KARAKTERISTIK SOLUSI DEKOMPOSISI QR DALAM ALJABAR MAX-PLUS TERSIMETRI

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagai Syarat
Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains
dalam Ilmu Matematika

Oleh:

ZAKARIA BANI IKHTIYAR
NIM. 1508046025

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG

2019

KARAKTERISTIK SOLUSI DEKOMPOSISI QR DALAM ALJABAR MAX-PLUS TERSIMETRI

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagai Syarat
Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains
dalam Ilmu Matematika

Oleh:

ZAKARIA BANI IKHTIYAR

NIM. 1508046025

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO

SEMARANG

2019

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	: **Zakaria Bani Ikhtiyar**
NIM	: 1508046025
Program Studi	: Matematika

Menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

Karakteristik Solusi Dekomposisi QR dalam Aljabar Max-Plus Tersimetri

Secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya

Semarang, 27 Juni 2019

Pembuat Pernyataan,

METERAI TEMPEL
TGL. 20
0AC6DAFF906792312
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Zakaria Bani Ikhtiyar

NIM : 1508046025

KEMENTRIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof Dr. Hamka (Kampus 11) Ngaliyan Semarang
Telp.(024) 7601295 Fax. 7615387 Semarang 50185

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini:

Judul	: **Karakteristik Solusi Dekomposisi QR dalam Aljabar Max-Plus Tersimetri**
Nama	: Zakaria Bani Ikhtiyar
NIM	: 1508046025
Jurusan	: Matematika

Telah diujikan dalam sidang *munaqosyah* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 31 Juli 2019

DEWAN PENGUJI

Ketua,

Budi Cahyono, M.Si.
NIP. 198012152009121003

Sekretaris,

Yulia Romadiastri, M. Sc.
NIP. 198107152005012008

Penguji I,

Sri Isnani Setiyaningsih, S.Ag., M.Hum.
NIP.197703302005012001

Penguji II,

Siti Maslihah, M.Si.
NIP.197706112011012004

KEMENTERIAN AGAMA FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI UIN WALISONGO SEMARANG REPUBLIK INDONESIA

Pembimbing I,

Dr. Saminanto, M.Sc.
NIP. 197206042003121002

Pembimbing II,

Budi Cahyono, M.Si.
NIP. 198012152009121003

NOTA DINAS

Semarang, 27 Juni 2019

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo
di Semarang

Assalamu'alaikum. wr. wb.

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan, dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	: **Karakteristik Solusi Dekomposisi QR dalam Aljabar Max-Plus Tersimetri**
Nama	: **Zakaria Bani Ikhtiyar**
NIM	: 1508046025
Program Studi	: Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqosyah.

Wassalamu'alaikum. wr. wb.

Pembimbing I

Dr. Saminanto, M.Sc.
NIP. 197206042003121002

NOTA DINAS

Semarang, 10 Juli 2019

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo
di Semarang

Assalamu'alaikum. wr. wb.

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan, dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	: **Karakteristik Solusi Dekomposisi QR dalam Aljabar Max-Plus Tersimetri**
Nama	: **Zakaria Bani Ikhtiyar**
NIM	: 1508046025
Program Studi	: Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqosyah.

Wassalamu'alaikum. wr. wb.

Pembimbing II

Budi Cahyono, M.Si.
NIP. 198012152009121003

ABSTRAK

Judul : **Karakteristik Solusi Dekomposisi QR dalam Aljabar Max-Plus Tersimetri**
Nama : **Zakaria Bani Ikhtiyar**
NIM : 1508046025
Jurusan : Matematika

Dekomposisi QR merupakan salah satu dekomposisi matriks, yaitu dekomposisi suatu matriks $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ menjadi perkalian matriks ortogonal $(Q \in \mathbb{R}^{m\times m})$ dengan matriks segitiga atas $(R \in \mathbb{R}^{m\times n})$. Dekomposisi ini dapat digunakan dalam aljabar konvensional. Bart De Schutter dan Bart De Moor telah menunjukkan bahwa dekomposisi ini dapat digunakan dalam aljabar max-plus tersimetri. Aljabar max-plus tersimetri merupakan struktur aljabar dengan himpunannya dinotasikan $\mathbb{S}$ yang operasi dasarnya sama dengan ajabar max-plus yaitu struktur aljabar dengan himpunan $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup -\infty$ yang operasi dasar penjumlahannya $(\oplus)$ adalah maksimum yaitu $a + b = max\{a, b\}$ dan operasi dasar perkaliannya $(\otimes)$ adalah penjumlahan yaitu $a \otimes b = a + b$. Karena aljabar max-plus tidak memiliki invers terhadap operasi $\oplus$ maka terbentuklah aljabar max-plus tersimetri. Aljabar max-plus tersimetri ini memiliki kelas himpunan baru yang yaitu kelas *balance*. Kelas *balance* ini adalah kelas baru diluar kelas positif $(+)$, kelas negatif $(-)$ ataupun kelas nol (0) yang biasa dikenal dalam himpunan $\mathbb{R}$.

Penelitian mencari karakteristik solusi dekomposisi QR dalam aljabar max-plus tersimetri dengan beberapa entri matriks awal yang akan didekomposisi merupakan anggota kelas *balance*. Metode yang dilakukan adalah dengan kajian literatur. Teori-teori yang sudah ada dalam literatur kemudian dikaji lebih dalam sehingga didapatkan karakteristik berikut:

Misal matriks yang dimaksud adalah matriks $A \in \mathbb{S}^{m\times n}$ dengan beberapa entri elemen *balance* kemudian dimiliki $B \in (\mathbb{S}^{\vee})^{m\times n}$ dengan ketentuan:

$$b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & ;jika\ \ a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\vee} \\ |a|_{\oplus}\ \ atau\ \ \ominus |a|_{\oplus}\ \ atau\ \ a_{i,j} & ;jika\ \ a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\bullet} \end{cases}$$

Kemudian dekomposisi $QR\ A\ \ \nabla\ \ Q \otimes R$ maka berlaku dekomposisi $QR\ A \oplus B\ \ \nabla\ \ Q \otimes R$.

