

# **MODIFIKASI TINGKAT TINGGI DARI METODE NEWTON UNTUK PENYELESAIAN PERSAMAAN TAK LINEAR**

**SKRIPSI**

**Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh  
Gelar Sarjana Matematika  
dalam Ilmu Matematika**



**Oleh : LUTFIYA TAMJISI**  
**NIM : 2108046068**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO  
SEMARANG  
2025**

## PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Lutfiya Tamjisi  
NIM : 2108046068  
Jurusan/Program Studi : Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

### **BEBERAPA MODIFIKASI TINGKAT TINGGI DARI METODE NEWTON UNTUK PENYELESAIAN PERSAMAAN TAK LINEAR**

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,  
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang,  
Pembuat pernyataan,



Lutfiya Tamjisi  
NIM : 2108046068



KEMENTERIAN AGAMA R.I.  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang  
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

**PENGESAHAN**

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **MODIFIKASI TINGKAT TINGGI DARI METODE  
NEWTON UNTUK PENYELESAIAN PERSAMAAN  
TAK LINEAR**

Penulis : Lutfiya Tamjisi

NIM : 2108046068

Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang tugas akhir oleh Dewan Penguji  
Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima  
sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu  
Matematika.

Semarang, 25 Juni 2025

**DEWAN PENGUJI**

Penguji I,

Penguji II,

Seftina Diyah Miasari, M.Sc.

Zulaikha, M.Si.

NIP : 198709212019032010

NIP : 199204092019032027

Penguji III,

Penguji IV,

Yolanda Norasia, M.Si.

Dinni Rahma Oktaviani, M.Si.

NIP : 199409232019032011

NIP : 199410092019032017

Persembing,

Ariska Kurnia R., M. Sc

NIP : 198908112019032019

## NOTA DINAS

Semarang, 18 Juni 2025

Yth. Ketua Program Studi Matematika  
Fakultas Sains dan Teknologi  
UIN Walisongo Semarang

*Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh*

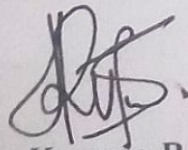
Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : BEBERAPA MODIFIKASI TINGKAT TINGGI DARI  
METODE NEWTON UNTUK PENYELESAIAN  
PERSAMAAN TAK LINEAR  
Nama : Lutfiya Tamjisi  
NIM : 2108046068  
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

*Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh*

Pembimbing,



Ariska Kurnia R., M. Sc  
NIP : 198908112019032019

## ABSTRAK

Metode Newton merupakan salah satu metode penyelesaian persamaan tak linier yang populer. Hal ini dikarenakan konvergensinya yang cepat dibanding metode lainnya. Namun, metode ini memerlukan hampiran awal yang tepat agar konvergen. Beberapa modifikasi orde tinggi dari metode Newton orde 3, 5, dan 6 dikembangkan untuk meningkatkan konvergensi dan kestabilan iterasi. Modifikasi dilakukan dengan satu tambahan evaluasi fungsi disetiap iterasinya untuk mempercepat konvergensi dari konvergensi kuadratik ditingkatkan menjadi 3 atau lebih. Implementasinya menggunakan *software* Matlab pada sembilan fungsi tak linier yang memiliki karakteristik berbeda. Analisisnya difokuskan pada jumlah iterasi, akurasi akar, serta kestabilan terhadap variasi tebakan awal. Hasil numerik menunjukkan bahwa metode Newton modifikasi mampu mencapai akurasi tinggi dengan jumlah iterasi lebih sedikit dibandingkan metode Newton biasa, khususnya pada modifikasi orde 6 yang konsisten dengan konvergensi paling cepat dan akurasi tinggi. Secara keseluruhan, modifikasi metode Newton terbukti efektif dalam mempercepat konvergensi, sehingga cocok diterapkan pada permasalahan numerik yang memerlukan presisi tinggi.

**Kata kunci :** Metode Newton, Modifikasi Metode Newton, Persamaan Tak Linier, Metode Iteratif

## KATA PENGANTAR

Ucapan syukur senantiasa penulis panjatkan kehadirat Allah SWT. atas segala rahmat, hidayah, serta inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Beberapa Modifikasi Tingkat Tinggi dari Metode Newton untuk Penyelesaian Persamaan Tak Linier" guna memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Walisongo. Salawat dan salam senantiasa tercurahkan Sang junjungan kepada Nabi Muhammad Saw. beserta keluarga dan para sahabatnya.

Proses penyusunan skripsi ini tidak akan terselesaikan tanpa doa, bantuan, bimbingan, motivasi dan peran dari banyak pihak. Sehingga penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Prof. Dr. H. Musahadi, M. Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang
2. Ibu Any Muanalifah, M.Si., Ph.D., dan Bapak Prihadi Kurniawan, S.Pd., M.Sc., selaku ketua dan sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.
3. Ibu Nur Khasanah, M.Si., selaku wali dosen yang telah memberikan bimbingan dan motivasi selama studi penulis di program studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.
4. Ibu Ariska Kurnia R., M. Sc, selaku dosen pembimbing yang telah memberikan nasihat, motivasi, dukungan, dan arahan selama proses penyelesaian skripsi ini. Penulis ucapkan

terimakasih atas segala kesabaran, arahan, koreksi, serta waktu yang telah diberikan hingga terselesaikannya skripsi ini.

5. Seluruh Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang. Penulis ucapkan terimakasih yang setulus-tulusnya atas ilmu, bimbingan, dan motivasi yang telah diberikan selama masa perkuliahan.
6. Orang tua tercinta, Bapak Tamjis dan Ibu Suharti yang senantiasa melangitkan doanya untuk putri bungsunya. Terimakasih karena selalu memberikan nasihat, motivasi, arahan, serta dukungan baik moral maupun material. Beliau memang belum sempat mengenyam nikmatnya pendidikan hingga jenjang yang tinggi, namun besar harapan beliau agar dapat melahirkan seorang sarjana ditengah-tengah keluarganya. Penulis dedikasikan skripsi ini sebagai tanda bahwa beliau berhasil melahirkan seorang sarjana yang telah beliau harapkan.
7. Rofi'udin Iza Tamjisi, selaku kakak penulis. selayaknya kakak dan adik pada umumnya, tiada hari tanpa pertengkaran kecil namun hal itu membuat warna dalam hubungan ini dan dapat menjadi penghibur penulis disat mengalami kelelahan dalam menempuh studinya. Terimakasih atas doa, nasihat, motivasi, arahan, serta dukungan baik moral maupun material.
8. Seluruh keluarga besar penulis yang tidak bisa disebutkan satu persatu, penulis ucapkan terimakasih karena senantiasa memberikan doa, dukungan, dan semangat selama penulis

menempuh pendidikan.

9. Terkhusus Ibu Nyai Hj. Luthfiyah Syuhud, selaku pengasuh pondok pesantren Al Khoirot Putri Malang. Penulis ucapkan terimakasih atas doa, nasihat, motivasi, dan semangat yang diberikan kepada penulis.
10. Afifah Maharani, sepupu sekaligus sahabat dekat penulis. Terimakasih atas doa, motivasi, dan senantiasa menyiapkan telinganya untuk mendengar keluh kesah penulis selama proses menempuh pendidikan hingga tahap ini. Nasehat serta hiburan yang beliau buat cukup membuat penulis tenang,lega dan dapat membakar semangat penulis.
11. Sahabat kecil penulis, Wulan Kirana, Sayhrani Mayda Zulkarnain, Reza ovi Yanti, Rully Nofitasari, dan Sho'idah Ayu Istiqomah. Terimakasih atas hiburan yang selalu menghibur di saat penat selama proses studi.
12. Teman seperjuangan di kelas Matematika C angkatan 2021 yang telah menjadi bagian dari perjalanan proses studi ini. Terimakasih atas segala kebersamaan, kerja sama, tawa, canda, serta semangat untuk terus menguatkan selama masa perkuliahan hingga skripsi ini terselesaikan. Kehadiran kalian telah menciptakan kenangan berharga yang akan selalu penulis kenang dengan penuh rasa syukur.
13. Teman-teman KKN MIT Posko-16 Kelurahan Sukorejo yang telah menjadi rekan belajar, bekerja, dan berbagi pengalaman berharga selama kegiatan di lapangan. Terimakasih telah kebersamai dalam suka dan duka, bekerja bersama di tengah masyarakat, serta menciptakan

kenangan yang akan selalu dikenang sepanjang masa studi ini. Kebersamaan dan dukungan kalian sangat berarti dalam perjalanan proses studi penulis.

14. Semua Pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah memberikan kontribusi hingga selesainya skripsi ini.

Akhir kata, penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun demi perbaikan di masa yang akan datang. Semoga Allah SWT senantiasa melimpahkan rahmat, hidayah, dan inayah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu dan mendukung penulis, baik secara langsung maupun tidak langsung. Semoga segala kebaikan dan jasa baik tersebut mendapatkan balasan yang berlipat dari Allah SWT.

Semarang, 25 Juni 2025

Penulis,

**Lutfiya Tamjisi**

NIM. 2108046068

## DAFTAR ISI

|                                                                    |             |
|--------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>HALAMAN JUDUL .....</b>                                         | <b>i</b>    |
| <b>PERNYATAAN KEASLIAN .....</b>                                   | <b>ii</b>   |
| <b>PENGESAHAN .....</b>                                            | <b>iii</b>  |
| <b>PERSETUJUAN PEMBIMBING .....</b>                                | <b>iv</b>   |
| <b>NOTA PEMBIMBING II .....</b>                                    | <b>v</b>    |
| <b>KATA PENGANTAR .....</b>                                        | <b>x</b>    |
| <b>DAFTAR ISI .....</b>                                            | <b>xi</b>   |
| <b>DAFTAR TABEL .....</b>                                          | <b>xiii</b> |
| <b>DAFTAR GAMBAR .....</b>                                         | <b>xvi</b>  |
| <b>DAFTAR LAMPIRAN .....</b>                                       | <b>xvii</b> |
| <b>BAB I PENDAHULUAN .....</b>                                     | <b>1</b>    |
| A. Latar Belakang Masalah .....                                    | 1           |
| B. Rumusan Masalah .....                                           | 6           |
| C. Tujuan Penelitian .....                                         | 6           |
| D. Manfaat Penelitian .....                                        | 6           |
| E. Batasan Masalah .....                                           | 7           |
| <b>BAB II LANDASAN PUSTAKA .....</b>                               | <b>8</b>    |
| A. Metode Numerik .....                                            | 8           |
| B. Persamaan Tak Linear .....                                      | 9           |
| C. Metode Pencarian Akar .....                                     | 10          |
| D. Metode Newton .....                                             | 11          |
| E. Pengembangan Metode Newton dan Analisis<br>Konvergensinya ..... | 14          |
| 1. Metode Newton Orde Ketiga .....                                 | 22          |
| 2. Metode Newton Orde Kelima .....                                 | 25          |
| 3. Metode Newton Orde Keenam .....                                 | 27          |
| F. Galat .....                                                     | 29          |
| G. Konvergensi Metode Iteratif .....                               | 31          |
| 1. Orde Konvergensi Metode Terbuka .....                           | 31          |
| 2. Kriteria Konvergensi Metode Newton .....                        | 32          |
| 3. Orde Konvergensi Metode Newton .....                            | 33          |

|                                                     |                                               |           |
|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------|
| H.                                                  | Indeks Efisiensi .....                        | 34        |
| I.                                                  | Penelitian yang Relevan .....                 | 36        |
| <b>BAB III METODOLOGI PENELITIAN .....</b>          |                                               | <b>42</b> |
| <b>BAB IV Hasil Penelitian dan Pembahasan .....</b> |                                               | <b>44</b> |
| A.                                                  | Modifikasi Metode Newton Tingkat Tinggi ..... | 44        |
| 1.                                                  | Modifikasi Orde 3 .....                       | 45        |
| 2.                                                  | Modifikasi Orde 4 .....                       | 46        |
| 3.                                                  | Modifikasi Orde 5 .....                       | 47        |
| 4.                                                  | Modifikasi Orde 6 .....                       | 48        |
| B.                                                  | Perhitungan Numerik.....                      | 50        |
| <b>BAB V Kesimpulan dan Saran .....</b>             |                                               | <b>83</b> |
| A.                                                  | Kesimpulan .....                              | 83        |
| B.                                                  | Saran .....                                   | 84        |
| <b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>                         |                                               | <b>85</b> |
| <b>Lampiran-lampiran.....</b>                       |                                               | <b>88</b> |

## DAFTAR TABEL

| <b>Tabel</b> | <b>Judul</b>                                  | <b>Halaman</b> |
|--------------|-----------------------------------------------|----------------|
| Tabel 2.1    | Penelitian yang Relevan                       | 36             |
| Tabel 4.1    | Iterasi metode Newton Orde 2 pada Fungsi ke-1 | 52             |
| Tabel 4.2    | Iterasi metode Newton Orde 3 pada Fungsi ke-1 | 52             |
| Tabel 4.3    | Iterasi metode Newton Orde 5 pada Fungsi ke-1 | 53             |
| Tabel 4.4    | Iterasi metode Newton Orde 6 pada Fungsi ke-1 | 53             |
| Tabel 4.5    | Iterasi metode Newton Orde 2 pada Fungsi ke-2 | 54             |
| Tabel 4.6    | Iterasi metode Newton Orde 3 pada Fungsi ke-2 | 55             |
| Tabel 4.7    | Iterasi metode Newton Orde 5 pada Fungsi ke-2 | 56             |
| Tabel 4.8    | Iterasi metode Newton Orde 6 pada Fungsi ke-2 | 56             |
| Tabel 4.9    | Iterasi metode Newton Orde 2 pada Fungsi ke-3 | 58             |
| Tabel 4.10   | Iterasi metode Newton Orde 3 pada Fungsi ke-3 | 58             |
| Tabel 4.11   | Iterasi metode Newton Orde 5 pada Fungsi ke-3 | 59             |

|            |                                               |    |
|------------|-----------------------------------------------|----|
| Tabel 4.12 | Iterasi metode Newton Orde 6 pada Fungsi ke-3 | 59 |
| Tabel 4.13 | Iterasi metode Newton Orde 2 pada Fungsi ke-4 | 61 |
| Tabel 4.14 | Iterasi metode Newton Orde 3 pada Fungsi ke-4 | 61 |
| Tabel 4.15 | Iterasi metode Newton Orde 5 pada Fungsi ke-4 | 62 |
| Tabel 4.16 | Iterasi metode Newton Orde 6 pada Fungsi ke-4 | 62 |
| Tabel 4.17 | Iterasi metode Newton Orde 2 pada Fungsi ke-5 | 63 |
| Tabel 4.18 | Iterasi metode Newton Orde 3 pada Fungsi ke-5 | 64 |
| Tabel 4.19 | Iterasi metode Newton Orde 5 pada Fungsi ke-5 | 65 |
| Tabel 4.20 | Iterasi metode Newton Orde 6 pada Fungsi ke-5 | 65 |
| Tabel 4.21 | Iterasi metode Newton Orde 2 pada Fungsi ke-6 | 67 |
| Tabel 4.22 | Iterasi metode Newton Orde 3 pada Fungsi ke-6 | 67 |
| Tabel 4.23 | Iterasi metode Newton Orde 5 pada Fungsi ke-6 | 68 |
| Tabel 4.24 | Iterasi metode Newton Orde 6 pada Fungsi ke-6 | 69 |
| Tabel 4.25 | Iterasi metode Newton Orde 2 pada Fungsi ke-7 | 70 |

|            |                                               |    |
|------------|-----------------------------------------------|----|
| Tabel 4.26 | Iterasi metode Newton Orde 3 pada Fungsi ke-7 | 71 |
| Tabel 4.27 | Iterasi metode Newton Orde 5 pada Fungsi ke-7 | 72 |
| Tabel 4.28 | Iterasi metode Newton Orde 6 pada Fungsi ke-7 | 73 |
| Tabel 4.29 | Iterasi metode Newton Orde 2 pada Fungsi ke-8 | 74 |
| Tabel 4.30 | Iterasi metode Newton Orde 3 pada Fungsi ke-8 | 75 |
| Tabel 4.31 | Iterasi metode Newton Orde 5 pada Fungsi ke-8 | 76 |
| Tabel 4.32 | Iterasi metode Newton Orde 6 pada Fungsi ke-8 | 77 |
| Tabel 4.33 | Iterasi metode Newton Orde 2 pada Fungsi ke-9 | 78 |
| Tabel 4.34 | Iterasi metode Newton Orde 3 pada Fungsi ke-9 | 79 |
| Tabel 4.35 | Iterasi metode Newton Orde 5 pada Fungsi ke-9 | 80 |
| Tabel 4.36 | Iterasi metode Newton Orde 6 pada Fungsi ke-9 | 81 |

## DAFTAR GAMBAR

| Gambar     | Judul                                                  | Halaman     |
|------------|--------------------------------------------------------|-------------|
| Gambar 2.1 | Grafik Metode iterasi Newton                           | 12          |
| Gambar 3.1 | <i>Flowchart</i> Langkah-langkah<br>Penelitian Skripsi | dalam<br>43 |

## DAFTAR LAMPIRAN

|                                                                                                      | <b>Halaman</b> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| Lampiran 1 <i>Coding</i> MATLAB untuk Metode Newton,<br>Modifikasi Newton orde 3, orde 5, dan orde 6 | 88             |
| Lampiran 2    Daftar Riwayat Hidup                                                                   | 93             |

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

### **A. Latar Belakang Masalah**

Matematika merupakan ilmu yang terus berkembang dan memiliki peran penting dalam memahami fenomena-fenomena alam. Keberadaan dan keteraturan alam semesta dapat digambarkan melalui bahasa matematika karena dapat menangkap pola dan hubungan yang mendasari segala sesuatu (Sukardjono, 2000). Setiap objek, gerak, dan perubahan di alam mengikuti aturan yang dapat dijelaskan dengan rumus-rumus matematika yang tepat. Matematika memiliki peranan penting dalam pengembangan ilmu pengetahuan, teknologi, dan industri. Sedangkan dalam bidang sains seperti fisika, biologi, ekonomi, dan sebagainya digunakan sebagai alat bantu (Ramdani, 2006). Matematika tidak hanya menjadi alat untuk memecahkan masalah-masalah yang sederhana, tetapi juga untuk menjelaskan konsep-konsep yang lebih kompleks (Sukardjono, 2000).

Persoalan dalam matematika dapat diselesaikan dengan dua macam metode yaitu metode analitik dan metode numerik. Metode analitik merupakan suatu proses penyelesaian matematika dengan rumus-rumus yang sudah ada dan hasilnya membentuk suatu fungsi lalu fungsi tersebut dievaluasi sehingga menghasilkan nilai berbentuk angka (Faradillah, 2020). Metode numerik merupakan suatu proses penyelesaian matematika dengan memanipulasi angka dengan operasi dasar sehingga hasilnya selalu berupa angka (Sudiarta, 2020).

