

PROFIL KECEPATAN DAN TEMPERATUR PADA MODEL FLUIDA CASSON MELALUI MEDIA BERPORI

SKRIPSI

**Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna
Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika**



**Oleh : KHODIJAH NAHDI
NIM : 2108046019**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2025**

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Khodijah Nahdi
NIM : 2108046019
Jurusan/Program Studi : Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

PROFIL KECEPATAN DAN TEMPERATUR PADA MODEL FLUIDA CASSON MELALUI MEDIA BERPORI

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 11 Juni 2025
Pembuat pernyataan,

Khodijah Nahdi
NIM : 2108046019



KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **PROFIL KECEPATAN DAN TEMPERATUR PADA
MODEL FLUIDA CASSON MELALUI MEDIA
BERPORI**

Penulis : Khodijah Nahdi
NIM : 2108046019
Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji
Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima
sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu
Matematika.

Semarang, 25 Juni 2025

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

Dinni Rahma Oktaviani, M.Si.

NIP: 199410092019032011

Penguji II,

Yolanda Norasia, M.Si.

NIP: 199409232019032011

Penguji III,

Seftina Diyah Miasary, M.Sc.

NIP: 198709212019082010

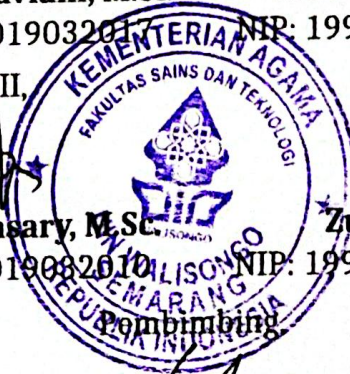
Penguji IV,

Zulaikha, M.Si.

NIP: 199204092019032027

Yolanda Norasia, M.Si.

NIP: 199409232019032011



NOTA DINAS

Semarang, 11 Juni 2025

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : PROFIL KECEPATAN DAN TEMPERATUR PADA
MODEL FLUIDA CASSON MELALUI MEDIA BERPORI
Nama : Khodijah Nahdi
NIM : 2108046019
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing,



Yolanda Norasia, M.Si.
NIP : 199409232019032011

ABSTRAK

Berdasarkan karakteristiknya, fluida diklasifikasikan menjadi dua jenis utama, yaitu fluida Newtonian dan non-Newtonian. Dalam penelitian ini, jenis fluida yang digunakan adalah fluida Casson, yang termasuk dalam kategori non-Newtonian. Fluida Casson memiliki sifat tegangan luluh, artinya fluida tidak akan mengalir hingga tegangan geser yang diterapkan melebihi batas tertentu. Penelitian ini membahas profil kecepatan dan temperatur dari fluida Casson yang mengalir melalui media berpori dengan membangun model matematika berdasarkan tiga persamaan fundamental, yaitu persamaan kontinuitas, momentum, dan energi. Model yang dihasilkan diselesaikan secara numerik menggunakan metode *Keller-Box* untuk menganalisis pengaruh variasi parameter porositas (ϕ), parameter magnetik (M), parameter konveksi (λ), dan parameter Casson (β) terhadap profil kecepatan dan temperatur fluida Casson. Hasil dari simulasi numerik menunjukkan bahwa dengan peningkatan nilai variasi parameter porositas (ϕ) dan variasi parameter magnetik (M) maka profil kecepatan fluida Casson akan menurun sedangkan temperatur fluida Casson akan semakin meningkat. Kemudian, semakin tinggi nilai variasi parameter konveksi (λ) dan variasi parameter Casson (β), maka profil kecepatan fluida Casson akan semakin meningkat, tetapi temperaturnya akan menurun.

Kata kunci : Fluida Casson, Media Berpori, *Keller-Box*

KATA PENGANTAR

Pertama-tama mari kita ucapkan puji syukur kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat, karunia, taufik, hidayah, dan juga nikmat kepada kita yaitu nikmat iman, islam, dan sehat sehigga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul *Profil Kecepatan dan Temperatur Pada Model Fluida Casson Melalui Media Berpori*.

Sholawat serta salam tidak lupa penulis haturkan kepada junjungan nabi besar yaitu Nabi Muhammad SAW, beserta keluarganya, dan para sahabatnya. Semoga kita sebagai umatnya mendapatkan syafaatnya kelak di hari kiamat. Aamiin.

Penyusunan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi persyaratan akademik dalam menyelesaikan Program Studi Strata 1 (S1) Matematika di Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang. Penulis merasa bersyukur atas dukungan, doa, dan bimbingan yang telah diberikan dari berbagai pihak yang membantu kelancaran proses penyusunan ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan rasa terimakasih kepada:

1. Bapak Taufiq Nahdi dan Ibu Rodhiyah selaku kedua orang tua penulis yang telah memberikan doa, dukungan, dan motivasi yang tiada henti hingga skripsi ini dapat terselesaikan.
2. Bapak Prof. Dr. Nizar, M.Ag., selaku Rektor UIN Walisongo Semarang

3. Bapak Prof. Dr. H. Musahadi, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.
4. Bapak Budi Cahyono, S.Pd., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika UIN Walisongo Semarang.
5. Ibu Any Muanalifah, M.Si., Ph.D., selaku Ketua Program Studi Matematika UIN Walisongo Semarang.
6. Ibu Yolanda Norasia, M.Si., selaku dosen pembimbing penulis yang telah memberikan dukungan, arahan, motivasi, dan meluangkan waktunya untuk membimbing sampai skripsi ini terselesaikan.
7. Seluruh Dosen Matematika UIN Walisongo Semarang yang telah memberikan ilmu selama perkuliahan.
8. Fatchiyah dan Syeh Fatchi selaku saudara kandung penulis yang telah memberikan dukungan dan motivasi.
9. Yanti Herawati selaku sahabat penulis yang telah memberikan dukungan, motivasi, dan yang selalu menemani baik suka dan duka.
10. Jirbang Sari. Bilqis, dan Meri yang telah memberikan dukungan dan doanya.
11. Seluruh teman-teman KKN MIT Ke-18 Tematik Posko 66 dan teman-teman Program Studi Matematika angkatan 2021 UIN Walisongo Semarang.

12. Semua Pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah memberikan kontribusi hingga selesainya skripsi ini.

Demikian ucapan terimakasih dari penulis. Semoga kebaikan semuanya menjadi amal ibadah yang diterima dan mendapat pahala yang berlimpah dari Allah SWT. Aamiin.

Atas segala kekurangan dan kelemahan dalam skripsi ini penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun. Semoga karya tulis yang sederhana ini dapat menjadi bacaan yang bermanfaat dan dapat dikembangkan bagi peneliti-peneliti selanjutnya.

Semarang, 11 Juni 2025

Penulis,

Khodijah Nahdi

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iii
NOTA PEMBIMBING	iv
ABSTRAK	v
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
DAFTAR LAMBANG	xv
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Rumusan Masalah	6
C. Tujuan Penelitian	7
D. Batasan Masalah	7
E. Manfaat Penelitian	8
BAB II LANDASAN PUSTAKA	9
A. Persamaan Diferensial	9
B. Fluida	9
1. Fluida Newtonian dan Non-Newtonian . .	11
2. Fluida Casson	11
3. Aliran Fluida	12
C. Bilangan Reynolds	13
D. Pemodelan Matematika	15
E. Media Berpori	15
F. Porositas	17
G. Magnetohidrodinamika (MHD)	18
H. Konveksi	19
I. Lapisan Batas (<i>Boundary Layer</i>)	20

J.	Hukum-Hukum Fisika yang Berkaitan dengan Fluida Casson	21
K.	Metode Beda Hingga	23
L.	Metode <i>Keller-Box</i>	24
M.	Penelitian Terdahulu	28
BAB III METODOLOGI PENELITIAN		33
A.	Jenis Penelitian	33
B.	Tahap Penelitian	33
C.	Alir Penelitian.....	36
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN		37
A.	Persamaan Pembangun Dimensional	37
1.	Persamaan Kontinuitas	37
2.	Persamaan Momentum	42
3.	Persamaan Energi	53
B.	Persamaan Pembangun Non-Dimensional	60
1.	Perubahan Persamaan Kontinuitas	62
2.	Perubahan Persamaan Momentum	62
3.	Perubahan Persamaan Energi	68
C.	Teori Lapisan Batas	71
D.	Fungsi Alir	74
E.	Persamaan Similaritas.....	78
F.	Penyelesaian Numerik.....	81
1.	Permisalan Notasi	81
2.	Diskritisasi Model	82
3.	Linierisasi Model	86
4.	Teknik Eliminasi Blok	92
G.	Hasil Simulasi Numerik	101
1.	Pengaruh Parameter Porositas (ϕ) pada Aliran Fluida Casson	101
2.	Pengaruh Parameter Magnetik (M) pada Aliran Fluida Casson	104
3.	Pengaruh Parameter Konveksi (λ) pada Aliran Fluida Casson	106

4. Pengaruh Parameter Casson (β) pada	
Aliran Fluida Casson	108
BAB V PENUTUP	111
A. Kesimpulan	111
B. Saran	113
DAFTAR PUSTAKA	114
Lampiran-lampiran	122

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
Gambar 2.1	Pembuluh Darah	16
Gambar 2.2	Aliran Darah Melewati Arteri Berpori	17
Gambar 2.3	Klasifikasi Lapisan Batas	20
Gambar 2.4	Metode <i>Keller-Box</i>	26
Gambar 4.1	Aliran Fluida yang Masuk dan yang Keluar Volume Kendali	39
Gambar 4.2	Gaya Permukaan Elemen Fluida	44
Gambar 4.3	Komponen Fluks Panas	55
Gambar 4.4	Skema Beda Hingga	82
Gambar 4.5	Grafik Variasi Parameter Porositas Terhadap Profil Kecepatan	102
Gambar 4.6	Grafik Variasi Parameter Porositas Terhadap Temperatur	103
Gambar 4.7	Grafik Variasi Parameter Magnetik Terhadap Profil Kecepatan	104
Gambar 4.8	Grafik Variasi Parameter Magnetik Terhadap Temperatur	105
Gambar 4.9	Grafik Variasi Parameter Konveksi Terhadap Profil Kecepatan	107
Gambar 4.10	Grafik Variasi Parameter Konveksi Terhadap Temperatur	108

Gambar 4.11	Grafik Variasi Parameter Casson Terhadap Profil Kecepatan	109
Gambar 4.12	Grafik Variasi Parameter Casson Terhadap Temperatur	110

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 Persamaan Similaritas	122
Lampiran 2 Penurunan Kondisi Awal	129
Lampiran 3 Pembuktian Parameter Casson	137
Lampiran 4 Script MATLAB 2013A	138

DAFTAR LAMBANG

u	= Kecepatan terhadap arah sumbu x
v	= Kecepatan terhadap arah sumbu y
a	= Panjang karakteristik
B	= Gaya Magnet
b	= Induksi medan magnet
M	= Parameter magnetik
β	= Parameter Casson
λ	= Parameter konveksi
ϕ	= Parameter porositas
ν	= Viskositas kinematik fluida
μ	= Viskositas dinamik fluida
U_{∞}	= Kecepatan fluida pada aliran bebas
α	= Difusivitas panas fluida
ρ_f	= Massa jenis fluida
$\rho_{tak hingga}$	= Massa jenis fluida diluar area lapisan batas
g	= Gravitasi
t	= Waktu
θ	= Ekspansi panas
Gr	= Bilangan Grashof
Pr	= Bilangan Prandtl
ψ	= Fungsi alir
T	= Temperatur
T_n	= Temperatur permukaan benda
$T_{tak hingga}$	= Temperatur lingkungan

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Fluida didefinisikan sebagai zat yang mudah berubah bentuk, mampu mengalir, dan sangat dipengaruhi oleh gaya geser (Wijaya, 2022). Perubahan bentuk akibat gaya geser ini dikenal sebagai deformasi (Arsita et al., 2024). Fluida umumnya terbagi menjadi dua jenis, yaitu cairan dan gas (Irfan & Supriyatna, 2024). Berdasarkan karakteristik alirannya, fluida juga dapat diklasifikasikan menjadi fluida Newtonian dan non-Newtonian. Fluida Newtonian adalah jenis fluida yang alirannya tidak dipengaruhi oleh besar kecilnya tegangan geser, contoh dari jenis ini adalah air, udara, dan etanol. Sementara itu, fluida non-Newtonian menunjukkan perilaku aliran yang berubah tergantung pada besar tegangan geser yang diterapkan. Beberapa contoh fluida non-Newtonian antara lain cat, pelumas, lumpur, dan darah (Arsita et al., 2024). Terdapat sejumlah aplikasi yang didasarkan pada teori fluida non-Newtonian dalam sistem fluida biologi. Fluida paling penting dalam tubuh kita adalah darah, yang memiliki sifat yang sangat rumit (Sharma dan Yadav, 2017). Darah dapat dikategorikan sebagai fluida Casson (Eldabe et al., 2021).

Salah satu jenis fluida non-Newtonian yang paling tepat untuk mendeskripsikan fluida seperti darah, madu, jeli

adalah fluida Casson. Fluida ini berperilaku seperti padatan elastis dan memiliki rantai molekul yang menghubungkan partikel-partikel di dalamnya (Sohail et al., 2020). Selain itu, fluida Casson juga mengalami penipisan geser dengan tiga asumsi. Pertama, ketika tidak ada geseran, fluida ini memiliki viskositas yang sangat tinggi. Kedua, fluida ini tidak akan mengalir atau mengalami perubahan tetap sampai tegangan yang diterapkan melebihi nilai tertentu, tegangan yang melebihi nilai tertentu disebut tegangan luluh (*yield stress*). Ketiga, ketika laju geser sangat tinggi, viskositas fluida Casson menjadi sangat rendah sehingga hampir tidak berpengaruh (Sohail et al., 2020). Model fluida Casson sering kali dapat dijelaskan dengan lebih baik dalam menggambarkan bagaimana suatu fluida dapat mengalir dan merespon tegangan yang tidak dapat dijelaskan dengan model yang hanya menggambarkan fluida yang berperilaku viskos dan elastis atau biasa disebut fluida viskoelastis (Reddy et al., 2017).

Model fluida Casson sering digunakan untuk mempelajari aliran darah. Darah merupakan salah satu cairan sistem peredaran darah manusia. Darah berperan dalam sistem peredaran darah atau transportasi tubuh manusia, dimana darah akan mengalir ke seluruh tubuh untuk memberikan oksigen dan nutrisi ke seluruh sel dan jaringan dalam tubuh (Norasia et al., 2024). Sistem peredaran darah, yang dikenal sebagai sistem kardiovaskular, terjadi ketika darah dipompa ke seluruh

tubuh atau ke paru-paru. Dalam proses ini terdapat pembuluh darah yang membantu aliran darah. Bentuk pembuluh darah yaitu seperti tabung kecil yang mempunyai fungsi sama seperti pipa air yang dikenal dalam kehidupan sehari-hari (Arsita et al., 2024).

Terdapat tiga jenis pembuluh darah terdiri dari arteri, kapiler, dan vena. Arteri membawa darah dari jantung ke kapiler di seluruh tubuh, sedangkan vena membawa darah dari kapiler di seluruh tubuh kembali ke jantung, dan kapiler merupakan penghubung arteri dan vena (Setiadi, 2020). Pembuluh darah dalam sistem peredaran darah manusia merupakan contoh terbaik dari media berpori dalam sistem biologis (Sharma dan Yadav, 2017). Media berpori merupakan bahan yang terdiri dari bagian padat dengan rongga-rongga yang saling terhubung. Salah satu sifat utama dari media berpori adalah porositas. Porositas adalah perbandingan antara ruang kosong (rongga) dengan total volume media tersebut. Salah satu penelitian awal mengenai aliran fluida dalam media berpori didasarkan pada hukum Darcy, yang menjelaskan bagaimana fluida mengalir melalui bahan berpori (Sharma & Yadav, 2017).

Profil kecepatan merupakan pola sebaran kecepatan fluida pada setiap titik di penampang melintang suatu aliran. Dalam kajian mekanika fluida, kecepatan biasanya dinyatakan dalam bentuk komponen kartesian (u, v, w) , yang masing-masing merepresentasikan kecepatan fluida sepanjang sumbu x , y , dan z (White, 2009). Profil kecepatan

sangat penting dalam analisis aliran fluida karena membantu memahami dan memprediksi perilaku fluida dalam berbagai kondisi aliran (Ruslan, 2020).

Penelitian tentang fluida Casson telah dilakukan oleh banyak peneliti. Salah satu contohnya adalah penelitian oleh Eldabe et al (2021) yang membahas aliran fluida Casson dengan transfer panas dan massa melalui media berpori di sepanjang permukaan yang menyusut. Penelitian ini menunjukkan bahwa profil kecepatan meningkat dengan bertambahnya bilangan Hartmann, tetapi menurun dengan meningkatnya parameter medan listrik. Sedangkan temperatur meningkat seiring bertambahnya bilangan Eckert, tetapi menurun dengan bertambahnya bilangan Prandtl. Selanjutnya, Endalew et al (2023), membahas fluida Casson disekitar pelat miring dengan percepatan yang semakin meningkat dengan laju yang semakin cepat seiring waktu. Penelitian ini menunjukkan bahwa peningkatan kemiringan pelat mengakibatkan profil kecepatan fluida menurun namun gesekan permukaan meningkat. Sedangkan bilangan Prandtl meningkatkan tegangan geser namun menurunkan temperatur, profil kecepatan dan laju transfer panas. Ramzan et al (2021) membahas aliran konveksi bebas magnetohidrodinamika (MHD) umum dari fluida Casson pada media berpori di bawah pengaruh medan magnet, dengan mempertimbangkan efek gradien temperatur dan konsentrasi. Tujuannya untuk memberikan solusi eksak untuk efek Dufour pada aliran

MHD fluida Casson fraksional dan menganalisis berbagai parameter yang digunakan. Penelitian ini menunjukkan bahwa kondisi isothermal meningkatkan profil kecepatan dan temperatur. Sementara penggunaan derivatif fraksional menurunkan hasil konsentrasi, temperatur, dan profil kecepatan, yang menunjukkan efektivitasnya dalam mengontrol parameter yang digunakan. Das et al (2024) membahas aliran fluida Casson dengan transfer panas dan massa melalui media berpori di atas permukaan yang menyusut dengan pengaruh medan magnet, radiasi termal, dan hisap atau tiupan. Penelitian ini menunjukkan bahwa parameter magnetik meningkatkan gerakan fluida, sedangkan porositas meningkatkan profil kecepatan, dan bilangan Prandtl menurunkan temperatur. Terakhir, Ganga et al (2021) membahas aliran lapisan batas MHD tiga dimensi dari fluida Casson di atas permukaan yang meregang, dengan konduktivitas termal variabel dan pembangkitan panas. Persamaan diselesaikan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde keempat. Penelitian ini menunjukkan bahwa parameter Hartman dan Casson menurunkan profil kecepatan. Sedangkan parameter pembangkitan panas dan konduktivitas termal meningkatkan temperatur namun menurun dengan parameter rasio dan parameter porositas.

Berdasarkan penelitian sebelumnya, peneliti tertarik untuk mendalami perilaku fluida Casson yang mengalir melalui media berpori. Penelitian ini fokus pada analisis

profil kecepatan dan temperatur yang dipengaruhi oleh porositas, medan magnet, konveksi, serta Casson dengan membangun sebuah model matematika. Selanjutnya, model tersebut akan diselesaikan secara numerik menggunakan metode *Keller-Box* yang diimplementasikan melalui perangkat lunak MATLAB 2013a.

B. Rumusan Masalah

Dengan mempertimbangkan latar belakang yang telah disampaikan, perumusan masalah dalam penelitian adalah:

1. Bagaimana menyusun model matematika dari fluida Casson melalui media berpori yang mempengaruhi profil kecepatan dan temperatur?
2. Bagaimana profil kecepatan dan temperatur pada model aliran fluida Casson yang dipengaruhi parameter porositas, medan magnet, konveksi, dan Casson yang diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode *Keller-Box*?
3. Bagaimana parameter porositas, medan magnet, konveksi, dan Casson mempengaruhi profil kecepatan dan temperatur dari fluida Casson dengan menggunakan software MATLAB 2013a?

C. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mencapai beberapa hal berikut:

1. Menyusun model matematika untuk menggambarkan fluida Casson melalui media berpori yang mempengaruhi profil kecepatan dan temperatur.
2. Menganalisis profil kecepatan dan temperatur dalam aliran fluida Casson yang dipengaruhi oleh parameter porositas, medan magnet, konveksi, serta Casson yang diselesaikan secara numerik menggunakan metode *Keller-Box*.
3. Menganalisis parameter porositas, medan magnet, konveksi, dan Casson yang mempengaruhi profil kecepatan serta temperatur fluida Casson dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB 2013a.

D. Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, diterapkan beberapa batasan, yaitu:

1. Fluida yang digunakan dalam penelitian ini merupakan fluida Casson.
2. Media berpori digunakan sebagai objek utama dalam penelitian ini.

3. Untuk memperoleh solusi numerik, digunakan metode *Keller-Box* yang diimplementasikan dengan bantuan perangkat lunak MATLAB 2013a.
4. Parameter yang digunakan adalah parameter porositas, medan magnet, konveksi, dan Casson.

E. Manfaat Penelitian

1. Bagi penulis diharapkan dapat memperluas wawasan dan pengetahuan tentang penelitian yang berkaitan dengan matematika terapan, terutama dalam pemodelan aliran fluida Casson non-Newtonian.
2. Bagi lembaga diharapkan dapat menjadi sumber pembelajaran kuliah tambahan, terutama tentang fluida Casson non-Newtonian.
3. Bagi pembaca diharapkan dapat menggunakannya sebagai referensi untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

A. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu bentuk persamaan yang memuat turunan satu atau lebih peubah tak bebas terhadap satu atau lebih peubah bebas suatu fungsi (Ubaidillah, 2020). Persamaan Diferensial (PD) dibagi menjadi dua, yaitu Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP) (Murtafi'ah & Apriandi, 2018). Persamaan diferensial parsial adalah sebuah persamaan matematis yang menghubungkan peubah-peubah bebas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dengan fungsi $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ beserta turunan-turunan parsialnya (Gunawan, 2021).

B. Fluida

Fluida merupakan suatu zat yang mengalami deformasi atau perubahan secara terus-menerus ketika dikenai gaya berupa tegangan geser (Romdani, 2024). Berdasarkan pengertian ini, fluida diklasifikasikan menjadi dua jenis utama, yaitu cairan dan gas. Salah satu karakteristik utama fluida adalah kemampuannya untuk mengalir, yang disebabkan oleh ketidakmampuannya mempertahankan atau mengembalikan bentuk aslinya ketika dikenai tegangan

geser (Yolantari et al., 2023). Tegangan geser sendiri adalah jenis tegangan yang timbul akibat dua gaya yang bekerja berlawanan arah namun tidak sejajar pada satu bidang (Haslinda, 2023). Berdasarkan hukum Newton, tegangan geser dalam fluida sebanding dengan laju perubahan kecepatan terhadap arah vertikal, yang dikenal sebagai gradien kecepatan. Hubungan ini dijelaskan secara matematis melalui viskositas sebagai koefisien pengait antara keduanya (Arsita et al., 2024):

$$\tau = \frac{F}{A} \approx \frac{du}{dy}$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}}$$

dengan

τ = tegangan geser fluida (N/m^2)

F = gaya geser (N)

A = luas permukaan (m^2)

μ = viskositas mutlak atau dinamik fluida ($N.s/m^2$)

$\frac{du}{dy}$ = laju perubahan kecepatan fluida

Berdasarkan karakteristiknya fluida terbagi menjadi dua, yaitu fluida Newtonian dan non-Newtonian.

1. Fluida Newtonian dan Non-Newtonian

Fluida Newtonian adalah jenis fluida yang mengalir secara kontinu dan tidak dipengaruhi oleh tegangan geser yang diberikan padanya (Trimulyono dan Supriyatna, 2024). Contoh fluida Newtonian antara lain air, udara, dan etanol. Sebaliknya, fluida non-Newtonian merupakan fluida yang tidak mengalir secara kontinu ketika dikenai gaya geser (Asim et al., 2023). Pada fluida non-Newtonian, hubungan antara tegangan geser dan laju deformasi atau gradien kecepatan terhadap sumbu- y bersifat tidak linear, sehingga viskositas fluida berubah tergantung pada besar tegangan geser yang bekerja (Kusumaningsih et al., 2022). Contoh umum dari fluida non-Newtonian antara lain madu, darah, lemak, dan minyak (Anwar et al., 2021). Salah satu jenis fluida non-Newtonian yang banyak dikaji adalah fluida Casson (Widodo & Eviloka, 2022).

2. Fluida Casson

Fluida Casson didefinisikan sebagai fluida penipisan geser yang diasumsikan mempunyai viskositas atau kekentalan tak terbatas pada laju geser nol, tegangan luluh dibawahnya tidak ada aliran yang terjadi, dan jika tegangan geser melebihi tegangan luluh maka viskositas akan menjadi nol atau fluida tersebut akan mengalir (Prakash et al., 2016). Contoh fluida Casson adalah jeli, pasta gigi, jus buah pekat, sup tomat, madu, sampo, darah, dan lain-lain (Awais et al., 2021). Darah manusia terdiri dari berbagai zat seperti

fibrinogen, sel darah merah manusia, protein, dan globulin dalam plasma basa berair, sehingga darah dianggap sebagai fluida Casson (Anwar et al., 2021). Dengan demikian, fluida Casson memainkan peran penting dalam ilmu biologi dan teknik (Das & Dey, 2024).