Karakter yang didapat tersebut dapat digunakan dalam penyelesaian sistem persamaan yang memiliki jenis matriks sesuai dengan ketentuan yang sudah dijelaskan dalam temuan di atas.

Kata Kunci: *Dekomposisi QR, aljabar max-plus tersimetri, dekomposisi QR dalam aljabar max-plus tersimetri*

TRANSLITERASI ARAB-LATIN

Penulisan transliterasi huruf-huruf Arab Latin dalam skripsi ini berpedoman pada (SKB) Menteri Agama dan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan R.I. Nomor: 158 Tahun 1987 dan Nomor: 0543b/U/1987.

Konsonan

Daftar huruf bahasa Arab dan transliterasinya ke dalam huruf Latin dapat dilihat pada halaman berikut:

Huruf Arab	Nama	Huruf Latin	Nama
ا	Alif	Tidak Dilambangkan	Tidak Dilambangkan
ب	Ba	B	Be
ت	Ta	T	Te
ث	Ś a	Ś	Es (dengan titik di atas)
ج	Jim	J	Je
ح	Ḥa	Ḥ	Ha (dengan titik di atas)
خ	Kha	Kh	Ka dan Ha
د	Dal	D	De
ذ	Żal	Ż	Zet (dengan titik di atas)
ر	Ra	R	Er
ز	Zai	Z	Zet
س	Sin	S	Es
ش	Syin	Sy	Es dan Ye
ص	Ṣad	Ṣ	Es (dengan titik di bawah)
ض	Ḍad	Ḍ	De (dengan titik di bawah)
ط	Ṭa	Ṭ	Te (dengan titik di bawah)

ظ	Ẓa	Ẓ	Zet (dengan titik di bawah)
ع	Ain	_	apostrof terbalik
غ	Gain	G	Ge
ف	Fa	F	Ef
ق	Qof	Q	Qi
ك	Kaf	K	Ka
ل	Lam	L	El
م	Mim	M	Em
ن	Nun	N	Ea
و	Wau	W	We
ه	Ha	H	Ha (dengan titik di atas)
ء	Hamzah	_'	Apostrof
ي	Ya	Y	Ye

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT. atas segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "**Karakteristik Solusi Dekomposisi** QR **dalam Aljabar Max-Plus Tersimetri**". Penulisan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di UIN Walisongo Semarang.

Penyusunan dan penyelesaian skripsi ini, tidak lepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu ucapan terima kasih disampaikan kepada:

1. Dr. H. Ruswan, M.A., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang,
2. Emy Siswanah, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang,
3. Siti Maslihah, S.Pd., M.Si., selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang,
4. Dr. Saminanto, M.Sc., selaku dosen pembimbing I dan Budi Cahyono, M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan banyak bimbingan dan arahan dalam skripsi ini,
5. Any Muanalifah, M.Si., selaku dosen Peminatan Aljabar yang banyak memberi masukan dalam menyelesaikan skripsi ini,

6. Seluruh Dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang,
7. Teman-teman seperjuangan kelas Matematika angkatan 2015,
8. Teman-teman seperjuangan mahasiswa angkatan 2015,
9. Teman-teman mahasiswa Program Studi Matematika,
10. Teman-teman GENBI dan GENBI 2018,
11. Reseller dan mitra Zaka Cell,
12. Bapak, ibu dan adik-adik penulis yang tidak pernah lelah dalam mencurahkan kasih sayang, perhatian, motivasi, do'a, dan dukungan untuk menyelesaikan skripsi ini,
13. Bapak Selamet dan Ibu Wiji Yanti sebagai orang tua kedua penulis yang selalu memberi dukungan untuk menyelesaikan skripsi ini,
14. Semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa penusunan skripsi ini masih jauh dari sempurna. Kritik dan saran dapat ditujukan langsung pada e-mail saya. Akhir kata penulis mohon maaf apabila ada kekeliruan di dalam penyusunan skripsi ini.

Semarang, 27 Juni 2019

Penulis,

Zakaria Bani Ikhtiyar

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan dunia industri, kesehatan, pendidikan, serta bidang-bidang lain saat ini menuntut adanya optimalisasi dalam operasional dan hasilnya. Optimalisasi ini bertujuan untuk meminimalkan penggunaan energi serta memaksimalkan keuntungan yang didapat. Dalam operasionalnya bidang-bidang tersebut membentuk suatu sistem dengan unsur-unsur yang tersusun rapi dalam mencapai tujuannya. Katakanlah sistem pada penerbangan pesawat terbang, didalamnya terdapat unsur waktu, jumlah tempat duduk dalam pesawat, jumlah pesawat yang ada, luas area parkir di bandara. Semua unsur yang telah disebutkan tadi disusun secara rapi kemudian membentuk suatu sistem penerbangan pesawat terbang di suatu bandara. Hal ini sejalan dengan Firman Allah S.W.T. dalam Q.S. Yaasiin ayat 30 (Depag, 1989) berikut :

الَّذِى جَعَلَ لَكُمْ مِنَ الشَّجَرِ الْأَخْضَرِ نَارًا فَإِذَا أَنْتُمْ مِنْهُ تُوقِدُونَ

(Allażī ja'ala lakum minasy syajaril akhḍari nāron faiżā antum minhu tūqidūn)

Arti: Yaitu Tuhan yang menjadikan untukmu api dari kayu yang hijau, Maka tiba-tiba kamu nyalakan (api) dari kayu itu.

