SEMIGRUP IDENTITAS PADA SEMIGRUP MATRIKS ATAS ALJABAR MAX-PLUS

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika

Oleh : **HURROTUL A'YUN**
NIM : 2108046054

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2025

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	HURROTUL A'YUN
NIM	:	2108046054
Jurusan/Program Studi	:	Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

SEMIGRUP IDENTITAS PADA SEMIGRUP MATRIKS ATAS ALJABAR MAX-PLUS

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 20 Mei 2025
Pembuat pernyataan,



HURROTUL A'YUN
NIM : 2108046054

Dipindai dengan CamScanner

KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **SEMIGRUP IDENTITAS PADA SEMIGRUP MATRIKS ATAS ALJABAR MAX-PLUS**
Penulis : HURROTUL A'YUN
NIM : 2108046054
Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 3 Juni 2025

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

Ayus Riana Ishawati, M. Sc.
NIP : 19851019 201903 2 014

Penguji II,

Nur Khasanah, M. Si.
NIP : 19911121 201903 2 017

Penguji III,

Aini Fitriyah, M. Sc.
NIP : 19890929 201903 2 021

Penguji IV,

Eva Khoirun Nisa, M. Si.
NIP : 19870102 201903 2 010

Pembimbing I,

Any Muanalifah, M.Si., Ph.D.
NIP : 19820113 201101 2 009

Dipindai dengan CamScanner

NOTA DINAS

Semarang, 20 Mei 2025

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	SEMIGRUP IDENTITAS PADA SEMIGRUP MATRIKS ATAS ALJABAR MAX-PLUS
Nama	:	HURROTUL A'YUN
NIM	:	2108046054
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,

Any Muanalifah, M.Si., Ph.D.
NIP : 19820113 201101 2 009

Dipindai dengan CamScanner

ABSTRAK

Aljabar max-plus adalah himpunan bilangan real yang diperluas dengan elemen $-\infty$ serta dilengkapi dua operasi biner, $\oplus$ sebagai maksimum dan $\otimes$ sebagai penjumlahan biasa. Penelitian ini merupakan salah satu contoh kajian aljabar max-plus dalam aspek teoritis, yang sejalan dengan arah penelitian yang dikemukakan dalam artikel *"Identities in upper triangular tropical matrix semigroups and the bicyclic monoid"* oleh Laure Daviaud, Marianne Johnson, Mark Kambites pada tahun 2018 (Daviaud dkk, 2018). Perbedaan penelitian ini dengan penelitian Daviaud, dkk (2018) adalah penulis mengaplikasikan semigrup identitas pada beberapa *class* matriks. Sedangkan penelitian Daviaud, dkk (2018) mengaplikasikan semigrup identitas pada matriks segitiga atas saja. Fokus utama penelitian adalah mengidentifikasi semigrup identitas pada himpunan matriks $M_2(\mathbb{R}_{\max})$, dimana semigrup identitas didefinisikan sebagai homomorfisma semigrup δ yang memetakan *free* semigrup A^+ ke dalam semigrup $M_2(\mathbb{R}_{\max})$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa setiap bentuk $u = v$ dimana $u, v \in A^+$ selalu akan membentuk semigrup identitas yang disebut sebagai semigrup identitas trivial. Sebaliknya, tidak semua identitas non-trivial dimana $u \neq v$ memenuhi definisi tersebut. Beberapa identitas non-trivial $u \neq v$ yang dapat membentuk semigrup identitas ditemukan pada *class* matriks seperti matriks idempoten, matriks diagonal, matriks naik, matriks normal serta matriks segitiga atas dan bawah. Notasi "$u = v$" bukan berarti himpunan $u = v$, akan tetapi hanya menyatakan relasi kesamaannya saja. Temuan ini memberikan kontribusi teoritis bagi pengembangan aljabar max-plus, khususnya dalam studi tentang semigrup identitas.

Kata kunci : semigrup identitas, aljabar max-plus, matriks aljabar max-plus

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT atas segala nikmat-Nya. Dengan kasih sayang-Nya yang tak terhingga, peneliti dapat menyelesaikan penelitian dan penulisan skripsi ini sesuai dengan rencana yang telah ditetapkan.

Semoga sholawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, keluarganya, serta para sahabatnya yang telah berjuang menegakkan agama Allah SWT di muka bumi.

Skripsi ini dapat diselesaikan berkat doa dan dukungan dari berbagai pihak, baik secara moral maupun material. Oleh karena itu, dengan penuh rasa syukur, peneliti mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. Nizar, M.Ag, Rektor Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
2. Bapak Prof. Dr. H. Musahadi, M.Ag, Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
3. Ibu Any Muanalifah, M.Si., Ph.D, Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
4. Ibu Any Muanalifah, M.Si., Ph.D, dosen pembimbing yang dengan penuh kesabaran telah memberikan arahan dan bimbingan selama penulisan skripsi ini.
5. Bapak Agus Wayan Yulianto, M. Sc. selaku wali dosen yang mendampingi dan memberikan semangat selama penulisan skripsi ini.

6. Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika, terima kasih atas ilmu, nasihat, motivasi, dan semua yang telah diberikan selama peneliti menjalani perkuliahan.

7. Kedua orang tua tercinta, Bapak Marsigit dan Ibu Rif'atul Lailiyah, terima kasih atas segala dukungan materi dan non materi yang tak ternilai. Doa kalian yang tidak pernah putus di setiap fajar dan senja.

8. Almarhum Bapak KH. Ahmad Amnan Muqoddam dan Ibu Nyai Hj. Rofiqotul Makkiyah, pendiri dan pengasuh Ponpes Tahfidzul Qur'an Al Hikmah Tugurejo, Tugu, Semarang, terima kasih atas doa, ridho, dan bimbingan yang penuh kasih.

9. Adik-adikku tercinta, Muhammad Zainadin Zidan dan Syafia Mudawamah, semoga kesuksesan kita bersama menjadi hadiah terindah bagi orang tua.

10. Teman-teman Matematika B 2021, terima kasih atas segala dukungan, terutama teman-teman sebidang aljabar yang selalu menyemangati dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.

11. Santri PPPTQ Al Hikmah Tugurejo Semarang, terutama teman-teman seangkatan yang telah setia menjadi tempat curhat dan penyemangat selama ini.

12. Teman-teman KKN Posko 37 Kelurahan Muktiharjo Lor, terima kasih atas dukungan dan kebersamaan selama proses pengerjaan tugas akhir ini.

Semoga Allah SWT selalu memberikan kesehatan dan keberkahan kepada kita semua, terutama bagi mereka yang berperan dalam penyelesaian skripsi ini. Peneliti menyadari, tanpa bantuan, dorongan, bimbingan, serta motivasi yang luar biasa, skripsi ini tidak mungkin selesai dengan baik. Semoga karya ini bermanfaat, baik bagi peneliti sendiri maupun bagi para pembaca.

Semarang, 20 Mei 2025

Hurrotul A'yun
NIM: 2108046054

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL ..... **i**
PERNYATAAN KEASLIAN ..... **ii**
PENGESAHAN ..... **iii**
NOTA PEMBIMBING I ..... **iv**
KATA PENGANTAR ..... **viii**
DAFTAR ISI ..... **ix**
BAB I PENDAHULUAN **1**
A. Latar Belakang Masalah 1
B. Tujuan Penelitian 4
C. Tinjauan Pustaka 4
D. Manfaat Penelitian 5
E. Batasan Masalah 6
F. Metodologi Penelitian 6
G. Sistematika Penulisan 7
BAB II LANDASAN TEORI **9**
A. Semigrup 9
B. Aljabar Max-Plus 14
BAB III SEMIGRUP IDENTITAS PADA SEMIGRUP MATRIKS ATAS ALJABAR MAX-PLUS **20**
A. Semigrup Identitas pada Semigrup Matriks atas Aljabar Max-plus 20
B. Matriks Khusus pada Semigrup Matriks atas Aljabar Max-Plus 21
1. Matriks Segitiga Atas(Bawah) 22
2. Matriks Normal 24
3. Matriks Idempoten 29
4. Matriks Diagonal 32
5. Matriks Naik 35
BAB IV PENUTUP **39**
A. Kesimpulan 39
B. Saran 40

DAFTAR PUSTAKA **41**
DAFTAR RIWAYAT HIDUP **44**

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Struktur aljabar terdiri dari himpunan tidak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi sejumlah aksioma atau sifat tertentu seperti pada struktur grup, semigrup, ring atau semiring. Struktur-struktur tersebut digunakan untuk mengkaji sifat-sifat abstrak dari suatu operasi serta hubungan antar elemen dalam himpunan secara formal. Melalui pendekatan ini, berbagai konsep dalam aljabar dapat dianalisis dan digeneralisasi secara sistematis.