3. Aliran Fluida

Aliran fluida dapat diklasifikasikan sebagai aliran tunak atau tidak tunak berdasarkan perubahan kedalaman dan kecepatan sepanjang waktu (Hendratta & Tengku).

a. Aliran Tunak

Aliran tunak merupakan aliran yang memiliki sifat fluida seperti kecepatan, tekanan dan massa jenis di setiap titik, namun konstan terhadap waktu. Aliran ini dapat dinyatakan melalui rumusan berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

dengan

u = kecepatan (m/s)

p = tekanan (N/m^2)

ρ = massa jenis (kg/m^3)

t = waktu (s)

$\frac{\partial u}{\partial t}$ = laju perubahan kecepatan terhadap waktu

$\frac{\partial p}{\partial t}$ = laju perubahan tekanan terhadap waktu

$\frac{\partial \rho}{\partial t}$ = laju perubahan massa jenis terhadap waktu

b. Aliran Tidak Tunak

Aliran tidak tunak merupakan aliran dengan sifat fluida yang mengalami perubahan terhadap waktu. Misalnya

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0, \text{ atau } \frac{\partial p}{\partial t} \neq 0, \text{ atau } \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0 \quad (2.2)$$

dengan

u = kecepatan (m/s)

p = tekanan (N/m^2)

ρ = massa jenis (kg/m^3)

t = waktu (s)

$\frac{\partial u}{\partial t}$ = laju perubahan kecepatan terhadap waktu

$\frac{\partial p}{\partial t}$ = laju perubahan tekanan terhadap waktu

$\frac{\partial \rho}{\partial t}$ = laju perubahan massa jenis terhadap waktu

C. Bilangan Reynolds

Bilangan Reynolds merupakan bilangan tak dimensi yang diperoleh dari perbandingan antara massa jenis aliran, kecepatan aliran, dan diameter penampang terhadap viskositas fluidanya (Riani et al., 2023). Bilangan reynolds dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$Re = \frac{U_{\infty} a}{\nu} \quad (2.3)$$

dimana

U_{∞} = kecepatan fluida pada aliran bebas (m/s)

a = panjang karakteristik (m)

ν = viskositas kinematik pada fluida (m^2/s)

Aliran fluida dibagi menjadi tiga jenis, yaitu aliran laminar, aliran transisi, dan aliran turbulen. Jenis aliran ini diperoleh dari penelitian yang dilakukan oleh Osborne Reynold pada tahun 1883 yang membagi aliran menjadi tiga kategori. Berikut adalah kategorinya (Ghazali et al. , 2023).

a. Aliran Laminar

Jenis aliran dengan nilai bilangan Reynolds di bawah 2300 dikenal sebagai aliran laminar, di mana fluida bergerak halus di atas lapisan lain. ($Re < 2300$)

b. Aliran Transisi

Proses aliran transisi adalah pergeseran dari aliran laminar menjadi aliran turbulen. Kondisi transisi ini dipengaruhi oleh kecepatan, viskositas fluida, dan berbagai faktor geometri aliran. Nilai bilangan Reynolds berkisar antara 2300 dan 4000 ($2300 \leq Re \leq 4000$).

c. Aliran Turbulen

Aliran turbulen adalah jenis aliran di mana pergerakan partikel dalam zat cair sangat tidak teratur karena partikelnya bercampur dan bergerak di antara berbagai lapisan. Akibatnya, dalam skala yang luas,

terjadi pertukaran momentum di antara komponen fluida yang berbeda. Nilai bilangan Reynolds dalam aliran ini lebih dari 4000 ($Re > 4000$).

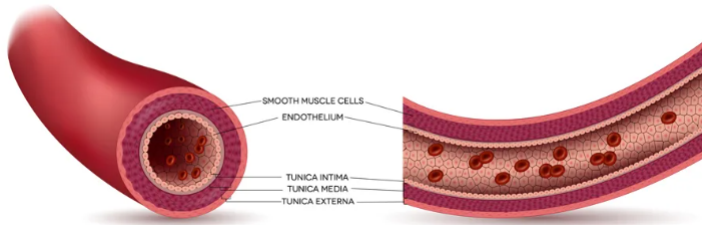
D. Pemodelan Matematika

Model matematika merupakan representasi dari suatu permasalahan nyata dalam bentuk struktur matematis untuk memudahkan proses analisis dan pemecahan masalah (Widowati & Sutimin, 2007). Salah satu pendekatan yang digunakan untuk merepresentasikan sistem kompleks ke dalam model matematika disebut sebagai pemodelan matematika (Aprilia & Panjaitan, 2022). Pemodelan matematika juga diaplikasikan dalam berbagai disiplin ilmu, salah satunya adalah fisika yang memanfaatkan model matematis untuk menjelaskan hukum-hukum alam (Asim et al., 2023). Dalam bidang fisika terdapat sebuah pembahasan yaitu fluida.

E. Media Berpori

Aliran darah di dalam tubuh dipengaruhi oleh kerja jantung serta pembuluh darah yang berperan dalam mengedarkan darah ke seluruh tubuh (Kusyani et al., 2024). Pembuluh darah terbagi menjadi tiga jenis yaitu arteri, vena, dan kapiler. Arteri membawa darah yang kaya oksigen ke seluruh tubuh; vena merupakan pembuluh darah yang mengalirkan darah yang kaya karbondioksida dari tubuh ke

jantung ; dan kapiler merupakan pembuluh darah terkecil yang berasal dari percabangan arterioli atau arteri terkecil (Widowati & Rinata, 2020). Arteri mempunyai dinding yang kuat dan elastis yang tersusun dari 3 lapisan yaitu Tunika intima/Interna, Tunika media, Tunika eksterna/adventisia (Sa'adah, 2018). Tunika intima adalah lapisan bagian dalam pembuluh yang terdapat endothelium berpori yang bersifat sebagai penghalang selektif untuk zat yang akan memasuki atau meninggalkan aliran darah. Setelah lapisan bagian dalam terdapat lapisan bagian tengah yang terdiri dari otot polos dan jaringan elastis, atau yang disebut dengan tunika media. Lapisan paling luar dikenal sebagai tunika eksterna, yang tersusun dari jaringan ikat yang longgar. Gambar 4.3 menunjukkan simulasi pembuluh darah.

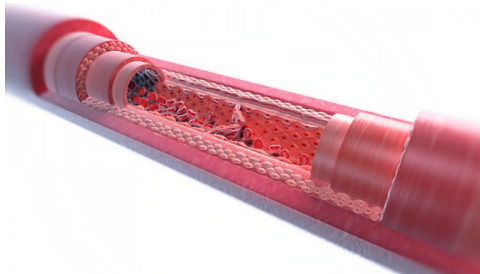


Gambar 2.1: Pembuluh Darah

Sumber: researchoutreach.org

Darah menunjukkan sifat fluida non-Newtonian karena viskositasnya berubah tergantung pada laju geser. Sifat darah yang tidak mengikuti hukum fluida Newtonian disebabkan oleh keberadaan partikel seperti sel darah

merah, putih, dan trombosit (Fatahian, E., et al, 2018). Aliran darah pada pembuluh darah besar dengan laju geser yang tinggi menyerupai fluida Newtonian, sedangkan pada pembuluh darah kecil dengan laju geser menyerupai fluida non-Newtonian (Jalili et al, 2023). Gambar 2.2 menunjukkan aliran darah yang melewati arteri berpori. Media berpori merupakan zat dengan permukaan keras yang dipenuhi pori-pori, sehingga fluida dapat mengalir melalui pori-pori tersebut (Wajihah & Sankar , 2021). Ketika darah yang mengalir secara laminar, maka kecepatan aliran pada bagian tengah dan dinding arteri akan setara (Irawati, L., 2010)



Gambar 2.2: Aliran Darah Melewati Arteri Berpori

Sumber: kerajaanbiologi.com

F. Porositas

Salah satu karakteristik penting dari media berpori adalah porositas, yaitu kemampuan benda untuk menyimpan atau menyerap fluida melalui ruang-ruang kosong yang terbentuk di antara partikel-partikel padatnya (Kemon & Laitupa, 2022). Porositas suatu benda memiliki

keterkaitan erat dengan permeabilitas, yaitu kemampuan suatu media berpori untuk mengalirkan fluida melalui pori-pori yang saling terhubung satu sama lain (Wahyudi et al., 2022).

Perilaku fluida dalam media berpori pertama kali dikenalkan oleh Henry Darcy pada tahun 1856. Oleh karena itu persamaan fundamental yang menggambarkan aliran fluida melalui media berpori dikenal sebagai hukum Darcy (Nield & Bejan, 2019). Aliran fluida dalam media berpori memiliki peranan penting dalam mengkaji interaksi antara aliran fluida dan media berpori (Elsanoose et al., 2022). Berdasarkan hukum Darcy, terdapat hubungan linear antara gradien tekanan dan kecepatan aliran fluida dalam media berpori atau dapat ditulis sebagai berikut (Elsanoose et al., 2022).

$$\nabla P = -\frac{\mu}{K^*} \mathbf{V}$$

dengan

P = tekanan (N/m^2)

μ = viskositas mutlak atau dinamik fluida ($N.s/m^2$)

K^* = permeabilitas

$\mathbf{V}$ = kecepatan Darcy (m/s)

G. Magnetohidrodinamika (MHD)

Magnetodrodinamika (MHD) gabungan dari kata magneto yang artinya medan magnet, hidro yang artinya

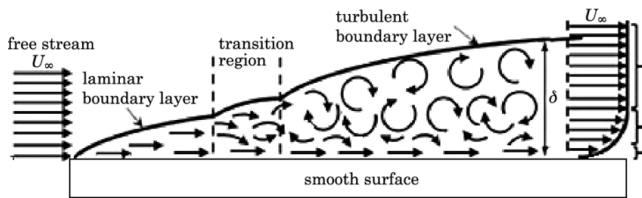
cairan atau fluida, dan dinamika yang artinya pergerakan (Mayagrafinda & Widodo, 2022). Magnetodrodinamika merupakan cabang ilmu yang membahas perilaku aliran fluida konduktif listrik yang terpengaruh oleh adanya medan magnet yang diinduksikan dalam fluida tersebut (Pamela et al., 2023). Contoh fluida yang dapat dikonduksi adalah plasma, logam cair, dan air garam atau elektrolit. MHD memiliki prinsip dasar yang menyatakan bahwa medan magnet dapat menginduksi arus listrik ketika melintasi fluida konduktif yang sedang bergerak, yang kemudian menghasilkan gaya Lorentz pada fluida serta menyebabkan perubahan terhadap arah dan kekuatan medan magnet itu sendiri (Sahaya et al., 2016).

H. Konveksi

Konveksi merupakan proses perpindahan panas yang terjadi antara permukaan benda padat dan fluida yang bergerak di sekitarnya (Riupassa & Allo, 2019). Dalam fluida, mekanisme utama perpindahan panas berlangsung melalui konveksi. Konveksi terbagi menjadi dua jenis, yaitu alami dan paksa. Konveksi alami dipicu oleh perbedaan suhu yang menyebabkan perbedaan massa jenis, sehingga fluida bergerak tanpa bantuan gaya luar. Sementara itu, konveksi paksa terjadi ketika aliran fluida digerakkan secara mekanis, seperti melalui kipas atau pompa (Laila, 2016).

I. Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

Lapisan batas atau *boundary layer* merupakan lapisan tipis dari permukaan padat terbatas di area sempit di dekat permukaan yang tidak seragam dari suatu objek dengan gradien kecepatan, dan efeknya dipengaruhi oleh tegangan geser akibat adanya viskositas (Salamba & Iskandar, 2020). Pengaruh aliran tersebut dinyatakan dengan tegangan geser (*shear stress*), yang disebabkan oleh gradien kecepatan yang sangat besar (Hariyadi, 2017). Menurut Naibaho (2020), lapisan batas (*boundary layer*) terdiri dari 3 bagian yakni : Lapisan batas laminar, lapisan batas transisi dan lapisan batas turbulen.



Gambar 2.3: Klasifikasi Lapisan Batas

Sumber: Velocity distribution in the boundary layer – ResearchGate

Pada Gambar 2.3, terlihat bahwa aliran fluida laminar dalam lapisan batas bergerak secara perlahan di antara lapisan-lapisannya. Dengan kata lain, garis-garis aliran pada lapisan batas laminar bersifat sejajar satu sama lain. Namun, dalam lapisan batas turbulen, gerakan acak partikel fluida menyebabkan perubahan kecepatan baik dalam arah sejajar maupun tegak lurus terhadap

aliran. Perubahan kecepatan tegak lurus terhadap aliran menyebabkan perpindahan massa dan momentum yang signifikan antara lapisan-lapisan fluida.

J. Hukum-Hukum Fisika yang Berkaitan dengan Fluida Casson

Pemodelan matematika berbasis metode komputasi pada umumnya didasarkan pada persamaan dasar dalam dinamika fluida, yaitu persamaan kontinuitas, momentum, dan energi. Ketiga persamaan ini merepresentasikan prinsip-prinsip dasar fisika (Norasia et al., 2022)

a. Hukum Kekekalan Massa

Hukum kekekalan massa merupakan prinsip dalam mekanika yang menyatakan bahwa massa suatu sistem yang tidak berubah-ubah atau konstan, dapat ditulis dengan persamaan sebagai berikut:

$$\frac{DM_{\text{sys}}}{Dt} = 0 \quad (2.4)$$

dengan

$$\begin{aligned} M_{\text{sys}} &= \text{massa suatu sistem (kg)} \\ \frac{DM_{\text{sys}}}{Dt} &= \text{laju perubahan massa} \\ &\quad \text{suatu sistem terhadap waktu} \end{aligned}$$

b. Hukum Kekekalan Momentum

Hukum kekekalan momentum menyatakan bahwa

jika terdapat gaya total yang mempengaruhi sebuah sistem, momentum dalam sistem tersebut akan berubah sesuai dengan gaya yang diberikan, dan dapat dinyatakan dengan persamaan berikut.

$$\sum F = m \cdot a = m \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(mV)_{sys} \quad (2.5)$$

dengan

F = gaya (N)

m = massa (kg)

a = percepatan (m/s^2)

$\frac{dV}{dt}$ = laju perubahan kecepatan terhadap waktu

c. Hukum Kekekalan Energi

Hukum kekekalan energi, yang juga dikenal sebagai hukum pertama termodinamika, menyatakan bahwa perubahan energi total dalam suatu sistem hanya dapat berubah jika ada energi yang masuk ke sistem berupa kalor atau energi yang keluar dari sistem dalam bentuk usaha, dapat ditulis dengan persamaan sebagai berikut:

$$\Delta E = \Delta Q - \Delta W \quad (2.6)$$

dengan

ΔE = total perubahan energi

ΔQ = total perubahan panas

ΔW = total perubahan usaha

K. Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial (PDP) dengan menerapkan pendekatan Deret Taylor (Arifin, 2021). Persamaan diferensial parsial dapat diturunkan melalui Deret Taylor sebagai berikut (Palupi et al., 2018).

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots \quad (2.7)$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{1!} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots \quad (2.8)$$

Berdasarkan pendekatan Deret Taylor, terdapat tiga metode beda hingga yang umum digunakan untuk menyelesaikan solusi turunan pertama dalam persamaan diferensial parsial, yakni beda maju, beda mundur, dan beda pusat. Dapat dituliskan sebagai berikut (Tukan et. al., 2024):

1. Pendekatan Beda Maju

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad (2.9)$$

2. Pendekatan Beda Mundur

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - h)}{h} \quad (2.10)$$

3. Pendekatan Beda Pusat

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (2.11)$$

L. Metode *Keller-Box*

Keller mengembangkan metode *Keller-Box*. Metode ini telah terbukti sangat akurat untuk masalah parabola dan menjadi metode umum yang paling fleksibel (Ramya et al., 2018). Salah satu cara yang paling populer untuk menyelesaikan masalah nilai batas adalah dengan metode ini. (Jamshed & Nisar, 2021). Berikut ini adalah tahapan penyelesaian dengan menggunakan metode *Keller-Box*: (Al-Shibani et al., 2012).

1. Tahapan yang pertama yaitu persamaan diferensial yang berorde tinggi diubah menjadi orde satu. Berikut diberikan contoh persamaan diferensial orde dua yaitu persamaan difusi yang diselesaikan menggunakan metode *Keller-box*, sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.12)$$

dengan

u = kecepatan difusi

α = koefisien difusi termal

t = waktu

x = posisi

dengan memisalkan

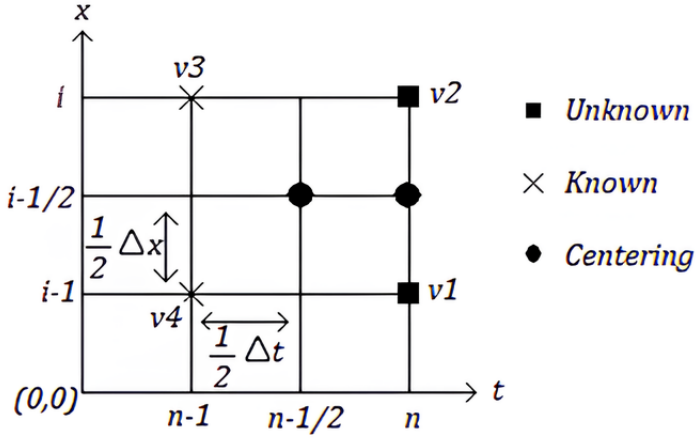
$$j = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.13)$$

Maka persamaan (2.12) bisa dinyatakan sebagai:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial j}{\partial x} \quad (2.14)$$

2. Tahap berikutnya adalah mendiskritisasikan model dengan menerapkan metode beda hingga pusat. Merujuk pada Gambar 2.4, perbedaan pusat dalam ruang diaplikasikan pada persamaan (2.13) di titik $(n, i - \frac{1}{2})$ pada segmen $v_1 v_2$, sedangkan untuk persamaan (2.14) dilakukan diskritisasi menggunakan perbedaan pusat dalam ruang dan waktu di titik $(n - \frac{1}{2}, i - \frac{1}{2})$ dari daerah $v_1 v_2 v_3 v_4$, sehingga menghasilkan bentuk berikut.

$$\begin{aligned} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x_i} &= j_{i-\frac{1}{2}}^n \\ \frac{u_{i-\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta t_n} &= \alpha \frac{j_i^{n-\frac{1}{2}} - j_{i-1}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} \end{aligned} \quad (2.15)$$



Gambar 2.4: Metode Keller-Box

dengan menggunakan bentuk persamaan berikut.

$$\begin{aligned} j_{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(j_n + j_{n-1}) \\ t_{j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(t_i + t_{i-1}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

maka persamaan (2.15) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x_i} &= \frac{j_i^n + j_{i-1}^n}{2} \\ \frac{u_{i-\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta t_n} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha(j_i^n - j_{i-1}^n)}{\Delta x_i} + \frac{\alpha(j_i^{n-1} - j_{i-1}^{n-1})}{\Delta x_i} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

3. Setelah proses diskritisasi selesai dilakukan, tahap

selanjutnya adalah menerapkan linearisasi dengan metode Newton. Adapun bentuk iterasi dari metode Newton dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_j^{(i+1)} &= f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} \\
 h_j^{(i+1)} &= h_j^{(i)} + \delta h_j^{(i)} \\
 g_j^{(i+1)} &= g_j^{(i)} + \delta g_j^{(i)} \\
 s_j^{(i+1)} &= s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)} \\
 u_j^{(i+1)} &= u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

dengan (i) merupakan iterasi dimana $1 \leq i \leq np + 1$ dan np merupakan partisi pada sumbu y . Dengan memisahkan variabel delta dan mengabaikan ordo yang lebih tinggi, maka diperoleh persamaan yang bersifat linier.

4. Metode eliminasi blok merupakan langkah akhir yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang telah dibentuk, di mana sistem tersebut direpresentasikan dalam bentuk matriks tridiagonal dengan setiap elemennya berupa matriks blok.

- (a) Mengidentifikasi setiap elemen matriks tridiagonal.
- (b) Metode dekomposisi LU digunakan untuk faktorisasi matriks tridiagonal.

M. Penelitian Terdahulu

Beberapa penelitian sebelumnya yang relevan dan dapat dijadikan bahan analisis dalam penelitian ini antara lain:

1. Pada tahun 2021, Eldabe et al melakukan penelitian yang berjudul "*Elegtromagnetic Steady Motion of Casson Fluid with Heat and Mass Transfer Through Porous Medium Past a Shrinking Surface*". Penelitian ini mengkaji aliran fluida Casson dengan transfer panas dan massa melalui media berpori di sepanjang permukaan yang menyusut. Penelitian ini mempertimbangkan efek pembangkitan panas, disipasi viskos, difusi termal, dan reaksi kimia. Model matematis yang digunakan dijelaskan dalam persamaan PDE yang kemudian diubah menjadi ODE dan diselesaikan secara numerik. Hasil penelitian menunjukkan pengaruh parameter fisik terhadap distribusi kecepatan, suhu, dan konsentrasi, yang diilustrasikan secara grafis. Persamaan penelitian Eldabe et al dengan penelitian ini terletak pada penggunaan fluida Casson dalam media berpori serta pengaruh medan magnet terhadap kecepatan dan temperatur. Perbedaannya, penelitian ini hanya berfokus pada kecepatan dan temperatur dengan mempertimbangkan porositas, medan magnet, konveksi, dan parameter Casson, tanpa melibatkan transfer massa atau efek fisis lainnya.

2. Pada tahun 2023, Endalew dan Sarkar melakukan penelitian yang berjudul "*Modeling and Analysis of Unsteady Casson Fluid Flow due to an Exponentially Accelerating Plate with Thermal and Solutal Convective Boundary Conditions*". Penelitian ini membahas aliran fluida Casson akibat percepatan eksponensial pelat miring dengan mempertimbangkan konveksi termal dan solutal, serta kondisi batas. Metode transformasi Laplace digunakan untuk memperoleh solusi analitik yang divalidasi dengan MATLAB. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kemiringan pelat menurunkan kecepatan fluida, sedangkan gaya apung dan radiasi termal meningkatkan kecepatan dan temperatur. Parameter Casson meningkatkan kecepatan dan mengurangi gesekan lokal. Selain itu, koefisien Prandtl dan transfer massa berpengaruh signifikan terhadap tegangan geser, temperatur, serta angka Nusselt dan Sherwood. Persamaan penelitian Endalew dan Sarkar dengan penelitian ini terletak pada penggunaan profil kecepatan dan temperatur fluida Casson dengan pengaruh konveksi dan parameter Casson. Sedangkan perbedaannya, penelitian ini tidak mempertimbangkan percepatan pelat, konveksi solutal, radiasi, maupun transfer massa, serta difokuskan pada aliran fluida Casson melalui media berpori secara numerik.
3. Pada tahun 2021, Ramzan et al melakukan

penelitian yang berjudul “*Unsteady free convective magnetohydrodynamics flow of a Casson fluid through a channel with double diffusion and ramp temperature and concentration*”. Penelitian ini membahas aliran konveksi bebas magnetohidrodinamika (MHD) umum dari fluida Casson yang mengalir melalui saluran berpori di bawah pengaruh medan magnet. Dengan mempertimbangkan efek gradien temperatur dan konsentrasi. Penelitian ini bertujuan untuk memberikan solusi eksak untuk efek Dufour pada aliran MHD fluida Casson fraksional dan menganalisis berbagai parameter seperti angka Prandtl, angka Schmidt, rasio buoyancy, generasi panas, dan porositas mempengaruhi profil kecepatan, temperatur, dan konsentrasi fluida. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa kondisi isothermal menghasilkan kecepatan dan temperatur yang lebih tinggi dibandingkan kondisi dinding yang dirampungkan. Penggunaan derivatif fraksional menunjukkan hasil konsentrasi, temperatur, dan kecepatan yang lebih rendah dibandingkan dengan derivatif biasa, yang mengindikasikan efektivitas derivatif fraksional dalam mengontrol parameter-parameter tersebut. Persamaan penelitian Ramzan et al dengan penelitian ini terletak pada penggunaan fluida Casson dalam media berpori, serta pengaruh medan magnet, porositas, dan konveksi terhadap profil kecepatan

dan temperatur. Adapun perbedaannya, penelitian ini tidak menggunakan pendekatan derivatif fraksional, serta tidak mempertimbangkan efek Dufour maupun transfer massa.

4. Pada tahun 2022, Das dan Dey melakukan penelitian yang berjudul "*Casson Fluid Flow Past a Shrinking Surface with Heat and Mass Transfers*". Penelitian ini membahas aliran fluida Casson dengan transfer panas dan massa melalui media berpori di atas permukaan yang menyusut dengan pengaruh medan magnet, radiasi termal, dan hisap atau tiupan. Penelitian ini menunjukkan bahwa parameter magnetik meningkatkan gerakan fluida, sedangkan porositas meningkatkan profil kecepatan. Angka Prandtl menurunkan temperatur, dan parameter fluida Casson mempengaruhi temperatur dan konsentrasi yang membantu pengembangan kecepatan fluida. Angka Schmidt mengurangi profil konsentrasi, dan proses hisap meningkatkan kecepatan fluida. Persamaan penelitian Das dan Dey dengan penelitian ini terletak pada penggunaan fluida Casson dalam media berpori di atas permukaan menyusut, serta pengaruh medan magnet terhadap profil kecepatan dan temperatur. Perbedaannya, penelitian ini tidak melibatkan efek transfer massa, radiasi termal, hisap/tiupan, maupun pengaruh angka Schmidt.
5. Pada tahun 2021, Ganga et al melakukan

penelitian yang berjudul "*Three Dimensional MHD Casson Fluid Flow Over a Stretching Surface with Variable Thermal Conductivity*". Penelitian ini mengkaji model matematika aliran lapisan batas magnetohidrodinamika tiga dimensi (MHD) dari fluida Casson di atas permukaan yang meregang, dengan konduktivitas termal variabel dan pembangkitan panas. Persamaan diselesaikan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde keempat dengan teknik tembakan. Penelitian ini menyimpulkan bahwa parameter Hartman dan Casson mengurangi kecepatan aliran fluida dalam lapisan batas. Parameter pembangkitan panas dan konduktivitas termal meningkatkan temperatur, sedangkan rasio parameter dan parameter porositas mengurangi temperatur. Persamaan penelitian Ganga et al dengan penelitian ini terletak pada penggunaan fluida Casson dalam media berpori serta pengaruh medan magnet terhadap profil kecepatan dan temperatur. Sementara itu, perbedaannya terletak pada pendekatan tiga dimensi dengan permukaan peregangan serta keterlibatan konduktivitas termal variabel dan pembangkitan panas, yang tidak menjadi fokus dalam penelitian ini.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

A. Jenis Penelitian

Jenis penelitian ini adalah studi literatur tentang pemodelan matematika. Penelitian ini dilakukan dengan mengamati, mempelajari, menggali dan mengidentifikasi semua informasi yang terkandung dalam literatur, seperti membaca, buku referensi, dan temuan penelitian lainnya.

