

GRAF PANGKAT PADA RING BERHINGGA

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika



Oleh : **AULIA ROSYIDA KUSUMADEWI**
NIM : 2108046009

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2025

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Aulia Rosyida Kusumadewi
NIM : 2108046009
Jurusan/Program Studi : Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

GRAF PANGKAT PADA RING BERHINGGA

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 10 Juni 2025
Pembuat pernyataan,



The image shows a handwritten signature in black ink over a red official stamp. The stamp is a rectangular meter stamp with the text 'METERAI TEMPEL' and a serial number '44924AJX188290066'. To the left of the stamp is a vertical green and gold security strip with the word 'KEASLIAN' visible. The signature is written in a cursive style.

Aulia Rosyida Kusumadewi
NIM : 2108046009



KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **GRAF PANGKAT PADA RING BERHINGGA**
Penulis : Aulia Rosyida Kusumadewi
NIM : 2108046009
Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 13 Juni 2025

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

Any Muanalifah, M.Si., Ph.D.

NIP : 19820113 201104 2 009

Penguji II,

Prihadi Kurniawan, M.Sc.

NIP : 19901226 201903 1 012

Penguji III,

Dinni Rahma Oktaviana, M.Si.

NIP : 19941009 201903 2 007

Penguji IV,

Yulia Romadiastri, S.Si., M.Sc.

NIP : 19810715 200501 2 008

Pembimbing I,

Prihadi Kurniawan, M.Sc.

NIP : 19901226 201903 1 012

NOTA DINAS

Semarang, 10 Juni 2025

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : GRAF PANGKAT PADA RING BERHINGGA
Nama : Aulia Rosyida Kusumadewi
NIM : 2108046009
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,



Prihadi Kurniawan, M.Sc.
NIP : 199012262019031012

ABSTRAK

Pada semigrup $(S, *)$ graf pangkat $\mathcal{P}(S)$ merupakan graf yang titiknya merupakan anggota S , dua buah titik yang berbeda u dan v saling bertetangga jika $u^m = v$ atau $v^n = u$ untuk suatu $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Pada penelitian ini, graf pangkat dikonstruksi pada ring berhingga $(R, +, \cdot)$, dengan memandang R sebagai semigrup atas operasi perkalian. Penelitian ini membahas graf pangkat pada ring berhingga dengan order p dan p^2 dengan p sembarang bilangan prima. Selain itu, dikaji juga mengenai produk unit semi kartesian dari dua buah graf pangkat ring berhingga order p dan q dengan p dan q sembarang bilangan prima. Hasil penelitian menunjukkan bahwa graf pangkat pada ring $\mathbb{Z}_p$ merupakan gabungan graf kosong dan graf lengkap pada order tertentu, sedangkan graf pangkat ring $C_p(0)$ membentuk graf bipartit lengkap. Karakteristik graf pangkat ring berhingga p^2 diantaranya, ring A dan H memiliki graf bagian yang merupakan graf bipartit lengkap, ring B dan H memiliki graf bagian rentang yang merupakan graf bipartit lengkap, ring C dan J membentuk graf bipartit lengkap, dan ring K membentuk gabungan graf kosong dan graf lengkap untuk order tertentu. Untuk produk unit semi kartesian, diperoleh $\mathcal{P}(C_p(0)) \cdot \mathcal{P}(R_2)$ dan $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2) \cdot \mathcal{P}(R_2)$ membentuk graf kosong, dengan R_2 sembarang ring order prima. Pada $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(C_q(0))$ dengan $p > 2$ membentuk gabungan graf kosong dan graf bipartit lengkap, sedangkan $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_q)$ dengan order tertentu membentuk gabungan antara graf kosong dan graf lengkap.

Kata kunci : Graf Pangkat, Ring Berhingga dan Produk Unit Semi Kartesian

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmanirrohim

Assalamu'alaikum warrahmatullahi wabarokatuh

Puji syukur atas kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Graf Pangkat pada Ring Berhingga*. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurah kepada Nabi Muhammad saw, keluarga, sahabat, dan seluruh umatnya hingga akhir zaman.

Penyusunan skripsi ini merupakan salah satu syarat menyelesaikan program sarjana (S1) pada program studi Matematika UIN Walisongo Semarang. Proses penyusunan skripsi ini tidak lepas dari doa, bantuan, dukungan, bimbingan, motivasi dan peran dari banyak pihak. Oleh karena itu, penulis dengan rasa hormat dan kerendahan hati ingin menyampaikan terimakasih kepada :

1. Prof. Dr. H. Musahadi, M.Ag., selaku ketua Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.
2. Any Muanalifah, M.Si., Ph.D., selaku ketua Program Studi Matematika UIN Walisongo Semarang.
3. Prihadi Kurniawan, M.Sc., selaku dosen pembimbing yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan motivasi selama proses penyusunan skripsi ini.
4. Emy Siswanah, M.Sc., selaku dosen wali yang senantiasa memberikan bimbingan akademik selama masa studi.

5. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi yang telah mendidik serta memberikan ilmu selama masa perkuliahan.
6. Kedua orang tua tercinta penulis Bapak Paijan dan Ibu Setyowati atas segala kepercayaan, doa, nasihat, dukungan, motivasi, dan pengorbanan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
7. Kakak-kakak penulis yaitu Esha Ayu Dian Safitri dan Kusaji Budinanto atas segala doa, dukungan, motivasi, ocehan, dan semangat yang telah diberikan kepada penulis.
8. Adik-adik penulis Cahya Satria Ismoyojati dan Dimas Hafidz Jatikusuma atas dukungan dan segala tingkah aneh yang menghibur.
9. Sahabat penulis Bunga Noer Intan Permatasari, Intan Rahma Sandhika dan Devi Marita Putri yang selalu membantu, menemani dan memberikan semangat selama masa perkuliahan.
10. Ana Nur Rokhmah, Tiara Fitrianingtyas, Ely Chabibah, dan Nabilatun Nisa selaku teman seperbimbingan yang telah saling menemani, memberi semangat dan berbagi ide selama proses bimbingan.
11. Titisari Azizah Wijayanti, S.Mat., yang telah banyak memberikan banyak bantuan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
12. Segenap pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu, yang telah membantu penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun untuk perbaikan di masa mendatang. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi para pembaca.

Semarang, 10 Juni 2025



Aulia Rosyida Kusumadewi

NIM : 2108046009

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iii
NOTA PEMBIMBING I	iv
ABSTRAK	v
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xv
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Tujuan Penelitian	4
C. Batasan Masalah	4
D. Tinjauan Pustaka	5
E. Metode Penelitian	5
F. Sistematika Penulisan	6
BAB II LANDASAN PUSTAKA	8
A. Kajian Teori	8
1. Graf	8
2. Grup	17
3. Ring	32
4. Graf Pangkat	51
B. Hasil Penelitian yang Relevan	59
BAB III HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN	62
A. Struktur Ring Berhingga Order p	62
B. Struktur Ring Berhingga Order p^2	64
C. Graf Pangkat pada Ring Berhingga Order p	67
a. Graf Pangkat pada Ring Berhingga Order 2 .	67
b. Graf Pangkat pada Ring Berhingga Order 3 .	69
c. Graf Pangkat pada Ring Berhingga Order 5 .	71
D. Graf Pangkat pada Ring Berhingga Order p^2	74

a.	Graf Pangkat pada Ring Berhingga Order 4 .	75
b.	Graf Pangkat pada Ring Berhingga Order 9 .	91
E.	Karakteristik Graf Pangkat pada Ring Berhingga.....	114
a.	Karakteristik Graf Pangkat pada Ring Berhingga Order p	114
b.	Karakteristik Graf Pangkat pada Ring Berhingga Order p^2	115
F.	Karakteristik Produk Unit Semi Kartesian	121
BAB IV SIMPULAN DAN SARAN		127
A.	Simpulan	127
B.	Saran	128
DAFTAR PUSTAKA		129
DAFTAR RIWAYAT HIDUP		131

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul	Halaman
Tabel 2.1	Operasi $\circ$ pada himpunan S	18
Tabel 2.2	Operasi biner pada $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	26
Tabel 2.3	Operasi $+$ pada ring B	49
Tabel 2.4	Operasi $\cdot$ pada ring B	51
Tabel 2.5	Perpangkatan Elemen Semigrup $(S, \circ)$	52
Tabel 2.6	Perpangkatan Elemen Grup $(\mathbb{Z}_6, +)$	53
Tabel 2.7	Perpangkatan Elemen Ring $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$	55
Tabel 2.8	Perpangkatan Elemen Ring $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$	56
Tabel 3.1	Operasi penjumlahan pada ring $\mathbb{Z}_2$	67
Tabel 3.2	Operasi perkalian pada ring $\mathbb{Z}_2$	67
Tabel 3.3	Perpangkatan Elemen Ring $\mathbb{Z}_2$	68
Tabel 3.4	Operasi penjumlahan pada ring $C_2(0)$	68
Tabel 3.5	Operasi perkalian pada ring $C_2(0)$	68
Tabel 3.6	Perpangkatan Elemen Ring $C_2(0)$	69
Tabel 3.7	Operasi penjumlahan pada ring $\mathbb{Z}_3$	69
Tabel 3.8	Operasi perkalian pada ring $\mathbb{Z}_3$	69
Tabel 3.9	Perpangkatan Elemen Ring $\mathbb{Z}_3$	70
Tabel 3.10	Operasi penjumlahan pada ring $C_3(0)$	70
Tabel 3.11	Operasi perkalian pada ring $C_3(0)$	71
Tabel 3.12	Perpangkatan Elemen Ring $C_3(0)$	71
Tabel 3.13	Operasi penjumlahan pada ring $\mathbb{Z}_5$	72
Tabel 3.14	Operasi perkalian pada ring $\mathbb{Z}_5$	72
Tabel 3.15	Perpangkatan Elemen Ring $\mathbb{Z}_5$	72
Tabel 3.16	Operasi penjumlahan pada ring $C_5(0)$	73

Tabel 3.17	Operasi perkalian pada ring $C_5(0)$	73
Tabel 3.18	Perpangkatan Elemen Ring $C_5(0)$	74
Tabel 3.19	Operasi penjumlahan pada ring A	75
Tabel 3.20	Operasi perkalian pada ring A	75
Tabel 3.21	Perpangkatan Elemen Ring A	76
Tabel 3.22	Operasi penjumlahan pada ring B	77
Tabel 3.23	Operasi perkalian pada ring B	77
Tabel 3.24	Perpangkatan Elemen Ring B	77
Tabel 3.25	Operasi penjumlahan pada ring C	78
Tabel 3.26	Operasi perkalian pada ring C	78
Tabel 3.27	Perpangkatan Elemen Ring C	79
Tabel 3.28	Operasi penjumlahan pada ring D	80
Tabel 3.29	Operasi perkalian pada ring D	80
Tabel 3.30	Perpangkatan Elemen Ring D	80
Tabel 3.31	Operasi penjumlahan pada ring E	81
Tabel 3.32	Operasi perkalian pada ring E	81
Tabel 3.33	Perpangkatan Elemen Ring E	82
Tabel 3.34	Operasi penjumlahan pada ring F	82
Tabel 3.35	Operasi perkalian pada ring F	83
Tabel 3.36	Perpangkatan Elemen Ring F	83
Tabel 3.37	Operasi penjumlahan pada ring G	84
Tabel 3.38	Operasi perkalian pada ring G	84
Tabel 3.39	Perpangkatan Elemen Ring G	84
Tabel 3.40	Operasi penjumlahan pada ring H	85
Tabel 3.41	Operasi perkalian pada ring H	85
Tabel 3.42	Perpangkatan Elemen Ring H	86
Tabel 3.43	Operasi penjumlahan pada ring I	87
Tabel 3.44	Operasi perkalian pada ring I	87
Tabel 3.45	Perpangkatan Elemen Ring I	87

Tabel 3.46	Operasi penjumlahan pada ring J	88
Tabel 3.47	Operasi perkalian pada ring J	88
Tabel 3.48	Perpangkatan Elemen Ring J	88
Tabel 3.49	Operasi penjumlahan pada ring K	89
Tabel 3.50	Operasi perkalian pada ring K	90
Tabel 3.51	Perpangkatan Elemen Ring K	90
Tabel 3.52	Operasi penjumlahan pada ring A	91
Tabel 3.53	Operasi perkalian pada ring A	91
Tabel 3.54	Perpangkatan Elemen Ring A	92
Tabel 3.55	Operasi penjumlahan pada ring B	93
Tabel 3.56	Operasi perkalian pada ring B	94
Tabel 3.57	Perpangkatan Elemen Ring B	94
Tabel 3.58	Operasi penjumlahan pada ring C	95
Tabel 3.59	Operasi perkalian pada ring C	96
Tabel 3.60	Perpangkatan Elemen Ring C	96
Tabel 3.61	Operasi penjumlahan pada ring D	97
Tabel 3.62	Operasi perkalian pada ring D	98
Tabel 3.63	Perpangkatan Elemen Ring D	98
Tabel 3.64	Operasi penjumlahan pada ring E	99
Tabel 3.65	Operasi perkalian pada ring E	100
Tabel 3.66	Perpangkatan Elemen Ring E	100
Tabel 3.67	Operasi penjumlahan pada ring F	101
Tabel 3.68	Operasi perkalian pada ring F	102
Tabel 3.69	Perpangkatan Elemen Ring F	102
Tabel 3.70	Operasi penjumlahan pada ring G	103
Tabel 3.71	Operasi perkalian pada ring G	104
Tabel 3.72	Perpangkatan Elemen Ring G	104
Tabel 3.73	Operasi penjumlahan pada ring H	106
Tabel 3.74	Operasi perkalian pada ring H	106

Tabel 3.75	Perpangkatan Elemen Ring H	107
Tabel 3.76	Operasi penjumlahan pada ring I	108
Tabel 3.77	Operasi perkalian pada ring I	108
Tabel 3.78	Perpangkatan Elemen Ring I	109
Tabel 3.79	Operasi penjumlahan pada ring J	110
Tabel 3.80	Operasi perkalian pada ring J	110
Tabel 3.81	Perpangkatan Elemen Ring J	111
Tabel 3.82	Operasi penjumlahan pada ring K	112
Tabel 3.83	Operasi perkalian pada ring K	112
Tabel 3.84	Perpangkatan Elemen Ring K	113

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
Gambar 2.1	Graf G	9
Gambar 2.2	Graf A	9
Gambar 2.3	Graf B	10
Gambar 2.4	Graf C	11
Gambar 2.5	Graf D	11
Gambar 2.6	Graf Tidak Berarah	12
Gambar 2.7	Graf Sederhana	12
Gambar 2.8	(a) Graf N_4 dan (b) Graf N_5	13
Gambar 2.9	(a) Graf K_5 dan (b) Graf K_6	13
Gambar 2.10	Contoh Graf Bipartit	14
Gambar 2.11	Graf $K_{3,2}$	14
Gambar 2.12	(a) Graf G , (b) Graf H , dan (c) Graf I	15
Gambar 2.13	(a) Graf G_1 dan (b) Graf G_2	16
Gambar 2.14	Graf $G_1 \cup G_2$	17
Gambar 2.15	$\mathcal{P}(S)$	52
Gambar 2.16	Graf pangkat grup $(\mathbb{Z}_6, +)$ $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)$	53
Gambar 2.17	Graf pangkat ring $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4)$	56
Gambar 2.18	Graf pangkat ring $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)$	56
Gambar 2.19	(a) $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4)$ dan (b) $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)$	57
Gambar 2.20	Produk unit semi kartesian $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)$	58
Gambar 3.1	$\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$	68
Gambar 3.2	$\mathcal{P}(C_2(0))$	69
Gambar 3.3	$\mathcal{P}(\mathbb{Z}_3)$	70
Gambar 3.4	$\mathcal{P}(C_3(0))$	71

Gambar 3.5	$\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)$	73
Gambar 3.6	$\mathcal{P}(C_5(0))$	74
Gambar 3.7	$\mathcal{P}(A)$	76
Gambar 3.8	$\mathcal{P}(B)$	78
Gambar 3.9	$\mathcal{P}(C)$	79
Gambar 3.10	$\mathcal{P}(D)$	81
Gambar 3.11	$\mathcal{P}(E)$	82
Gambar 3.12	$\mathcal{P}(F)$	83
Gambar 3.13	$\mathcal{P}(G)$	85
Gambar 3.14	$\mathcal{P}(H)$	86
Gambar 3.15	$\mathcal{P}(I)$	87
Gambar 3.16	$\mathcal{P}(J)$	89
Gambar 3.17	$\mathcal{P}(K)$	90
Gambar 3.18	$\mathcal{P}(A)$	93
Gambar 3.19	$\mathcal{P}(B)$	95
Gambar 3.20	$\mathcal{P}(C)$	97
Gambar 3.21	$\mathcal{P}(D)$	99
Gambar 3.22	$\mathcal{P}(E)$	101
Gambar 3.23	$\mathcal{P}(F)$	103
Gambar 3.24	$\mathcal{P}(G)$	105
Gambar 3.25	$\mathcal{P}(H)$	107
Gambar 3.26	$\mathcal{P}(I)$	109
Gambar 3.27	$\mathcal{P}(J)$	111
Gambar 3.28	$\mathcal{P}(K)$	113

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan salah satu cabang dari matematika diskrit. Teori graf secara umum merupakan suatu ilmu yang mempelajari mengenai struktur relasi antar objek diskrit yang direpresentasikan dengan suatu graf. Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan yang terdiri atas himpunan tak kosong titik dan himpunan sisi, dimana suatu sisi menghubungkan titik-titik pada graf tersebut (Clark dan Holton, 1995). Jadi, teori graf merupakan suatu ilmu yang mempelajari mengenai objek diskrit yang direpresentasikan dengan titik dan hubungan antar objek direpresentasikan dengan garis.

Sejarah graf diawali pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan Swiss bernama Leonhard Euler yang berhasil memecahkan permasalahan jembatan Könisberg (Zverovich, 2021). Jembatan Könisberg merupakan sebutan untuk tujuh jembatan yang menghubungkan dataran di kota Königsberg. Ketujuh jembatan tersebut menimbulkan pertanyaan mengenai apakah terdapat rute yang dapat ditempuh agar melewati ke tujuh jembatan tepat satu kali dan lalu kembali ke titik awal. Euler merepresentasikan ketujuh jembatan menjadi sebuah garis dan dataran menjadi sebuah titik sehingga menghasilkan suatu graf. Euler kemudian berhasil membuktikan bahwa tidak terdapat rute yang dapat ditempuh untuk melewati ketujuh jembatan dan kembali ke titik awal (Zverovich, 2021). Pemecahan masalah ini kemudian menjadi awal mula perkembangan teori graf.

Seiring perkembangan zaman, perkembangan teori graf tidak hanya berfokus pada ruang lingkup matematika diskrit tetapi juga dipadukan dengan berbagai cabang ilmu lain, salah satunya aljabar. Penelitian graf pada aljabar didasari oleh aplikasi graf dalam memodelkan hubungan antara elemen-elemen dalam struktur aljabar seperti grup, semigrup, dan ring. Suatu titik pada graf mewakili anggota-anggota himpunan yang membangun struktur aljabar, sementara sisi pada graf menggambarkan operasi atau relasi pada struktur aljabar tersebut. Perkembangan kajian graf pada bidang aljabar diawali oleh konstruksi Graf Cayley oleh Arthur Cayley pada tahun 1878 (Madhumitha dan Naduvath, 2023). Graf Cayley merupakan graf berarah dikonstruksi dari sebuah grup berhingga dan generator dari grup tersebut (Gallian, 2021). Penemuan Cayley tersebut kemudian mendorong banyak kajian baru graf pada bidang aljabar.

Salah satu kajian teori graf pada aljabar adalah graf pangkat. Istilah graf pangkat pertama kali diperkenalkan oleh Kelarev dan Quinn pada tahun 2000 dalam artikel yang berjudul *A Combinatorial Property and Power Graphs of Groups*. Kelarev dan Quinn (2000) mendefinisikan graf pangkat $\mathcal{P}(G)$ sebagai suatu graf berarah yang dikonstruksi dari suatu grup $(G, *)$ dengan setiap titiknya merupakan anggota himpunan G dan untuk setiap $x, y \in G$ dengan $x \neq y$ terdapat garis $u = (x, y)$ jika $y = x^n$ untuk $n \in \mathbb{Z}^+$.

Konsep graf pangkat berkembang tidak hanya untuk grup melainkan untuk struktur aljabar lainnya. Dalam artikel *Power Graphs of Semigroups of Matrices* definisi graf pangkat diperluas untuk semigrup (Kelarev, dkk, 2001). Kemudian Cameron (2010) dalam artikel *The Power Graph of Finite Group II* mengkaji lebih lanjut graf pangkat berarah dan graf pangkat tidak berarah pada

grup berhingga. Perkembangan konsep graf pangkat tersebut turut meluas pada struktur aljabar ring.

Ring merupakan struktur aljabar yang dibangun pada himpunan dilengkapi dengan dua operasi biner penjumlahan dan perkalian, yang memenuhi sifat-sifat tertentu (Fine, dkk, 2014). Ring dapat dibedakan menjadi dua yakni ring berhingga dan ring tidak berhingga. Ring berhingga merupakan ring yang memiliki dengan anggota himpunan yang berhingga (Fine, dkk, 2014).

Salah satu kajian mengenai ring berhingga adalah ring berhingga order p dan p^2 dengan p merupakan bilangan prima. Pada penelitian oleh Fine (1993) telah dikonstruksi ring berhingga order p dan p^2 . Kontruksi ring tersebut, memanfaatkan teori grup khususnya grup abelian berhingga dalam membentuk himpunan elemennya. Selanjutnya, sifat-sifat elemen dalam himpunan tersebut ditentukan sedemikian rupa sehingga ketika dilengkapi dengan operasi perkalian akan memenuhi sifat-sifat ring. Melalui konstruksi tersebut telah diperoleh terdapat dua ring berhingga order p yang berbeda dan sebelas ring berhingga order p^2 yang berbeda.

Pada penelitian oleh Soleimani, dkk. (2019) definisi graf pangkat telah diperluas untuk ring berhingga. Karena operasi perkalian pada ring membentuk semigrup, perluasan definisi graf pangkat dilakukan dengan memanfaatkan struktur semigrup tersebut. Selanjutnya, pada artikel *On Power Graph of Some Finite Ring* tahun 2023 oleh Soleimani dan Naderi telah mengkaji lebih lanjut mengenai graf pangkat pada ring berhingga. Pada penelitian tersebut dibentuk struktur baru yakni produk unit semi kartesian. Produk unit semi kartesian merupakan graf sederhana dan tidak

berarah yang dikonstruksi dari dua buah graf pangkat dari dua buah ring berhingga yang berbeda (Soleimani dan Naderi, 2023).

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, peneliti tertarik mengkaji lebih lanjut mengenai graf pangkat pada ring berhingga serta graf yang dihasilkan dari produk unit semi kartesian dari dua graf pangkat pada dua ring berhingga yang berbeda dengan mengacu pada artikel *On Power Graph of Some Finite Ring* oleh Soleimani dan Naderi tahun 2023.

B. Tujuan Penelitian

Tujuan pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengetahui karakteristik graf pangkat pada ring berhingga.
2. Mengetahui karakteristik graf yang dihasilkan dari produk unit semi kartesian dua graf pangkat pada dua ring berhingga yang berbeda.

C. Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Graf yang akan dikaji dalam penelitian ini merupakan graf sederhana yang tidak berarah.
2. Ring yang digunakan dalam penelitian ini adalah ring berhingga berorder p dan p^2 dengan p merupakan bilangan prima.
3. Produk unit semi kartesian dalam penelitian ini akan dikonstruksi dari dua graf pangkat pada dua ring order p dan q berturut-turut dengan p dan q merupakan bilangan prima.

D. Tinjauan Pustaka

Pada penelitian ini, artikel berjudul *On Power Graph of Some Finite Ring* merupakan rujukan utama. Selain itu, digunakan artikel berjudul *Undirected Power Graph of Semigroups* dan *Classification of Finite Rings of Order p^2* sebagai referensi pendukung.

Penelitian ini berkaitan dengan teori graf, teori grup, teori ring, dan graf pangkat. Oleh karena itu, digunakan sumber pustaka yang relevan dengan konsep-konsep tersebut. Sumber pustaka berkaitan dengan teori graf antara lain, *Modern Applications of Graph Theory*, *A First Look At Graph Theory*, *Graph Theory: An Introduction to Proofs, Algorithms, and Applications* dan *Matematika Diskrit*.

Adapun sumber pustaka yang digunakan berkaitan dengan teori grup dan teori ring antara lain *Contemporary Abstract Algebra Tenth Edition*, *Introduction to Abstract Algebra*, *Fundamentals of Semigroup Theory*, *Abstract Algebra Third Edition*, *A First Course in Rings and Ideals*, *Ring and Field Theory*, *Fundamentals of Abstract Algebra*, dan *Algebra An Approach via Module Theory*.

E. Metode Penelitian

Metode penelitian dalam penelitian ini berisi langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian sebagai berikut.

1. Meninjau lebih lanjut mengenai artikel *On Power Graph of Some Finite Ring* oleh Soleimani dan Naderi tahun 2023.
2. Mengumpulkan dan mengkaji literatur yang terkait dengan teori graf, teori grup dan teori ring.

3. Mengidentifikasi definisi dan teorema dasar yang berkaitan dengan teori graf, teori grup dan teori ring.
4. Menganalisis struktur ring berhingga order p dan p^2 .
5. Mengkonstruksi struktur penjumlahan dan perkalian ring berhingga order p dan p^2 .
6. Mengkonstruksi graf pangkat pada ring berhingga order p dan p^2 .
7. Menganalisis karakteristik graf pangkat pada ring berhingga order p dan p^2 .
8. Mengkonstruksi produk unit semi kartesian dua graf pangkat dua ring berhingga order p dan q dengan p dan q sembarang bilangan prima.
9. Menganalisis karakteristik graf yang dihasilkan dari produk unit semi kartesian dua graf pangkat dua ring berhingga order p dan q dengan p dan q sembarang bilangan prima.

F. Sistematika Penulisan

Penelitian ini disusun atas empat bab, dengan setiap bab terdiri dari beberapa sub bab dengan tujuan mempermudah dalam memahami isi penelitian. Sistematika penulisan pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini dipaparkan mengenai latar belakang masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, tinjauan pustaka,

metode penelitian, serta sistematika penulisan dalam penelitian.

2. BAB II LANDASAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan kajian teori serta hasil penelitian yang relevan. Pada kajian teori akan dibahas mengenai teori dasar berkaitan dengan penelitian meliputi definisi serta teorema dasar berkaitan dengan graf, grup, ring, dan graf pangkat.

3. BAB III HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini merupakan inti penelitian yang membahas mengenai karakteristik ring berhingga order p dan p^2 . Pada bab ini dibahas juga mengenai graf pangkat pada ring berhingga order p dan p^2 , serta karakteristik graf pangkat pada ring berhingga order p dan p^2 . Selain itu, pada bab ini juga akan membahas mengenai karakteristik graf dari produk unit semi kartesian dua graf pangkat pada dua ring berhingga order p dan q dengan p dan q sembarang bilangan prima.

4. BAB IV SIMPULAN DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisi kesimpulan dari penelitian yang telah diperoleh pada bab sebelumnya serta saran mengenai kajian penelitian selanjutnya.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan kajian teori serta hasil penelitian sebelumnya yang relevan dengan tugas akhir ini.