Salah satu contoh struktur semiring adalah *aljabar max-plus*, yang diperkenalkan oleh matematikawan asal Brazil, Imre Simon pada tahun 1970-an dalam upayanya memodelkan cara kerja yang sistematis dan saling terkait (Simon, 1994). Aljabar max-plus adalah himpunan bilangan real yang diperluas dengan elemen $-\infty$ serta dilengkapi dua operasi biner, $\oplus$ sebagai maksimum dan $\otimes$ sebagai penjumlahan biasa, dan dinotasikan sebagai $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R} \cup -\infty, \oplus, \otimes)$ (Izhakian dkk, 2013).

Beberapa penelitian aljabar max-plus dari sisi teori antara lain struktur grup matriks dalam aljabar max-plus (Izhakian dkk, 2018), semigrup idempoten dan himpunan aljabar max-plus (Izhakian & Shustin, 2012), dan semigrup identitas pada monoid matriks aljabar max-plus berordo 2×2 (Izhakian & Margolis, 2009). Sementara itu, dalam konteks aplikatif, aljabar max-plus telah dimanfaatkan dalam berbagai pemodelan seperti pengaturan sistem lampu lalu lintas (Wibowo dkk, 2018), analisis sistem

antrian (Par dkk, 2024), pengembangan metode kriptografi berbasis aljabar max-plus (Muanalifah, 2023).

Berbagai penelitian telah dilakukan untuk mengkaji struktur semigrup matriks dalam aljabar max-plus, khususnya dalam upaya untuk mengekplorasi konsep semigrup identitas. Salah satu kontribusi penting dalam bidang ini adalah studi yang dilakukan oleh Zur Izhakian dan S Margolis pada tahun 2009 dengan judul *"Semigroups identities in the monoid of two by two tropical matrices"*. Penelitian tersebut memfokuskan kajiannya pada semigrup identitas dalam monoid matriks aljabar max-plus berordo 2×2, serta menelaah sifat-sifat operasi aljabar dan implikasinya terhadap pengembangan teori aljabar max-plus secara keseluruhan.

Selanjutnya, pada tahun 2014 Zur Izhakian mempublikasikan karyanya yang berjudul *"Semigroups identities in the monoid of triangular tropical matrices"* yang secara khusus membahas struktur semigrup identitas dan sifat-sifatnya di matriks segitiga atas pada aljabar max-plus (Izhakian, 2014). Kemudian pada tahun 2017, Taylor melakukan penelitian yang berjudul *"On Upper Triangular tropical matrix semigroups, tropical matrix identities, and $\mathbb{T}$-Modules"*. Penelitian ini tidak hanya membahas semigrup identitas dalam matriks segitiga atas, tetapi juga meninjau keterkaitannya dengan teori $\mathbb{T}$-modul (Taylor, 2017).

Dalam pengembangan aljabar max-plus, muncul berbagai struktur matematika yang menarik untuk ditelusuri lebih jauh. Salah satu di antaranya adalah konsep semigrup identitas, yang berkaitan dengan cara merepresentasikan himpunan kata ke dalam struktur semigrup tertentu. Himpunan kata yang dimaksud merupakan himpunan semua susunan simbol dari suatu alfabet,

tanpa menyertakan kata kosong, dan dilambangkan dengan A^+. Melalui suatu homomorfisma, kata-kata dalam A^+ dipetakan ke elemen-elemen dalam semigrup, sedemikian hingga struktur operasinya tetap terjaga. Dari sini, terbentuklah semigrup identitas yang tidak sekedar menunjukkan adanya elemen netral, tetapi juga mencerminkan adanya kesetaraan struktural antar kata berdasarkan hasil pemetaan tersebut.

Berbeda dengan konsep identitas dalam semigrup yang merujuk pada elemen netral (biasanya dilambangkan dengan e) yang tidak mengubah elemen lain dalam operasi biner, semigrup identitas lebih menekankan pada pola hubungan antar kata yang menghasilkan struktur semigrup tertentu. Kajian terhadap semigrup identitas ini menjadi penting karena membuka peluang untuk memahami lebih dalam bagaimana hubungan antar elemen simbolik dapat direpresentasikan dalam kerangka aljabar max-plus, serta bagaimana struktur semigrup dapat dibangun dari relasi-relasi tersebut.

Berdasarkan uraian di atas, penelitian ini bertujuan untuk mengkaji lebih lanjut karakteristik matriks-matriks yang memenuhi semigrup identitas dalam semigrup matriks pada aljabar max-plus. Fokus kajian ini sejalan dengan arah penelitian yang dikemukakan dalam artikel *"Identities in upper triangular tropical matrix semigroups and the bicyclic monoid"* oleh Laure Daviaud, Marianne Johnson, Mark Kambites pada tahun 2018 (Daviaud dkk, 2018).

Perbedaan penelitian ini dengan penelitian Daviaud, dkk (2018) adalah penulis mengaplikasikan semigrup identitas pada beberapa *class* matriks. Sedangkan penelitian Daviaud, dkk (2018) membahas semigrup identitas pada semigrup matriks yang

mengkhususkan pada matriks segitiga atas dan *bicyclic monoid*.

B. Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk :

1. Mendefinisikan semigrup identitas pada aljabar max-plus yang analog dengan semigrup identitas pada aljabar klasik.
2. Mencari pasangan u dan v di A^+ sedemikian sehingga memenuhi semigrup identitas pada semigrup matriks atas aljabar max-plus.

C. Tinjauan Pustaka

Penelitian oleh Izhakian dan Margolis (2009), yang diterbitkan dalam artikel berjudul *"Semigroup Identities in the Monoid of Two-by-Two Tropical Matrices"*, mengeksplorasi struktur monoid matriks berukuran 2×2 dalam aljabar max-plus dan menunjukkan bahwa struktur tersebut membentuk semigrup dengan identitas tertentu.

Selanjutnya, studi yang dilakukan oleh Izhakian dan Shustin (2012) dalam karya berjudul *"Idempotent Semigroups and Tropical Algebraic Sets"* menyoroti konsep semigrup idempoten dalam konteks aljabar max-plus. Penelitian ini menjelaskan peran penting elemen idempoten dalam struktur semigrup dan keterkaitannya dengan teori aljabar max-plus secara keseluruhan, serta bagaimana elemen tersebut berkontribusi pada identifikasi elemen dalam semigrup reguler.

Sementara itu, Fijavž, Peperko, dan Sikolya (2017) dalam artikelnya *"Semigroups of Max-Plus Linear Operators"* membahas

karakteristik semigrup yang terbentuk dari operator linear pada ruang aljabar max-plus. Kajian ini memberikan perspektif mengenai penerapan operasi semigrup pada ruang vektor max-plus, termasuk aspek stabilitas dan keteraturan yang dimilikinya.

Penelitian yang dilakukan oleh Laure Daviaud, Marianne Johnson, dan Mark Kambites (2018) dalam artikelnya yang berjudul *"Identities in upper triangular tropical matrix semigroups and the bicyclic monoid"* membahas semigrup identitas pada semigrup matriks yang mengkhususkan pada matriks segitiga atas dan *bicyclic monoid*.

Penelitian terkini oleh Aird (2023), yang dimuat dalam artikel berjudul *"Semigroup Identities of Tropical Matrix Semigroups"*, mengkaji semigrup identitas yang berlaku pada matriks dalam aljabar max-plus. Studi ini menelaah bagaimana identitas-identitas tersebut memengaruhi struktur semigrup pada kerangka aljabar max-plus.

Seluruh kajian tersebut menjadi pijakan teoritis penting dalam memahami semigrup identitas pada aljabar max-plus, khususnya dalam menelaah karakteristik pasangan $u = v$ pada matriks $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dengan operasi $\otimes$ yang memenuhi semigrup identitas.

D. Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut :

1. Bagi Penulis
   Meningkatkan pemahaman dan keterampilan dalam kajian struktur aljabar khususnya semigrup identitas dalam aljabar

max-plus.

2. Bagi Lembaga
   Menambah literatur ilmiah sebagai referensi dalam kegiatan akademik dan pengembangan kurikulum matematika.

3. Bagi Pembaca
   Menjadi sumber pembelajaran mengenai aplikasi aljabar max-plus dalam teori semigrup serta inspirasi untuk penelitian lanjutan.

E. Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada pembahasan semigrup identitas yang terbentuk dari matriks berordo 2×2 pada aljabar max-plus.

F. Metodologi Penelitian

Penellitian ini dilakukan melalui studi literatur atau studi pustaka dengan mengkaji artikel-artikel ilmiah yang terkait dengan semigrup identitas pada aljabar max-plus. Langkah-langkah berikut bertujuan untuk membangun dasar teori yang kuat dan menganalisnya dengan tepat.

1. Mempelajari jurnal berjudul *"Identities in upper triangular tropical matrix semigroups and the bicyclic monoid"* yang ditulis oleh Laure Daviaud dan rekan-rekannya secara mendalam untuk memahami metode, hasil, dan implikasi matematika dari penelitian tersebut.

2. Mengkaji konsep dasar semigrup, yang meliputi operasi biner dan sifat-sifatnya, struktur monoid, identitas dan sifat

ketunggalan identitas. Teori yang didapatkan pada tahap ini akan dijadikan dasar untuk tahap berikutnya.

3. Menelaah definisi dari aljabar max-plus, serta penerapannya pada struktur matriks. Kajian dan teori dasar ini akan dimanfaatkan untuk membahas semigrup identitas matriks pada aljabar max-plus.

4. Mendefinisikan semigrup identitas pada aljabar max-plus yang analog dengan semigrup identitas pada aljabar klasik.

5. Menelusuri karakteristik matriks yang membentuk semigrup identitas dalam kerangka aljabar max-plus.

6. Menyusun kesimpulan berdasarkan temuan yang diperoleh dan menyajikannya secara sistematis.

G. Sistematika Penulisan

Penelitian ini disusun secara sistematis kedalam 4 bab utama, sebagai berikut :

1. **BAB I PENDAHULUAN**
   Bab ini menguraikan latar belakang masalah, tujuan penelitian, tinjauan pustaka, manfaat penelitian, batasan masalah, metode yang digunakan dalam penelitian, serta sistematika penulisan.

2. **BAB II LANDASAN PUSTAKA**
   Bab ini memuat berbagai teori yang menjadi dasar dalam penyusunan proposal ini. Adapun teori-teori yang termuat di dalamnya adalah semigrup dan aljabar max-plus.

3. **BAB III SEMIGRUP IDENTITAS PADA SEMIGRUP MATRIKS ATAS ALJABAR MAX-PLUS**

   Bab ini berisi pembahasan mengenai penelitian ini yaitu semigrup identitas pada semigrup matriks atas aljabar max-plus dan karakteristik matriks yang membentuk semigrup identitas dalam kerangka aljabar max-plus.

4. **BAB IV PENUTUP**

   Bab ini menyajikan kesimpulan dari pembahasan pada bab-bab sebelumnya serta memberikan saran untuk pengembangan penelitian di masa mendatang.

BAB II

LANDASAN TEORI

Bab ini membahas definisi dan teorema dasar semigrup yang di ambil dari buku *Nine Chapters on the Semigroups Art* (Cain, 2020). Selanjutnya, definisi aljabar max-plus diambil dari buku *"Max Plus at Work : Modeling and Synchronized Systems : A Course on Max-Plus Algebra and its Applications"* (Heidergott dkk, 2006). Diberikan penjelasan sebagai berikut.

A. Semigrup

Pada bagian ini membahas definisi dan sifat-sifat semigrup. Sebelum membahasnya, terlebih dahulu akan dijelaskan definisi operasi biner sebagai prasyarat. Dalam matematika, dua elemen dari suatu himpunan, seperti bilangan bulat, rasional atau real dapat dikenai suatu operasi yang disebut operasi biner. Berikut ini akan dijelaskan definisi operasi biner.

Definisi 2.1.1 ***Operasi Biner***
Diberikan suatu himpunan tak kosong S. Operasi biner $\star$ *pada himpunan* S *didefinisikan sebagai pemetaan*

$$\star : S \times S \to S$$

untuk setiap $r, s \in S$ *berlaku* $r \star s \in S$

Contoh 2.1.2 Operasi Biner
Misalkan $\mathbb{Z}^+$ merupakan himpunan bilangan positif dengan operasi perkalian biasa $(\times)$. Karena hasil perkalian dua bilangan

positif tetap positif, maka berlaku $r \times s \in \mathbb{Z}^+$ untuk setiap $r, s \in \mathbb{Z}^+$.

Sifat-sifat Operasi Biner

Setelah mengetahui definisi dari operasi biner, selanjutnya akan dijelaskan tentang sifat-sifat operasi biner pada himpunan S sebagai berikut :

a) Tertutup : $\forall r, s \in S, r \star s \in S$.

b) Asosiatif : $(r \star s) \star t = r \star (s \star t)$ untuk setiap $r, s, t \in S$.

c) Elemen Identitas : terdapat elemen $e \in S$ sehingga untuk setiap $r \in S$ berlaku $r \star e = e \star r = r$.

d) Invers : $r \star r^{-1} = r^{-1} \star r = e$ untuk setiap $r \in S$ dengan r^{-1} adalah elemen invers di S.

e) Komutatif : $r \star s = s \star r$, untuk setiap $r, s \in S$.

Setelah membahas definisi dan sifat dasar dari operasi biner, selanjutnya akan dibahas mengenai sifat-sifat fundamental yang terkait dengannya.

Definisi 2.1.3 ***Semigrup***
Diberikan S adalah himpunan tak kosong yang disertai operasi biner $\star$. Struktur aljabar $(S, \star)$ disebut semigrup jika operasi binernya bersifat asosiatif yaitu untuk setiap $r, s, t \in S$ berlaku $(r \star s) \star t = r \star (s \star t)$.

Contoh 2.1.4 Semigrup
Misalkan $r, s, t \in \mathbb{Z}^+$ dengan operasi $+$ untuk setiap $r, s, t \in \mathbb{Z}^+$ berlaku $(r + s) + t = r + (s + t)$. Oleh karena itu, himpunan

$\mathbb{Z}^+$ dengan operasi $+$ dinotasikan dengan $(\mathbb{Z}^+, +)$ membentuk semigrup.

Definisi 2.1.5 ***Monoid***
Diberikan $(S, \star)$ adalah semigrup. Struktur aljabar $(S, \star)$ disebut monoid jika mempunyai identitas, yaitu terdapat elemen e di S sehingga berlaku $r \star e = e \star r = r$, untuk setiap $r \in S$.

Contoh 2.1.6 Monoid
Misalkan $r \in \mathbb{Z}$ dan terdapat $0 \in \mathbb{Z}$ dengan operasi $+$ berlaku $r + 0 = 0 + r = r$ untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, himpunan $\mathbb{Z}$ dengan operasi $+$ dinotasikan dengan $(\mathbb{Z}, +)$ membentuk monoid.

Definisi 2.1.7 ***Elemen Identitas***
Misalkan e adalah anggota dari semigrup $(S, \star)$, untuk setiap $r \in S$ berlaku :

1. *Jika $er = r$ maka e disebut identitas kiri.*
2. *Jika $re = r$ maka e disebut identitas kanan.*
3. *Jika keduanya berlaku maka e disebut identitas.*

Teorema 2.1.8 ***Sifat Ketunggalan Identitas***
Misalkan $(S, \star)$ adalah semigrup, elemen identitas dalam S adalah tunggal.
Bukti. Misalkan semigrup S memiliki dua elemen identitas yaitu e dan e' maka $ee' = e'$ (karena e elemen identitas) dan $ee' = e$ (karena e' elemen identitas). Oleh karena itu kita dapatkan $e' = ee' = e$. Jadi, $e' = e$. Dengan demikian, elemen identitas S dalam bersifat tunggal. ■

Definisi 2.1.9 ***Homomorfisma Semigrup***
Misalkan $(S, \star)$ *dan* $(H, \star)$ *adalah semigrup. Fungsi* δ *disebut homomorfisma semigrup jika memetakan dari* S *ke* H*,untuk setiap* $r, s \in S$ *berlaku* $\delta(r \star s) = \delta(r) \star \delta(s)$*, dapat dituliskan sebagai berikut,*

$$\delta : S \to H$$

Setelah mengetahui definisi semigrup, kemudian akan dijelaskan definisi *free* semigrup dimana himpunannya adalah himpunan kata yang disusun dari elemen-elemen alfabet. Selanjutnya akan dijelaskan terlebih dahulu definisi alfabet, himpunan kata, serta operasi yang digunakan berikut ini.