Ayat tersebut mengandung penjelasan lain bahwa Allah SWT telah menyediakan sumber daya alam yang dapat dimanfa'atkan oleh manusia. Sekalipun sumber daya alam yang disediakan Allah SWT berlimpah, penggunaannya haruslah dengan cara yang bijak dan efisien. Salah satu yang dapat dilakukan adalah dengan mengoptimalkan penggunaan dengan menyusun model sehingga dengan sumber daya alam yang secukupnya dapat memperoleh hasil atau manfa'at yang semaksimal mungkin. Sejalan dengan sikap tersebut, manusia juga harus menyadari bahwa segala sesuatu yang menjadi sumber energi di bumi ini tidak ada dengan sendirinya. Melainkan Allah SWT yang menciptatakan. Sebagaimana teguran Allah SWT dalam Al-Quran Surat Al-Waqiah ayat 72 (Depag, 1989) berikut:

أَأَنْتُمْ أَنْشَأْتُمْ شَجَرَتَهَا أَمْ نَحْنُ الْمُنْشِئُونَ.

(Aantum ansya’tum syajaratahā am naḥnul munsyiūn)

Arti: Kamukah yang menjadikan kayu itu atau Kamikah yang menjadikannya.

Unsur-unsur yang ada dalam suatu sistem kemudian dimodelkan untuk mendapat penyelesaian maksimal dari sistem tersebut. Proses pemodelan ini, biasa dikenal dengan pemodelan matematika. Pemodelan matematika merupakan bidang matematika untuk mempresentasikan dan menjelaskan sistem-sistem secara nyata ke dalam pernyataan matematik (Widowati dan Sutimin, 2007). Dari pemodelan tersebut kemudian kita mendapatkan suatu model matematika yang selanjutnya dapat dianalisa dengan teori-teori matematika yang ada. Model tersebut, dalam matematika dapat disajikan dalam bentuk sistem persamaan linear atau non linear,sistem pertidaksamaan linear atau non linear, atau sistem persamaan differensial, dalam penyajiannya sistem yang ada kemudian disajikan dalam notasi berbentuk matriks. Sistem persamaan atau pertidaksamaan linear adalah sistem persamaan atau pertidaksamaan yang tidak mengandung perkalian antar variabelnya, pengakaran variabelnya, trigonometri, eksponensial, atau logaritma (Larson dan Falvo, 2009), atau secara sederhana adalah persamaan yang variabelnya memiliki pangkat tertinggi 1 dan pangkat terendahnya 0. Berikut contoh sistem persamaan linear dan sistem pertidaksamaan linear:

$$\begin{aligned} 2x+3y+2z&=0 \\ -1x+z&=4 \\ 1y-2z&=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x+3y+2z&<0 \\ x-5y+z&<0 \\ x>0;\ y&>0 \end{aligned}$$

Persamaan differensial adalah persamaan yang melibatkan teori turunan suatu fungsi (Nugroho,2011), beberapa contoh persamaan differensial :

$$\frac{dy}{dx} = e^x + sin(x)$$
$$3x^2dx + 2ydy = 0$$

sedangkan matriks menurut (Hoffman, 2001), matriks adalah susunan elemen persegi panjang (baik angka atau simbol), yang diatur dalam baris dan kolom yang teratur. Ukuran matriks ditentukan oleh jumlah baris dikalikan jumlah kolom. Matriks dengan m baris dan n kolom dikatakan sebagai matriks berukuran $m \times n$. Matriks biasa disimbolkan dengan huruf kapital, misalnya $A, B, C, ...,$ dst sedangkan elemen umumnya biasa dituliskan dalam tanda kurung siku, misalnya, $[a_{i,j}]$, berikut ini contoh penulisan matriks menurut (Anton ,1987):

$$A = [a_{i,j}] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

dengan $i = 1, 2, \ldots m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$. Elemen atau entri dari matriks A pada baris ke i dan kolom ke j biasa disimbolkan dengan $a_{i,j}$ dengan ketentuan i dan j diatas.Himpunan matriks dengan entri bilangan real berukuran $m \times n$ dinotasikan $\mathbb{R}^{m \times n}$, berlaku pula pada himpunan-himpunan lainnya. Matriks yang entri -entrinya adalah koefisien-koefisien sistem persamaan atau pun pertidaksamaan disebut dengan matriks *augmented* (Anton , 1987). Matriks ini untuk mempermudah penyelesaian model yang ada.

Penyelesaian dengan matriks ini, dapat dipermudah dengan dekomposisi matriks. Dekomposisi matriks yaitu modifikasi suatu matriks menjadi beberapa matriks lain yang menjadi penyusunnya (Ruminta , 2014). Dekomposisi matriks yang ada diantaranya dekomposisi LU yaitu dekomposisi suatu matriks $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ menjadi perkalian matriks segitiga bawah ($L \in \mathbb{R}^{n \times n}$) dan matriks segitiga atas ($U \in \mathbb{R}^{n \times n}$) $(A = L \times U)$ (Ruminta, 2014), serta dekomposisi QR yaitu dekomposisi suatu matriks $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ menjadi perkalian matriks ortogonal ($Q \in \mathbb{R}^{mxm}$) [yaitu matriks yang hasil kali antara dirinya sendiri (Q) dengan transposnya (Q^T) adalah matriks identitas] dan matriks segitiga atas ($R \in \mathbb{R}^{m \times n}$) $(A = Q \times R)$ (Ruminta,2014).

Dekomposisi yang ada sudah biasa dilakukan dalam aljabar konvensional, yang didalamnya terdapat operasi dasar penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\times)$.

Perkembangan penelitian tentang struktur aljabar saat ini sudah dikenal struktur aljabar max-plus. Aljabar max-plus merupakan struktur aljabar yang memiliki himpunan dan operasi dasar yang berbeda dengan himpunan $\mathbb{R}$.