A. Kajian Teori

Kajian teori ini akan membahas mengenai teori-teori dasar yang berkaitan dengan penelitian mengenai graf pangkat pada ring berhingga. Adapun konsep-konsep dasar yang akan diulas mencakup teori graf, teori grup, teori ring, dan graf pangkat.

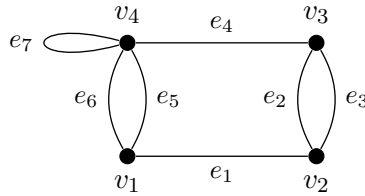
1. Graf

Pada bagian ini akan diberikan definisi dasar graf serta terminologi graf yang digunakan dalam penelitian ini. Selanjutnya, akan dibahas mengenai klasifikasi graf, graf sederhana khusus, graf bagian dan graf bagian rentang, dan gabungan graf.

Definisi 2.1.1 (*Graf, e.g (Clark dan Holton, 1995)*)

Suatu graf $G = (V(G), E(G))$ merupakan pasangan himpunan berhingga dengan $V(G)$ merupakan himpunan tak kosong titik pada graf G dan $E(G)$ merupakan himpunan sisi pada graf G . Untuk sembarang $e \in E(G)$ menghubungkan titik u dan titik v dengan $u, v \in V(G)$. Titik u dan v merupakan sebagai titik ujung dari sisi $e = (u, v)$.

Contoh 2.1.2 Perhatikan graf G sebagai berikut.



Gambar 2.1. Graf G

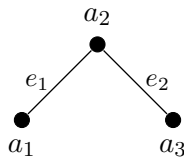
Graf $G = (V(G), E(G))$ memiliki 4 titik yang terhimpun pada $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan 7 sisi yang terhimpun pada $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$.

Pada teori graf dikenal beberapa istilah dasar yang berkaitan dengan struktur graf. Dalam penelitian ini beberapa terminologi dasar yang digunakan antara lain bertetangga, titik terasing, sisi ganda, serta loop

Definisi 2.1.3 (*Bertetangga, e.g (Clark dan Holton, 1995)*)

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf. Dua buah titik $u, v \in V(G)$ dikatakan bertetangga jika terdapat sisi $e \in E(G)$ yang menghubungkan titik u dan titik v .

Contoh 2.1.4 Perhatikan graf A sebagai berikut



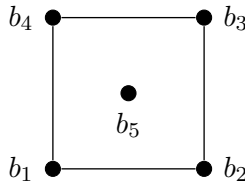
Gambar 2.2. Graf A

Titik a_1 bertetangga dengan titik a_2 karena terdapat sisi e_1 yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sisi e_2 menghubungkan titik a_2 dan a_3 sehingga titik a_2 juga bertetangga dengan titik a_3 .

Definisi 2.1.5 (Titik Terasing, e.g (Clark dan Holton, 1995))

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf. Suatu titik $u \in V(G)$ disebut titik terasing jika u bukan merupakan titik ujung dari suatu sisi pada graf G .

Contoh 2.1.6 Perhatikan graf B sebagai berikut.



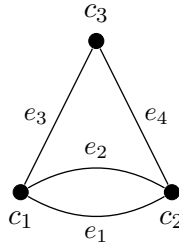
Gambar 2.3. Graf B

Titik $b_5 \in V(B)$ merupakan titik terasing karena titik b_5 bukan merupakan titik ujung dari suatu sisi pada graf B .

Definisi 2.1.7 (Sisi Ganda, e.g (Clark dan Holton, 1995))

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf. Dua atau lebih sisi pada graf G yang memiliki titik-titik ujung yang sama disebut sisi ganda.

Contoh 2.1.8 Perhatikan graf C sebagai berikut.



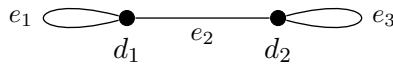
Gambar 2.4. Graf C

Pada graf C sisi e_1 dan e_2 memiliki titik ujung yang sama yakni titik c_1 dan c_2 . Oleh karena itu, sisi e_1 dan e_2 merupakan sisi ganda pada graf C .

Definisi 2.1.9 (*Loop, e.g (Saoub, 2021)*)

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf. Suatu sisi $e \in E(G)$ disebut sebagai loop jika menghubungkan suatu titik u dengan titik u itu sendiri.

Contoh 2.1.10 Perhatikan graf D sebagai berikut.



Gambar 2.5. Graf D

Pada graf D sisi e_1 menghubungkan titik d_1 dengan titik d_1 itu sendiri. Kemudian, sisi e_3 menghubungkan titik d_2 dengan titik d_2 itu sendiri. Oleh karena itu, sisi e_1 dan e_3 merupakan sebuah loop pada graf D .

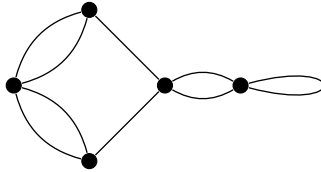
Secara umum graf dapat dibedakan menjadi graf tidak berarah dan graf berarah, serta graf sederhana dan graf tidak sederhana.

Dalam penelitian ini, graf pangkat yang dikonstruksi merupakan graf sederhana yang tidak berarah. Oleh karena itu, diberikan definisi graf tidak berarah dan graf sederhana sebagai berikut.

Definisi 2.1.11 (*Graf Tidak Berarah, e.g (Munir, 2016)*)

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf. Graf G dikatakan sebagai graf tidak berarah jika tidak terdapat orientasi arah pada sisinya. Pada graf tidak berarah, sisi (u, v) sama dengan sisi (v, u) .

Contoh 2.1.12 Contoh graf tidak berarah sebagai berikut.

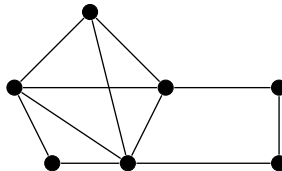


Gambar 2.6. Graf Tidak Berarah

Definisi 2.1.13 (*Graf Sederhana, e.g (Clark dan Holton, 1995)*)

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf. Graf G disebut graf sederhana jika tidak memiliki loop dan sisi ganda.

Contoh 2.1.14 Contoh graf sederhana sebagai berikut.



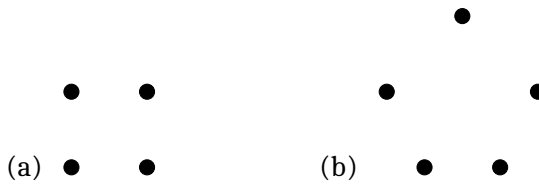
Gambar 2.7. Graf Sederhana

Dalam teori graf dikenal beberapa jenis graf sederhana khusus. Pada penelitian ini, graf sederhana khusus yang digunakan meliputi graf kosong, graf lengkap, graf bipartit, dan graf bipartit lengkap.

Definisi 2.1.15 (*Graf Kosong, e.g (Clark dan Holton, 1995))*)

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf sederhana. Graf G disebut graf kosong jika tidak terdapat sisi pada graf G . Graf kosong yang memiliki sebanyak m titik dinotasikan dengan N_m .

Contoh 2.1.16 Contoh graf N_4 dan graf N_5 sebagai berikut.

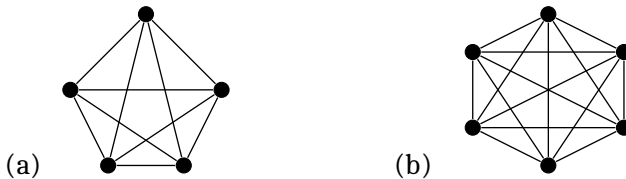


Gambar 2.8. (a) Graf N_4 dan (b) Graf N_5

Definisi 2.1.17 (*Graf Lengkap, e.g (Clark dan Holton, 1995))*)

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf sederhana. Graf G disebut graf lengkap apabila setiap pasangan titik yang berbeda dihubungkan oleh tepat satu sisi. Graf lengkap yang memiliki sebanyak n titik dinotasikan dengan K_n .

Contoh 2.1.18 Contoh graf K_5 dan graf K_6 sebagai berikut.

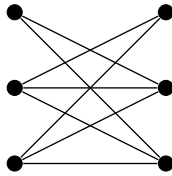


Gambar 2.9. (a) Graf K_5 dan (b) Graf K_6

Definisi 2.1.19 (*Graf Bipartit, e.g (Clark dan Holton, 1995)*)

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf sederhana. Graf G disebut graf bipartit jika $V(G)$ dapat dibagi menjadi dua himpunan tak kosong yang saling asing $V_1(G)$ dan $V_2(G)$ sedemikian sehingga untuk setiap $e = (v_1, v_2) \in E(G)$, $v_1 \in V_1(G)$ dan $v_2 \in V_2(G)$.

Contoh 2.1.20 Contoh graf bipartit sebagai berikut.

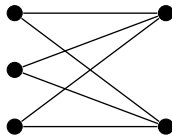


Gambar 2.10. Contoh Graf Bipartit

Definisi 2.1.21 (*Graf Bipartit Lengkap, e.g (Clark dan Holton, 1995)*)

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf bipartit. Graf G disebut graf bipartit lengkap jika untuk setiap $v_1 \in V_1(G)$ dan setiap $v_2 \in V_2(G)$ terdapat $e = (v_1, v_2) \in E(G)$. Graf bipartit lengkap dinotasikan dengan $K_{m,n}$ untuk m merupakan banyak titik pada $V_1(G)$ dan n merupakan banyak titik pada $V_2(G)$.

Contoh 2.1.22 Contoh graf $K_{3,2}$ sebagai berikut.



Gambar 2.11. Graf $K_{3,2}$

Setelah membahas mengenai jenis graf sederhana khusus, selanjutnya akan dibahas mengenai graf bagian dan graf bagian rentang. Definisi graf bagian dan graf bagian rentang sebagai berikut.

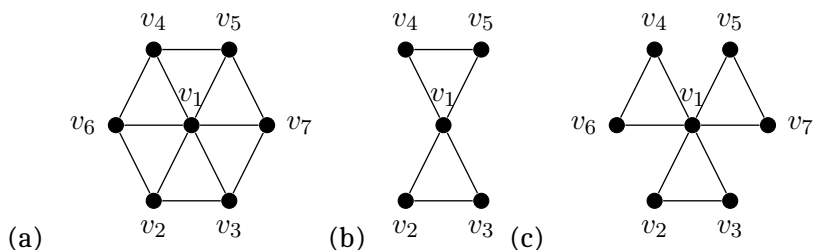
Definisi 2.1.23 (*Graf Bagian, e.g (Clark dan Holton, 1995)*)

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf. Graf $H = (V(H), E(H))$ dikatakan sebagai graf bagian dari graf G jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$.

Definisi 2.1.24 (*Graf Bagian Rentang, e.g (Clark dan Holton, 1995)*)

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ dan $H = (V(H), E(H))$ merupakan graf. Graf H merupakan graf bagian rentang dari graf G jika graf H merupakan graf bagian dari graf G dan $V(H) = V(G)$.

Contoh 2.1.25 Contoh graf bagian dan graf bagian rentang sebagai berikut.



Gambar 2.12. (a) Graf G , (b) Graf H , dan (c) Graf I

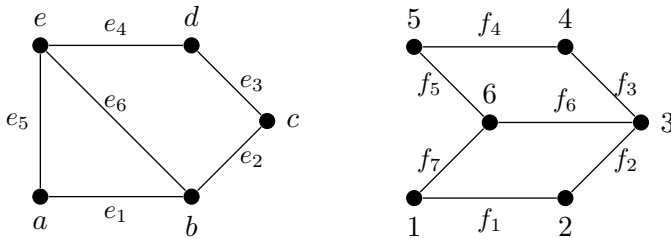
Graf H merupakan graf bagian dari graf G dan graf I merupakan graf bagian rentang dari graf G .

Pada graf dapat menggabungkan dua buah graf yang berbeda yang disebut dengan gabungan. Definisi dari gabungan pada graf sebagai berikut.

Definisi 2.1.26 (*Gabungan, e.g (Saoub, 2021)*)

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ dan graf $H = (V(H), E(H))$ merupakan graf. Gabungan dari graf G dan H dinotasikan dengan $G \cup H$ merupakan graf dengan himpunan titiknya $V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisinya $E(G) \cup E(H)$.

Contoh 2.1.27 Perhatikan graf G_1 dan graf G_2 sebagai berikut.



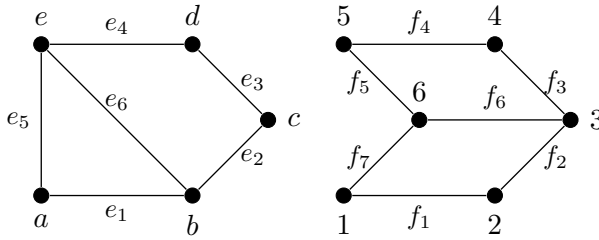
Gambar 2.13. (a) Graf G_1 dan (b) Graf G_2

Graf G_1 memiliki himpunan titik yaitu $V(G_1) = \{a, b, c, d, e\}$ dan himpunan sisi yaitu $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Graf G_2 memiliki himpunan titik yaitu $V(G_2) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dengan himpunan sisi $E(G_2) = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$. Gabungan dari graf G_1 dan G_2 yaitu $G_1 \cup G_2$ memiliki himpunan titik dan yaitu:

$$V(G_1) \cup V(G_2) = \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E(G_1) \cup E(G_2) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$$

diperoleh graf $G_1 \cup G_2$ sebagai berikut.

Gambar 2.14. Graf $G_1 \cup G_2$

2. Grup

Pada bagian ini akan diberikan definisi operasi biner, sifat-sifat operasi biner serta semigrup. Kemudian dalam bagian ini akan dibahas mengenai definisi dan teorema dasar mengenai grup, subgrup, grup abelian, grup hasil kali langsung, grup siklik, teorema lagrange, dan isomorfisma grup.

Dalam aljabar abstrak, struktur aljabar dilengkapi oleh suatu operasi yang disebut sebagai operasi biner. Definisi dari operasi biner sebagai berikut.

Definisi 2.1.28 (*Operasi Biner, e.g (Gallian, 2021)*)

Misalkan A merupakan himpunan tak kosong. Operasi $*$ pada A disebut operasi biner apabila $*$ merupakan fungsi yang memetakan setiap pasangan terurut elemen-elemen dari A ke suatu elemen dalam A .

Contoh 2.1.29 Operasi $+$ merupakan operasi biner pada himpunan $\mathbb{Z}$. Misalkan diambil sembarang $x, y \in \mathbb{Z}$ diperoleh $x + y \in \mathbb{Z}$ artinya $+$ merupakan operasi biner pada himpunan $\mathbb{R}$.

Dalam struktur aljabar dikenal suatu struktur yang disebut

dengan semigrup. Semigrup dibangun oleh operasi biner yang bersifat asosiatif. Definisi semigrup sebagai berikut.

Definisi 2.1.30 (*Semigrup, e.g (Howie, 2003)*)

Misalkan S merupakan himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner $\circ$. Struktur aljabar $(S, \circ)$ disebut semigrup jika operasi biner $\circ$ bersifat asosiatif yaitu untuk setiap $s_1, s_2, s_3 \in S$ berlaku

$$(s_1 \circ s_2) \circ s_3 = s_1 \circ (s_2 \circ s_3).$$

Contoh 2.1.31 Himpunan $S = \{a, b, c, d\}$ dan operasi $\circ$ yang didefinisikan dengan $s_1 \circ s_2 = a$ untuk setiap $s_1, s_2 \in S$. Akan ditunjukkan $(S, \circ)$ merupakan semigrup.

Bukti.

Diketahui himpunan $S = \{a, b, c, d\}$ sehingga S bukan himpunan kosong. Operasi $\circ$ didefinisikan sebagai $s_1 \circ s_2 = a$ untuk setiap $s_1, s_2 \in S$. Tabel operasi $\circ$ untuk setiap anggota himpunan S diperoleh sebagai berikut.

Tabel 2.1. Operasi $\circ$ pada himpunan S

$\circ$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	a	a
d	a	a	a	a

Dari tabel 2.1 untuk setiap $s_1, s_2 \in S$ diperoleh $s_1 \circ s_2 \in S$ sehingga operasi $\circ$ merupakan operasi biner. Kemudian untuk setiap s_1, s_2 dan $s_3 \in S$ diperoleh sebagai berikut.

$$\begin{aligned}s_1 \circ (s_2 \circ s_3) &= s_1 \circ a = a \\ (s_1 \circ s_2) \circ s_3 &= a \circ s_3 = a.\end{aligned}$$

Karena $s_1 \circ (s_2 \circ s_3) = (s_1 \circ s_2) \circ s_3$ diperoleh $\circ$ bersifat asosiatif pada himpunan S . Terbukti $(S, \circ)$ semigrup. ■

Struktur aljabar yang dibangun oleh suatu operasi biner tidak hanya semigrup tetapi juga grup. Definisi grup sebagai berikut.

Definisi 2.1.32 (*Grup, e.g (Fine, dkk, 2014)*)

Suatu himpunan tak kosong G yang dilengkapi operasi biner $*$ dituliskan dengan $(G, *)$ disebut sebagai grup jika memenuhi sifat-sifat sebagai berikut.

1. *Asosiatif*

Untuk setiap $x, y, z \in G$ berlaku $(x * y) * z = x * (y * z)$.

2. *Memiliki elemen identitas*

Terdapat $e \in G$ sehingga $\forall x \in G$ berlaku $x * e = e * x = x$.

3. *Memiliki invers*

Untuk setiap $x \in G$, terdapat tunggal $x^{-1} \in G$ sehingga $x * (x^{-1}) = (x^{-1}) * x = e$.

Contoh 2.1.33 Contoh dari grup antara lain sebagai berikut.

1. Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$, himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, dan himpunan bilangan kompleks $\mathbb{Q}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan $+$ membentuk struktur $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, dan $(\mathbb{Q}, +)$ merupakan grup dengan elemen identitas 0 (Fine, dkk, 2014).
2. Himpunan bilangan real tanpa nol $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, himpunan bilangan bulat tanpa nol $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, dan

himpunan bilangan kompleks tanpa nol $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ yang dilengkapi dengan operasi perkalian membentuk struktur $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$, dan $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ merupakan grup dengan elemen identitas 1 (Fine, dkk, 2014).

3. Himpunan bilangan real positif $\mathbb{R}^+$ dilengkapi dengan operasi perkalian membentuk struktur $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ merupakan grup dengan elemen identitas 1 (Dummit dan Foote, 2004).
4. Himpunan bilangan bulat modulo n yaitu $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ dilengkapi dengan operasi penjumlahan modulo n membentuk struktur $(\mathbb{Z}_n, +)$ merupakan grup dengan elemen identitas $\bar{0}$ (Gallian, 2021).

Subgrup

Pada struktur grup terdapat struktur yang disebut dengan subgrup. Definisi subgrup sebagai berikut.

Definisi 2.1.34 (Subgrup, e.g (Gallian, 2021))

Misalkan $(G, *)$ grup dan himpunan tak kosong H dengan $H \subseteq G$, H dikatakan sebagai subgrup dari G jika $(H, *)$ merupakan grup dan dinotasikan dengan $H \leq G$.

Contoh 2.1.35 Telah diketahui $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ merupakan grup, kemudian diberikan himpunan bilangan real positif $\mathbb{R}^+$. Himpunan $\mathbb{R}^+$ bukan himpunan kosong. Diperhatikan bahwa $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}^*$ dan $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ merupakan grup sehingga $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ merupakan subgrup dari $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ dan $\mathbb{R}^+ \leq \mathbb{R}^*$.

Grup Siklik

Sebelum membahas mengenai definisi grup siklik, akan dibahas terlebih dahulu mengenai order elemen sebagai berikut.

Definisi 2.1.36 (*Order Elemen, e.g (Gallian, 2021)*)

Misalkan G grup dan $g \in G$. Order elemen dari g pada G merupakan bilangan positif terkecil n sedemikian sehingga $g^n = e$ dan dinotasikan dengan $|g|$.

Untuk setiap g anggota grup G dan sembarang $k \in \mathbb{Z}$, g^k merupakan kelipatan g dengan operasi grup G sebanyak k kali. Pada grup berhingga order elemen merupakan bilangan positif terkecil. Sedangkan, pada grup tidak berhingga tidak terdapat bilangan positif terkecil sehingga $g^n = e$. Jadi untuk grup tidak berhingga diperoleh $g^0 = e$.

Contoh 2.1.37 Telah diketahui $(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan grup dengan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Kemudian, diperoleh order elemen setiap anggota $\mathbb{Z}_6$ yakni:

$$\begin{array}{ll} \bar{0}^1 = \bar{0} & \bar{3}^2 = \bar{0} \\ \bar{1}^6 = \bar{0} & \bar{4}^3 = \bar{0} \\ \bar{2}^3 = \bar{0} & \bar{5}^6 = \bar{0}. \end{array}$$

Dengan demikian, diperoleh $|\bar{0}| = 1$, $|\bar{1}| = 6$, $|\bar{2}| = 3$, $|\bar{3}| = 2$, $|\bar{4}| = 3$, dan $|\bar{5}| = 6$.

Teorema 2.1.38 (*e.g (Gallian, 2021)*)

Misalkan G grup dan $g \in G$ dengan $|g| = n$. Untuk $k \in \mathbb{Z}^+$ maka $\langle g^k \rangle = \langle g^{\text{fpb}(n,k)} \rangle$ dan $|g^k| = \frac{n}{\text{fpb}(n,k)}$.

Bukti.

Diketahui G grup, $g \in G$ dengan $|g| = n$ dan $k \in \mathbb{Z}^+$. Dimisalkan $d = \text{fpb}(n, k)$ dan $k = dr$ untuk $r \in \mathbb{Z}$, akan ditunjukkan $\langle g^k \rangle = \langle g^d \rangle$. Karena $k = dr$ maka $g^k = (g^d)^r$ sehingga diperoleh $\langle g^k \rangle \subseteq \langle g^d \rangle$. Diketahui terdapat suatu $s, t \in \mathbb{Z}$

sedemikian sehingga $d = ns + kt$ diperoleh

$$g^d = g^{ns+kt} = g^{ns} g^{kt} = (g^n)^s (g^k)^t = e(g^k)^t = (g^k)^t.$$

Oleh karena itu, diperoleh $(g^k)^t \in g^k$ artinya $\langle g^d \rangle \subseteq \langle g^k \rangle$. Jadi, $\langle g^k \rangle = \langle g^d \rangle$ artinya $\langle g^k \rangle = \langle g^{\text{fpb}(n,k)} \rangle$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $|g^k| = \frac{n}{\text{fpb}(n,k)}$. Karena $|g| = n$ diperoleh $(g^d)^{\frac{n}{d}} = g^n = e$ sehingga $|g^d| \leq \frac{n}{d}$. Diambil sembarang $i \in \mathbb{Z}^+$ dengan $i < \frac{n}{d}$ karena $(g^d)^{\frac{n}{d}} = e$ berdasarkan definisi 2.1.36 diperoleh $(g^d)^i \neq e$ sehingga haruslah $|g^d| = \frac{n}{d}$. Telah dibuktikan $\langle g^k \rangle = \langle g^d \rangle$ untuk $d = \text{fpb}(n, k)$ diperoleh

$$|g^k| = |\langle g^k \rangle| = |\langle g^d \rangle| = |g^d| = \frac{n}{d}.$$

Jadi, diperoleh $|g^k| = \frac{n}{d}$ atau $|g^k| = \frac{n}{\text{fpb}(n,k)}$. ■

Definisi 2.1.39 (*Grup Siklik, e.g (Gallian, 2021)*)

Misalkan G grup, untuk suatu $g \in G$ jika $G = \langle g \rangle = \{g^n | n \in \mathbb{Z}\}$ maka G merupakan grup siklik dan g merupakan generator dari G .

Suatu grup siklik $G = \langle g \rangle$ dapat dikatakan bahwa g membangun grup G (Dummit dan Foote, 2004). Pada grup siklik G dengan operasi biner berupa penjumlahan dapat dinotasikan dengan $G = \{ng | n \in \mathbb{Z}\}$ (Dummit dan Foote, 2004).

Contoh 2.1.40 Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan grup siklik.

Bukti.

Diketahui grup $(\mathbb{Z}_6, +)$ dengan himpunan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ diperoleh himpunan perpangkatan setiap elemen dari $\mathbb{Z}_6$ sebagai

berikut.

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{0} \rangle &= \{\bar{0}\} \\
 \langle \bar{1} \rangle &= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} \\
 \langle \bar{2} \rangle &= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \\
 \langle \bar{3} \rangle &= \{\bar{0}, \bar{3}\} \\
 \langle \bar{4} \rangle &= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \\
 \langle \bar{5} \rangle &= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}.
 \end{aligned}$$

Karena $\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \mathbb{Z}_6$ diperoleh $(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan grup siklik dengan $\langle \bar{1} \rangle$ dan $\langle \bar{5} \rangle$ sebagai generatornya. ■

Teorema 2.1.41 (e.g (Gallian, 2021))

Misalkan grup siklik $G = \langle g \rangle$ dengan $|G| = n$. Untuk setiap $d \in \mathbb{Z}^+$ jika $d|n$ maka terdapat subgrup tunggal dari G dengan order d yaitu $\langle g^d \rangle$.

Bukti.

Diketahui grup siklik $G = \langle g \rangle$ dengan $|G| = n$, sehingga dimiliki $|\langle g \rangle| = n$. Akan ditunjukkan setiap $d \in \mathbb{Z}^+$ dengan $d|n$ terdapat subgrup tunggal dari G dengan order d . Karena G grup siklik diperoleh $H \leq G$ merupakan grup siklik. Diambil sembarang $H \leq G$, karena $d|n$ diperoleh $n = kd$ untuk $k \in \mathbb{Z}$ dimisalkan $H = \langle g^k \rangle$. Diketahui berdasarkan teorema 2.1.38 diperoleh $|g^k| = \frac{n}{\text{fpb}(n, k)}$. Karena $k = \frac{n}{d}$ diperoleh

$$\text{fpb}(n, k) = \text{fpb}(n, \frac{n}{d}) = \frac{n}{d}$$

sehingga $|g^k| = \frac{n}{n/d} = d$. Artinya order dari H adalah d .

Selanjutnya dimisalkan $H_1 \leq G$ dengan order d . Akan ditunjukkan bahwa $H_1 = H$. Dimiliki $H_1 \leq G$ maka H_1 grup siklik

dengan $H_1 = \langle g^b \rangle$ dengan b merupakan bilangan positif terkecil sehingga $g^b \in H_1$, diperoleh $|g^b| = \frac{n}{\text{fpb}(n,b)}$. Karena $|H_1| = d$ haruslah $\frac{n}{\text{fpb}(n,b)} = d$ sehingga $\text{fpb}(n,b) = \frac{n}{d}$ dan $\text{fpb}(n,b) = k$. Telah diketahui $\text{fpb}(n,b) = k$ diperoleh $k|b$ dan $b = kl$ untuk $l \in \mathbb{Z}$ sehingga $g^b = g^{kl} = (g^k)^l$ artinya $g^b \in \langle g^k \rangle$ atau $H_1 \subseteq H$. Karena $|H| = |H_1| = d$ diperoleh $H = H_1$. Jadi untuk setiap $d|n$ terdapat subgrup tunggal dari G dengan order d . ■

Grup Abelian

Suatu grup yang dilengkapi dengan operasi biner yang bersifat komutatif membentuk grup komutatif atau grup abelian. Definisi grup abelian sebagai berikut.