Definisi 2.1.10 ***Himpunan Alfabet***
Misalkan A *adalah sebuah himpunan berhingga yang tersusun dari huruf/simbol, maka* A *disebut* ***alfabet****. Himpunan semua kata yang terbentuk dari elemen-elemen pada alfabet* A *dengan menyertakan kata kosong/*$\{()\}$ *dinotasikan dengan* $A^\star$ *sedangkan himpunan semua kata yang terbentuk dari elemen-elemen pada alfabet* A *tanpa kata kosong/*$\{()\}$ *dinotasikan dengan* A^+*.*

Contoh 2.1.11 Himpunan Alfabet
Misalkan A adalah himpunan alfabet yang dituliskan dengan A = $\{a, b, c, d, e\}$, maka akan dituliskan $A^\star$ dan A^+ sebagai berikut : $A^\star$ = $\{aa, ab, ac, (), ad, ae, ba, ce\}$ dan A^+ = $\{aa, ab, ac, ad, ae, ba, ce\}$.

Seperti yang telah kita ketahui, sudah di jelaskan definisi dari himpunan alfabet. Seperti struktur semigrup yang dilengkapi dengan operasi biner, himpunan alfabet juga dilengkapi dengan operasi biner konkatinasi agar terbentuk sebuah struktur aljabar.

Berikut akan dijelaskan definisi operasi biner konkatinasi.

Definisi 2.1.12 ***Operasi Konkatinasi***
Misalkan $A^\star$ adalah himpunan semua kata yang dibentuk dari himpunan alfabet A. Operasi konkatinasi $\circ$ didefinisikan sebagai pemetaan

$$\begin{aligned} \circ : A^\star \times A^\star &\to A^\star \\ (u \circ v) &\mapsto uv \end{aligned}$$

untuk setiap $u, v \in A^\star$

Contoh 2.1.13 Operasi Konkatinasi
Misalkan $u, v \in A^+$ dimana $u = abb$ dan $v = aba$, maka $u \circ v = abb \circ aba = abbaba$.

Definisi 2.1.14 ***Free Semigrup***
Diberikan himpunan A^+ yaitu himpunan semua kata dari A tanpa kata kosong/$\{()\}$ dilengkapi dengan operasi konkatinasi $(\circ)$, maka struktur aljabar dari $(A^+, \circ)$ disebut free semigrup atas alfabet A, jika :

1. *Bersifat asosiatif*

$$\begin{aligned} u \circ (v \circ w) &= (a_1, a_2, ..., a_n) \circ ((b_1, b_2, ..., b_n) \circ (c_1, c_2, ..., c_n)) \\ &= (a_1, a_2, ..., a_n)(b_1, b_2, ..., b_n)(c_1, c_2, ..., c_n) \\ (u \circ v) \circ w &= ((a_1, a_2, ..., a_n) \circ (b_1, b_2, ..., b_n)) \circ (c_1, c_2, ..., c_n)) \\ &= (a_1, a_2, ..., a_n)(b_1, b_2, ..., b_n)(c_1, c_2, ..., c_n) \end{aligned}$$

   untuk setiap $u, v, w \in A^+$

2. *Tidak ada relasi lain yang berlaku kecuali yang dihasilkan oleh*

operasi konkatinasi $(\circ)$ *dan sifat asosiatif.*

Free semigrup tidak memiliki elemen identitas, karena tidak menyertakan string kosong/$\{()\}$.

Contoh 2.1.15 ***Free*** **Semigrup**
Misalkan $u, v, w \in A^+$ dimana $u = abc, v = bca, w = aac$ disebut *free* semigrup jika memenuhi sifat asosiatif

$$\begin{aligned} u \circ (v \circ w) &= (a,b,c) \circ ((b,c,a) \circ (a,a,c)) \\ &= (a,b,c)(b,c,a)(a,a,c) \\ &= abcbcaaac \\ (u \circ v) \circ w &= ((a,b,c) \circ (b,c,a)) \circ (a,a,c) \\ &= (a,b,c)(b,c,a)(a,a,c) \\ &= abcbcaaac \end{aligned}$$

Setelah mengetahui definisi dan sifat-sifat semigrup. Selanjutnya definisi semigrup akan dibawa kedalam konsep aljabar max-plus. Berikut akan dijelaskan definisi aljabar max-plus.

B. Aljabar Max-Plus

Diketahui sebuah himpunan tak kosong yang diperluas dengan $\varepsilon = -\infty$, sehingga $\mathbb{R}_\varepsilon$ adalah himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, di mana $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real. Untuk elemen $r, s \in \mathbb{R}_\varepsilon$, didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned} r \oplus s &:= \max(r, s) \\ r \otimes s &:= r + s. \end{aligned}$$

Berikut akan dijelaskan definisi aljabar max-plus.

Definisi 2.2.1 ***Aljabar Max-Plus***

Aljabar max-plus merupakan struktur aljabar $\mathbb{R}_\varepsilon$ *yang dilengkapi dengan dua operasi biner, yaitu* $\oplus$ *dan* $\otimes$*, yang dinotasikan sebagai* $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$*, dengan sifat-sifat berikut :*

a) *Bersifat asosiatif terhadap operasi* $\oplus$ *dan* $\otimes$*, yaitu :*
$\forall r, s, t \in \mathbb{R}_{\max} : r \oplus (s \oplus t) = (r \oplus s) \oplus t$
$\forall r, s, t \in \mathbb{R}_{\max} : r \otimes (s \otimes t) = (r \otimes s) \otimes t.$

b) *Bersifat komutatif terhadap operasi* $\oplus$ *dan* $\otimes$*, yaitu :*
$\forall r, s \in \mathbb{R}_{\max} : r \oplus s = s \oplus r$ *dan* $r \otimes s = s \otimes r.$

c) *Operasi* $\otimes$ *distributif terhadap* $\oplus$*, yaitu :*
$\forall r, s, t \in \mathbb{R}_{\max} : (r \oplus s) \otimes t = (r \otimes t) \oplus (s \otimes t)$ *(Distributif kiri)*
$\forall r, s, t \in \mathbb{R}_{\max} : r \otimes (s \oplus t) = (r \otimes s) \oplus (r \otimes t)$ *(Distributif kanan).*

d) *Terdapat elemen identitas untuk* $\oplus$*, yaitu* $-\infty$*, yang memenuhi :*
$\forall r \in \mathbb{R}_{\max} : r \oplus -\infty = -\infty \oplus r = r.$

e) *Terdapat elemen identitas untuk* $\otimes$*, yaitu 0, dengan sifat :*
$\forall r \in \mathbb{R}_{\max} : r \otimes 0 = 0 \otimes r = r.$

f) *Elemen* $-\infty$ *adalah elemen penyerap untuk* $\otimes$*, dengan sifat :*
$\forall r \in \mathbb{R}_{\max} : r \otimes -\infty = -\infty \otimes r = -\infty.$

g) *Operasi* $\oplus$ *bersifat idempoten, yaitu :*
$\forall r \in \mathbb{R}_{\max} : r \oplus r = r.$

Contoh 2.2.2 Aljabar Max-Plus

$$3 \oplus 1 = \max(3, 1) = 3$$
$$4 \oplus 9 = \max(4, 9) = 9$$
$$3 \otimes 3 = 3 + 3 = 6$$
$$1 \otimes 0 = 1 + 0 = 1$$

Konsep aljabar max-plus dapat diterapkan pada matriks berdimensi $m \times n$. Sebagai ilustrasi, untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$, matriks berukuran $m \times n$ dalam kerangka aljabar max-plus merupakan matriks yang setiap elemennya berasal dari himpunan $\mathbb{R}_{\max}$, dan dinyatakan sebagai $\mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$. Dalam konteks ini, operasi yang digunakan adalah $\oplus$ dan $\otimes$. Sebagai notasi awal, didefinisikan bahwa $[m] = 1, 2, \ldots, m$ dan $[n] = 1, 2, \ldots, n$.

Selanjutnya, operasi penjumlahan matriks dalam aljabar max-plus didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.2.3 ***Penjumlahan Matriks***
Misalkan terdapat dua matriks P dan Q yang masing-masing merupakan anggota dari $\mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$, di mana $P = (p_{ij})$ dan $Q = (q_{ij})$. Penjumlahan matriks P dan Q dinyatakan dengan notasi

$$P \oplus Q := \max(p_{ij}, q_{ij})$$

di mana i diambil dari himpunan $[m]$ dan j diambil dari himpunan $[n]$.

Berikut contoh penjumlahan matriks dalam aljabar max-plus.