B. Tahap Penelitian

Beberapa tahapan yang dapat diimplementasikan pada penelitian ini dapat dijelaskan berikut:

1. Studi Literatur

Pada tahap ini, model matematika yang menggambarkan aliran fluida Casson melalui media berpori dianalisis, dengan profil kecepatan dan temperatur yang dipengaruhi oleh berbagai parameter. Setiap model matematika memiliki sifat yang unik, sehingga penelitian mendalam penting dilakukan sebelum merancang model yang sesuai untuk penelitian.

2. Penyelesaian Model Matematika

Dalam tahap ini, penyelesaian model matematika dilakukan melalui serangkaian langkah penting yang diambil oleh peneliti, antara lain:

- (a) Penelitian ini memanfaatkan beberapa persamaan dasar untuk menyusun model matematika aliran fluida Casson melalui media berpori. Persamaan yang digunakan meliputi persamaan kontinuitas, persamaan momentum, serta persamaan energi.
- (b) Penentuan kondisi batas yang sesuai untuk persamaan mendasar dari model yang dievaluasi, terutama kondisi batas yang sesuai yang terkait dengan aliran fluida Casson dalam media berpori.
- (c) Selanjutnya, persamaan dasar berdimensi disederhanakan dengan mensubstitusikan variabel tak berdimensi, sehingga diperoleh bentuk persamaan tak berdimensi yang lebih sederhana.
 - i. Persamaan tak berdimensi disederhanakan melalui penerapan pendekatan lapisan batas, sehingga menghasilkan bentuk persamaan yang lebih ringkas.
 - ii. Selanjutnya, persamaan tak berdimensi diubah menjadi persamaan similaritas dengan menggunakan fungsi aliran, yang dikenal sebagai fungsi alir.

- iii. Setelah melalui proses tersebut, diperoleh bentuk persamaan similaritas yang diaplikasikan pada aliran fluida Casson melalui media berpori.

3. Penyelesaian Numerik

Pada langkah ini, solusi numerik dilakukan dengan menggunakan metode *Keller-Box*. Teknik ini digunakan untuk memecahkan model matematika yang terkait dengan masalah numerik yang berkaitan dengan aliran fluida non-Newtonian, khususnya aliran fluida Casson melalui media berpori.

4. Simulasi Numerik

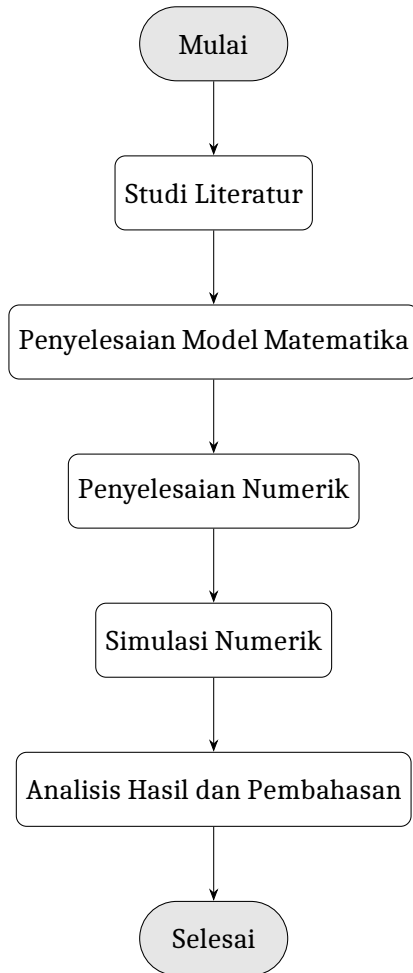
Algoritma MATLAB digunakan untuk mensimulasikan model matematika aliran fluida Casson dalam media berpori. Setelah program dibuat dan dijalankan, input harus dimasukkan dan hasilnya akan dianalisis. Selanjutnya, hasil output program akan dibandingkan untuk memastikan validasi model matematika yang dihasilkan. Simulasi akan dilakukan dengan mengubah nilai beberapa variabel dan parameter input melalui program yang dikembangkan.

5. Analisis Hasil dan Pembahasan

Analisis dilakukan terhadap hasil simulasi untuk menemukan solusi numerik paling baik yang berkaitan dengan aliran fluida Casson di dalam media berpori,

yang meliputi profil kecepatan dan temperatur. Dari evaluasi tersebut, akan ditarik kesimpulan terkait permasalahan yang dikaji.

C. Alir Penelitian



BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Persamaan Pembangun Dimensional

Pada bab ini, peneliti akan menjelaskan persamaan dasar yang digunakan dalam membangun model matematika untuk aliran fluida Casson melalui media berpori, yang mempengaruhi profil kecepatan dan temperatur. Pemodelan ini didasarkan pada persamaan dimensional sebagai landasannya. Berikut disajikan persamaan yang dimaksud.

1. Persamaan Kontinuitas

Persamaan kontinuitas disusun berdasarkan prinsip hukum kekekalan massa, yang dapat dijelaskan sebagai berikut.

$$m = \text{konstan} \rightarrow \frac{dM_{sys}}{dt} = 0 \quad (4.1)$$

dengan M dalam system dinyatakan sebagai berikut

$$M_{sys} = \int_{sys} \rho_f d\forall \quad (4.2)$$

dimana

M_{sys} = massa suatu sistem

ρ_f = massa jenis fluida

$\forall$ = volume fluida

Kemudian substitusi persamaan (4.2) ke dalam persamaan (4.1) diperoleh.

$$\frac{dM_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{sys} \rho_f d\forall = 0 \quad (4.3)$$

Menurut teori transportasi Reynolds, persamaan berikut dapat digunakan untuk menunjukkan laju perubahan massa suatu sistem terhadap waktu.

$$\frac{dM_{sys}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho_f d\forall + \int_{cs} \rho_f \mathbf{V} \cdot \hat{n} dV \quad (4.4)$$

atau

$$\frac{d}{dt} \int_{sys} \rho_f d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho_f d\forall + \int_{cs} \rho_f \mathbf{V} \cdot \hat{n} dV \quad (4.5)$$

dengan

cv = *control volume* (volume kendali, $d\forall$)

cs = *control surface* (dV)

ρ_f = massa jenis fluida

$\mathbf{V}$ = volume kendali pada kecepatan fluida

$\hat{n}$ = vektor normal keluar masuk dari volume kendali

dV = luas bidang pada permukaan fluida

$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho_f d\forall$ = jumlah besaran dalam volume kendali

$\int_{cs} \rho_f \mathbf{V} \cdot \hat{n} dV$ = jumlah besaran yang masuk dan keluar dari
bidang permukaan kendali

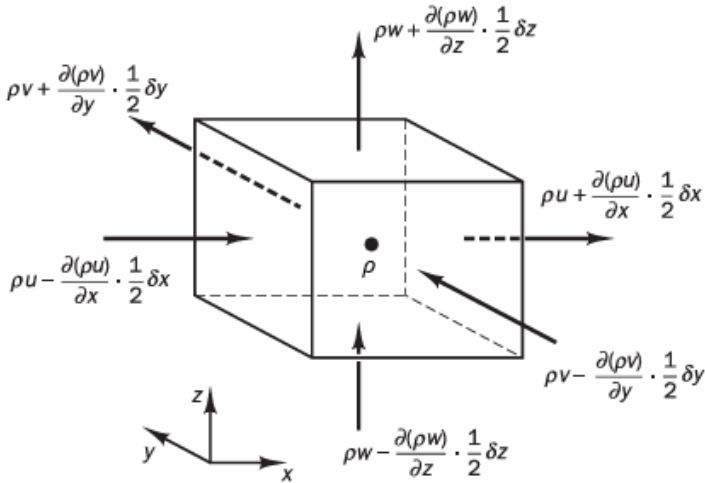
dengan mensubstitusikan persamaan (4.5) ke persamaan (4.3) maka didapatkan.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho_f dV + \int_{cs} \rho_f \mathbf{V} \cdot \hat{n} dV = 0 \quad (4.6)$$

dimana

$$\int_{cs} \rho_f \mathbf{V} \hat{n} dV = \sum m_{keluar} - \sum m_{masuk} \quad (4.7)$$

Dengan mengambil elemen dari fluida yang berbentuk kubus dimana ρ sebagai pusat kubus yang bergerak ke arah u, v, z dengan dimensi $\delta x, \delta y, \delta z$, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.1 berikut.



Gambar 4.1: Aliran Fluida yang Masuk dan yang Keluar Volume Kendali

Sumber: Versteeg & Malalasekera, *An Introduction to CFD*, 2nd ed.

Jumlah aliran fluida sepanjang sumbu x diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \sum m_{\text{masuk}} - \sum m_{\text{keluar}} &= \left(\rho_f u + \frac{\partial}{\partial x} \rho_f u \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z \\
 &\quad - \left(\rho_f u - \frac{\partial}{\partial x} \rho_f u \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \rho_f u \delta x \delta y \delta z \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Jumlah aliran fluida pada sumbu y dapat dituliskan sebagai berikut ini:

$$\begin{aligned}
 \sum m_{\text{masuk}} - \sum m_{\text{keluar}} &= \left(\rho_f v + \frac{\partial}{\partial y} \rho_f v \frac{\delta y}{2} \right) \delta x \delta z \\
 &\quad - \left(\rho_f v - \frac{\partial}{\partial y} \rho_f v \frac{\delta y}{2} \right) \delta x \delta z \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \rho_f v \delta x \delta y \delta z \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Dan jumlah aliran pada sumbu z dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \sum m_{\text{masuk}} - \sum m_{\text{keluar}} &= \left(\rho_f w + \frac{\partial}{\partial z} \rho_f w \frac{\delta z}{2} \right) \delta x \delta y \\
 &\quad - \left(\rho_f w - \frac{\partial}{\partial z} \rho_f w \frac{\delta z}{2} \right) \delta x \delta y \\
 &= \frac{\partial}{\partial z} \rho_f w \delta x \delta y \delta z \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Maka didapatkan total aliran fluida dari persamaan (4.8),

persamaan (4.9), dan persamaan (4.10) sebagai berikut.

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} \delta x \delta y \delta z + \left[\frac{\partial}{\partial x} \rho_f u + \frac{\partial}{\partial y} \rho_f v + \frac{\partial}{\partial z} \rho_f w \right] \delta x \delta y \delta z = 0 \quad (4.11)$$

Kemudian persamaan (4.11) dikalikan dengan $\frac{1}{\delta x \delta y \delta z}$, maka diperoleh:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho_f u + \frac{\partial}{\partial y} \rho_f v + \frac{\partial}{\partial z} \rho_f w = 0 \quad (4.12)$$

atau ditulis dalam notasi vektor berikut.

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{V}) = 0 \quad (4.13)$$

Penelitian ini mengasumsikan bahwa aliran fluida bersifat tak termampatkan (*incompressible*), sehingga perubahan massa jenis fluida terhadap waktu sangat kecil ($\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0$). Dengan demikian, persamaan (4.13) dapat disederhanakan menjadi:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (4.14)$$

atau dapat dituliskan

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (4.15)$$

Dengan asumsi bahwa penelitian ini dilakukan hanya dalam dua dimensi, $\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}$ dapat diabaikan, sehingga pada

persamaan (4.15) dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.16)$$

2. Persamaan Momentum

Persamaan momentum dibangun dari hukum kedua Newton, yang menyatakan sebagai berikut.

$$\sum F = m \cdot a = m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V})_{sys} \quad (4.17)$$

dengan $m\mathbf{V}_{sys}$ adalah massa yang bergerak dengan kecepatan dalam suatu sistem dinyatakan dalam persamaan sebagai berikut:

$$m\mathbf{V}_{sys} = \int_{sys} \mathbf{V} dM_{sys} = \int_{sys} \rho_f \mathbf{V} d\forall \quad (4.18)$$

Substitusikan persamaan (4.18) ke dalam persamaan (4.17), diperoleh :

$$\sum F = \frac{d}{dt} \int_{sys} \rho_f \mathbf{V} d\forall \quad (4.19)$$

Menurut teorema pengangkutan Reynolds, perubahan momentum suatu sistem dari waktu ke waktu dapat dijelaskan dengan cara berikut.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho_f \mathbf{V} d\forall + \int_{cs} \rho_f \mathbf{V} \cdot (\mathbf{V} \hat{n}) dV = \sum F \quad (4.20)$$

Persamaan (4.20) dapat dinyatakan dengan teorema

Divergensi sebagai berikut.

$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla \mathbf{V}) \right) \delta x \delta y \delta z = \sum F \quad (4.21)$$

Di mana $\sum F$ merupakan kumpulan gaya yang terdapat dalam fluida. Gaya-gaya yang diterapkan dalam penelitian ini untuk fluida Casson meliputi gaya permukaan (F_p), gaya magnetik (F_m), dan gaya gravitasi (F_g), yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

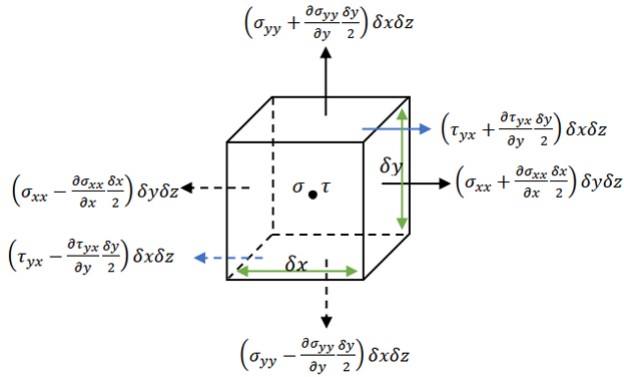
$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla \mathbf{V}) \right) \delta x \delta y \delta z = F_p - F_m + F_g \quad (4.22)$$

Pada penelitian ini diasumsikan hanya menggunakan dua arah sumbu yakni sumbu x dan sumbu y , maka persamaan (4.22) adalah:

$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla \mathbf{V}) \right) \delta x \delta y = F_p - F_m + F_g \quad (4.23)$$

a) Gaya Permukaan

Gaya permukaan adalah gaya yang dibentuk oleh tekanan dan viskositas. Seperti yang ditunjukkan pada gambar (4.2), gaya permukaan dapat ditinjau dengan mengambil sebagian elemen dari fluida berbentuk kubus dengan pusat gaya pada (σ dan τ), dimana σ sebagai tegangan normal dan τ sebagai tegangan geser.



Gambar 4.2: Gaya Permukaan Elemen Fluida

Sumber: aquaenergyexpo.com

Gaya permukaan pada sumbu- x dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$F_{px} = \frac{\partial(\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yx})}{\partial y}$$

Sedangkan gaya permukaan pada sumbu- y dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$F_{py} = \frac{\partial(\sigma_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{xy})}{\partial x}$$

Dengan demikian, dapat dituliskan gaya permukaan (F_p) total pada sumbu x dan y sebagai berikut:

$$F_p = F_{pxi} + F_{pyi} \quad (4.24)$$

$$F_p = \left(\frac{\partial(\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yx})}{\partial y} \right) i + \left(\frac{\partial(\sigma_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{xy})}{\partial x} \right) j \quad (4.25)$$

Penelitian ini mengasumsikan bahwa fluida Casson yang digunakan bersifat tidak dapat dimampatkan (*incompressible*) dan sesuai dengan sifat fluida casson yaitu fluida tidak dapat mengalir sampai tegangan gesernya melebihi tegangan luluh. Didefinisikan fluida Casson yang tidak dapat dimampatkan (Eldabe et al., 2021).

$$\tau_{ij} = \begin{cases} 2 \left(k_c + \frac{\tau_0}{\sqrt{2\pi_c}} \right) e_{ij}, & \text{jika } \pi > \pi_c \\ 2 \left(k_c + \frac{\tau_0}{\sqrt{2\pi_c}} \right) e_{ij}, & \text{jika } \pi < \pi_c \end{cases} \quad (4.26)$$

dengan

τ_{ij} = komponen tegangan geser fluida Casson

k_c = koefisien viskositas fluida Casson

τ_0 = tegangan luluh fluida Casson

π_c = nilai ambang dari tegangan geser

Karena fluida Casson tidak dapat mengalir atau mengalami perubahan tetap sampai tegangan yang diterapkan melebihi nilai tertentu, maka digunakan τ_{ij} pada bagian $\pi > \pi_c$. Pada penelitian ini juga

melibatkan parameter Casson yang dilambangkan dengan β , dengan didefinisikan sebagai berikut.

$$\beta = kc + \frac{\sqrt{2\pi c}}{\tau_0}$$

Rumus untuk tegangan normal dan tegangan geser yang terjadi dalam fluida Casson adalah sebagai berikut.

Rumus tegangan Normal dapat dituliskan

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.27)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.28)$$

Dan untuk tegangan Geser dapat dituliskan

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (4.29)$$

Persamaan (4.27)–(4.29) disubstitusikan ke persamaan (4.25), sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned} F_p = & \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-p + 2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(-p + 2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right) \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right) \mathbf{i} + \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right) \mathbf{j} \\
&= \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right) \mathbf{i} + \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + 2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right. \\
&\quad \left. + \left(\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right) \mathbf{j}
\end{aligned}$$

Berikut ini diperoleh total dari tegangan normal dan tegangan geser.

$$\begin{aligned}
&2\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\
&= \left(\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \left(\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right) \\
&\quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\
&= \left(\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \left(\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right) \\
&\quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \\
&= \left(\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right) \nabla^2 \mathbf{V} + \left(\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right) (\nabla^2 \mathbf{V})
\end{aligned}$$

$$= \left(\mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right) \nabla^2 \mathbf{V} \quad (4.30)$$

Sehingga didapatkan gaya permukaan (F_p) pada sumbu x dan y sebagai berikut:

$$F_{px} = -\frac{\partial \rho_f}{\partial x} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.31)$$

$$F_{py} = -\frac{\partial \rho_f}{\partial y} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (4.32)$$

atau dapat ditulis

$$F_p = -\nabla p + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \nabla^2 \mathbf{V} \quad (4.33)$$

b) Gaya Magnetik

Dalam penelitian ini terdapat pengaruh magnetik pada fluida Casson. Interaksi antara medan magnet dan muatan listrik yang bergerak menghasilkan gaya total yang dikenal dengan gaya Lorentz. Karena medan magnet dalam penelitian ini berasal dari media berpori, maka sesuai dengan hukum Darcy digunakan bentuk $\frac{\mu}{K^*} \mathbf{V}$. Maka gaya magnetik tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$F_m = J \times B - \frac{\mu}{K^*} \mathbf{V} \quad (4.34)$$

Di mana J menyatakan kerapatan arus, dan B adalah medan magnet total dalam sistem. Mengacu pada

hukum Ohm, kerapatan arus dapat ditentukan melalui persamaan berikut.

$$J = \sigma(E + \mathbf{V} \times B) \quad (4.35)$$

Dalam hal ini, σ adalah konduktivitas listrik, E adalah medan listrik eksternal, dan $E = 0$ karena aliran fluida tidak memiliki medan listrik eksternal.

Persamaan (4.35) disubstitusikan ke dalam persamaan (4.34) sehingga diperoleh.

$$F_m = \sigma(\mathbf{V} \times B) \times B - \frac{\mu}{K^*} \mathbf{V} \quad (4.36)$$

Langkah selanjutnya adalah mensubstitusikan $B = b + B_0$ ke dalam persamaan (4.36), di mana b merupakan medan magnet yang diinduksi oleh aliran fluida, dan B_0 merupakan medan magnet yang berasal dari media bermagnet. Dengan substitusi tersebut, diperoleh:

$$\begin{aligned} F_m &= \sigma(\mathbf{V} \times (b + B_0)) \times (b + B_0) - \frac{\mu}{K^*} \mathbf{V} \\ &= \sigma(\mathbf{V} \times B_0) \times (B_0) - \frac{\mu}{K^*} (u, v, w) \\ &= \sigma(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 - \frac{\mu}{K^*} (u, v, w) \end{aligned} \quad (4.37)$$

dengan

$$(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u & v & w \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = (vB_0)\mathbf{i} - (uB_0)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \quad (4.38)$$

Kemudian,

$$(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ vB_0 & -uB_0 & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = -uB_0^2\mathbf{i} - vB_0^2\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \quad (4.39)$$

Mensubstitusikan persamaan (4.39) ke dalam persamaan (4.37) sehingga diperoleh gaya magnet berikut ini.

$$\begin{aligned} F_m &= \sigma(-uB_0^2, -vB_0^2, 0) - \frac{\mu_f}{K^*}(u, v, w) \\ F_m &= -\sigma B_0^2 \mathbf{V} - \frac{\mu_f}{K^*} \mathbf{V} \end{aligned} \quad (4.40)$$

c) Gaya Gravitasi

Gaya gravitasi turut berperan dalam mempengaruhi aliran fluida yang melewati media berpori. Gaya gravitasi didefinisikan sebagai berikut.

$$F_g = \rho_f g \quad (4.41)$$

Berdasarkan persamaan (4.33), tekanan p dapat dituliskan sebagai $p = p_y + p_l$, di mana p_y merupakan

tekanan dinamik dan p_l adalah tekanan hidrostatik. Gradien tekanan yang ditimbulkan oleh tekanan hidrostatik dapat dirumuskan secara matematis sebagai berikut.

$$\nabla p_l = \rho_{tak hingga} g \quad (4.42)$$

Di mana $\rho_{tak hingga}$ merepresentasikan kerapatan fluida di luar wilayah lapisan batas. Selanjutnya, bentuk dari $-\nabla p$ pada Persamaan (4.33) dapat dijabarkan sebagai berikut.

$$-\nabla p_y - \nabla p_l = -\nabla p_y - \rho_{tak hingga} g \quad (4.43)$$

Kemudian notasi py ditulis tanpa subskrip ' y '. Setelah itu persamaan (4.33), (4.40), (4.43) disubstitusi ke dalam persamaan (4.23), maka diperoleh persamaan momentum sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \nabla) \right) = & -\nabla p + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \nabla^2 \mathbf{V} \\ & + \sigma B_0^2 \mathbf{V} + \frac{\mu}{K_*} \mathbf{V} - (\rho_f - \rho_{tak hingga}) g \end{aligned} \quad (4.44)$$

dimana $g = (g_x, g_y, 0)$.

Melalui pendekatan Boussinesq, dimana variabel dalam persamaan momentum dapat diabaikan, kecuali massa jenis. Pendekatan ini diterapkan pada persamaan (4.44) untuk menyederhanakan pengaruh

variasi kerapatan akibat perubahan temperatur, yang memicu aliran karena adanya gaya gravitasi dan tekanan hidrostatik. Menurut Leal (1992), selisih maksimum antara $(\bar{T} - T_{tak\ hingga})$ bernilai kecil, sehingga hal ini sesuai dengan prinsip pendekatan Deret Taylor yang dijelaskan berikut:

$$\frac{\rho_{tak\ hingga}}{\rho_f} = 1 + \theta(\bar{T} - T_{tak\ hingga}) + O(\bar{T} - T_{tak\ hingga})^2 \quad (4.45)$$

Dengan mengabaikan suku-suku berorde lebih tinggi, maka persamaan (4.45) dapat disederhanakan menjadi.

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{tak\ hingga}}{\rho_f} &= 1 + \theta(\bar{T} - T_{tak\ hingga}) \\ \frac{\rho_{tak\ hingga} - \rho_f}{\rho_f} &= \theta(\bar{T} - T_{tak\ hingga}) \end{aligned} \quad (4.46)$$

dimana koefisien ekspansi panasnya didefinisikan sebagai berikut.

$$\theta = -\frac{1}{\rho_f} \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial T} \right)_p$$

Dengan menyubstitusikan Persamaan (4.46) ke dalam Persamaan (4.44), diperoleh bentuk akhir dari

persamaan momentum.

$$\begin{aligned} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \nabla) \right) = -\nabla p + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \nabla^2 \mathbf{V} \\ + \sigma B_0^2 \mathbf{V} + \frac{\mu}{K^*} \mathbf{V} - \rho_f \theta (\bar{T} - T_{tak hingga}) g \end{aligned} \quad (4.47)$$

dengan $g = (g_x, g_y, g_z)$

3. Persamaan Energi

Hukum pertama termodinamika digunakan untuk menyusun persamaan energi, yang dinyatakan sebagai berikut.

$$\Delta E = \Delta Q - \Delta W \quad (4.48)$$

Dengan menerapkan teorema transportasi Reynolds pada persamaan (4.48), dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{cv} \rho_f e \, dV + \iint_{cs} \rho_f e \, \mathbf{V} \cdot \hat{n} \, dH = \dot{Q} - \dot{W} \quad (4.49)$$

dimana e adalah energi, $\dot{Q}$ adalah laju perubahan panas melalui permukaan, $\dot{W}$ adalah laju usaha, $\mathbf{V}$ adalah kecepatan fluida, dan H adalah surface.

Dengan menerapkan teorema Divergensi Gauss terhadap integral permukaan dalam persamaan (4.49), maka persamaan tersebut dapat ditransformasikan menjadi

integral volume sebagai berikut

$$\iiint_{cv} \rho_f \frac{\partial e}{\partial t} d\mathcal{V} + \iiint_{cs} \rho_f \nabla \cdot (e \mathbf{V}) d\mathcal{V} = \dot{Q} - \dot{W}$$

atau dapat dituliskan

$$\left(\iiint_{cv} \rho_f \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot e \mathbf{V} \right) d\mathcal{V} \right) = \dot{Q} - \dot{W} \quad (4.50)$$

karena

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (e \mathbf{V}) &= \mathbf{V} \cdot e \nabla + e \nabla \cdot \mathbf{V} \\ &= \mathbf{V} \cdot e \nabla \end{aligned}$$

Dari persamaan (4.14) $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, maka $\nabla \cdot (e \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot e \nabla$.
Sehingga persamaan (4.50) menjadi.

$$\begin{aligned} \left(\iiint_{cv} \rho_f \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla e \right) d\mathcal{V} \right) &= \dot{Q} - \dot{W} \\ \left(\iiint_{cv} \rho_f \frac{De}{Dt} d\mathcal{V} \right) &= \dot{Q} - \dot{W} \\ \iiint_{cv} \rho_f \frac{De}{Dt} d\mathcal{V} &= \dot{Q} - \dot{W} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Laju perubahan energi pada elemen fluida per satuan volume dapat dinyatakan sebagai berikut.