Definisi 2.1.42 (*Grup Abelian/Komutatif, e.g (Dummit dan Foote, 2004)*)

Misalkan $(G, *)$ grup. Grup G disebut sebagai grup abelian atau komutatif jika untuk setiap $g_1, g_2 \in G$ berlaku $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$.

Contoh 2.1.43 Telah diketahui $(\mathbb{R}, +)$ merupakan grup. Misalkan diambil sembarang $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ diperhatikan bahwa $r_1 + r_2 = r_2 + r_1$ artinya grup $(\mathbb{R}, +)$ merupakan grup komutatif.

Selanjutnya dimiliki definisi dari eksponen pada grup abelian sebagai berikut.

Definisi 2.1.44 (*Eksponen, e.g (Fine, dkk, 2014)*)

Misalkan G merupakan grup abelian berhingga. Eksponen dari G adalah kpk dari setiap order semua elemen G yakni:

$$\exp(G) = \text{kpk}\{|g| | g \in G\}.$$

Lemma 2.1.45 (e.g (Fine, dkk, 2014))

Misalkan G grup abelian berhingga maka terdapat $g \in G$ dengan $|g| = \exp(G)$

Bukti.

Diketahui G grup abelian berhingga dan $g \in G$. Dimisalkan $\exp(G) = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ dengan setiap p_i merupakan bilangan prima yang berbeda. Terdapat $g_i \in G$ dengan $|g_i| = p_i^{e_i} r_i$ dengan p_i dan r_i relatif prima. Dimisalkan $h_i = g_i^{r_i}$, berdasarkan teorema 2.1.38 diperoleh

$$|h_i| = \frac{(|g_i|)}{\text{fpb}(|g_i|, r_i)} = \frac{p_i^{e_i} r_i}{\text{fpb}(p_i^{e_i} r_i, r_i)} = \frac{p_i^{e_i} r_i}{r_i} = p_i^{e_i}.$$

Dimisalkan $g = h_1 h_2 \dots h_k$ diperoleh

$$|g| = \text{kpk}(|h_1|, \dots, |h_k|) = \text{kpk}(p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}) = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k} = \exp(G).$$

Oleh karena itu, diperoleh $|g| = \exp(G)$. ■

Grup Hasil Kali Langsung

Definisi 2.1.46 (Grup Hasil Kali Langsung, e.g (Fine, dkk, 2014))

Misalkan G_1 dan G_2 merupakan grup. Grup hasil kali langsung dari G_1 dan G_2 dengan definisi

$$G = G_1 \times G_2 = \{(a, b) | a \in G_1, b \in G_2\}.$$

Operasi biner pada $G = G_1 \times G_2$ didefinisikan sebagai berikut.

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$$

untuk setiap $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in G_1 \times G_2$.

Contoh 2.1.47 Diketahui grup $(\mathbb{Z}_2, +)$ dengan $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Grup hasil kali langsung $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ dengan operasi biner yang didefinisikan dengan

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Untuk $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}_2$. Diperoleh himpunan $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ yaitu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$.

Tabel 2.2. Operasi biner pada $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

+	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$
$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$
$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$
$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$
$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{0})$

Dari tabel 2.2 untuk setiap $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ diperoleh $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Terdapat $(\bar{0}, \bar{0}) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ yang merupakan elemen identitas. Kemudian dari tabel 2.2 diperoleh $(\bar{0}, \bar{1}) + (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{1}, \bar{0}) + (\bar{0}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{0})$ dan $(\bar{1}, \bar{1}) + (\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{0})$ sehingga setiap anggota $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ memiliki invers.

Teorema Lagrange

Dalam penelitian ini menggunakan teorema Lagrange sebagai dasar konstruksi ring berhingga. Sebelum membahas teorema lagrange, akan diberikan definisi dari koset sebagai berikut.

Definisi 2.1.48 (Koset, e.g (Fine, dkk, 2014))

Misalkan G grup dan $H \leq G$. Untuk $a \in G$ diperoleh:

1. Koset kiri dari H pada G didefinisikan dengan $aH = \{ah|h \in H\}$.
2. Koset kanan dari H pada G didefinisikan dengan $Ha = \{ha|h \in H\}$.

Contoh 2.1.49 Dimiliki grup $(\mathbb{Z}_6, +)$ dengan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Himpunan $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ dengan $H \leq G$ diperoleh:

1. Koset Kiri

$$\bar{0} + H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\},$$

$$\bar{1} + H = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\},$$

$$\bar{2} + H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\},$$

$$\bar{3} + H = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\},$$

$$\bar{4} + H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\},$$

$$\bar{5} + H = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}.$$

2. Koset Kanan

$$H + \bar{0} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\},$$

$$H + \bar{1} = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\},$$

$$H + \bar{2} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\},$$

$$H + \bar{3} = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\},$$

$$H + \bar{4} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\},$$

$$H + \bar{5} = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}.$$

Jadi, diperoleh $\bar{0} + H = H + \bar{0}$, $\bar{1} + H = H + \bar{1}$, $\bar{2} + H = H + \bar{2}$, $\bar{3} + H = H + \bar{3}$, $\bar{4} + H = H + \bar{4}$, dan $\bar{5} + H = H + \bar{5}$. Artinya, koset kiri sama dengan koset kanan yakni $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ dan $\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$.

Definisi 2.1.50 (*Index, e.g (Fine, dkk, 2014)*)

Misalkan G grup dan $H \leq G$. Jumlah koset kiri yang berbeda disebut sebagai index dinotasikan dengan $[G : H]$.

Contoh 2.1.51 Perhatikan pada grup $(\mathbb{Z}_6, +)$ dan $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ berdasarkan contoh 2.1.49 terdapat 2 koset kiri yang berbeda dari H pada G sehingga $[G : H] = 2$.

Setelah mengetahui definisi dari koset dan index, dimiliki teorema Lagrange sebagai berikut.

Teorema 2.1.52 (*Teorema Lagrange, e.g (Gallian, 2021)*)

Misalkan G grup berhingga jika $H \leq G$ maka $|H|$ membagi $|G|$ dan $[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$.

Bukti.

Misal G grup berhingga dan $H \leq G$, akan ditunjukkan $[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$. Dimisalkan $a_1H, a_2H, \dots, a_rH$ merupakan koset kiri H pada G yang berbeda. Untuk sembarang $a \in G$ diperoleh $aH = a_iH$ untuk $1 \leq i \leq r$. Untuk sembarang $a \in G$, a merupakan anggota salah satu koset $a \in a_iH$ sehingga

$$G = a_1H \cup \dots \cup a_rH.$$

Karena $a_1H, a_2H, \dots, a_rH$ berbeda, $G = a_1H \cup \dots \cup a_rH$ merupakan gabungan dari himpunan yang saling lepas, diperoleh

$$|G| = |a_1H| + \dots + |a_rH|.$$

Diketahui berdasarkan definisi koset kiri, untuk setiap $|a_iH| = |H|$ untuk $1 \leq m, n \leq r$ diperoleh $|G| = r|H|$ artinya $|H|$ membagi $|G|$.

Telah diketahui $|G| = r|H|$, karena r menunjukkan banyak koset kiri H pada G yang berbeda sehingga $|G| = [G : H]|H|$. Jadi, diperoleh $[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$. ■

Isomorfisma Grup

Definisi 2.1.53 (*Homomorfisma Grup, e.g (Dummit dan Foote, 2004)*)

Misalkan grup $(G, *)$ dan grup $(H, \diamond)$. Suatu fungsi $\varphi : G \rightarrow H$ merupakan homorfisma grup jika untuk setiap $g_1, g_2 \in G$ berlaku

$$\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \diamond \varphi(g_2).$$

Contoh 2.1.54 Dimiliki grup $(\mathbb{R}, +)$ dan grup $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. Suatu fungsi $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ didefinisikan dengan $\varphi(r) = e^r$ untuk $r \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan φ merupakan homomorfisma grup.

Bukti.

Diambil sembarang r_1 dan $r_2 \in \mathbb{R}$ diperoleh

$$\begin{aligned}\varphi(r_1 + r_2) &= e^{r_1 + r_2} \\ &= e^{r_1} \cdot e^{r_2} \\ &= \varphi(r_1) \cdot \varphi(r_2).\end{aligned}$$

Karena $\varphi(r_1 + r_2) = e^{r_1} \cdot e^{r_2} = \varphi(r_1) \cdot \varphi(r_2)$ artinya φ merupakan homomorfisma grup. ■

Definisi 2.1.55 (*Isomorfisma Grup, e.g (Dummit dan Foote, 2004)*)
Misalkan $(G, *)$ dan $(H, \diamond)$ merupakan grup. Suatu fungsi $\varphi : G \rightarrow H$ dikatakan sebagai isomorfisma grup jika φ merupakan homomorfisma grup dan φ fungsi bijektif. Jika terdapat isomorfisma dari G ke H maka G dikatakan isomorfik dengan grup H dinotasikan dengan $G \cong H$.

Contoh 2.1.56 Diberikan grup $(\mathbb{R}, +)$ dan grup $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. Suatu fungsi $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ didefinisikan dengan $\varphi(r) = e^r$ untuk $r \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan φ merupakan isomorfisma grup.

Bukti.

Diketahui dari contoh 2.1.54, φ merupakan homomorfisma grup. Diambil sembarang r_1 dan $r_2 \in \mathbb{R}$ dengan $\varphi(r_1) = \varphi(r_2)$

diperoleh

$$\varphi(r_1) = \varphi(r_2)$$

$$e^{r_1} = e^{r_2}$$

$$\ln e^{r_1} = \ln e^{r_2}$$

$$r_1 = r_2$$

Karena $e^{r_1} = e^{r_2}$ diperoleh $r_1 = r_2$, sehingga untuk $\varphi(r_1) = \varphi(r_2)$ maka $r_1 = r_2$. Jadi, untuk $\varphi(r_1) = \varphi(r_2)$ diperoleh $r_1 = r_2$. Artinya φ merupakan fungsi injektif.

Untuk sembarang $r \in \mathbb{R}^+$ akan ditunjukkan terdapat $r' \in \mathbb{R}$. Diambil sembarang $r \in \mathbb{R}^+$ dengan $r = \ln r'$ diperoleh

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= e^r \\ &= e^{\ln r'} \\ &= r'\end{aligned}$$

sehingga untuk sembarang $r \in \mathbb{R}^+$ terdapat $r' \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\varphi(r') = r$, artinya φ merupakan fungsi surjektif.

Telah diketahui φ merupakan fungsi injektif dan surjektif maka φ merupakan fungsi bijektif. Kemudian karena φ homomorfisma grup dan fungsi bijektif diperoleh φ isomorfisma grup. ■

Isomorfisma grup merupakan konsep yang penting dalam teori grup. Konsep isomorfisma grup dimanfaatkan untuk mengetahui grup-grup yang saling isomorfis. Berikut teorema berkaitan dengan grup yang saling isomorfis.

Teorema 2.1.57 (e.g (Fine, dkk, 2014))

Misalkan G grup siklik. Jika $|G| = n$ maka $G \cong (\mathbb{Z}_n, +)$.

Bukti.

Diketahui G grup siklik dimisalkan $G = \langle g \rangle$ dan $g \in G$. Grup $(\mathbb{Z}_n, +)$ merupakan grup siklik karena terdapat $\bar{1} \in \mathbb{Z}_n$ sedemikian sehingga $\langle \bar{1} \rangle = \{n\bar{1} | n \in \mathbb{Z}_n\} = \mathbb{Z}_n$. Untuk $|G| = n$ dimiliki suatu fungsi $\rho : \mathbb{Z}_n \rightarrow G$ didefinisikan dengan $\rho(r) = g^r$ untuk $r \in \mathbb{Z}_n$. Akan ditunjukkan ρ terdefinisi dengan baik dengan menunjukkan jika $k \equiv m \pmod{n}$ maka $\rho(g^k) = \rho(g^m)$. Diambil sembarang $k \in \mathbb{Z}_n$ dengan $k \equiv m \pmod{n}$ maka $k = ns + m$ dengan $s \in \mathbb{Z}$, diperoleh

$$\rho(k) = g^k = g^{ns+m} = g^{ns} \cdot g^m = e \cdot g^m = g^m = \rho(m).$$

Karena $k \equiv m \pmod{n}$ diperoleh $\rho(k) = \rho(m)$ artinya ρ terdefinisi dengan baik. Kemudian akan ditunjukkan ρ merupakan homomorfisma grup. Diambil sembarang $a, b \in \mathbb{Z}_n$ diperoleh,

$$\begin{aligned} \rho(a+b) &= g^{a+b} \\ &= g^a g^b \\ &= \rho(a)\rho(b). \end{aligned}$$

Karena $\rho(a+b) = \rho(a)\rho(b)$ sehingga ρ merupakan homomorfisma grup.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa ρ merupakan fungsi bijektif. Dimisalkan $\rho(a) = \rho(b)$, diperoleh

$$\rho(a) = \rho(b) \rightarrow g^a = g^b.$$

Kemudian, diperoleh $n|a-b$, artinya $a \equiv b \pmod{n}$. Oleh karena itu ρ merupakan fungsi injektif. Kemudian karena G merupakan

grup siklik dan $G = \langle g \rangle$ maka untuk sembarang $h \in G$ dapat dinyatakan sebagai $g^i \in G$ dengan $i \in \mathbb{Z}_n$, artinya ρ merupakan fungsi surjektif. Telah diketahui ρ merupakan fungsi injektif dan surjektif, diperoleh ρ merupakan fungsi bijektif. Jadi, ρ merupakan isomorfisma grup dan $G \cong (\mathbb{Z}_n, +)$. ■

3. Ring

Ring merupakan struktur aljabar yang dibangun oleh dua operasi biner yang memenuhi sifat tertentu. Pada bagian ini akan menguraikan konsep ring, jenis-jenis ring, elemen unit, elemen nilpoten, subring, isomorfisma ring, dan ring berhingga. Sebelum melanjutkan pembahasan lebih jauh, berikut diberikan definisi ring.

Definisi 2.1.58 (*Ring, e.g (Fine, dkk, 2014)*)

Suatu himpunan tak kosong R yang dilengkapi dua operasi biner penjumlahan dan perkalian dituliskan dengan $(R, +, \cdot)$ disebut sebagai ring jika memenuhi sifat-sifat sebagai berikut.

1. *Tertutup terhadap penjumlahan*

$$\forall a, b \in R \text{ berlaku } a + b \in R$$

2. *Asosiatif terhadap penjumlahan*

$$\forall a, b, c \in R \text{ berlaku } (a + b) + c = a + (b + c)$$

3. *Memiliki identitas terhadap operasi penjumlahan*

$$\text{Terdapat } 0 \in R \text{ sehingga } \forall a \in R \text{ berlaku } a + 0 = 0 + a = a$$

4. *Setiap elemen memiliki invers terhadap penjumlahan*

$$\forall a \in R, \exists -a \in R \text{ sehingga } a + (-a) = (-a) + a = 0$$

5. *Komutatif terhadap penjumlahan*

$$\forall a, b \in R \text{ berlaku } a + b = b + a$$

6. *Tertutup terhadap perkalian*

$$\forall a, b \in R \text{ berlaku } a \cdot b \in R$$

7. *Asosiatif terhadap perkalian*

$$\forall a, b, c \in R \text{ berlaku } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

8. *Distribusi Kiri*

$$\forall a, b, c \in R \text{ berlaku } a \cdot (b + c) = ab + ac$$

9. *Distribusi Kanan*

$$\forall a, b, c \in R \text{ berlaku } (a + b) \cdot c = ac + bc$$

Contoh 2.1.59 Contoh lain dari ring sebagai berikut.

1. Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian membentuk struktur $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ yang merupakan ring (Dummit dan Foote, 2004).
2. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian membentuk struktur $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ yang merupakan ring (Gallian, 2021).
3. Himpunan bilangan bulat modulo n yaitu $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ dilengkapi dengan dua operasi yaitu penjumlahan modulo n dan operasi perkalian modulo n membentuk struktur $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ yang merupakan ring (Gallian, 2021).

Jenis-Jenis Ring

Ring dapat dibagi menjadi beberapa jenis. Berikut jenis-jenis ring meliputi ring dengan elemen satuan, ring komutatif, ring pembagian, dan lapangan.

Definisi 2.1.60 (*Ring dengan Elemen Satuan, e.g (Burton, 1970)*)

Misalkan R merupakan ring. Ring R disebut ring dengan elemen satuan apabila terdapat $1 \in R$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in R$ berlaku $1a = a1 = a$. Elemen 1 tersebut, disebut sebagai elemen satuan.

Contoh 2.1.61 Diketahui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ merupakan suatu ring. Terdapat $1 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk sembarang $r \in \mathbb{R}$ diperoleh $1 \cdot r = r$ dan $r \cdot 1 = r$ sehingga 1 merupakan elemen satuan pada dengan elemen satuan $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Definisi 2.1.62 (*Ring Komutatif, e.g (Fine, dkk, 2014)*)

Misalkan R merupakan ring. Ring R disebut ring komutatif apabila untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $ab = ba$.

Contoh 2.1.63 Diketahui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ merupakan contoh ring. Diperhatikan bahwa untuk sembarang $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ diperoleh $r_1 \cdot r_2 = r_1 \cdot r_2$ sehingga $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ merupakan ring komutatif.

Definisi 2.1.64 (*Ring Pembagian, e.g (Zhao, 2022)*)

Misalkan R merupakan ring dengan elemen satuan. Ring R disebut ring pembagian apabila untuk setiap $a \in R - \{0\}$, terdapat $a^{-1} \in R - \{0\}$ sehingga berlaku $a(a^{-1}) = (a^{-1})a = 1$.

Contoh 2.1.65 Diketahui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ merupakan ring. Berdasarkan contoh 2.1.60 diketahui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ merupakan memiliki elemen satuan 1, sehingga $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ merupakan ring dengan elemen satuan.

Diperhatikan untuk setiap $r \in \mathbb{R} - \{0\}$ terdapat $r^{-1} \in \mathbb{R} - \{0\}$ sedemikian sehingga $r(r^{-1}) = (r^{-1})r = 1$, artinya $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ merupakan ring pembagian.

Definisi 2.1.66 (*Lapangan, e.g (Zhao, 2022)*)

Misalkan R merupakan ring. Ring R disebut lapangan apabila R merupakan ring pembagian yang komutatif.

Contoh 2.1.67 Diketahui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ merupakan ring. Berdasarkan contoh 2.1.64 diketahui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ merupakan ring pembagian dan dari contoh 2.1.62 diketahui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ merupakan ring komutatif sehingga $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ merupakan lapangan.

Pada ring terdapat beberapa elemen khusus antara lain unit, elemen nilpoten, dan pembagi nol. Definisi unit sebagai berikut.

Definisi 2.1.68 (*Unit, e.g (Dummit dan Foote, 2004)*)

Misalkan R merupakan ring dengan elemen satuan 1, suatu $a \in R$ dikatakan sebagai unit jika terdapat $b \in R$ sehingga $ab = ba = 1$. Himpunan elemen unit pada suatu ring dinotasikan dengan $R^\times$.

Contoh 2.1.69 Diketahui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ merupakan ring dengan elemen satuan 1, berdasarkan contoh 2.1.64 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ merupakan ring pembagian sehingga untuk sembarang $r \in \mathbb{R} - \{0\}$ terdapat $r^{-1} \in \mathbb{R} - \{0\}$ sedemikian sehingga $r(r^{-1}) = (r^{-1})r = 1$ artinya sembarang $r \in \mathbb{R} - \{0\}$ merupakan unit pada ring $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Himpunan elemen unit $R^\times$ membentuk suatu grup. Selain elemen unit, pada ring terdapat elemen nilpoten. Definisi dari elemen nilpoten sebagai berikut.

Definisi 2.1.70 (*Elemen Nilpoten, e.g (Malik, dkk, 1997)*)

Misalkan R ring, suatu elemen $a \in R$ disebut sebagai elemen nilpoten jika $a^n = 0$ untuk $n \in \mathbb{N}$.

Contoh 2.1.71 Dimiliki ring $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ merupakan suatu ring. Himpunan $\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$, untuk $\bar{2}, \bar{4}, \bar{6} \in \mathbb{Z}_8$ diperoleh

$$\bar{2}^3 = \bar{0}$$

$$\bar{4}^2 = \bar{0}$$

$$\bar{6}^3 = \bar{0}$$

sehingga $\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}$ merupakan elemen nilpoten.

Pada ring memiliki setidaknya satu elemen nilpoten yaitu 0. Jika suatu ring memiliki elemen unit maka elemen unit tersebut bukan merupakan elemen nilpoten. Hal tersebut sesuai dengan lemma berikut.

Lemma 2.1.72 Misalkan R merupakan ring dengan elemen satuan 1, untuk sembarang $u \in R$ jika u merupakan unit maka u bukan elemen nilpoten.

Bukti.

Diketahui R merupakan ring dengan elemen satuan 1. Akan ditunjukkan untuk sembarang $u \in R$ jika u merupakan unit maka u bukan elemen nilpoten. Dimisalkan $u \in R$ merupakan unit sehingga terdapat $a \in R$ sehingga $ua = au = 1$. Diasumsikan u merupakan elemen nilpoten maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $u^n = 0$.

Dimisalkan N merupakan himpunan bilangan asli n yang memenuhi $u^n = 0$. Menurut *well ording property* N memiliki elemen terkecil yang dimisalkan $n_0 \in N$ sedemikian sehingga $u^{n_0} = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned}
u^{n_0} &= 0 \\
\Leftrightarrow uu^{n_0-1} &= 0 \\
\Leftrightarrow auu^{n_0-1} &= a0 \\
\Leftrightarrow 1u^{n_0-1} &= 0 \\
\Leftrightarrow u^{n_0-1} &= 0.
\end{aligned}$$

Kontradiksi dengan n_0 merupakan elemen terkecil dari N . Jadi, u bukan elemen nilpoten. ■

Telah diketahui untuk ring R himpunan $R^\times$ merupakan himpunan unit pada ring R . Pada suatu lapangan F setiap elemen tak nolnya merupakan unit. Oleh karena itu, $F^\times$ dengan operasi perkalian membentuk grup abelian. Jika ring F berhingga diperoleh $F^\times$ merupakan grup siklik. Hal tersebut sesuai dengan teorema sebagai berikut.

Teorema 2.1.73 (Zhao, 2022)

Dimiliki F merupakan lapangan. Jika F merupakan lapangan berhingga maka $F^\times$ dengan operasi perkalian merupakan grup siklik.

Bukti.

Diketahui F merupakan lapangan berhingga. Akan ditunjukkan $(F^\times, \cdot)$ merupakan grup siklik. Dimisalkan $|F^\times| = m$ dan $a \in F^\times$ dengan $|a| = k$ dan k merupakan order maksimum yang mungkin atas setiap anggota $F^\times$. Diketahui berdasarkan teorema 2.1.52 diperoleh $k|m$ sehingga $k \leq m$.

Diambil sembarang $b \in F^\times$ dengan $|b| = r$. Diketahui berdasarkan lemma 2.1.45 terdapat suatu elemen dengan order

$\text{kpk}(r, k) \geq k$. Karena k merupakan order maksimum yang mungkin atas setiap anggota $F^\times$ sehingga $\text{kpk}(r, k) = k$ artinya $r|k$. Kemudian karena $|b| = r$ dan $r|k$ diperoleh $b^k = 1$ artinya setiap anggota dari $F^\times$ merupakan akar dari polinomial $x^k - 1 \in F[x]$ (Gallian, 2021). Jadi, diperoleh sebanyak m akar polinomial dari $x^k - 1 \in F[x]$. Tetapi, polinomial berderajat k pada lapangan memiliki tepat k solusi (Gallian, 2021). Jadi diperoleh hasrulah $m \leq k$.

Telah diperoleh $k \leq m$ dan $m \leq k$ sehingga $m = k$. Jadi diperoleh $|a| = m = |F^\times|$ artinya $\langle a \rangle = F^\times$ dan $F^\times$ merupakan grup siklik dengan operasi perkalian. ■

Subring

Pada suatu ring terdapat struktur yang disebut dengan subring. Definisi subring sebagai berikut.

Definisi 2.1.74 (Subring, e.g (Zhao, 2022))

Misalkan $(R, +, \cdot)$ ring dan S himpunan tak dengan $S \subseteq R$, S dikatakan sebagai subring dari R jika $(S, +, \cdot)$ merupakan ring.

Contoh 2.1.75 Diketahui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ merupakan ring dan $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. Karena $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan suatu ring diperoleh $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ subring dari $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Setelah mengetahui definisi dan contoh dari subring, selanjutnya dimiliki proposisi sebagai berikut.

Teorema 2.1.76 (e.g (Malik, dkk, 1997))

Misalkan R ring dan himpunan tak kosong S dengan $S \subseteq R$, S merupakan subring dari R jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a - b \in S$ dan $ab \in S$.

Bukti.

Misal R ring, S himpunan tak kosong dengan $S \subseteq R$. Jika S merupakan subring dari R diperoleh untuk sembarang $a, b \in S$ terdapat $-b \in S$. Diambil sembarang $a \in S$ diperoleh $a - b \in S$ dan $ab \in S$.

Kemudian akan ditunjukkan jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a - b \in S$ dan $ab \in S$ maka S merupakan subring. Diambil sembarang $a, b \in S$ diperoleh

1. Karena $a - b \in S$ diperoleh $a + (-b) \in S$ sehingga tertutup terhadap penjumlahan.
2. Diketahui R ring dan $S \subseteq R$ pada himpunan S berlaku sifat asosiatif terhadap penjumlahan.
3. Karena $a \in S$ diperoleh $a - a = 0 \in S$ sehingga terdapat elemen identitas penjumlahan.
4. Diperhatikan untuk setiap $a \in S$ terdapat $-a \in S$ sehingga $a + (-a) = 0 = -a + a$.
5. Diketahui R ring dan $S \subseteq R$ pada himpunan S berlaku sifat komutatif terhadap penjumlahan.
6. Karena $ab \in S$ artinya tertutup terhadap perkalian.
7. Pada R berlaku asosiatif terhadap perkalian sehingga berlaku sifat asosiatif perkalian pada S .
8. Pada R berlaku sifat distributif kanan dan distributif kiri. Oleh karena itu, pada S berlaku sifat distributif kanan dan distributif kiri.

Diperoleh S subring dari R



Pada suatu ring dapat memiliki lebih dari satu subring. Irisan dua buah subring pada suatu ring merupakan subring juga. Hal tersebut sesuai dengan lemma sebagai berikut.

Lemma 2.1.77 (*Adkins dan Weintraub, 1992*)

Misalkan R ring, jika $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ merupakan himpunan subring dari R maka $S = \bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$ merupakan subring dari R .

Bukti.

Diketahui R ring dan $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ merupakan himpunan subring dari R . Dimisalkan $S = \bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$, untuk sembarang $a, b \in S$ diperoleh $a, b \in S_\alpha$ dengan S_α merupakan sembarang subring dari R . Karena $a, b \in S_\alpha$ diperoleh $a - b \in S_\alpha$ dan $ab \in S_\alpha$. Oleh karena itu, diperoleh $a - b \in S$ dan $ab \in S$. Diketahui berdasarkan teorema 2.1.76 diperoleh S subring. ■

Isomorfisma Ring

Definisi 2.1.78 (*Homomorfisma Ring, e.g (Fine, dkk, 2014)*)

Misalkan $(R, +, \cdot)$ dan $(S, \oplus, \otimes)$ ring. Suatu fungsi $f : R \rightarrow S$ dikatakan sebagai homomorfisma ring jika untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ berlaku

$$f(r_1 + r_2) = f(r_1) \oplus f(r_2) \text{ dan } f(r_1 \cdot r_2) = f(r_1) \otimes f(r_2)$$

Contoh 2.1.79 Dimiliki ring $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ dan suatu fungsi $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ dengan $f(x + iy) = x - iy$ untuk $x, y \in \mathbb{Q}$. Akan ditunjukkan f merupakan homomorfisma ring.