Penyelesaian hitungan numerik pada mulanya hanya

menggunakan operasi hitung manual yang dilakukan berulang-ulang sehingga memakan waktu panjang dan melelahkan. Namun seiring berkembangnya zaman, proses penyelesaian hitungan numerik dapat dilakukan dengan bantuan *software* pada komputer agar lebih cepat dan efisien. *Software* tersebut antara lain Matlab, Maple, Python, dan lainnya. Proses penyelesaian yang dilakukan pertama adalah pengelompokan model permasalahannya, kedua disusun algoritmanya, ketiga masuk ke pemrogramannya, keempat penjelasan, kelima penyimpanan, keenam perawatan dan yang terakhir analisis hasil (Sutarno, Rachmatin, & Junaeti, 2022). Metode Numerik mampu menyelesaikan permasalahan dalam suatu sistem persamaan yang besar, tak linear, dan geometri yang tidak dapat diselesaikan secara analitik (Maharani & Suprpto, 2018). Persamaan tak linear menjadi salah satu permasalahan yang proses penyelesaiannya menggunakan metode numerik.

Persamaan tak linear berbeda dari persamaan linear. Persamaan linear adalah suatu persamaan yang variabelnya berderajat tidak lebih dari satu (Azizah & Ariyanti, 2020). Sedangkan persamaan tak linear adalah suatu persamaan yang variabelnya berpangkat lebih dari satu dan terdapat perkalian dua variabel (Rosidi, 2019). Penyelesaian metode numerik pada solusi persamaan tak linear ada dua metode yaitu metode tertutup dan metode terbuka. Metode tertutup memerlukan selang  $[a, b]$  untuk mencari akar yang hasilnya terdapat paling tidak satu akar sedangkan metode terbuka tidak perlu selang  $[a, b]$  tapi hanya perlu tebakan awal untuk hampiran (Munir, 2015). Proses mencari solusi persamaan tak linear pada metode tertutup terdapat dua metode penyelesaiannya yaitu metode Biseksi(Bagi

Dua) dan metode Regula Falsi, sedangkan pada metode terbuka terdapat tiga metode penyelesaiannya yaitu metode Iterasi Titik Tetap, metode Newton, dan metode Secant. Namun diantara metode-metode diatas, metode yang lebih sering digunakan karena memiliki konvergensi yang lebih cepat dibanding metode lainnya, yaitu metode Newton (Maharani & Suprpto, 2018).

Metode Newton-Raphson atau biasa disebut Metode Newton adalah salah satu metode yang digunakan untuk menemukan akar persamaan (Maharani & Suprpto, 2018). Metode ini menggunakan satu titik awal dan secara berulang menggunakan turunan untuk memproyeksikan garis menuju sumbu akar yang dicari. Metode ini umumnya menunjukkan konvergensi yang sangat cepat, namun memerlukan perhitungan turunan sebelum dapat diterapkan. Ada dua cara penurunan metode Newton yaitu secara geometri dan deret Taylor (Maharani & Suprpto, 2018). Metode Newton digunakan untuk mencari akar persamaan tak linear, maka perlu adanya modifikasi untuk penyelesain persamaan tak linear agar lebih efektif dalam meningkatkan kecepatan konvergensi, kestabilan fungsi uji, dan akurasi hasil.

Pada penelitian sebelumnya, banyak metode iteratif tingkat tinggi telah dikembangkan dan dianalisis untuk menyelesaikan persamaan tak linier. Dalam penelitian Sivakumar & Jayaraman (2019) mengusulkan tiga metode iteratif baru untuk menyelesaikan persamaan tak linear dengan menggunakan modifikasi metode Newton. Pertama adalah metode dua langkah dengan urutan konvergensi kelima dan indeks efisiensi 1.495, metode kedua adalah metode tiga langkah dengan urutan konvergensi kedelapan dan indeks 1.516, sedangkan metode ketiga adalah metode dua langkah urutan konvergensi keempat

yang optimal dengan indeks 1.587. Ketiga metode tersebut terbukti memiliki konvergensi yang lebih tinggi dibandingkan metode Newton yang biasa dan diuji pada tujuh kasus nyata, hasilnya menunjukkan keunggulan dalam hal jumlah iterasi yang sedikit, indeks efisiensi yang tinggi, dan waktu yang dihabiskan oleh prosesor (CPU) lebih singkat sehingga metode tersebut lebih efisien dibandingkan metode Newton yang biasa.

Penelitian Alqahtani, Behl, & Kansal (2019) mengenalkan metode iterasi tiga langkah yang merupakan penyederhanaan dari metode King dalam memodifikasi metode Newton dengan urutan konvergensi keempat untuk menyelesaikan sistem persamaan tak linear. Analisis konvergensinya menunjukkan bahwa metode tersebut efektif di bawah kondisi ringan, dan eksperimen numerik pada beberapa kasus nyata membuktikan keefektifan metode tersebut dalam menyelesaikan sistem tak linear skala besar dengan performa lebih baik dibandingkan metode lain, tanpa peningkatan signifikan pada biaya komputasi.

Menurut Yasin & Naseem (2018) mengenalkan tiga metode iteratif baru dengan urutan konvergensi keenam menggunakan teknik iterasi variational untuk menyelesaikan persamaan tak linear yang dikembangkan dari metode Newton, Ostrowski, Traub, dan Halley. Analisis konvergensinya menggunakan deret Taylor dengan menunjukkan kinerja yang lebih baik dibandingkan metode lain. Uji numerik pada beberapa fungsi tak linear tersebut membuktikan metode ini lebih cepat mencapai solusi tingkat akurasi tinggi dan iterasi lebih sedikit. Selain itu, polynomiografi digunakan untuk memvisualisasikan akar polinomial kompleks sehingga memperlihatkan efisiensi metode melalui ilustrasi grafis.

Penelitian Deep & Argyros (2023) membahas dua metode

komposisi baru dengan urutan konvergensi keenam untuk menyelesaikan persamaan tak linear, yang dikembangkan dari metode orde ketiga milik Homeier dan Traub. Metode pertama menggunakan interpolasi linear dengan tiga evaluasi fungsi dan satu turunan per iterasi, sedangkan metode kedua mengurangi evaluasi turunan menggunakan perbedaan terbagi. Hasil eksperimen numerik menunjukkan bahwa kedua metode ini lebih akurat dan efisien dibandingkan metode konvensional dengan efisiensi yang meningkat dari 1,43 menjadi 1,57.

Berdasarkan penelitian Behl & Argyros (2020) mengusulkan skema iteratif baru berbasis *weight function* dengan urutan konvergensi keenam untuk menyelesaikan sistem persamaan tak linear. Metode ini menggunakan pendekatan ruang Banach dan konvergensi dengan konstanta Lipschitz untuk memastikan stabilitas dan radius konvergensi tertentu. Hasil eksperimen pada berbagai masalah nyata menunjukkan bahwa metode ini lebih efisien dan stabil dibandingkan metode Ostrowski dan Jarratt, serta memiliki residual error yang lebih rendah. Metode ini terbukti unggul dalam waktu komputasi dan jumlah iterasi, sehingga cocok digunakan untuk aplikasi di bidang kimia, ekonomi, dan fisika.

Berdasarkan beberapa penelitian terkait modifikasi metode Newton diatas, terdapat banyak modifikasi untuk mencari suatu penyelesaian dalam meningkatkan konvergensi dan iterasi yang lebih efisien. Namun demikian, meskipun metode Newton memiliki konvergensi yang lebih cepat dibanding metode lain, metode Newton memiliki keterbatasan dalam kasus tertentu. Contohnya ketika suatu fungsi yang memiliki titik kritis atau suatu fungsi yang memerlukan perhitungan yang kompleks. Oleh karena

itu, penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan modifikasi metode Newton dengan tingkat konvergensi yang lebih tinggi dan efisiensi iterasi yang lebih baik. Sehingga pada tugas akhir ini penulis memberi judul "**Modifikasi Tingkat Tinggi dari Metode Newton untuk Penyelesaian Persamaan Tak Linear**".

## **B. Rumusan Masalah**

1. Bagaimana modifikasi tingkat tinggi dari metode Newton untuk meningkatkan efisiensi iterasi dan konvergensi?
2. Seberapa efektif modifikasi metode Newton dalam meningkatkan konvergensi berdasarkan hasil uji numerik pada persamaan tak linier?

## **C. Tujuan Penelitian**

1. Mengetahui modifikasi tingkat tinggi dari metode Newton untuk meningkatkan efisiensi iterasi dan konvergensi.
2. Mengetahui seberapa efektif modifikasi metode Newton dalam meningkatkan konvergensi berdasarkan hasil uji numerik pada persamaan tak linier.

## **D. Manfaat Penelitian**

1. Menambah kemampuan penulis dalam mengembangkan bentuk metode numerik khususnya metode Newton untuk penyelesaian persamaan tak linear.

2. Diharapkan dapat memberi pengetahuan tentang modifikasi tingkat tinggi dari metode Newton untuk penyelesaian persamaan tak linear.
3. Dapat dijadikan bahan referensi untuk penelitian selanjutnya tentang modifikasi tingkat tinggi dari metode Newton untuk penyelesaian persamaan tak linear.

#### **E. Batasan Masalah**

Batasan masalah pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Menggunakan modifikasi tingkat tinggi dari metode Newton untuk penyelesaian persamaan tak linear. Metode ini dikembangkan dengan meningkatkan orde konvergensinya, di mana pada tugas akhir ini yang akan dikembangkan dan diuji adalah metode dengan orde 2, 3, 5, dan 6.
2. Pengujian metode dilakukan dengan menambahkan satu evaluasi fungsi tambahan per iterasi, sesuai dengan pendekatan yang bertujuan untuk meningkatkan efisiensi komputasi.
3. Proses iterasi akan dihentikan apabila memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini  $(x_n)$  lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ .

## **BAB II**

### **LANDASAN PUSTAKA**

#### **A. Metode Numerik**

Metode numerik adalah metode penyelesaian persoalan matematika dengan operasi aritmatika sederhana dan operasi pada data atau bilangan numerik (Sinaga, 2021). Pendekatan yang digunakan dalam metode numerik adalah analisis matematis. Metode numerik adalah algoritma pendekatan dimana didalamnya terdapat suatu iterasi (Basuki & Ramadijanti, 2005). Iterasi merupakan proses perhitungan berulang-ulang untuk memperoleh nilai sebenarnya. Pada pendekatan ini setiap nilai pasti memiliki nilai kesalahan atau biasa disebut galat atau eror.

Metode numerik adalah alat bantu untuk memecahkan permasalahan matematika yang tidak dapat dipecahkan secara analitik seperti sistem persamaan yang besar, ketidaklinieran, dan geometri (Maharani & Suprpto, 2018). Metode penyelesaian numerik yang berkembang perlu proses iterasi yang panjang dan cukup memakan waktu. Seiring berkembangnya teknologi komputer saat ini solusi permasalahan numerik dapat diselesaikan dengan bantuan software komputer agar lebih efisien, cepat dan akurat untuk mendapat galat atau eror dengan nilai yang kecil. Bantuan software komputer sangat diperlukan untuk mengefisiensi proses perhitungan dan waktu yang dibutuhkan.

## B. Persamaan Tak Linear

Persamaan tak linier adalah persamaan yang tidak memenuhi syarat persamaan linier, ditandai dengan adanya variabel berpangkat lebih dari satu, perkalian antar variabel, atau fungsi non-linier, di mana akarnya merupakan nilai yang menyebabkan persamaan bernilai nol, yang secara grafis merupakan titik potong kurva dengan sumbu horizontal (Rosidi, 2019). Persamaan tak linear adalah suatu persamaan untuk mencari akar  $x$  sehingga  $f(x)=0$ , fungsi ini tidak mempunyai formulasi tertentu sehingga diperlukan beberapa metode pendekatan untuk menentukan akarnya (Asminah & Sahfitri, 2015). Persamaan ini memiliki nilai  $x$  yang nilainya sama dengan nol dan menentukan akar-akar satu persamaan tunggal.

Persamaan tak linear dinyatakan dalam bentuk:

$$f(x) = 0 \quad (2.1)$$

dengan  $f(x)$  = fungsi yang dievaluasi dititik  $x$

Solusi penyelesaian persamaan tak linear pada Persamaan(2.1) berarti mencari nilai  $x = x_s$  sehingga persamaan tersebut bernilai benar. Solusi persamaan tak linear akan lebih sederhana dan mudah jika diselesaikan dengan metode numerik.

Contoh:

$$1 + \cos(x) - 5x = 0, x \tan(x) - \cosh(x) = 0, \text{ dan } e^x - \sin(x) = 0$$

Tiga contoh diatas merupakan contoh persamaan tak linear dengan hasil akhir dari bentuk diatas akan didapat nilai sama dengan nol (Zakaria & Muharramah, 2023).

### C. Metode Pencarian Akar

Metode pencarian akar persamaan tak linier dilakukan secara iteratif (Munir, 2015). Menurut Munir (2015) metode pencarian akar dibagi menjadi 2, yaitu metode tertutup dan metode terbuka. Metode tertutup atau disebut metode pengurung yang digunakan untuk mencari akar dalam selang  $[a, b]$  sehingga dapat dipastikan pada selang tersebut terdapat minimal satu akar dan iterasinya selalu mendekati akar (konvergen). Sedangkan metode terbuka memerlukan tebakan awal untuk mengetahui tebakan akar baru dimana metode ini tidak memerlukan selang  $[a, b]$ . Namun metode tertutup tidak selalu menemukan akarnya sehingga iterasinya bisa saja menjauhi akar (divergen) atau mendekati akar (konvergen).

Metode tertutup dibagi menjadi 2, yaitu metode Bagi Dua dan metode Regula Falsi (Munir, 2015). Metode Bagi Dua atau disebut metode Biseksi merupakan metode tabel dimana daerahnya dibagi menjadi  $N$  bagian, namun pada metode ini daerahnya dibagi menjadi 2 dan diantara keduanya dilihat mana yang mengandung akar dan yang tidak mengandung akar. Daerah yang mengandung akar digunakan untuk proses iterasi selanjutnya hingga memperoleh akar (Basuki & Ramadijanti, 2005). Sedangkan Metode Regula Falsi adalah metode yang menggunakan nilai kemiringan dan selisih tinggi dari kedua titik batas daerah (Basuki & Ramadijanti, 2005). Pada metode bagi dua, akarnya selalu ditemukan namun kecepatan konvergensinya sangat lambat. pada metode Regula Falsi nilai  $f(a)$  dan  $f(b)$  dimanfaatkan untuk meningkatkan kecepatan konvergensinya (Munir, 2015).

Metode terbuka dibagi menjadi 3, yaitu metode Iterasi Titik

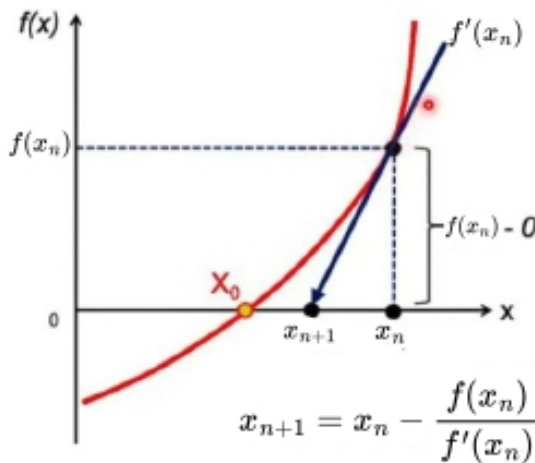
Tetap, metode Newton, dan metode Secant (Munir, 2015). Metode Iterasi Titik Tetap adalah metode pencarian akar yang memisahkan nilai  $x$  dengan nilai  $x$  lainnya sehingga diperoleh nilai  $x = g(x)$  (Basuki & Ramadijanti, 2005). Metode Newton atau metode Newton Raphson adalah metode yang menggunakan titik awal tunggal dan menggunakan turunan untuk memproyeksikan garis ke suatu sumbu akar (Maharani & Suprpto, 2018). Metode Newton paling banyak digunakan karena konvergensinya paling cepat diantara metode lainnya (Munir, 2015). Metode Secant adalah bentuk modifikasi dari metode Newton karena ada beberapa bentuk fungsi yang tidak mudah dicari turunannya sehingga turunannya dapat diganti dengan bentuk yang ekuivalen (Munir, 2015).

#### **D. Metode Newton**

Metode Newton merupakan metode yang paling banyak dikenal dan dipakai dalam bidang terapan sains dan rekayasa (Maharani & Suprpto, 2018). Hal ini dikarenakan konvergensinya paling cepat dari metode lainnya. Metode Newton juga memiliki iterasi yang paling sedikit dibanding metode lainnya (Munir, 2015). Namun metode Newton kurang tepat digunakan untuk penyelesaian permasalahan ketika titik hampirannya berada di titik ekstrim, karena nilai  $f'(x) = 0$  sehingga nilai penyebut dari  $\frac{f(x)}{f'(x)} = 0$ . Ketika titik hampiran berada diantara titik stasioner, metode ini juga cenderung lebih sulit diselesaikan (Basuki & Ramadijanti, 2005). Pada metode Newton juga memerlukan turunan fungsi untuk penyelesaiannya (Maharani & Suprpto, 2018). Metode Newton dapat diturunkan dengan dua macam

pendekatan yakni dengan diturunkan secara geometri dan dengan bantuan deret Taylor.

Penyelesaian persamaan tak linear dengan penurunan secara geometri dilakukan dengan mempertimbangkan metode iterasi untuk menentukan akar. Misal hampiran awal dari akar  $x_n$ , Sebuah garis singgung ditarik dari titik  $[x_n, f(x_n)]$  dimana didapat akar yang lebih baik yaitu  $(x_{n+1})$  yang memotong sumbu  $x$ .



Gambar 2.1. Grafik Metode iterasi Newton

Turunan  $x_n$  ekuivalen terhadap gradien garis singgung. Gradien garis singgung di  $x_n$  adalah sebagai berikut.

$$m = f'(x_n) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_n - 0)}{x_n - x_{n+1}} \quad (2.2)$$

dimana

- $f(x_n)$  = fungsi yang dievaluasi dititik  $x_n$
- $x_n$  = titik awal
- $x_{n+1}$  = titik yang baru
- $\Delta y$  = perubahan nilai fungsi  $y$
- $\Delta x$  = perubahan nilai fungsi  $x$

atau dapat ditulis

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} \quad (2.3)$$

Sehingga didapat formula iterasi pada metode Newton dengan penurunan secara geometri sebagai berikut.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, f'(x_n) \neq 0 \quad (2.4)$$

Selain penurunan secara geometri juga terdapat penurunan dengan ekspansi deret taylor.  $f(x_{n+1})$  di sekitar  $x_n$  dapat diuraikan ke deret taylor sebagai berikut.