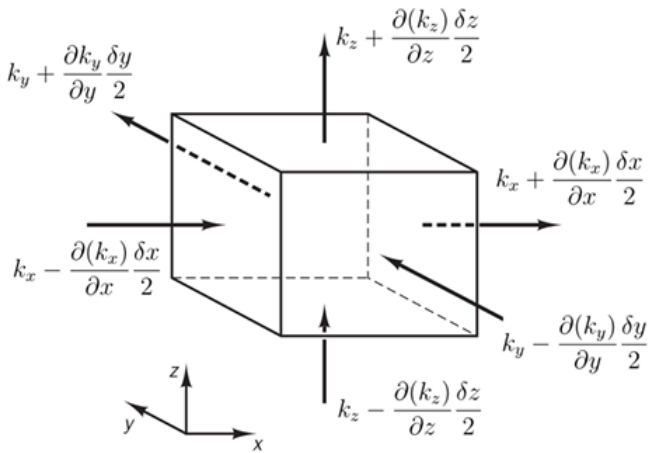
$$\rho_f \frac{De}{Dt} \quad (4.52)$$

Pada penelitian ini, objek dianggap dalam keadaan diam sehingga sistem tidak melakukan kerja ($\dot{W} = 0$), dan dari

asumsi tersebut persamaan (4.51) menjadi.

$$\iiint_{cv} \rho_f \frac{De}{Dt} dV = \dot{Q} \quad (4.53)$$

Misalkan k merupakan fluks panas yang melewati volume kontrol. Ilustrasinya dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 4.3: Komponen Fluks Panas

Sumber: physicsforums.com

Selisih kalor yang masuk dan yang keluar pada arah x , y , dan z dapat digunakan untuk menentukan laju perpindahan

panas keseluruhan yang terjadi dalam partikel fluida berikut.

$$\begin{aligned} \left[\left(k_x + \frac{\partial k_x}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) - \left(k_x - \frac{\partial k_x}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \right] \delta y \delta z &= -\frac{\partial k_x}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \\ \left[\left(k_y + \frac{\partial k_y}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right) - \left(k_y - \frac{\partial k_y}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right) \right] \delta x \delta z &= -\frac{\partial k_y}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \\ \left[\left(k_z + \frac{\partial k_z}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right) - \left(k_z - \frac{\partial k_z}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right) \right] \delta x \delta y &= -\frac{\partial k_z}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh total peningkatan energi akibat kalor per satuan volume.

$$-\left(\frac{\partial k_x}{\partial x} + \frac{\partial k_y}{\partial y} + \frac{\partial k_z}{\partial z} \right) = -\nabla \cdot k \delta x \delta y \delta z \quad (4.54)$$

Hukum Fourier menjelaskan hubungan antara fluks panas dan gradien temperatur lokal dalam proses konduksi, sebagaimana dinyatakan dalam persamaan berikut.

$$k_x = -k_f \frac{\partial T}{\partial x}, \quad k_y = -k_f \frac{\partial T}{\partial y}, \quad k_z = -k_f \frac{\partial T}{\partial z}$$

dimana k_f adalah knduktivitas termal.

dengan menggunakan notasi vektor dapat dituliskan sebagai berikut.

$$k = -k_f \nabla T \quad (4.55)$$

Ketika persamaan (4.55) dimasukkan ke (4.54), maka akan didapatkan bentuk berikut.

$$-\nabla \cdot k \delta x \delta y \delta z = \nabla \cdot (k_f \nabla T) \delta x \delta y \delta z \quad (4.56)$$

Dengan membagi kedua ruas persamaan (4.56) terhadap $\delta x \delta y \delta z$, kemudian disubstitusikan ke persamaan (4.50), maka akan diperoleh.

$$\rho_f \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \mathbf{V}) \right) = \nabla \cdot (k_f \nabla T) \quad (4.57)$$

Berdasarkan Leal (2007), entalpi spesifik h suatu zat dirumuskan sebagai berikut.

$$h = e + \frac{p}{\rho_f} \quad (4.58)$$

dengan h adalah entalpi spesifik, e adalah energi, p adalah tekanan, dan ρ_f adalah massa jenis.

Maka, dengan pendekatan entalpi pada persamaan (4.52), laju perubahan energi dapat dirumuskan berikut.

$$\rho_f \frac{\partial e}{\partial t} = \rho_f \left[\frac{\partial h}{\partial t} - \left(\frac{p}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial t} \right) \right] = \rho_f \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.59)$$

Karena tekanan konstan ($\frac{\partial p}{\partial t}$), maka diperoleh.

$$\rho_f \frac{\partial e}{\partial t} = \rho_f \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.60)$$

Ketika ∂h disubstitusikan dengan $C_p \partial T$ ke dalam persamaan (4.57), diperoleh.

$$\rho_f C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T \mathbf{V}) \right) = \nabla \cdot (k_f \nabla T) \quad (4.61)$$

dimana C_p adalah panas jenis.

dengan

$$-\nabla \cdot (T\mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot (\nabla T) + T(\nabla \cdot \mathbf{V})$$

Karena $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ menurut persamaan kontinuitas, sehingga diperoleh.

$$\nabla \cdot (T\mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot (\nabla T)$$

dengan

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot (\nabla T) &= (u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k} \right) \\ &= \left(u_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ &= \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.62)$$

dan

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (k_f \nabla T) &\approx k_f \nabla \cdot (\nabla T) \\ &= k_f \nabla^2 T \\ &= k_f \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k} \right) \right] \\ &= k_f \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

maka didapatkan

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \left(\frac{k_f}{\rho_f C_p} \right) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (4.63)$$

Berdasarkan definisi difusivitas panas yaitu $\alpha = \frac{k_f}{\rho_f C_p}$, maka persamaan (4.63) menjadi:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (4.64)$$

Karena penelitian ini hanya mencakup dua dimensi, maka persamaan (4.63) dapat diringkas menjadi bentuk berikut.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.65)$$

Adapun persamaan dimensional yang menjadi dasar pembentukan model yaitu .

- Persamaan Kontinuitas Dimensional

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.66)$$

- Persamaan Momentum Dimensional pada Sumbu x

$$\begin{aligned} \rho_f \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right] = & - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \\ & + \sigma B o^2 \bar{u} + \frac{\mu}{K^*} \bar{u} - \rho_f \theta (\bar{T} - T_{tak\ hingga}) g_{\bar{x}} \end{aligned} \quad (4.67)$$

- Persamaan Momentum Dimensional pada Sumbu y

$$\rho_f \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right] = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \sigma B o^2 \bar{v} + \frac{\mu}{K^*} \bar{v} - \rho_f \theta (\bar{T} - T_{tak\ hingga}) g_{\bar{y}} \quad (4.68)$$

- Persamaan Energi Dimensional

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right] = \alpha \left[\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right] \quad (4.69)$$

Dengan kondisi batas yang digunakan adalah:

$$\bar{t} = 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_{tak\ hingga} \text{ untuk setiap } \bar{x}, \bar{y}$$

$$\bar{t} > 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_{tak\ hingga} \text{ pada saat } \bar{y} = 0$$

$$\bar{u} = \bar{u}_e, \bar{T} = T_{tak\ hingga} \text{ saat } \bar{y} \rightarrow \infty$$

Penelitian ini membentuk model matematika aliran fluida Casson dalam media berpori dengan mempertimbangkan pengaruh porositas, medan magnet, konveksi, serta Casson. Kemudian persamaan pembangun dimensional akan ditransformasikan ke dalam bentuk persamaan pembangun non-dimensional berikut.

B. Persamaan Pembangun Non-Dimensional

Untuk memperoleh bentuk non-dimensional dari persamaan aliran fluida Casson dalam media berpori yang dipengaruhi porositas, medan magnet, konveksi,

dan Casson, dilakukan substitusi variabel dan parameter non-dimensional ke dalam persamaan (4.66)-(4.69). Berikut ini adalah bentuk definisi dari variabel-variabel non-dimensional yang digunakan (Pamela et al., 2023):

$$\begin{aligned}\bar{x} &= ax, & \bar{y} &= ayRe^{-\frac{1}{2}}, & \bar{u} &= uU_{\infty}, & \bar{v} &= vU_{\infty}Re^{-\frac{1}{2}} \\ \bar{t} &= \frac{at}{U_{\infty}}, & \bar{p} &= p\rho_f U_{\infty}^2, & \bar{T} - T_{tak\ hingga} &= T(T_n - T_{tak\ hingga})\end{aligned}\quad (4.70)$$

Adapun parameter-parameter non-dimensional ditentukan sebagai berikut (Rafique et al, 2019):

$$\begin{aligned}M &= \frac{a\sigma B_0^2}{\rho_f U_{\infty}}, & \nu &= \frac{\mu}{\rho_f}, & Gr &= \frac{g\theta(T_n - T_{tak\ hingga})\alpha^3}{\nu^2} \\ \lambda &= \frac{Gr}{Re^2}, & \phi &= \frac{a\mu}{\rho_f U_{\infty} K^*}, & Pr &= \frac{\nu}{\alpha}, & Re &= \frac{U_{\infty}\alpha}{\nu}\end{aligned}\quad (4.71)$$

Kemudian percepatan gravitasi didefinisikan oleh (Norasia & Zulaikha, 2019) adalah sebagai berikut:

$$g_{\bar{x}} = -g \sin(x), \quad g_{\bar{y}} = g \cos(x)$$

Setelah variabel dan parameter non-dimensional ditetapkan, langkah selanjutnya adalah mensubstitusikannya ke dalam persamaan pembangunan dimensional berikut

1. Perubahan Persamaan Kontinuitas

Dalam proses ini, variabel non-dimensional dari (4.70) di substitusi ke dalam persamaan kontinuitas dimensional (4.66) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\ \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(ax)} + \frac{\partial(vU_\infty Re^{-\frac{1}{2}})}{\partial(ay Re^{-\frac{1}{2}})} &= 0 \\ \frac{U_\infty}{a} \frac{\partial(u)}{\partial(x)} + \frac{U_\infty Re^{-\frac{1}{2}}}{a Re^{-\frac{1}{2}}} \frac{\partial(v)}{\partial(y)} &= 0 \\ \frac{U_\infty}{a} \frac{\partial(u)}{\partial(x)} + \frac{U_\infty}{a} \frac{\partial(v)}{\partial(y)} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

Oleh karena itu, persamaan kontinuitas dalam bentuk non-dimensional yang diperoleh adalah:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.72)$$

2. Perubahan Persamaan Momentum

a) Persamaan Momentum Pada Sumbu x

Persamaan momentum dimensional pada sumbu x

(4.67) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \rho_f \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right] &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \\ &+ \sigma B o^2 \bar{u} + \frac{\mu}{K^*} \bar{u} - \rho_f \theta (\bar{T} - T_{tak\ hingga}) g_{\bar{x}} \end{aligned}$$

dengan mensubstitusi variabel non-dimensional (4.70) ke dalam persamaan (4.67), maka ruas kiri dari persamaan momentum pada sumbu x berubah menjadi:

$$\begin{aligned} &\rho_f \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \\ &= \rho_f \left(\frac{\partial (u U_{\infty})}{\partial (at U_{\infty}^2)} + u U_{\infty} \frac{\partial (u U_{\infty})}{\partial (ax)} + v U_{\infty} Re^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial (u U_{\infty})}{\partial (ay Re^{-\frac{1}{2}})} \right) \\ &= \rho_f \left(\frac{U_{\infty}^2}{a} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{U_{\infty}^2}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{U_{\infty}^2}{a} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\rho_f U_{\infty}^2}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

ruas kanannya:

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \sigma B o^2 \bar{u} + \frac{\mu}{K^*} \bar{u} - \rho_f \theta (\bar{T} - T_{tak\ hingga}) g_{\bar{x}} \\ &= -\frac{(\partial p \rho_f U_{\infty}^2)}{(\partial ax)} + \nu \rho_f \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 u U_{\infty}}{(\partial ay Re^{-\frac{1}{2}})^2} + \sigma B o^2 u U_{\infty} \\ &+ \frac{\mu}{K^*} u U_{\infty} - \rho_f \theta \left[(T_n - T_{tak\ hingga}) T + T_{tak\ hingga} \right. \\ &\left. - T_{tak\ hingga} \right] (-g \sin x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\rho_f U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \rho_f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{U_\infty}{a^2 Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sigma Bo^2 u U_\infty \\
&\quad + \frac{\mu}{K^*} u U_\infty + \rho_f \theta [(T_n - T_{tak\ hingga})T] g \sin x \\
&= -\frac{\rho_f U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \rho_f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{U_\infty Re}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sigma Bo^2 u U_\infty \\
&\quad + \frac{\mu U_\infty}{K^*} + \rho_f \theta [(T_n - T_{tak\ hingga})T] g \sin x
\end{aligned}$$

dengan menggabungkan kedua ruas kanan-kirinya, diperoleh.

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_f U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\rho_f U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \rho_f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \\
&\quad \frac{U_\infty Re}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sigma Bo^2 u U_\infty + \frac{\mu u U_\infty}{K^*} + \rho_f \theta \\
&\quad [(T_n - T_{tak\ hingga})T] g \sin x \tag{4.73}
\end{aligned}$$

Selanjutnya pada persamaan (4.73) kedua ruasnya dikalikan dengan $\frac{a}{\rho_f U_\infty^2}$ untuk disederhanakan, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{Re}{a U_\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
&+ \frac{\sigma Bo^2 u a}{\rho_f U_\infty} + \frac{a \mu u}{K^* U_\infty \rho_f} + \frac{a \theta T (T_n - T_{tak\ hingga})}{U_\infty^2} g \sin x \tag{4.74}
\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan parameter non-dimensional $\frac{1}{\nu} = \frac{Re}{a U_\infty}$, $M = \frac{\sigma Bo^2 a}{\rho_f U_\infty}$, $\phi = \frac{a \mu}{K^* U_\infty \rho_f}$,

dan $\lambda = \frac{a\theta(T_n - T_{tak\ hingga})g}{U_\infty^2}$, sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{\nu} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Mu \\ + \phi u + \lambda T \sin x \end{aligned}$$

Sehingga persamaan momentum non dimensional yang diperoleh pada sumbu x adalah.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ + Mu + \phi u + \lambda T \sin x \quad (4.75) \end{aligned}$$

b) Persamaan Momentum pada Sumbu y

Persamaan momentum dimensional pada sumbu y (4.68) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \rho_f \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \\ + \sigma B o^2 \bar{v} + \frac{\mu}{K_*} \bar{v} - \rho_f \theta (\bar{T} - T_{tak\ hingga}) g_{\bar{y}} \end{aligned}$$

dengan mensubstitusi variabel non dimensional (4.70) ke dalam persamaan (4.68), maka ruas kiri dari persamaan momentum pada sumbu y berubah

menjadi:

$$\begin{aligned}
 & \rho_f \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
 &= \rho_f \left(\frac{\partial (v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}})}{\partial (at U_\infty^{-1})} + u U_\infty \frac{\partial (v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}})}{\partial (ax)} + v U_\infty \right. \\
 & \quad \left. Re^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial (v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}})}{\partial (ay Re^{-\frac{1}{2}})} \right) \\
 &= \rho_f \left(\frac{U_\infty^2 Re^{-\frac{1}{2}}}{a} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{U_\infty^2 Re^{-\frac{1}{2}}}{a} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{U_\infty^2 Re^{-\frac{1}{2}}}{a} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{\rho_f U_\infty^2 Re^{-\frac{1}{2}}}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

ruas kanannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \sigma B o^2 \bar{v} + \frac{\mu}{K^*} \bar{v} - \rho_f \theta \\
 & \quad (\bar{T} - T_{tak\ hingga}) g_{\bar{y}} \\
 &= -\frac{\partial p \rho_f U_\infty^2}{\partial ay Re^{-\frac{1}{2}}} + \nu \rho_f \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}}}{\partial (ax)^2} + \sigma B o^2 v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \\
 & \quad + \frac{\mu}{K^*} v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} - \rho_f \theta \left[(T_n - T_{tak\ hingga}) T + T_{tak\ hingga} \right. \\
 & \quad \left. - T_{tak\ hingga} \right] g \cos x \\
 &= -\frac{\rho_f U_\infty^2}{a Re^{-\frac{1}{2}}} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \rho_f \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{U_\infty Re^{-\frac{1}{2}}}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \sigma B o^2 v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \\
 & \quad + \frac{\mu v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}}}{K^*} - \rho_f \theta [(T_n - T_{tak\ hingga}) T] g \cos x
 \end{aligned}$$

Kedua ruas kanan-kiri digabungkan, maka diperoleh

sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho_f U_\infty^2 Re^{-\frac{1}{2}}}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\rho_f U_\infty^2}{a Re^{-\frac{1}{2}}} \frac{\partial p}{\partial y} \\
 + \nu \rho_f \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{U_\infty Re^{-\frac{1}{2}}}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \sigma Bo^2 v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \\
 + \frac{\mu v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}}}{K^*} - \rho_f \theta [(T_n - T_{tak hingga})T] g \cos x
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

Untuk menyederhanakan persamaan (4.76) kalikan masing-masing ruas dengan $\frac{a Re^{-\frac{1}{2}}}{\rho_f U_\infty^2}$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 Re^{-1} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{Re^{-1}}{a U_\infty} \\
 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\sigma Bo^2 a Re^{-1} v}{\rho_f U_\infty} + \frac{\mu a Re^{-1} v}{K^* \rho_f U_\infty} \\
 - \frac{a \theta T (T_n - T_{tak hingga})}{U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}}} g \cos x
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

Substitusikan parameter non-dimensional (4.71) ke dalam persamaan (4.77), sehingga hasil akhir persamaan non-dimensional momentum pada sumbu

y adalah:

$$Re^{-1} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + Re^{-2} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + MRe^{-1}v + \Phi Re^{-1}v - \frac{\lambda T}{Re^{\frac{1}{2}}} \cos x \quad (4.78)$$

3. Perubahan Persamaan Energi

Diketahui persamaan dimensional energi (4.69) adalah sebagai berikut:

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right] = \alpha \left[\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right]$$

Dengan mensubstitusikan variabel non dimensional (4.70) ke dalam persamaan dimensional energi, maka ruas kiri dari persamaan energi berubah menjadi:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right] \\ &= \frac{\partial[(T_n - T_{tak\ hingga})T + T_{tak\ hingga}]}{\partial(atU_\infty^{-1})} + uU_\infty \frac{\partial[(T_n - T_{tak\ hingga})T + T_{tak\ hingga}]}{\partial(ax)} \\ & \quad + vU_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial[(T_n - T_{tak\ hingga})T + T_{tak\ hingga}]}{\partial(ayRe^{-\frac{1}{2}})} \\ &= \frac{U_\infty}{a} \left[\frac{\partial(T_n - T_{tak\ hingga})T}{\partial t} + \frac{\partial T_{tak\ hingga}}{\partial t} \right] + \frac{U_\infty}{a} u \left[\frac{\partial[(T_n - T_{tak\ hingga})T]}{\partial x} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial T_{tak\ hingga}}{\partial x} \right] + \frac{U_\infty}{a} v \left[\frac{\partial[(T_n - T_{tak\ hingga})T]}{\partial y} + \frac{\partial T_{tak\ hingga}}{\partial y} \right] \\ &= \frac{U_\infty}{a} \left(\frac{\partial(T_n - T_{tak\ hingga})T}{\partial t} + u \frac{\partial(T_n - T_{tak\ hingga})T}{\partial x} + v \frac{\partial(T_n - T_{tak\ hingga})T}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

ruas kanannya:

$$\begin{aligned}
 & \alpha \left[\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right] \\
 &= \alpha \left[\frac{\partial^2 (T_n - T_{tak hingga})T + T_{tak hingga}}{\partial (ax)^2} + \frac{\partial^2 ((T_n - T_{tak hingga})T + T_{tak hingga})}{\partial (ayRe^{-\frac{1}{2}})^2} \right] \\
 &= \frac{\alpha}{a^2} \left[\frac{\partial^2 (T_n - T_{tak hingga})T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{tak hingga}}{\partial x^2} \right] + \frac{\alpha}{a^2 Re^{-1}} \left[\frac{\partial^2 (T_n - T_{tak hingga})T}{\partial y^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial^2 T_{tak hingga}}{\partial y^2} \right] \\
 &= \frac{\alpha}{a^2} \left[\frac{\partial^2 (T_n - T_{tak hingga})T}{\partial x^2} \right] + \frac{\alpha}{a^2 Re^{-1}} \left[\frac{\partial^2 (T_n - T_{tak hingga})T}{\partial y^2} \right]
 \end{aligned}$$

kedua ruas kanan-kiri digabungkan, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
 & \frac{U_\infty}{a} \left(\frac{\partial (T_n - T_{tak hingga})T}{\partial t} + u \frac{\partial (T_n - T_{tak hingga})T}{\partial x} \right. \\
 & \left. + v \frac{\partial (T_n - T_{tak hingga})T}{\partial y} \right) = \frac{\alpha}{a^2} \left[\frac{\partial^2 (T_n - T_{tak hingga})T}{\partial x^2} \right] \\
 & \quad + \frac{\alpha}{a^2 Re^{-1}} \left[\frac{\partial^2 (T_n - T_{tak hingga})T}{\partial y^2} \right]
 \end{aligned}$$

atau juga dapat dituliskan.

$$\begin{aligned}
 & U_\infty \left(\frac{\partial (T_n - T_{tak hingga})T}{\partial t} + u \frac{\partial (T_n - T_{tak hingga})T}{\partial x} \right. \\
 & \left. + v \frac{\partial (T_n - T_{tak hingga})T}{\partial y} \right) = \frac{\alpha}{a} \left[\frac{\partial^2 (T_n - T_{tak hingga})T}{\partial x^2} \right] \\
 & \quad + \frac{\alpha Re}{a} \left[\frac{\partial^2 (T_n - T_{tak hingga})T}{\partial y^2} \right]
 \end{aligned}$$

Dengan mengalikan kedua ruas persamaan dengan $\frac{1}{(T_n - T_{tak hingga}) U_\infty}$, sehingga diperoleh bentuk berikut:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\alpha}{a U_\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\alpha Re}{a U_\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Substitusikan parameter $Re = \frac{U_\infty a}{\nu}$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\alpha}{\nu Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Selanjutnya substitusikan $\frac{1}{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Dari hasil akhir substitusi variabel dan parameter non-dimensional ke dalam persamaan pembangun dimensional sebelumnya, diperoleh persamaan pembangun non-dimensional berikut:

- Persamaan Kontinuitas Non-Dimensional

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.79)$$

- Persamaan Momentum Non-Dimensional Sumbu x

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial x} + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &+ Mu + \phi u + \lambda T \sin x \end{aligned} \quad (4.80)$$

- Persamaan Momentum Non-Dimensional Sumbu y

$$Re^{-1} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + Re^{-2} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + MRe^{-1}v + \Phi Re^{-1}v - \frac{\lambda T}{Re^{\frac{1}{2}}} \cos x \quad (4.81)$$

- Persamaan Energi Non Dimensional

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{PrRe} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.82)$$

dengan kondisi batas non dimensional

$$t = 0 : u = v = 0, T = 0 \text{ untuk setiap } x, y$$

$$t > 0 : u = v = 0, T = 1 \text{ pada saat } y = 0$$

$$u = u_e, T = 0 \text{ saat } y \rightarrow \infty$$

C. Teori Lapisan Batas

Melalui pendekatan lapisan batas dengan asumsi bahwa bilangan Reynoldsnnya mendekati tak hingga ($Re \rightarrow \infty$), maka nilai $\frac{1}{Re}$ cenderung mendekati nol. Berdasarkan kondisi tersebut, dapat diturunkan bentuk persamaan baru sebagai berikut.

- Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.83)$$

- Persamaan Momentum pada Sumbu x

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Mu + \phi u \\ + \lambda T \sin x \end{aligned} \quad (4.84)$$

- Persamaan Momentum pada Sumbu y

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.85)$$

- Persamaan Energi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.86)$$

Karena persamaan momentum pada arah y bernilai nol dan tekanan fluida tidak dipengaruhi oleh variabel y , maka yang digunakan hanya persamaan momentum pada arah x . Adapun persamaan momentum pada sumbu x di luar lapisan batas adalah:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} \\ + Mu_e + \phi u_e + \lambda T \sin x \end{aligned} \quad (4.87)$$

Dengan menerapkan kecepatan aliran bebas dalam koordinat silinder yaitu $u_e = \sin x$ (Norasia et al., 2022),

maka didapatkan.

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial u_e}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0 \quad (4.88)$$

kemudian persamaan (4.88) disubstitusikan ke persamaan (4.87) maka didapatkan

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + Mu_e + \phi u_e + \lambda T \sin x \quad (4.89)$$

Ketika nilai $T = 0$ persamaan (4.89) menjadi

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} - Mu_e - \phi u_e \quad (4.90)$$

Pada persamaan (4.90) disubstitusi ke dalam persamaan (4.84) maka hasil yang didapatkan adalah.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} + Mu \\ &\quad + \phi u + \lambda T \sin x \\ \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \left(u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} - Mu_e - \phi u_e\right) + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \\ &\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu - \phi u + \lambda T \sin x \\ \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} - (M + \phi)u_e + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &\quad + (M + \phi)u + \lambda T \sin x \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (M + \phi) \\ (u - u_e) + \lambda T \sin x$$

Maka didapatkan persamaan akhir dari pendekatan lapisan batas.

- Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.91)$$

- Persamaan Momentum Sumbu x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (M + \phi) \\ (u - u_e) + \lambda T \sin x \quad (4.92)$$

- Persamaan Energi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.93)$$

D. Fungsi Alir

Dalam penelitian ini, fluida memiliki dua komponen kecepatan, yakni u sebagai kecepatan aliran sepanjang arah x dan v sebagai kecepatan aliran sepanjang arah y . Untuk menghubungkan kedua komponen kecepatan tersebut, digunakan suatu fungsi alir. Melalui penerapan fungsi ini, berbagai persamaan aliran fluida yang melalui permukaan

silinder dapat disederhanakan dan direpresentasikan dalam satu variabel secara komputasi. Simbol ψ digunakan untuk menggambarkan fungsi alir, di mana aliran pada sumbu x dan y yang melewati permukaan silinder dapat dinyatakan dengan cara berikut (Sulistyaningtyas, 2018).