Contoh 2.2.4 Penjumlahan matriks atas aljabar max-plus

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}3 & 5\\ 0 & 9\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}0 & 1\\ 7 & 2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}3\oplus 0 & 5\oplus 1\\ 0\oplus 7 & 9\oplus 2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\max(3,0) & \max(5,1)\\ \max(0,7) & \max(9,2)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}3 & 5\\ 7 & 9\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.1}$$

Berikut merupakan definisi dari operasi perkalian matriks dan perkalian skalar dalam aljabar max-plus :

Definisi 2.2.5 ***Perkalian Matriks***

Misalkan terdapat matriks P dan Q dalam aljabar max-plus yang memiliki ukuran yang kompatibel, yaitu jumlah kolom P harus sama dengan jumlah baris Q. Selain itu, terdapat sembarang bilangan $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$. Maka, operasi perkalian matriks dan skalar dalam aljabar max-plus didefinisikan sebagai berikut :

$$(P \otimes Q)_{ij} := \max_{r}(p_{ir} + q_{rj}) \tag{2.2}$$

dan

$$(\alpha \otimes P)_{ij} := \alpha + p_{ij} \tag{2.3}$$

Dengan:

- $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$ adalah skalar dalam aljabar max-plus,
- i adalah indeks baris, $1 \leq i \leq m$,
- j adalah indeks kolom, $1 \leq j \leq n$.

Berikut ini merupakan contoh perkalian pada matriks atas aljabar max-plus.

Contoh 2.2.6 Perkalian matriks atas aljabar max-plus

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -\infty\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}7\\ 1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}(3\otimes 7)\oplus(2\otimes 1)\\ (0\otimes 7)\oplus(-\infty\otimes 1)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\max(3+7,2+1)\\ \max(0+7,-\infty+1)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\max(10,3)\\ \max(7,-\infty)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}10\\ 7\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Contoh 2.2.7 Perkalian matriks skalar atas aljabar max-plus

$$\begin{aligned}3 \otimes \begin{bmatrix}5 & 7\\ -\infty & 9\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}3+5 & 3+7\\ 3+-\infty & 3+9\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}8 & 10\\ -\infty & 12\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Setelah mengetahui definisi aljabar max-plus dan matriks atas aljabar max-plus serta operasinya, maka selanjutnya akan diberikan definisi semigrup matriks atas aljabar max-plus sebagai berikut.

Definisi 2.2.8 ***Semigrup Matriks atas Aljabar Max-Plus*** *(Aird, 2023)*

Misalkan S adalah semiring, dinotasikan $M_n(S)$ adalah semigrup dari matriks berukuran $n \times n$ dengan entri dari S, yang dilengkapi dengan operasi perkalian matriks biasa atau otimes $(\otimes)$ dan memenuhi sifat asosiatif. Maka $M_n(S)$ disebut semigrup matriks.

Contoh 2.2.9 Semigrup Matriks atas Aljabar Max-Plus Misalkan $S = \mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ adalah semiring max-plus. Diambil dua matriks di $M_2(\mathbb{R}_{\max})$, yaitu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
Dihitung $A \otimes B$ dengan aturan : $(A \otimes B)_{ij} := \max_r(a_{ir} + b_{rj})$
Hasilnya :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} \max(1+0,\, 2+3) & \max(1+(-1),\, 2+2) \\ \max(-\infty+0,\, 0+3) & \max(-\infty+(-1),\, 0+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Karena hasilnya tetap dalam $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dan operasi max-plus bersifat asosiatif, maka ini juga membentuk semigrup.

BAB III

SEMIGRUP IDENTITAS PADA SEMIGRUP MATRIKS ATAS ALJABAR MAX-PLUS

A. Semigrup Identitas pada Semigrup Matriks atas Aljabar Max-plus

Sebelum membahas tentang semigrup identitas pada semigrup matriks atas aljabar max-plus, terlebih dahulu akan diberikan definisi semigrup identitas sebagai berikut.

Definisi 3.1.1 ***Semigrup Identitas*** *(Daviaud dkk, 2018)*
Misal $u, v \in A^+$, maka $u = v$ disebut semigrup identitas, jika untuk setiap homomorfisma semigrup $\delta : A^+ \to S$ selalu berlaku

$$\delta(u) = \delta(v)$$

dengan S adalah sebarang semigrup. Untuk $u = v$ maka semigrup identitas disebut trivial.

Berikut ini diberikan contoh semigrup identitas yang merupakan homomorfisma dari A^+ ke semigrup $\mathbb{Z}$.

Contoh 3.1.2 Semigrup Identitas pada bilangan bulat
Misalkan A^+ adalah *free* semigrup dan ω adalah homomorfimsa yang didefinisikan dengan $\omega : (A^+, \star) \to (\mathbb{Z}, +)$ dengan $\omega(a) = x$ dan $\omega(b) = y$ untuk semua $x, y \in \mathbb{Z}$ dan $a, b \in A^+$. Misal $u = ab$

dan $v = ba$ maka didapatkan

$$\begin{aligned}\omega(u) &= ab \\ &= x + y \\ \omega(v) &= ba \\ &= y + x \\ &= x + y\end{aligned}$$

Karena $\omega(u) = \omega(v)$ maka membentuk semigrup identitas dan disebut sebagai identitas komutatif yaitu $ab = ba$.

Karena S adalah sebarang semigrup, maka kita bisa mengambil $S = M_2(\mathbb{R}_{\max})$ yaitu semigrup matriks ordo 2×2 atas aljabar maxplus. Maka akan didefinisikan secara khusus semigrup identitas dari A^+ ke $M_2(\mathbb{R}_{\max})$. Berikut akan diberikan definisi tersebut.

Definisi 3.1.3 ***Semigrup identitas pada semigrup matriks berordo*** 2×2 ***atas aljabar max-plus***
Misal $u, v \in A^+$*, maka* $u = v$ *disebut semigrup identitas, jika untuk setiap homomorfisma semigrup* $\delta : A^+ \to M_2(\mathbb{R}_{\max})$ *selalu berlaku*

$$\delta(u) = \delta(v)$$

dengan $M_2(\mathbb{R}_{\max})$ *adalah semigrup.*

B. Matriks Khusus pada Semigrup Matriks atas Aljabar Max-Plus

Meskipun pasangan identitas $u = v$ di semigrup matriks ordo 2×2 pada aljabar max-plus bisa di cari, tetapi sangat

sulit untuk mencari pasangan identitas yang non-trivial dimana $u \neq v$. Oleh karena itu, akan di cari pasangan identitas $u = v$ di himpunan matriks khusus, diantaranya yaitu matriks segitiga atas/bawah, matriks idempoten, matriks diagonal, matriks *increase*, dan matriks normal.

1. Matriks Segitiga Atas(Bawah)

Matriks segitiga atas pada aljabar max-plus didefinisikan seperti matriks segitiga atas pada aljabar klasik. Akan tetapi untuk elemen nol nya diganti dengan $-\infty$. Selanjutnya akan di lihat apakah ada pasangan $u = v$ yang memenuhi semigrup identitas di matriks segitiga atas. Diberikan contoh sebagai berikut.
Misalkan $\delta : A^+ \to M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dan $u, v \in A^+$ dengan $u = aba$ dan $v = aab$ dimana $a = \begin{bmatrix} a & b \\ -\infty & c \end{bmatrix}$ dan $b = \begin{bmatrix} d & e \\ -\infty & f \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\delta(u) &= aba \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ -\infty & c \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} d & e \\ -\infty & f \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & b \\ -\infty & c \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a \otimes d) \oplus (b \otimes -\infty) & (a \otimes e) \oplus (b \otimes f) \\ (-\infty \otimes d) \oplus (c \otimes -\infty) & (-\infty \otimes e) \oplus (c \otimes f) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & b \\ -\infty & c \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a \otimes d) & ((a \otimes e) \oplus (b \otimes f)) \\ -\infty & c \otimes f \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & b \\ -\infty & c \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a \otimes d \otimes a) & (a \otimes d \otimes b) \oplus (a \otimes e \otimes c) \oplus (b \otimes f \otimes c) \\ -\infty & (c \otimes f \otimes c) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2a + d & max(a + d + b, a + e + c, b + f + c) \\ -\infty & 2c + f \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta(v) &= aab \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ -\infty & c \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & b \\ -\infty & c \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} d & e \\ -\infty & f \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a \otimes a \oplus b \otimes -\infty & a \otimes b \oplus b \otimes c \\ -\infty \otimes a \oplus c \otimes -\infty & -\infty \otimes b \oplus c \otimes c \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} d & e \\ -\infty & f \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2a & a \otimes b \oplus b \otimes c \\ -\infty & 2c \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} d & e \\ -\infty & f \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2a \otimes d & 2a \otimes e \oplus a \otimes b \otimes f \oplus b \otimes c \otimes f \\ -\infty & 2c \otimes f \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2a + d & \max(2a + e,\ a + b + f,\ b + c + f) \\ -\infty & 2c + f \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Karena $\delta(u) \neq \delta(v)$ maka matriks segitiga atas tidak memenuhi semigrup identitas secara umum. Namun, terdapat himpunan matriks segitiga atas yang memenuhi syarat $u = v$ dan membentuk suatu semigrup identitas. Himpunan tersebut terdiri dari semua matriks segitiga atas berukuran 2×2 dengan entri nol pada diagonal utama, yaitu matriks-matriks $A = (a_{ij})$ sedemikian sehingga $a_{ii} = 0$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$. Diberikan contoh sebagai berikut.