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2!}f''(x_n) \quad (2.5)$$

dimana  $x_n < t < x_{n+1}$

dengan

- $f(x_{n+1})$  = fungsi yang dievaluasi dititik  $x_{n+1}$

- $x_n$  = titik awal
- $x_{n+1}$  = titik yang baru

Karena Metode Newton-Raphson didasarkan pada aproksimasi linear (menggunakan garis singgung), maka ekspansi Deret Taylor tersebut disederhanakan dengan hanya mempertimbangkan suku sampai orde satu:

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \quad (2.6)$$

Tujuan dari metode iterasi ini adalah untuk menemukan akar sederhana  $\alpha$ , di mana  $f(\alpha) = 0$  dan  $f'(\alpha) \neq 0$ . Dengan mengasumsikan bahwa  $x$  adalah aproksimasi akar berikutnya ( $x_{n+1}$ ) dan  $f(x_{n+1}) \approx 0$ , kita set persamaan (2.6) menjadi nol:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

Dengan menyelesaikan persamaan ini untuk  $x_{n+1}$ , diperoleh bentuk iterasi dari Metode Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0 \quad (2.7)$$

Iterasi akan berhenti jika  $f(x_n) < \epsilon$ .

## **E. Pengembangan Metode Newton dan Analisis Konvergensinya**

Pengembangan dalam metode Newton tingkat tinggi variabel  $y_n$  dan  $z_n$  sebagai titik perantara yang digunakan pada proses iterasi untuk meningkatkan akurasi dan kecepatan orde konvergensinya. Nilai  $y_n$  diperoleh dari langkah iterasi Newton

biasa, yakni dengan mengoreksi titik  $x_n$  menggunakan fungsi turunan. Nilai  $z_n$  adalah hasil dari fungsi iterasi orde  $p$  yang dikembangkan dari  $x_n$ . Fungsi  $H(x, y)$  yang berperan sebagai fungsi bantu dua variabel, diterapkan untuk menggabungkan nilai  $y_n$  dan  $z_n$  agar metode yang dihasilkan memiliki tingkat konvergensi yang lebih tinggi dibandingkan metode Newton biasa. Diasumsikan bahwa  $\psi_p$  merupakan suatu fungsi iterasi yang konvergensinya paling sedikit  $p$ , sehingga formulasi metode iterasinya sebagai berikut.

$$x_{n+1} = \psi_p(x_n), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Pada orde  $p$  terdapat eror atau galat  $|\alpha - x_{n+1}|$  yang sebanding dengan  $|\alpha - x_n|^p$  dengan  $n \rightarrow \infty$ . Metode baru akan didapatkan dengan mengembangkan dua langkah iterasi dimana metode orde  $p$  sebagai langkah pertama dan dicari fungsi yang tidak diketahui dari metode langkah pertama sebagai langkah keduanya, maka

$$z_n = \psi_p(x_n) \quad (2.9)$$

$$x_{n+1} = z_n - H(x_n, y_n) \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \quad (2.10)$$

Dimana  $H(x_n, y_n)$  merupakan fungsi dua variabel, selanjutnya

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.11)$$

Disini akan dicari  $H(x, y)$  sebagaimana yang telah didefinisikan pada Persamaan(2.9) dan Persamaan(2.10) yang memiliki tingkat konvergensi lebih tinggi. Peningkatan orde konvergensi

dengan satu evaluasi tambahan per iterasi, jumlah iterasi yang dibutuhkan, dan nilai indeks efisiensi yang lebih tinggi digunakan untuk meningkatkan efisiensi iterasi. Keefektifan modifikasi metode dilihat ketika suatu fungsi berhasil menemukan akar. konvergensi sebuah metode iterasi untuk pencarian akar dilihat dari nilai aproksimasi mendekati akar sejatinya, nilai fungsi pada aproksimasi mendekati nol, terpenuhinya kriteria berhentinya iterasi, dan kriteria konvergensi metode Newton. Dalam penelitian ini, proses iterasi Metode Newton-Raphson dihentikan berdasarkan kombinasi kriteria konvergensi untuk memastikan akurasi dan stabilitas solusi. Iterasi akan berhenti jika salah satu dari kondisi berikut terpenuhi:

1. Perubahan absolut antara dua aproksimasi berurutan ( $x_{n+1}$  dan  $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ .
2. Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ .
3. Jumlah iterasi telah mencapai batas maksimum yang ditetapkan untuk mencegah divergensi atau konvergensi yang sangat lambat. Batas maksimum iterasi ditetapkan.

Dengan demikian, algoritma akan berhenti ketika kondisi ( $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ ) atau ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) atau jumlah iterasi mencapai batas maksimum terpenuhi. Namun pada penelitian ini menggunakan kriteria konvergensi pada perubahan absolut fungsi  $f(x)$  dimana  $|f(x_n)| < \epsilon$ .

**Teorema 2.5.1** (*Ham, Chun, & Lee, 2008*)

Misalkan  $\alpha \in I$  adalah suatu bilangan nol sederhana dari suatu fungsi  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dimana  $I$  interval terbuka. Misal  $\psi_p$  adalah suatu fungsi iterasi yang lain dimana tingkat orde konvergensinya paling sedikit adalah  $p$ . Jika  $H(x, y)$  memenuhi kondisi

$$H(\alpha, \alpha) = 1 \quad (2.12)$$

Maka metode yang ditentukan oleh Persamaan(2.9) dan Persamaan(2.10) memiliki orde paling sedikit  $p + 1$ . Jika  $H(x, y)$  memenuhi kondisi,

$$H(\alpha, \alpha) = 1, H_x(\alpha, \alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \quad (2.13)$$

Maka metode yang ditentukan oleh Persamaan(2.9) dan Persamaan(2.10) memiliki orde paling sedikit  $p + 2$ , selanjutnya  $H(x, y)$  memenuhi kondisi Persamaan(2.13) dan juga mengikuti kondisi dimana,

$$\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} H_y(\alpha, \alpha) + H_{xx}(\alpha, \alpha) = \frac{f^3(\alpha)}{f'(\alpha)} \quad (2.14)$$

Maka orde yang paling sedikit adalah  $p + 3$

*Proof.* Misalkan  $\alpha$  adalah suatu bilangan nol sederhana dari  $f$  dan misal  $z_n = \psi_3(x_n)$ .  $H(x, y)$  dilambangkan dengan  $H$ ,  $H_x(\alpha, \alpha)$  dengan  $H_x$ ,  $H_y(\alpha, \alpha)$  dengan  $H_y$ ,  $H_{xx}(\alpha, \alpha)$  dengan  $H_{xx}$ ,  $H_{xy}(\alpha, \alpha)$  dengan  $H_{xy}$ ,  $H_{yy}(\alpha, \alpha)$  dengan  $H_{yy}$ , dan  $H_{xxx}(\alpha, \alpha)$  dengan  $H_{xxx}$ .

$$f(x_n) = f'(\alpha)[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)], \quad (2.15)$$

$$f'(x_n) = f'(\alpha)[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O(e_n^4)], \quad (2.16)$$

Dimana  $O$  = orde dari suku sisa,  $e_n = x_n - \alpha$  dan  $c_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!f'(\alpha)}$ ,  $k = 2, 3, 4, \dots$  Pada Persamaan(2.15) dibagi dengan Persamaan(2.16) sehingga,

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \alpha + c_2e_n^2 - 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4), \quad (2.17)$$

Dengan menerapkan ekspansi deret taylor dari  $z_n$  terhadap  $\alpha$ , maka didapat

$$(f(z_n)) = f'(\alpha)[z_n - \alpha + c_2(z_n - \alpha)^2 + O((z_n - \alpha)^3)], \quad (2.18)$$

Kemudian Persamaan(2.18) dibagi dengan Persamaan(2.16) didapat,

$$\begin{aligned} \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} &= (z_n - \alpha) [1 - 2c_2e_n + (4c_2^2 - 3c_3)e_n^2 \\ &\quad + (c_2(z_n - \alpha) + (-8c_2^3 + 12c_2c_3 - 4c_4))e_n^3] \\ &\quad + O(e_n^7) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Karena  $\psi_p$  orde paling sedikitnya di  $p$ , maka ada  $A$  konstan sehingga

$$z_n - \alpha = Ae_n^p + O(e_n^{p+1}) \quad (2.20)$$

Jika diterapkan pada dua variabel dengan ekspansi deret taylor

disekitaran titik  $(\alpha, \alpha)$  maka dari Persamaan(2.17) diperoleh,

$$\begin{aligned}
 H(x_n, y_n) &= H + H_x(x_n - \alpha) + H_y(y_n - \alpha) + H_{xx} \frac{(x_n - \alpha)^2}{2} \\
 &\quad + H_{xy}(x_n - \alpha)(y_n - \alpha) + H_{yy} \frac{(y_n - \alpha)^2}{2} \\
 &\quad + H_{xxx} \frac{(x_n - \alpha)^3}{6} + \dots \\
 &= H + H_x e_n + \left[ H_y c_2 + \frac{H_{xx}}{2} \right] e_n^2 \\
 &\quad + \left[ (2c_3 - 2c_2^2) H_y + c_2 H_{xy} + \frac{H_{xxx}}{6} \right] e_n^3 + O(e_n^4)
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Jadi dari Persamaan(2.19) dan Persamaan(2.21) diperoleh,

$$\begin{aligned}
 e_{n+1} &= (z_n - \alpha) - H(x_n, y_n) \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \\
 &= (z_n - \alpha) - (z_n - \alpha) \left[ H + (-2c_2 H + H_x) e_n \right. \\
 &\quad \left. + \left( (4c_2^2 - 3c_3) H - 2c_2 H_x + c_2 H_y + \frac{H_{xx}}{2} \right) e_n^2 + O(e_n^7) \right]
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Dimana

$$\begin{aligned}
 K_6 &= H \left[ c_2(z_n - \alpha) + (-8c_2^3 + 12c_2c_3 - 4c_4) e_n^3 \right] \\
 &\quad + (4c_2^2 - 3c_3) H_x e_n^3 \\
 &\quad - [2H_y c_2^2 + H_{xx} c_2] e_n^3 \\
 &\quad + \left[ (2c_3 - 2c_2^2) H_y + c_2 H_{xy} + \frac{H_{xxx}}{6} \right] e_n^3
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Jika  $H = 1$ , maka dengan menggunakan Persamaan(2.20),

Persamaan(2.22) menjadi

$$e_{n+1} = A[2c_2 - H_x]e^{p+1} + O(e_n^{p+2}) \quad (2.24)$$

Metode yang telah ditentukan sebelumnya orde paling sedikit yaitu  $p + 1$  pada Persamaan(2.9) dan Persamaan(2.10). Jika  $H = 1$  dan  $H_x = 2c_2$ , maka dengan menggunakan Persamaan(2.20), Persamaan(2.22) menjadi

$$e_{n+1} = A \left[ 3c_3 - c_2H_y - \frac{H_{xx}}{2} \right] e_n^{p+2} + O(e_n^{p+3}) \quad (2.25)$$

Jadi dengan metode yang telah ditentukan sebelumnya orde paling sedikit yaitu  $p + 2$  pada Persamaan(2.9) dan Persamaan(2.10). Jika  $H = 1$  dan  $H_x = 2c_2$  dan  $c_2H_y + \frac{H_{xx}}{2} = 3c_3$ , maka dengan menggunakan Persamaan(2.20), Persamaan(2.22) menjadi

$$e_{n+1} = A \left[ -(A + H_{xy})c_2 + 2H_y c_2^2 - 2H_y c_3 + 4c_4 - \frac{H_{xxx}}{6} \right] e_n^{p+3} + O(e_n^{p+4}) \quad (2.26)$$

Jadi pada metode yang telah ditentukan pada Persamaan(2.9) dan Persamaan(2.10) sebelumnya orde paling sedikit yaitu  $p + 3$ , maka terbukti.  $\square$

Berdasarkan Teorema(2.5.1) terdapat suatu urutan metode iteratif yang ditingkatkan menjadi tiga kali lebih tinggi dengan menghapus fungsi tambahan untuk meningkatkan efisiensi metode komputasi menjadi lebih baik. Pada Teorema(2.5.1) terdapat kasus khusus yaitu orde 3, orde 5, dan orde 6 baru yang diperoleh dari peningkatan orde konvergensi dengan satu tambahan evaluasi fungsi di setiap iterasinya(Ham, Chun, Lee,

2008). Metode Newton biasa memiliki orde konvergensi kuadratik atau orde dua, maka perlu adanya peningkatan orde konvergensi pada orde ketiga dimana ditambahkan fungsi  $H(x, y)$  yang memenuhi kondisi  $H(\alpha, \alpha) = 1$  sehingga orde konvergensinya meningkat dari  $p$  ke  $p + 1$ .

Orde 5 dipilih karena memungkinkan peningkatan konvergensi yang lebih cepat dan lebih efisien dibanding metode orde 4 dalam jumlah iterasi dan evaluasi fungsi berdasarkan hasil numerik (Oghovese & Olaniyi, 2014). Perlu adanya peningkatan orde konvergensi pada orde kelima dimana ditambahkan fungsi  $H(x, y)$  yang memenuhi kondisi  $H(\alpha, \alpha) = 1$ ,  $H_x(\alpha, \alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$  sehingga orde konvergensinya meningkat dari  $p + 1$  ke  $p + 2$ . Orde 6 dipilih karena tingkat efisiensi yang lebih signifikan dibanding orde 4 atau 5. Dengan satu tambahan evaluasi fungsi, konvergensi meningkat secara optimal sehingga menjadikannya pilihan terbaik untuk efisiensi komputasi. Peningkatan orde konvergensi pada orde keenam dilakukan dengan penambahan fungsi  $H(x, y)$  yang memenuhi kondisi  $\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}H_y(\alpha, \alpha) + H_{xx}(\alpha, \alpha) = \frac{f^3(\alpha)}{f'(\alpha)}$  sehingga orde konvergensinya meningkat dari  $p + 2$  ke  $p + 3$ .

Terdapat beberapa kasus yang memenuhi kondisi seperti pada Persamaan(2.12), persamaan(2.13), dan persamaan (2.13)dan(2.14). Pada kondisi Persamaan(2.12) misalnya terdapat kasus,

$$H(x, y) = 1, H(x, y) = \frac{\beta f(x) + \gamma f'(x)}{\mu f(x) + \gamma f'(x)}, H(x, y) = 1 + x - \varphi(x) \quad (2.27)$$

Pada kondisi Persamaan(2.13) misalnya terdapat kasus,

$$H(x, y) = \frac{f'(y)}{2f'(y) - f'(y)}, H(x, y) = \frac{f'(x)}{f'(y)}, H(x, y) = \frac{3f'(x) - f'(y)}{f'(x) + f'(y)} \quad (2.28)$$

Pada kondisi Persamaan (2.13) dan (2.14) misalnya terdapat kasus,

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \frac{2f'^2(y)}{f'^2(x) - 4f'(x)f'(y) + 5f'^2(y)}, \\ H(x, y) &= \frac{f'(x) - f'(y)}{3f'(y) - f'(x)}, \\ H(x, y) &= -\frac{2f'^2(x)}{f'^2(x) - 4f'(x)f'(y) + f'^2(y)}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Beberapa contoh kasus diatas digunakan untuk perhitungan selanjutnya dengan  $y_n$  didefinisikan oleh Persamaan (2.11).

## 1. Metode Newton Orde Ketiga

Beberapa contoh kasus yang memenuhi Persamaan (2.12):

### a. Kasus Pertama

Fungsi  $H(x, y)$  didefinisikan sebagai:

$$H(x, y) = \frac{\beta f(x) + \gamma f'(x)}{\mu f(x) + \gamma f'(x)} \quad (2.30)$$

dengan  $\beta, \mu, \gamma \neq 0$  dan  $\beta, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$ , didapat:

$$z_n = \psi_2(x_n) \quad (2.31)$$

Gunakan metode Newton biasa untuk mendapatkan  $z_n$ , jika:

$$\psi_2(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (2.32)$$

maka,

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.33)$$

Untuk meningkatkan akurasi, dilakukan penambahan satu fungsi evaluasi  $H(x, y)$  setelah mendapatkan  $z_n$ :

$$x_{n+1} = z_n - H(x_n, y_n) \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \quad (2.34)$$

Substitusikan fungsi  $H(x, y)$ ,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{\beta f(x_n) + \gamma f'(x_n)}{\mu f(x_n) + \gamma f'(x_n)} \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \quad (2.35)$$

Jika  $\beta = \mu = 0$ , maka fungsi  $H(x, y)$  berubah menjadi,

$$H(x, y) = \frac{\mu f'(x)}{\mu f'(x)} = 1 \quad (2.36)$$

Sehingga dapat disederhanakan menjadi,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{\mu f'(z_n)}{\mu f'(x_n)} \quad (2.37)$$

Jika  $\beta = \mu = 0$ , metode ini tidak memiliki fleksibilitas tambahan dari  $H(x, y)$ , tetapi masih tetap memiliki konvergensi untuk orde 3.

## **b. Kasus Kedua**

Fungsi  $H(x, y)$  didefinisikan sebagai:

$$H(x, y) = 1 + x - \varphi(x) \quad (2.38)$$

dimana  $\varphi(x)$  merupakan fungsi iteratif yang memenuhi syarat  $\varphi(\alpha) = \alpha$ , maka dengan metode Newton biasa;

$$z_n = \psi_2(x_n) \quad (2.39)$$

Dan menggunakan metode iterasi Newton,

$$\psi_2(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (2.40)$$

sehingga iterasinya menjadi,

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.41)$$

Untuk meningkatkan akurasi, dilakukan penambahan satu fungsi evaluasi  $H(x, y)$  setelah mendapatkan  $z_n$ :

$$x_{n+1} = z_n - H(x_n, y_n) \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \quad (2.42)$$

Substitusikan  $H(x, y)$ ;

$$x_{n+1} = z_n - (1 + x - \varphi(x)) \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \quad (2.43)$$

Misal fungsi  $\varphi(x)$  adalah

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)f'(x)}{f(x)^2 + f'(x)^2} \quad (2.44)$$

Maka  $H(x, y)$  menjadi;

$$x_{n+1} = z_n - \left[ \frac{f(x_n)^2 + f'(x_n)^2 + f(x_n)f'(x_n)}{f(x_n)^2 + f'(x_n)^2} \right] \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \quad (2.45)$$

Berdasarkan konsep indeks efisiensi pada Persamaan (2.76), Metode Newton orde ketiga jelas orde konvergensi ( $p$ ) adalah 3 dan hasil evaluasi fungsinya ( $f_e$ ) adalah 3. Hasilnya diperoleh  $\sqrt{3} = 1.441$ , dimana hasil indeks efisiensi lebih besar dibanding metode Newton biasa yaitu  $1.441 > 1.414$  yang artinya metode Newton orde ketiga lebih efisien dibanding metode Newton biasa.