Bukti.

Diambil sembarang $q_1 = x_1 + iy_1$ dan $q_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{Q}$

diperoleh

$$\begin{aligned}
 f(q_1 + q_2) &= f((x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)) \\
 &= f(x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2) \\
 &= f((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)) \\
 &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\
 &= x_1 + x_2 - iy_1 - iy_2 \\
 &= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) \\
 &= f(q_1) + f(q_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(q_1 \cdot q_2) &= f((x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)) \\
 &= f(x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 - y_1y_2) \\
 &= f((x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)) \\
 &= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) \\
 &= x_1x_2 - y_1y_2 - ix_1y_2 - ix_2y_1 \\
 &= x_1x_2 - ix_1y_2 - ix_2y_1 - y_1y_2 \\
 f(q_1) \cdot f(q_2) &= f(x_1 + iy_1) \cdot f(x_2 + iy_2) \\
 &= (x_1 - iy_1) \cdot (x_2 - iy_2) \\
 &= x_1x_2 - ix_1y_2 - ix_2y_1 - y_1y_2
 \end{aligned}$$

$f(q_1 \cdot q_2) = x_1x_2 - ix_1y_2 - ix_2y_1 - y_1y_2 = f(q_1) \cdot f(q_2)$ artinya $f(q_1 \cdot q_2) = f(q_1) \cdot f(q_2)$. Karena $f(q_1 + q_2) = f(q_1) + f(q_2)$ dan $f(q_1 \cdot q_2) = f(q_1) \cdot f(q_2)$ terbukti f homomorfisma ring. ■

Definisi 2.1.80 (*Isomorfisma Ring, e.g (Fine, dkk, 2014)*)

Misalkan $(R, +, \cdot)$ dan $(S, \oplus, \otimes)$ ring. Homomorfisma $f : R \rightarrow S$ dikatakan sebagai isomorfisma ring jika f merupakan fungsi bijektif. Jika terdapat isomorfisma dari R ke S maka R dikatakan isomorfik dengan S dinotasikan dengan $R \cong S$.

Contoh 2.1.81 Dimiliki ring $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ dan homomorfisma ring $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ dengan $f(x + iy) = x - iy$ untuk $x, y \in \mathbb{Q}$. Akan ditunjukkan f merupakan isomorfisma ring.

Bukti.

Diambil sembarang $q_1 = x_1 + iy_1$ dan $q_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{Q}$. Misalkan $f(q_1) = f(q_2)$ diperoleh

$$\begin{aligned} f(q_1) &= f(q_2) \\ \Leftrightarrow x_1 - iy_1 &= x_2 - iy_2. \end{aligned}$$

Karena $x_1 - iy_1 = x_2 - iy_2$ maka $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$ artinya $q_1 = q_2$. Jadi, untuk $f(q_1) = f(q_2)$ diperoleh $q_1 = q_2$. Artinya f merupakan fungsi injektif.

Diambil sembarang $x - iy \in \mathbb{Q}$ diperoleh $x - iy = f(x + iy)$ artinya untuk sembarang $x - iy \in \mathbb{Q}$ terdapat $x + iy \in \mathbb{Q}$ sedemikian sehingga $f(x + iy) = x - iy$. Artinya f merupakan fungsi surjektif. Karena f merupakan fungsi injektif dan surjektif maka f merupakan fungsi bijektif. Terbukti f isomorfisma ring. ■

Ring Berhingga

Secara umum berdasarkan banyak anggota himpunan pada ring, ring dapat dibedakan menjadi ring tidak berhingga dan ring berhingga. Ring tidak berhingga merupakan ring dengan anggota himpunan yang tidak berhingga sedangkan, ring berhingga merupakan ring dengan anggota himpunan yang berhingga (Fine, dkk, 2014). Pada suatu ring $(R, +, \cdot)$ struktur $(R, +)$ merupakan grup abelian, sehingga pada ring berhingga struktur $(R, +)$ merupakan grup abelian berhingga.

Pada teori grup telah dimiliki beberapa teorema mengenai grup berhingga, khususnya pada grup berhingga dengan order tertentu seperti order p dan p^2 dengan p bilangan prima. Pada bab sebelumnya telah diketahui teorema lagrange, akibat dari teorema tersebut untuk grup berhingga dengan order p bilangan prima G grup siklik.

Akibat 2.1.82 (e.g (Adkins dan Weintraub, 1992)

Misalkan G grup dengan $|G| = p$ untuk p sembarang bilangan prima G merupakan grup siklik.

Bukti.

Diketahui G grup dengan $|G| = p$. Diambil sembarang $g \in G$ dengan $g \neq 0$ dan dimisalkan $H = \langle g \rangle$. Karena $H \neq e$ dan berdasarkan 2.1.52 $|H|$ membagi $|G|$ sehingga $|H| = p$ diperoleh $H = G$. Jadi $\langle g \rangle = |G|$ artinya G grup siklik ■

Dari teorema 2.1.82 diperoleh bahwa untuk setiap grup dengan order p bilangan prima merupakan grup siklik. Telah diketahui sebelumnya berdasarkan teorema 2.1.57 untuk setiap grup siklik berhingga akan isomorfik dengan $(\mathbb{Z}_n, +)$ sehingga setiap grup dengan order p isomorfik dengan grup $(\mathbb{Z}_p, +)$.

Kemudian untuk grup berhingga dengan order p^2 dimiliki proposisi sebagai berikut.

Proposisi 2.1.83 (e.g (Adkins dan Weintraub, 1992))

Misalkan G grup berhingga dengan $|G| = p^2$ untuk p sembarang bilangan prima $G \cong (\mathbb{Z}_{p^2}, +)$ atau $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Bukti.

Misal G grup berhingga dengan $|G| = p^2$. Untuk G grup siklik berdasarkan teorema 2.1.57 diperoleh $G \cong (\mathbb{Z}_{p^2}, +)$.

Selanjutnya untuk G yang bukan merupakan grup siklik, diambil sembarang $g \in G$ dengan $g \neq e$ dan diperoleh $|g| = p$ dan dimisalkan $\langle g_1 \rangle = H$. Kemudian diambil sembarang $g_2 \in G$ dengan $g_2 \neq e$ dan $g_2 \neq g_1$ diperoleh $|g_2| = p$ dan dimisalkan $\langle g_2 \rangle = K$. Karena $|H| = |K| = p$ berdasarkan akibat 2.1.82 H dan K grup siklik. Oleh karena itu berdasarkan teorema 2.1.57 diperoleh $H \cong \mathbb{Z}_p$ dan $K \cong \mathbb{Z}_p$. Jadi $G = \langle g_1 \rangle \times \langle g_2 \rangle \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ ■

Diketahui berdasarkan lemma 2.1.83 jika grup $|G| = p^2$ maka $G \cong (\mathbb{Z}_{p^2}, +)$ atau $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Grup G tersebut memiliki setidaknya satu elemen generator jika $G \cong (\mathbb{Z}_{p^2}, +)$. Sedangkan, untuk $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ akan dibangun oleh setidaknya dua generator dimisalkan $a, b \in G$.

Teorema dan lemma mengenai grup berhingga dengan order p dan p^2 tersebut digunakan dalam menentukan ring berhingga dengan order p dan p^2 . Fine (1993) dalam artikel yang berjudul *Classification of Finite Rings of Order p^2* membahas mengenai ring p dan ring p^2 . Ring-ring tersebut dibangun oleh generator penjumlahan ring tersebut. Sebelum membahas klasifikasi ring p dan p^2 diberikan definisi subring yang dibangun oleh himpunan sebagai berikut.

Definisi 2.1.84 (e.g (Adkins dan Weintraub, 1992))

Misalkan R merupakan ring dan himpunan tak kosong $X \subseteq R$. Subring terkecil dari R yang memuat X disebut subring yang dibangun oleh X .

Contoh 2.1.85 Diketahui $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ merupakan suatu ring. Himpunan $X = \{\bar{2}, \bar{4}\}$ merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_8$. Akan ditentukan subring terkecil dari $\mathbb{Z}_8$ yang memuat himpunan X .

Diketahui berdasarkan teorema 2.1.76 suatu subring dari $\mathbb{Z}_8$ harus tertutup terhadap operasi penjumlahan, pengurangan serta perkalian dalam $\mathbb{Z}_8$. Artinya, setiap hasil penjumlahan, pengurangan dan perkalian antara elemen-elemen dalam himpunan tersebut harus tetap berada di dalam himpunan.

Karena $\bar{2} + \bar{4} = \bar{6}$ dan $\bar{4} + \bar{4} = \bar{0}$ diperoleh himpunan baru yakni $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$. Himpunan S memenuhi sifat tertutup terhadap penjumlahan, pengurangan dan perkalian pada $\mathbb{Z}_8$ sehingga S merupakan subring dari $\mathbb{Z}_8$. Karena S merupakan subring terkecil yang memuat himpunan X , artinya S merupakan subring yang dibangkitkan oleh X .

Suatu ring R merupakan subring dari ring R itu sendiri. Oleh karena itu, berdasarkan definisi 2.1.84 dimiliki ring R dibangun oleh himpunan R . Kemudian dimiliki lemma subring yang dibangkitkan oleh himpunan sebagai berikut.

Lemma 2.1.86 (e.g (Adkins dan Weintraub, 1992))

Misalkan R ring dan himpunan tak kosong $X \subseteq R$. Subring dari ring R yang dibangun oleh X merupakan himpunan semua jumlah atau selisih dari hasil kali berhingga elemen-elemen X .

Bukti.

Diketahui R ring dan himpunan tak kosong X dengan $X \subseteq R$. Misalkan himpunan S merupakan hasil kali elemen-elemen dari X sebagai berikut.

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^n \epsilon_i x_{i1} x_{i2} \cdots x_{ik_i} \mid x_{ij} \in X, \epsilon_i \in \{-1, 1\}, n, k_i \in \mathbb{N} \right\}$$

Himpunan $X \subseteq S$ dan $X \neq \emptyset$ sehingga himpunan $S \neq \emptyset$. Diambil sembarang $a, b \in S$ maka

$$a = \sum_{i=0}^n \epsilon_i x_{i1} x_{i2} \cdots x_{ik_i}$$

dan,

$$b = \sum_{i=0}^m \rho_i y_{i1} y_{i2} \cdots y_{il_i}$$

dengan $x_{ij}, y_{ij} \in X$ dan $n, m, k_i, l_i \in \mathbb{N}$ dan $\epsilon_i, \rho_i \in \{-1, 1\}$ diperoleh

$$\begin{aligned} a - b &= \sum_{i=0}^n \epsilon_i x_{i1} x_{i2} \cdots x_{ik_i} - \left(\sum_{i=0}^m \rho_i y_{i1} y_{i2} \cdots y_{il_i} \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \epsilon_i x_{i1} x_{i2} \cdots x_{ik_i} + \sum_{i=0}^m (-\rho_i) y_{i1} y_{i2} \cdots y_{il_i} \end{aligned}$$

karena $\rho_i \in \{-1, 1\}$ diperoleh $-\rho_i \in \{-1, 1\}$ artinya $a - b \in S$.

Kemudian diperoleh,

$$\begin{aligned} a \cdot b &= \sum_{i=0}^n \epsilon_i x_{i1} x_{i2} \cdots x_{ik_i} \left(\sum_{i=0}^m \rho_i y_{i1} y_{i2} \cdots y_{il_i} \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{i=0}^m \epsilon_i \rho_i (x_{i1} x_{i2} \cdots x_{ik_i} y_{i1} y_{i2} \cdots y_{il_i}) \end{aligned}$$

Karena $a - b \in S$ dan $ab \in S$ berdasarkan teorema 2.1.76 S merupakan subring dari R yang memuat X .

Dimisalkan $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ merupakan himpunan subring R yang memuat X dan $T = \bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$. Karena S merupakan subring yang memuat jumlah atau selisih hasil kali elemen-elemen dari X diperoleh $S \subseteq T$. Kemudian karena S memuat X diperoleh $S \in \{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sehingga $T \subseteq S$. Telah diperoleh $S \subseteq T$ dan $T \subseteq S$ artinya $S = T$. Jadi, S merupakan subring terkecil yang memuat X dan berdasarkan definisi 2.1.84 diperoleh S subring yang dibangkitkan oleh X . ■

Telah diketahui untuk setiap grup order p merupakan grup siklik dan isomorfis dengan $(\mathbb{Z}_p, +)$. Oleh karena itu, dengan memperhatikan keisomorfisan pada ring terdapat tepat dua ring berhingga order p yang berbeda yakni sebagai berikut (Fine, 1993).

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_p &\cong \langle a; pa = 0, a^2 = a \rangle \\ C_p(0) &= \langle a; pa = 0, a^2 = 0 \rangle \end{aligned}$$

Ring $\mathbb{Z}_p$ atau $C_p(0)$ dibangun oleh $\langle a \rangle$ dengan a merupakan generator penjumlahan untuk $\mathbb{Z}_p$ dan $C_p(0)$. Ring $\mathbb{Z}_p$ merupakan lapangan dengan elemen satuan $\bar{1}$ (Gallian, 2021).

Suatu ring berhingga $(R, +, \cdot)$ dengan order p^2 diperoleh $(R, +) \cong (\mathbb{Z}_{p^2}, +)$ atau $(R, +) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Oleh karena itu, berdasarkan keisomorfisan pada ring terdapat sebelas ring berhingga order p^2 yang berbeda sebagai berikut (Fine, 1993).

$$A = \langle a; p^2a = 0, a^2 = a \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^2},$$

$$B = \langle a; p^2a = 0, a^2 = pa \rangle,$$

$$C = \langle a; p^2a = 0, a^2 = 0 \rangle,$$

$$D = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = ba = 0 \rangle \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p,$$

$$E = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = a, ba = b \rangle,$$

$$F = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = b, ba = a \rangle,$$

$$G = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = 0, b^2 = b, ab = ba = a \rangle,$$

$$H = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = 0, b^2 = b, ab = ba = 0 \rangle,$$

$$I = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = b, ab = 0 \rangle,$$

$$J = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = b^2 = 0, ab = ba = 0 \rangle,$$

$$K = \begin{cases} \langle a, b; 2a = 2b = 0, a^2 = a, b^2 = a + b, ab = ba = b \rangle, p = 2 \\ \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = ja, ab = b, ba = b \rangle, p \neq 2 \end{cases}$$

dengan j bukan bilangan kuadrat di $\mathbb{Z}_p$.

Ring A, B dan C memiliki struktur penjumlahan yang isomorfis dengan grup $(\mathbb{Z}_{p^2}, +)$. Oleh karena itu, ring A, B , dan C dibangun oleh himpunan $\langle a \rangle$ dengan a generator penjumlahan. Pada ring D, E, F, G, H, I, J , dan K struktur penjumlahannya isomorfis dengan grup $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Karena telah diketahui berdasarkan teorema 2.1.82 diperoleh dua buah generator pada grup $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Jadi, ring D, E, F, G, H, I, J , dan K dibangun oleh $\langle a \rangle$ dan $\langle b \rangle$ dengan a dan b merupakan generator penjumlahan. Ring K merupakan lapangan berhingga (Fine, 1993).

Contoh ring $B = \langle a; 4a = 0, a^2 = 2a \rangle$ dengan order 4 sebagai berikut.

Contoh 2.1.87 Dimiliki ring

$$B = \langle a; 4a = 0, a^2 = 2a \rangle$$

Ring B dibangun oleh sebuah elemen yakni a sehingga dapat dimisalkan $B = \{0, a, 2a, 3a\}$, diperoleh

Tabel 2.3. Operasi $+$ pada ring B

$+$	0	a	2a	3a
0	0	a	2a	3a
a	a	2a	3a	0
2a	2a	3a	0	a
3a	3a	0	a	2a

Karena $4a = 0$ dan $a^2 = 2a$ diperoleh

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad a.2a &= a(a + a) \\
 &= a^2 + a^2 \\
 &= 2a + 2a \\
 &= 4a \\
 &= 0 \\
 \\
 \bullet \quad a.3a &= a(a + a + a) \\
 &= a^2 + a^2 + a^2 \\
 &= 2a + 2a + 2a \\
 &= 4a + 2a \\
 &= 0 + 2a \\
 &= 2a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad 2a.a &= (a+a)a \\
 &= a^2 + a^2 \\
 &= 2a + 2a \\
 &= 4a \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad 2a.2a &= (a+a)(a+a) \\
 &= a^2 + a^2 + a^2 + a^2 \\
 &= 2a + 2a + 2a + 2a \\
 &= 4a + 4a \\
 &= 0 + 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad 2a.3a &= (a+a)(a+a+a) \\
 &= a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 \\
 &= 2a + 2a + 2a + 2a + 2a + 2a \\
 &= 4a + 4a + 4a \\
 &= 0 + 0 + 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad 3a.a &= (a+a+a)a \\
 &= a^2 + a^2 + a^2 \\
 &= 2a + 2a + 2a \\
 &= 4a + 2a \\
 &= 0 + 2a \\
 &= 2a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad 3a.2a &= (a + a + a)(a + a) \\
&= a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 \\
&= 2a + 2a + 2a + 2a + 2a + 2a \\
&= 4a + 4a + 4a \\
&= 0 + 0 + 0 \\
&= 0 \\
\bullet \quad 3a.3a &= (a + a + a)(a + a + a) \\
&= a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 \\
&= 2a + 2a + 2a + 2a + 2a + 2a + 2a + 2a + 2a \\
&= 4a + 4a + 4a + 4a + 2a \\
&= 0 + 0 + 0 + 2a \\
&= 2a
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

Tabel 2.4. Operasi $\cdot$ pada ring B

$\cdot$	0	a	2a	3a
0	0	0	0	0
a	0	2a	0	2a
2a	0	0	0	0
3a	0	2a	0	2a

4. Graf Pangkat

Graf pangkat merupakan salah satu kajian teori graf pada struktur aljabar. Graf pangkat pertama kali diperkenalkan oleh Kelarev dan Quinn pada tahun 2000. Definisi graf pangkat sebagai berikut (Soleimani dan Naderi, 2023).

Definisi 2.1.88 (*Graf Pangkat*)

Dimiliki semigrup $(S, *)$, graf pangkat tidak berarah $\mathcal{P}(S)$ didefinisikan sebagai suatu graf dengan semua titik $u, v \in S$. Dua buah titik u dan v saling bertetangga jika $u \neq v$ dan $u^n = v$ atau $v^n = u$ dengan $n \in \mathbb{Z}^+$.

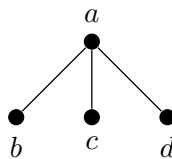
Pada semigrup S , untuk setiap $u \in S$, u^n dengan $n \in \mathbb{Z}^+$ merupakan kelipatan s dengan operasi semigrup S sebanyak n kali.

Contoh 2.1.89 Himpunan $S = \{a, b, c, d\}$ dan operasi $\circ$ yang didefinisikan dengan $s_1 \circ s_2 = a$ untuk setiap $s_1, s_2 \in S$. Diketahui dari contoh 2.1.31 $(S, \circ)$ merupakan semigrup. Perpangkatan setiap anggota himpunan S ditunjukkan sebagai berikut.

Tabel 2.5. Perpangkatan Elemen Semigrup $(S, \circ)$

Elemen Semigrup S			
a	b	c	d
$a^2 = a$	$b^2 = a$	$c^2 = a$	$d^2 = a$
$a^3 = a$	$b^3 = a$	$c^3 = a$	$d^3 = a$

Dari tabel 2.5 dibentuk graf pangkat $\mathcal{P}(S)$ sebagai berikut.

Gambar 2.15. $\mathcal{P}(S)$

Graf pangkat tidak hanya dikonstruksi pada semigrup, graf pangkat juga dikonstruksi pada grup. Berikut contoh graf pangkat

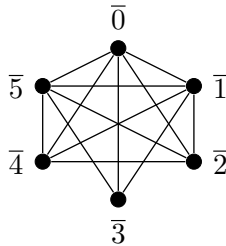
pada grup $(\mathbb{Z}_6, +)$.

Contoh 2.1.90 Diketahui $(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan grup dengan himpunan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Perpangkatan elemen-elemen dari $(\mathbb{Z}_6, +)$ ditunjukkan sebagai berikut.

Tabel 2.6. Perpangkatan Elemen Grup $(\mathbb{Z}_6, +)$

Elemen Grup $(\mathbb{Z}_6, +)$					
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}^2 = \bar{0}$	$\bar{1}^2 = \bar{2}$	$\bar{2}^2 = \bar{4}$	$\bar{3}^2 = \bar{0}$	$\bar{4}^2 = \bar{2}$	$\bar{5}^2 = \bar{4}$
$\bar{0}^3 = \bar{0}$	$\bar{1}^3 = \bar{3}$	$\bar{2}^3 = \bar{0}$	$\bar{3}^3 = \bar{3}$	$\bar{4}^3 = \bar{0}$	$\bar{5}^3 = \bar{3}$
$\bar{0}^4 = \bar{0}$	$\bar{1}^4 = \bar{4}$	$\bar{2}^4 = \bar{2}$	$\bar{3}^4 = \bar{0}$	$\bar{4}^4 = \bar{4}$	$\bar{5}^4 = \bar{2}$
$\bar{0}^5 = \bar{0}$	$\bar{1}^5 = \bar{5}$	$\bar{2}^5 = \bar{4}$	$\bar{3}^5 = \bar{3}$	$\bar{4}^5 = \bar{2}$	$\bar{5}^5 = \bar{1}$
$\bar{0}^6 = \bar{0}$	$\bar{1}^6 = \bar{0}$	$\bar{2}^6 = \bar{0}$	$\bar{3}^6 = \bar{0}$	$\bar{4}^6 = \bar{0}$	$\bar{5}^6 = \bar{0}$

Dari tabel 2.6 dibentuk graf pangkat $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)$ sebagai berikut.



Gambar 2.16. Graf pangkat grup $(\mathbb{Z}_6, +)$ $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)$

Contoh diatas merupakan contoh graf pangkat pada grup berhingga yakni $(\mathbb{Z}_6, +)$. Pada grup hingga, graf pangkat berupa graf lengkap jika grup hingga tersebut merupakan grup siklik dan memiliki order 1 atau p^n dengan p bilangan prima dan $n \in \mathbb{N}$. Hal tersebut sesuai dengan teorema sebagai berikut.

Teorema 2.1.91 (e.g (Chakrabarty, dkk, 2008))

Misalkan G grup berhingga, $\mathcal{P}(G)$ adalah graf lengkap jika dan hanya jika G merupakan grup siklik dan $|G| = 1$ atau $|G| = p^n$ untuk p bilangan prima dan $n \in \mathbb{N}$.

Bukti.

Misal G merupakan grup hingga. Akan ditunjukkan jika G merupakan grup siklik dan $|G| = 1$ atau $|G| = p^n$ untuk p bilangan prima dan $n \in \mathbb{N}$ maka $\mathcal{P}(G)$ graf lengkap. Untuk G grup siklik dengan $|G| = 1$ diperoleh $\mathcal{P}(G)$ membentuk graf lengkap dengan satu titik.

Jika $|G| = p^n$ untuk p bilangan prima dan $n \in \mathbb{N}$. Karena G grup siklik berdasarkan teorema 2.1.41 diperoleh G memiliki subgrup dengan order d dengan $d|n$. Diketahui $|G| = p^n$ diperoleh setiap subgrup memiliki order p^i dengan $1 \leq i \leq n$. Diketahui berdasarkan teorema 2.1.41 diperoleh setiap subgrup G_i, G_{i+1} dengan $|G_i| = p^i$ dan $|G_{i+1}| = p^{i+1}$ maka $G_i \leq G_{i+1}$ sehingga $G_i \subseteq G_{i+1}$. Oleh karena itu, setiap subgrup dari G memenuhi $G_1 \subseteq \dots \subseteq G_n$ dengan $|G_i| = p^i$ untuk $1 \leq i \leq n$. Diambil sembarang $a, b \in G$ untuk $a \neq b$ dengan $a \in G_i$ dan $b \in G_{i+1}$ diperoleh $\langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle$ sehingga $a^m = b$ untuk $m \in \mathbb{Z}^+$. Jadi, untuk sembarang a akan bertetangga dengan b pada $\mathcal{P}(G)$. Terbukti $\mathcal{P}(G)$ merupakan graf lengkap.

Kemudian akan ditunjukkan jika $\mathcal{P}(G)$ merupakan graf lengkap maka G merupakan grup siklik dan $|G| = 1$ atau $|G| = p^n$ untuk p bilangan prima dan $n \in \mathbb{N}$. Jika $\mathcal{P}(G)$ merupakan graf lengkap dengan satu titik jelas $|G| = 1$.

Kemudian dimisalkan G merupakan grup berhingga dengan $|G| > 1$. Diketahui $\mathcal{P}(G)$ membentuk graf lengkap. Klaim G bukan merupakan grup siklik, sehingga terdapat $a, b \in G$ dengan $a \notin \langle b \rangle$

dan $b \notin \langle a \rangle$ artinya a tidak bertetangga dengan b . Kontradiksi dengan $\mathcal{P}(G)$ graf lengkap, sehingga haruslah G grup siklik.

Dimisalkan $|G| = pq$ dengan p dan q dua bilangan prima yang berbeda. Pada G terdapat $a, b \in G$ sedemikian sehingga $|a| = p$ dan $|b| = q$. Karena p dan q bilangan prima yang berbeda artinya $p|q$ dan $q|p$, berdasarkan teorema 2.1.41 diperoleh $\langle a \rangle \not\subseteq \langle b \rangle$ dan $\langle b \rangle \not\subseteq \langle a \rangle$. Oleh karena itu, a dan b tidak saling bertetangga pada $\mathcal{P}(G)$. Kontradiksi dengan $\mathcal{P}(G)$ merupakan graf lengkap, sehingga haruslah $|G| = p^m$ untuk p bilangan prima dan $n \in \mathbb{N}$. ■

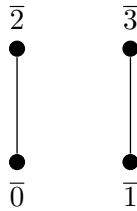
Operasi perkalian pada suatu ring R merupakan semigrup. Oleh karena itu, pada ring R , graf pangkat $\mathcal{P}(R)$ dikonstruksi pada ring R dengan operasi perkalian. Berikut contoh graf pangkat pada ring $\mathbb{Z}_4$.

Contoh 2.1.92 Diketahui $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ merupakan ring dengan himpunan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$, perpangkatan setiap elemen $\mathbb{Z}_4$ sebagai berikut.

Tabel 2.7. Perpangkatan Elemen Ring $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$

Elemen Ring $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$			
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}^2 = \bar{0}$	$\bar{1}^2 = \bar{1}$	$\bar{2}^2 = \bar{0}$	$\bar{3}^2 = \bar{1}$
$\bar{0}^3 = \bar{0}$	$\bar{1}^3 = \bar{1}$	$\bar{2}^3 = \bar{0}$	$\bar{3}^3 = \bar{3}$
$\bar{0}^4 = \bar{0}$	$\bar{1}^4 = \bar{1}$	$\bar{2}^4 = \bar{0}$	$\bar{3}^4 = \bar{1}$

Dari tabel 2.7 dibentuk graf pangkat $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4)$ sebagai berikut.