Farlow dalam karyanya (Farlow , 2009), menjelaskan bahwa aljabar max-plus yaitu struktur aljabar dengan himpunan yang disimbolkan $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dilengkapi dengan dua operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$ yang didefinisikan sebagai :

$$a \oplus b = \max(a, b)$$
$$a \otimes b = a + b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_{\max}$$

operasi aritmatika ini dapat diperluas ke dalam operasi pada vektor dan matriks.

Aljabar max-plus tidak memiliki invers terhadap operasi perkalian $\otimes$ sehingga dibangunlah struktur baru sebagai pelebaran dari aljabar max-plus ini, yang dinamakan aljabar max-plus tersimetri ($\mathbb{S}$) (Bacelli, dkk. , 2001). Pelebaran struktur ini seperti halnya pelebaran himpunan $\mathbb{N}$ menjadi $\mathbb{Z}$ (Bacelli, dkk.,2001).

Perkembangan Dekomposisi QR dalam aljabar max-plus telah diteliti oleh De Schutter dan De Moor (De Scutter dan De Moor, 2002) dalam karyanya "The QR Decomposition and The Singular Value Decomposition in The Symmetrized Max-Plus Algebra Revisited".

Penelitian ini menunjukkan bahwa dekomposisi QR yang berlaku dalam aljabar konvensional dapat diaplikasikan dalam aljabar max-plus. Selian itu, dalam penelitian tersebut juga dijelaskan terbentuknya kelas baru pada $\mathbb{S}$ yang bentuk himpunannya adalah pasangan berurutan $(\mathbb{R}_{max}, \mathbb{R}_{max})$ yaitu kelas *balance*. Kelas *balance* ini, secara sederhana jika kita mengenal kelas positif (+), kelas negatif (-), dan kelas nol (0) pada himpunan $\mathbb{R}$, kelas *balance* ini diluar kelas-kelas tersebut, yaitu kelas dengan bentuk himpunan $\{(a, a) | a \in \mathbb{R}_{max}\}$. Perkembangan penelitian tersebt, belum ditemukan pembahasan lanjutan tentang dekomposisi QR dalam aljabar max-plus tersimetri ini terutama dalam keunikan kelas himpunan baru yang terbentuk.

Dengan penjelasan diatas, maka peneliti tertarik dengan terbentuknya kelas baru dalam himpunan S.Oleh karena itu penelitian ini membahas tentang karakteristik solusi dekomposisi QR dengan beberapa entri berupa bilangan pada kelas *balance*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka rumusan masalah untuk penelitian ini adalah:

Bagaimana karakteristik solusi dekomposisi QR dalam aljabar max-plus tersimetri dengan beberapa entri matriks yang akan di dekomposisi berupa bilangan dalam kelas *balance* pada himpunan $\mathbb{S}$?

1.3 Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan dan manfaat dari penelitian ini dijelaskan dibawah ini:

1.3.1 Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penelitian ini adalah:
Mendapatkan karakteristik solusi dekomposisi QR dalam ajabar max-plus tersimetri dengan beberapa entri matriks yang akan di dekomposisi berupa bilangan dalam kelas *balance* pada himpunan $\mathbb{S}$.

1.3.2 Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat sebagai berikut:

1. Secara teoritis, manfaat dari penelitian ini adalah untuk menambah materi baru dalam lingkup matriks, aljabar max-plus, dan dekomposisi QR dalam ajabar max-plus tersimetri.
2. Secara praktis, manfaat penelitian ini untuk mempemudah penghitungan dari dekomposisi QR dalam aljabar max-plus tersimetri, karena telah dididapatkan karakteristik solusi yang ada.

1.4 Sistematika Penulisan

Pada penelitian ini disusun berdasarkan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan dan manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi tentang landasan teori yang digunakan dalam penelitian, serta kajian pustaka dari penelitian sebelumnya yang mendukung penelitian ini.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini berisi tentang jenis penelitian, pendekatan penelitian, sumber data, teknik pengumpulan data, serta teknis analisis data.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini dasar tentang deskripsi data dan pembahasan.

BAB V PENUTUP

Bab ini kesimpulan penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Landasan Teori

Bab ini akan menjelaskan tentang landasan teori dalam lingkup aljabar konvensional, aljabar max-plus, aljabar max-plus tersimetri, serta dekomposisi QR dalam aljabar max-pus tersimetri. Teori yang akan dibahas diantaranya tentang pengertian matriks, jenis-jenis matriks, operasi matriks pada aljabar konvensional, operasi matriks pada aljabar max-plus, operasi matriks dalam aljabar max-plus tersimetri, pembentukan aljabar max-plus tersimetri, serta dekomposisi QR dalam aljabar konvensional. Penulisan dalam bab ini berupa teori kemudian diikuti contoh dari teori yang telah dijelaskan.

2.1.1 Pengertian Matriks dan Vektor

Menurut (Hoffman , 2001), matriks adalah susunan elemen persegi panjang (baik angka atau simbol), yang diatur dalam baris dan kolom yang teratur. Ukuran matriks ditentukan oleh jumlah baris dikalikan jumlah kolom. Matriks dengan m baris dan n kolom dikatakan sebagai matriks berukuran $m \times n$. Matriks biasa disimbolkan dengan huruf kapital, misalnya $A, B, C, ...,$ dst sedangkan elemen umumnya biasa dituliskan dalam tanda kurung siku, misalnya, $[a_{i,j}]$, berikut ini contoh penulisan matriks menurut (Anton,1987):

$$A = [a_{i,j}] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

dengan $i = 1, 2, \ldots m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$. Elemen atau entri dari matriks A pada baris ke i dan kolom ke j biasa disimbolkan dengan $a_{i,j}$ dengan ketentuan i dan j diatas. Himpunan matriks dengan entri bilangan real berukuran $m \times n$ dinotasikan $\mathbb{R}^{m \times n}$, berlaku pula pada himpunan-himpunan lainnya.