## 2. Metode Newton Orde Kelima

Beberapa contoh kasus yang memenuhi Persamaan (2.13):

### a. Kasus Pertama

Fungsi  $H(x, y)$  didefinisikan sebagai:

$$H(x, y) = \frac{f'(y)}{2f'(y) - f'(x)} \quad (2.46)$$

Proses iterasi pada modifikasi orde kelima menggunakan formula awal metode Newton biasa,

$$z_n = \psi_3(x_n) \quad (2.47)$$

Hitung  $z_n$  dengan menggunakan metode Newton orde ketiga sebelumnya. Pada metode Newton biasa iterasinya menggunakan satu turunan yaitu  $f'(x_n)$ , maka ditambahkan titik  $y$  untuk perkiraan yang lebih akurat.

$$\psi_3(x) = x - \frac{2f(x)}{f'(x) + f'(y(x))} \quad (2.48)$$

dimana  $y(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ , maka iterasi  $z_n$

$$z_n = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)} \quad (2.49)$$

Hitung  $H(x, y)$ ,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f'(y_n)}{2f'(y_n) - f'(x_n)} \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \quad (2.50)$$

## b. Kasus Kedua

Fungsi  $H(x, y)$  didefinisikan sebagai:

$$H(x, y) = \frac{3f'(x) - f'(y)}{f'(x) + f'(y)} \quad (2.51)$$

Proses iterasi pada modifikasi orde kelima menggunakan formula awal metode Newton biasa,

$$z_n = \psi_3(x_n) \quad (2.52)$$

Hitung  $z_n$  dengan menggunakan rata-rata kebalikan dua turunan pertama  $f'(x_n)$  dan  $f'(y_n)$  untuk perkiraan yang lebih akurat.

$$\psi_3(x) = x - \frac{f(x)}{2} \left[ \frac{1}{f'(x)} + \frac{1}{f'(y(x))} \right] \quad (2.53)$$

dimana  $y(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ , maka iterasi  $z_n$

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{2} \left( \frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(y_n)} \right) \quad (2.54)$$

Hitung  $H(x, y)$ ,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{3f'(x_n) - f'(y_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)} \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \quad (2.55)$$

Berdasarkan konsep indeks efisiensi pada Persamaan (2.76), Metode Newton orde kelima orde konvergensinya ( $p$ ) adalah 5 dan hasil evaluasi fungsinya ( $f_e$ ) adalah 4. Hasilnya diperoleh  $\sqrt[4]{5} = 1.495$ , dimana hasil indeks efisiensinya lebih besar dibanding metode Newton biasa yaitu  $1.495 > 1.414$  yang artinya metode Newton orde kelima lebih efisien dibanding metode Newton biasa.

### 3. Metode Newton Orde Keenam

Beberapa contoh kasus yang memenuhi Persamaan(2.13) dan (2.14):

#### a. Kasus Pertama

Fungsi  $H(x, y)$  didefinisikan sebagai:

$$H(x, y) = \frac{2(f'(y))^2}{(f'(x))^2 - 4f'(x)f'(y) + 5(f'(y))^2} \quad (2.56)$$

Proses iterasi pada modifikasi orde keenam menggunakan formula awal metode Newton biasa,

$$z_n = \psi_3(x_n) \quad (2.57)$$

Hitung  $z_n$  dengan menggunakan metode Newton orde ketiga sebelumnya. Pada metode Newton biasa iterasinya menggunakan satu turunan yaitu  $f'(x_n)$ , maka ditambahkan titik  $y$  untuk perkiraan yang lebih akurat.

$$\psi_3(x) = x - \frac{2f(x)}{f'(x) + f'(y(x))} \quad (2.58)$$

dimana  $y(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ , maka iterasi  $z_n$

$$z_n = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)} \quad (2.59)$$

Hitung  $H(x, y)$ ,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{2(f'(y_n))^2}{(f'(x_n))^2 - 4f'(x_n)f'(y_n) + 5(f'(y_n))^2} \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \quad (2.60)$$

## b. Kasus Kedua

Fungsi  $H(x, y)$  didefinisikan sebagai:

$$H(x, y) = -\frac{2(f'(x))^2}{(f'(x))^2 - 4f'(x)f'(y) + (f'(y))^2} \quad (2.61)$$

Proses iterasi pada modifikasi orde keenam menggunakan formula awal metode Newton biasa,

$$z_n = \psi_3(x_n) \quad (2.62)$$

Hitung  $z_n$  dengan menggunakan rata-rata kebalikan dua

turunan pertama  $f'(x_n)$  dan  $f'(y_n)$  untuk perkiraan yang lebih akurat.

$$\psi_3(x) = x - \frac{f(x)}{2} \left[ \frac{1}{f'(x)} + \frac{1}{f'(y(x))} \right] \quad (2.63)$$

dimana  $y(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ , maka iterasi  $z_n$

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{2} \left( \frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(y_n)} \right) \quad (2.64)$$

Hitung  $H(x, y)$ ,

$$x_{n+1} = z_n + \frac{2f'(x_n)f(z_n)}{(f'(x_n))^2 - 4f'(x_n)f'(y_n) + (f'(y_n))^2} \quad (2.65)$$

Berdasarkan konsep indeks efisiensi pada Persamaan (2.76), Metode Newton orde keenam orde konvergensiya( $p$ ) adalah 6 dan hasil evaluasi fungsinya( $f_e$ ) adalah 4. Hasilnya diperoleh  $\sqrt[4]{6} = 1.565$ , dimana hasil indeks efisiensiya lebih besar dibanding metode Newton biasa yaitu  $1.565 > 1.414$  yang artinya metode Newton orde keenam lebih efisien dibanding metode Newton biasa.

## F. Galat

Galat merupakan selisih nilai hampiran dengan nilai sejati yang menunjukkan seberapa akurat suatu perkiraan atau hasil perhitungan (Munir, 2015). Semakin kecil nilainya maka semakin akurat nilainya. Dalam metode numerik tujuan galat yaitu meminimalkan galat agar hasil perhitungan atau estimasi dapat lebih dipercaya dan digunakan dalam pengambilan keputusan

yang lebih tepat.

Galat ada 2 yaitu galat absolut dan galat relatif absolut. Menurut Munir (2015) galat absolut adalah galat yang dinormalkan dengan membandingkan selisih antara nilai hampiran terhadap nilai sejati itu sendiri sedangkan nilai absolut relatif adalah galat yang dinormalkan terhadap nilai hampiran, yaitu dengan membandingkan selisih galat dengan nilai hampiran yang dihasilkan. Kedua jenis galat ini membantu dalam mengevaluasi seberapa akurat hasil perhitungan.

Ada 2 sumber utama galat dalam perhitungan metode numerik yaitu galat pemotongan dan galat pembulatan. Galat pemotongan adalah galat yang muncul ketika ekspresi matematika yang kompleks disederhanakan dengan menggunakan rumus yang lebih mudah, seperti memotong deret tak hingga menjadi deret yang terbatas (Maharani & Suprpto, 2018). Hal ini mengakibatkan galat karena tidak semua informasi dari bentuk asli dapat dipertahankan. Galat pembulatan adalah galat terjadi saat jumlah digit dalam suatu nilai hampiran dikurangi dengan menghilangkan digit-digit terakhir, saa seperti yang biasa dilakukan dalam proses pembulatan (Maharani & Suprpto, 2018). Pembulatan yang dilakukan secara berulang dalam komputasi numerik dapat meningkatkan galat, sehingga penggunaannya yang berlebihan sebaiknya dihindari untuk menjaga keakuratan hasil. Memahami kedua jenis galat ini membantu dalam memilih metode numerik yang tepat untuk meminimalkan kesalahan dalam hasil perhitungan.

## G. Konvergensi Metode Iteratif

Kekonvergenan suatu metode terbuka dilihat dari hampiran akar barunya yang mendekati akar sejatinya (Munir, 2015). Namun jika hampiran akar baru menjauhi akar sejati, maka hal tersebut dikatakan divergen. Didalam metode terbuka khususnya metode Newton, jika hampiran akarnya konvergen maka tingkat konvergennya sangat cepat. Hal ini juga dipengaruhi oleh pemilihan tebakan awal yang baik agar akarnya dapat diturunkan.

### 1. Orde Konvergensi Metode Terbuka

Munir (2015) iterasi pada metode terbuka dapat ditulis,

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad (2.66)$$

Misal  $g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  dimana  $x_n$  merupakan hampiran terhadap akar sejati  $s$ ,  $s = g(s)$ . Sesuai konsep galat maka terdapat  $s = x_n + \epsilon_n$  dimana  $\epsilon_n$  merupakan galat  $x_n$ .  $g(s)$  pada sekitar  $x_n$  dapat diuraikan ;

$$\begin{aligned} g(s) &= g(x_n) + g'(x_n)(s - x_n) + \frac{1}{2}g''(x_n)(s - x_n)^2 + \dots \\ &= g(x_n) + g'(x_n)\epsilon_n + g''(x_n)\epsilon_n^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.67)$$

Kurangkan Persamaan (2.67) dengan Persamaan (2.66), sehingga

$$g(s) = g(x_n) + g'(x_n)\epsilon_n + g''(x_n)\epsilon_n^2 + \dots$$

$$-x_{n+1} = g(x_n)$$

$$g(s) - x_{n+1} = g'(x_n)\epsilon_n + g''(x_n)\epsilon_n^2 + \dots$$

$$s - x_{n+1} = g'(x_n)\epsilon_n + g''(x_n)\epsilon_n^2 + \dots$$

Misal  $s - x_{n+1} = \epsilon_{n+1}$ , maka

$$\epsilon_{n+1} = g'(x_n)\epsilon_n + g''(x_n)\epsilon_n^2 + \dots \quad (2.68)$$

Pangkat dari  $\epsilon_n$  menunjukkan kecepatan konvergensi dengan langkah iterasi:

- $\epsilon_{n+1} \approx g'(t)\epsilon_n$ , dimana  $x_n < t < x_{n+1}$ , iterasi orde satu
- $\epsilon_{n+1} \approx \frac{1}{2}g''(t_n)\epsilon_n^2$ , dimana  $x_n < t < x_{n+1}$ , iterasi orde dua

## 2. Kriteria Konvergensi Metode Newton

Munir (2015) bentuk umum dari proses iterasi pada metode terbuka adalah sebagai berikut.

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

karena metode Newton, jadi

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Ingat bahwa Syarat agar iterasi konvergen,  $|g'(x)| < 1$ , sehingga

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \\ &= \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Jadi, kekonvergenan metode Newton akan terjadi bila

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1, f'(x) \neq 0$$

### 3. Orde Konvergensi Metode Newton

Munir (2015) turunan pertama dari Persamaan (2.69) adalah sebagai berikut.

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \quad (2.70)$$

Jika  $x_r$  akar dari  $f(x) = 0$ , maka  $f(x_n) = 0$  dan  $g'(x_n) = 0$ . Hal ini menunjukkan bahwa pada metode Newton orde paling sedikitnya adalah dua, dimana turunan keduanya;

$$g''(x_n) = \frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.71)$$

Ganti bentuk Persamaan (2.71) ke bentuk langkah iterasi orde dua.

$$\epsilon_{n+1} = \frac{f''(x_n)\epsilon_n^2}{2f'(x_n)} \quad (2.72)$$

Berdasarkan Persamaan (2.72) berarti:

- Galat pada iterasi baru sebanding dengan kuadrat galat iterasi sebelumnya sehingga metode Newton merupakan metode yang paling cepat menemukan akar jika iterasinya dapat dipastikan konvergen. Misal galat iterasinya 0.001, maka galat iterasi setelahnya sebanding dengan 0.000001.
- Pada setiap iterasi jumlah angka bena berlipat dua.
- Metode Newton disebut metode kuadratik karena orde konvergensinya kuadratik.

Terdapat cara lain untuk mendapatkan orde konvergensi yaitu dengan penurunan rumus Newton dengan bantuan deret Taylor.

Dari Persamaan (2.5) dan dimisalkan  $x_{n+1} = s$  maka  $f(x_{n+1}) = f(s) = 0$  dimana  $s$  akar sejatinya. Ganti  $s$  ke Persamaan (2.5) yaitu:

$$0 = f(x_n) + (s - x_n)f'(x_n) + \frac{(s - x_n)^2 f''(t)}{2} \quad (2.73)$$

Kurangkan dengan Pers (2.6) sehingga,

$$0 = (s - x_{n+1})f'(x_n) + \frac{(s - x_n)^2 f''(t)}{2} \quad (2.74)$$

Misal  $s - x_{n+1} = \epsilon_{n+1}$  dan  $s - x_n = \epsilon_n$ , maka

$$\epsilon_{n+1}f'(x_n) + \frac{\epsilon_n^2 f''(t)}{2} = 0$$

atau

$$\epsilon_{n+1} = \frac{\epsilon_n^2 f''(t)}{2f'(x_n)} \quad (2.75)$$

Nilai Pada Persamaan (2.72) dengan (2.75) sama meskipun  $f''(x_n)$  dan  $f''(t)$  beda karena yang dicari pangkat  $\epsilon_n$ .

## H. Indeks Efisiensi

### Definisi 2.8.1 (Indeks Efisiensi, Esmaili & Rostami, 2014)

Misalkan  $f_e$  merupakan nilai jumlah informasi yang dibutuhkan oleh suatu metode. Informasi tersebut berupa evaluasi fungsi atau salah satu turunannya. Metode efisiensi diukur dengan konsep indeks efisiensi dan didefinisikan sebagai,

$$\rho = p^{1/f_e} \quad (2.76)$$

dimana  $p$  adalah orde konvergensi metode.

Keterangan:

- $\rho$ : Indeks efisiensi
- $f_e$ : Jumlah evaluasi fungsi atau turunannya dalam setiap iterasi
- $p$ : Orde konvergensi metode

Indeks efisiensi digunakan untuk melihat seberapa cepat metode tersebut mencapai solusi penyelesaian dengan evaluasi fungsi yang paling kecil. Semakin besar nilai Indeks efisiensinya maka semakin efisien (Ham, Chun, & Lee, 2008). Contohnya Indeks efisiensi pada metode Newton biasa, pada metode Newton biasa memiliki orde konvergensi kuadratik atau 2. Jumlah evaluasi fungsinya ada 2, jadi  $f_e = 2$  dan  $p = 2$ . substitusikan nilai tersebut ke konsep indeks efisiensi dan diperoleh  $\rho = 2^{1/2} = \sqrt{2} = 1.414$ .

## I. Penelitian yang Relevan

Tabel 2.1. Penelitian yang Relevan

| No | Penulis dan Judul                                                                                                                         | Hasil                                                                                                                   | Persamaan                                                                                                                                                                                  | Perbedaan                               |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1  | Penelitian Ham, Chun, & Lee (2008) dengan judul <i>Some Higher-Order Modifications of Newton's Method for Solving Nonlinear Equations</i> | metode ini lebih cepat dan efisien dibandingkan metode Newton biasa, terutama untuk persamaan tak linier yang kompleks. | mengembangkan metode iteratif tingkat tinggi yang lebih efisien dibandingkan metode Newton biasa untuk menyelesaikan persamaan Tak linier yang berfokus pada peningkatan orde konvergensi. | Fokus pada efisiensi komputasi minimal. |

| No | Penulis dan Judul                                                                                                                                          | Hasil                                                                                                                                                                                                                                          | Persamaan                                                                                                                                                                                  | Perbedaan                                                                                           |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2  | Penelitian Sivakumar & Jayaraman (2019) dengan judul <i>Some New Higher Order Weighted Newton Methods for Solving Nonlinear Equation with Applications</i> | Hasilnya menunjukkan keunggulan dalam hal jumlah iterasi yang sedikit, indeks efisiensi yang tinggi, dan waktu yang dihabiskan oleh prosesor (CPU) lebih singkat sehingga metode tersebut lebih efisien dibandingkan metode Newton yang biasa. | mengembangkan metode iteratif tingkat tinggi yang lebih efisien dibandingkan metode Newton biasa untuk menyelesaikan persamaan Tak linier yang berfokus pada peningkatan orde konvergensi. | Menyajikan tiga metode dengan indeks efisiensi berbeda dan diuji pada tujuh masalah aplikasi nyata. |

| No | Penulis dan Judul                                                                                                                         | Hasil                                                                                                                                                                                                                                        | Persamaan                                                                                                                                                                                  | Perbedaan                                          |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| 3  | Penelitian Alqahtani, Behl, & Kansal (2019) dengan judul <i>Higher-Order Iteration Schemes for Solving Nonlinear Systems of Equations</i> | Hasil uji numerik pada beberapa kasus nyata membuktikan keefektifan metode tersebut dalam menyelesaikan sistem tak linear skala besar dengan performa lebih baik dibandingkan metode lain, tanpa peningkatan signifikan pada biaya komputasi | mengembangkan metode iteratif tingkat tinggi yang lebih efisien dibandingkan metode Newton biasa untuk menyelesaikan persamaan Tak linier yang berfokus pada peningkatan orde konvergensi. | Tanpa peningkatan signifikan pada biaya komputasi. |

| No | Penulis dan Judul                                                                                                         | Hasil                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Persamaan                                                                                                                                                                                  | Perbedaan                                                                                                     |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4  | Penelitian Yasin & Naseem (2018) dengan judul <i>Higher Order Nonlinear Equation Solvers and Their Dynamical Behavior</i> | Uji numerik pada beberapa fungsi tak linear membuktikan bahwa metode ini lebih cepat mencapai solusi tingkat akurasi tinggi dan iterasi lebih sedikit. Selain itu, polynomiografi digunakan untuk memvisualisasikan akar polinomial kompleks sehingga memperlihatkan efisiensi metode melalui ilustrasi grafis. | mengembangkan metode iteratif tingkat tinggi yang lebih efisien dibandingkan metode Newton biasa untuk menyelesaikan persamaan Tak linier yang berfokus pada peningkatan orde konvergensi. | Menggunakan polynomiografi untuk visualisasi akar polinom, lalu dibandingkan dengan Ostrowski, Traub, Halley. |

| No | Penulis dan Judul                                                                                               | Hasil                                                                                                                                                                         | Persamaan                                                                                                                                                                                  | Perbedaan                                                              |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| 5  | Penelitian Deep & Argyros (2023) dengan judul <i>Improved Higher Order Compositions for Nonlinear Equations</i> | Hasil eksperimen numerik menunjukkan bahwa kedua metode ini lebih akurat dan efisien dibandingkan metode konvensional dengan efisiensi yang meningkat dari 1,43 menjadi 1,57. | mengembangkan metode iteratif tingkat tinggi yang lebih efisien dibandingkan metode Newton biasa untuk menyelesaikan persamaan Tak linier yang berfokus pada peningkatan orde konvergensi. | Fokus pada pengurangan evaluasi turunan; peningkatan indeks efisiensi. |

| No | Penulis dan Judul                                                                                                               | Hasil                                                                                                                                                                                                                                                               | Persamaan                                                                                                                                                                                  | Perbedaan                                                   |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 6  | Penelitian Behl & Argyros (2020) dengan judul <i>A New Higher-Order Iterative Scheme for the Solutions of Nonlinear Systems</i> | Hasil eksperimen pada berbagai masalah nyata menunjukkan bahwa metode ini lebih efisien dan stabil dibandingkan metode Ostrowski dan Jarratt, serta memiliki residual error yang lebih rendah. Metode ini terbukti unggul dalam waktu komputasi dan jumlah iterasi. | mengembangkan metode iteratif tingkat tinggi yang lebih efisien dibandingkan metode Newton biasa untuk menyelesaikan persamaan Tak linier yang berfokus pada peningkatan orde konvergensi. | Menggunakan pendekatan ruang Banach dan konstanta Lipschitz |

### **BAB III**

## **METODOLOGI PENELITIAN**

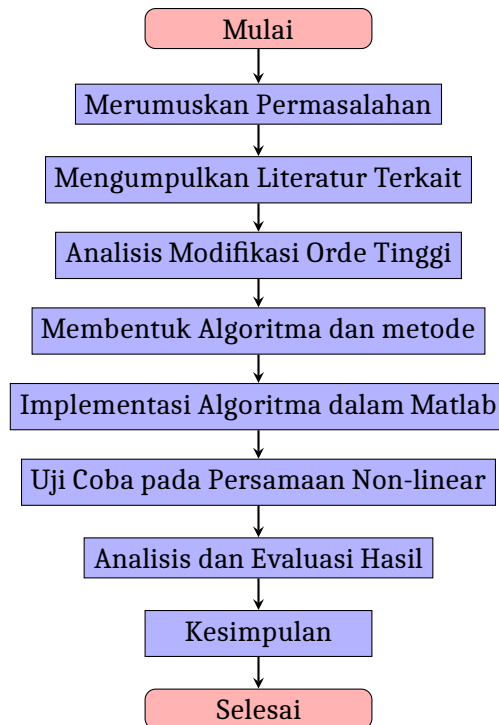
Penulisan tugas akhir ini menggunakan metode studi literatur dimana data dan informasi terkait topik pembahasan tugas akhir ini bersumber dari buku-buku, jurnal, artikel, atau sumber lainnya. Pada tugas akhir ini penulis menggunakan literatur yang bersumber dari jurnal tentang modifikasi metode newton untuk penyelesaian persamaan tak linear. Jurnal ini berjudul "*Some Higher-Order Modifications of Newton's Method for Solving Non linear Equations*", adapun penulisnya yaitu YoonMee Ham, Changbum Chun, dan Sang-Gu Lee.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut.