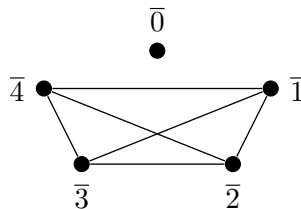
Gambar 2.17. Graf pangkat ring $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4)$

Contoh 2.1.93 Diketahui $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ merupakan ring dengan himpunan $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$, perpangkatan setiap elemen $\mathbb{Z}_5$ sebagai berikut.

Tabel 2.8. Perpangkatan Elemen Ring $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$

Elemen Ring $\mathbb{Z}_5$				
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}^2 = \bar{0}$	$\bar{1}^2 = \bar{1}$	$\bar{2}^2 = \bar{4}$	$\bar{3}^2 = \bar{4}$	$\bar{4}^2 = \bar{1}$
$\bar{0}^3 = \bar{0}$	$\bar{1}^3 = \bar{1}$	$\bar{2}^3 = \bar{3}$	$\bar{3}^3 = \bar{2}$	$\bar{4}^3 = \bar{4}$
$\bar{0}^4 = \bar{0}$	$\bar{1}^4 = \bar{1}$	$\bar{2}^4 = \bar{1}$	$\bar{3}^4 = \bar{1}$	$\bar{4}^4 = \bar{1}$
$\bar{0}^5 = \bar{0}$	$\bar{1}^5 = \bar{1}$	$\bar{2}^5 = \bar{2}$	$\bar{3}^5 = \bar{3}$	$\bar{4}^5 = \bar{4}$

Graf pangkat $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)$ yang diperoleh sebagai berikut.



Gambar 2.18. Graf pangkat ring $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)$

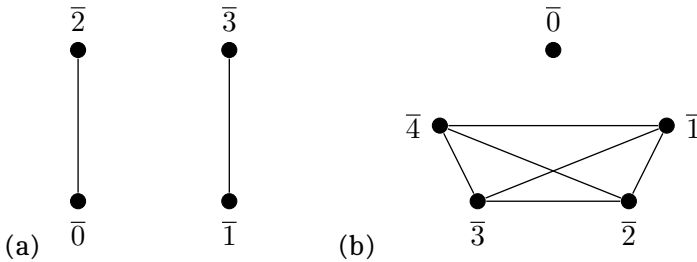
Definisi produk unit semi kartesian menurut Soleimani dan Naderi sebagai berikut (Soleimani dan Naderi, 2023).

Definisi 2.1.94 (Produk Semi Kartesian)

Dimiliki dua graf sederhana yang berbeda $G = (V(G), E(G))$ dan $H = (V(H), E(H))$. Produk unit semi kartesian dinotasikan dengan $G \cdot H$ merupakan graf tidak berarah dengan himpunan titik $V(G \cdot H) = V(G) \cdot V(H) = \{(g, h) | g \in V(G), h \in V(H)\}$ dan himpunan sisi $E(G \cdot H) = \{((g, h), (g', h')) | g = g', (g, 1) \in E(G) \text{ dan } (h, h') \in E(H)\}$.

Produk unit semi kartesian dikonstruksi dari dua graf pangkat dari dua ring berhingga yang berbeda R_1 dan R_2 dan dinotasikan dengan $\mathcal{P}(R_1) \cdot \mathcal{P}(R_2)$. Pada definisi produk unit semi kartesian tersebut, $1 \in E(G)$ merujuk pada elemen satuan pada ring R_1 .

Contoh 2.1.95 Diketahui graf pangkat ring $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ dan ring $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ berdasarkan contoh 2.1.92 dan contoh 2.1.93 sebagai berikut.



Gambar 2.19. (a) $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4)$ dan (b) $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)$

Karena $V(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4)) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dan $V(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$, sesuai dengan definisi 2.1.94 diperoleh $V(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_5))$ sebagai

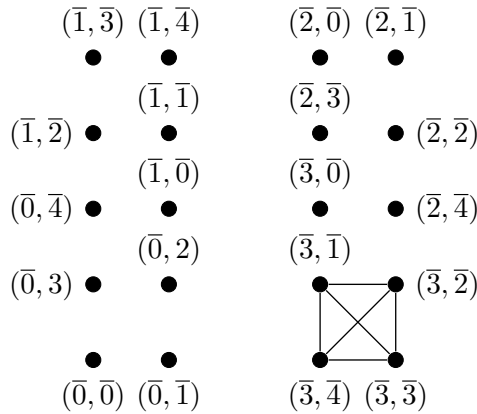
berikut.

$$V(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)) = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{4})\}$$

Diketahui berdasarkan definisi 2.1.94 diperoleh $E(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_4))$ sebagai berikut.

$$E(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)) = \{((\bar{3}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{2})), ((\bar{3}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{3})), ((\bar{3}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{4})), ((\bar{3}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{3})), ((\bar{3}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{4})), ((\bar{3}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{4}))\}$$

Diperoleh produk unit semi kartesian $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)$ sebagai berikut.



Gambar 2.20. Produk unit semi kartesian $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)$

B. Hasil Penelitian yang Relevan

Pada penelitian ini digunakan beberapa hasil penelitian yang relevan antara sebagai berikut. tersebut yang berkaitan dengan ring berhingga dan graf pangkat.

1. Penelitian yang berjudul *Classification of Finite Rings of Order p^2* oleh Fine tahun 1993. Pada penelitian tersebut diketahui untuk p bilangan prima terdapat tepat dua buah ring berhingga yang berbeda yakni

$$\mathbb{Z}_p \cong \langle a; pa = 0, a^2 = a \rangle$$

$$C_p(0) = \langle a; pa = 0, a^2 = 0 \rangle$$

Selain itu diketahui untuk p bilangan prima terdapat tepat 11 ring berhingga order p^2 yang berbeda yakni

$$A = \langle a; p^2a = 0, a^2 = a \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^2},$$

$$B = \langle a; p^2a = 0, a^2 = pa \rangle,$$

$$C = \langle a; p^2a = 0, a^2 = 0 \rangle,$$

$$D = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = ba = 0 \rangle \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p,$$

$$E = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = a, ba = b \rangle,$$

$$F = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = b, ba = a \rangle,$$

$$G = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = 0, b^2 = b, ab = ba = a \rangle,$$

$$H = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = 0, b^2 = b, ab = ba = 0 \rangle,$$

$$I = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = b, ab = 0 \rangle,$$

$$J = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = b^2 = 0, ab = ba = 0 \rangle,$$

$$K = \begin{cases} \langle a, b; 2a = 2b = 0, a^2 = a, b^2 = a + b, ab = ba = b \rangle, & p = 2 \\ \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = ja, ab = b, ba = b \rangle, & p \neq 2 \end{cases}$$

Ring-ring tersebut merupakan ring berhingga yang digunakan dalam penelitian ini. Pada artikel tersebut telah diketahui bahwa ring K merupakan lapangan berhingga. Pada penelitian ini akan dijelaskan mengenai struktur dari ring-ring berhingga selain ring K .

2. Penelitian yang berjudul *Power Graph of Finite Ring* oleh Soleimani dan Naderi tahun 2023. Penelitian ini membahas mengenai graf pangkat pada ring berhingga dan produk unit semi kartesian dari graf pangkat pada ring berhingga. Ring berhingga yang digunakan merupakan ring berhingga order p dan p^2 dengan p bilangan prima yang telah diperoleh dari artikel *Classification Ring of Order p^2* . Pada penelitian tersebut telah diketahui graf pangkat ring $C_p(0)$, C dan ring J merupakan graf bipartit lengkap. Selain itu, telah diketahui juga graf pangkat dari ring K untuk order 4 dan 9 merupakan gabungan graf kosong dan graf lengkap. Akan tetapi, pada penelitian tersebut belum dijelaskan alasan diperolehnya karakteristik graf pangkat ring $C_p(0)$, C dan J serta generalisasi karakteristik graf pangkat ring K .

Pada penelitian ini akan dijelaskan lebih lanjut mengenai karakteristik graf pangkat untuk ring $C_p(0)$, C dan J . Selain itu, pada penelitian ini akan digeneralisasi karakteristik graf pangkat ring K . Dalam penelitian ini juga akan dianalisis karakteristik graf pangkat pada ring berhingga order p dan p^2 dengan p bilangan prima selain ring $C_p(0)$, C dan ring J . Terakhir, pada penelitian ini akan menjelaskan lebih lanjut mengenai produk unit semi kartesian dua graf pangkat dari dua ring berhingga order p dan q dengan p dan q bilangan prima yang telah diketahui dari penelitian tersebut.

3. Penelitian yang berjudul *Undirected Power Graph of Semigroups* oleh Chakrabarty, dkk pada tahun 2008. Penelitian ini membahas mengenai graf pangkat tidak berarah pada semigrup. Pada penelitian ini diketahui untuk suatu grup siklik G dengan order p^n dengan p bilangan prima dan $n \in \mathbb{N}$ diperoleh graf pangkat $\mathcal{P}(G)$ merupakan graf lengkap dan berlaku sebaliknya. Hasil tersebut kemudian digunakan dalam penelitian ini untuk menggeneralisasi karakteristik graf pangkat pada lapangan berhingga.

BAB III

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai struktur dari ring berhingga dengan order p dan p^2 dengan p merupakan bilangan prima. Pada bab ini juga akan membahas mengenai graf pangkat pada ring berhingga order p dan p^2 serta karakteristik graf pangkat pada ring berhingga order p dan p^2 . Selain itu, pada bab ini juga akan membahas mengenai karakteristik graf dari produk unit semi kartesian dua graf pangkat pada dua ring berhingga order p dan p^2 yang berbeda.

A. Struktur Ring Berhingga Order p

Ring berhingga dengan order p dengan p merupakan bilangan prima terdapat tepat dua ring berhingga yang berbeda yakni sebagai berikut (Fine, 1993).

$$\mathbb{Z}_p \cong \langle a; pa = 0, a^2 = a \rangle.$$
$$C_p(0) = \langle a; pa = 0, a^2 = 0 \rangle.$$

Kedua ring tersebut, $\mathbb{Z}_p$ dan $C_p(0)$ memiliki struktur penjumlahan yang isomorfik dengan grup $(\mathbb{Z}_p, +)$. Artinya, masing-masing ring tersebut dibangun oleh himpunan $\langle a \rangle$ dengan a merupakan generator penjumlahan pada operasi penjumlahan.

Meskipun struktur penjumlahan ring $\mathbb{Z}_p$ dan $C_p(0)$ sama, struktur perkalian kedua ring tersebut berbeda. Ring $\mathbb{Z}_p$ merupakan sebuah lapangan dengan elemen satuan yakni $\bar{1}$. Setiap elemen tak nol pada ring $\mathbb{Z}_p$ merupakan elemen unit, dan bukan

elemen nilpoten.

Berbeda dengan ring $\mathbb{Z}_p$, ring $C_p(0)$ bukan merupakan lapangan. Seperti ring $\mathbb{Z}_p$, ring $C_p(0)$ juga dibangun oleh himpunan $\langle a \rangle$. Elemen-elemen dari ring $C_p(0)$ dapat dituliskan dengan

$$C_p(0) = \left\{ \sum_{i=0}^n k_i a^i \mid a^i \in C_p(0), n, k_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Karena untuk $i \geq 2$ diperoleh $a^i = 0$ sehingga himpunan $C_p(0)$ dapat disederhanakan dengan $C_p(0) = \{ka \mid a \in C_p(0), k \in \mathbb{Z}\}$. Selanjutnya akan ditunjukkan ring $C_p(0)$ merupakan ring komutatif.

Bukti.

Diketahui ring $C_p(0) = \langle a; pa = 0, a^2 = 0 \rangle$ dengan himpunan $C_p(0) = \{ka \mid a \in C_p(0), k \in \mathbb{Z}\}$. Untuk sembarang $x, y \in C_p(0)$ diperoleh $x = sa$ dan $y = ra$ dengan $s, r \in \mathbb{Z}$. Karena s dan r merupakan bilangan bulat diperoleh

$$x \cdot y = sa \cdot ra = (sr)a^2 = (sr)0 = 0$$

$$y \cdot x = ra \cdot sa = (rs)a^2 = (rs)0 = 0.$$

Dengan demikian, diperoleh $x \cdot y = y \cdot x$. Jadi, setiap elemen $C_p(0)$ memenuhi sifat komutatif, sehingga ring $C_p(0)$ merupakan ring komutatif. ■

Struktur dari ring $\mathbb{Z}_p$ dan $C_p(0)$ tersebut, akan digunakan dalam menyusun operasi penjumlahan dan perkalian untuk order 2, 3 dan 5 pada subab selanjutnya.

B. Struktur Ring Berhingga Order p^2

Diketahui berdasarkan keisomorfisan pada ring terdapat sebelas ring berhingga order p^2 yang berbeda sebagai berikut (Fine, 1993).

$$A = \langle a; p^2a = 0, a^2 = a \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^2},$$

$$B = \langle a; p^2a = 0, a^2 = pa \rangle,$$

$$C = \langle a; p^2a = 0, a^2 = 0 \rangle,$$

$$D = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = ba = 0 \rangle \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p,$$

$$E = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = a, ba = b \rangle,$$

$$F = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = b, ba = a \rangle,$$

$$G = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = 0, b^2 = b, ab = ba = a \rangle,$$

$$H = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = 0, b^2 = b, ab = ba = 0 \rangle,$$

$$I = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = b, ab = 0 \rangle,$$

$$J = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = b^2 = 0, ab = ba = 0 \rangle,$$

$$K = \begin{cases} \langle a, b; 2a = 2b = 0, a^2 = a, b^2 = a + b, ab = ba = b \rangle, p = 2 \\ \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = ja, ab = b, ba = b \rangle, p \neq 2 \end{cases}$$

dengan j bukan bilangan kuadrat di $\mathbb{Z}_p$. Ring-ring tersebut memiliki struktur penjumlahan yang isomorfik dengan grup $(\mathbb{Z}_{p^2}, +)$ atau grup $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Ring A, B dan C memiliki struktur penjumlahan yang isomorfik dengan $(\mathbb{Z}_{p^2}, +)$. Artinya, ketiga ring tersebut dibangun oleh himpunan $\langle a \rangle$ dengan a generator penjumlahan pada ketiga ring tersebut. Oleh karena itu, himpunan pada ketiga ring tersebut dapat dituliskan dengan

$$\left\{ \sum_{i=0}^n k_i a^i \mid n, k_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Himpunan tersebut kemudian dapat disederhanakan sesuai dengan sifat elemen-elemen ring A , B , dan C . Misalnya, pada ring A , berlaku $a^2 = a$ sehingga diperoleh $a^i = a$ untuk sembarang $i \geq 2$. Oleh karena itu, himpunan A dapat dituliskan dengan $A = \{ka | k \in \mathbb{Z}\}$. Kemudian, pada ring B diketahui $a^2 = pa$ sehingga himpunan B dapat disederhanakan dengan $B = \{ka | k \in \mathbb{Z}\}$. Terakhir, pada ring C diketahui $a^2 = 0$ sehingga himpunan C dapat dituliskan dengan $C = \{ka | k \in \mathbb{Z}\}$.

Berbeda dengan ring A , B , dan C yang struktur penjumlahannya isomorfik dengan grup $(\mathbb{Z}_{p^2}, +)$, pada ring D , E , F , G , H , I , J , dan K struktur penjumlahannya isomorfik dengan $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Artinya, kedelapan ring tersebut dibangun oleh himpunan $\langle a \rangle$ dan $\langle b \rangle$ dengan a dan b yang merupakan generator penjumlahannya. Oleh karena itu, himpunan pada kedelapan ring tersebut dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\left\{ \sum_{i=0}^k r_i a^i + \sum_{j=0}^l s_j b^j + \sum_{v,w=0}^m t_{vw} a^v b^w + \sum_{x,y=0}^n u_{xy} (b^x a^y) \right\}$$

dengan $k, l, m, n, r_i, s_i, t_{uv}, u_{xy} \in \mathbb{Z}$. Meskipun kedelapan ring tersebut memiliki himpunan yang serupa, masing-masing ring memiliki sifat-sifat elemen yang berbeda. Dengan memperhatikan sifat-sifat elemen pada ring-ring tersebut diperoleh sebagai berikut.

1. Pada ring D , berlaku $ab = ba = 0$, $a^2 = a$ dan $b^2 = b$ sehingga himpunan D dapat dituliskan dengan $D = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$.
2. Pada ring E berlaku $a^2 = a$, $b^2 = b$, $ab = a$, dan $ba = b$ dapat dituliskan $E = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$.

3. Pada ring F berlaku $a^2 = a$, $b^2 = b$, $ab = b$, dan $ba = a$ dapat dituliskan $F = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$.
4. Pada ring G berlaku $a^2 = 0$, $b^2 = b$ dan $ab = ba = a$ dapat dituliskan $G = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$.
5. Pada ring H berlaku $a^2 = 0$, $b^2 = b$ dan $ab = ba = 0$ dapat dituliskan $H = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$.
6. Pada ring I berlaku $a^2 = 0$ dan $ab = 0$ sehingga diperoleh $b^2 = 0$ dan $ba = 0$. Oleh karena itu, dapat dituliskan $I = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$.
7. Pada ring J berlaku $a^2 = 0$ dan $b^2 = 0$ serta $ab = ba = 0$ dapat dituliskan $J = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$.
8. Pada ring K berlaku $a^2 = a$, $b^2 = a + b$ untuk $p = 2$ atau $b = ja$ untuk $p \neq 2$ dan $ab = ba = b$ dapat dituliskan $K = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$.

Walaupun beberapa ring memiliki struktur penjumlahan yang sama, kesebelas ring tersebut memiliki struktur perkalian yang berbeda. Dari kesebelas ring diatas, hanya ring E dan F ring yang tidak komutatif. Selain itu, ring A , D , G , dan K merupakan ring yang memiliki elemen satuan. Ring K sendiri merupakan lapangan. Struktur kesebelas ring tersebut, akan digunakan dalam menyusun operasi penjumlahan dan perkalian untuk order 4 dan 9 pada subab selanjutnya.

C. Graf Pangkat pada Ring Berhingga Order p

Ring berhingga dengan order p bilangan prima yakni sebagai berikut (Fine, 1993).

$$\mathbb{Z}_p \cong \langle a; pa = 0, a^2 = a \rangle$$

$$C_p(0) = \langle a; pa = 0, a^2 = 0 \rangle$$

Pada subbab sebelumnya telah diketahui struktur dari kedua ring tersebut. Selanjutnya akan dikonstruksi graf pangkat dari ring berhingga order p yakni order 2, 3, dan 5 sebagai berikut.

a. Graf Pangkat pada Ring Berhingga Order 2

1. Ring $\mathbb{Z}_2 \cong \langle a; 2a = 0, a^2 = a \rangle$ dengan himpunan $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ diperoleh tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring $\mathbb{Z}_2$ sebagai berikut.

Tabel 3.1. Operasi penjumlahan pada ring $\mathbb{Z}_2$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Tabel 3.2. Operasi perkalian pada ring $\mathbb{Z}_2$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan $\mathbb{Z}_2$ sebagai berikut.

Tabel 3.3. Perpangkatan Elemen Ring $\mathbb{Z}_2$

Elemen Ring $\mathbb{Z}_2$	
$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}^2 = \bar{0}$	$\bar{1}^2 = \bar{1}$

Graf pangkat $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.3 adalah sebagai berikut.

Gambar 3.1. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$

2. Ring $C_2(0) = \langle a; 2a = 0, a^2 = 0 \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $C_2(0) = \{ka | k \in \mathbb{Z}\}$. Karena $2a = 0$, maka himpunan $C_2(0)$ dapat dituliskan dengan $C_2(0) = \{0, a\}$. Tabel penjumlahan dan perkalian ring $C_2(0)$ adalah sebagai berikut.

Tabel 3.4. Operasi penjumlahan pada ring $C_2(0)$

+	0	a
0	0	a
a	a	0

Tabel 3.5. Operasi perkalian pada ring $C_2(0)$

·	0	a
0	0	0
a	0	0

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan $C_2(0)$ sebagai berikut.

Tabel 3.6. Perpangkatan Elemen Ring $C_2(0)$

Elemen Ring $C_2(0)$	
0	a
$0^2 = 0$	$a^2 = 0$

Graf pangkat $\mathcal{P}(C_2(0))$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.6 adalah sebagai berikut.

Gambar 3.2. $\mathcal{P}(C_2(0))$

b. Graf Pangkat pada Ring Berhingga Order 3

1. Ring $\mathbb{Z}_3 \cong \langle a; 3a = 0, a^2 = a \rangle$ dengan $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, diperoleh tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring $\mathbb{Z}_3$ sebagai berikut.

Tabel 3.7. Operasi penjumlahan pada ring $\mathbb{Z}_3$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Tabel 3.8. Operasi perkalian pada ring $\mathbb{Z}_3$

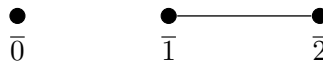
$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan $\mathbb{Z}_3$ sebagai berikut.

Tabel 3.9. Perpangkatan Elemen Ring $\mathbb{Z}_3$

Elemen Ring $\mathbb{Z}_3$		
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}^2 = \bar{0}$	$\bar{1}^2 = \bar{1}$	$\bar{2}^2 = \bar{1}$
$\bar{0}^3 = \bar{0}$	$\bar{1}^3 = \bar{1}$	$\bar{2}^3 = \bar{2}$

Graf pangkat $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_3)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.9 sebagai berikut.

Gambar 3.3. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_3)$

2. Ring $C_3(0) = \langle a; 3a = 0, a^2 = 0 \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $C_3(0) = \{ka | k \in \mathbb{Z}\}$. Karena $3a = 0$, maka himpunan $C_3(0)$ dapat dituliskan dengan $C_3(0) = \{0, a, 2a\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring $C_3(0)$ adalah sebagai berikut.

Tabel 3.10. Operasi penjumlahan pada ring $C_3(0)$

+	0	a	2a
0	0	a	2a
a	a	2a	0
2a	2a	0	a

Tabel 3.11. Operasi perkalian pada ring $C_3(0)$

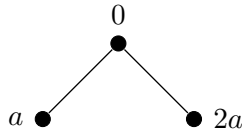
$\cdot$	0	a	$2a$
0	0	0	0
a	0	0	0
$2a$	0	0	0

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan $C_3(0)$ sebagai berikut.

Tabel 3.12. Perpangkatan Elemen Ring $C_3(0)$

Elemen Ring $C_3(0)$		
0	a	$2a$
$0^2 = 0$	$a^2 = 0$	$(2a)^2 = 0$
$0^3 = 0$	$a^3 = 0$	$(2a)^3 = 0$

Graf pangkat $\mathcal{P}(C_3(0))$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.12 adalah sebagai berikut.

Gambar 3.4. $\mathcal{P}(C_3(0))$

c. Graf Pangkat pada Ring Berhingga Order 5

1. Ring $\mathbb{Z}_5 \cong \langle a; 5a = 0, a^2 = a \rangle$ dengan himpunan $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$, diperoleh tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring $\mathbb{Z}_5$ sebagai berikut.

Tabel 3.13. Operasi penjumlahan pada ring $\mathbb{Z}_5$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Tabel 3.14. Operasi perkalian pada ring $\mathbb{Z}_5$

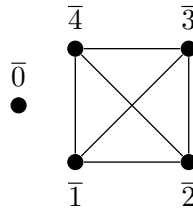
$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan $\mathbb{Z}_5$ sebagai berikut.

Tabel 3.15. Perpangkatan Elemen Ring $\mathbb{Z}_5$

Elemen Ring $\mathbb{Z}_5$				
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}^2 = \bar{0}$	$\bar{1}^2 = \bar{1}$	$\bar{2}^2 = \bar{4}$	$\bar{3}^2 = \bar{4}$	$\bar{4}^2 = \bar{1}$
$\bar{0}^3 = \bar{0}$	$\bar{1}^3 = \bar{1}$	$\bar{2}^3 = \bar{3}$	$\bar{3}^3 = \bar{2}$	$\bar{4}^3 = \bar{4}$
$\bar{0}^4 = \bar{0}$	$\bar{1}^4 = \bar{1}$	$\bar{2}^4 = \bar{1}$	$\bar{3}^4 = \bar{1}$	$\bar{4}^4 = \bar{1}$
$\bar{0}^5 = \bar{0}$	$\bar{1}^5 = \bar{1}$	$\bar{2}^5 = \bar{2}$	$\bar{3}^5 = \bar{3}$	$\bar{4}^5 = \bar{4}$

Graf pangkat $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.15 adalah sebagai berikut.

Gambar 3.5. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)$

2. Ring $C_5(0) = \langle a; 5a = 0, a^2 = 0 \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $C_5(0) = \{ka | k \in \mathbb{Z}\}$. Karena $5a = 0$, himpunan $C_5(0)$ dapat dituliskan dengan $C_5(0) = \{0, a, 2a, 3a, 4a\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring $C_5(0)$ adalah sebagai berikut.

Tabel 3.16. Operasi penjumlahan pada ring $C_5(0)$

+	0	a	2a	3a	4a
0	0	a	2a	3a	4a
a	a	2a	3a	4a	0
2a	2a	3a	4a	0	a
3a	3a	4a	0	a	2a
4a	4a	0	a	2a	3a

Tabel 3.17. Operasi perkalian pada ring $C_5(0)$

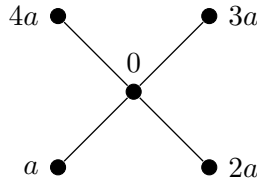
·	0	a	2a	3a	4a
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0
2a	0	0	0	0	0
3a	0	0	0	0	0
4a	0	0	0	0	0

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan $C_5(0)$ sebagai berikut.

Tabel 3.18. Perpangkatan Elemen Ring $C_5(0)$

Elemen Ring $C_5(0)$				
0	a	$2a$	$3a$	$4a$
$0^2 = 0$	$a^2 = 0$	$(2a)^2 = 0$	$(3a)^2 = 0$	$(4a)^2 = 0$
$0^3 = 0$	$a^3 = 0$	$(2a)^3 = 0$	$(3a)^3 = 0$	$(4a)^3 = 0$

Graf pangkat $\mathcal{P}(C_5(0))$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.18 adalah sebagai berikut.



Gambar 3.6. $\mathcal{P}(C_5(0))$

D. Graf Pangkat pada Ring Berhingga Order p^2

Ring berhingga dengan order p^2 dengan p bilangan prima yakni sebagai berikut (Fine, 1993).

$$A = \langle a; p^2a = 0, a^2 = a \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^2},$$

$$B = \langle a; p^2a = 0, a^2 = pa \rangle,$$

$$C = \langle a; p^2a = 0, a^2 = 0 \rangle,$$

$$D = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = ba = 0 \rangle \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p,$$

$$E = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = a, ba = b \rangle,$$

$$F = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = b, ba = a \rangle,$$

$$G = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = 0, b^2 = b, ab = ba = a \rangle,$$

$$H = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = 0, b^2 = b, ab = ba = 0 \rangle,$$

$$I = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = b, ab = 0 \rangle,$$

$$J = \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = b^2 = 0, ab = ba = 0 \rangle,$$

$$K = \begin{cases} \langle a, b; 2a = 2b = 0, a^2 = a, b^2 = a + b, ab = ba = b \rangle, p = 2 \\ \langle a, b; pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = ja, ab = b, ba = b \rangle, p \neq 2 \end{cases}$$

Selanjutnya dikonstruksi graf pangkat berhingga order p^2 yakni order 4 dan 9 sebagai berikut.

a. Graf Pangkat pada Ring Berhingga Order 4

1. Ring $A = \langle a; 4a = 0, a^2 = a \rangle \cong \mathbb{Z}_4$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $A = \{ka | k \in \mathbb{Z}\}$. Karena $4a = 0$, himpunan A dapat dituliskan dengan $A = \{0, a, 2a, 3a\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian ring A adalah sebagai berikut.