Kemudian menurut (Hoffman, 2001) juga, vektor adalah matriks spesial dengan ukuran satu baris saja atau satu kolom saja. Vektor yang memiliki unsur hanya satu baris biasa disebut dengan vektor baris, sedangkan vektor yang memiliki unsur hanya satu kolom biasa disebut vektor kolom. Penotasian vektor biasa menggunakan huruf kecil yang ditebalkan. Berikut diberikan vektor baris **u** dan vektor kolom **v**:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}; \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

Elemen atau entri dari vektor **u** biasa disimbolkan dengan u_i, dengan $i = 1, 2, \ldots, n$. Penyimbolan elemen atau entri vektor **v** yaitu v_i.

Selanjutnya, akan dikatakan bahwa i berarti baris ke i

pada suatu matriks, dan j berarti kolom ke j pada suatu matriks saat membahas tentang matriks.

2.1.2 Operasi Matriks dalam Aljabar Konvensional

Sebelum membahas tentang dekomposisi QR, akan diperkenalkan operasi-operasi pada matriks berikut:

1. Penjumlahan matriks
   Misal dimiliki matriks $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dan matriks $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, maka operasi penjumahannya sebagai berikut:

$$A + B = [(a+b)_{i,j}] = a_{i,j} + b_{i,j}$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, m; j = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

2. Perkalian matriks
   Misal dimiliki matriks $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dan matriks $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, maka operasi perkaliannya sebagai berikut:

$$A \times B = [(a \times b)_{i,l}] = \sum_{j=1}^{n} (a_{i,j} \times b_{j,l})$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, m; l = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

3. Perkalian matriks dengan konstanta
   Misal dimiliki matriks $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dan konstanta $\alpha \in \mathbb{R}$, maka operasi perkalian konstanta dengan matriksnya sebagai berikut:

$$\alpha \times A = \alpha \times [a_{i,j}] = \alpha \times a_{i,j}$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, m; j = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

4. Panjang vektor

   Misal dimiliki vektor $\mathbf{v}$ ukuran $k \times 1$ dan konstanta $\alpha \in \mathbb{R}$, maka operasi perkalian konstanta dengan matriksnya sebagai berikut:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (v_i)^2}$$

5. Transpose matriks

   Misal dimiliki matriks $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dengan bentuk berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

   Transpose $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ atau dapat disimbolkan dengan $A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ adalah matriks yang setiap baris ke-$i$nya merupakan kolom ke-i dari matriks A. Matriks A^T dituliskan:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.1. *(Operasi Matriks dalam Aljabar Konvensional)*

1. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3+4 & 2+0 & 2+5 \\ 0+0 & 5+3 & 5+6 \\ 0+2 & -3+4 & 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 7 \\ 0 & 8 & 11 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (2\times 1)+(4\times 0) & (2\times -4)+(4\times 2) \\ (5\times 1)+(1\times 0) & (5\times -4)+(1\times 2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+0 & -8+8 \\ 5+0 & -20+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -18 \end{bmatrix}$$

3. $4 \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\times 2 & 4\times 4 & 4\times 0 \\ 4\times 5 & 4\times 1 & 4\times 0 \\ 4\times -2 & 4\times 3 & 4\times 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 16 & 0 \\ 20 & 4 & 0 \\ -8 & 12 & 4 \end{bmatrix}$$

4. $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

5. $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 7 & 5 & 0 \\ -8 & 1 & -1 \end{bmatrix}; A^T = \begin{bmatrix} 8 & 7 & -8 \\ 4 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

2.1.3 Jenis-Jenis Matriks

Dalam penelitian ini akan digunakan beberapa jenis matriks, dibawah ini akan dijelaskan matriks-matriks yang akan digunakan dalam penelitian :

1. Matriks identitas adalah matriks dengan ukuran $n \times n$ dimana untuk elemen pada $i = j$ adalah identitas terhadap operasi perkalian (1 pada operasi $\times$) dan elemen lainnya adalah identitas terhadap operasi penjumlahan (0 pada operasi +)(Ruminta,2014). Matriks identitas dapat disimbolkan dengan I_n. Secara umum, matriks identitas pada aljabar konvensional dapat dituliskan:

$$I_n = \begin{cases} i_{i,j} = 1 \text{ jika } i = j \\ i_{i,j} = 0 \text{ jika } i \neq j \end{cases}$$

Contoh 2.2. *(Matriks Identitas)*

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Ortogonal yaitu matriks dengan ukuran $n \times n$ yang perkalian dirinya sendiri dengan transposenya

sama dengan matriks identitas atau dapat dituliskan misal Q matriks ortogonal, maka $Q \times Q^T = I_n$ (Ruminta ,2014).

Contoh 2.3. *(Matriks Ortogonal)*

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{13}\sqrt{13} & \frac{3}{13}\sqrt{13} \\ \frac{3}{13}\sqrt{13} & -\frac{2}{13}\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

3. Matriks segitiga atas adalah matriks ukuran $m \times n$ dimana elemen pada $i < j$ ada yang tidak nol (Ruminta, 2014). Secara umum misal dimiliki R matriks segitiga atas, maka dapat dituliskan:

$$R = \begin{cases} \exists r_{i,j} \neq 0 \text{ jika } i = j \text{ atau } i < j \\ r_{i,j} = 0 \text{ jika } i > j \end{cases}$$

Contoh 2.4. *(Matriks Segitiga Atas)*

$$R = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2.1.4 Dekomposisi QR dalam Aljabar Konvensional

Berikut ini akan diberikan definisi tentang dekomposisi QR menurut (Ruminta,2014):

Definisi 2.1. *Dekomposisi QR adalah dekomposisi suatu matriks A berukuran $m \times n$ menjadi suatu perkalian matriks ortogonal Q berukuran $m \times m$ dengan matriks segitiga atas R berukuran $m \times n$). Misal dimiliki suatu matriks A berukuran $m \times n$ dapat didekomposisi QR menjadi bentuk berikut:*

$$A = Q \times R$$

Untuk menyelesaikan dekomposisi QR dalam penelitian ini, peneliti menggunakan dua cara, yaitu cara manual dengan metode Gram Schmidt yang dijelaskan dalam (Golub dan Loan ,1996), kemudian dengan aplikasi mapel 17 yang caranya telah dijelaskan dalam **Lampiran 2, Lampiran 4, dan Lampiran 5**.