1. Merumuskan suatu Permasalahan.
2. Mengumpulkan sumber literatur terkait modifikasi tingkat tinggi pada metode newton untuk penyelesaian persamaan tak linear.
3. Membahas tentang modifikasi tingkat tinggi pada metode newton untuk penyelesaian persamaan tak linear dan orde konvergensinya.
4. Memnbentuk algoritma dan metode.
5. Mengaplikasikan suatu bentuk persamaan tak linear dari metode newton kedalam bahasa pemrograman matlab.
6. Menyelesaikan suatu bentuk permasalahan tak linear dari metode newton dengan menggunakan *software* matlab

hingga didapat titik iterasi yang sesuai.

7. Menganalisis hasil akhir suatu bentuk permasalahan tak linear dari metode newton, apakah titik iterasi sesuai atau tidak.
8. Membuat kesimpulan berupa perbandingan orde konvergensi dengan metode newton pada penyelesaian persamaan tak linear.



Gambar 3.1. *Flowchart* Langkah-langkah dalam Penelitian Skripsi

## BAB IV

### Hasil Penelitian dan Pembahasan

#### A. Modifikasi Metode Newton Tingkat Tinggi

Modifikasi metode Newton pada pembahasan ini dilakukan dengan satu tambahan evaluasi fungsi di setiap iterasinya untuk mempercepat konvergensi. Metode Newton adalah salah satu metode pencarian akar persamaan tak linier dengan dua kali evaluasi yaitu  $f(x_n)$  dan  $f'(x_n)$  per iterasi. Metode Newton bersifat kuadratik (derajat konvergenya 2) (Sahid, 2002). Formula iterasi Newton dengan ekspansi deret Taylor diuraikan sebagai berikut.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4.1)$$

Konvergensi dalam metode Newton memang lebih cepat dibanding metode lain, namun perlu pengembangan untuk konvergensi yang lebih tinggi dan efisien. Tingkat tinggi dilakukan dengan meningkatkan orde konvergensi dari kuadratik (orde 2) ke orde yang lebih tinggi dari 2 (Zavalani, 2014). pada pembahasan ini modifikasi metode Newton yang digunakan adalah orde 3, orde 5, dan orde 6. Implementasi pada setiap iterasinya menghitung nilai  $y_n$  dan  $z_n$  sebagai titik evaluasi tambahan. Nilai  $y_n$  dihitung dengan menggunakan formulasi Newton biasa, lalu pada nilai  $z_n$  merupakan hasil fungsi yang dimodifikasi. Penggunaan titik-titik tersebut memungkinkan metode mencapai solusi dengan lebih cepat dan efisien, terbukti dari jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan metode Newton biasa.

## 1. Modifikasi Orde 3

Orde 3 menjadi titik awal yang paling umum dalam pengembangan metode modifikasi karena mampu mencapai konvergensi kubik. Zavalani (2014) menggunakan satu evaluasi turunan pertama dan dua evaluasi fungsi tanpa perlu turunan kedua, namun tetap mencapai konvergensi orde ketiga. Hal ini memberi peningkatan yang signifikan dibanding metode Newton biasa, terutama ketika akar sulit ditemukan atau fungsi memiliki kemiringan tajam. Pada pembahasan ini proses perhitungan numerik pada modifikasi metode Newton orde 3 menggunakan metode Weerakoon Fernando. Hal ini dikarenakan metode ini familiar digunakan untuk penyelesaian persamaan tak linier dan dasar pengembangan tingkat tinggi seperti yang digunakan pada penelitian Ham, Chun, & Lee (2008). Metode ini tidak memerlukan turunan kedua dan terbukti lebih efisien secara numerik dibanding Newton klasik (Weerakoon & Fernando, 2000). Formula dilakukan dengan aturan trapesium yang diuraikan sebagai berikut.

$$\int_{x_n}^x f'(t) dt = \frac{f'(x_n) + f'(x)}{2}(x - x_n) \quad (4.2)$$

dengan

- $f'(t)$  : Turunan pertama fungsi  $f$  terhadap variabel  $t$ , yang merupakan variabel integrasi pada interval.
- $f'(x_n)$  : Nilai turunan pertama fungsi  $f$  pada titik iterasi ke- $n$ .
- $x_n$  : Perkiraan akar pada iterasi ke- $n$ .
- $x$  : Titik baru yang ingin dicari atau diperoleh dari iterasi.

- $\frac{f'(x_n) + f'(x)}{2}$  : Rata-rata nilai turunan pertama pada titik  $x_n$  dan  $x$ .
- $(x - x_n)$  : Lebar interval yang menjadi alas trapesium.

subtitusikan Persamaan (4.2) ke rumus integral, maka

$$f(x) = f(x_n) + \frac{f'(x_n) + f'(x)}{2}(x - x_n) \quad (4.3)$$

karena  $f(x) = 0$  maka diperoleh hasil sebagai berikut.

$$x = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(x)} \quad (4.4)$$

Namun karena  $f'(x)$  belum diketahui, maka dilakukan pendekatan  $f'(x) = f'(y_n)$  dimana  $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  sehingga diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)} \quad (4.5)$$

Modifikasi metode Newton orde 3 memberikan hasil yang lebih cepat dibanding metode Newton biasa dan perhitungannya tidak memerlukan turunan tingkat tinggi. Oleh karena itu, metode ini sangat cocok digunakan dalam banyak kasus praktis yang membutuhkan efisiensi dan kecepatan.

## 2. Modifikasi Orde 4

Orde 4 dikembangkan untuk mendapatkan kecepatan konvergensi lebih tinggi dibanding orde 3, namun dalam praktiknya peningkatan efisiensi tersebut tidak selalu signifikan. Metode orde empat seperti metode Jarratt, tetap memerlukan koreksi yang cukup kompleks dan kadang melibatkan turunan

tingkat dua, sehingga implementasinya menjadi kurang efisien (Chun, 2007).

### 3. Modifikasi Orde 5

Orde lima dipilih berdasarkan efisiensi dan kestabilan iterasi yang dihasilkan relatif sederhana. Menurut Khirallah & Alkhomsan (2023), metode yang dikembangkan memiliki konvergensi orde lima dan tidak memerlukan turunan kedua, hanya menggunakan dua evaluasi fungsi dan dua evaluasi turunan pertama pada setiap iterasi. Formula yang digunakan adalah pengembangan dari metode Weerakoon Fernando pada penelitian Ham, Chun, & Lee (2008) dimana formula diuraikan sebagai berikut.

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4.6)$$

Dimana  $y_n$  merupakan fungsi prediksi. Gunakan metode Weerakoon Fernando untuk meningkatkan orde 3 ke orde 5.

$$z_n = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)} \quad (4.7)$$

Peningkatan orde dilakukan dengan tambahan fungsi koreksi  $H(x, y)$  yaitu:

$$H(x, y) = \frac{f(y_n)}{2f'(y_n) + f'(x_n)} \quad (4.8)$$

maka  $x_{n+1}$ ,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(y_n)}{2f'(y_n) + f'(x_n)} \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \quad (4.9)$$

Metode ini cenderung lebih stabil dibanding metode Newton

modifikasi pada orde dibawahnya dan metode Newton sendiri. Fungsi koreksi digunakan untuk menghindari divergensi dan iterasinya lebih sedikit dibanding metode pada orde dibawahnya.

#### 4. Modifikasi Orde 6

Orde enam mampu memberikan konvergensi yang sangat tinggi dan jumlah iterasi yang relatif sedikit, sehingga cocok untuk diterapkan pada permasalahan yang memerlukan presisi tinggi. Singh, & Gupta (2014) menunjukkan bahwa metode ini mampu menyelesaikan berbagai fungsi tak linier dengan lebih cepat dan akurat dibandingkan metode Newton biasa maupun metode orde enam lainnya. Formula yang digunakan adalah pengembangan dari metode Weerakoon Fernando pada penelitian Ham, Chun, & Lee (2008) dimana formula diuraikan sebagai berikut.

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4.10)$$

Dimana  $y_n$  merupakan fungsi prediksi. Gunakan metode Weerakoon Fernando untuk meningkatkan orde 3 ke orde 6.

$$z_n = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)} \quad (4.11)$$

Peningkatan orde dilakukan dengan tambahan fungsi koreksi  $H(x, y)$  yaitu:

$$H(x, y) = \frac{2f'^2(y)}{f'^2(x) - 4f'(x)f'(y) + 5f'^2(y)} \quad (4.12)$$

maka  $x_{n+1}$ ,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{2f'^2(y)}{f'^2(x) - 4f'(x)f'(y) + 5f'^2(y)} \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \quad (4.13)$$

Metode ini memiliki tingkat efisiensi yang tinggi dan cocok digunakan untuk fungsi tak linier kompleks yang memerlukan konvergensi cepat dalam jumlah iterasi minimal. Lebih stabil dibanding metode Newton modifikasi pada orde dibawahnya dan metode Newton sendiri. Fungsi koreksi digunakan untuk menghindari divergensi dan iterasinya lebih sedikit dibanding metode pada orde dibawahnya.

Modifikasi metode Newton orde 3 yaitu metode Weerakoon Fernando konvergensinya lebih cepat dibanding metode newton biasa (Weerakoon & Fernando, 2000). Pada modifikasi metode Newton orde 4 yaitu metode Jarrat konvergensinya lebih cepat dibanding metode newton biasa, namun tetap memerlukan koreksi yang cukup kompleks dan kadang melibatkan turunan tingkat dua (Chun, 2007). Modifikasi metode Newton orde 5 memiliki konvergensi yang jauh lebih cepat dibandingkan metode Newton bias karena orde konvergensinya lebih tinggi. Modifikasi metode Newton orde orde 6 menunjukkan konvergensi yang lebih cepat lagi daripada metode Newton biasa karena orde konvergensinya jauh lebih tinggi (Ham, Chun, & Lee, 2008).

Hasil perhitungan dalam penelitian terdahulu seperti oleh Ham, Chun, & Lee (2008), yang menunjukkan bahwa metode Newton modifikasi dengan orde tersebut memberikan hasil yang optimal dalam jumlah iterasi dan evaluasi fungsi, tanpa menurunkan kestabilan iterasi. Hal ini juga sebagai acuan untuk memilih modifikasi metode Newton orde 3, 5, dan 6.

## B. Perhitungan Numerik

Pada pembahasan ini, akan disimulasikan perhitungan numerik dengan bantuan *software* Matlab versi R2013a. Perhitungan ini dilakukan untuk membandingkan metode Newton biasa dengan modifikasi metode Newton orde 3, orde 5, dan orde 6. Hasil perbandingannya akan diperlihatkan metode mana yang lebih efisien dan konvergensinya lebih cepat. Disini pada persamaan metode Newton biasa (orde 2) menggunakan formulasi;

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Pada modifikasi orde 3, perhitungannya menggunakan formulasi;

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)}$$

Di orde 5, perhitungannya menggunakan formulasi;

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(y_n)}{2f'(y_n) + f'(x_n)} \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}$$

Orde 6, perhitungannya menggunakan formulasi;

$$x_{n+1} = z_n - \frac{2f'^2(y)}{f'^2(x) - 4f'(x)f'(y) + 5f'^2(y)} \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}$$

Hasil modifikasi metode Newton orde 3, orde 5, dan orde 6 akan diuji pada beberapa fungsi tak linier dengan bantuan *software* Matlab versi R2013a. Pada proses pengerjaannya menggunakan nilai toleransi ( $\epsilon$ ) dan  $x_0$  sebagai hampiran awalnya dengan fungsi:

|                                                         |              |                                |
|---------------------------------------------------------|--------------|--------------------------------|
| $f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10$                              | $x_0 = 1,5$  | $\epsilon = 1 \times 10^{-16}$ |
| $f_2(x) = \sin^2(x) - x^2 + 1$                          | $x_0 = 1,5$  | $\epsilon = 1 \times 10^{-14}$ |
| $f_3(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$                           | $x_0 = 1,5$  | $\epsilon = 1 \times 10^{-14}$ |
| $f_4(x) = \cos(x) - x$                                  | $x_0 = 1,0$  | $\epsilon = 1 \times 10^{-14}$ |
| $f_5(x) = xe^{x^2} - \sin^2(x) + 3\cos(x) + 5$          | $x_0 = -1,0$ | $\epsilon = 1 \times 10^{-14}$ |
| $f_6(x) = x^2 \sin^2(x) + e^{x^2 \cos(x) \sin(x)} - 28$ | $x_0 = 4,4$  | $\epsilon = 1 \times 10^{-10}$ |
| $f_7(x) = e^{x^2+7x-30} - 1$                            | $x_0 = 3,2$  | $\epsilon = 1 \times 10^{-14}$ |
| $f_8(x) = (x^3 + 4x^2 - 10)^2$                          | $x_0 = 1,37$ | $\epsilon = 1 \times 10^{-12}$ |
| $f_9(x) = (x - 1)^2 e^x$                                | $x_0 = 1,01$ | $\epsilon = 1 \times 10^{-12}$ |

dengan

- $x_0$  : Hampiran awal (tebakan awal) yang digunakan sebagai titik permulaan iterasi.
- $\epsilon$  : Galat atau toleransi error yang ditentukan sebagai batas berhenti iterasi.

Sembilan fungsi tersebut diuji, kemudian dianalisis hasilnya lalu diambil kesimpulan. Berdasarkan perhitungan numerik dari beberapa fungsi tersebut, maka diperoleh:

### **Fungsi ke-1:**

Berikut ini hasil iterasi dari keempat metode yaitu metode Newton biasa (orde 2), modifikasi orde 3, orde 5, dan orde 6. Tabel-tabel di bawah menunjukkan nilai hampiran akar dan nilai fungsi pada setiap iterasi.

Tabel 4.1. Iterasi metode Newton Orde 2 pada Fungsi ke-1

| Iterasi | $x$                | $f(x)$                |
|---------|--------------------|-----------------------|
| 0       | 1.5000000000000000 | $2.38 \times 10^0$    |
| 1       | 1.3733333333333333 | $1.34 \times 10^{-1}$ |
| 2       | 1.36526201487463   | $5.28 \times 10^{-4}$ |
| 3       | 1.36523001391615   | $8.29 \times 10^{-9}$ |
| 4       | 1.36523001341410   | $0.00 \times 10^0$    |

Kriteria konvergensi pada fungsi ke-1 orde 2 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $0.00 \times 10^0$ . Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.2. Iterasi metode Newton Orde 3 pada Fungsi ke-1

| Iterasi | $x$                | $f(x)$                 |
|---------|--------------------|------------------------|
| 0       | 1.5000000000000000 | $2.38 \times 10^0$     |
| 1       | 1.36579949597116   | $9.41 \times 10^{-3}$  |
| 2       | 1.36523001346405   | $8.25 \times 10^{-10}$ |
| 3       | 1.36523001341410   | $0.00 \times 10^0$     |

Kriteria konvergensi pada fungsi ke-1 orde 3 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $0.00 \times 10^0$ . Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.3. Iterasi metode Newton Orde 5 pada Fungsi ke-1

| Iterasi | $x$                | $f(x)$                |
|---------|--------------------|-----------------------|
| 0       | 1.5000000000000000 | $2.38 \times 10^0$    |
| 1       | 1.36530217922023   | $1.19 \times 10^{-3}$ |
| 2       | 1.36523001341410   | $0.00 \times 10^0$    |

Kriteria konvergensi fungsi ke-1 pada orde 5 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $0.00 \times 10^0$  (mendekati nol hingga presisi komputasi). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.4. Iterasi metode Newton Orde 6 pada Fungsi ke-1

| Iterasi | $x$                | $f(x)$                 |
|---------|--------------------|------------------------|
| 0       | 1.5000000000000000 | $2.38 \times 10^0$     |
| 1       | 1.36515365313726   | $-1.26 \times 10^{-3}$ |
| 2       | 1.36523001341410   | $0.00 \times 10^0$     |

Kriteria konvergensi pada fungsi ke-1 orde 6 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $0.00 \times 10^0$  (mendekati nol hingga presisi komputasi). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

**Hasil akhir:**

Orde 2 : 1.36523001341410 (iterasi: 4)

Orde 3 : 1.36523001341410 (iterasi: 3)

Orde 5 : 1.36523001341410 (iterasi: 2)

Orde 6 : 1.36523001341410 (iterasi: 2)

Berdasarkan hasil perhitungan numerik pada fungsi ke 1 dengan nilai toleransi  $\epsilon = 1 \times 10^{-16}$  dan  $x_0 = 1.5$  yang disimulasikan di empat metode tersebut, hasilnya fungsi tersebut konvergen. Fungsi ke 1 konvergen pada akar  $x = 1.36523001341410$  di semua metode. Efisiensi iterasi pada metode Newton biasa (orde 2) membutuhkan 4 iterasi, pada modifikasi orde 3 membutuhkan iterasi sebanyak 3, pada modifikasi orde 5 membutuhkan 2 iterasi, dan pada modifikasi orde 6 membutuhkan 2 iterasi. Hal ini menunjukkan bahwa metode Newton dengan orde tinggi (3, 5, 6) menghasilkan konvergensi yang lebih cepat dilihat dari jumlah iterasi dibandingkan metode Newton biasa.