Tabel 3.19. Operasi penjumlahan pada ring A

+	0	a	2a	3a
0	0	a	2a	3a
a	a	2a	3a	0
2a	2a	3a	0	a
3a	3a	0	a	2a

Tabel 3.20. Operasi perkalian pada ring A

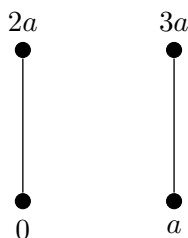
·	0	a	2a	3a
0	0	0	0	0
a	0	a	2a	3a
2a	0	2a	0	2a
3a	0	3a	2a	a

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan A sebagai berikut.

Tabel 3.21. Perpangkatan Elemen Ring A

Elemen Ring A			
0	a	$2a$	$3a$
$0^2 = 0$	$a^2 = a$	$(2a)^2 = 0$	$(3a)^2 = a$
$0^3 = 0$	$a^3 = a$	$(2a)^3 = 0$	$(3a)^3 = 3a$
$0^4 = 0$	$a^4 = a$	$(2a)^4 = 0$	$(3a)^4 = a$

Graf pangkat $\mathcal{P}(A)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.21 adalah sebagai berikut.



Gambar 3.7. $\mathcal{P}(A)$

2. Ring $B = \langle a; 4a = 0, a^2 = 2a \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $B = \{ka | k \in \mathbb{Z}\}$. Karena $4a = 0$, himpunan B dapat dituliskan dengan $B = \{0, a, 2a, 3a\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring B adalah sebagai berikut.

Tabel 3.22. Operasi penjumlahan pada ring B

+	0	a	$2a$	$3a$
0	0	a	$2a$	$3a$
a	a	$2a$	$3a$	0
$2a$	$2a$	$3a$	0	a
$3a$	$3a$	0	a	$2a$

Tabel 3.23. Operasi perkalian pada ring B

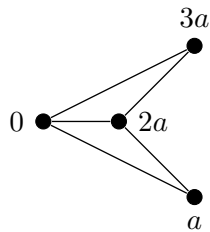
$\cdot$	0	a	$2a$	$3a$
0	0	0	0	0
a	0	$2a$	0	$2a$
$2a$	0	0	0	0
$3a$	0	$2a$	0	$2a$

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan B sebagai berikut.

Tabel 3.24. Perpangkatan Elemen Ring B

Elemen Ring B			
0	a	$2a$	$3a$
$0^2 = 0$	$a^2 = 2a$	$(2a)^2 = 0$	$(3a)^2 = 2a$
$0^3 = 0$	$a^3 = 0$	$(2a)^3 = 0$	$(3a)^3 = 0$
$0^4 = 0$	$a^4 = 0$	$(2a)^4 = 0$	$(3a)^4 = 0$

Graf pangkat $\mathcal{P}(B)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.24 adalah sebagai berikut.

Gambar 3.8. $\mathcal{P}(B)$

3. Ring $C = \langle a; 4a = 0, a^2 = 0 \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $C = \{ka | k \in \mathbb{Z}\}$. Karena $4a = 0$, himpunan C dapat dituliskan dengan $C = \{0, a, 2a, 3a\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring C adalah sebagai berikut.

Tabel 3.25. Operasi penjumlahan pada ring C

+	0	a	$2a$	$3a$
0	0	a	$2a$	$3a$
a	a	$2a$	$3a$	0
$2a$	$2a$	$3a$	0	a
$3a$	$3a$	0	a	$2a$

Tabel 3.26. Operasi perkalian pada ring C

$\cdot$	0	a	$2a$	$3a$
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
$2a$	0	0	0	0
$3a$	0	0	0	0

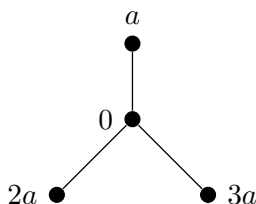
Dari tabel 3.26 ring C merupakan ring komutatif.

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan C sebagai berikut.

Tabel 3.27. Perpangkatan Elemen Ring C

Elemen Ring C			
0	a	$2a$	$3a$
$0^2 = 0$	$a^2 = 0$	$(2a)^2 = 0$	$(3a)^2 = 0$
$0^3 = 0$	$a^3 = 0$	$(2a)^3 = 0$	$(3a)^3 = 0$

Graf pangkat $\mathcal{P}(C)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.27 adalah sebagai berikut.



Gambar 3.9. $\mathcal{P}(C)$

4. Ring $D = \langle a, b; 2a = 2b = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = ba = 0 \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $D = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$. Karena $a, b \in D$ terdapat $c \in D$ dengan $c = a + b = b + a$. Himpunan D dapat dituliskan dengan $D = \{0, a, b, c\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring D adalah sebagai berikut.

Tabel 3.28. Operasi penjumlahan pada ring D

$+$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

Tabel 3.29. Operasi perkalian pada ring D

$\cdot$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
c	0	a	b	c

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan D sebagai berikut.

Tabel 3.30. Perpangkatan Elemen Ring D

Elemen Ring D			
0	a	b	c
$0^2 = 0$	$a^2 = a$	$b^2 = b$	$(c)^2 = c$
$0^3 = 0$	$a^3 = a$	$b^3 = b$	$(c)^3 = c$

Graf pangkat $\mathcal{P}(D)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.30 adalah sebagai berikut.

Gambar 3.10. $\mathcal{P}(D)$

5. Ring $E = \langle a, b; 2a = 2b = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = a, ba = b \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $E = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$. Karena $a, b \in E$ terdapat $c = a + b = b + a \in E$, sehingga himpunan E dapat dituliskan dengan $E = \{0, a, b, c\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring E adalah sebagai berikut.

Tabel 3.31. Operasi penjumlahan pada ring E

+	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

Tabel 3.32. Operasi perkalian pada ring E

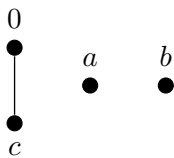
$\cdot$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	a	0
b	0	b	b	0
c	0	c	c	0

Perpangkatan setiap anggota himpunan E adalah sebagai berikut.

Tabel 3.33. Perpangkatan Elemen Ring E

Elemen Ring E			
0	a	b	c
$0^2 = 0$	$a^2 = a$	$b^2 = b$	$(c)^2 = 0$
$0^3 = 0$	$a^3 = a$	$b^3 = b$	$(c)^3 = 0$

Graf pangkat $\mathcal{P}(E)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.33 adalah sebagai berikut.



Gambar 3.11. $\mathcal{P}(E)$

6. Ring $F = \langle a, b; 2a = 2b = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = b, ba = a \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $F = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$. Karena $2a = 2b = 0$ dan $a, b \in F$ terdapat $c = a + b = b + a \in F$ sehingga himpunan F dapat dituliskan dengan $F = \{0, a, b, c\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring F adalah sebagai berikut.

Tabel 3.34. Operasi penjumlahan pada ring F

+	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

Tabel 3.35. Operasi perkalian pada ring F

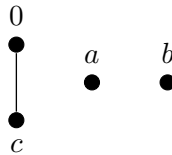
$\cdot$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	b	c
b	0	a	b	c
c	0	0	0	0

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan F sebagai berikut.

Tabel 3.36. Perpangkatan Elemen Ring F

Elemen Ring F			
0	a	b	c
$0^2 = 0$	$a^2 = a$	$b^2 = b$	$(c)^2 = 0$
$0^3 = 0$	$a^3 = a$	$b^3 = b$	$(c)^3 = 0$

Graf pangkat $\mathcal{P}(F)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.36 adalah sebagai berikut.

Gambar 3.12. $\mathcal{P}(F)$

7. Ring $G = \langle a, b; 2a = 2b = 0, a^2 = 0, b^2 = b, ab = ba = a \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $G = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$. Karena $2a = 2b = 0$ dan $a, b \in G$ terdapat $c = a + b = b + a \in G$ sehingga himpunan G dapat dituliskan dengan $G = \{0, a, b, c\}$. Tabel operasi

penjumlahan dan perkalian pada ring G adalah sebagai berikut.

Tabel 3.37. Operasi penjumlahan pada ring G

$+$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

Tabel 3.38. Operasi perkalian pada ring G

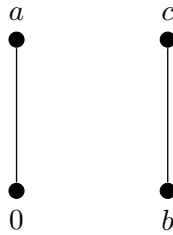
$\cdot$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	a	a
b	0	a	b	c
c	0	a	c	b

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan G sebagai berikut.

Tabel 3.39. Perpangkatan Elemen Ring G

Elemen Ring G			
0	a	b	c
$0^2 = 0$	$a^2 = 0$	$b^2 = b$	$(c)^2 = b$
$0^3 = 0$	$a^3 = 0$	$b^3 = b$	$(c)^3 = c$
$0^4 = 0$	$a^4 = 0$	$b^4 = b$	$(c)^4 = b$

Graf pangkat $\mathcal{P}(G)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.39 adalah sebagai berikut.

Gambar 3.13. $\mathcal{P}(G)$

8. Ring $H = \langle a, b; 2a = 2b = 0, a^2 = 0, b^2 = b, ab = ba = 0 \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $H = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$. Karena $2a = 2b = 0$ dan $a, b \in H$ terdapat $c = a + b = b + a \in H$ sehingga himpunan H dapat dituliskan dengan $H = \{0, a, b, c\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring H adalah sebagai berikut.

Tabel 3.40. Operasi penjumlahan pada ring H

+	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

Tabel 3.41. Operasi perkalian pada ring H

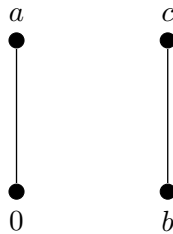
·	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
b	0	0	b	b
c	0	0	b	b

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan H sebagai berikut.

Tabel 3.42. Perpangkatan Elemen Ring H

Elemen Ring H			
0	a	b	c
$0^2 = 0$	$a^2 = 0$	$b^2 = b$	$(c)^2 = b$
$0^3 = 0$	$a^3 = 0$	$b^3 = b$	$(c)^3 = b$

Graf pangkat $\mathcal{P}(H)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.42 adalah sebagai berikut.



Gambar 3.14. $\mathcal{P}(H)$

9. Ring $I = \langle a, b; 2a = 2b = 0, a^2 = b, ab = 0 \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $I = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$. Karena $2a = 2b = 0$ dan $a, b \in I$ terdapat $c = a + b = b + a \in I$ sehingga himpunan I dapat dituliskan dengan $I = \{0, a, b, c\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring I adalah sebagai berikut.

Tabel 3.43. Operasi penjumlahan pada ring I

$+$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

Tabel 3.44. Operasi perkalian pada ring I

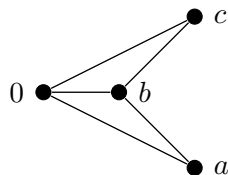
$\cdot$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	b	0	b
b	0	0	0	0
c	0	b	0	b

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan I sebagai berikut.

Tabel 3.45. Perpangkatan Elemen Ring I

Elemen Ring I			
0	a	b	c
$0^2 = 0$	$a^2 = b$	$b^2 = 0$	$(c)^2 = b$
$0^3 = 0$	$a^3 = 0$	$b^3 = 0$	$(c)^3 = 0$

Graf pangkat $\mathcal{P}(I)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.45 adalah sebagai berikut.

Gambar 3.15. $\mathcal{P}(I)$

10. Ring $J = \langle a, b; 2a = 2b = 0, a^2 = b^2 = 0, ab = ba = 0 \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $J = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$. Karena $2a = 2b = 0$ dan $a, b \in J$ terdapat $c = a + b = b + a \in J$ sehingga himpunan J dapat dituliskan dengan $J = \{0, a, b, c\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring J adalah sebagai berikut.

Tabel 3.46. Operasi penjumlahan pada ring J

+	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

Tabel 3.47. Operasi perkalian pada ring J

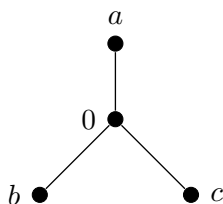
·	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
b	0	0	0	0
c	0	0	0	0

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan J sebagai berikut.

Tabel 3.48. Perpangkatan Elemen Ring J

Elemen Ring J			
0	a	b	c
$0^2 = 0$	$a^2 = 0$	$b^2 = 0$	$(c)^2 = 0$
$0^3 = 0$	$a^3 = 0$	$b^3 = 0$	$(c)^3 = 0$

Graf pangkat $\mathcal{P}(J)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.48 adalah sebagai berikut.



Gambar 3.16. $\mathcal{P}(J)$

11. Ring $K = \langle a, b; 2a = 2b = 0, a^2 = a, b^2 = c, ab = ba = b \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $K = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$. Karena $2a = 2b = 0$ dan $a, b \in K$ terdapat $c = a + b = b + a \in K$ sehingga himpunan K dapat dituliskan dengan $K = \{0, a, b, c\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring K adalah sebagai berikut.

Tabel 3.49. Operasi penjumlahan pada ring K

+	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

Tabel 3.50. Operasi perkalian pada ring K

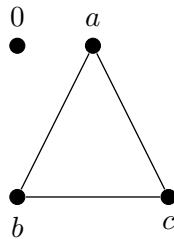
$\cdot$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	b	c
b	0	b	c	a
c	0	c	a	b

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan K sebagai berikut.

Tabel 3.51. Perpangkatan Elemen Ring K

Elemen Ring K			
0	a	b	c
$0^2 = 0$	$a^2 = a$	$b^2 = c$	$(c)^2 = b$
$0^3 = 0$	$a^3 = a$	$b^3 = a$	$(c)^3 = a$
$0^4 = 0$	$a^4 = a$	$b^4 = b$	$(c)^4 = c$

Graf pangkat $\mathcal{P}(K)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.51 adalah sebagai berikut.

Gambar 3.17. $\mathcal{P}(K)$

b. Graf Pangkat pada Ring Berhingga Order 9

1. Ring $A = \langle a; 9a = 0, a^2 = a \rangle \cong \mathbb{Z}_9$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $A = \{ka | k \in \mathbb{Z}\}$. Karena $9a = 0$, himpunan A dapat dituliskan dengan $A = \{0, a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian ring A adalah sebagai berikut.

Tabel 3.52. Operasi penjumlahan pada ring A

+	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$
0	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$
a	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	0
$2a$	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	0	a
$3a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	0	a	$2a$
$4a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	0	a	$2a$	$3a$
$5a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	0	a	$2a$	$3a$	$4a$
$6a$	$6a$	$7a$	$8a$	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$
$7a$	$7a$	$8a$	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$
$8a$	$8a$	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$

Tabel 3.53. Operasi perkalian pada ring A

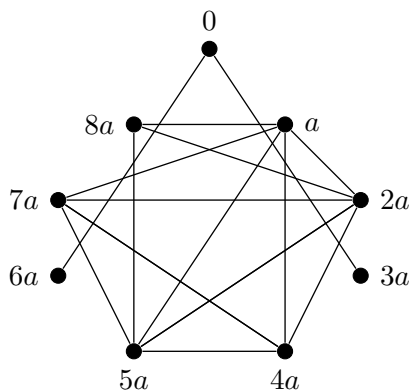
$\cdot$	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$
$2a$	0	$2a$	$4a$	$6a$	$8a$	a	$3a$	$5a$	$7a$
$3a$	0	$3a$	$6a$	0	$6a$	$3a$	0	$3a$	$6a$
$4a$	0	$4a$	$8a$	$3a$	$7a$	$2a$	$6a$	a	$5a$
$5a$	0	$5a$	a	$6a$	$2a$	$7a$	$3a$	$8a$	$4a$
$6a$	0	$6a$	$3a$	0	$6a$	$3a$	0	$6a$	$3a$
$7a$	0	$7a$	$5a$	$3a$	a	$8a$	$6a$	$4a$	$2a$
$8a$	0	$8a$	$7a$	$6a$	$5a$	$4a$	$3a$	$2a$	a

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan A sebagai berikut.

Tabel 3.54. Perpangkatan Elemen Ring A

Elemen Ring A				
0	a	$2a$	$3a$	$4a$
$0^2 = 0$	$a^2 = a$	$(2a)^2 = 4a$	$(3a)^2 = 0$	$(4a)^2 = 7a$
$0^3 = 0$	$a^3 = a$	$(2a)^3 = 8a$	$(3a)^3 = 0$	$(4a)^3 = a$
$0^4 = 0$	$a^4 = a$	$(2a)^4 = 7a$	$(3a)^4 = 0$	$(4a)^4 = 4a$
$0^5 = 0$	$a^5 = a$	$(2a)^5 = 5a$	$(3a)^5 = 0$	$(4a)^5 = 7a$
$0^6 = 0$	$a^6 = a$	$(2a)^6 = a$	$(3a)^6 = 0$	$(4a)^6 = a$
$0^7 = 0$	$a^7 = a$	$(2a)^7 = 2a$	$(3a)^7 = 0$	$(4a)^7 = 4a$
$0^8 = 0$	$a^8 = a$	$(2a)^8 = 4a$	$(3a)^8 = 0$	$(4a)^8 = 7a$
$0^9 = 0$	$a^9 = a$	$(2a)^9 = 8a$	$(3a)^9 = 0$	$(4a)^9 = a$
Elemen Ring A				
$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	
$(5a)^2 = 7a$	$(6a)^2 = 0$	$(7a)^2 = 4a$	$(8a)^2 = a$	
$(5a)^3 = 8a$	$(6a)^3 = 0$	$(7a)^3 = a$	$(8a)^3 = 8a$	
$(5a)^4 = 4a$	$(6a)^4 = 0$	$(7a)^4 = 7a$	$(8a)^4 = a$	
$(5a)^5 = 2a$	$(6a)^5 = 0$	$(7a)^5 = 4a$	$(8a)^5 = 8a$	
$(5a)^6 = a$	$(6a)^6 = 0$	$(7a)^6 = a$	$(8a)^6 = a$	
$(5a)^7 = 5a$	$(6a)^7 = 0$	$(7a)^7 = 7a$	$(8a)^7 = 8a$	
$(5a)^8 = 7a$	$(6a)^8 = 0$	$(7a)^8 = 4a$	$(8a)^8 = a$	
$(5a)^9 = 8a$	$(6a)^9 = 0$	$(7a)^9 = a$	$(8a)^9 = 8a$	

Graf pangkat $\mathcal{P}(A)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.54 adalah sebagai berikut.

Gambar 3.18. $\mathcal{P}(A)$

2. Ring $B = \langle a; 9a = 0, a^2 = 3a \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $B = \{ka | k \in \mathbb{Z}\}$. Karena $9a = 0$, maka himpunan B dapat dituliskan dengan $B = \{0, a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring B adalah sebagai berikut.

Tabel 3.55. Operasi penjumlahan pada ring B

+	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$
0	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$
a	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	0
$2a$	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	0	a
$3a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	0	a	$2a$
$4a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	0	a	$2a$	$3a$
$5a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	0	a	$2a$	$3a$	$4a$
$6a$	$6a$	$7a$	$8a$	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$
$7a$	$7a$	$8a$	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$
$8a$	$8a$	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$

Tabel 3.56. Operasi perkalian pada ring B

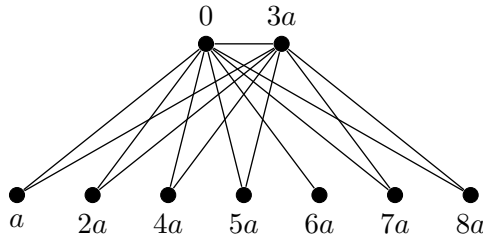
$\cdot$	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	$3a$	$6a$	0	$3a$	$6a$	0	$3a$	$6a$
$2a$	0	$6a$	$3a$	0	$6a$	$3a$	0	$6a$	$3a$
$3a$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$4a$	0	$3a$	$6a$	0	$3a$	$6a$	0	$3a$	$6a$
$5a$	0	$6a$	$3a$	0	$6a$	$3a$	0	$6a$	$3a$
$6a$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$7a$	0	$3a$	$6a$	0	$3a$	$6a$	0	$3a$	$6a$
$8a$	0	$6a$	$3a$	0	$6a$	$3a$	0	$6a$	$3a$

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan B sebagai berikut.

Tabel 3.57. Perpangkatan Elemen Ring B

Elemen Ring B				
0	a	$2a$	$3a$	$4a$
$0^2 = 0$	$a^2 = 3a$	$(2a)^2 = 3a$	$(3a)^2 = 0$	$(4a)^2 = 3a$
$0^3 = 0$	$a^3 = 0$	$(2a)^3 = 0$	$(3a)^3 = 0$	$(4a)^3 = 0$
$0^4 = 0$	$a^4 = 0$	$(2a)^4 = 0$	$(3a)^4 = 0$	$(4a)^4 = 0$
Elemen Ring B				
$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	
$(5a)^2 = 3a$	$(6a)^2 = 0$	$(7a)^2 = 3a$	$(8a)^2 = 3a$	
$(5a)^3 = 0$	$(6a)^3 = 0$	$(7a)^3 = 0$	$(8a)^3 = 0$	
$(5a)^4 = 0$	$(6a)^4 = 0$	$(7a)^4 = 0$	$(8a)^4 = 0$	

Graf pangkat $\mathcal{P}(B)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.57 adalah sebagai berikut.

Gambar 3.19. $\mathcal{P}(B)$

3. Ring $C = \langle a; 9a = 0, a^2 = 0 \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $C = \{ka | k \in \mathbb{Z}\}$. Karena $9a = 0$, maka himpunan C dapat dituliskan dengan $C = \{0, a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring C adalah sebagai berikut.

Tabel 3.58. Operasi penjumlahan pada ring C

+	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$
0	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$
a	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	0
$2a$	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	0	a
$3a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	0	a	$2a$
$4a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	0	a	$2a$	$3a$
$5a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	0	a	$2a$	$3a$	$4a$
$6a$	$6a$	$7a$	$8a$	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$
$7a$	$7a$	$8a$	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$
$8a$	$8a$	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$

Tabel 3.59. Operasi perkalian pada ring C

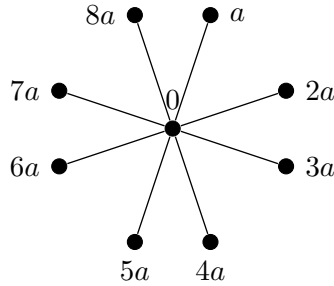
$\cdot$	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$2a$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$3a$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$4a$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$5a$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$6a$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$7a$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$8a$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan C sebagai berikut.

Tabel 3.60. Perpangkatan Elemen Ring C

Elemen Ring C				
0	a	$2a$	$3a$	$4a$
$0^2 = 0$	$a^2 = 0$	$(2a)^2 = 0$	$(3a)^2 = 0$	$(4a)^2 = 0$
$0^3 = 0$	$a^3 = 0$	$(2a)^3 = 0$	$(3a)^3 = 0$	$(4a)^3 = 0$
Elemen Ring C				
$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	
$(5a)^2 = 0$	$(6a)^2 = 0$	$(7a)^2 = 0$	$(8a)^2 = 0$	
$(5a)^3 = 0$	$(6a)^3 = 0$	$(7a)^3 = 0$	$(8a)^3 = 0$	

Graf pangkat $\mathcal{P}(C)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.60 adalah sebagai berikut.

Gambar 3.20. $\mathcal{P}(C)$

4. Ring $D = \langle a, b; 3a = 3b = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = ba = 0 \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $D = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$. Karena $a, 2a, b, 2b \in D$ dimisalkan
- $$a + a = 2a = f \in D \quad 2a + b = b + 2a = i \in D$$
- $$a + b = b + a = g \in D \quad a + 2b = 2b + a = j \in D$$
- $$b + b = 2b = h \in D \quad 2a + 2b = 2b + 2a = k \in D$$
- sehingga himpunan D dapat dituliskan dengan $D = \{0, a, b, f, g, h, i, j, k\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring D adalah sebagai berikut.

Tabel 3.61. Operasi penjumlahan pada ring D

+	0	a	b	f	g	h	i	j	k
0	0	a	b	f	g	h	i	j	k
a	a	f	g	0	i	j	b	k	h
b	b	g	h	i	j	0	k	a	f
f	f	0	i	a	b	k	g	h	j
g	g	i	j	b	k	a	h	f	0
h	h	j	0	k	a	b	f	g	i
i	i	b	k	g	h	f	j	0	a
j	j	k	a	h	f	g	0	i	b
k	k	h	f	j	0	i	a	b	g

Tabel 3.62. Operasi perkalian pada ring D

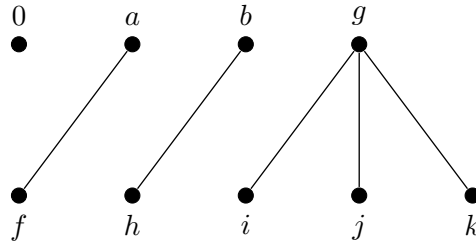
$\cdot$	0	a	b	f	g	h	i	j	k
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	f	a	0	f	a	f
b	0	0	b	0	b	h	b	h	h
f	0	f	0	a	f	0	f	f	a
g	0	a	b	f	g	h	i	j	k
h	0	0	h	0	h	b	h	b	b
i	0	f	b	f	i	h	g	k	j
j	0	a	h	f	j	b	k	g	i
k	0	f	h	a	k	b	j	i	g

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan D sebagai berikut.

Tabel 3.63. Perpangkatan Elemen Ring D

Elemen Ring D				
0	a	b	f	g
$0^2 = 0$	$a^2 = a$	$b^2 = b$	$f^2 = a$	$g^2 = g$
$0^3 = 0$	$a^3 = a$	$b^3 = b$	$f^3 = f$	$g^3 = g$
$0^4 = 0$	$a^4 = a$	$b^4 = b$	$f^4 = a$	$g^4 = g$
Elemen Ring D				
h	i	j	k	
$h^2 = b$	$i^2 = g$	$j^2 = g$	$k^2 = g$	
$h^3 = h$	$i^3 = i$	$j^3 = j$	$k^3 = k$	
$h^4 = b$	$i^4 = g$	$j^4 = g$	$k^4 = g$	

Graf pangkat $\mathcal{P}(D)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.63 adalah sebagai berikut.

Gambar 3.21. $\mathcal{P}(D)$

5. Ring $E = \langle a, b; 3a = 3b = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = a, ba = b \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $E = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$. Karena $a, 2a, b, 2b \in E$ dimisalkan
- $$\begin{aligned} a + a = 2a = f \in E & & 2a + b = b + 2a = i \in E \\ a + b = b + a = g \in E & & a + 2b = 2b + a = j \in E \\ b + b = 2b = h \in E & & 2a + 2b = 2b + 2a = k \in E \end{aligned}$$
- sehingga himpunan E dapat dituliskan dengan $E = \{0, a, b, f, g, h, i, j, k\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring E adalah sebagai berikut.