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.94)$$

Substitusi fungsi alir yang disebutkan di atas ke dalam persamaan (4.91)-(4.93) sehingga diperoleh hasil sebagai berikut.

- Persamaan Kontinuitas

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(\frac{\partial \psi}{\partial y})}{\partial x} + \frac{\partial(-\frac{\partial \psi}{\partial x})}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

- Persamaan Momentum Sumbu x

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &+ (M + \phi)(u - u_e) + \lambda T \sin x \end{aligned}$$

Pada ruas kiri sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\
&= \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial x} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial y} \\
&= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

Pada ruas kanan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
& u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (M + \phi)(u - u_e) + \lambda T \sin x \\
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial y^2} + (M + \phi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) \\
&\quad + \lambda T \sin x \\
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + (M + \phi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) \\
&\quad + \lambda T \sin x
\end{aligned}$$

dengan menggabungkan kedua ruas kiri-kanan diperoleh sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \\
&\quad + (M + \phi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \lambda T \sin x
\end{aligned}$$

• Persamaan Energi

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Dengan melakukan substitusi fungsi alir, diperoleh bentuk persamaan yang lebih disederhanakan. Persamaan yang digunakan mencakup persamaan momentum pada arah x serta persamaan energi, sementara persamaan kontinuitas diabaikan dalam analisis ini.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \\ + (M + \phi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) &+ \lambda T \sin x \quad (4.95) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial T}{\partial x} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.96)$$

dengan menggunakan kondisi batas sebagai berikut.

$$\begin{aligned} t = 0 : \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, T = 0 \text{ untuk setiap } x, y \\ t > 0 : \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, T = 0 \text{ saat } y = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= u_e, T = 0 \text{ saat } y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

E. Persamaan Similaritas

Langkah berikutnya setelah memperoleh persamaan fungsi alir adalah mengubahnya menjadi bentuk variabel similaritas sebagai berikut.

$$\psi = t^{\frac{1}{2}} u_e(x) f(x, \eta, t); \quad \eta = \frac{y}{t^{\frac{1}{2}}}; \quad T = s(x, \eta, t) \quad (4.97)$$

Variabel similaritas (4.97) disubstitusikan ke persamaan (4.95) serta (4.96) yang dijelaskan pada Lampiran 1, maka diperoleh:

- Persamaan Momentum

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right] \\ &= t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t u_e \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) - t(M + \Phi) \\ & \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1\right) - \frac{\lambda s t}{u_e} \sin x \end{aligned} \quad (4.98)$$

- Persamaan Energi

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \frac{Pr\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Prt f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} = Prt \left[\frac{\partial s}{\partial t} + u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.99)$$

Penelitian ini diteliti pada wilayah sekitar titik stagnasi terendah, yakni titik dimana lapisan batas hampir bertemu

objek. Titik stagnasi terendah dalam mekanika fluida terjadi ketika $x \approx 0$. Dalam kondisi ini, kecepatan aliran bebas diberikan oleh $u_e(x) = \sin x = 0$, dengan turunannya terhadap x adalah $\frac{\partial u_e(x)}{\partial x} = \cos x = 1$. Nilai-nilai tersebut kemudian dimasukkan ke dalam persamaan (4.98) dan (4.99), sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut:

Persamaan Momentum Sumbu x

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \cos x \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right] \\ &= t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t \sin x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) - t(M + \Phi) \\ & \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1\right) - \frac{\lambda s t \sin x}{\sin x} \end{aligned}$$

atau dapat ditulis persamaan momentum berikut.

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right] \\ &+ t(M + \Phi) \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1\right) + \lambda s t = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \quad (4.100) \end{aligned}$$

Persamaan Energi

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \frac{Pr\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Prt f \cos x \frac{\partial s}{\partial \eta} = Prt \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \sin x \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \right] \end{aligned}$$

atau dapat ditulis persamaan energi sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \frac{Pr\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Prt f \frac{\partial s}{\partial \eta} = Prt \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) \quad (4.101)$$

Karena penelitian ini dipengaruhi oleh porositas, medan magnet, konveksi, dan Casson maka parameter tersebut tidak bernilai nol ($\phi \neq 0$, $M \neq 0$, $\lambda \neq 0$, dan $\beta \neq 0$).

Kemudian dengan mengasumsikan bahwa turunan parsial dari $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ adalah f' dan turunan parsial dari $\frac{\partial r}{\partial \eta}$ adalah s' , serta mensubstitusikan persamaan $\frac{\partial f}{\partial \eta} = f'$ dan $\frac{\partial r}{\partial \eta} = s'$ ke dalam persamaan (4.100) dan (4.101) diperoleh persamaan momentum dan energi sebagai berikut

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) f''' + \frac{\eta}{2} f'' + t(1 - (f')^2 + f f'') + t(M + \Phi) \\ (f' - 1) + \lambda s t = t \frac{\partial f'}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.102)$$

$$s'' + \frac{Pr\eta}{2} s' + Prt f s' = Prt \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.103)$$

dengan kondisi batas

$$t = 0 : f = f' = s = 0 \text{ untuk setiap } x, \eta$$

$$t > 0 : f = f' = 0, s = 1 \text{ saat } \eta = 0$$

$$f' = 1, s = 0 \text{ saat } \eta \rightarrow \infty$$

F. Penyelesaian Numerik

1. Permisalan Notasi

Penyelesaian numerik dengan metode *Keller Box* memerlukan bentuk persamaan orde pertama atau orde yang lebih tinggi. Oleh karena itu, persamaan (4.102) dan (4.103), yang merupakan persamaan orde tinggi, harus diubah ke dalam bentuk persamaan orde pertama melalui permisalan. Misalnya:

$$f' = h \quad (4.104)$$

$$h' = g \quad (4.105)$$

$$s' = u \quad (4.106)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.104) - (4.106) ke persamaaan (4.102) dan (4.103), diperoleh sebagai berikut

- Persamaan Momentum

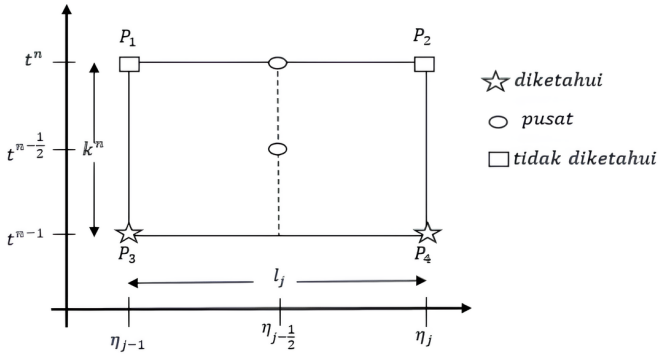
$$\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) g' + \frac{\eta}{2} g + t(1 - (h)^2 + fg) + t(M + \Phi) \\ (h - 1) + \lambda st = t \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.107)$$

- Persamaan Energi

$$u' + \frac{Pr\eta}{2} u + Prt fu = Prt \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.108)$$

2. Diskritisasi Model

Proses diskritisasi terhadap model matematika dilakukan menggunakan metode beda hingga terpusat. Untuk persamaan linier (4.104)-(4.106), digunakan titik pusat $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n)$ yang berada pada ruas P_1, P_2 , sementara persamaan tak linier (4.107) dan (4.108) digunakan titik tengah $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n-1})$ pada segiempat $P_1P_2P_3P_4$ seperti yang terlihat pada Gambar 4.4.



Gambar 4.4: Skema Beda Hingga

Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\left(\frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{l_j} \right) = h_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (4.109)$$

$$\left(\frac{h_j^n - h_{j-1}^n}{l_j} \right) = g_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (4.110)$$

$$\left(\frac{s_j^n - s_{j-1}^n}{l_j} \right) = u_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (4.111)$$

Proses diskritisasi untuk persamaan momentum dilakukan sebagai berikut:

$$\frac{1}{2} \left[(N_1)_{j-\frac{1}{2}}^n + (N_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = t^{n-\frac{1}{2}} \left[\frac{h_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right]$$

dengan

$$\begin{aligned} (N_1)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left[\left(1 + \frac{1}{\beta} \right) g' + \frac{\eta}{2} g + t (1 - (h)^2 + fg) \right. \\ &\quad \left. + t(M + \Phi)(h - 1) + \lambda st \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{g_j^n - g_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} g_{j-\frac{1}{2}}^n \\ &\quad + t^n \left(1 - (h_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + (f_{j-\frac{1}{2}}^n)(g_{j-\frac{1}{2}}^n) \right) \\ &\quad + t^n (M + \Phi)(h_{j-\frac{1}{2}}^n - 1) + \lambda s_{j-\frac{1}{2}}^n t^n \\ (N_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= \left[\left(1 + \frac{1}{\beta} \right) g' + \frac{\eta}{2} g + t (1 - (h)^2 + fg) \right. \\ &\quad \left. + t(M + \Phi)(h - 1) + \lambda st \right]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{g_j^{n-1} - g_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\ &\quad + t^{n-1} \left(1 - (h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + (f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})(g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \right) \\ &\quad + t^{n-1} (M + \Phi)(h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 1) + \lambda s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} t^{n-1} \end{aligned}$$

Dengan demikian, persamaan momentum yang

dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{g_j^n - g_{j-1}^n}{l_j}\right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} g_{j-\frac{1}{2}}^n + t^n \left[1 - (h_{j-\frac{1}{2}}^n)^2\right. \\
& \left. + (f_{j-\frac{1}{2}}^n)(g_{j-\frac{1}{2}}^n)\right] + t^n (M + \Phi)(h_{j-\frac{1}{2}}^n - 1) + \lambda s_{j-\frac{1}{2}}^n t^n \\
& + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{g_j^{n-1} - g_{j-1}^{n-1}}{l_j}\right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + t^{n-1} \\
& \left(1 - (h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + (f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})(g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})\right) + t^{n-1} (M + \Phi)(h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 1) \\
& + \lambda s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} t^{n-1} = 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{g_j^n - g_{j-1}^n}{l_j}\right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} g_{j-\frac{1}{2}}^n + t^n \left[1 - (h_{j-\frac{1}{2}}^n)^2\right. \\
& \left. + (f_{j-\frac{1}{2}}^n)(g_{j-\frac{1}{2}}^n)\right] + t^n (M + \Phi)(h_{j-\frac{1}{2}}^n - 1) + \lambda s_{j-\frac{1}{2}}^n t^n \\
& - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n = - \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{g_j^{n-1} - g_{j-1}^{n-1}}{l_j}\right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
& - t^{n-1} \left(1 - (h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + (f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})(g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})\right) - t^{n-1} (M + \Phi) \\
& (h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 1) - \lambda s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} t^{n-1} - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (4.112)
\end{aligned}$$

Diskritisasi untuk persamaan energi adalah sebagai

berikut

$$\frac{1}{2} \left[(N_2)_{j-\frac{1}{2}}^n + (N_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = Prt^{n-\frac{1}{2}} \left[\frac{s_{j-\frac{1}{2}}^n - s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right]$$

dengan

$$\begin{aligned} (N_2)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left[u' + \frac{Pr\eta}{2}u + Prtfu \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \\ &= \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{l_j} + \frac{Pr\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}u_{j-\frac{1}{2}}^n + Prt^n f_{j-\frac{1}{2}}^n (u_{j-\frac{1}{2}}^n) \\ (N_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= \left[u' + \frac{Pr\eta}{2}u + Prtfu \right]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\ &= \frac{u_j^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}}{l_j} + \frac{Pr\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + Prt^n f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned} &\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{l_j} + \frac{Pr\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}u_{j-\frac{1}{2}}^n + Prt^n f_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n \\ &+ \frac{u_j^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}}{l_j} + \frac{Pr\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + Prt^n f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\ &= 2 \frac{Prt^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{Prt^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{l_j} + \frac{Pr\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} u_{j-\frac{1}{2}}^n + Prt^n f_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n \\
 & - 2 \frac{Prt^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^n = - \frac{u_j^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}}{l_j} - \frac{Pr\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
 & - Prt^n f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{Prt^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (4.113)
 \end{aligned}$$

dimana l_j merupakan jarak antar titik untuk η dan k^n merupakan jarak antar titik dari waktu.

3. Linierisasi Model

Pada tahap ini, hasil diskritisasi model akan dilinierisasikan dengan menerapkan iterasi metode Newton sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 f_j^{i+1} &= f_j^i + \delta f_j^i \\
 h_j^{i+1} &= h_j^i + \delta h_j^i \\
 g_j^{i+1} &= g_j^i + \delta g_j^i \\
 s_j^{i+1} &= s_j^i + \delta s_j^i \\
 u_j^{i+1} &= u_j^i + \delta u_j^i \quad (4.114)
 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan bentuk iterasi (4.114) ke

dalam persamaan (4.109)-(4.113) diperoleh

$$(\delta f_j^i - \delta f_{j-1}^i) - \frac{l_j}{2}(\delta h_j^i - \delta h_{j-1}^i) = -(f_j^i - f_{j-1}^i) + \frac{l_j}{2}(h_j^i + h_{j-1}^i) \quad (4.115)$$

$$(\delta h_j^i - \delta h_{j-1}^i) - \frac{l_j}{2}(\delta g_j^i - \delta g_{j-1}^i) = -(h_j^i - h_{j-1}^i) + \frac{l_j}{2}(g_j^i + g_{j-1}^i) \quad (4.116)$$

$$(\delta s_j^i - \delta s_{j-1}^i) - \frac{l_j}{2}(\delta u_j^i - \delta u_{j-1}^i) = -(s_j^i - s_{j-1}^i) + \frac{l_j}{2}(u_j^i + u_{j-1}^i) \quad (4.117)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{g_j^i - g_{j-1}^i}{l_j} + \frac{\delta g_j^i + \delta g_{j-1}^i}{l_j}\right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(g_{j-\frac{1}{2}}^i + \frac{\delta g_j^i + \delta g_{j-1}^i}{2}\right) - t^n \left[1 - \left(h_{j-\frac{1}{2}}^i + \frac{\delta h_j^i + \delta h_{j-1}^i}{2}\right)^2 + \right. \\ & \left. \left(f_{j-\frac{1}{2}}^i + \frac{\delta f_j^i + \delta f_{j-1}^i}{2}\right) \left(g_{j-\frac{1}{2}}^i + \frac{\delta g_j^i + \delta g_{j-1}^i}{2}\right)\right] + t^n (M + \Phi) \\ & \left(h_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta h_j^i + \delta h_{j-1}^i}{2} - 1\right) + \lambda t^n \left(s_{j-\frac{1}{2}}^i + \frac{\delta s_j^i + \delta s_{j-1}^i}{2}\right) \\ & - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(h_{j-\frac{1}{2}}^i + \frac{\delta h_j^i + \delta h_{j-1}^i}{2}\right) = R_1 \end{aligned} \quad (4.118)$$

dapat ditulis persamaan momentum sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{\delta g_j - \delta g_{j-1}}{l_j}\right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\delta g_j + \delta g_{j-1}}{2}\right) \\
& - t^n \left(\frac{\delta h_j + \delta h_{j-1}}{2}\right)^2 - 2t^n h_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta h_j + \delta h_{j-1}}{2}\right) \\
& + t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta g_j + \delta g_{j-1}}{2}\right) + t^n g_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2}\right) \\
& + t^n \left(\frac{\delta g_j + \delta g_{j-1}}{2}\right) \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2}\right) + t^n (M + \Phi) \\
& \left(\frac{\delta h_j + \delta h_{j-1}}{2}\right) + \lambda t^n \left(\frac{\delta s_j + \delta s_{j-1}}{2}\right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
& \left(\frac{\delta h_j + \delta h_{j-1}}{2}\right) = - \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{g_j - g_{j-1}}{l_j}\right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} g_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& - t^n \left[1 - \left(h_{j-\frac{1}{2}}^n\right)^2\right] - t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n g_{j-\frac{1}{2}}^n - t^n (M + \Phi) (h_{j-\frac{1}{2}}^n - 1) \\
& - \lambda t^n s_{j-\frac{1}{2}}^n + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n + R_1
\end{aligned} \tag{4.119}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{u_j^i - u_{j-1}^i}{l_j} + \frac{\delta u_j^i + \delta u_{j-1}^i}{l_j} + \frac{Pr \eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(u_{j-\frac{1}{2}}^i + \frac{\delta u_j^i + \delta u_{j-1}^i}{2}\right) + Pr t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^i + \frac{\delta f_j^i + \delta f_{j-1}^i}{2}\right) \\
& \left(u_{j-\frac{1}{2}}^i + \frac{\delta u_j^i + \delta u_{j-1}^i}{2}\right) - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^i = R_2
\end{aligned} \tag{4.120}$$

dapat ditulis persamaan energi sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{l_j} + \frac{Pr\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) + \\
& Prt^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta u_j + u_{j-1}}{2} \right) + Prt^n u_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \\
& + Prt^n \left(\frac{\delta f_j + f_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta u_j + u_{j-1}}{2} \right) - 2 \frac{Prt^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
& \left(\frac{\delta s_j + \delta s_{j-1}}{2} \right) = - \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{l_j} \right) - \frac{Pr\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \\
& u_{j-\frac{1}{2}}^n - Prt^n f_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n + 2 \frac{Prt^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^n + R_2 \quad (4.121)
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
R_1 = & - \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{g_j^{n-1} - g_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - t^{n-1} \\
& \left[1 - \left(h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \cdot g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] - t^{n-1} (M + \Phi) \\
& (h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 1) - \lambda s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} t^{n-1} - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
R_2 = & - \frac{u_j^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}}{l_j} - \frac{Pr\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - Prt^n f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
& (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - 2 \frac{Prt^{n-\frac{1}{2}}}{k^2} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

Langkah berikutnya adalah menyederhanakan persamaan (4.115)-(4.121) dengan mengabaikan suku-suku orde tinggi pada $\delta f_j^i, \delta h_j^i, \delta g_j^i, \delta s_j^i$, dan δu_j^i , sehingga

didapatkan bentuk yang lebih sederhana.

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta h_j + \delta h_{j-1}) = (m_1)_j \quad (4.122)$$

$$(\delta h_j - \delta h_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta g_j + \delta g_{j-1}) = (m_2)_j \quad (4.123)$$

$$(\delta s_j - \delta s_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_j + \delta u_{j-1}) = (m_3)_j \quad (4.124)$$

$$(a_1)_j \delta f_j + (a_2)_j \delta f_{j-1} + (a_3)_j \delta h_j + (a_4)_j \delta h_{j-1} + (a_5)_j \delta g_j + (a_6)_j \delta g_{j-1} + (a_7)_j \delta s_j + (a_8)_j \delta s_{j-1} = (m_4)_j \quad (4.125)$$

$$(b_1)_j \delta u_j + (b_2)_j \delta u_{j-1} + (b_3)_j \delta f_j + (b_4)_j \delta f_{j-1} + (b_5)_j \delta s_j + (b_6)_j \delta s_{j-1} = (m_5)_j \quad (4.126)$$

dengan

$$(m_1)_j = -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(h_j^n + h_{j-1}^n),$$

$$(m_2)_j = -(h_j^n - h_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(g_j^n + g_{j-1}^n)$$

$$(m_3)_j = -(s_j^n - s_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n)$$

$$(m_4)_j = -\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{g_j^n - g_{j-1}^n}{l_j}\right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n\right) - t^n \left[1 - \left(h_{j-\frac{1}{2}}^n\right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n g_{j-\frac{1}{2}}^n\right] - t^n (M + \Phi) \left(h_{j-\frac{1}{2}}^n - 1\right) - \lambda t^n s_{j-\frac{1}{2}}^n + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n - \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{g_j^{n-1} - g_{j-1}^{n-1}}{l_j}\right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) - t^{n-1} \left[1 - \left(h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right]$$

$$\begin{aligned}
& -t^{n-1}(M + \Phi) \left(h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 1 \right) - \lambda t^{n-1} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
(m_5)_j &= -\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{l_j} - \frac{Pr\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} u_{j-\frac{1}{2}}^n - Prt^n f_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& + 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{u_j^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}}{l_j} - \frac{Pr\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
& - Prt^{n-1} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
(a_1)_j &= \frac{1}{2} t^n g_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(a_2)_j &= (a_1)_j \\
(a_3)_j &= -t^n h_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{2} t^n (M + \phi) - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
(a_4)_j &= (a_3)_j \\
(a_5)_j &= \frac{1}{l_j} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{1}{2} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(a_6)_j &= -\frac{1}{l_j} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{1}{2} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(a_7)_j &= \frac{1}{2} \lambda t^n \\
(a_8)_j &= (a_7)_j \\
(b_1)_j &= \frac{1}{l_j} + \frac{Pr\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{1}{2} Prt^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_2)_j &= -\frac{1}{l_j} + \frac{Pr\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{1}{2} Prt^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_3)_j &= \frac{1}{2} Prt^n u_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_4)_j &= (b_3)_j \\
(b_5)_j &= -\frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
(b_6)_j &= (b_5)_j
\end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi batas yang ada, maka dapat dinyatakan bahwa $\delta f_0 = 0, \delta h_0 = 0, \delta s_0 = 0, \delta h_W = 0$, dan $\delta s_W = 0$.

4. Teknik Eliminasi Blok

Persamaan (4.122)-(4.126) adalah sistem linier yang dapat diselesaikan dengan teknik eliminasi blok. Dalam pendekatan *Keller-Box*, setiap elemen dari blok tridiagonal disusun dalam bentuk matriks blok, dan penentuan elemen pada matriks blok tridiagonal dilakukan dalam beberapa kondisi tertentu, yaitu ketika $j = 1, j = W - 1$, dan $j = W$.

- Pada saat kondisi $j = 1$, maka persamaan (4.122)-(4.126) menjadi

$$(\delta f_1 - \delta f_0) - \frac{l_1}{2}(\delta h_1 + \delta h_0) = (m_1)_1 \quad (4.127)$$

$$(\delta h_1 - \delta h_0) - \frac{l_1}{2}(\delta g_1 + \delta g_0) = (m_2)_1 \quad (4.128)$$

$$(\delta s_1 - \delta s_0) - \frac{l_1}{2}(\delta u_1 + \delta u_0) = (m_3)_1 \quad (4.129)$$

$$(a_1)_1 \delta f_1 + (a_2)_1 \delta f_0 + (a_3)_1 \delta h_1 + (a_4)_1 \delta h_0 + (a_5)_1 \delta g_1 + (a_6)_1 \delta g_0 + (a_7)_1 \delta s_1 + (a_8)_1 \delta s_0 = (m_4)_1 \quad (4.130)$$

$$(b_1)_1 \delta u_1 + (b_2)_1 \delta u_0 + (b_3)_1 \delta f_1 + (b_4)_1 \delta f_0 + (b_5)_1 \delta s_1 + (b_6)_1 \delta s_0 = (m_5)_1 \quad (4.131)$$

Berdasarkan kondisi batas $\delta f_0 = 0, \delta h_0 = 0, \delta s_0 = 0$

maka persamaan (4.127)-(4.131) dapat ditulis

$$(\delta f_1) - \frac{l_1}{2}(\delta h_1) = (m_1)_1 \quad (4.132)$$

$$(\delta h_1) - \frac{l_1}{2}(\delta g_1 + \delta g_0) = (m_2)_1 \quad (4.133)$$

$$(\delta s_1) - \frac{l_1}{2}(\delta u_1 + \delta u_0) = (m_3)_1 \quad (4.134)$$

$$(a_1)_1 \delta f_1 + (a_3)_1 \delta h_1 + (a_5)_1 \delta g_1 + (a_6)_1 \delta g_0 + (a_7)_1 \delta s_1 = (m_4)_1 \quad (4.135)$$

$$(b_1)_1 \delta u_1 + (b_2)_1 \delta u_0 + (b_3)_1 \delta f_1 + (b_5)_1 \delta s_1 = (m_5)_1 \quad (4.136)$$

Dengan demikian, persamaan (4.132)–(4.136) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} \\ (a_6)_1 & 0 & (a_1)_1 & (a_5)_1 & 0 \\ 0 & (b_2)_1 & (b_3)_1 & 0 & (b_1)_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta g_0 \\ \delta u_0 \\ \delta f_1 \\ \delta g_1 \\ \delta u_1 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_3)_1 & (a_7)_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (b_5)_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta h_1 \\ \delta s_1 \\ \delta f_2 \\ \delta g_2 \\ \delta u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1)_1 \\ (m_2)_1 \\ (m_3)_1 \\ (m_4)_1 \\ (m_5)_1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, matriks tersebut dapat direpresentasikan

sebagai berikut.

$$[K_1][\delta_1] + [G_1][\delta_2] = [m_1]$$

- Pada saat kondisi $j = W - 1$, maka persamaan (4.122)-(4.126) menjadi

$$(\delta f_{W-1} - \delta f_{W-2}) - \frac{l_{W-1}}{2}(\delta h_{W-1} + \delta h_{W-2}) = (m_1)_{W-1} \quad (4.137)$$

$$(\delta h_{W-1} - \delta h_{W-2}) - \frac{l_{W-1}}{2}(\delta g_{W-1} + \delta h_{W-2}) = (m_2)_{W-1} \quad (4.138)$$

$$(\delta s_{W-1} - \delta s_{W-2}) - \frac{l_{W-1}}{2}(\delta u_{W-1} + \delta u_{W-2}) = (m_3)_{W-1} \quad (4.139)$$

$$\begin{aligned} & (a_1)_{W-1}\delta f_{W-1} + (a_2)_{W-1}\delta f_{W-2} + (a_3)_{W-1}\delta h_{W-1} \\ & + (a_4)_{W-1}\delta h_{W-2} + (a_5)_{W-1}\delta g_{W-1} + (a_6)_{W-1}\delta g_{W-2} \\ & + (a_7)_{W-1}\delta s_{W-1} + (a_8)_{W-1}\delta s_{W-2} = (m_4)_{W-1} \end{aligned} \quad (4.140)$$

$$\begin{aligned} & (b_1)_{W-1}\delta u_{W-1} + (b_2)_{W-1}\delta u_{W-2} + (b_3)_{W-1}\delta f_{W-1} + (b_4)_{W-1} \\ & \delta f_{W-2} + (b_5)_{W-1}\delta s_{W-1} + (b_6)_{W-1}\delta s_{W-2} + = (m_5)_{W-1} \end{aligned} \quad (4.141)$$