### Fungsi ke-2:

Berikut ini hasil iterasi dari keempat metode yaitu metode Newton biasa (orde 2), modifikasi orde 3, orde 5, dan orde 6. Tabel-tabel di bawah menunjukkan nilai hampiran akar dan nilai fungsi pada setiap iterasi.

Tabel 4.5. Iterasi metode Newton Orde 2 pada Fungsi ke-2

| Iterasi | $x$                | $f(x)$                 |
|---------|--------------------|------------------------|
| 0       | 1.5000000000000000 | $-2.55 \times 10^{-1}$ |
| 1       | 1.41080291847902   | $-1.57 \times 10^{-2}$ |

Bersambung ke halaman berikutnya

Tabel 4.5 – lanjutan dari halaman sebelumnya

| Iterasi | $x$              | $f(x)$                  |
|---------|------------------|-------------------------|
| 2       | 1.40452259657850 | $-7.68 \times 10^{-5}$  |
| 3       | 1.40449164896582 | $-1.86 \times 10^{-9}$  |
| 4       | 1.40449164821534 | $-4.44 \times 10^{-16}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-2 pada orde 2 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $-4.44 \times 10^{-16}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi, dan sudah lebih kecil dari  $\epsilon$ ). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.6. Iterasi metode Newton Orde 3 pada Fungsi ke-2

| Iterasi | $x$                | $f(x)$                  |
|---------|--------------------|-------------------------|
| 0       | 1.5000000000000000 | $-2.55 \times 10^{-1}$  |
| 1       | 1.40495453090374   | $-1.15 \times 10^{-3}$  |
| 2       | 1.40449164828052   | $-1.62 \times 10^{-10}$ |
| 3       | 1.40449164821534   | $3.33 \times 10^{-16}$  |

Kriteria konvergensi fungsi ke-2 pada orde 3 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $3.33 \times 10^{-16}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi, dan sudah lebih kecil dari  $\epsilon$ ). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi

$(|f(x_n)| < \epsilon)$  yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.7. Iterasi metode Newton Orde 5 pada Fungsi ke-2

| Iterasi | $x$                | $f(x)$                 |
|---------|--------------------|------------------------|
| 0       | 1.5000000000000000 | $-2.55 \times 10^{-1}$ |
| 1       | 1.40455675129622   | $-1.62 \times 10^{-4}$ |
| 2       | 1.40449164821534   | $3.33 \times 10^{-16}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-2 pada orde 5 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini  $(x_n)$  lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $3.33 \times 10^{-16}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi, dan sudah lebih kecil dari  $\epsilon$ ). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi  $(|f(x_n)| < \epsilon)$  yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.8. Iterasi metode Newton Orde 6 pada Fungsi ke-2

| Iterasi | $x$                | $f(x)$                  |
|---------|--------------------|-------------------------|
| 0       | 1.5000000000000000 | $-2.55 \times 10^{-1}$  |
| 1       | 1.40442237594038   | $1.72 \times 10^{-4}$   |
| 2       | 1.40449164821534   | $-4.44 \times 10^{-16}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-2 pada orde 6 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini  $(x_n)$  lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $-4.44 \times 10^{-16}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi, dan sudah lebih kecil dari  $\epsilon$ ). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi

$(|f(x_n)| < \epsilon)$  yang menjadi batas penghentian utama.

**Hasil akhir:**

Orde 2 : 1.40449164821534 (iterasi: 4)

Orde 3 : 1.40449164821534 (iterasi: 3)

Orde 5 : 1.40449164821534 (iterasi: 2)

Orde 6 : 1.40449164821534 (iterasi: 2)

Berdasarkan hasil perhitungan numerik pada fungsi ke 2 dengan nilai toleransi  $\epsilon = 1 \times 10^{-14}$  dan  $x_0 = 1.5$  yang disimulasikan di empat metode tersebut, hasilnya fungsi tersebut konvergen. Fungsi ke 2 konvergen pada akar  $x = 1.40449164821534$  di semua metode. Efisiensi iterasi pada metode Newton biasa (orde 2) membutuhkan 4 iterasi, pada modifikasi orde 3 membutuhkan iterasi sebanyak 3, pada modifikasi orde 5 membutuhkan 2 iterasi, dan pada modifikasi orde 6 membutuhkan 2 iterasi. Hal ini menunjukkan bahwa metode Newton dengan orde tinggi (3, 5, 6) menghasilkan konvergensi yang lebih cepat dilihat dari jumlah iterasi dibandingkan metode Newton biasa.

**Fungsi ke-3:**

Berikut ini hasil iterasi dari keempat metode yaitu metode Newton biasa (orde 2), modifikasi orde 3, orde 5, dan orde 6. Tabel-tabel di bawah menunjukkan nilai hampiran akar dan nilai fungsi pada setiap iterasi.

Tabel 4.9. Iterasi metode Newton Orde 2 pada Fungsi ke-3

| Iterasi | $x$                | $f(x)$                  |
|---------|--------------------|-------------------------|
| 0       | 1.5000000000000000 | $-4.73 \times 10^0$     |
| 1       | 0.44421745996289   | $-6.95 \times 10^{-1}$  |
| 2       | 0.25499815975820   | $9.57 \times 10^{-3}$   |
| 3       | 0.25752968467397   | $2.27 \times 10^{-6}$   |
| 4       | 0.25753028543983   | $1.27 \times 10^{-13}$  |
| 5       | 0.25753028543986   | $-4.44 \times 10^{-16}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-3 pada orde 2 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $-4.44 \times 10^{-16}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi, dan sudah lebih kecil dari  $\epsilon$ ). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.10. Iterasi metode Newton Orde 3 pada Fungsi ke-3

| Iterasi | $x$                | $f(x)$                  |
|---------|--------------------|-------------------------|
| 0       | 1.5000000000000000 | $-4.73 \times 10^0$     |
| 1       | 0.33920875122715   | $-3.06 \times 10^{-1}$  |
| 2       | 0.25755096061698   | $-7.81 \times 10^{-5}$  |
| 3       | 0.25753028543986   | $-1.33 \times 10^{-15}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-3 pada orde 3 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $-1.33 \times 10^{-15}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi, dan sudah lebih kecil dari  $\epsilon$ ).

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.11. Iterasi metode Newton Orde 5 pada Fungsi ke-3

| Iterasi | $x$                | $f(x)$                 |
|---------|--------------------|------------------------|
| 0       | 1.5000000000000000 | $-4.73 \times 10^0$    |
| 1       | 0.27513031355121   | $-6.64 \times 10^{-2}$ |
| 2       | 0.25753028477861   | $2.50 \times 10^{-9}$  |
| 3       | 0.25753028543986   | $6.66 \times 10^{-16}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-3 pada orde 5 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $6.66 \times 10^{-16}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi, dan sudah lebih kecil dari  $\epsilon$ ). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.12. Iterasi metode Newton Orde 6 pada Fungsi ke-3

| Iterasi | $x$                | $f(x)$                 |
|---------|--------------------|------------------------|
| 0       | 1.5000000000000000 | $-4.73 \times 10^0$    |
| 1       | 0.23685001376999   | $7.83 \times 10^{-2}$  |
| 2       | 0.25753028673146   | $-4.88 \times 10^{-9}$ |
| 3       | 0.25753028543986   | $6.66 \times 10^{-16}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-3 pada orde 6 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu

$|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $6.66 \times 10^{-16}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi, dan sudah lebih kecil dari  $\epsilon$ ). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

#### **Hasil akhir:**

Orde 2 : 0.25753028543986 (iterasi: 5)

Orde 3 : 0.25753028543986 (iterasi: 3)

Orde 5 : 0.25753028543986 (iterasi: 3)

Orde 6 : 0.25753028543986 (iterasi: 3)

Berdasarkan hasil perhitungan numerik pada fungsi ke 3 dengan nilai toleransi  $\epsilon = 1 \times 10^{-14}$  dan  $x_0 = 1.5$  yang disimulasikan di empat metode tersebut, hasilnya fungsi tersebut konvergen. Fungsi ke 3 konvergen pada akar  $x = 0.25753028543986$  di semua metode. Efisiensi iterasi pada metode Newton biasa (orde 2) membutuhkan 5 iterasi, pada modifikasi orde 3 membutuhkan iterasi sebanyak 3, pada modifikasi orde 5 membutuhkan 3 iterasi, dan pada modifikasi orde 6 membutuhkan 3 iterasi. Hal ini menunjukkan bahwa metode Newton dengan orde tinggi (3, 5, 6) menghasilkan konvergensi yang lebih cepat dilihat dari jumlah iterasi dibandingkan metode Newton biasa.

#### **Fungsi ke-4:**

Berikut ini hasil iterasi dari keempat metode yaitu metode Newton biasa (orde 2), modifikasi orde 3, orde 5, dan orde 6. Tabel-tabel di bawah menunjukkan nilai hampiran akar dan nilai fungsi pada setiap iterasi.

Tabel 4.13. Iterasi metode Newton Orde 2 pada Fungsi ke-4

| Iterasi | $x$                | $f(x)$                  |
|---------|--------------------|-------------------------|
| 0       | 1.0000000000000000 | $-4.60 \times 10^{-1}$  |
| 1       | 0.75036386784024   | $-1.89 \times 10^{-2}$  |
| 2       | 0.73911289091136   | $-4.65 \times 10^{-5}$  |
| 3       | 0.73908513338528   | $-2.85 \times 10^{-10}$ |
| 4       | 0.73908513321516   | 0.00                    |

Kriteria konvergensi fungsi ke-4 pada orde 2 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai 0.00 (mendekati nol hingga presisi komputasi). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.14. Iterasi metode Newton Orde 3 pada Fungsi ke-4

| Iterasi | $x$                | $f(x)$                 |
|---------|--------------------|------------------------|
| 0       | 1.0000000000000000 | $-4.60 \times 10^{-1}$ |
| 1       | 0.73905839044499   | $4.48 \times 10^{-5}$  |
| 2       | 0.73908513321516   | $4.44 \times 10^{-16}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-4 pada orde 3 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $4.44 \times 10^{-16}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi, dan sudah lebih kecil dari  $\epsilon$ ). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi

$(|f(x_n)| < \epsilon)$  yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.15. Iterasi metode Newton Orde 5 pada Fungsi ke-4

| Iterasi | $x$                | $f(x)$                 |
|---------|--------------------|------------------------|
| 0       | 1.0000000000000000 | $-4.60 \times 10^{-1}$ |
| 1       | 0.73908259621252   | $4.25 \times 10^{-6}$  |
| 2       | 0.73908513321516   | $0.00 \times 10^0$     |

Kriteria konvergensi fungsi ke-4 pada orde 5 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini  $(x_n)$  lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $0.00 \times 10^0$  (mendekati nol hingga presisi komputasi). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi  $(|f(x_n)| < \epsilon)$  yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.16. Iterasi metode Newton Orde 6 pada Fungsi ke-4

| Iterasi | $x$                | $f(x)$                 |
|---------|--------------------|------------------------|
| 0       | 1.0000000000000000 | $-4.60 \times 10^{-1}$ |
| 1       | 0.73908779029121   | $-4.45 \times 10^{-6}$ |
| 2       | 0.73908513321516   | 0.00                   |

Kriteria konvergensi fungsi ke-4 pada orde 6 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini  $(x_n)$  lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai 0.00 (mendekati nol hingga presisi komputasi). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi  $(|f(x_n)| < \epsilon)$  yang menjadi batas penghentian utama.

**Hasil akhir:**

- Orde 2 : 0.73908513321516 (iterasi: 4)
- Orde 3 : 0.73908513321516 (iterasi: 2)
- Orde 5 : 0.73908513321516 (iterasi: 2)
- Orde 6 : 0.73908513321516 (iterasi: 2)

Berdasarkan hasil perhitungan numerik pada fungsi ke 4 dengan nilai toleransi  $\epsilon = 1 \times 10^{-14}$  dan  $x_0 = 1.0$  yang disimulasikan di empat metode tersebut, hasilnya fungsi tersebut konvergen. Fungsi ke 4 konvergen pada akar  $x = 0.73908513321516$  di semua metode. Efisiensi iterasi pada metode Newton biasa (orde 2) membutuhkan 4 iterasi, pada modifikasi orde 3 membutuhkan iterasi sebanyak 2, pada modifikasi orde 5 membutuhkan 2 iterasi, dan pada modifikasi orde 6 membutuhkan 2 iterasi. Hal ini menunjukkan bahwa metode Newton dengan orde tinggi (3, 5, 6) menghasilkan konvergensi yang lebih cepat dilihat dari jumlah iterasi dibandingkan metode Newton biasa.

**Fungsi ke-5:**

Berikut ini hasil iterasi dari keempat metode yaitu metode Newton biasa (orde 2), modifikasi orde 3, orde 5, dan orde 6. Tabel-tabel di bawah menunjukkan nilai hampiran akar dan nilai fungsi pada setiap iterasi.

Tabel 4.17. Iterasi metode Newton Orde 2 pada Fungsi ke-5

| Iterasi | $x$                | $f(x)$             |
|---------|--------------------|--------------------|
| 0       | -1.000000000000000 | $3.19 \times 10^0$ |

Lanjut di halaman berikutnya

Tabel 4.17 – lanjutan dari halaman sebelumnya

| Iterasi | $x$               | $f(x)$                  |
|---------|-------------------|-------------------------|
| 1       | -1.27566434572505 | $-1.54 \times 10^0$     |
| 2       | -1.21442181437129 | $-1.39 \times 10^{-1}$  |
| 3       | -1.20771659575082 | $-1.40 \times 10^{-3}$  |
| 4       | -1.20764783423452 | $-1.44 \times 10^{-7}$  |
| 5       | -1.20764782713092 | $-2.66 \times 10^{-15}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-5 pada orde 2 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $-2.66 \times 10^{-15}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi, dan sudah lebih kecil dari  $\epsilon$ ). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.18. Iterasi metode Newton Orde 3 pada Fungsi ke-5

| Iterasi | $x$                | $f(x)$                  |
|---------|--------------------|-------------------------|
| 0       | -1.000000000000000 | $3.19 \times 10^0$      |
| 1       | -1.17422082612775  | $6.46 \times 10^{-1}$   |
| 2       | -1.20752205662909  | $2.55 \times 10^{-3}$   |
| 3       | -1.20764782712444  | $1.32 \times 10^{-10}$  |
| 4       | -1.20764782713092  | $-2.66 \times 10^{-15}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-5 pada orde 3 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $-2.66 \times 10^{-15}$  (mendekati

nol hingga presisi komputasi, dan sudah lebih kecil dari  $\epsilon$ ). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.19. Iterasi metode Newton Orde 5 pada Fungsi ke-5

| Iterasi | $x$                 | $f(x)$                 |
|---------|---------------------|------------------------|
| 0       | -1.0000000000000000 | $3.19 \times 10^0$     |
| 1       | -1.22824103996945   | $-4.31 \times 10^{-1}$ |
| 2       | -1.20764956660896   | $-3.53 \times 10^{-5}$ |
| 3       | -1.20764782713092   | $3.55 \times 10^{-15}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-5 pada orde 5 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $3.55 \times 10^{-15}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi, dan sudah lebih kecil dari  $\epsilon$ ). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.20. Iterasi metode Newton Orde 6 pada Fungsi ke-5

| Iterasi | $x$                 | $f(x)$                 |
|---------|---------------------|------------------------|
| 0       | -1.0000000000000000 | $3.19 \times 10^0$     |
| 1       | -1.19509369634905   | $2.50 \times 10^{-1}$  |
| 2       | -1.20764758710788   | $4.87 \times 10^{-6}$  |
| 3       | -1.20764782713092   | $3.55 \times 10^{-15}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-5 pada orde 6 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi

saat ini  $(x_n)$  lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $3.55 \times 10^{-15}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi, dan sudah lebih kecil dari  $\epsilon$ ). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

**Hasil akhir:**

Orde 2 :  $-1.20764782713092$  (iterasi: 5)

Orde 3 :  $-1.20764782713092$  (iterasi: 4)

Orde 5 :  $-1.20764782713092$  (iterasi: 3)

Orde 6 :  $-1.20764782713092$  (iterasi: 3)

Berdasarkan hasil perhitungan numerik pada fungsi ke 5 dengan nilai toleransi  $\epsilon = 1 \times 10^{-14}$  dan  $x_0 = -1.0$  yang disimulasikan di empat metode tersebut, hasilnya fungsi tersebut konvergen. Fungsi ke 5 konvergen pada akar  $x = -1.20764782713092$  di semua metode. Efisiensi iterasi pada metode Newton biasa (orde 2) membutuhkan 5 iterasi, pada modifikasi orde 3 membutuhkan iterasi sebanyak 4, pada modifikasi orde 5 membutuhkan 3 iterasi, dan pada modifikasi orde 6 membutuhkan 3 iterasi. Hal ini menunjukkan bahwa metode Newton dengan orde tinggi (3, 5, 6) menghasilkan konvergensi yang lebih cepat dilihat dari jumlah iterasi dibandingkan metode Newton biasa.

**Fungsi ke-6:**

Berikut ini hasil iterasi dari keempat metode yaitu metode Newton biasa (orde 2), modifikasi orde 3, orde 5, dan orde 6.

Tabel-tabel di bawah menunjukkan nilai hampiran akar dan nilai fungsi pada setiap iterasi.