Misalkan $\delta : A^+ \to M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dan $u, v \in A^+$ dengan $u = aab$ dan $v = abb$ dimana $a = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}$ dan $b = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}$, maka akan menghasilkan

$$
\begin{aligned}
\delta(u) &= aab \\
&= \begin{bmatrix} 0 & a \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & a \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & b \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & a \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & b \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \max(a,b) \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\
\delta(v) &= abb \\
&= \begin{bmatrix} 0 & a \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & b \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & b \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \max(a,b) \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & b \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \max(a,b,b) \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \max(a,b) \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Karena $\delta(u) = \delta(v)$ maka memenuhi definisi semigrup identitas. Untuk matriks segitiga bawah, langkah-langkah penyelesaiannya serupa dengan yang digunakan pada matriks segitiga atas.

2. Matriks Normal

Sebelum mengidentifikasi apakah ada $u = v$ pada matriks normal yang memenuhi semigrup identitas, terlebih dahulu akan dijelaskan definisi matriks normal. Diberikan definisi sebagai berikut.

Definisi 3.2.1 ***Matriks Normal*** *(Linde, & de la Puente, 2015)*
Matriks persegi $A = (a_{ij})$ *dikatakan matriks normal jika* $a_{ii} = 0$ *dan* $-\infty \leq a_{ij} \leq 0$ *untuk setiap* i, j*, dan dinotasikan dengan* $M_2^{nor}(\mathbb{R})$

Sebelum membuktikan terdapat $u = v$ pada matriks normal yang memenuhi semigrup identitas, akan di tuliskan sebuah lemma yang berperan penting dalam memudahkan proses pengoperasian matriks.

Lemma 3.2.2 ***Matriks Normal*** *(Linde, & de la Puente, 2015)*
Untuk setiap dua matriks normal $A, B \in M_2^{nor}(\mathbb{R})$ *dimana* $a_{ii} = 0$ *dan* $-\infty \leq a_{ij} \leq 0$ *untuk setiap* i, j*, berlaku* $A \otimes B = B \otimes A = A \oplus B$
Bukti. Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},$$

dengan syarat $a_{11} = a_{22} = b_{11} = b_{22} = 0$ dan $-\infty \leq a_{12}, a_{21}, b_{12}, b_{21} \leq 0$. Berdasarkan definisi aljabar max-plus, hasil dari operasi $A \otimes B$ adalah :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} \max(a_{11} + b_{11}, a_{12} + b_{21}) & \max(a_{11} + b_{12}, a_{12} + b_{22}) \\ \max(a_{21} + b_{11}, a_{22} + b_{21}) & \max(a_{21} + b_{12}, a_{22} + b_{22}) \end{bmatrix}.$$

Dengan substitusi $a_{11} = a_{22} = b_{11} = b_{22} = 0$, maka :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} \max(0, a_{12} + b_{21}) & \max(b_{12}, a_{12}) \\ \max(a_{21}, b_{21}) & \max(a_{21} + b_{12}, 0) \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, kita hitung $B \otimes A$. Dengan cara yang sama,

diperoleh :

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} \max(0, b_{12} + a_{21}) & \max(a_{12}, b_{12}) \\ \max(b_{21}, a_{21}) & \max(b_{21} + a_{12}, 0) \end{bmatrix}.$$

Karena operasi maksimum dan penjumlahan dalam aljabar max-plus bersifat komutatif, maka :

$$A \otimes B = B \otimes A.$$

Kemudian, kita hitung $A \oplus B$:

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} \max(a_{11}, b_{11}) & \max(a_{12}, b_{12}) \\ \max(a_{21}, b_{21}) & \max(a_{22}, b_{22}) \end{bmatrix}.$$

Setelah menggantikan nilai-nilai yang diketahui, diperoleh :

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 0 & \max(a_{12}, b_{12}) \\ \max(a_{21}, b_{21}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, dari hasil perhitungan :

$$A \otimes B = B \otimes A = A \oplus B,$$

maka lemma tersebut terbukti. ■

Selanjutnya akan diselidiki apakah ada $u = v$ pada matriks normal atas aljabar max-plus yang memenuhi semigrup identitas. Diberikan contoh sebagai berikut.
Misalkan $\delta : A^+ \to M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dan $u, v \in A^+$ dengan $u = aab$ dan $v = bab$ dimana $a = \begin{bmatrix} 0 & -2a \\ -a & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 & -2b \\ -b & 0 \end{bmatrix}, u = aab, v = bab$

$$\begin{aligned} u &= aab \\ &= A \otimes A \otimes B \end{aligned}$$

Langkah pertama adalah menghitung $A \otimes A = A \oplus A$

$$\begin{aligned} A \otimes A &= A \oplus A \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -2a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} max(0,0) & max(-2a,-2a) \\ max(-a,-a) & max(0,0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \\ &= C \\ C \otimes B &= C \oplus B \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -2b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} max(0,0) & max(-2a,-2b) \\ max(-a,-b) & max(0,0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & max(-2a,-2b) \\ max(-a,-b) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} u &= aab \\ &= A \otimes A \otimes B \\ &= \begin{bmatrix} 0 & max(-2a,-2b) \\ max(-a,-b) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dihitung $v = bab$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} v &= bab \\ &= B \otimes A \otimes B \end{aligned}$$

Langkah pertama adalah menghitung $B \otimes A = B \oplus A$

$$\begin{aligned} B \otimes A &= B \oplus A \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -2a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} max(0,0) & max(-2b,-2a) \\ max(-b,-a) & max(0,0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & max(-2b,-2a) \\ max(-b,-a) & 0 \end{bmatrix} \\ &= D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D \otimes B &= D \oplus B \\ &= \begin{bmatrix} 0 & max(-2b,-2a) \\ max(-b,-a) & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -2b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} max(0,0) & max(max(-2b,-2a),-2b) \\ max(max(-b,-a),-b) & max(0,0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & max(-2b,-2a,-2b) \\ max(-b,-a,-b) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & max(-2a,-2b) \\ max(-a,-b) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} v &= bab \\ &= B \otimes A \otimes B \\ &= \begin{bmatrix} 0 & max(-2a, -2b) \\ max(-a, -b) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Karena $\delta(u) = \delta(v)$ maka terbukti memenuhi definisi semigrup identitas.

3. Matriks Idempoten

Sebelum mengidentifikasi apakah ada $u = v$ pada matriks idempoten yang memenuhi semigrup identitas, terlebih dahulu akan dijelaskan definisi matriks idempoten.

Definisi 3.2.3 ***Matriks Idempoten atas Aljabar Max-Plus***
Misal $A \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ *dikatakan idempoten jika* $A \otimes A = A$

Selanjutnya, akan ditunjukkan ada $u = v$ yang memenuhi semigrup identitas pada matriks idempoten. Diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 3.2.4 Matriks Idempoten
Misalkan $\delta : A^+ \to M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dan $u, v \in A^+$ dengan $u = abb$ dan $v = aab$ dimana $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ dengan $u = abb$ dan $v = aab$. Karena matriks idempoten maka berlaku A^2 = A dan B^2 = B.