Berikut algoritma dekomposisi QR dengan metode *Gram Schmidt* dalam (Golub dan Loan,1996):

Algoritma 2.1.

INPUT = Sebuah matriks bebas A ukuran $m \times n$
OUTPUT = Matriks ortogonal Q berukuran $m \times m$ dan matriks segitiga atas R berukuran $m \times n$

1. ***untuk*** $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{bmatrix}$$

2. $r_{1,1} = ||a_1||$

3. $q_1 = \frac{a_1}{r_{1,1}}$

4. ***untuk*** $i = 2, 3, \ldots, m$

$j = 1, 2, \ldots, i - 1$

$r_{j,i} = (q_j)^T a_i$

$\hat{q}_i = a_i - r_{j,i}$

selesai

$r_{i,i} = ||\hat{q}_i||$

$q_i = \frac{\hat{q}_i}{r_{i,i}}$

selesai

5. $Q = [q_1|q_2| \ldots |q_n]$

$R = [R]_{i,j} = r_{i,j}$

Contoh 2.5. *(Dekomposisi QR dalam Aljabar Konvensional)*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

1. $a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. $r_{1,1} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

3. $q_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \times \frac{1}{5} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$

4. $r_{1,2} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{4}{5}$

$$\hat{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \times \frac{4}{5} = \begin{bmatrix} \frac{25}{25} - \frac{16}{25} \\ 0 + \frac{12}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{25} \\ \frac{12}{25} \end{bmatrix}$$

$$r_{2,2} = \sqrt{(\tfrac{9}{25})^2 + (\tfrac{12}{25})^2} = \sqrt{\tfrac{81+144}{625}} = \sqrt{\tfrac{225}{625}} = \tfrac{3}{5}$$

$$q_2 = \begin{bmatrix} \frac{9}{25} \\ \frac{12}{25} \end{bmatrix} \times \frac{5}{\sqrt{3}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

5. $Q = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 5 & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

$$Q \times Q^T = Q^T \times Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.5 Aljabar Max-Plus

Selanjutnya akan dibahas tentang pengertian aljabar max-plus, serta operasi matriks dalam aljabar max-plus. Berikut ini definisi aljabar max-plus menurut (Bacelli, dkk. ,2001):

Definisi 2.2. *Diberikan himpunan tak kosong* $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *dengan dua operasi yaitu* $\oplus$ *dan* $\otimes$. *Untuk setiap* $a, b \in \mathbb{R}_{\max}$ *didefinisikan:*

$$a \oplus b = max(a, b) \in \mathbb{R}_{\max}$$

$$a \otimes b = a + b \in \mathbb{R}_{\max}$$

dengan elemen identitas terhadap penjumlahan $(\oplus)$ *adalah* 0 *dan elemen identitas terhadap perkalian* $(\otimes)$ *adalah* $-\infty$.

Struktur ($\mathbb{R}_{\max}, \oplus, \otimes$) yang ditulis $\mathbb{R}_{\max}$ disebut aljabar max-plus.

Kemudian berikut ini perpangkatan dalam aljabar max-plus menurut (Farlow,2009):

Definisi 2.3. *Misal $r \in \mathbb{R}$, pangkat r dari $x \in \mathbb{R}_{max}$ dinotasikan dengan $x^{\otimes r}$ dan didefinisikan sebagai:*

$$x^{\otimes r} = r \times x$$

Selanjutnya, peneliti akan mendefinisikan $\epsilon \overset{def}{=} -\infty$

Contoh 2.6. *(Operasi dalam Aljabar Max-Plus)*

1. $3 \oplus 5 = max(3,5) = 5$
2. $\epsilon \oplus 4 = max(-\infty, 4) = 4$
3. $4 \otimes \epsilon = 4 + -\infty = -\infty$
4. $2^{\otimes 3} = 3 \cdot 2 = 6$
5. $\epsilon^{\otimes 2} = 2 \cdot \epsilon = 2 \cdot (-\infty) = -\infty$
6. $3^{\otimes 0} = 0 \cdot 3 = 0$

Operasi aritmatik tersebut dapat diperluas dalam matriks. Menurut (Farlow, 2009), dalam tesisnya dia menjelaskan operasi matriks dalam aljabar max-plus sebagai berikut:

1. Penjumlahan matriks

   Misal dimiliki matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{m\times n}$ dan matriks $B \in \mathbb{R}_{max}^{m\times n}$, maka operasi penjumlahan $(\oplus)$ matriksnya sebagai berikut:

$$A \oplus B = [(a \oplus b)_{i,j}] = max(a_{i,j}, b_{i,j})$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, m; j = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

2. Perkalian matriks

   Misal dimiliki matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{m\times n}$ dan matriks $B \in \mathbb{R}_{max}^{n\times m}$, maka operasi perkalian $(\otimes)$ matriksnya sebagai berikut:

$$A \otimes B = [(a \otimes b)_{i,l}] = \bigoplus_{j=1}^{n} (a_{i,j} + b_{j,l})$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, m; l = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