Dengan demikian, persamaan (4.137)-(4.141) dapat

dinyatakan dalam bentuk matriks seperti berikut.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{W-1}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{W-1}}{2} \\ 0 & 0 & (a_2)_{W-1} & (a_6)_{W-1} & 0 \\ 0 & 0 & (b_4)_{W-1} & 0 & (b_2)_{W-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta g_{W-3} \\ \delta u_{W-3} \\ \delta f_{W-2} \\ \delta g_{W-2} \\ \delta u_{W-2} \end{bmatrix} + \\
 \begin{bmatrix} -\frac{l_{W-1}}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{W-1}}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{W-1}}{2} \\ (a_4)_{W-1} & (a_8)_{W-1} & (a_1)_{W-1} & (a_5)_{W-1} & 0 \\ 0 & (b_6)_{W-1} & (b_3)_{W-1} & 0 & (b_1)_{W-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta h_{W-2} \\ \delta s_{W-2} \\ \delta f_{W-1} \\ \delta g_{W-1} \\ \delta u_{W-1} \end{bmatrix} + \\
 \begin{bmatrix} -\frac{l_{W-1}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_3)_{W-1} & (a_7)_{W-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (b_5)_{W-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta h_{W-1} \\ \delta s_{W-1} \\ \delta f_W \\ \delta g_W \\ \delta u_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1)_{W-1} \\ (m_2)_{W-1} \\ (m_3)_{W-1} \\ (m_4)_{W-1} \\ (m_5)_{W-1} \end{bmatrix}$$

Kemudian, bentuk matriksnya dapat diperoleh.

$$[J_{j-1}][\delta_{j-2}] + [K_{j-1}][\delta_{j-1}] + [G_{j-1}][\delta_j] = [m_j];$$

$$j = 2, 3, \dots, W-1$$

- Pada saat kondisi $j = W$, maka persamaan

(4.122)-(4.126) menjadi

$$(\delta f_W - \delta f_{W-1}) - \frac{l_W}{2}(\delta h_W + \delta h_{W-1}) = (m_1)_W \quad (4.142)$$

$$(\delta h_W - \delta h_{W-1}) - \frac{l_W}{2}(\delta g_W + \delta g_{W-1}) = (m_2)_W \quad (4.143)$$

$$(\delta s_W - \delta s_{W-1}) - \frac{l_W}{2}(\delta u_W + \delta u_{W-1}) = (m_3)_W \quad (4.144)$$

$$\begin{aligned} & (a_1)_W \delta f_W + (a_2)_W \delta f_{W-1} + (a_3)_W \delta h_W + (a_4)_W \\ & \delta h_{W-1} + (a_5)_W \delta g_W + (a_6)_W \delta g_{W-1} + (a_7)_W \\ & \delta s_W + (a_4)_W \delta s_{W-1} = (m_4)_W \end{aligned} \quad (4.145)$$

$$\begin{aligned} & (b_1)_W \delta u_W + (b_2)_W \delta u_{W-1} + (b_3)_W \delta f_W + (b_4)_W \delta f_{W-1} \\ & + (b_5)_W \delta s_W + (b_6)_W \delta s_{W-1} + = (m_5)_W \end{aligned} \quad (4.146)$$

Dengan kondisi batas $\delta h_W = 0, \delta s_W = 0$ maka persamaan (4.142)-(4.146) berubah menjadi

$$(\delta f_W - \delta f_{W-1}) - \frac{l_W}{2} \delta h_{W-1} = (m_1)_W \quad (4.147)$$

$$(-\delta h_{W-1}) - \frac{l_W}{2}(\delta g_W + \delta g_{W-1}) = (m_2)_W \quad (4.148)$$

$$(-\delta s_{W-1}) - \frac{l_W}{2}(\delta u_W + \delta u_{W-1}) = (m_3)_W \quad (4.149)$$

$$(a_1)_W \delta f_W + (a_2)_W \delta f_{W-1} + (a_4)_W \delta h_{W-1} + (a_5)_W \delta g_W$$

$$+ (a_6)_W \delta g_{W-1} + (a_8)_W \delta s_{W-1} = (m_4)_W \quad (4.150)$$

$$(b_1)_W \delta u_W + (b_2)_W \delta u_{W-1} + (b_3)_W \delta f_W + (b_4)_W \delta f_{W-1} + (b_6)_W \delta s_{W-1} = (m_5)_W \quad (4.151)$$

Dengan demikian persamaan (4.147)-(4.151) dapat disusun dalam bentuk matriks berikut.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_W}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_W}{2} \\ 0 & 0 & (a_2)_W & (a_6)_W & 0 \\ 0 & 0 & (b_4)_W & 0 & (b_2)_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta g_{W-2} \\ \delta u_{W-2} \\ \delta f_{W-1} \\ \delta g_{W-1} \\ \delta u_{W-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{l_W}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_W}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_W}{2} \\ (a_4)_W & (a_8)_W & (a_1)_W & (a_5)_W & 0 \\ 0 & (b_6)_W & (b_3)_W & 0 & (b_1)_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta h_{W-1} \\ \delta s_{W-1} \\ \delta f_W \\ \delta g_W \\ \delta u_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1)_W \\ (m_2)_W \\ (m_3)_W \\ (m_4)_W \\ (m_5)_W \end{bmatrix}$$

Kemudian, bentuk matriksnya dapat dituliskan sebagai berikut.

$$[J_j][\delta_{j-1}] + [K_j][\delta_j] = [m_j]; j = W$$

Secara sederhana, bentuk matriks untuk kondisi $j = 1, 2, 3, \dots, W$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$j = 1 : [K_1][\delta_1] + [G_1][\delta_2] = [m_1]$$

$$j = 2 : [J_2][\delta_1] + [K_2][\delta_2] + [G_2][\delta_3] = [m_2]$$

$$j = 3 : [J_3][\delta_2] + [K_3][\delta_3] + [G_3][\delta_4] = [m_3]$$

$$\vdots$$

$$j = W - 1 : [J_{W-1}][\delta_{W-2}] + [K_{W-1}][\delta_{W-1}] + [G_{W-1}][\delta_W] = [m_{W-1}]$$

$$j = W : [J_W][\delta_{W-1}] + [K_W][\delta_W] = [m_W]$$

atau dapat dituliskan dalam bentuk berikut.

$$Y\delta = m \quad (4.152)$$

dengan

$$Y = \begin{bmatrix} [K_1] & [G_1] & & & & \\ [J_2] & [K_2] & [G_2] & & & \\ & [J_3] & [K_3] & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & [G_{W-2}] & \\ & & & [J_{W-1}] & [K_{W-1}] & [G_{W-1}] \\ & & & & [J_W] & [K_W] \end{bmatrix}$$

$$\delta = \begin{bmatrix} [\delta_1] \\ [\delta_2] \\ \vdots \\ [\delta_{W-1}] \\ [\delta_W] \end{bmatrix}, \quad m = \begin{bmatrix} [m_1] \\ [m_2] \\ \vdots \\ [m_{W-1}] \\ [m_W] \end{bmatrix}$$

untuk menyelesaikan persamaan (4.152) diasumsikan matriks

nonsingular dan dapat difaktorkan ke dalam

$$Y = LU \quad (4.153)$$

dimana matriks L dan U adalah sebagai berikut

$$L = \begin{bmatrix} [\gamma_1] & & & & \\ [J_2] & [\gamma_2] & & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & [J_{W-1}] & [\gamma_{W-1}] & \\ & & & [J_W] & [\gamma_W] \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} [I] & [P_1] & & & \\ & [I] & [P_2] & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & [I] & [P_{W-1}] \\ & & & & [I] \end{bmatrix}$$

Di mana $[I]$ adalah matriks identitas berukuran 5×5 , sedangkan $[\gamma_j]$ dan $[P_j]$ merupakan matriks berukuran 5×5 yang elemen-elemennya ditentukan berdasarkan persamaan berikut.

$$\begin{aligned} [\gamma_j] &= [K_j] \\ [K_1][P_j] &= [G_j] \\ [\gamma_j] &= [K_j] - [J_j][P_{j-1}], \quad j = 2, 3, 4, \dots, W \\ [\gamma_j][P_j] &= [G_j], \quad j = 2, 3, 4, \dots, W - 1 \end{aligned}$$

Kemudian, persamaan (4.153) disubstitusikan ke persamaan (4.152) maka diperoleh persamaan berikut

$$LU\delta = m \quad (4.154)$$

dengan $U\delta = Z$, maka

$$LZ = m \quad (4.155)$$

dengan

$$Z = \begin{bmatrix} [Z_1] \\ [Z_2] \\ \vdots \\ [Z_{W-1}] \\ [Z_W] \end{bmatrix}$$

dengan $[Z]$ merupakan suatu matriks yang berukuran 5×1 dimana setiap elemennya diperoleh dari persamaan (4.155), yaitu.

$$[a_1][Z_1] = [m_1]$$

$$[a_j][Z_j] = [m_j] - [J_j][Z_{j-1}]$$

Selanjutnya, persamaan (4.154) diselesaikan dengan menggunakan bentuk berikut.

$$[\delta_j][Z_1] = [m_1]$$

$$[\delta_j] = [Z_j] - [P_j][\delta_{j-1}], 1 \leq j \leq W - 1$$

Setelah seluruh elemen diperoleh, persamaan (4.122)–(4.126) dapat digunakan untuk menghitung iterasi ke- $(i + 1)$ dalam persamaan (4.114). Proses perhitungan ini dilakukan secara iteratif dan akan dihentikan ketika memenuhi kriteria konvergensi. Berdasarkan pendapat Cebeci dan Bradshaw, konvergensi ditentukan dengan menggunakan $v(0, t)$, dan iterasi dihentikan ketika perubahan $[\delta v(0, t)]$ menjadi sangat kecil. Dalam penelitian ini, digunakan nilai ambang konvergensi $\epsilon = 0.0001$.

G. Hasil Simulasi Numerik

Setelah menyelesaikan perhitungan numerik menggunakan metode beda hingga dalam skema Keller-Box, simulasi numerik dilakukan menggunakan MATLAB 2013a. Beberapa variasi parameter digunakan dalam tahap ini, yaitu variasi porositas, variasi magnetik, variasi konveksi, dan variasi Casson. Hal ini bertujuan untuk memahami pengaruhnya terhadap profil kecepatan dan temperatur fluida Casson yang mengalir melalui media berpori.

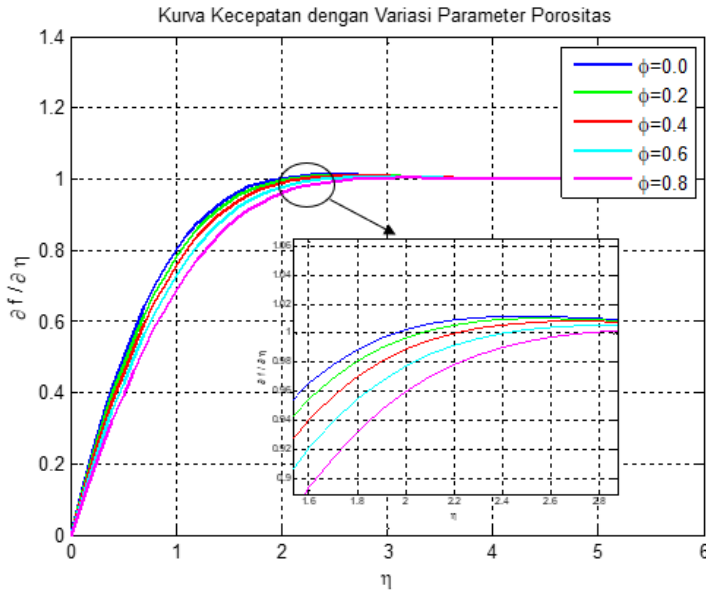
Dalam penelitian ini, simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan beberapa parameter input, yaitu jumlah partisi η sebanyak 60 ($\eta = 60$) dengan nilai $\Delta\eta = 0,1$, serta jumlah partisi waktu t sebanyak 33 ($t = 33$) dengan $\Delta t = 0,05$.

Di bawah ini disajikan hasil simulasi model matematika aliran fluida Casson yang melalui media berpori, dipengaruhi oleh parameter porositas, medan magnet, konveksi, dan sifat Casson. Pengaruhnya akan dianalisis berdasarkan variasi yang terdapat pada parameter porositas, parameter magnetik, parameter konveksi, dan parameter Casson.

1. Pengaruh Parameter Porositas (ϕ) pada Aliran Fluida Casson

Dalam simulasi ini, diperoleh pemahaman mengenai bagaimana perubahan parameter porositas memengaruhi profil kecepatan dan temperatur pada fluida Casson yang mengalir melalui media berpori, dengan variasi parameter porositas sebagai berikut: $(\phi) = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ (Das & Dey). Selain berbagai variasi parameter porositas, simulasi ini juga menerapkan nilai-nilai parameter lainnya, yaitu parameter magnetik (M) yang bernilai 1, parameter konveksi (λ) yang

bernilai 1, parameter bilangan Prandtl (Pr) yang bernilai 0.72, dan parameter Casson (β) yang bernilai 2.5. Berikut ini adalah hasil simulasi yang diperoleh berdasarkan perubahan nilai parameter porositas.

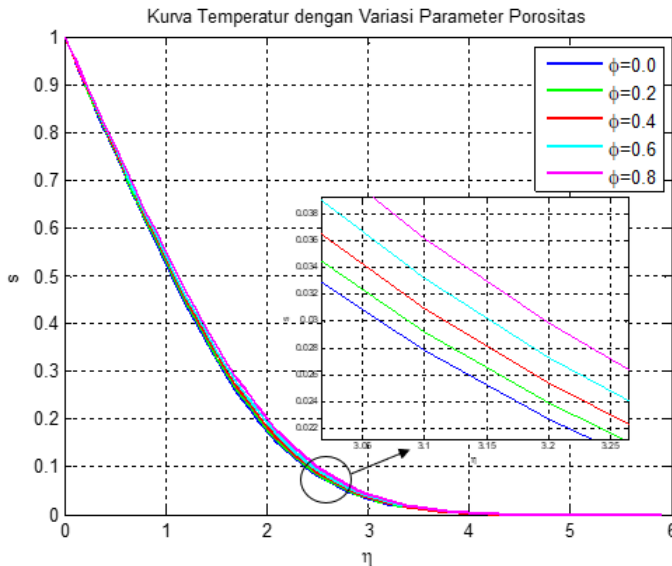


Gambar 4.5: Grafik Variasi Parameter Porositas Terhadap Profil Kecepatan

Kecepatan meningkat dari $f' = 0$ hingga $f' \approx 1$, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.5. Dari grafik pada gambar tersebut menunjukkan bahwa peningkatan nilai variasi parameter porositas menyebabkan kecepatan aliran fluida menurun. Penurunan kecepatan aliran fluida ini disebabkan karena bertambahnya hambatan dari media berpori, sehingga nilai variasi parameter porositas yang semakin tinggi maka kecepatan

fluida nya juga akan semakin menurun. Hal ini sejalan dengan penelitian yang telah dilakukan oleh Das dan Dey (2024).

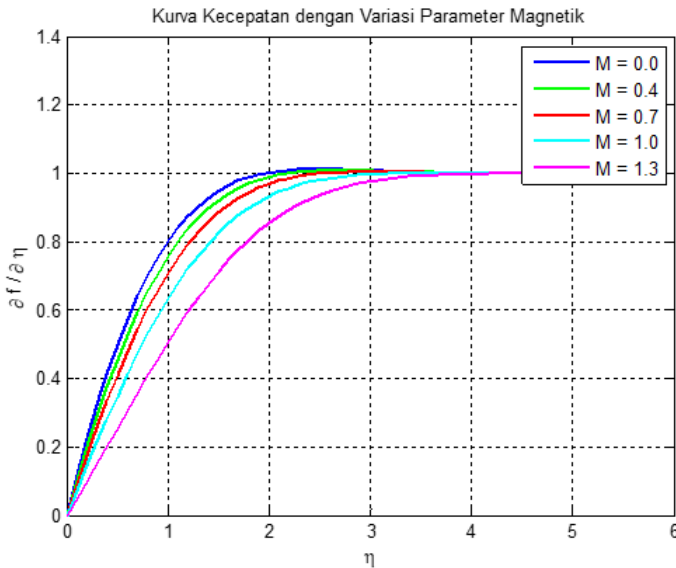
Pada Gambar 4.6 ditunjukkan hasil simulasi numerik mengenai temperatur aliran fluida Casson dengan variasi pada parameter porositas. Gambar tersebut menunjukkan terjadinya penurunan pada $f' = 1$ sampai $f' \approx 0$. Selain itu, gambar tersebut menunjukkan variasi parameter porositas terlihat bahwa semakin tinggi nilai parameter porositas, semakin tinggi temperatur fluida. Hal ini menunjukkan bahwa nilai parameter porositas yang lebih tinggi memiliki hambatan yang lebih rendah terhadap temperatur aliran fluida, sehingga temperatur aliran fluida meningkat. Hasil ini juga sejalan dengan penelitian Das dan Dey (2024).



Gambar 4.6: Grafik Variasi Parameter Porositas Terhadap Temperatur

2. Pengaruh Parameter Magnetik (M) pada Aliran Fluida Casson

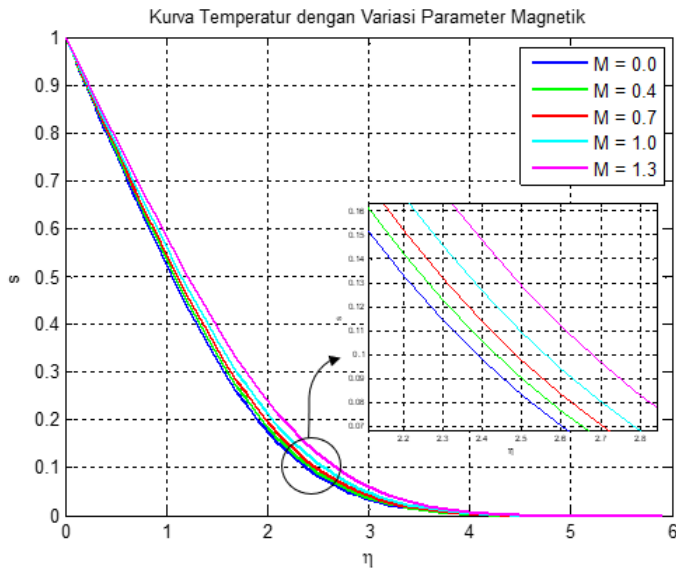
Dalam simulasi ini, dianalisis pengaruh variasi parameter medan magnet terhadap profil kecepatan dan temperatur fluida Casson yang mengalir melalui media berpori dengan menvariasikan parameter magnetik. Variasi parameter magnetik yang digunakan adalah $(M) = 0.0, 0.4, 0.7, 1.0, 1.3$ (Ganga et al., 2021). Parameter lainnya yang digunakan dalam simulasi ini meliputi porositas $(\phi) = 1$, parameter konveksi $(\lambda) = 1$, bilangan Prandtl $(Pr) = 0,72$, serta parameter Casson $(\beta) = 2,5$. Hasil dari pengaruh variasi parameter magnetik disajikan sebagai berikut.



Gambar 4.7: Grafik Variasi Parameter Magnetik Terhadap Profil Kecepatan

Pada Gambar 4.7, terlihat bahwa kecepatan fluida meningkat

dari $f' = 0$ hingga sekitar $f' \approx 1$. Grafik tersebut juga menampilkan perbedaan yang jelas pada setiap nilai variasi parameter magnetik, di mana peningkatan nilai parameter magnetik menyebabkan penurunan kecepatan fluida. Penurunan ini disebabkan oleh melemahnya gaya Lorentz yang berperan dalam sistem, sehingga medan magnet yang mempengaruhi fluida Casson juga ikut menurun. Secara matematis, hubungan ini dinyatakan dengan $M = \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho_f U_\infty}$, yang menunjukkan bahwa nilai M berbanding lurus dengan intensitas medan magnet B_0 . Akibat berkurangnya gaya Lorentz, gerakan partikel bermuatan dalam medan magnet menurun, menyebabkan laju aliran fluida menjadi lebih lambat.



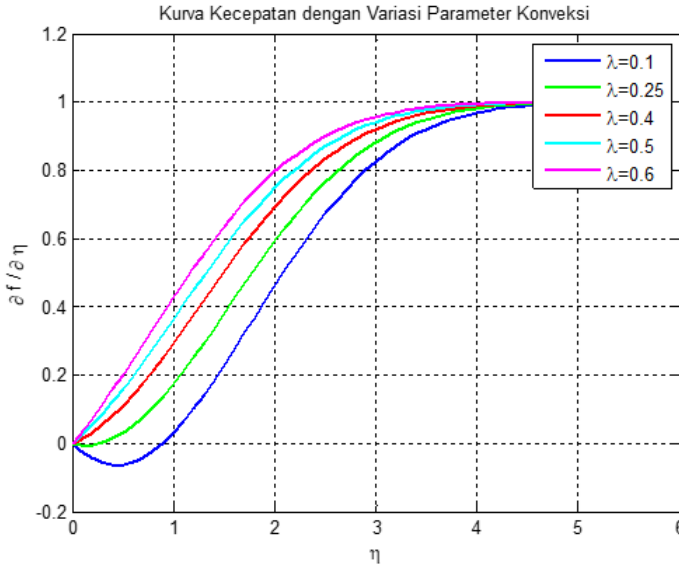
Gambar 4.8: Grafik Variasi Parameter Magnetik Terhadap Temperatur

Gambar 4.8 memperlihatkan temperatur menurun dari $s' = 1$ hingga $s \approx 0$. Dari grafik yang terlihat pada gambar tersebut, terlihat bahwa peningkatan nilai variasi parameter magnetik berakibat pada kenaikan temperatur. Kenaikan ini terjadi akibat meningkatnya energi internal yang diperlukan oleh fluida Casson untuk mempertahankan alirannya.

3. Pengaruh Parameter Konveksi (λ) pada Aliran Fluida Casson

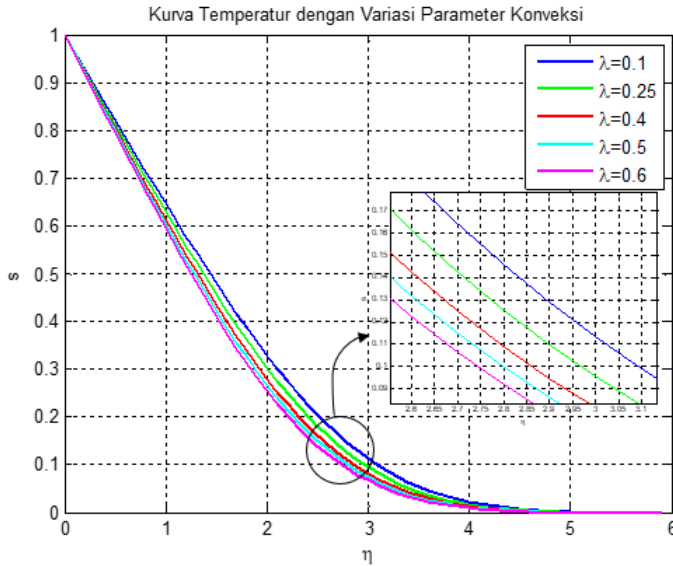
Dalam simulasi ini, variasi parameter konveksi diterapkan untuk memahami pengaruhnya terhadap profil kecepatan dan temperatur pada aliran fluida Casson yang melewati media berpori. Variasi parameter tersebut mencakup $(\lambda) = 0.1, 0.25, 0.4, 0.5, 0.6$ (Jalili et al., 2023). Selain variasi pada parameter konveksi, simulasi ini juga mengaplikasikan nilai parameter lainnya, yaitu nilai porositas (ϕ) sebesar 1, nilai parameter magnetik (M) sebesar 1, nilai bilangan Prandtl (Pr) sebesar 0.72, serta nilai parameter Casson (β) sebesar 2.5. Berikut ini adalah hasil simulasi yang dihasilkan dari variasi parameter konveksi.

Pada Gambar 4.9, terlihat adanya kenaikan nilai dari $f' = 0$ hingga mendekati $f' \approx 1$. Gambar ini juga menunjukkan perbedaan yang muncul akibat variasi nilai parameter konveksi, di mana semakin tinggi nilai parameter tersebut, maka semakin besar pula kecepatan aliran fluida. Hal ini disebabkan oleh peningkatan nilai parameter konveksi yang menyebabkan bertambahnya gaya apung yang bekerja pada fluida, sehingga mendorong kenaikan kecepatan aliran fluidanya.



Gambar 4.9: Grafik Variasi Parameter Konveksi Terhadap Profil Kecepatan

Bisa dilihat pada Gambar 4.10 bahwa ada penurunan nilai dari $s = 1$ hingga $f' \approx 0$. Ini menunjukkan bahwa temperatur fluida cenderung turun seiring dengan peningkatan variasi parameter konveksi. Hal ini dapat ditunjukkan secara matematis oleh $\lambda = \frac{Gr}{Re^2}$ dimana λ berbanding lurus dengan Gr , sedangkan untuk $Gr = \frac{g\theta(T_n - T_{tak hingga})a^3}{\nu^2}$ dapat juga dikatakan bahwa a berbanding lurus dengan Gr dan $(T_n - T_{tak hingga})$. Oleh sebab itu, penurunan temperatur yang terjadi ini dapat disebabkan karena adanya $(T_n - T_{tak hingga})$ yang semakin meningkat.