Didapatkan :

$$
\begin{aligned}
\delta(u) &= abb \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} max(a_{11}+b_{11}, a_{12}+b_{21}) & max(a_{11}+b_{12}, a_{12}+b_{22}) \\ max(a_{21}+b_{11}, a_{22}+b_{21}) & max(a_{21}+b_{12}, a_{22}+b_{22}) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} max(a_{11}+b_{11}, a_{12}+b_{21}) & max(a_{11}+b_{12}, a_{12}+b_{22}) \\ max(a_{21}+b_{11}, a_{22}+b_{21}) & max(a_{21}+b_{12}, a_{22}+b_{22}) \end{bmatrix} \\
\delta(v) &= aab \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} max(a_{11}+b_{11}, a_{12}+b_{21}) & max(a_{11}+b_{12}, a_{12}+b_{22}) \\ max(a_{21}+b_{11}, a_{22}+b_{21}) & max(a_{21}+b_{12}, a_{22}+b_{22}) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Karena $\delta(u) = \delta(v)$ maka terbukti memenuhi definisi semigrup identitas. Untuk memudahkan pengoperasian pasangan $u = v$ pada matriks idempoten, maka akan ditunjukkan lemma berikut.

Lemma 3.2.5 ***Matriks Idempoten pada Semigrup Identitas***
Misal $S \subseteq M_n(\mathbb{R}_{\max})$ adalah semigrup matriks dengan perkalian max-plus, dan setiap elemen $A \in S$ bersifat idempoten, yaitu $A \otimes A = A$. Maka untuk setiap kata $u \in A^+$ dan setiap $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ berlaku $u^n = u$ sebagai semigrup identitas dalam S.

Bukti. Misalkan $\omega : A^+ \to \mathcal{S}$ adalah homomorfisme semigrup. Maka:

$$\omega(u^n) = \omega(u) \otimes \omega(u) \otimes \cdots \otimes \omega(u) \quad \text{(sebanyak n kali)}$$

Karena $\omega(u) \in \mathcal{S}$, dan semua elemen di $\mathcal{S}$ bersifat idempoten, maka:

$$\omega(u) \otimes \omega(u) = \omega(u) \Rightarrow \omega(u^n) = \omega(u)$$

Karena ini berlaku untuk semua homomorfisme ω, maka $u^n = u$ adalah semigrup identitas dalam $\mathcal{S}$. ■

Ternyata tidak semua $u = v$ pada matriks idempoten memenuhi definisi semigrup identitas. Berikut akan diberikan contoh penyangkal pasangan $u = v$ matriks idempoten.
Misalkan $\delta : A^+ \to M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dan $u, v \in A^+$ dengan $u = bab$ dan $v = aab$ dimana $a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, u = bab, v = aab$

$$\begin{aligned}
\delta(u) &= bab \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(v) &= aab \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Karena $\delta(u) \neq \delta(v)$, maka tidak semua $u = v$ pada matriks idempoten memenuhi definisi semigrup identitas.

4. Matriks Diagonal

Sebelum mengidentifikasi apakah ada $u = v$ pada matriks diagonal yang memenuhi semigrup identitas, terlebih dahulu akan dijelaskan definisi matriks diagonal. Diberikan definisi sebagai berikut.

Definisi 3.2.6 ***Matriks Diagonal atas Aljabar Max-Plus*** *(Lipschutz & Lipson, 2009)*
Sebuah matriks persegi $D = [d_{ij}]$ disebut ***matriks diagonal*** *jika semua elemen di luar diagonal utama bernilai nol, yaitu:*

$$d_{ij} = 0 \quad \textit{untuk semua } i \neq j$$

Matriks diagonal dapat dituliskan dalam bentuk:

$$D = \textit{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$$

Pada aljabar max-plus elemen di luar diagonal utama bernilai $-\infty$

Selanjutanya akan di tunjukkan pasangan $u = v$ dari matriks diagonal 2×2 yang memenuhi semigrup identitas
Misalkan $\delta : A^+ \to M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dan $u, v \in A^+$ dengan $u = aba$ dan $v = aab$ dimana $a = \begin{bmatrix} a & -\infty \\ -\infty & b \end{bmatrix}$ dan $b = \begin{bmatrix} -a & -\infty \\ -\infty & -b \end{bmatrix}$ dengan $u = aba$ dan $v = aab$

$$\begin{aligned}
\delta(u) &= aba \\
&= A \otimes B \otimes A \\
&= \begin{bmatrix} a & -\infty \\ -\infty & b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -a & -\infty \\ -\infty & -b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & -\infty \\ -\infty & b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & -\infty \\ -\infty & b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & -\infty \\ -\infty & b \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(v) &= aab \\
&= A \otimes A \otimes B \\
&= \begin{bmatrix} a & -\infty \\ -\infty & b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & -\infty \\ -\infty & b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -a & -\infty \\ -\infty & -b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2a & -\infty \\ -\infty & 2b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -a & -\infty \\ -\infty & -b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & -\infty \\ -\infty & b \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Karena $\delta(u) = \delta(v)$, maka pasangan tersebut memenuhi definisi semigrup identitas. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa agar $u = v$ pada matriks diagonal memenuhi sifat semigrup identitas, maka masing-masing elemen harus dipasangkan dengan

invers dari matriks tersebut.

Tetapi tidak semua $u = v$ pada matriks diagonal memenuhi definisi semigrup identitas. Berikut akan diberikan contoh penyangkal $u = v$ pada matriks diagonal.

Misalkan $\delta : A^+ \to M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dan $u, v \in A^+$ dengan $u = baa$ dan $v = abb$ dimana $a = \begin{bmatrix} 1 & -\infty \\ -\infty & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -2 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
\delta(u) &= baa \\
&= \begin{bmatrix} -2 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & -\infty \\ -\infty & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & -\infty \\ -\infty & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -\infty \\ -\infty & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & -\infty \\ -\infty & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(v) &= abb \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -\infty \\ -\infty & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -\infty \\ -\infty & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & -\infty \\ -\infty & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Karena $\delta(u) \neq \delta(v)$, maka tidak semua $u = v$ pada matriks diagonal memenuhi definisi semigrup identitas.

5. Matriks Naik

Sebelum mengidentifikasi apakah ada $u = v$ pada matriks naik yang memenuhi semigrup identitas, terlebih dahulu akan dijelaskan definisi matriks naik.

Definisi 3.2.7 ***Matriks Naik atas Aljabar Max-Plus*** *(Muanalifah dkk, 2024)*
Matriks $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ *disebut matriks naik atas aljabar max-plus jika memenuhi kondisi berikut:*

1. *Meningkat secara baris (row-wise increasing).*
   Untuk setiap elemen a_{ij}*, berlaku :*

   $$a_{ij+1} = a_{ij} + 1$$

   untuk semua j *sehingga* $1 \leq j < n$*, di mana* n *adalah dimensi matriks (jumlah kolom).*

2. *Meningkat secara kolom (column-wise increasing).*
   Untuk setiap elemen a_{ij}*, berlaku :*

   $$a_{i+1,j} = a_{ij} + n$$

   untuk semua i *sehingga* $1 \leq i < n$*, di mana* n *adalah dimensi matriks (jumlah baris).*

Himpunan matriks naik atas aljabar max-plus berordo $n \times n$ *bisa dinotasikan dengan* $\mathcal{I}_n$*, untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$*.*

Selanjutnya akan diberikan contoh pasangan $u = v$ pada matriks naik yang memenuhi semigrup identitas. Diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 3.2.8 Matriks Naik

Misalkan $\delta : A^+ \to M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dan $u, v \in A^+$ dengan $u = abc$ dan $v = cba$ dimana $A = \begin{bmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b & b+1 \\ b+2 & b+3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c & c+1 \\ c+2 & c+3 \end{bmatrix}$

Langkah pertama akan dihitung $\delta(u) = abc = ABC$

$$\begin{aligned} A \otimes B \otimes C &= \begin{bmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b & b+1 \\ b+2 & b+3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c & c+1 \\ c+2 & c+3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+b+3 & a+b+4 \\ a+b+5 & a+b+6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c & c+1 \\ c+2 & c+3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+b+c+6 & a+b+c+7 \\ a+b+c+8 & a+b+c+9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dihitung $\delta(v) = cba = CBA$

$$\begin{aligned} C \otimes B \otimes A &= \begin{bmatrix} c & c+1 \\ c+2 & c+3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b & b+1 \\ b+2 & b+3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c+b+3 & c+b+4 \\ c+b+5 & c+b+6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c+b+a+6 & c+b+a+7 \\ c+b+a+8 & c+b+a+9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+b+c+6 & a+b+c+7 \\ a+b+c+8 & a+b+c+9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sehingga

$$A \otimes B \otimes C = C \otimes B \otimes A$$

Dengan demikian, $u = v$ pada matriks naik yang memenuhi sifat semigrup identitas berlaku apabila panjang kata u dan v sama, serta setiap pasangan huruf pada posisi yang bersesuaian memiliki urutan alfabet yang berlawanan arah, yaitu urutan dalam v merupakan kebalikan dari urutan dalam u.