3. Perkalian konstanta dengan matriks Misal dimiliki matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{m\times n}$dan konstanta $\alpha \in \mathbb{R}$, maka operasi perkalian konstanta dengan matriksnya sebagai berikut:

$$\alpha \otimes A = \alpha \otimes [a_{i,j}] = \alpha \otimes a_{i,j}$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, m; j = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Contoh 2.7. *(Operasi Matriks dalam Aljabar Max-Plus)*

1. $$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ \epsilon & 5 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 4 & \epsilon & 5 \\ \epsilon & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \oplus 4 & 2 \oplus -\infty & 2 \oplus 5 \\ -\infty \oplus -\infty & 5 \oplus 3 & 5 \oplus 6 \\ 0 \oplus 2 & -3 \oplus 4 & 3 \oplus 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(3,4) & max(2,-\infty) & max(2,5) \\ max(-\infty,-\infty) & max(5,3) & max(5,6) \\ max(0,2) & max(-3,4) & max(3,0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -\infty & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

2. $$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ \epsilon & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2 \otimes 1) \oplus (4 \otimes -\infty) & (2 \otimes -4) \oplus (4 \otimes 2) \\ (5 \otimes 1) \oplus (1 \otimes -\infty) & (5 \otimes -4) \oplus (1 \otimes 2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2+1) \oplus (4+(-\infty)) & (2+(-4)) \oplus (4+2) \\ (5+1) \oplus (1+(-\infty)) & (5+(-4)) \oplus (1+2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \oplus -\infty & -2 \oplus 6 \\ 6 \oplus -\infty & 1 \oplus 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(3,-\infty) & max(-2,6) \\ max(6,-\infty) & max(1,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

3. $$4 \otimes \begin{bmatrix} 2 & 4 & \epsilon \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \otimes 2 & 4 \otimes 4 & 4 \otimes -\infty \\ 4 \otimes 5 & 4 \otimes 1 & 4 \otimes 0 \\ 4 \otimes -2 & 4 \otimes 3 & 4 \otimes 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+2 & 4+4 & 4+(-\infty) \\ 4+5 & 4+1 & 4+0 \\ 4+(-2) & 4+3 & 4+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 8 & -\infty \\ 9 & 5 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan dipaparkan tentang aljabar max-plus tersimetri.

2.1.6 Aljabar Max-Plus Tersimetri

Seperti yang dijelaskan sebelumnya memperlihatkan bahwa aljabar max-plus tidak memiliki invers terhadap operasi penjumlahan $(\oplus)$ seperti pada contoh berikut ini:

$$10 \oplus x = max(10, x) = -\infty = \epsilon$$

dalam kasus tersebut tidak memungkinkan ditemukan nilai x yang memenuhi persamaan. Oleh karena itu dilakukan perluasan pada aljabar max-plus $(\mathbb{R}_{max})$ menjadi aljabar max-plus tersimetri $(\mathbb{S})$ (Bacelli, dkk.,2001).

Sebelum dibahas tentang aljabar max-plus tersimetri, akan diperkenalkan terlebih dahulu tentang pasangan aljabar menurut (Bacelli, dkk.,2001).

Definisi 2.4. *Misalkan* $\mathbb{P}_{max} = \mathbb{R}^2_{max} = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{R}_{max}\}$ *dilengkapi dua operasi yaitu* $\oplus$ *dan* $\otimes$*. Kemudian* $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{P}_{max}$ *didefinisikan sifat berikut :*

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a \oplus c, b \oplus d) \in \mathbb{P}_{max}$$
$$(a,b) \otimes (c,d) = ((a \otimes c) \oplus (b \otimes d), (a \otimes d) \oplus (b \otimes c)) \in \mathbb{P}_{max}$$

Dengan (ϵ,ϵ) *sebagai elemen nol dan* $(0,\epsilon)$ *sebagai elemen satuan.*
Struktur aljabar $(\mathbb{P}_{max},\oplus,\otimes)$ *disebut pasangan aljabar.*

Contoh 2.8. *Operasi pada Pasangan Ajabar*

1. $$\begin{aligned}(3,5) \oplus (4,2) &= (3 \oplus 4, 5 \oplus 2)\\ &= (max(3,4), max(5,2)) = (4,5)\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}(2,1) \otimes (3,2) &= ((2 \otimes 3) \oplus (1 \otimes 2), (2 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 3))\\ &= ((2+3) \oplus (1+2), (2+2) \oplus (1+3))\\ &= (5 \oplus 3, 4 \oplus 4)\\ &= (max(5,3), max(4,4)) = (5,4)\end{aligned}$$

Dalam pasangan aljabar ini akan dikenalkan beberapa operator yang akan digunakan dalam pembahasan berikutnya. Berikut ini operator-operator dalam pasangan aljabar menurut (Bacelli, dkk.,2001):

Definisi 2.5. *Misal* $x \in \mathbb{P}_{max}, x = (a, b)$*, didefinisikan beberapa operator berikut:*

1. *Operasi minus didefinisikan* $\ominus x = (b, a)$
2. *Nilai absolute dari x didefinisikan* $|x| = a \oplus b$
3. *Operator keseimbangan didefinisikan*
   $x^{\bullet} = x \ominus x = (|x|, |x|).$

Contoh 2.9. *Operator pada Pasangan Aljabar*

1. $\ominus(2, 1) = (1, 2)$
2. $|(3, 8)| = 3 \oplus 8 = max(3, 8) = 8$
3. $(4, 2)^{\bullet} = (4, 2) \ominus (4, 2) = (4, 2) \oplus (2, 4)$
   $= (4 \oplus 2, 2 \oplus 4) = (max(4, 2), max(2, 4)) = (4, 4)$

