derivatives* (Tenth Edition). United States Of America: Pearson Education.

- Hull, J. C. (2018b). *Risk Management and financial Institutions* (Fifth Edition). Boston: Wiley.
- Hull, J. C. (2022). *Options, Futures, And Other Derivatives* (Eleventh Edition). United States Of America: Pearson Education.
- Inlistya, V. A. (2017). *Perbandingan Metode Antara GJR-GARCH dan EGARCH Pada Analisis Volatilitas Indeks Saham Syariah Indonesia*. Tugas Akhir Fakultas FMIPA. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- Irawan, W. O., Rosha, M., & Permana, D. (2017). Penentuan harga opsi dengan model Black-Scholes menggunakan metode beda hingga Center Time Center Space (CTCS). *Eksakta*, 18(2), 192–199.
- Izaa, N. (2014). *Penerapan Metode VaR (Value at Risk) dengan pendekatan Model GARCH-M pada Analisis Resiko Investasi Saham di Sektor Industri Otomotif*. Skripsi FMIPA. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- Karatzas, I., & Shreve, S. E. (1998). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. (Second Edition). New York: Springer Science & Business Media.
- Luenberger, D. (1998). *Investment Science*. America: Oxford University Press.
- Mackenzie, D. (2006). *An Engine, Not a Camera: How Financial Models Shape Markets*. Cambridge: The MIT Press.
- Makridakis, S., Wheelwright, S. C., & Hyndman, R. J. (1998). *Forecasting: Methods and applications* (Third Edition). New York: Wiley.

- Maulana, Y. (2022). Pemodelan volatilitas indeks harga saham sektoral di Indonesia. *Logika: Jurnal Penelitian Universitas Kuningan*, 13(1), 53–72.
- Maulida, V., Siswanah, E., & Nisa, E. K. (2019). Penentuan Harga Opsi Tipe Eropa dengan Model Binomial. *Square: Journal of Mathematics and Mathematics Education*, 1(1), 65–72.
- Mei, D., Liu, J., Ma, F., & Chen, W. (2017). Forecasting stock market volatility: Do realized skewness and kurtosis help? *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 481, 153–159.
- Merton, R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *Source: The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141–183.
- Morales Bañuelos, P., Muriel, N., & Fernández-Anaya, G. (2022). A Modified Black-Scholes-Merton Model for Option Pricing. *Mathematics*, 10(9), 1–16.
- Mubarokah, I. S., Fitrianto, A., & Affendi, F. M. (2020). Perbandingan Model Garch Simetris Dan Asimetris Pada Data Kurs Harian. *Indonesian Journal of Statistics and Its Applications*, 4(4), 627–637.
- Muniroh, W. (2008). *Simulasi Metode Carlo dalam Menentukan Nilai Opsi Saham*. Skripsi SAINTEK. Malang: Universitas Islam Negeri Malang.
- Natasha, A. (2015). *Analisis Volatilitas Saham Perusahaan Dengan Metode EGARCH*. Skripsi FMIPA. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya..

- Necula, C. (2002). Option pricing in a fractional Brownian motion environment. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 165(1), 107–118.
- Necula, C. (2007). *Pricing European and Barrier Options in the Fractional Black-Scholes Market*. Romania: Academy of Economic Studies.
- Njomen, D. A. N., & Djuetcha, E. (2019). Solving Black-Schole Equation Using Standard Fractional Brownian Motion. *Journal of Mathematics Research*, 11(2), 142.
- Nurhayati, N., Apriani, W., & Bustan, A. W. (2022). Value at Risk Prediction for the GJR-GARCH Aggregation Model. *Pattimura International Journal of Mathematics (PIJMath)*, 1(1), 01–06.
- Purwandari, D. (2016). Penentuan Nilai Opsi Call Eropa Dengan Pembayaran Dividen Determine the value of the european call option with dividend payments. *Sainsmat: Jurnal Ilmiah Ilmu Pengetahuan Alam*, 5(2), 143–151.
- Putro, B., Tanzil Furqon, M., & Wijoyo, S. H. (2018). Prediksi Jumlah Kebutuhan Pemakaian Air Menggunakan Metode Exponential Smoothing (Studi Kasus: PDAM Kota Malang). *Jurnal Pengembangan Teknologi Informasi Dan Ilmu Komputer*, 2(11), 4679–4686.
- Rahman, A. (2010). *Model Black Scholes PUT-CALL Parity Harga Opsi Tipe Eropa Dengan Pembagian Dividen*. Skripsi FMIPA. Surakarta: Universitas Sebelas Maret Surakarta.
- Rosadi, D. (2011). *Analisis Ekonometrika & Runtun Waktu Terapan dengan R*. Yogyakarta: Andi Publisher.

- Samsiah, D. N. (2008). *Analisis Data Runtun Waktu Menggunakan Model ARIMA (p,d,q)*. Skripsi SAINTEK. Yogyakarta: UIN Sunan Kalijaga.
- Sidarto, K. A. (2019). *Matematika Keuangan*. Bandung: ITB Press.
- Siswanah, E., Idrus, A. M., & Hakim, M. M. (2023). Binomial Method in Bermudan Option. *Journal of Multidisciplinary Applied Natural Science*, 3(2), 161–171.
- Sugiyanto, E. K., Subagyo, E., Adinugroho, W. C., Jacob, J., Berry, Y., Nuraini, A., Sudjono, & Syah, S. (2022). *Konsep dan Praktik Ekonometrika Menggunakan Eviews*. Jawa Timur: Academia Publication (p. 179).
- Susanti, Mastur, Z., & Mariani, S. (2016). Analisis Model Threshold Garch Dan Model Exponential Garch Pada Peramalan IHSG. *Unnes Journal of Mathematics*, 5(1), 55–63.
- Tanjung, A. F., Adha, R., & Marliyah. (2024). Analisis Perkembangan Pasar Derivatif di Indonesia. *Jurnal EMT KITA*, 8(1), 285–294.
- Thomas, R. (1997). *Modern Econometrics: An Introduction*. New York: Addison Wesley.
- Tsani, N. (2013). *Penentuan Harga Opsi untuk Model Black Scholes Menggunakan Metode Beda Hingga*. Skripsi SAINTEK. Makassar: Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar.
- Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series. In Technometrics*. Canada: A John Wiley & Sons.

- Taylor, H. M., Karlin, S. (1998). *An Introduction to Stochastic Modeling* (3rd ed.). Academic Press.
- Wahyudi, S. T. (2016). *Konsep dan Penerapan Ekonometrika Menggunakan Eviews*. Jakarta: PT RajaGrafindo Persada.
- Wei, W. (2006). *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods* (Second Edition). Boston: Pearson Addison Wesley.
- Widyawati, Satyahadewi, N., & Sulistianingsih, E. (2013). Penggunaan model Black Scholes untuk penentuan harga opsi jual tipe Eropa. *Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya (Bimaster)*, 2(1), 13–20.
- Winarno, W. W. (2017). *Analisis Ekonometrika dan Statistika dengan EViews* (Edisi Kelima). Yogyakarta: UPP STIM YKPN.
- Yong, B. (2008). Hedging: Suatu Manajemen Risiko Opsi. *Bina Ekonomi: Majalah Ilmiah Fakultas Ekonomi Unpar*, 12(2), 83–94. (Yong, 2008)
- Yoo, Y., 2017. *Stochastic Calculus and Black-Scholes Model*. University of Chicago.
- Yudhi, Y. (2019). Solusi Persamaan Difusi pada Larutan Gula dengan Metode Beda Hingga. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, 8(4), 269–276