Ternyata tidak semua pasangan $u = v$ pada matriks naik memenuhi definisi semigrup identitas. Berikut akan diberikan contoh penyangkal.

Misalkan $\delta : A^+ \to M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dan $u, v \in A^+$ dengan $u = bab$ dan $v = aba$ dimana $a = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -\infty & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \delta(u) &= bab \\ &= \begin{bmatrix} -\infty & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(v) &= aba \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Karena $\delta(u) \neq \delta(v)$, maka tidak semua $u = v$ pada matriks naik memenuhi definisi semigrup identitas.

Dari beberapa matriks khusus di atas, ternyata tidak semua $u = v$ pada matriks berordo 2×2 di aljabar max-plus memenuhi definisi semigrup identitas. Hal ini dapat ditunjukkan melalui contoh penyangkal $u = v$ pada sebarang matriks ukuran 2×2 berikut.

Misalkan $\delta : A^+ \to M_2(\mathbb{R}_{\max})$ dan $u, v \in A^+$ dengan $u = aba$ dan $v = baa$ dimana $a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $b = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Akan ditunjukkan bahwa $\delta(a) \neq \delta(b)$.

$$\begin{aligned} \delta(u) &= aba \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(v) &= baa \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Karena $\omega(u) \neq \omega(v)$, maka tidak membentuk semigrup identitas.

BAB IV

PENUTUP

A. Kesimpulan

Dari penjelasan yang telah disampaikan dalam pembahasan, dapat disimpulkan bahwa

1. Semigrup identitas pada aljabar max-plus diturunkan dari semigrup identitas pada aljabar klasik, dimana pemetaan yang seharusnya dari A^+ ke semigrup digantikan oleh semigrup matriks atas aljabar max-plus, yang didefinisikan sebagai berikut : Misalkan $u, v \in A^+$ dimana $u \neq v$. Identitas $u = v$ disebut sebagai semigrup identitas jika berlaku $\delta(u) = \delta(v)$ untuk semua homomorfisma semigrup $\delta : A^+ \to M_n(\mathbb{R}_{\max})$, dimana $M_n(\mathbb{R}_{\max})$ adalah himpunan matriks berordo $n \times n$ yang entrinya dari $\mathbb{R}_{\max}$ dan memenuhi sifat semigrup.

2. Dalam semigrup matriks pada aljabar max-plus setiap bentuk $u = v$ dimana $u, v \in A^+$ selalu akan membentuk semigrup identitas yang disebut sebagai semigrup identitas trivial. Sebaliknya, tidak semua identitas non-trivial dimana $u \neq v$ memenuhi sifat tersebut. Beberapa identitas non-trivial $u \neq v$ yang dapat membentuk semigrup identitas ditemukan pada *class* matriks seperti :

   (a) Matriks diagonal : agar $u = v$ pada matriks diagonal memenuhi sifat semigrup identitas, masing-masing elemen harus dipasangkan dengan invers dari matriks tersebut.

(b) Matriks naik : berlaku apabila panjang kata u dan v sama, serta setiap pasangan huruf pada posisi yang bersesuaian memiliki urutan alfabet yang berlawanan arah, yaitu urutan dalam v merupakan kebalikan dari urutan dalam u.

(c) Matriks segitiga atas/bawah : berlaku apabila himpunan tersebut terdiri dari semua matriks segitiga atas/bawah berukuran 2×2 dengan entri nol pada diagonal utama, yaitu matriks-matriks $A = (a_{ij})$ sedemikian sehingga $a_{ii} = 0$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$.

(d) Matriks normal : berlaku apabila panjang kata u dan v sama serta jumlah huruf dalam kata u dan v berlawanan.

(e) Matriks idempoten : berlaku apabila panjang kata u dan v sama serta jumlah huruf dalam kata u dan v berlawanan.

B. Saran

Dalam skripsi ini, peneliti membahas semigrup identitas pada semigrup matriks atas aljabar max-plus dan hanya menggunakan matriks berordo 2×2. Maka disarankan untuk peneliti selanjutnya untuk membahas pada ukuran matriks yang berbeda ataupun selain matriks yang telah disebutkan oleh peneliti serta diperlukan untuk merumuskan kriteria umum yang dapat menjamin terbentuknya semigrup identitas dari pasangan matriks tertentu.

DAFTAR PUSTAKA

Aird, T. D. (2023). *Semigroup identities of tropical matrix semigroups*. PhD thesis, Department of Mathematics, School of Natural Sciences, University of Manchester.

Bylinski, C. (1990). Binary operations applied to finite sequences. *Formalized Mathematics*, 1(4), 643-649.

Cain, A. J. (2020). *Nine chapters on the semigroup art: Lecture notes for a tour through semigroups*. Porto & Lisbon.

Daviaud, L., Johnson, M., & Kambites, M. (2018). Identities in upper triangular tropical matrix semigroups and the bicyclic monoid. *Journal of Algebra, 452*, 311-345.

Fijavž, M. K., Peperko, A., & Sikolya, E. (2017). Semigroups of max-plus linear operators. *Semigroup Forum*, 94, 463-476.

Heidergott, B., Olsder, G. J., & van der Woude, J. (2006). *Max Plus at work: Modeling and analysis of synchronized systems: A course on Max-Plus algebra and its applications*. Princeton University Press.

Itenberg, I., Mikhalkin, G., & Shustin, E. (2008). *Tropical Algebraic Gometry*. Springer Science and Bussines Media.

Izhakian, Z. (2014). Semigroup identities in the monoid triangular tropical matrices. *Semigroup Forum*, 88, 145-161.

Izhakian, Z., Marianne J., & Kambites M. (2018) Tropical matrix groups. *Semigroup forum*. 96, 178-196.

Izhakian, Z., & Margolis, S. (2009). Semigroups identities in the monoid of two-by-two tropical matrices. *arXiv preprint arXiv:0902.1174*.

Izhakian, Z., Knebusch, M., & Rowen, L. (2013). Algebraic structure of tropical mathematics. *arXiv preprint arXiv:1305.3906*.

Izhakian, Z., & Shustin, E. (2012). Idempotent semigroups and tropical algebraic sets. *Journal of the European Mathematical Society*, 14, 489-520.

J. Linde and M.J. de la Puente, Matrices commuting with a given normal tropical matrix. *Linear Algebra and its Applications*, vol. 482, pp. 101-121, 2015.

Lipschutz, S., & Lipson, M. L. (2009). Linear algebra.

Muanalifah, A. (2023). Public key cryptography based on tropical algebra. London: University of Birmingham.

Muanalifah, A., Mahad, Z., & Artes, R. G. (2024). Stickel's Protocol using Tropical Increasing Matrices. *Cryptology ePrint Archive*.

Par, Y. B. S., Manihuruk, S., & Rudhito, M. A. (2024). Pemodelan dan Analisa Layanan Antrian di SPBU Pertamina Giwangan Yogyakarta dengan menggunakan Aljabar Max-Plus.*Jurnal Edukasi dan Sains Matematika (JES-MAT)*, 10(2), 129-144.

Simon, Imre. (1994). On Semigroups of matrices over the tropical semiring. *RAIRO-Theoretical informatics and Applications*, 28, 277-294.

Taylor, M. (2017). On upper triangular tropical matrix semigroups, tropical matrix identities and T-modules. Inggris : University of Manchester.

Wibowo, A., Wijayanti, K., & Veronica, R. B. (2018). Penerapan aljabar max-plus pada pengaturan sistem antrian traffic light. *UNNES Journal of Mathematics*, 7, 192-205.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

1. Nama Lengkap	:	Hurrotul A'yun
2. Tempat & Tgl. Lahir	:	Madiun, 12 Maret 2003
3. Alamat Rumah	:	Mojopurno RT 14/RW 01 Kec. Wungu Kab. Madiun
4. HP	:	085920685999
5. E-mail	:	uyunina1203@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. Pendidikan Formal:
   1) SDN 04 ManisRejo
   2) SMPI As-Syafiah
   3) MAN 2 Nganjuk
   4) UIN Walisongo Semarang
2. Pendidikan Non Formal:
   1) PPP Al Mardliyah Nganjuk
   2) PP Al Huda Nganjuk
   3) PPPTQ Al Hikmah Tugurejo

Semarang, 20 Mei 2025

Hurrotul A'yun
NIM: 2108046054