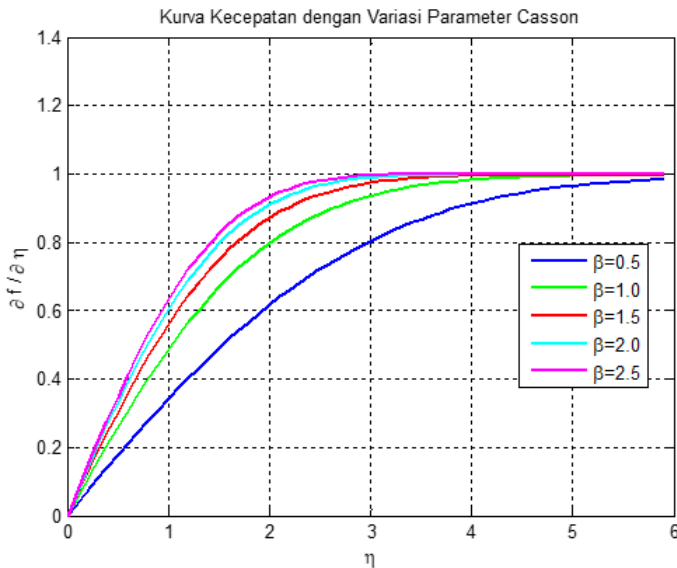
Gambar 4.10: Grafik Variasi Parameter Konveksi Terhadap Temperatur

4. Pengaruh Parameter Casson (β) pada Aliran Fluida Casson

Dalam simulasi ini, variasi parameter Casson diterapkan untuk memahami pengaruhnya terhadap profil kecepatan dan temperatur pada fluida Casson yang mengalir melalui media berpori. Variasi parameter Casson yang digunakan meliputi (β) = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 (Alqarni et al., 2022). Selain variasi parameter Casson, simulasi ini juga menerapkan nilai parameter lain, yaitu porositas (ϕ) sebesar = 1, parameter magnetik (λ) sebesar = 1, dan nilai bilangan Prandtl (Pr) sebesar = 0.72. Berikut ini adalah hasil simulasi yang dihasilkan dari variasi parameter Casson.

Tampak pada Gambar 4.11 bahwa terdapat peningkatan pada

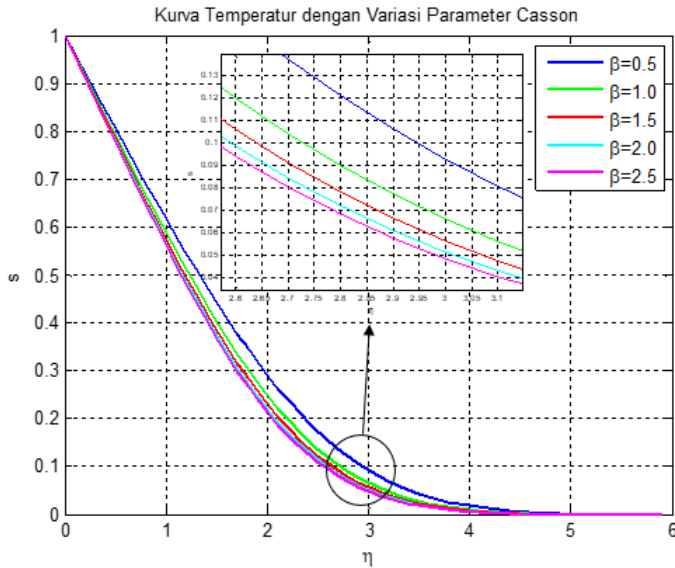
$f' = 0$ hingga $f' \approx 1$. Gambar tersebut menggambarkan perbedaan setiap nilai variasi parameter Casson, di mana semakin tinggi nilai variasi parameter Casson, maka kecepatan fluida juga akan semakin bertambah. Peningkatan nilai variasi parameter Casson terjadi karena pengaruh tegangan luluh (τ_0) yang tidak sebanding dengan viskositas (kc), sehingga kecepatan aliran fluida mengalami peningkatan.



Gambar 4.11: Grafik Variasi Parameter Casson Terhadap Profil Kecepatan

Pada Gambar 4.12, ditunjukkan hasil simulasi numerik mengenai temperatur aliran fluida Casson dengan perbedaan parameter Casson yang diterapkan. Dalam gambar tersebut, juga terlihat adanya perbedaan dari setiap nilai variasi parameter Casson, di mana terjadi penurunan dari $s' \approx 1$ menjadi $s' \approx$

0. Ketika nilai variasi parameter Casson meningkat, temperatur fluida cenderung menurun, hal ini terjadi karena pengaruh tegangan luluh yang menjadi berkurang. Akibatnya, temperatur fluida akan berkurang dengan lebih cepat.



Gambar 4.12: Grafik Variasi Parameter Casson Terhadap Temperatur

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa:

1. Model matematika aliran fluida Casson melalui media berpori didasarkan pada persamaan kontinuitas, momentum, dan energi, yang berasal dari Hukum Kekekalan Massa, Hukum Kedua Newton, dan Hukum Pertama Termodinamika. Kemudian persamaan ini dirangkai menjadi model persamaan non-dimensional dan diubah menjadi persamaan similaritas untuk menghasilkan model akhir aliran fluida Casson melalui media berpori yang dipengaruhi oleh parameter porositas, medan magnet, konveksi, dan Casson sebagai berikut.

$$\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) g' + \frac{\eta}{2} g + t(1 - (h)^2 + fg) + t(M + \Phi) \\ (h - 1) + \lambda st = t \frac{\partial f}{\partial t} \quad (5.1)$$

$$u' + \frac{Pr\eta}{2} u + Prt f u = Prt \frac{\partial s}{\partial t} \quad (5.2)$$

2. Model matematika aliran fluida Casson melalui media berpori dengan pengaruh parameter porositas, medan magnet, konveksi, dan Casson yang telah diperoleh diselesaikan secara numerik dengan menerapkan metode *Keller-Box*. Persamaan similaritas yang diperoleh sebelumnya dibentuk menjadi persamaan orde satu,

kemudian dilakukan diskritisasi dengan menggunakan metode beda hingga. Selanjutnya, diterapkan proses linearisasi dengan metode Newton dan dinyatakan dalam bentuk matriks vektor. Kemudian hasil persamaan tersebut diselesaikan dengan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal.

3. Hasil simulasi numerik dari model matematika aliran fluida Casson melalui media berpori ditunjukkan di bawah ini dengan menggunakan beberapa variasi parameter yaitu porositas, magnetik, konveksi, dan Casson terhadap profil kecepatan dan temperatur aliran fluida Casson, yang didapatkan dengan bantuan *software* MATLAB 2013a:

- (a) Parameter porositas (ϕ) yang memiliki nilai lebih tinggi menyebabkan penurunan pada profil kecepatan sementara temperatur aliran fluida Casson akan meningkat.
- (b) Peningkatan variasi parameter magnetik (M) yang lebih tinggi menyebabkan penurunan profil kecepatan aliran fluida Casson, sedangkan temperatur aliran fluida Casson akan mengalami peningkatan.
- (c) Variasi parameter konveksi (λ) yang lebih tinggi menyebabkan peningkatan pada profil kecepatan aliran fluida Casson, sementara temperatur fluida Casson mengalami penurunan.
- (d) Peningkatan nilai parameter Casson (β) mengakibatkan profil kecepatan aliran fluida Casson semakin tinggi, sementara temperatur aliran fluida Casson mengalami penurunan.

B. Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, disarankan agar penelitian selanjutnya mempertimbangkan aliran fluida Casson pada posisi selain titik stagnasi ($x \neq 0$). Dengan demikian, profil kecepatan dan temperatur di sekitar media berpori dapat dianalisis lebih luas dan mendalam.

DAFTAR PUSTAKA

- Alqarni, M. M., Bilal, M., Allogmany, R., Tag-Eldin, E., Ghoneim, M. E., and Yassen, M. F. (2022). Mathematical analysis of Casson fluid flow with energy and mass transfer under the influence of activation energy from a non-coaxially spinning disc. *Frontiers in Energy Research*, 10:986284. <https://doi.org/10.3389/fenrg.2022.986284>
- Al-Shibani, F.S., Ismail, A.I. Md., dan Abdullah, F.A. (2012). The implicit Keller box method for the one dimensional time fractional diffusion equation. *Journal of Applied Mathematics & Bioinformatics*, 2(3), 1792-6939.
- Al-Saad, Mohammed et al. (2022). Simulation of blood flow in human arteries as porous media. *Journal homepage*, 1-11.
- Anwar, T., Poom Kumam dan Wiboonsak Watthayu. (2021). Unsteady MHD natural convection flow of Casson fluid incorporating thermal radiative flux and heat injection/suction mechanism under variable wall conditions. *Scientific Reports*, 11:4275.
- Arifin, Ahmad Zaenal. (2021). Simulasi Dampak Penghalang pada Gelombang Tsunami Menggunakan Persamaan Air Dangkal dengan Metode Beda Hingga. *Jambura Journal Of Mathematics*, 3(2), 93-102.
- Arsita, S., Bayu Prihandono, dan Nilamsari Kusumastuti. (2024). Pemodelan fluks pada aliran darah. *Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)*, 523-532.
- Asim, S. B., Evi Noviani, dan Helmi Helmi. (2023). Pemodelan aliran fluida bidang miring pada lapisan tipis. *Jurnal Matematika Integratif*, 19(1), 125-136.

- Awais, Muhammad et al. (2021). Heat and mass transfer phenomenon for the dynamics of Casson fluid through porous medium over shrinking wall subject to Lorentz force and heat source/sink. *Alexandria Engineering Journal*, 1355-1363.
- Das, R. K. dan Debasish Dey. (2024). Casson Fluid Flow Past a Shrinking Surface with Heat and Mass Transfers. *East European Journal of Physics*, 243-249.
- Eldabe, Nabil T. et al. (2021). Electromagnetic steady motion of Casson fluid with heat and mass transfer through porous medium past a shrinking surface. *Thermal Science*, 25(1A), 257-265.
- Elsanoose, Abadelhalim et al. (2022). Estimating of Non-Darcy Flow Coefficient in Artificial Porous Media. *Energies*, **15**(3), 1197.
- Endalew, M. F. and Subharthi Sarkar. (2023). Modeling and Analysis of Unsteady Casson Fluid Flow Due to an Exponentially Accelerating Plate with Thermal and Solutal Convective Boundary Conditions. *Journal of Applied Mathematics*, 1-13.
- Ganga, B. et al. (2021). Three Dimensional MHD Casson Fluid Flow Over a Stretching Surface with Variable Thermal Conductivity. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 20(1), 25-36.
- Ghazali, A. F. et al. (2023). Analisis Kavitas pada Redesain Sistem Perpipa Pompa Sentrifugal di Graving Dock. *Jurnal Teknologi Maritim*, 2620-4916.

- Gunawan, Putu Harry, (2021). *Pengantar Persamaan Diferensial Parsial untuk Sains dan Teknik*, edisi 1, Sastrabook Indonesia, Banguntapan,
- Hariyadi, S. (2017). Analisis perbandingan velocity dan shear stress perkembangan boundary layer flat plate menggunakan turbulent model $k-\epsilon$ (Standard, Realizable, RNG). *Jurnal Penelitian*, 27-37.
- Haslinda. (2023). Analisis kekuatan tegangan geser pada baja karbon sedang dari hasil sambungan las titik. *Journal of Natural Science and Technology Adpertisi*, 3(2), 2807-1913.
- Hendratta, Liany Amelia dan Hanny Tangkudung. (2019). Mekanika fluida. Manado: *Unsrat Press*.
- Huda, L. A. et al. (2023). Studi eksperimental pengaruh convective heat transfer terhadap pressure drop pada aliran dua fase gas-cair fluida Newtonian dan non-Newtonian dalam square microchannel. *Journal of Mechanical Design and Testing*, 5(2), 59-70.
- Irawati, L. (2010). Viskositas Darah Dan Aspek Medisnya. *Majalah Kedokteran Andalas*, 34(2), 102-111.
- Irfan. Muhammad dan Deddy Supriyatna. (2024). Konsep dasar mekanika fluida. *Kohesi: Jurnal Multidisiplin Saintek*, 3 No. 2, 1-10.
- Jalili, P., Ali Ahmadi Azar, Bahram Jalili, dan Davood Domiri Ganji (2023). Study of nonlinear radiative heat transfer with magnetic field for non-Newtonian Casson fluid flow in a porous medium. *Journal homepage*.
- Jamshed, Wasim dan Kottakkaran Sooppy Nisar. (2021). Computational single-phase comparative study of a

- Williamson nanofluid in a parabolic trough solar collector via the Keller box method. *International Journal of Energy Research*, 1–23.
- Kemon, Fanila O. A. dan Karmila Laitupa. (2022). Studi Pengaruh Kadar Air dan Porositas terhadap Nilai Kuat Tekan Uniaxial Batu Andesit di Saoka Sorong Provinsi Papua Barat. *INTAN Jurnal Penelitian Tambang*, 5(1).
- Kusumaningsih, H., M. Rian Alif Madani, Muhammad Fakhri Alfath, et al. (2022). Karakteristik pola aliran dua fase gas-cairan non-Newtonian di dalam microchannels berpampang persegi. *Rekayasa Mesin*, 563-576.
- Kusyani, A., Dewi Wulandari, dan Ixora. (2024) *Standar Asuhan Keperawatan pada Pasien Hipertensi*.
- Laila, S. (2016). Pengaruh Aliran Konveksi Campuran yang Melewati Suatu Bola Berpori pada Fluida Nano. *Skripsi*.
- Leal, L. G., (2007), *Advance Transport Phenomena*, Cambridge University Press.
- Mayagrafinda, Isnainatul dan Basuki Widodo. (2022). Magnetohidrodinamika Fluida Nano yang Melalui Silinder Vertikal Berpori. *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika*. 6(1). 31-39.
- Murtafi'ah, Wasilatul dan Davi Apriandi. (2018). *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya*, UNIPMA Press, Madiun,
- Naibaho, Tondi N. L. S. V., Ainul Ghurri, dan Anak Agung Adhi Suryawan. (2020). Simulasi drag reduction pada tractor trailer dengan penambahan boot tail. *Jurnal Ilmiah Teknik Desain Mekanika*, 00-00.

- Nield, Donald A. dan Adrian Bejan. (2019). *Convection in Porous Media* (3rd ed.). New Zealand.
- Norasia, Y. Ajeng Oxa Nisa, dan Sitti Rosnafi'an Sumardi. (2024). The effect of nanoparticles on drug distribution in the mathematical model of blood flow. *Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*, 51-60.
- Norasia, Y. Mohamad Tafrikan, Mohammad Ghani. (2022). Laminar Viscous Fluid Flow with Micro-rotation Capabilities through Cylindrical Surface. *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*, 6(4), 865-875 .
- Palupi, Indriati R. et al. (2018). Pemodelan Tsunami Sederhana dengan Menggunakan Persamaan Diferensial Parsial. *Indonesia Journal of Applied Physics*. 8(1), 26.
- Pamela, Eirene Juwitaningtyas dan Basuki Widodo. (2023). Magnetohidrodinamika Radiatif Ferrofluid yang Mengalir di Atas Permukaan Bola Berpori Bermagnet. *JURNAL SAINS DAN SENI ITS* 12(2) , 2337-3520.
- Prakash, J. et al. (2016). Heat and mass transfer hydromagnetic radiative Casson fluid flow over an exponentially stretching sheet with heat source/sink. *International Journal of Engineering Science Invention*, 12-23.
- Ramya, Dodda et al (2018). Effects of velocity and thermal wall slip on magnetohydrodynamics (MHD) boundary layer viscous flow and heat transfer of a nanofluid over a non-linearly-stretching sheet: a numerical study. *Propulsion and Power Research*, 7(2), 182-195.
- Ramzan, M. et al. (2021). Unsteady Free Convective Magnetohydrodynamics Flow of a Casson Fluid Through

- a Channel with Double Diffusion and Ramp Temperature and Concentration. *Math Meth Appl Sci*, 1-20.
- Reddy, G. J. et al. (2017). A molecular dynamics study on transient non-Newtonian MHD Casson fluid flow dispersion over a radiative vertical cylinder with entropy heat generation. *Journal of Molecular Liquids*.
- Riani, N. I., Aini Lostari, dan Moh. Agus Wahyudi. (2023). Pengaruh variasi diameter pipa dan bukaan katup pada alat uji Osborne Reynolds apparatus. *R.E.M. (Rekayasa Energi Manufaktur) Jurnal*, 8(1), 2528-3723.
- Rafique, Khuram et al (2019). Numerical Analysis with Keller-Box Scheme for Stagnation Point Effect on Flow of Micropolar Nanofluid over an Inclined Surface. *Symmetry*, 11(11), 1379.
- Riupassa, Helen dan Welby Girik Allo. (2019). Analisis Konveksi Alami dan Paksa dengan Variasi Material. *Jurnal Teknik Mesin*, 8(1), 39–48.
- Romdani, Andhy. (2024). Mekanika fluida: Teori fundamental dan aplikasinya. Kabupaten Sumedang: CV. Mega Press Nusantara.
- Ruslan, W. (2020). *Semburan Fluida Berpusar di dalam Ruang-Bakar Motor-Bakar Torak: Kiat-Kiat Memahami Semburan Berpusar*. Penerbit Universitas Katolik Indonesia Atma Jaya.
- Sa'adah, S. (2018). Sistem Peredaran Darah Manusia. Bandung
- Sahaya, Rina, Basuki Widodo, dan Chairul Imron. (2016). Aliran Fluida Magnetohidrodinamik Viskoelastis Tersuspensi yang Melewati Pelat Datar. *Jurnal Sains dan Seni ITS*, 5(2), 2337–3520.

- Salamba, Hafrison dan Edi Iskandar. (2020). Penggunaan peralatan eksperimen karakteristik aliran laminar melewati berbagai bentuk dan model interaksi benda. *SINERGI*, Volume 18(2), 224-232.
- Setiadi, H. (2020). *Sistem peredaran darah*. SEAMEO QITEP in Science.
- Sharma, Bhupesh Dutt dan Pramod Kumar Yadav. (2017). A two-layer mathematical model of blood flow. *Transport in Porous Media*.
- Sohail, M., Zahir Shah, Asifa Tassaddiq, Poom Kumam dan Prosun Roy. (2020). Entropy generation in MHD Casson fluid flow with variable heat conductance and thermal conductivity over non-linear bi-directional stretching surface. *Scientific Reports*, 10:12530.
- Suryanto, Andi dan Syamsul Bakhri. (2023). *Fluida*. Wade Group.
- Trimulyono, B., dan Deddy Supriyatna. (2024). Analisis aliran fluida cair dan pengurangan tekanan pada pipa L dengan metode simulasi komputasi. *Kohesi: Jurnal Multidisiplin Saintek*, 3(2), 31-35.
- Ubaidillah, Firdaus, (2020). *PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA*, UPT Percetakan & Penerbitan Universitas Jember. ISBN: 978-623-7973-23-2.
- Verma, Veenit Kr. dan Sabyasachi Mondal. (2021). A brief review of numerical methods for heat and mass transfer of Casson fluids. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 3, 100034.
- Wahyudi, N., H. S. B. Rochardjo, dan J. Waluyo, (2022). Karakterisasi Permeabilitas Serabut Kelapa sebagai Bahan

- Media Filtrasi, *Journal of Mechanical Design and Testing*, vol. 4, no. 1, pp. 10–24, 2022. DOI: <http://dx.doi.org/10.22146/jmdt.62971>,
- Wajihah, Afqah dan D.S. Sankar. (2021). Effects of porosity in four-layered non-linear blood rheology in constricted narrow arteries with clinical applications. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*.
- White, F. M. (2009). *Fluid Mechanics* (7th ed.). McGraw-Hill.
- Widodo, Basuki dan Tunjung Eviloka. (2022). Analisis aliran konveksi campuran fluida viskoelastik melewati bola teriris yang dipengaruhi medan magnet. *Jurnal Sains dan Seni ITS*, 11(2), 2337-3520.
- Widodo, B., Maulidyani Abu, dan Chairul Imron. (2019). Unsteady nano fluida flow through magnetic porous sphere under the influence of mixed convection. *Journal of Physics: Conference Series*, 153(1), 012053.
- Widowati, Hesty dan Evi Rinata. (2020) *Buku Ajar Anatomi*. Sidoarjo: UMSIDA Press.
- Wijaya, Riki Chandra. (2022). Mekanika gelombang laut dan sungai. Bandarlampung: *PUSAKA MEDIA Anggota IKAPI*.
- Yolantari, D., Suhayat Minardi, Alfina Taurida Alaydrus. (2023). Monitoring dinamika fluida menggunakan metode geolistrik antar waktu di kawasan Mandalika, Pulau Lombok. *Jurnal Pertambangan dan Lingkungan*, 2775-1384.

Lampiran 1. Persamaan Similaritas

Persamaan non-dimensional yang telah didapatkan dirubah ke persamaan similaritas dengan mentransformasikan persamaan tersebut ke dalam variabel similaritas berikut.

$$\psi = t^{\frac{1}{2}} u_e(x) f(x, \eta, t); \quad \eta = \frac{y}{t^{\frac{1}{2}}}; \quad T = s(x, \eta, t) \quad (1.1)$$

1. Persamaan Momentum

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \\ &+ (M + \phi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \lambda T \sin x \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{t^{1/2}} \right) = \frac{1}{t^{1/2}}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{y}{t^{1/2}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(t^{1/2} u_e(x) f(x, \eta, t) \right) \frac{1}{t^{1/2}} \\ &= \frac{t^{1/2} u_e(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\ &= u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(t^{1/2} u_e(x) f(x, \eta, t) \right) \\
&= t^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} (u_e(x) f(x, \eta, t)) \\
&= t^{1/2} f(x, \eta, t) \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} + u_e(x) t^{1/2} f(x, \eta, t) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= u_e(x) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{1}{t^{1/2}} \\
&= \frac{u_e(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_e(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_e(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \frac{u_e(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3} \left(\frac{1}{t^{1/2}} \right) \\
&= \frac{u_e(x)}{t} \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= u_e(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \left(-\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right) + u_e(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta} \\
&= -\frac{u_e(x) \eta}{2t} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} + u_e(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta}.
\end{aligned}$$

Selanjutnya $u_e(x)$ dan $f(x, \eta, t)$ dapat ditulis menjadi $u_e(x) = u_e$ dan $f(x, \eta, t) = f$, sehingga diperoleh persamaan momentum sebagai berikut.

Ruas kiri

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\
&\Leftrightarrow \left(-\frac{u_e \eta}{2t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \right) + \left[\left(u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) \right. \\
&\quad \left. \left(t^{1/2} f \frac{\partial u_e}{\partial x} + t^{1/2} u_e \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{u_e}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \right] \\
&\Leftrightarrow -\frac{u_e \eta}{2t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \\
&\quad - t^{1/2} f \frac{u_e}{t^{1/2}} \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - t^{1/2} u_e \frac{\partial f}{\partial x} \frac{u_e}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
&\Leftrightarrow -\frac{u_e \eta}{2t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \\
&\quad - u_e f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{u_e}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

Ruas kanan

$$\begin{aligned}
 & u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + (M + \phi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e\right) + \lambda T \sin x \\
 \Leftrightarrow & \quad u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}\right) + (M + \phi) \left(u_e \frac{\partial f}{\partial t} - u_e\right) \\
 & \quad - \lambda s \sin x \\
 \Leftrightarrow & \quad u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{u_e}{t} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}\right) + u_e (M + \phi) \left(\frac{\partial f}{\partial t} - 1\right) \\
 & \quad - \lambda s \sin x
 \end{aligned}$$

Ruas kiri-kanan

$$\begin{aligned}
 & - \frac{u_e \eta}{2t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \\
 & - u_e f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{u_e}{t} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \\
 & \quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}\right) + u_e (M + \phi) \left(\frac{\partial f}{\partial t} - 1\right) - \lambda s \sin x
 \end{aligned}$$

kedua ruas dikali dengan $\frac{t}{u_e}$, diperoleh

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + t u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \\
 & - t f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - t u_e \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = t \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \\
 & \quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}\right) + t (M + \phi) \left(\frac{\partial f}{\partial t} - 1\right) - \lambda s t \frac{\sin x}{u_e}
 \end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta}\right] = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \\ - t(M + \phi) \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1\right) - \lambda s t \frac{\sin x}{u_e} \end{aligned}$$

2. Persamaan Energi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

dengan

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \left(-\frac{1}{2} \frac{\eta}{t}\right) + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial x} \\ &= \left(-\frac{\eta}{2t}\right) \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \left(\frac{1}{t^{1/2}}\right) \\ &= \frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{1}{t^{1/2}} \\
&= \frac{1}{t^{1/2}} \left(\frac{\partial^2 s(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

Selanjutnya dapat dituliskan $s(x, \eta, t) = s$, maka persamaan similaritas untuk persamaan energi adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\
\Leftrightarrow &\left(-\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} \right) + \left(u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} \right) - \left(t^{1/2} f \frac{\partial u_e}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + t^{1/2} u_e \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{t} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \\
\Leftrightarrow &-\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \left(f \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\
&\frac{\partial^2 s}{\partial \eta} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{t} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

kedua ruas dikali dengan $Pr t$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&-Pr t \frac{\eta}{2t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Pr t \frac{\partial s}{\partial t} + Pr t u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - Pr t f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \\
&\quad - Pr t u_e \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \frac{Pr\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Prtf \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} = Prt \left[\frac{\partial s}{\partial t} + u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \right) \right]$$

Lampiran 2. Penurunan Kondisi Awal

Persamaan yang digunakan untuk menentukan kondisi awal yaitu sebagai berikut.

$$\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) f''' + \frac{\eta}{2} f'' + t(1 - (f')^2 + f f'') + t(M - \phi)(f' - 1) + \lambda s t = t \frac{\partial f'}{\partial t}$$

$$s'' + \frac{Pr\eta}{2} s' + Prt f s' = Prt \frac{\partial s}{\partial t}$$

dengan mensubsitusikan $t = 0$ maka diperoleh persamaan berikut.

$$\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) f''' + \frac{\eta}{2} f'' = 0$$

$$s'' + \frac{Pr\eta}{2} s' = 0$$

untuk mendapatkan f digunakan persamaan

$$\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) f''' + \frac{\eta}{2} f'' = 0$$

diubah terlebih dahulu kedalam bentuk persamaan diferensial tingkat satu, dengan memisalkan $f'' = s$ sehingga persamaan menjadi

$$\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) s' + \frac{\eta}{2} s = 0$$

dengan $s' = \frac{\partial s}{\partial \eta}$, maka diperoleh

$$\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) ds + \frac{\eta}{2} s d\eta = 0$$

$$\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) ds = -\frac{\eta}{2} s d\eta$$

kedua ruas diintegrasikan sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \ln s &= -\frac{\eta^2}{4} + c_1 \\ \ln s &= -\frac{\eta^2}{4\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} + \frac{c_1}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \\ s &= e^{-\frac{\eta^2}{4\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} + \frac{c_1}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}} \\ s &= e^{-\frac{\eta^2}{4\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}} e^{\frac{c_1}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}}\end{aligned}$$

karena $s = f''$ maka

$$\begin{aligned}f'' &= e^{-\frac{\eta^2}{4\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}} e^{\frac{c_1}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}} \\ f' &= \int e^{-\frac{\eta^2}{4\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}} e^{\frac{c_1}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}} d\eta \\ f' &= e^{\frac{c_1}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}} \int e^{-\frac{\eta^2}{4\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}} d\eta\end{aligned}$$

dengan menggunakan rumus integral eksponensial, yaitu

$$\int e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4c}} \operatorname{erf}(\sqrt{cx})$$

sehingga diperoleh

$$\int e^{-\frac{\eta^2}{4\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}} d\eta = \sqrt{\frac{\pi}{4\left(\frac{1}{4\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}\right)}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\eta^2}{4\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}}\right) + c_2$$

$$= \sqrt{\pi \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{1 + \frac{1}{\beta}}} \right) + c_2$$

maka f' diperoleh

$$f' = e^{\frac{c_1}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}} \sqrt{\pi \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{1 + \frac{1}{\beta}}} \right) + c_2$$