Tabel 4.21. Iterasi metode Newton Orde 2 pada Fungsi ke-6

| Iterasi | $x$               | $f(x)$                 |
|---------|-------------------|------------------------|
| 0       | 4.400000000000000 | $2.77 \times 10^2$     |
| 1       | 4.47377203711981  | $9.00 \times 10^1$     |
| 2       | 4.53219274917992  | $2.93 \times 10^1$     |
| 3       | 4.57772609791689  | $8.83 \times 10^0$     |
| 4       | 4.60776030753977  | $2.07 \times 10^0$     |
| 5       | 4.62022844479757  | $2.38 \times 10^{-1}$  |
| 6       | 4.62206852779722  | $4.44 \times 10^{-3}$  |
| 7       | 4.62210415047974  | $1.63 \times 10^{-6}$  |
| 8       | 4.62210416355284  | $2.45 \times 10^{-13}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-6 pada orde 2 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $2.45 \times 10^{-13}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi, dan sudah lebih kecil dari  $\epsilon$ ). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.22. Iterasi metode Newton Orde 3 pada Fungsi ke-6

| Iterasi | $x$               | $f(x)$             |
|---------|-------------------|--------------------|
| 0       | 4.400000000000000 | $2.77 \times 10^2$ |
| 1       | 4.50463324556633  | $5.15 \times 10^1$ |

Bersambung ke halaman berikutnya

Tabel 4.22 – lanjutan dari halaman sebelumnya

| Iterasi | $x$              | $f(x)$                 |
|---------|------------------|------------------------|
| 2       | 4.57737201633699 | $8.93 \times 10^0$     |
| 3       | 4.61597940189235 | $8.12 \times 10^{-1}$  |
| 4       | 4.62207573586692 | $3.54 \times 10^{-3}$  |
| 5       | 4.62210416354971 | $3.89 \times 10^{-10}$ |
| 6       | 4.62210416355284 | $2.49 \times 10^{-14}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-6 pada orde 3 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini  $(x_n)$  lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $2.49 \times 10^{-14}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi, dan sudah sangat dekat dengan atau lebih kecil dari  $\epsilon$ ). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.23. Iterasi metode Newton Orde 5 pada Fungsi ke-6

| Iterasi | $x$              | $f(x)$                 |
|---------|------------------|------------------------|
| 0       | 4.40000000000000 | $2.77 \times 10^2$     |
| 1       | 4.48180977215513 | $7.83 \times 10^1$     |
| 2       | 4.54793736372371 | $2.04 \times 10^1$     |
| 3       | 4.60218414040774 | $3.05 \times 10^0$     |
| 4       | 4.62179516438094 | $3.86 \times 10^{-2}$  |
| 5       | 4.62210416352740 | $3.17 \times 10^{-9}$  |
| 6       | 4.62210416355284 | $2.49 \times 10^{-14}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-6 pada orde 5 memenuhi

kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini  $(x_n)$  lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $2.49 \times 10^{-14}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi, dan sudah sangat dekat dengan atau lebih kecil dari  $\epsilon$ ). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.24. Iterasi metode Newton Orde 6 pada Fungsi ke-6

| Iterasi | $x$               | $f(x)$                 |
|---------|-------------------|------------------------|
| 0       | 4.400000000000000 | $2.77 \times 10^2$     |
| 1       | 4.59197258440671  | $5.14 \times 10^0$     |
| 2       | 4.62358674954492  | $-1.82 \times 10^{-1}$ |
| 3       | 4.62210417723437  | $-1.70 \times 10^{-6}$ |
| 4       | 4.62210416355284  | $2.49 \times 10^{-14}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-6 pada orde 6 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini  $(x_n)$  lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $2.49 \times 10^{-14}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi, dan sudah sangat dekat dengan atau lebih kecil dari  $\epsilon$ ). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

**Hasil akhir:**

Orde 2 : 4.62210416355284 (iterasi: 8)

Orde 3 : 4.62210416355284 (iterasi: 6)

Orde 5 : 4.62210416355284 (iterasi: 6)

Orde 6 : 4.62210416355284 (iterasi: 4)

Berdasarkan hasil perhitungan numerik pada fungsi ke 6 dengan nilai toleransi  $\epsilon = 1 \times 10^{-10}$  dan  $x_0 = 4.4$  yang disimulasikan di empat metode tersebut, hasilnya fungsi tersebut konvergen. Fungsi ke 6 konvergen pada akar  $x = 4.62210416355284$  di semua metode. Efisiensi iterasi pada metode Newton biasa (orde 2) membutuhkan 8 iterasi, pada modifikasi orde 3 membutuhkan iterasi sebanyak 6, pada modifikasi orde 5 membutuhkan 6 iterasi, dan pada modifikasi orde 6 membutuhkan 4 iterasi. Hal ini menunjukkan bahwa metode Newton dengan orde tinggi (3, 5, 6) menghasilkan konvergensi yang lebih cepat dilihat dari jumlah iterasi dibandingkan metode Newton biasa.

**Fungsi ke-7:**

Berikut ini hasil iterasi dari keempat metode yaitu metode Newton biasa (orde 2), modifikasi orde 3, orde 5, dan orde 6. Tabel-tabel di bawah menunjukkan nilai hampiran akar dan nilai fungsi pada setiap iterasi.

Tabel 4.25. Iterasi metode Newton Orde 2 pada Fungsi ke-7

| Iterasi | $x$                | $f(x)$             |
|---------|--------------------|--------------------|
| 0       | 3.2000000000000000 | $1.30 \times 10^1$ |
| 1       | 3.13069860220570   | $4.56 \times 10^0$ |

Bersambung ke halaman berikutnya

Tabel 4.25 – lanjutan dari halaman sebelumnya

| Iterasi | $x$               | $f(x)$                 |
|---------|-------------------|------------------------|
| 2       | 3.06884647500146  | $1.46 \times 10^0$     |
| 3       | 3.02368434095726  | $3.61 \times 10^{-1}$  |
| 4       | 3.00334148505260  | $4.44 \times 10^{-2}$  |
| 5       | 3.00007239451254  | $9.42 \times 10^{-4}$  |
| 6       | 3.00000003445874  | $4.48 \times 10^{-7}$  |
| 7       | 3.000000000000001 | $9.95 \times 10^{-14}$ |
| 8       | 3.000000000000000 | $0.00 \times 10^0$     |

Kriteria konvergensi fungsi ke-7 pada orde 2 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $0.00 \times 10^0$  (mendekati nol hingga presisi komputasi). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.26. Iterasi metode Newton Orde 3 pada Fungsi ke-7

| Iterasi | $x$               | $f(x)$                |
|---------|-------------------|-----------------------|
| 0       | 3.200000000000000 | $1.30 \times 10^1$    |
| 1       | 3.10049242902473  | $2.73 \times 10^0$    |
| 2       | 3.02548615748884  | $3.94 \times 10^{-1}$ |
| 3       | 3.00077357253828  | $1.01 \times 10^{-2}$ |
| 4       | 3.00000002660757  | $3.46 \times 10^{-7}$ |
| 5       | 3.000000000000000 | $0.00 \times 10^0$    |

Kriteria konvergensi fungsi ke-7 pada orde 3 memenuhi

kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini  $(x_n)$  lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $0.00 \times 10^0$  (mendekati nol hingga presisi komputasi). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.27. Iterasi metode Newton Orde 5 pada Fungsi ke-7

| Iterasi | $x$                | $f(x)$                |
|---------|--------------------|-----------------------|
| 0       | 3.2000000000000000 | $1.30 \times 10^1$    |
| 1       | 3.13072443615862   | $4.57 \times 10^0$    |
| 2       | 3.05426307938603   | $1.03 \times 10^0$    |
| 3       | 3.00397930615560   | $5.31 \times 10^{-2}$ |
| 4       | 3.00000018473209   | $2.40 \times 10^{-6}$ |
| 5       | 3.0000000000000000 | $0.00 \times 10^0$    |

Kriteria konvergensi fungsi ke-7 pada orde 5 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini  $(x_n)$  lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $0.00 \times 10^0$  (mendekati nol hingga presisi komputasi). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.28. Iterasi metode Newton Orde 6 pada Fungsi ke-7

| Iterasi | $x$                | $f(x)$                  |
|---------|--------------------|-------------------------|
| 0       | 3.2000000000000000 | $1.30 \times 10^1$      |
| 1       | 3.01501561723250   | $2.16 \times 10^{-1}$   |
| 2       | 2.99996299496053   | $-4.81 \times 10^{-4}$  |
| 3       | 3.0000000000000000 | $-1.78 \times 10^{-14}$ |
| 4       | 3.0000000000000000 | $0.00 \times 10^0$      |

Kriteria konvergensi fungsi ke-7 pada orde 6 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $0.00 \times 10^0$  (mendekati nol hingga presisi komputasi). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

#### Hasil akhir:

Orde 2 : 3.0000000000000000 (iterasi: 8)

Orde 3 : 3.0000000000000000 (iterasi: 5)

Orde 5 : 3.0000000000000000 (iterasi: 5)

Orde 6 : 3.0000000000000000 (iterasi: 4)

Berdasarkan hasil perhitungan numerik pada fungsi ke 7 dengan nilai toleransi  $\epsilon = 1 \times 10^{-14}$  dan  $x_0 = 3.2$  yang disimulasikan di empat metode tersebut, hasilnya fungsi tersebut konvergen. Fungsi ke 7 konvergen pada akar  $x = 3.0000000000000000$  di semua metode. Efisiensi iterasi pada

metode Newton biasa (orde 2) membutuhkan 8 iterasi, pada modifikasi orde 3 membutuhkan iterasi sebanyak 5, pada orde 5 membutuhkan 5 iterasi, dan orde 6 membutuhkan 4 iterasi. Hal ini menunjukkan bahwa metode Newton dengan orde tinggi (3, 5, 6) menghasilkan konvergensi yang lebih cepat dilihat dari jumlah iterasi dibandingkan metode Newton biasa.

### **Fungsi ke-8:**

Berikut ini hasil iterasi dari keempat metode yaitu metode Newton biasa (orde 2), modifikasi orde 3, orde 5, dan orde 6. Tabel-tabel di bawah menunjukkan nilai hampiran akar dan nilai fungsi pada setiap iterasi.

Tabel 4.29. Iterasi metode Newton Orde 2 pada Fungsi ke-8

| Iterasi | $x$               | $f(x)$                 |
|---------|-------------------|------------------------|
| 0       | 1.370000000000000 | $6.23 \times 10^{-3}$  |
| 1       | 1.36762056453314  | $1.56 \times 10^{-3}$  |
| 2       | 1.36642668734543  | $3.91 \times 10^{-4}$  |
| 3       | 1.36582870109775  | $9.78 \times 10^{-5}$  |
| 4       | 1.36552944507673  | $2.45 \times 10^{-5}$  |
| 5       | 1.36537975121832  | $6.12 \times 10^{-6}$  |
| 6       | 1.36530488781165  | $1.53 \times 10^{-6}$  |
| 7       | 1.36526745198701  | $3.82 \times 10^{-7}$  |
| 8       | 1.36524873304412  | $9.56 \times 10^{-8}$  |
| 9       | 1.36523937331501  | $2.39 \times 10^{-8}$  |
| 10      | 1.36523469338603  | $5.97 \times 10^{-9}$  |
| 11      | 1.36523235340543  | $1.49 \times 10^{-9}$  |
| 12      | 1.36523118341111  | $3.73 \times 10^{-10}$ |
| 13      | 1.36523059841294  | $9.33 \times 10^{-11}$ |

Lanjut di halaman berikutnya

Tabel 4.29 – lanjutan dari halaman sebelumnya

| Iterasi | $x$              | $f(x)$                 |
|---------|------------------|------------------------|
| 14      | 1.36523030591360 | $2.33 \times 10^{-11}$ |
| 15      | 1.36523015966387 | $5.83 \times 10^{-12}$ |
| 16      | 1.36523008653899 | $1.46 \times 10^{-12}$ |
| 17      | 1.36523004997654 | $3.65 \times 10^{-13}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-8 pada orde 2 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $3.65 \times 10^{-13}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.30. Iterasi metode Newton Orde 3 pada Fungsi ke-8

| Iterasi | $x$               | $f(x)$                 |
|---------|-------------------|------------------------|
| 0       | 1.370000000000000 | $6.23 \times 10^{-3}$  |
| 1       | 1.36682618671485  | $6.96 \times 10^{-4}$  |
| 2       | 1.36576276437294  | $7.74 \times 10^{-5}$  |
| 3       | 1.36540767434268  | $8.61 \times 10^{-6}$  |
| 4       | 1.36528924231927  | $9.57 \times 10^{-7}$  |
| 5       | 1.36524975733791  | $1.06 \times 10^{-7}$  |
| 6       | 1.36523659482821  | $1.18 \times 10^{-8}$  |
| 7       | 1.36523220723060  | $1.31 \times 10^{-9}$  |
| 8       | 1.36523074468757  | $1.46 \times 10^{-10}$ |
| 9       | 1.36523025717207  | $1.62 \times 10^{-11}$ |

Lanjut ke halaman berikutnya

Lanjutan dari Tabel 4.30

| Iterasi | $x$              | $f(x)$                 |
|---------|------------------|------------------------|
| 10      | 1.36523009466677 | $1.80 \times 10^{-12}$ |
| 11      | 1.36523004049832 | $2.00 \times 10^{-13}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-8 pada orde 3 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $2.00 \times 10^{-13}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.31. Iterasi metode Newton Orde 5 pada Fungsi ke-8

| Iterasi | $x$              | $f(x)$                 |
|---------|------------------|------------------------|
| 0       | 1.37000000000000 | $6.23 \times 10^{-3}$  |
| 1       | 1.36682804722011 | $6.97 \times 10^{-4}$  |
| 2       | 1.36576359487137 | $7.77 \times 10^{-5}$  |
| 3       | 1.36540797468171 | $8.64 \times 10^{-6}$  |
| 4       | 1.36528934504916 | $9.60 \times 10^{-7}$  |
| 5       | 1.36524979187216 | $1.07 \times 10^{-7}$  |
| 6       | 1.36523660637196 | $1.19 \times 10^{-8}$  |
| 7       | 1.36523221108211 | $1.32 \times 10^{-9}$  |
| 8       | 1.36523074597181 | $1.46 \times 10^{-10}$ |
| 9       | 1.36523025760019 | $1.63 \times 10^{-11}$ |
| 10      | 1.36523009480948 | $1.81 \times 10^{-12}$ |
| 11      | 1.36523004054589 | $2.01 \times 10^{-13}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-8 pada orde 5 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini  $(x_n)$  lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $2.01 \times 10^{-13}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.32. Iterasi metode Newton Orde 6 pada Fungsi ke-8

| Iterasi | $x$                | $f(x)$                 |
|---------|--------------------|------------------------|
| 0       | 1.3700000000000000 | $6.23 \times 10^{-3}$  |
| 1       | 1.36523126967797   | $4.30 \times 10^{-10}$ |
| 2       | 1.36523001341418   | $2.01 \times 10^{-24}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-8 pada orde 6 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini  $(x_n)$  lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $2.01 \times 10^{-24}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

#### Hasil akhir:

Orde 2 : 1.36523004997654 (iterasi: 17)  
 Orde 3 : 1.36523004049832 (iterasi: 11)  
 Orde 5 : 1.36523004054589 (iterasi: 11)  
 Orde 6 : 1.36523001341418 (iterasi: 2)

Berdasarkan hasil perhitungan numerik pada fungsi ke 8 dengan nilai toleransi  $\epsilon = 1 \times 10^{-12}$  dan  $x_0 = 1.37$  yang disimulasikan di empat metode tersebut, hasilnya fungsi tersebut konvergen. Fungsi ke 8 konvergen pada akar  $x = 1.3652300$  di metode semua metode. Efisiensi iterasi pada metode Newton biasa (orde 2) membutuhkan 17 iterasi, pada modifikasi orde 3 membutuhkan iterasi sebanyak 11, orde 5 membutuhkan iterasi sebanyak 11, dan pada modifikasi orde 6 membutuhkan 2 iterasi. Hal ini menunjukkan bahwa metode Newton dengan orde tinggi (3, 5, 6) menghasilkan konvergensi yang lebih cepat dilihat dari jumlah iterasi dibandingkan metode Newton biasa.

### **Fungsi ke-9:**

Berikut ini hasil iterasi dari keempat metode yaitu metode Newton biasa (orde 2), modifikasi orde 3, orde 5, dan orde 6. Tabel-tabel di bawah menunjukkan nilai hampiran akar dan nilai fungsi pada setiap iterasi.

Tabel 4.33. Iterasi metode Newton Orde 2 pada Fungsi ke-9

| Iterasi | $x$              | $f(x)$                |
|---------|------------------|-----------------------|
| 0       | 1.01000000000000 | $2.75 \times 10^{-4}$ |
| 1       | 1.00502487562189 | $6.90 \times 10^{-5}$ |
| 2       | 1.00251873433507 | $1.73 \times 10^{-5}$ |
| 3       | 1.00126095117835 | $4.33 \times 10^{-6}$ |
| 4       | 1.00063087283819 | $1.08 \times 10^{-6}$ |
| 5       | 1.00031553588785 | $2.71 \times 10^{-7}$ |
| 6       | 1.00015779283072 | $6.77 \times 10^{-8}$ |
| 7       | 1.00007890263952 | $1.69 \times 10^{-8}$ |
| 8       | 1.00003945287610 | $4.23 \times 10^{-9}$ |

Lanjut di halaman berikutnya

Tabel 4.33 – lanjutan dari halaman sebelumnya

| Iterasi | $x$              | $f(x)$                 |
|---------|------------------|------------------------|
| 9       | 1.00001972682718 | $1.06 \times 10^{-9}$  |
| 10      | 1.00000986351087 | $2.64 \times 10^{-10}$ |
| 11      | 1.00000493177976 | $6.61 \times 10^{-11}$ |
| 12      | 1.00000246589596 | $1.65 \times 10^{-11}$ |
| 13      | 1.00000123294950 | $4.13 \times 10^{-12}$ |
| 14      | 1.00000061647513 | $1.03 \times 10^{-12}$ |
| 15      | 1.00000030823766 | $2.58 \times 10^{-13}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-9 pada orde 2 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $2.58 \times 10^{-13}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.34. Iterasi metode Newton Orde 3 pada Fungsi ke-9

| Iterasi | $x$              | $f(x)$                 |
|---------|------------------|------------------------|
| 0       | 1.01000000000000 | $2.75 \times 10^{-4}$  |
| 1       | 1.00336099600899 | $3.08 \times 10^{-5}$  |
| 2       | 1.00112346547638 | $3.43 \times 10^{-6}$  |
| 3       | 1.00037483893218 | $3.82 \times 10^{-7}$  |
| 4       | 1.00012498533359 | $4.25 \times 10^{-8}$  |
| 5       | 1.00004166611690 | $4.72 \times 10^{-9}$  |
| 6       | 1.00001388918786 | $5.24 \times 10^{-10}$ |

Lanjut di halaman berikutnya

Tabel 4.34 – lanjutan dari halaman sebelumnya

| Iterasi | $x$              | $f(x)$                 |
|---------|------------------|------------------------|
| 7       | 1.00000462978287 | $5.83 \times 10^{-11}$ |
| 8       | 1.00000154326691 | $6.47 \times 10^{-12}$ |
| 9       | 1.00000051442297 | $7.19 \times 10^{-13}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-9 pada orde 3 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini ( $x_n$ ) lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $7.19 \times 10^{-13}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.35. Iterasi metode Newton Orde 5 pada Fungsi ke-9

| Iterasi | $x$               | $f(x)$                 |
|---------|-------------------|------------------------|
| 0       | 1.010000000000000 | $2.75 \times 10^{-4}$  |
| 1       | 1.00336936324253  | $3.10 \times 10^{-5}$  |
| 2       | 1.00112721753256  | $3.46 \times 10^{-6}$  |
| 3       | 1.00037619789622  | $3.85 \times 10^{-7}$  |
| 4       | 1.00012545040063  | $4.28 \times 10^{-8}$  |
| 5       | 1.00004182248314  | $4.75 \times 10^{-9}$  |
| 6       | 1.00001394145934  | $5.28 \times 10^{-10}$ |
| 7       | 1.00000464722330  | $5.87 \times 10^{-11}$ |
| 8       | 1.00000154908223  | $6.52 \times 10^{-12}$ |
| 9       | 1.00000051636161  | $7.25 \times 10^{-13}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-9 pada orde 5 memenuhi

kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini  $(x_n)$  lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $7.25 \times 10^{-13}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

Tabel 4.36. Iterasi metode Newton Orde 6 pada Fungsi ke-9

| Iterasi | $x$               | $f(x)$                 |
|---------|-------------------|------------------------|
| 0       | 1.010000000000000 | $2.75 \times 10^{-4}$  |
| 1       | 1.00000572213051  | $8.90 \times 10^{-11}$ |
| 2       | 1.000000000000182 | $8.99 \times 10^{-24}$ |

Kriteria konvergensi fungsi ke-9 pada orde 6 memenuhi kriteria konvergensi Nilai absolut fungsi  $f(x)$  pada aproksimasi saat ini  $(x_n)$  lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan, yaitu  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Nilai  $f(x_n)$  mencapai  $8.99 \times 10^{-24}$  (mendekati nol hingga presisi komputasi). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode ini konvergen karena memenuhi kriteria konvergensi berdasarkan nilai fungsi ( $|f(x_n)| < \epsilon$ ) yang menjadi batas penghentian utama.