Tabel 3.64. Operasi penjumlahan pada ring E

+	0	a	b	f	g	h	i	j	k
0	0	a	b	f	g	h	i	j	k
a	a	f	g	0	i	j	b	k	h
b	b	g	h	i	j	0	k	a	f
f	f	0	i	a	b	k	g	h	j
g	g	i	j	b	k	a	h	f	0
h	h	j	0	k	a	b	f	g	i
i	i	b	k	g	h	f	j	0	a
j	j	k	a	h	f	g	0	i	b
k	k	h	f	j	0	i	a	b	g

Tabel 3.65. Operasi perkalian pada ring E

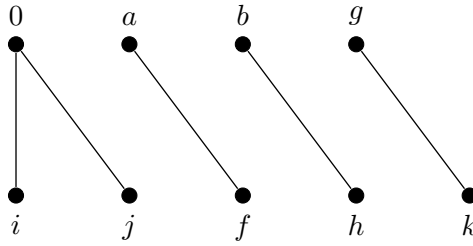
$\cdot$	0	a	b	f	g	h	i	j	k
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	f	f	f	0	0	a
b	0	b	b	h	h	h	0	0	b
f	0	f	f	a	a	a	0	0	f
g	0	g	g	k	k	k	0	0	g
h	0	h	h	b	b	b	0	0	h
i	0	i	i	j	j	j	0	0	i
j	0	j	j	i	i	i	0	0	j
k	0	k	k	g	g	g	0	0	k

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan E sebagai berikut.

Tabel 3.66. Perpangkatan Elemen Ring E

Elemen Ring E				
0	a	b	f	g
$0^2 = 0$	$a^2 = a$	$b^2 = b$	$f^2 = a$	$g^2 = k$
$0^3 = 0$	$a^3 = a$	$b^3 = b$	$f^3 = f$	$g^3 = g$
$0^4 = 0$	$a^4 = a$	$b^4 = b$	$f^4 = a$	$g^4 = k$
Elemen Ring E				
h	i	j	k	
$h^2 = b$	$i^2 = 0$	$j^2 = 0$	$k^2 = k$	
$h^3 = h$	$i^3 = 0$	$j^3 = 0$	$k^3 = k$	
$h^4 = b$	$i^4 = 0$	$j^4 = 0$	$k^4 = k$	

Graf pangkat $\mathcal{P}(E)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.33 adalah sebagai berikut.

Gambar 3.22. $\mathcal{P}(E)$

6. Ring $F = \langle a, b; 3a = 3b = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = b, ba = a \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $F = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$. Karena $a, 2a, b, 2b \in F$ dimisalkan
- $$a + a = 2a = f \in F \quad 2a + b = b + 2a = i \in F$$
- $$a + b = b + a = g \in F \quad a + 2b = 2b + a = j \in F$$
- $$b + b = 2b = h \in F \quad 2a + 2b = 2b + 2a = k \in F$$
- sehingga himpunan F dapat dituliskan dengan $F = \{0, a, b, f, g, h, i, j, k\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring F adalah sebagai berikut.

Tabel 3.67. Operasi penjumlahan pada ring F

+	0	a	b	f	g	h	i	j	k
0	0	a	b	f	g	h	i	j	k
a	a	f	g	0	i	j	b	k	h
b	b	g	h	i	j	0	k	a	f
f	f	0	i	a	b	k	g	h	j
g	g	i	j	b	k	a	h	f	0
h	h	j	0	k	a	b	f	g	i
i	i	b	k	g	h	f	j	0	a
j	j	k	a	h	f	g	0	i	b
k	k	h	f	j	0	i	a	b	g

Tabel 3.68. Operasi perkalian pada ring F

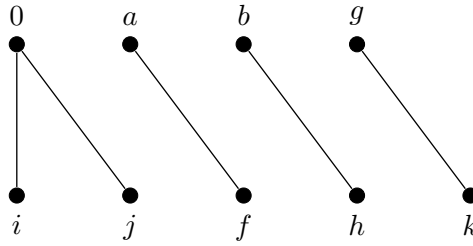
$\cdot$	0	a	b	f	g	h	i	j	k
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	b	f	g	h	i	j	k
b	0	a	b	f	g	h	i	j	k
f	0	f	h	a	k	b	j	i	g
g	0	f	h	a	k	b	j	i	g
h	0	f	h	a	k	b	j	i	g
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
k	0	a	b	f	g	h	i	j	k

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan F sebagai berikut.

Tabel 3.69. Perpangkatan Elemen Ring F

Elemen Ring F				
0	a	b	f	g
$0^2 = 0$	$a^2 = a$	$b^2 = b$	$f^2 = a$	$g^2 = k$
$0^3 = 0$	$a^3 = a$	$b^3 = b$	$f^3 = f$	$g^3 = g$
$0^4 = 0$	$a^4 = a$	$b^4 = b$	$f^4 = a$	$g^4 = k$
Elemen Ring F				
h	i	j	k	
$h^2 = b$	$i^2 = 0$	$j^2 = 0$	$k^2 = k$	
$h^3 = h$	$i^3 = 0$	$j^3 = 0$	$k^3 = k$	
$h^4 = b$	$i^4 = 0$	$j^4 = 0$	$k^4 = k$	

Graf pangkat $\mathcal{P}(F)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.69 adalah sebagai berikut.

Gambar 3.23. $\mathcal{P}(F)$

7. Ring $G = \langle a, b; 3a = 3b = 0, a^2 = 0, b^2 = b, ab = ba = a \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $G = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$. Karena $a, 2a, b, 2b \in G$ dimisalkan
- $$a + a = 2a = f \in G \quad 2a + b = b + 2a = i \in G$$
- $$a + b = b + a = g \in G \quad a + 2b = 2b + a = j \in G$$
- $$b + b = 2b = h \in G \quad 2a + 2b = 2b + 2a = k \in G$$
- sehingga himpunan G dapat dituliskan dengan $G = \{0, a, b, f, g, h, i, j, k\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring G adalah sebagai berikut.

Tabel 3.70. Operasi penjumlahan pada ring G

+	0	a	b	f	g	h	i	j	k
0	0	a	b	f	g	h	i	j	k
a	a	f	g	0	i	j	b	k	h
b	b	g	h	i	j	0	k	a	f
f	f	0	i	a	b	k	g	h	j
g	g	i	j	b	k	a	h	f	0
h	h	j	0	k	a	b	f	g	i
i	i	b	k	g	h	f	j	0	a
j	j	k	a	h	f	g	0	i	b
k	k	h	f	j	0	i	a	b	g

Tabel 3.71. Operasi perkalian pada ring G

$\cdot$	0	a	b	f	g	h	i	j	k
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	a	0	a	f	a	f	f
b	0	a	b	f	g	h	i	j	k
f	0	0	f	0	f	a	f	a	a
g	0	a	g	f	i	k	b	h	j
h	0	f	h	a	k	b	j	i	g
i	0	a	i	f	b	j	g	k	h
j	0	f	j	a	h	i	k	g	b
k	0	f	k	a	j	g	h	b	i

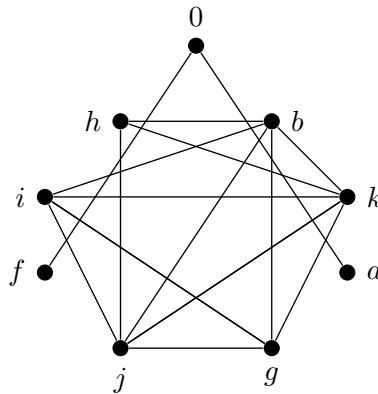
Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan G sebagai berikut.

Tabel 3.72. Perpangkatan Elemen Ring G

Elemen Ring G				
0	a	b	f	g
$0^2 = 0$	$a^2 = 0$	$b^2 = b$	$f^2 = 0$	$g^2 = i$
$0^3 = 0$	$a^3 = 0$	$b^3 = b$	$f^3 = 0$	$g^3 = b$
$0^4 = 0$	$a^4 = 0$	$b^4 = b$	$f^4 = 0$	$g^4 = g$
$0^5 = 0$	$a^5 = 0$	$b^5 = b$	$f^5 = 0$	$g^5 = i$
$0^6 = 0$	$a^6 = 0$	$b^6 = b$	$f^6 = 0$	$g^6 = b$
$0^7 = 0$	$a^7 = 0$	$b^7 = b$	$f^7 = 0$	$g^7 = g$
$0^8 = 0$	$a^8 = 0$	$b^8 = b$	$f^8 = 0$	$g^8 = i$
$0^9 = 0$	$a^9 = 0$	$b^9 = b$	$f^9 = 0$	$g^9 = b$

Elemen Ring G			
h	i	j	k
$h^2 = b$	$i^2 = g$	$j^2 = g$	$k^2 = i$
$h^3 = h$	$i^3 = b$	$j^3 = h$	$k^3 = h$
$h^4 = b$	$i^4 = i$	$j^4 = i$	$k^4 = g$
$h^5 = h$	$i^5 = g$	$j^5 = k$	$k^5 = j$
$h^6 = b$	$i^6 = b$	$j^6 = b$	$k^6 = b$
$h^7 = h$	$i^7 = i$	$j^7 = j$	$k^7 = k$
$h^8 = b$	$i^8 = g$	$j^8 = g$	$k^8 = i$
$h^9 = h$	$i^9 = b$	$j^9 = h$	$k^9 = h$

Graf pangkat $\mathcal{P}(G)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.54 adalah sebagai berikut.



Gambar 3.24. $\mathcal{P}(G)$

8. Ring $H = \langle a, b; 3a = 3b = 0, a^2 = 0, b^2 = b, ab = ba = 0 \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $H = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$. Karena $a, 2a, b, 2b \in H$ dimisalkan

$$\begin{aligned}
 a + a &= 2a = f \in H & 2a + b &= b + 2a = i \in H \\
 a + b &= b + a = g \in H & a + 2b &= 2b + a = j \in H \\
 b + b &= 2b = h \in H & 2a + 2b &= 2b + 2a = k \in H
 \end{aligned}$$

sehingga himpunan H dapat dituliskan dengan $H = \{0, a, b, f, g, h, i, j, k\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring H adalah sebagai berikut.

Tabel 3.73. Operasi penjumlahan pada ring H

+	0	a	b	f	g	h	i	j	k
0	0	a	b	f	g	h	i	j	k
a	a	f	g	0	i	j	b	k	h
b	b	g	h	i	j	0	k	a	f
f	f	0	i	a	b	k	g	h	j
g	g	i	j	b	k	a	h	f	0
h	h	j	0	k	a	b	f	g	i
i	i	b	k	g	h	f	j	0	a
j	j	k	a	h	f	g	0	i	b
k	k	h	f	j	0	i	a	b	g

Tabel 3.74. Operasi perkalian pada ring H

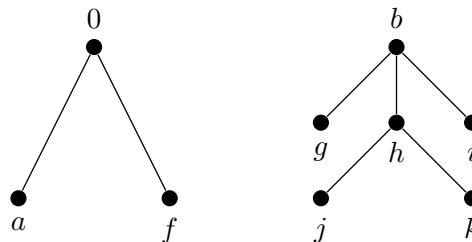
·	0	a	b	f	g	h	i	j	k
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	0	0	b	0	b	h	b	h	h
f	0	0	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	b	0	b	h	b	h	h
h	0	0	h	0	h	b	h	b	b
i	0	0	b	0	b	h	b	h	h
j	0	0	h	0	h	b	h	b	b
k	0	0	h	0	h	b	h	b	b

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan H sebagai berikut.

Tabel 3.75. Perpangkatan Elemen Ring H

Elemen Ring H				
0	a	b	f	g
$0^2 = 0$	$a^2 = 0$	$b^2 = b$	$f^2 = 0$	$g^2 = b$
$0^3 = 0$	$a^3 = 0$	$b^3 = b$	$f^3 = 0$	$g^3 = b$
$0^4 = 0$	$a^4 = 0$	$b^4 = b$	$f^4 = 0$	$g^4 = b$
Elemen Ring H				
h	i	j	k	
$h^2 = b$	$i^2 = b$	$j^2 = b$	$k^2 = b$	
$h^3 = h$	$i^3 = b$	$j^3 = h$	$k^3 = h$	
$h^4 = b$	$i^4 = b$	$j^4 = b$	$k^4 = b$	

Graf pangkat $\mathcal{P}(H)$ yang diperoleh adalah sebagai berikut.



Gambar 3.25. $\mathcal{P}(H)$

9. Ring $I = \langle a, b; 3a = 3b = 0, a^2 = b, ab = 0 \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $I = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$. Karena $a, 2a, b, 2b \in I$ dimisalkan

$$\begin{aligned}
 a + a = 2a = f \in I & & 2a + b = b + 2a = i \in I \\
 a + b = b + a = g \in I & & a + 2b = 2b + a = j \in I \\
 b + b = 2b = h \in I & & 2a + 2b = 2b + 2a = k \in I
 \end{aligned}$$

sehingga himpunan I dapat dituliskan dengan $I = \{0, a, b, f, g, h, i, j, k\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring I adalah sebagai berikut.

Tabel 3.76. Operasi penjumlahan pada ring I

+	0	a	b	f	g	h	i	j	k
0	0	a	b	f	g	h	i	j	k
a	a	f	g	0	i	j	b	k	h
b	b	g	h	i	j	0	k	a	f
f	f	0	i	a	b	k	g	h	j
g	g	i	j	b	k	a	h	f	0
h	h	j	0	k	a	b	f	g	i
i	i	b	k	g	h	f	j	0	a
j	j	k	a	h	f	g	0	i	b
k	k	h	f	j	0	i	a	b	g

Tabel 3.77. Operasi perkalian pada ring I

·	0	a	b	f	g	h	i	j	k
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	b	0	h	b	0	h	b	h
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f	0	h	0	b	h	0	b	h	b
g	0	b	0	h	b	0	h	b	h
h	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	h	0	b	h	0	b	h	b
j	0	b	0	h	b	0	h	b	h
k	0	h	0	b	h	0	b	h	b

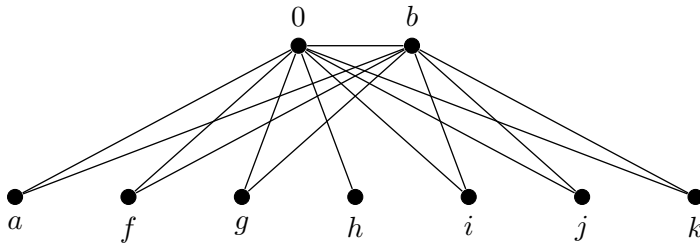
Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan I sebagai berikut.

Tabel 3.78. Perpangkatan Elemen Ring I

Elemen Ring I				
0	a	b	f	g
$0^2 = 0$	$a^2 = b$	$b^2 = 0$	$f^2 = b$	$g^2 = b$
$0^3 = 0$	$a^3 = 0$	$b^3 = 0$	$f^3 = 0$	$g^3 = 0$
$0^4 = 0$	$a^4 = 0$	$b^4 = 0$	$f^4 = 0$	$g^4 = 0$

Elemen Ring I			
h	i	j	k
$h^2 = 0$	$i^2 = b$	$j^2 = b$	$k^2 = b$
$h^3 = 0$	$i^3 = 0$	$j^3 = 0$	$k^3 = 0$
$h^4 = 0$	$i^4 = 0$	$j^4 = 0$	$k^4 = 0$

Graf pangkat $\mathcal{P}(I)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.78 adalah sebagai berikut.

Gambar 3.26. $\mathcal{P}(I)$

10. Ring $J = \langle a, b; 3a = 3b = 0, a^2 = b^2 = 0, ab = ba = 0 \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $J = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$. Karena $a, 2a, b, 2b \in J$ dimisalkan

$$a + a = 2a = f \in J \qquad 2a + b = b + 2a = i \in J$$

$$a + b = b + a = g \in J \qquad a + 2b = 2b + a = j \in J$$

$$b + b = 2b = h \in J \qquad 2a + 2b = 2b + 2a = k \in J$$

sehingga himpunan J dapat dituliskan dengan $J = \{0, a, b, f, g, h, i, j, k\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring J adalah sebagai berikut.

Tabel 3.79. Operasi penjumlahan pada ring J

+	0	a	b	f	g	h	i	j	k
0	0	a	b	f	g	h	i	j	k
a	a	f	g	0	i	j	b	k	h
b	b	g	h	i	j	0	k	a	f
f	f	0	i	a	b	k	g	h	j
g	g	i	j	b	k	a	h	f	0
h	h	j	0	k	a	b	f	g	i
i	i	b	k	g	h	f	j	0	a
j	j	k	a	h	f	g	0	i	b
k	k	h	f	j	0	i	a	b	g

Tabel 3.80. Operasi perkalian pada ring J

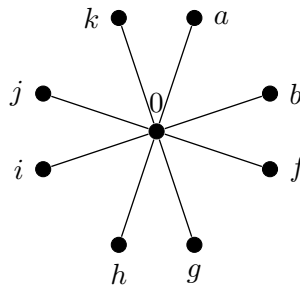
·	0	a	b	f	g	h	i	j	k
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
k	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan J sebagai berikut.

Tabel 3.81. Perpangkatan Elemen Ring J

Elemen Ring J				
0	a	b	f	g
$0^2 = 0$	$a^2 = 0$	$b^2 = 0$	$f^2 = 0$	$g^2 = 0$
$0^3 = 0$	$a^3 = 0$	$b^3 = 0$	$f^3 = 0$	$g^3 = 0$
Elemen Ring J				
h	i	j	k	
$h^2 = 0$	$i^2 = 0$	$j^2 = 0$	$k^2 = 0$	
$h^3 = 0$	$i^3 = 0$	$j^3 = 0$	$k^3 = 0$	

Graf pangkat $\mathcal{P}(J)$ yang diperoleh berdasarkan tabel 3.81 adalah sebagai berikut.

Gambar 3.27. $\mathcal{P}(J)$

11. Ring $K = \langle a, b; 3a = 3b = 0, a^2 = a, b^2 = 2a, ab = ba = b \rangle$ terdiri atas elemen-elemen dalam himpunan $K = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$. Karena $a, 2a, b, 2b \in K$ dimisalkan
- $$a + a = 2a = f \in K \quad 2a + b = b + 2a = i \in K$$
- $$a + b = b + a = g \in K \quad a + 2b = 2b + a = j \in K$$
- $$b + b = 2b = h \in K \quad 2a + 2b = 2b + 2a = k \in K$$
- sehingga himpunan K dapat dituliskan dengan

$K = \{0, a, b, f, g, h, i, j, k\}$. Tabel operasi penjumlahan dan perkalian pada ring K adalah sebagai berikut.

Tabel 3.82. Operasi penjumlahan pada ring K

+	0	a	b	f	g	h	i	j	k
0	0	a	b	f	g	h	i	j	k
a	a	f	g	0	i	j	b	k	h
b	b	g	h	i	j	0	k	a	f
f	f	0	i	a	b	k	g	h	j
g	g	i	j	b	k	a	h	f	0
h	h	j	0	k	a	b	f	g	i
i	i	b	k	g	h	f	j	0	a
j	j	k	a	h	f	g	0	i	b
k	k	h	f	j	0	i	a	b	g

Tabel 3.83. Operasi perkalian pada ring K

·	0	a	b	f	g	h	i	j	k
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	b	f	g	h	i	j	k
b	0	b	f	h	i	a	k	g	j
f	0	f	h	a	k	b	j	i	g
g	0	g	i	k	h	j	a	f	b
h	0	h	a	b	j	f	g	k	i
i	0	i	k	j	a	g	b	h	f
j	0	j	g	i	f	k	h	b	a
k	0	k	j	g	b	i	f	a	h

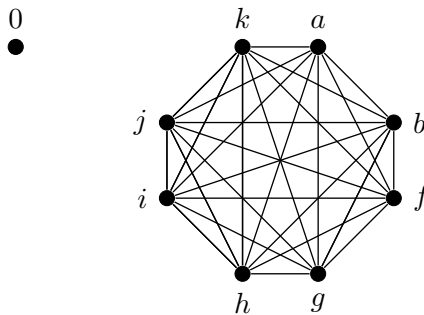
Selanjutnya diperoleh perpangkatan setiap anggota himpunan K sebagai berikut.

Tabel 3.84. Perpangkatan Elemen Ring K

Elemen Ring K				
0	a	b	f	g
$0^2 = 0$	$a^2 = a$	$b^2 = f$	$f^2 = a$	$g^2 = h$
$0^3 = 0$	$a^3 = a$	$b^3 = h$	$f^3 = f$	$g^3 = j$
$0^4 = 0$	$a^4 = a$	$b^4 = a$	$f^4 = a$	$g^4 = f$
$0^5 = 0$	$a^5 = a$	$b^5 = b$	$f^5 = f$	$g^5 = k$
$0^6 = 0$	$a^6 = a$	$b^6 = f$	$f^6 = a$	$g^6 = b$
$0^7 = 0$	$a^7 = a$	$b^7 = h$	$f^7 = f$	$g^7 = i$
$0^8 = 0$	$a^8 = a$	$b^8 = a$	$f^8 = a$	$g^8 = a$

Elemen Ring K			
h	i	j	k
$h^2 = f$	$i^2 = b$	$j^2 = b$	$k^2 = h$
$h^3 = b$	$i^3 = k$	$j^3 = g$	$k^3 = i$
$h^4 = a$	$i^4 = f$	$j^4 = f$	$k^4 = f$
$h^5 = h$	$i^5 = j$	$j^5 = i$	$k^5 = g$
$h^6 = f$	$i^6 = h$	$j^6 = h$	$k^6 = b$
$h^7 = b$	$i^7 = g$	$j^7 = k$	$k^7 = j$
$h^8 = a$	$i^8 = a$	$j^8 = a$	$k^8 = a$

Graf pangkat $\mathcal{P}(K)$ yang diperoleh adalah sebagai berikut.

Gambar 3.28. $\mathcal{P}(K)$

E. Karakteristik Graf Pangkat pada Ring Berhingga

Pada bagian ini akan digeneralisasi karakteristik dari graf pangkat pada ring berhingga order p dan p^2 dengan p bilangan prima sebagai berikut.

a. Karakteristik Graf Pangkat pada Ring Berhingga Order p

Setelah sebelumnya dikonstruksi graf pangkat untuk ring $\mathbb{Z}_p$ dan $C_p(0)$ pada order 2, 3 dan 5, diperoleh graf pangkat kedua ring tersebut memenuhi pola tertentu. Pada ring $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ dan $\mathbb{Z}_5$ graf pangkat yang terbentuk merupakan gabungan graf kosong dan graf lengkap. Sementara itu, untuk ring $C_2(0)$, $C_3(0)$ dan $C_5(0)$ graf pangkat yang diperoleh merupakan graf bipartit lengkap. Berdasarkan pola-pola tersebut, kemudian dapat digeneralisasi karakteristik dari graf pangkat masing-masing ring sebagai berikut.

1. Graf pangkat ring $\mathbb{Z}_p$

Graf pangkat ring $\mathbb{Z}_p \cong \langle a : pa = 0, a^2 = a \rangle$ dengan p sembarang bilangan prima merupakan gabungan graf kosong N_1 dan graf lengkap K_{p-1} apabila $p - 1 = 1$ atau $p - 1 = q^m$ untuk sembarang q bilangan prima dan $m \in \mathbb{N}$.

Bukti.

Misalkan ring $\mathbb{Z}_p$ memiliki order p dengan $p - 1 = 1$ atau $p - 1 = q^m$ untuk sembarang q bilangan prima dan $m \in \mathbb{N}$. Telah diketahui ring $\mathbb{Z}_p$ merupakan lapangan. Kemudian berdasarkan teorema 2.1.73 diketahui $\mathbb{Z}_p^\times$ dilengkapi operasi perkalian merupakan grup siklik. Karena $|\mathbb{Z}_p^\times| = p - 1$ dengan $p - 1 = 1$ atau $p - 1 = q^m$, berdasarkan

teorema 2.1.91 diperoleh elemen dari $\mathbb{Z}_p^\times$ membentuk graf lengkap K_{p-1} .

Selanjutnya karena $\mathbb{Z}_p$ merupakan lapangan dan setiap anggota $\mathbb{Z}_p^\times$ merupakan elemen unit. Diketahui berdasarkan lemma 2.1.72 diperoleh setiap anggota $\mathbb{Z}_p^\times$ tidak bertetangga dengan $\bar{0}$. Jadi, $\bar{0}$ menjadi graf kosong. Oleh karena itu, $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p)$ adalah gabungan graf kosong N_1 dan graf lengkap K_{p-1} . ■

2. Graf pangkat ring $C_p(0)$

Graf pangkat ring $C_p(0) = \langle a; pa = 0, a^2 = 0 \rangle$ dengan p sembarang primamerupakan graf bipartit lengkap $K_{1,p-1}$.

Bukti.

Diketahui ring $C_p(0) = \langle a; pa = 0, a^2 = 0 \rangle$ dengan himpunan $C_p(0) = \{ka | k \in \mathbb{Z}\}$. Diambil sembarang $na \in C_p(0)$ dan $n \in \mathbb{Z}$ diperoleh

$$(na)^2 = na \cdot na = n^2a = n^2(0) = 0$$

sehingga setiap elemen $C_p(0)$ hanya bertetangga dengan titik 0 pada $\mathcal{P}(C_p(0))$. Jadi $\mathcal{P}(C_p(0))$ membentuk graf $K_{1,p-1}$. ■

Kedua karakteristik graf pangkat tersebut akan digunakan dalam mengkontruksi produk unit semi kartesian dua graf pangkat pada ring berhingga order p dan q yang berbeda.

b. Karakteristik Graf Pangkat pada Ring Berhingga Order p^2

Telah dikontruksi graf pangkat untuk sebelas ring berhingga order p^2 yakni 4 dan 9. Dari hasil kontruksi tersebut, ditemukan bahwa terdapat beberapa graf pangkat yang menunjukkan pola

tertentu. Pola-pola tersebut, kemudian akan dijadikan dasar dalam menggeneralisasi karakteristik graf pangkat untuk ring berhingga order p^2 . Adapun beberapa pola graf pangkat yang diperoleh adalah sebagai berikut.

1. Graf pangkat ring A

Graf pangkat pada ring A dengan order 4 dan 9 memiliki graf bagian berupa graf bipartit lengkap. Pola tersebut menimbulkan dugaan bahwa graf pangkat pada ring A memiliki graf bagian berupa graf bipartit lengkap. Oleh karena itu, akan ditunjukkan graf pangkat ring A dengan order p^2 untuk p sembarang bilangan prima, memiliki graf bagian yang merupakan graf bipartit lengkap K_{p-1} .

Diketahui ring $A = \langle a; p^2a = 0, a^2 = a \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ dengan himpunan $A = \{ka | k \in \mathbb{Z}\}$. Terdapat $na \in A$ dengan $n = mp$ dan $m \in \mathbb{Z}$ dan $0 < m < p$ diperoleh,

$$(na)^2 = mpa \cdot mpa = m^2p^2a^2 = m^2(0)a = 0$$

artinya na bertetangga dengan 0. Kemudian karena terdapat $p - 1$ titik yang memenuhi $(na)^2 = 0$ sehingga membentuk graf $K_{1,p-1}$. Oleh karena itu, graf $K_{1,p-1}$ menjadi graf bagian dari $\mathcal{P}(A)$.

2. Graf pangkat ring B

Pada ring B dengan order 4 dan 9 graf pangkatnya memiliki graf bagian rentang yang merupakan graf bipartit lengkap. Kemudian, akan ditunjukkan graf pangkat ring B dengan order p^2 untuk p sembarang bilangan prima memiliki graf bagian rentang yang merupakan graf bipartit lengkap K_{p^2-1} .