Selanjutnya akan dicari nilai $e^{\frac{c_1}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}}$ dan c_2

- Pada saat $\eta = 0$

$$0 = e^{\frac{c_1}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}} \sqrt{\pi \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \operatorname{erf}(0) + c_2$$

karena $\operatorname{erf}(0)$ maka

$$c_2 = 0$$

- Pada saat $\eta = \infty$

$$1 = e^{\frac{c_1}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}} \sqrt{\pi \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \operatorname{erf}(\infty) + 0$$

karena $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ maka diperoleh

$$1 = e^{\frac{c_1}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}} \sqrt{\pi \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}$$

atau dapat ditulis

$$e^{\frac{c_1}{(1+\frac{1}{\beta})}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}}$$

dengan mensubstitusikan $e^{\frac{c_1}{(1+\frac{1}{\beta})}}$ dan c_2 ke f' diperoleh

$$f' = \frac{1}{\sqrt{\pi \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}} \sqrt{\pi \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{1 + \frac{1}{\beta}}} \right) + 0$$

$$f' = \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{1 + \frac{1}{\beta}}} \right)$$

dengan mensubstitusikan $e^{\frac{c_1}{(1+\frac{1}{\beta})}}$ ke f'' maka diperoleh

$$\begin{aligned} f'' &= e^{-\frac{\eta^2}{4(1+\frac{1}{\beta})}} e^{\frac{c_1}{(1+\frac{1}{\beta})}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1+\frac{1}{\beta})}} \end{aligned}$$

Selanjutnya mencari nilai f dengan

$$f = \int f' d\eta$$

diperoleh

$$f = \int \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{1 + \frac{1}{\beta}}} \right) d\eta$$

dengan menggunakan integral fungsi *erf* yaitu

$$\int \operatorname{erf}(az) dz = z \operatorname{erf}(az) + \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-a^2 z^2}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} f &= \eta \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{1+\frac{1}{\beta}}} \right) + \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{\beta}}}\sqrt{\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{\beta}}}\right)^2 \eta^2} + c_3 \\ &= \eta \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{1+\frac{1}{\beta}}} \right) + \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{\beta}}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{4\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}} + c_3 \end{aligned}$$

dengan kondisi batas $f = 0$ pada saat $\eta = 0$, maka diperoleh nilai c_3 sebagai berikut.

$$0 = \eta \operatorname{erf}(0) + \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{\beta}}}{\sqrt{\pi}} e^0 + c_3$$

atau dapat ditulis

$$c_3 = -\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{\beta}}}{\sqrt{\pi}}$$

dengan mensubstitusikan c_3 ke f diperoleh

$$\begin{aligned} f &= \eta \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{1+\frac{1}{\beta}}} \right) + \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{\beta}}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{4\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}} - \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{\beta}}}{\sqrt{\pi}} \\ &= \eta \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{1+\frac{1}{\beta}}} \right) + \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{\beta}}}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-\frac{\eta^2}{4\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Selanjutnya dilakukan penyelesaian untuk mendapatkan s dengan menggunakan persamaan berikut.

$$s'' + \frac{Pr\eta}{2}s' = 0$$

dengan memisalkan $s' = k$ sehingga diperoleh

$$k' + \frac{Pr\eta}{2}k = 0$$

dengan $k' = \frac{dk}{d\eta}$, maka dapat dituliskan

$$dk + \frac{Pr\eta}{2}k d\eta = 0$$

kedua ruas dibagi dengan k sehingga didapatkan

$$\frac{1}{k}dk + \frac{Pr\eta}{2}d\eta = 0$$

lalu kedua ruas diintegrasikan diperoleh

$$\begin{aligned}\ln k + \frac{Pr\eta^2}{4} &= c_4 \\ \ln k &= -\frac{Pr\eta^2}{4} + c_4 \\ k &= e^{-\frac{Pr\eta^2}{4} + c_4} \\ k &= e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} e^{c_4}\end{aligned}$$

karena $k = s'$, maka untuk s diperoleh

$$s = \int e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} e^{c_4} d\eta$$

atau dapat ditulis

$$s = e^{c_4} \int e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} d\eta$$

dengan menggunakan rumus integral eksponensial, yaitu

$$\int e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4c}} \operatorname{erf}(\sqrt{cx})$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} d\eta &= \sqrt{\frac{\pi}{4\left(\frac{Pr}{4}\right)}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{Pr}{4}}\eta\right) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{Pr}} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{Pr}\eta}{2}\right) + c_5 \end{aligned}$$

Sehingga untuk s diperoleh

$$s = e^{c_4} \sqrt{\frac{\pi}{Pr}} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{Pr}\eta}{2}\right) + c_5$$

Selanjutnya dicari e^{c_4} dan c_5

- Pada saat $\eta = 0$

$$1 = e^{c_4} \sqrt{\frac{\pi}{Pr}} \operatorname{erf}(0) + c_5$$

karena $\operatorname{erf}(0) = 0$, maka

$$c_5 = 1$$

- Pada saat $\eta = \infty$

$$0 = e^{c_4} \sqrt{\frac{\pi}{Pr}} \operatorname{erf}(\infty) + 1$$

karena $\operatorname{erf}(\infty) = 1$, maka

$$-1 = e^{c_4} \sqrt{\frac{\pi}{Pr}}$$

atau dapat ditulis

$$e^{c_4} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{Pr}}} \rightarrow e^{c_4} = -\sqrt{\frac{Pr}{\pi}}$$

dengan substitusi e^{c_4} dan c_5 ke s , maka diperoleh

$$\begin{aligned} s &= -\sqrt{\frac{Pr}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{Pr}} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2} \sqrt{Pr}\right) + 1 \\ &= -\operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2} \sqrt{Pr}\right) + 1 \end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan e^{c_4} ke s' , diperoleh

$$\begin{aligned} s' &= e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} e^{c_4} \\ &= e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} \left(-\sqrt{\frac{Pr}{\pi}} \right) \\ &= -e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} \sqrt{\frac{Pr}{\pi}} \end{aligned}$$

Lampiran 3. Pembuktian Parameter Casson

Membuktikan bahwa $k_c + \frac{\tau_0}{\sqrt{2\pi_c}} = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$

$$\begin{aligned}
 & k_c + \frac{\tau_0}{\sqrt{2\pi_c}} \\
 \Leftrightarrow & k_c + \frac{\tau_0 \sqrt{2\pi_c}}{2\pi_c} \\
 \Leftrightarrow & \frac{k_c \cdot 2\pi_c}{k_c \cdot 2\pi_c} + \frac{\tau_0 \sqrt{2\pi_c}}{k_c \cdot 2\pi_c} \\
 \Leftrightarrow & 1 + \frac{\tau_0 \sqrt{2\pi_c}}{k_c \cdot 2\pi_c} \\
 \Leftrightarrow & 1 + \left(\frac{\tau_0 \sqrt{2\pi_c}}{k_c \cdot 2\pi_c} \cdot \frac{\sqrt{2\pi_c}}{\sqrt{2\pi_c}} \right) \\
 \Leftrightarrow & 1 + \frac{\tau_0 \cdot 2\pi_c}{2\pi_c k_c \sqrt{2\pi_c}} \\
 \Leftrightarrow & 1 + \frac{\tau_0}{k_c \sqrt{2\pi_c}}
 \end{aligned}$$

Dengan dimiliki definisi $\beta = \frac{k_c \sqrt{2\pi_c}}{\tau_0}$ maka didapatkan $\tau_0 = \frac{k_c \sqrt{2\pi_c}}{\beta}$, kemudian substitusikan τ_0 ke dalam persamaan di atas sehingga diperoleh

$$1 + \frac{\tau_0}{k_c \sqrt{2\pi_c}} = 1 + \frac{\left(\frac{k_c \sqrt{2\pi_c}}{\beta}\right)}{k_c \sqrt{2\pi_c}} = 1 + \frac{k_c \sqrt{2\pi_c}}{\beta k_c \sqrt{2\pi_c}} = 1 + \frac{1}{\beta}$$

Sehingga terbukti bahwa $k_c + \frac{\tau_0}{\sqrt{2\pi_c}} = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$.

Lampiran 4. Script MATLAB 2013A

Permisalan notasi yang digunakan dalam script adalah

$$f = f$$

$$u = h$$

$$v = g$$

$$s = s$$

$$q = u$$

```
clear 'all'
clc
close 'all'
format 'long'

np = 60; %%banyak partial eta
nt = 33; %%banyak partisi waktu
ntl = 1.65; %% banyak partii waktu untuk small time
Pr = 0.72; %% bilangan Prandtl
eta(1) = 0;
etac(1) =0;

%%Nilai Awal Parameter yang di Variasi
Po = 1; %input('input parameter porositas = ');
M = 1; %input('input parameter medan magnet =');
%lambda = 1; %input('input parameter konveksi =');
beta = 2.5; %% Parameter Casson
```

```

%%Nilai Awal Partisi
deleta = 0.1; %step size dari eta
delt = 0.05; %step size dari waktu

%%Input Variasi Parameter
% Parameter_Porositas(1) = 0.0;
% Parameter_Porositas(2) = 0.2;
% Parameter_Porositas(3) = 0.4;
% Parameter_Porositas(4) = 0.6;
% Parameter_Porositas(5) = 0.8;
% Magnetik(1)=0.0;
% Magnetik(2)=0.4;
% Magnetik(3)=0.7;
% Magnetik(4)=1.0;
% Magnetik(5)=1.3;
Parameter_Konveksi(1) = 0.1;
Parameter_Konveksi(2) = 0.25;
Parameter_Konveksi(3) = 0.4;
Parameter_Konveksi(4) = 0.5;
Parameter_Konveksi(5) = 0.6;
% Parameter_Casson(1) = 0.5;
% Parameter_Casson(2) = 1.0;
% Parameter_Casson(3) = 1.5;
% Parameter_Casson(4) = 2.0;
% Parameter_Casson(5) = 2.5;

%%Perhitungan eta dan eta^(j-1/1)
for j = 2:np
    eta(j) = eta(j-1) +deleta;
    etac(j) = 0.5*(eta(j) + eta(j-1));
end

```

```

%%Perhitungan waktu t dan t^(n-1/2)
for n = 1:nt
    if n ==1
        t(1) = 0;
        t1(1) = 0;
    else
        t(n) = t(n-1) + delt;
        t1(n) = 0.5*(t(n) + t(n-1));
    end
end

end

for i=1:5
    %Po = Parameter_Porositas(i);
    %M = Magnetik(i);
    lambda = Parameter_Konveksi(i);
    beta = Parameter_Casson(i);
    for n = 1:nt
        k = 1;
        stop = 1;
        while stop > 0.00001

%% Intial Condition
        for j = 1:np
            if n == 1
                f(j,1,n) = eta(j)*erf((0.5*sqrt((1+(1/beta))))*eta(j))
                + (2*sqrt((1+(1/beta)))/sqrt(pi))* (exp(-0.25*(eta(j)^2
                /(1+(1/beta)))-1);
                u(j,1,n) = erf(0.5*eta(j)/sqrt((1+(1/beta)))));
                v(j,1,n) = (1/sqrt(pi*(1+(1/beta))))*(exp(-0.25*
                ((eta(j)^2)/(1+(1/beta)))));
            end
        end
    end
end

```

```

s(j,1,n) = 1-erf(0.5*eta(j)*sqrt(Pr));
q(j,1,n) = -exp(-0.25*Pr*(eta(j)^2))*(sqrt(Pr/pi));
else
    f(j,1,n) = ff(j,n-1);
    u(j,1,n) = uu(j,n-1);
    v(j,1,n) = vv(j,n-1);
    s(j,1,n) = ss(j,n-1);
    q(j,1,n) = qq(j,n-1);
end
end
for j = 2:np
    if n == 1
        cfb(j,n) = 0; cub(j,n) = 0;
        cvb(j,n) = 0; cdervb(j,n) = 0;
        cfvb(j,n) = cfb(j,n)*cvb(j,n);
        csb(j,n) = 0; cqjb(j,n) = 0;
        cderqb(j,n) = 0; cfqjb(j,n) = 0;
        cuub(j,n) = cub(j,n)^2;
    else
        cfb(j,n) = ffb(j,n-1);
        cub(j,n) = uub(j,n-1);
        cvb(j,n) = vvb(j,n-1);
        csb(j,n) = ssb(j,n-1);
        cqjb(j,n) = qqjb(j,n-1);
        cuub(j,n) = cub(j,n)^2;
        cfvb(j,n) = cfb(j,n)*cvb(j,n);
        cdervb(j,n) = ddervb(j,n-1);
        cderqb(j,n) = dderqb(j,n-1);
        cfqjb(j,n) = cfb(j,n)*cqjb(j,n);
    end
    fb(j,k,n) = 0.5*(f(j,k,n) + f(j-1,k,n));

```

```

ub(j,k,n) = 0.5*(u(j,k,n) + u(j-1,k,n));
vb(j,k,n) = 0.5*(v(j,k,n) + v(j-1,k,n));
sb(j,k,n) = 0.5*(s(j,k,n) + s(j-1,k,n));
qb(j,k,n) = 0.5*(q(j,k,n) + q(j-1,k,n));
dervb(j,k,n) = (v(j,k,n) - v(j-1,k,n))/deleta;
fvb(j,k,n) = fb(j,k,n)*vb(j,k,n);
uub(j,k,n) = ub(j,k,n)^2;
derqb(j,k,n) = (q(j,k,n) - q(j-1,k,n))/deleta;
fqb(j,k,n) = fb(j,k,n)*qb(j,k,n);

if n < nt1+1
    a1(j,k) = (0.5)*t1(n)*vb(j,k,n);
    a2(j,k) = a1(j,k);
    a3(j,k) = (-(t1(n)*ub(j,k,n)))+(0.5*(M+Po)*t1(n))
    - (t1(n)/delt);
    a4(j,k) = a3(j,k);
    a5(j,k) = ((1 + (1/beta))/deleta)
    + (0.25*etac(j))+(0.5*t1(n)*fb(j,k,n));
    a6(j,k) =(-(1 + (1/beta))/deleta)
    + (0.25*etac(j))+(0.5*t1(n)*fb(j,k,n));
    a7(j,k) = 0.5*lambda*t1(n);
    a8(j,k) = a7(j,k);
    b1(j,k) = (1/deleta)+0.25*etac(j)*Pr
    + 0.5*Pr*t1(n)*fb(j,k,n);
    b2(j,k) = (-1/deleta)+0.25*etac(j)*Pr
    +0.5*Pr*t1(n)*fb(j,k,n);
    b3(j,k) = ((0.5)*Pr*t1(n)*qb(j,k,n));
    b4(j,k) = b3(j,k);
    b5(j,k) =-((Pr*t1(n))/delt);
    b6(j,k) = b5(j,k);

```

```

r1(j,k) = f(j-1,k,n)-f(j,k,n)+deleta*ub(j,k,n);
r2(j,k) = u(j-1,k,n)-u(j,k,n)+deleta*vb(j,k,n);
r3(j,k) = s(j-1,k,n)-s(j,k,n)+deleta*qub(j,k,n);
r4(j,k) = -(1 + (1/beta))*dervb(j,k,n)-0.5*etac(j)
*vb(j,k,n)-t1(n)*(1-uub(j,k,n)+ fvb(j,k,n))-
(M+Po)*t1(n)*(ub(j,k,n)-1)-lambda*t1(n)*sb(j,k,n)+
2*t1(n)*ub(j,k,n)/delt-(1 + (1/beta))*cdervb(j,n)-
0.5*etac(j)*cvb(j,n)-t1(n)*(1-cuub(j,n)+cfvb(j,n))-
(M+Po)*t1(n)*(cub(j,n)-1)-lambda*t1(n)*csb(j,n)-
2*t1(n)*cub(j,n)/delt;
r5(j,k) = -derqub(j,k,n)-0.5*Pr*etac(j)*qub(j,k,n)-
Pr*t1(n)*fqb(j,k,n)+2*Pr*t1(n)*sb(j,k,n)/delt-
cdervb(j,n)-0.5*Pr*etac(j)*cqb(j,n)-
Pr*t1(n)*cfqb(j,n)-2*Pr*t1(n)*csb(j,n)/delt;

```

else

```

a1(j,k) = (0.5)*vb(j,k,n);
a2(j,k) = a1(j,k);
a3(j,k) = (-ub(j,k,n))+(0.5*(M+Po))-(1/delt);
a4(j,k) = a3(j,k);
a5(j,k) = ((1 + (1/beta))/deleta) + (0.5*fb(j,k,n));
a6(j,k) = (-(1 + (1/beta))/deleta) + (0.5*fb(j,k,n));
a7(j,k) = 0.5*lambda;
a8(j,k) = a7(j,k);
b1(j,k) = (1/deleta)+(0.5*Pr*fb(j,k,n));
b2(j,k) = (-1/deleta)+(0.5*Pr*fb(j,k,n));
b3(j,k) = (0.5*Pr*qub(j,k,n));
b4(j,k) = b3(j,k);
b5(j,k) = -(Pr/delt);
b6(j,k) = b5(j,k);

```

```

r1(j,k) = f(j-1,k,n)-f(j,k,n)+deleta*ub(j,k,n);

```

```

r2(j,k) = u(j-1,k,n)-u(j,k,n)+deleta*vb(j,k,n);
r3(j,k) = s(j-1,k,n)-s(j,k,n)+deleta*qvb(j,k,n);
r4(j,k) = -(1 + (1/beta))*dervb(j,k,n)-(1-uub(j,k,n)+
fvb(j,k,n))-(M+Po)*(ub(j,k,n)-1)-lambda*
sb(j,k,n)+2*ub(j,k,n)/delt-(1 + (1/beta))*
cdervb(j,n)-(1-cuub(j,n)+cfvb(j,n))-(M+Po)*
(cub(j,n)-1)-lambda*csb(j,n)-2*cub(j,n)/delt;
r5(j,k) = -derqvb(j,k,n)-Pr*fqb(j,k,n)+
2*Pr*sb(j,k,n)/delt-cderqvb(j,n)-Pr*cfqb(j,n)-
2*Pr*csb(j,n)/delt;

end
end

%%Matrice
a{2,k} = [0 0 1 0 0;-0.5*deleta 0 0 -0.5*deleta 0;
0 -0.5*deleta 0 0 -0.5*deleta;a6(2,k) 0 a1(2,k) a5(2,k) 0;
0 b2(2,k) b3(2,k) 0 b1(2,k)];
for j = 3:np
a{j,k} = [-0.5*deleta 0 1 0 0;-1 0 0 -0.5*deleta
0; 0 -1 0 0 -0.5*deleta;a4(j,k) a8(j,k) a1(j,k)
a5(j,k) 0;0 b6(j,k) b3(j,k) 0 b1(j,k)];
b{j,k} = [0 0 -1 0 0;0 0 0 -0.5*deleta 0;0 0 0 0
-0.5*deleta;0 0 a2(j,k) a6(j,k) 0;0 0 b4(j,k) 0 b2(j,k)];
end;
for j = 2:np
c{j,k} = [-0.5*deleta 0 0 0 0;1 0 0 0 0;0 1 0 0 0;
a3(j,k) a7(j,k) 0 0 0;0 b5(j,k) 0 0 0];
end;
alfa{2,k} = a{2,k};
gamma{2,k} = inv(alfa{2,k})*c{2,k};
for j = 3:np

```

```

alfa{j,k} = a{j,k}-(b{j,k}*gamma{j-1,k});
gamma{j,k} = inv(alfa{j,k})*c{j,k};
end;
for j = 2:np
rr{j,k} = [r1(j,k);r2(j,k);r3(j,k);r4(j,k);r5(j,k)];
end;
ww{2,k} = inv(alfa{2,k})*rr{2,k};
for j = 3:np
ww{j,k} = inv(alfa{j,k})*(rr{j,k}-(b{j,k}*ww{j-1,k}));
end;
%%backward sweep
delu(1,k) = 0;
dels(1,k) = 0;
delf(1,k) = 0;
delu(np,k) = 0;
dels(np,k) = 0;
dell{np,k} = ww{np,k};

for j = np-1:-1:2
    dell{j,k} = ww{j,k}-(gamma{j,k}*dell{j+1,k});
end;

delv(1,k) = dell{2,k}(1,1);
delq(1,k) = dell{2,k}(2,1);
delf(2,k) = dell{2,k}(3,1);
delv(2,k) = dell{2,k}(4,1);
delq(2,k) = dell{2,k}(5,1);

for j = np:-1:3
    delu(j-1,k) = dell{j,k}(1,1);
    dels(j-1,k) = dell{j,k}(2,1);

```

```

    delf(j,k) = dell{j,k}(3,1);
    delv(j,k) = dell{j,k}(4,1);
    delq(j,k) = dell{j,k}(5,1);
end;

%%Newton's Method
for j = 1:np
    f(j,k+1,n) = f(j,k,n) + delf(j,k);
    u(j,k+1,n) = u(j,k,n) + delu(j,k);
    v(j,k+1,n) = v(j,k,n) + delv(j,k);
    s(j,k+1,n) = s(j,k,n) + dels(j,k);
    q(j,k+1,n) = q(j,k,n) + delq(j,k);
end;
stop = abs(delv(1,k));
kmax = k;
k = k+1;
end
for j = 1:np
    ff(j,n) = f(j,k,n);
    uu(j,n) = u(j,k,n);
    vv(j,n) = v(j,k,n);
    ss(j,n) = s(j,k,n);
    qq(j,n) = q(j,k,n);
end
for j = 1:np
    ffb(j,n) = fb(j,kmax,n);
    uub(j,n) = ub(j,kmax,n);
    vvb(j,n) = vb(j,kmax,n);
    ssb(j,n) = sb(j,kmax,n);
    qqb(j,n) = qb(j,kmax,n);
    ddervb(j,n) = dervb(j,kmax,n);

```

```

        dderqb(j,n) = derqb(j,kmax,n);
    end
end

if(i==1)
    a11=u(:,kmax,nt);
    b11=s(:,kmax,nt);
    figure(1)
    plot(eta,u(:,kmax,nt),'b','linewidth',2)
    hold on;
    figure(2)
    plot(eta,s(:,kmax,nt),'b','linewidth',2)
    hold on;
elseif(i==2)
    a12=u(:,kmax,nt);
    b12=s(:,kmax,nt);
    figure(1)
    plot(eta,u(:,kmax,nt),'g','linewidth',2)
    hold on;
    figure(2)
    plot(eta,s(:,kmax,nt),'g','linewidth',2)
    hold on;
elseif(i==3)
    a13=u(:,kmax,nt);
    b13=s(:,kmax,nt);
    figure(1)
    plot(eta,u(:,kmax,nt),'r','linewidth',2)
    hold on;
    figure(2)
    plot(eta,s(:,kmax,nt),'r','linewidth',2)
    hold on;

```

```

elseif(i==4)
    a14=u(:,kmax,nt);
    b14=s(:,kmax,nt);
    figure(1)
    plot(eta,u(:,kmax,nt),'c','linewidth',2)
    hold on;
    figure(2)
    plot(eta,s(:,kmax,nt),'c','linewidth',2)
    hold on;
elseif(i==5)
    a15=u(:,kmax,nt);
    b15=s(:,kmax,nt);
    figure(1)
    plot(eta,u(:,kmax,nt),'m','linewidth',2)
    hold on;
    %title('Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter
    Porositas')
    %title('Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter
    Magnetik')
    title('Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter
    Konveksi')
    %title('Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter
    Casson')
    %legend('\phi=0.0','\phi=0.2','\phi=0.4','\phi=0.6',
    '\phi=0.8')
    %legend('M = 0.0','M = 0.4','M = 0.7','M = 1.0',
    'M = 1.3')
    legend('\lambda=0.1','\lambda=0.25','\lambda=0.4',
    '\lambda=0.5','\lambda=0.6')
    %legend('\beta=0.5','\beta=1.0','\beta=1.5',
    '\beta=2.0','\beta=2.5')

```

```

xlabel('\eta')
ylabel('\partial f / \partial \eta')
grid on;
figure(2)
plot(eta,s(:,kmax,nt),'m','linewidth',2)
hold on;
%title('Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter
Porositas')
%title('Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter
Magnetik')
title('Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter
Konveksi')
%title('Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter
Casson')
%legend('\phi=0.0','\phi=0.2','\phi=0.4','\phi=0.6',
'\phi=0.8')
%legend('M = 0.0','M = 0.4','M = 0.7','M = 1.0',
'M = 1.3')
legend('\lambda=0.1','\lambda=0.25','\lambda=0.4',
'\lambda=0.5','\lambda=0.6')
%legend('\beta=0.5','\beta=1.0','\beta=1.5',
'\beta=2.0','\beta=2.5')
xlabel('\eta')
ylabel('s')
grid on;
end
end

```

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

Nama Lengkap : Khodijah Nahdi
Tempat & Tgl. Lahir : Bekasi, 03 Februari 2003
Alamat Rumah : Perum. Bumi Lestari Blok H6/No.4
RT.03 RW.0.14. Kel. Mangun Jaya,
Kec. Tambun Selatan, Kabupaten Bekasi
No. HP : 08561490489
E-mail : khodijahnahdy89@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. SDIT AL-Fidaa (2009-2015)
2. MTS AT-Taqwa Putri (2015-2018)
3. MA AT-Taqwa Putri (2018-2021)

Semarang, 11 Juni 2025