#### Hasil akhir:

Orde 2 : 1.00000030823766 (iterasi: 15)

Orde 3 : 1.00000051442297 (iterasi: 9)

Orde 5 : 1.00000051636161 (iterasi: 9)

Orde 6 : 1.000000000000182 (iterasi: 2)

Berdasarkan hasil perhitungan numerik pada fungsi ke 9 dengan nilai toleransi  $\epsilon = 1 \times 10^{-12}$  dan  $x_0 = 1.01$  yang disimulasikan di empat metode tersebut, hasilnya fungsi tersebut konvergen. Fungsi ke 9 konvergen pada akar  $x = 1.000000$  disemua metode. Efisiensi iterasi pada metode Newton biasa (orde 2) membutuhkan 15 iterasi, pada modifikasi orde 3 membutuhkan iterasi sebanyak 9, orde 5 membutuhkan iterasi sebanyak 9, dan pada modifikasi orde 6 membutuhkan 2 iterasi. Hal ini menunjukkan bahwa metode Newton dengan orde tinggi (3, 5, 6) menghasilkan konvergensi yang lebih cepat dilihat dari jumlah iterasi dibandingkan metode Newton biasa.

Secara keseluruhan, hasil perhitungan numerik pada sembilan fungsi menunjukkan bahwa modifikasi orde 6 merupakan modifikasi yang paling efektif dalam meningkatkan kecepatan dan konvergensi dibandingkan metode Newton orde lebih rendah. Modifikasi orde 6 mampu menemukan akar dengan jumlah iterasi yang sangat sedikit dan nilai toleransi yang sangat kecil, bahkan untuk fungsi-fungsi yang kompleks atau memiliki banyak variasi. Sementara itu, modifikasi orde 3 dan orde 5 juga menunjukkan performa yang baik dan stabil dengan jumlah iterasi yang lebih efisien dibandingkan orde 2. Metode orde 2 tetap dapat digunakan, namun memerlukan iterasi lebih banyak. Dengan demikian, modifikasi metode Newton orde tinggi terutama orde 6, terbukti sangat efektif untuk meningkatkan efisiensi iterasi dan konvergensi dalam menyelesaikan persamaan tak linier.

## BAB V

### Kesimpulan dan Saran

#### A. Kesimpulan

1. Modifikasi metode Newton biasa (orde 2) pada orde 3, perhitungannya menggunakan formulasi;

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)}$$

Di orde 5, perhitungannya menggunakan formulasi;

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(y_n)}{2f'(y_n) + f'(x_n)} \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}$$

Orde 6, perhitungannya menggunakan formulasi;

$$x_{n+1} = z_n - \frac{2f'^2(y)}{f'^2(x) - 4f'(x)f'(y) + 5f'^2(y)} \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}$$

2. Berdasarkan hasil implementasi dan pengujian metode Newton orde 2, 3, 5, dan 6 terhadap sembilan fungsi tak linier, dapat disimpulkan bahwa:

- (a) Modifikasi orde 6 selalu konsisten dengan konvergensi paling cepat dan akurasi tinggi, bahkan untuk fungsi yang kompleks dibandingkan orde 2, 3, dan 5. Pada beberapa kasus yang sudah di uji, akar ditemukan hanya dalam 1-3 iterasi.

- (b) Modifikasi orde 3 dan orde 5 juga menunjukkan efisiensi yang tinggi, lebih unggul dari orde 2, dan cenderung konvergen untuk hampir semua fungsi uji.
- (c) Metode Newton orde 2 (biasa) tetap efektif namun perlu lebih banyak iterasi dibandingkan metode modifikasi orde tinggi.
- (d) Pengaruh tebakan awal ( $x_0$ ) dan toleransi sangat penting. Beberapa fungsi memerlukan pendekatan khusus agar metode dapat konvergen secara efisien.

Secara keseluruhan, modifikasi orde tinggi dari metode Newton (terutama orde 6) terbukti dapat meningkatkan efisiensi iterasi dan konvergensi dalam menyelesaikan persamaan tak linier.

## **B. Saran**

Disarankan untuk pengembangan selanjutnya agar penelitian dilakukan dengan mencoba berbagai pendekatan modifikasi metode Newton tingkat tinggi menggunakan bahasa pemrograman lain yang mendukung presisi angka lebih tinggi dan optimasi komputasi lebih baik. Penggunaan Matlab memang sangat membantu dalam simulasi numerik, tetapi memiliki keterbatasan dalam hal presisi angka dan efisiensi saat menangani perhitungan turunan tingkat tinggi yang kompleks. Oleh karena itu, eksplorasi penggunaan bahasa pemrograman lain dapat menjadi alternatif untuk mendapatkan hasil yang lebih akurat dan komputasi yang lebih cepat.

## DAFTAR PUSTAKA

- Alqahtani, H. F., Behl, R., Kansal, M. 2019. *Higher-order iteration schemes for solving nonlinear systems of equations*. 7(10): 937
- Asminah, Sahfitri, Vivi. 2015. *Implementasi Dan Analisis Tingkat Akurasi Software Penyelesaian Persamaan Non Linier Dengan Metode Fixed Point Iteration Dan Metode Bisection*. 1(1): A1-A8
- Azizah, N. L., Ariyanti, Novia. 2020. *BUKU AJAR DASAR-DASAR ALJABAR LINEAR*. Sidoarjo: UMSIDA Press.
- Basuki, Achmad, Ramadijanti, Nana. 2005. *Metode Numerik dan Algoritma Komputasi*. Yogyakarta: ANDI.
- Behl, R., Argyros, I. K. 2020. *A New Higher-Order Iterative Scheme for the Solutions of Nonlinear Systems*. 8(2): 271
- Chun, C. 2007. *A new family of Jarratt-type methods with sixth-order convergence*. 13(3), 235-240
- Deep, Gagan, Argyros, I. K. 2023. *Improved higher order compositions for nonlinear equations*. 3(1): 25-36
- Esmaeili, H., Rostami, M. 2014. *A Modification of Chebyshev-Halley Method Free From Second Derivatives for Nonlinear Equations*. 3(1):123-130
- Faradillah, A. 2020. *Metode Numerik*. Diunduh di <https://books.google.co.id/books?id=mFABEAAQBAJ> tanggal 1 Oktober 2024

- Ham, YoonMee, Chun, Changbum, Lee, Sang-Gu. 2008. *Some higher-order modifications of Newton's method for solving nonlinear equations*. 222(2): 477-486
- Khirallah, M. Q., Alkhomsan, A. M. 2023. *A new fifth-order iterative method for solving non-linear equations using weight function technique and the basins of attraction*. 28(3):281-293
- Maharani, S., Suprpto, E. 2018. *ANALISIS NUMERIK-BERBASIS GROUP INVESTIGATION UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN BERPIKIR KRITIS*. Magetan: CV. AE MEDIA GRAFIKA.
- Munir, R. 2015. *Metode Numerik*. Bandung: INFORMATIKA.
- Oghovese, O. , Olaniyi, O. S. 2014. *A Fifth-Order Iterative Method for Solving Nonlinear Equations*. 2(10): 19-23
- Ramdani, Y. 2006. *Kajian pemahaman matematika melalui etika pemodelan matematika*. 22(1): 1-14
- Rosidi, M. 2019. *Metode Numerik Menggunakan R Untuk Teknik Lingkungan*. Diakses dari [https://bookdown.org/moh\\_rosidi2610/Metode\\_Numerik/rootfinding.html](https://bookdown.org/moh_rosidi2610/Metode_Numerik/rootfinding.html) pada tanggal 10 Juni 2025.
- Sahid, S. 2002. *Analisis dan Implementasi Metode Newton-Raphson*. Diakses dari [https://www.researchgate.net/publication/325168723\\_Analisis\\_dan\\_Implementasi\\_Metode\\_Newton-Raphson](https://www.researchgate.net/publication/325168723_Analisis_dan_Implementasi_Metode_Newton-Raphson) pada tanggal 10 Mei 2025.
- Sinaga, C. V. R. 2021. *METODE NUMERIK*. Tasikmalaya: Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia.

- Singh, S., Gupta, D. K. 2014. *A New Sixth Order Method for Nonlinear Equations in R*. 2014(1):890138
- Sivakumar, P. , Jayaraman, J. 2019. *Some New Higher Order Weighted Newton Methods for Solving Nonlinear Equation with Applications*. 24(2): 59
- Sudiarta, I.W. 2020. *Metode Numerik*. Diakses dari <https://books.google.co.id/books?id=FkMaEAAAQBAJ> tanggal 1 Oktober 2024
- Sukardjono. 2000. *filasafat dan sejarah matematika*. jakarta: universitas terbuka.
- Sutarno, H., Rachmatin, D., Junaeti, E. 2022. *Metode Numerik dengan Pendekatan Algoritmik*. Bandung: INDONESIA EMAS GROUP.
- Weerakoon, S., Fernando, T. G. I. 2000. *A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence*. 13(8):87-93
- Yasin, S. , Naseem, A. 2018. *Higher Order Nonlinear Equation Solvers and their Dynamical Behavior*. 2(2): 172-193
- Zakaria, La, Muharramah, Ulfah. 2023. *Pengantar METODE NUMERIK*. Bandar Lampung: AURA.
- Zavalani, G. 2014. *A Modification of Newton Method with Third-Order Convergence*. 2(4):98-101

## Lampiran 1. Coding MATLAB untuk Metode Newton, Modifikasi Newton orde 3, orde 5, dan orde 6

```
function Modifikasi_Newton()
clc; clear;
%nilai toleransi per fungsi
tol_list = [1e-16, 1e-14, 1e-14, 1e-14, 1e-14, 1e-10,
1e-14, 1e-12, 1e-12];
max_iter = 100;

% Tebakan awal khusus per fungsi
x0_list = [1.5, 1.5, 1.5, 1.0, -1.0, 4.5, 2.9, 1.37,
1.01];

% Definisi fungsi dan turunannya secara simbolik
syms x;
f{1} = matlabFunction(x^3 + 4*x^2 - 10, 'Vars', x);
f{2} = matlabFunction(sin(x)^2 - x^2 + 1, 'Vars', x);
f{3} = matlabFunction(x^2 - exp(x) - 3*x + 2, 'Vars', x);
f{4} = matlabFunction(cos(x) - x, 'Vars', x);
f{5} = matlabFunction(x*exp(x^2) - sin(x)^2 + 3*cos(x)
+ 5, 'Vars', x);
f{6} = matlabFunction(x^2 * sin(x)^2 + exp(x^2*
cos(x) * sin(x)) - 28, 'Vars', x);
f{7} = matlabFunction(exp(x^2 + 7*x - 30) - 1, 'Vars', x);
f{8} = matlabFunction((x^3 + 4*x^2 - 10)^2, 'Vars', x);
f{9} = matlabFunction((x - 1)^2 * exp(x), 'Vars', x);

% Turunan fungsi-fungsi di atas
df = cell(1,9);
for i = 1:9
df{i} = matlabFunction(diff(f{i}(x), x), 'Vars', x);
end
for i = 1:9
```

```

x0 = x0_list(i);
tol = tol_list(i);
fprintf('\n=====
=====\\n');
fprintf('Fungsi ke-%d:\\n', i);
[r2, it2] = Newton_biasa(f{i}, df{i}, x0, tol, max_iter);
[r3, it3] = Newton_Ord3(f{i}, df{i}, x0, tol, max_iter);
[r5, it5] = Newton_Ord5(f{i}, df{i}, x0, tol, max_iter);
[r6, it6] = Newton_Ord6(f{i}, df{i}, x0, tol, max_iter);

fprintf('\\nHasil akhir:\\n');
fprintf(' Orde 2 : %.14f (iterasi: %d)\\n', r2, it2);
fprintf(' Orde 3 : %.14f (iterasi: %d)\\n', r3, it3);
fprintf(' Orde 5 : %.14f (iterasi: %d)\\n', r5, it5);
fprintf(' Orde 6 : %.14f (iterasi: %d)\\n', r6, it6);
end
end

% Newton Modifikasi Orde 2
function [root, iter] = Newton_biasa(f, df, x, tol,
max_iter)
iter = 0;
prev_x = x;
fprintf('\\n[Orde 2 - Newton biasa]\\n');
fprintf('| Iter | x | f(x) |\\n');
fprintf('-----
-----\\n');
while abs(f(x)) > tol && iter < max_iter
fprintf('| %4d | %.14f | %.2e |\\n', iter, x, f(x));
dfx = df(x);
if abs(dfx) < eps || isnan(f(x)) || isnan(dfx),
break;
end
x = x - f(x) / dfx;
if abs(x - prev_x) < tol,
break;

```

```

end
prev_x = x;
iter = iter + 1;
end
fprintf('| %4d | %.14f | %.2e |\n', iter, x, f(x));
root = double(x);
end

% Newton Modifikasi Orde 3
function [root, iter] = Newton_Ord3(f, df, x, tol,
max_iter)
iter = 0;
prev_x = x;
fprintf('\n[Orde 3 - Newton Modifikasi]\n');
fprintf('| Iter | x | f(x) |\n');
fprintf('-----\n');
while abs(f(x)) > tol && iter < max_iter
fprintf('| %4d | %.14f | %.2e |\n', iter, x, f(x));
dfx = df(x);
if abs(dfx) < eps || isnan(f(x)) || isnan(dfx), break;
end
y = x - f(x) / dfx;
denom = df(x) + df(y);
if abs(denom) < eps, break; end
x = x - (2 * f(x)) / denom;
if abs(x - prev_x) < tol, break; end
prev_x = x;
iter = iter + 1;
end
fprintf('| %4d | %.14f | %.2e |\n', iter, x, f(x));
root = double(x);
end

% Newton Modifikasi Orde 5
function [root, iter] = Newton_Ord5(f, df, x, tol,

```

```

max_iter)
iter = 0;
prev_x = x;
fprintf('\n[Orde 5 - Newton Modifikasi]\n');
fprintf('| Iter | x | f(x) |\n');
fprintf('-----\n');
while abs(f(x)) > tol && iter < max_iter
fprintf('| %4d | %.14f | %.2e |\n', iter, x, f(x));
dfx = df(x);
if abs(dfx) < eps || isnan(f(x)) || isnan(dfx), break;
end
y = x - f(x)/dfx;
dy = df(y);
z = x - (2 * f(x)) / (dfx + dy);
denom = 2 * dy - dfx;
if abs(denom) < eps
fprintf('Denominator mendekati nol. Iterasi dihentikan.\n');
break;
end
H = (2*dy - dfx) / dy;
dfz = df(z);
step = H * f(z) / dfz;
x = z - step;
if abs(x - prev_x) < tol
break;
end
prev_x = x;
iter = iter + 1;
end
fprintf('| %4d | %.14f | %.2e |\n', iter, x, f(x));
root = double(x);
end

% Newton Modifikasi Orde 6

```

```

function [root, iter] = Newton_Ord6(f, df, x, tol,
max_iter)
iter = 0;
prev_x = x;
fprintf('\n[Orde 6 - Newton Modifikasi]\n');
fprintf('| Iter | x | f(x) |\n');
fprintf('-----\n');
while abs(f(x)) > tol && iter < max_iter
dfx = df(x);
if abs(dfx) < eps || isnan(f(x)) || isnan(dfx),
break;
end
y = x - f(x) / dfx;
dy = df(y);
z = x - (2 * f(x)) / (dfx + dy);
denom = dfx^2 - 4 * dfx * dy + 5 * dy^2;
if abs(denom) < eps,
break;
end
H = (2 * dy^2) / denom;
dfz = df(z);
x = z - H * f(z) / dfz;
if abs(x - prev_x) < tol,
break;
end
prev_x = x;
iter = iter + 1;
end
fprintf('| %4d | %.14f | %.2e |\n', iter, x, f(x));
root = double(x);
end

```

## Lampiran 2. Daftar Riwayat Hidup

### DAFTAR RIWAYAT HIDUP

#### A. Identitas Diri

Nama Lengkap : Lutfiya Tamjisi  
 Tempat, Tanggal Lahir : Ngawi, 26 Oktober 2002  
 Alamat : Rt. 005/ Rw. 002, Dsn. Melok Kulon,  
 Ds. Sirigan, Kec. Paron, Kab. Ngawi  
 No. Hp : 087851783753  
 Email : lutfiyatamjisi26@gmail.com

#### B. Riwayat Pendidikan

##### 1. Pendidikan Formal

- TK Dharma Wanita (2007–2009)
- SD Negeri Sirigan 1 (2009–2015)
- MTsN 5 Ngawi (2015–2018)
- MAS Al-Khoirot Malang (2018–2021)

##### 2. Pendidikan Non-Formal

- TPA Al-Huda Cenggerengan
- Madrasah Diniyyah Baitul Muttaqin
- Madrasah Diniyyah Al Faruq
- Ponpes Al Khoirot Malang
- Madrasah Diniyyah Al Khoirot Malang

Semarang, 8 Juni 2025

Penulis,

Lutfiya Tamjisi

NIM : 2108046068