Diketahui ring $B = \langle a; p^2a = 0, a^2 = pa \rangle$ dengan himpunan $B = \{ka | k \in \mathbb{Z}\}$. Diambil sembarang $na \in B$ dengan $n \in \mathbb{Z}$ diperoleh

$$(na)^2 = na \cdot na = n^2a^2 = n^2pa.$$

Untuk $n = mp$ dengan $m \in \mathbb{Z}$ dan $0 < m < p$ diperoleh

$$(na)^2 = n^2pa = (mp)^2pa = m^2p^3a = mpp^2a = mp(0) = 0.$$

Untuk $n \neq mp$ diperoleh

$$(na)^3 = (na)^2 \cdot na = n^2pa \cdot na = n^3pa^2 = n^3p^2a = n^3(0) = 0.$$

Karena diperoleh $(na)^2 = 0$ untuk $n = mp$ dengan $m \in \mathbb{Z}$ dan $0 < m < p$, serta $(na)^3 = 0$ untuk $n \neq mp$ artinya untuk sembarang $na \in B$ bertetangga dengan 0. Akan tetapi, untuk $n \neq mp$ karena $(na)^2 \neq 0$ artinya titik na tidak hanya bertetangga dengan titik 0 sehingga $\mathcal{P}(B)$ tidak berbentuk K_{1,p^2-1} tetapi K_{1,p^2-1} menjadi graf bagian rentang dari $\mathcal{P}(B)$.

3. Graf pangkat ring C

Graf pangkat ring C untuk order 4 dan 9 membentuk graf bipartit lengkap. Karakteristik tersebut tidak hanya berlaku untuk order 4 dan 9, tapi berlaku untuk ring C dengan order p^2 . Berikut akan ditunjukkan graf pangkat ring C dengan order p^2 untuk p sembarang bilangan prima merupakan graf bipartit lengkap K_{1,p^2-1} .

Diketahui ring $C = \langle a; p^2a = 0, a^2 = 0 \rangle$ dan $C = \{ka | k \in \mathbb{Z}\}$. Diambil sembarang $c \in C$ dengan $c \neq 0$

diperoleh $c = na$ untuk $n \in \mathbb{Z}$ dan $0 < n < p^2$, diperoleh

$$\begin{aligned} c^2 &= na \cdot na \\ &= n^2 a^2 \\ &= n^2 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Karena $c^2 = 0$ artinya c bertetangga dengan 0. Terdapat sebanyak $p^2 - 1$ elemen tak nol dari C sehingga $\mathcal{P}(C)$ membentuk graf bipartit lengkap K_{1, p^2-1} .

4. Graf pangkat ring H

Pada ring H dengan order 4 dan 9, graf pangkat yang terbentuk memiliki graf bagian yang merupakan graf bipartit lengkap. Pola tersebut tidak hanya berlaku untuk order 4 dan 9, tetapi untuk setiap graf pangkat ring H dengan order p^2 . Selanjutnya, akan ditunjukkan pangkat ring H dengan order p^2 untuk p sembarang bilangan prima, memiliki graf bagian yang merupakan graf bipartit lengkap K_{p-1} .

Diketahui $H = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$. Terdapat $h \in H$ dengan $h = ma$ untuk $m \in \mathbb{Z}$ dan $0 < m < p$, diperoleh

$$h^2 = ma \cdot ma = m^2 a^2 = m^2(0) = 0$$

artinya h bertetangga dengan 0. Terdapat sebanyak $p - 1$ elemen dari H yang memenuhi $h^2 = 0$ artinya terdapat sebanyak $p - 1$ titik yang bertetangga dengan 0 dan membentuk graf $K_{1, p-1}$. Oleh karena itu, graf bipartit lengkap $K_{1, p-1}$ menjadi graf bagian dari $\mathcal{P}(H)$.

5. Graf pangkat ring I

Ring I dengan order 4 dan 9 memiliki graf pangkat yang memiliki graf bagian rentang berupa graf bipartit lengkap. Kemudian, akan ditunjukkan graf pangkat ring I dengan order p^2 untuk p sembarang bilangan prima memiliki graf bagian rentang yang merupakan graf bipartit lengkap K_{p^2-1} .

Diketahui $I = \{ra + sb \mid r, s \in \mathbb{Z}\}$. Diambil sembarang $x \in I$, $x \neq 0$ dengan $x = ma + nb$ untuk $m, n \in \mathbb{Z}$ diperoleh

$$\begin{aligned} x^2 &= (ma + nb) \cdot (ma + nb) \\ &= (m^2)a^2 + (mn)ab + (mn)ab + (n^3)b^2 \\ &= (m^2)b + 3(m^2n)(0) + (3mn^2)(0) + (n^3)(0) \\ &= (m^2)b. \end{aligned}$$

Jika $m = sp$ untuk $s \in \mathbb{Z}$ dan $0 < s < p$ diperoleh

$$x^2 = m^2b = (sp)^2b = s^2p^2b = s^2(0) = 0.$$

Untuk $m \neq sp$ diperoleh

$$\begin{aligned} x^3 &= (m^2)b \cdot (ma + nb) \\ &= (m^3)ab + (m^2n)b^2 \\ &= (m^3)0 + (m^2n)0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

artinya untuk setiap $x \in I$ bertetangga dengan 0. Akan tetapi, karena $x^2 \neq 0$ untuk $m \neq sp$ sehingga terdapat $x \in H$ yang tidak hanya bertetangga dengan 0. Oleh karena itu $\mathcal{P}(I)$ tidak membentuk K_{1,p^2-1} , tetapi K_{1,p^2-1} menjadi

graf bagian rentang dari $\mathcal{P}(I)$.

6. Graf pangkat ring J

Graf pangkat ring J untuk order 4 dan 9 membentuk graf bipartit lengkap. Karakteristik tersebut tidak hanya berlaku untuk order 4 dan 9, tapi berlaku untuk ring J dengan order p^2 . Berikut akan ditunjukkan graf pangkat ring J dengan order p^2 untuk p sembarang bilangan prima merupakan graf bipartit lengkap K_{1,p^2-1} .

Diketahui $J = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$. Diambil sembarang $j \in J$ dengan $j = ma + nb$ untuk $m, n \in \mathbb{Z}$ diperoleh

$$\begin{aligned} j^2 &= (ma + nb) \cdot (ma + nb) \\ &= (m^2)a^2 + (mn)ab + (nm)ba + (n^2)b^2 \\ &= (m^2)(0) + (mn)(0) + (mn)(0) + (n^2)(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh untuk setiap $j \in J$ bertetangga dengan 0. Terdapat sebanyak $p^2 - 1$ elemen tak nol dari J sehingga $\mathcal{P}(J)$ membentuk graf K_{1,p^2-1} .

7. Graf pangkat ring K

Pada ring K order 4 dan 9, graf pangkat yang terbentuk merupakan gabungan graf kosong dan graf lengkap. Karakteristik tersebut tidak hanya berlaku untuk order 4 dan 9, tapi berlaku untuk ring K order p^2 dengan $p^2 - 1 = q^m$ untuk q sembarang bilangan prima dan $m \in \mathbb{N}$. Berikut akan ditunjukkan graf pangkat ring K order p^2 $p^2 - 1 = q^m$ untuk q sembarang bilangan prima dan $m \in \mathbb{N}$, Graf pangkat $\mathcal{P}(K)$ merupakan gabungan graf kosong N_1 dan graf lengkap

$$K_{p^2-1}.$$

Diketahui ring K dengan $K = \{ra + sb | r, s \in \mathbb{Z}\}$. memiliki order p^2 dengan p sembarang bilangan prima dan $p^2 - 1 = q^m$ untuk q bilangan prima dan $m \in \mathbb{N}$. Telah diketahui K merupakan lapangan (Fine, 1993). Kemudian berdasarkan teorema 2.1.73 diketahui $K^\times$ dilengkapi operasi perkalian merupakan grup siklik. Dimiliki $|K^\times| = p^2 - 1$ karena $p^2 - 1 = q^m$ berdasarkan teorema 2.1.91 diperoleh elemen dari $K^\times$ membentuk graf lengkap K_{p^2-1} .

Selanjutnya karena K merupakan lapangan dan setiap anggota $K^\times$ merupakan elemen unit. Diketahui berdasarkan lemma 2.1.72 diperoleh setiap anggota $K^\times$ tidak bertetangga dengan 0. Jadi, 0 menjadi graf kosong. Oleh karena itu, $\mathcal{P}(K)$ adalah gabungan graf kosong N_1 dan graf lengkap K_{p^2-1} .

F. Karakteristik Produk Unit Semi Kartesian

Pada subab sebelumnya telah diketahui karakteristik graf pangkat untuk ring order prima. Selanjutnya dengan karakteristik graf pangkat tersebut, akan digeneralisasi karakteristik produk unit semi kartesiannya. Karakteristik produk unit semi kartesian dua graf pangkat pada ring berhingga order p dan q dengan p dan q sembarang bilangan prima sebagai berikut.

1. $R_1 = C_p(0)$ dan R_2 sembarang ring berhingga dengan order q

Ring $C_p(0)$ merupakan ring berhingga dengan order p dengan p sembarang bilangan prima. Ring $C_p(0)$ merupakan yang tidak memiliki elemen satuan. Oleh karena itu, untuk $R_1 = C_p(0)$ dan R_2 sembarang ring berhingga dengan

order q untuk q bilangan prima diperoleh $\mathcal{P}(C_p(0)) \cdot \mathcal{P}(R_2)$ membentuk graf kosong N_{pq} .

Diketahui ring $C_p(0)$ dan R_2 sembarang ring dengan order q untuk p dan q bilangan prima. Akan ditunjukkan $\mathcal{P}(C_p(0)) \cdot \mathcal{P}(R_2)$ membentuk graf kosong N_{pq} . Himpunan titik $\mathcal{P}(C_p(0)) \cdot \mathcal{P}(R_2)$ sesuai dengan definisi 2.1.94 adalah

$$V(\mathcal{P}(C_p(0)) \cdot \mathcal{P}(R_2)) = \{(g, h) | g \in C_p(0), h \in R_2\}.$$

$\mathcal{P}(C_p(0)) \cdot \mathcal{P}(R_2)$ memiliki sebanyak pq titik. Kemudian himpunan sisi pada $\mathcal{P}(C_p(0)) \cdot \mathcal{P}(R_2)$ sesuai dengan definisi 2.1.94 adalah

$$E(\mathcal{P}(C_p(0)) \cdot \mathcal{P}(R_2)) = \{((g, h), (g', h'))\}$$

dengan syarat $g = g', (g, 1_{C_p(0)}) \in E(\mathcal{P}(C_p(0)))$ serta $(h, h') \in E(\mathcal{P}(R_2))$. Karena ring $C_p(0)$ tidak memiliki elemen satuan sehingga tidak terdapat sisi pada $\mathcal{P}(C_p(0)) \cdot \mathcal{P}(R_2)$. Jadi, $\mathcal{P}(C_p(0)) \cdot \mathcal{P}(R_2)$ membentuk graf kosong N_{pq} .

2. $R_1 = \mathbb{Z}_2$ dan R_2 sembarang ring berhingga dengan order q

Pada subbab sebelumnya, telah diketahui bahwa graf pangkat $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$ merupakan gabungan graf kosong N_1 dan graf lengkap K_1 . Pada graf pangkat $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$ tidak terdapat titik yang saling bertetangga. Dengan demikian, untuk $R_1 = \mathbb{Z}_2$ dan R_2 sembarang ring dengan order q untuk q bilangan prima diperoleh $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2) \cdot \mathcal{P}(R_2)$ membentuk graf kosong N_{2q} .

Diketahui ring $\mathbb{Z}_2$ dan R_2 sembarang ring dengan order q

untuk q bilangan prima. Akan ditunjukkan $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2) \cdot \mathcal{P}(R_2)$ membentuk graf kosong N_{2q} . Himpunan titik $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2) \cdot \mathcal{P}(R_2)$ sesuai dengan definisi 2.1.94 adalah

$$V(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2) \cdot \mathcal{P}(R_2)) = \{(g, h) | g \in \mathbb{Z}_2, h \in R_2\}.$$

$\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2) \cdot \mathcal{P}(R_2)$ memiliki sebanyak $2q$ titik. Kemudian himpunan sisi pada $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2) \cdot \mathcal{P}(R_2)$ sesuai dengan definisi 2.1.94 adalah

$$E(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2) \cdot \mathcal{P}(R_2)) = \{((g, h), (g', h'))\}$$

dengan $g = g', (g, 1_{\mathbb{Z}_2}) \in E(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2))$ serta $(h, h') \in E(\mathcal{P}(R_2))$. Ring $\mathbb{Z}_2$ merupakan lapangan dengan elemen satuan $\bar{1}$. Karena $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$ merupakan graf kosong N_2 sehingga tidak terdapat $g \in \mathbb{Z}_2$ yang memenuhi $(g, \bar{1}) \in E(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2))$ sehingga tidak terdapat sisi pada $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2) \cdot \mathcal{P}(R_2)$. Oleh karena itu, $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2) \cdot \mathcal{P}(R_2)$ membentuk graf kosong N_{2q} .

3. $R_1 = \mathbb{Z}_p$ dan $R_2 = C_q(0)$ dengan $p > 2$

Ring $\mathbb{Z}_p$ merupakan lapangan dengan elemen satuan $\bar{1}$. Pada graf pangkat ring $\mathbb{Z}_p$ setiap elemen tak nolnya bertetangga dengan $\bar{1}$. Kemudian, telah diketahui juga graf pangkat ring $C_q(0)$ merupakan graf bipartit lengkap $K_{1, q-1}$. Dengan demikian, diperoleh untuk $R_1 = \mathbb{Z}_p$ dan $R_2 = C_q(0)$ dengan order p dan q berturut-turut untuk p dan q bilangan prima, $p > 2$ diperoleh $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(C_q(0))$ gabungan graf kosong N_{2q} dan $p - 2$ graf bipartit lengkap $K_{1, q-1}$.

Diketahui ring $\mathbb{Z}_p$ dan $C_q(0)$ dengan order p dan q berturut-turut untuk p dan q bilangan prima dan $p > 2$.

Akan ditunjukkan $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(C_q(0))$ gabungan graf kosong N_{2q} dan $p - 2$ graf bipartit lengkap $K_{1,q-1}$. Himpunan titik $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(C_q(0))$ sesuai dengan definisi 2.1.94 adalah

$$V(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(C_q(0))) = \{(g, h) | g \in \mathbb{Z}_p, h \in C_q(0)\}.$$

$\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(C_q(0))$ memiliki sebanyak pq titik. Kemudian himpunan sisi pada $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(C_q(0))$ sesuai dengan definisi 2.1.94 adalah

$$E(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(C_q(0))) = \{((g, h), (g', h'))\}$$

dengan $g = g', (g, 1_{\mathbb{Z}_p}) \in E(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p))$ serta $(h, h') \in E(\mathcal{P}(C_q(0)))$.

Diketahui ring $\mathbb{Z}_p$ merupakan lapangan dengan elemen satuan $\bar{1}$, berdasarkan 2.1.73 diperoleh $\mathbb{Z}_p^\times$ grup siklik dengan elemen identitas $\bar{1}$. Untuk $g \in \mathbb{Z}_p^\times - \{\bar{1}\}$ bertetangga dengan $\bar{1}$. Kemudian diketahui $\mathcal{P}(C_q(0))$ merupakan graf bipartit lengkap $K_{1,p-1}$ dengan setiap titiknya bertetangga dengan 0. Himpunan sisi pada $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(C_q(0))$ dapat dituliskan dengan

$$E(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(C_q(0))) = \{((g, h), (g', 0))\}$$

untuk $g = g', g \in \mathbb{Z}_p - \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dan $h \in C_q(0)$, diperoleh terdapat sebanyak $p - 2$ graf bagian $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(C_q(0))$ yang merupakan graf $K_{1,q-1}$.

Pada $\mathbb{Z}_p^\times$ setiap elemennya merupakan unit sehingga berdasarkan lemma 2.1.72 diperoleh tidak terdapat anggota $\mathbb{Z}_p^\times$ yang merupakan elemen nilpoten. Oleh karena itu,

titik $\bar{0}$ merupakan titik terasing. Terdapat, $\bar{1} \in \mathbb{Z}_p$ yang tidak bertetangga dengan $\bar{1}$ pada $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p)$. Titik $(\bar{0}, h)$ dan $(\bar{1}, h) \in V(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(C_q(0)))$ dengan $h \in C_q(0)$ menjadi titik terasing pada $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(C_q(0))$ sehingga terdapat $2q$ titik terasing pada $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(C_q(0))$. Sebanyak $2q$ titik terasing tersebut membentuk graf kosong N_{2q} . Jadi, $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(C_q(0))$ adalah gabungan dari graf kosong N_{2q} titik terasing dan $p - 2$ graf bipartit lengkap $K_{1, q-1}$.

4. $R_1 = \mathbb{Z}_p$ dan $R_2 = \mathbb{Z}_q$, dengan $p, q > 2$

Ring $\mathbb{Z}_p$ dan $\mathbb{Z}_q$ merupakan lapangan dengan elemen satuan $\bar{1}$. Pada graf pangkat ring $\mathbb{Z}_p$ dan $\mathbb{Z}_q$ setiap elemen tak nolnya bertetangga dengan elemen $\bar{1}$. Kemudian, telah diketahui juga graf pangkat ring $\mathbb{Z}_p$ dan $\mathbb{Z}_q$ merupakan gabungan graf kosong dan graf lengkap untuk order tertentu. Dengan demikian, diperoleh untuk $R_1 = \mathbb{Z}_p$ dan $R_2 = \mathbb{Z}_q$ dengan order p dan q berturut-turut untuk p dan q bilangan prima serta $p, q > 2$. Jika $q - 1 = r^m$ untuk r bilangan prima, $m \in \mathbb{N}$ maka $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_q)$ gabungan graf kosong N_{2q} dan $p - 2$ graf lengkap K_{q-1} .

Diketahui ring $\mathbb{Z}_p$ dan $\mathbb{Z}_q$ dengan order p dan q berturut-turut untuk p dan q bilangan prima serta $p, q > 2$. Akan ditunjukkan Jika $q - 1 = r^m$ untuk r bilangan prima, $m \in \mathbb{N}$ maka $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_q)$ gabungan graf kosong N_{2q} dan $p - 2$ graf lengkap K_{q-1} . Himpunan titik $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_q)$ sesuai dengan definisi 2.1.94 adalah

$$V(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_q)) = \{(g, h) | g \in \mathbb{Z}_p, h \in \mathbb{Z}_q\}.$$

$\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_q)$ memiliki sebanyak pq titik. Kemudian

himpunan sisi pada $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_q)$ sesuai dengan definisi 2.1.94 adalah

$$E(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_q)) = \{((g, h), (g', h'))\}$$

dengan $g = g', (g, 1_{\mathbb{Z}_p}) \in E(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p))$ serta $(h, h') \in E(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_q))$.

Ring $\mathbb{Z}_p$ dan $\mathbb{Z}_q$ merupakan lapangan dengan elemen satuan $\bar{1}$. Pada $\mathbb{Z}_p^\times$ setiap elemennya merupakan unit sehingga berdasarkan lemma 2.1.72 diperoleh tidak terdapat anggota $\mathbb{Z}_p^\times$ yang merupakan elemen nilpoten. Oleh karena itu, titik $\bar{0}$ merupakan titik terasing. Terdapat, $\bar{1} \in \mathbb{Z}_p$ yang tidak bertetangga dengan $\bar{1}$ pada $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p)$. Himpunan sisi $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_q)$ dapat dituliskan dengan

$$E(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_q)) = \{((g, h), (g', h'))\}$$

dengan $g = g', g \in \mathbb{Z}_p - \{0, 1\}$ serta $(h, h') \in E(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_q))$. Diketahui $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_q)$ adalah gabungan graf kosong N_1 dan graf lengkap K_{p-1} . Oleh karena itu, diperoleh terdapat sebanyak $p - 2$ graf bagian $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_q)$ yang merupakan graf lengkap K_{p-1} .

Titik $(\bar{0}, h)$ dan $(\bar{1}, h) \in V(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_q))$ dengan $h \in \mathbb{Z}_q$ merupakan titik terasing pada $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_q)$. Terdapat $2q$ titik terasing yang membentuk graf kosong N_{2q} . Jadi, $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_q)$ gabungan dari graf kosong N_{2q} dan $p - 2$ graf lengkap K_{q-1} .

BAB IV

SIMPULAN DAN SARAN

A. Simpulan

1. Karakteristik graf pangkat pada ring berhingga order p dan p^2 dengan p bilangan prima sebagai berikut.
 - a. Graf pangkat ring $\mathbb{Z}_p$ merupakan gabungan graf kosong N_1 dan graf lengkap K_{p-1} jika $p - 1 = 1$ atau $p - 1 = q^m$ untuk q sembarang bilangan prima dan $m \in \mathbb{N}$.
 - b. Graf pangkat pada ring $C_p(0)$ merupakan graf bipartit lengkap $K_{1,p-1}$.
 - c. Graf pangkat ring A yakni $\mathcal{P}(A)$ memiliki graf bagian yang merupakan graf bipartit lengkap $K_{1,p-1}$.
 - d. Graf pangkat ring B yakni $\mathcal{P}(B)$ memiliki graf bagian rentang yang merupakan graf bipartit lengkap K_{1,p^2-1} .
 - e. Graf pangkat ring C yakni $\mathcal{P}(C)$ merupakan graf bipartit lengkap K_{1,p^2-1} .
 - f. Graf pangkat ring H yakni $\mathcal{P}(H)$ memiliki graf bagian yang merupakan graf bipartit lengkap $K_{1,p-1}$.
 - g. Graf pangkat ring I yakni $\mathcal{P}(I)$ memiliki graf bagian rentang yang merupakan graf bipartit lengkap K_{1,p^2-1} .
 - h. Graf pangkat ring J yakni $\mathcal{P}(J)$ merupakan graf bipartit lengkap K_{1,p^2-1} .
 - i. Graf pangkat ring K yakni $\mathcal{P}(K)$ merupakan gabungan graf kosong N_1 dan graf lengkap K_{p^2-1} jika $p^2 - 1 = q^m$ untuk q sembarang bilangan prima dan $m \in \mathbb{N}$.

2. Karakteristik graf yang dihasilkan dari produk unit semi kartesian dua graf pangkat dua ring berhingga order p dan q berturut-turut dengan p dan q merupakan bilangan prima sebagai berikut.

- a. Untuk ring $C_p(0)$ dan R_2 sembarang ring dengan order q bilangan prima diperoleh $\mathcal{P}(C_p(0)) \cdot \mathcal{P}(R_2)$ membentuk graf kosong N_{pq} .
- b. Untuk ring $\mathbb{Z}_2$ dan R_2 sembarang ring dengan order q bilangan prima diperoleh $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2) \cdot \mathcal{P}(R_2)$ membentuk graf kosong N_{2q} .
- c. Untuk ring $\mathbb{Z}_p$ dan ring $C_q(0)$ dengan p, q bilangan prima dan $p > 2$ diperoleh $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(C_q(0))$ gabungan graf kosong N_{2q} dan $p - 2$ graf bipartit lengkap $K_{1,q-1}$.
- d. Untuk ring $\mathbb{Z}_p$ dan ring $\mathbb{Z}_q$ dengan p, q bilangan prima, $p, q > 2$ dan $q - 1 = r^m$ untuk r bilangan prima, $m \in \mathbb{N}$ diperoleh $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathcal{P}(\mathbb{Z}_q)$ gabungan graf kosong N_{2q} dan $p - 2$ graf lengkap K_{q-1} .

B. Saran

Pembahasan mengenai graf pangkat pada ring berhingga membuka peluang untuk pengembangan lebih lanjut dalam kajian graf pangkat pada ring berhingga. Pada penelitian selanjutnya diharapkan dapat menganalisis karakteristik graf pangkat ring A dan H secara keseluruhan. Selain itu, penelitian selanjutnya diharapkan menganalisis karakteristik graf pangkat ring D , E dan F . Kemudian dapat dilakukan analisis karakteristik operasi lain pada graf pangkat.

DAFTAR PUSTAKA

- Adkins, William A. dan Weintraub, Steven H. 1992. *Algebra An Approach via Module Theory*. New York: Springer-Verlag New York. Inc.
- Burton, David M. 1970. *A First Course in Rings and Ideals*. San Francisco: Addison Wesley Publishing.
- Cameron, P.J. 2010. A Power Graph of Finite Group, II. *Group Theory*. 13(6):779-783.
- Chakrabarty, Ivy., Ghosh, Shamik., & Sen, M.K. 2008. Undirected Power Graphs of Semigroups. *Semigroup Forum*. 78:410-426.
- Clark, John dan Holton, D.A. 1995. *A First Look At Graph Theory*. Singapore: World Scientific Publishing.
- Dummit, David S. dan Foote, Richard .M. 2004. *Abstract Algebra Third Edition*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Fine, B. 1993. Classification of finite rings of order p^2 . *Math. Mag.*66:248-252.
- Fine, B., Gaglione, A.M. & Rosenberger, G. 2014. *Introduction to Abstract Algebra*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.
- Gallian, Joseph A. 2021. *Contemporary Abstract Algebra Tenth Edition*. New York: CRC Press.
- Howie, John M. 2003. *Fundamentals of Semigroup Theory*. New York: Clarendon Press. Oxford.

- Kelarev, A.V. dan Quinn, S.J. 2000. A Combinatorial Property and Power Graphs of Groups. *Contributions To General Algebra*. 12:229-235.
- Kelarev, A.V., Quinn, S.J. & Smolíková, R. 2001. Power Graphs and Semigroups of Matrices. *Bull. Aust. Math. Soc.* 63(2):341-344.
- Madhumitha, S. dan Naduvath, Sudev. 2023. Graph Defined on Rings: A Review. *Preprints*.. 11(17): 1-94.
- Malik, D.S., Mordeson, John M. & Sen, M.K. 1997. *Fundamentals of Abstract Algebra*. New York: The McGraw-Hill Companies, Inc.
- Munir, R. 2016. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.
- Saoub, K.R. 2021. *Graph Theory: An Introduction to Proofs, Algorithms, and Applications*. New York: CRC Press.
- Soleimani, M., Naderi, M.H & Ashrafi, A.R. 2019. Tensor Product of The Power Graphs of Some Finite Rings. *Facta Univ. Ser. Math. Inform.* 34(1):101-122.
- Soleimani, M. dan Naderi, M.H. 2023. On Power Graph of Some Finite Rings. *Mathematics Interdisciplinary Research*. 8(2):161-173.
- Zhao, Kaiming. 2022. *Ring and Field Theory*. Singapore: World Scientific Publishing.
- Zverovich, Vadim. 2021. *Modern Applications of Graph Theory*. United Kingdom: Oxford University Press.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

Nama : Aulia Rosyida Kusumadewi
Tempat, Tanggal Lahir : Bandung, 7 Juli 2003
Alamat : Desa Pulosari RT 002/ RW 002,
Karangtengah, Demak, Jawa Tengah
Nomor HP : 083146662452
E-mail : auliarosyid77@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. SD Negeri Kalikondang I (2009-2015)
2. SMP Negeri I Karangtengah (2015-2018)
3. SMA Negeri III Demak (2018-2021)

Semarang, 10 Juni 2025



Aulia Rosyida Kusumadewi
NIM : 2108046009