Setelah diperkenalkan tentang pasangan aljabar, disapatkan perbedaan dalam aljabar konvensional dengan aljabar max-plus yang lain seain operasinya. Yaitu dalam aljabar konvensional, dimiliki bahwa $a - a = 0$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$. Pasangan aljabar memperlihatkan bahwa $(2, 1) \oplus (\ominus(2, 1)) = (2, 1) \oplus (1, 2) = (max(2, 1), max(1, 2)) = (2, 2) \neq (\epsilon, \epsilon)$. Persamaan tersebut kemudian memberikan alasan untuk pengenalan relasi keseimbangan yang dinotasikan dengan ∇, dengan relasi keseimbangan ini akan diperlihatkan bahwa $(2, 2)\nabla(\epsilon, \epsilon)$ kemudian operator ∇ ini berkoresponden dengan operator $=$ pada aljabar konvensional. Berikut ini definisi relasi keseimbangan menurut (Bacelli, dkk.,2001):

Definisi 2.6. *Misal* $x = (a, b),\ \ y = (c, d) \in \mathbb{P}_{max}$. *Diberikan definisi relasi keseimbangan* (∇), *yaitu* x *seimbang dengan* y *dituliskan :*

$$x \nabla y \ \textit{jika} \ \ a \oplus d = b \oplus c$$

Contoh 2.10. *Relasi keseimbangan*

1. $(2, 3)\nabla(1, 3)$ *karena,* $2 \oplus 3 = max(2, 3) = 3 = max(3, 1)$ $= 3 \oplus 1$

2. $(1, 1)$ *tidak seimbang dengan* $(2, 3)$ *karena ,* $1 \oplus 3 = max(1, 3) = 3 \neq 2 = max(1, 2) = 1 \oplus 2$

Relasi keseimbangan ini bukanlah relasi ekuivalensi, yang gagal dalam sifat transitif. Hal ini dapat dilihat dalam contoh berikut :

Contoh 2.11. *Ketidaktransitifan relasi keseimbangan*

Misal dimiliki $x = (4, 1).y = (4, 4), z = (2, 3)$
$(4, 1)\nabla(4, 4)$ *karena* $4 \oplus 4 = 4 = 1 \oplus 4$,
$(4, 4)\nabla(2, 3)$ *karena* $4 \oplus 3 = 4 = 4 \oplus 2$,
$(4, 1)$ *tidak seimbang dengan* $(2, 3)$ *karena,* $4 \oplus 3 = 4 \neq 2$ $= 1 \oplus 2$
Sehingga $(4, 1)\nabla(4, 4), (4, 4)\nabla(2, 3)$ *tetapi* $(4, 1)$ *tidak seimbang dengan* $(2, 3)$
Atau $x\nabla y, y\nabla z$, *tetapi* x *tidak se- imbang dengan* z

Karena relasi keseimbangan (∇) bukan relasi ekuivalensi maka akan didefinisikan relasi baru yang merupakan relasi ekuivalensi untuk membentuk himpunan dengan kelas-kelas ekuivalensi, yaitu himpunan yang dilengkapi dengan relasi ekuivalensi, seperti himpunan pasangan $\mathbb{N}^2$ dengan relasi $=$, yaitu $(\mathbb{N},\mathbb{N})/ =$ yang menghasilkan $\mathbb{Z}$ (De Scutter dan De Moor, 2002). Berikut relasi ekuivalensi R menurut (Bacelli, dkk.,2001):

Definisi 2.7. *Misal dimiliki* $x = (a,b)$, $y = (c,d) \in \mathbb{P}_{max}$ *diberikan suatu relasi* R *yang didefinisikan :*

$$x\ R\ y\ jika \begin{cases} x \nabla y & a \neq b, c \neq d \\ (a,b) = (c,d) & , lainnya \end{cases}$$

Dari definisi (2.7) didapatkan bahwa $x\,R\,y \Longleftrightarrow a \oplus d = b \oplus c$. Hal ini memunculkan dua kemungkinan:

1. $a \oplus d = b$, sehingga didapatkan
   $x\,R\,y \Longleftrightarrow a \oplus d = b \oplus c$
   $x\,R\,y \Longleftrightarrow a \oplus d = b$
   $x\,R\,y \Longleftrightarrow d = b$ (Karena $a \neq b$)

2. $a \oplus d = c$, sehingga didapatkan
   $x\,R\,y \Longleftrightarrow a \oplus d = b \oplus c$

$$x\,R\,y \Longleftrightarrow a\,\oplus\,d = c$$
$$x\,R\,y \Longleftrightarrow a = c\;\;\text{(Karena}\;\;c \neq d)$$

Teorema 2.1. *Relasi R pada definisi* (2.7) *merupakan relasi ekuivalensi*

Bukti (Ulfa,2015):

Akan ditunjukkan bahwa relasi R merupakan relasi ekuivalensi. Untuk menunjukkan bahwa relasi R merupakan relasi ekuivalensi, akan ditunjukkan bahwa R refleksif, simetris, dan transitif.

1. Akan ditunjukkan bahwa R refleksif.
   Berarti akan ditunjukkan bahwa $\forall x \in P_{max}$ berlaku xRx
   Misal diambil sebarang $x = (a,b) \in P_{max}$.
   Jika $a \neq b$ maka berlaku $x \nabla x$.
   Jika $a = b$ maka berlaku $(a,b) = (a,b)$.
   Karena saat $a \neq b$ berlaku $x\nabla x$, dan saat $a = b$ berlaku $x = x$ maka terbukti bahwa xRx, atau relasi R bersifat refleksif.

2. Akan ditunjukkan bahwa R simetris.
   Berarti akan ditunjukkan bahwa setiap $x,y \in P_{max}$, jika xRy maka yRx.
   Misal diambil sebarang $x,y \in P_{max}$ dengan $x = (a,b)$ dan $y = (c,d)$ serta xRy, berarti :

$$x\ R\ y\ jika\ \begin{cases} a \oplus d = b \oplus c & a \neq b, c \neq d \\ (a,b) = (c,d) & , lainnya \end{cases}$$

$$jika\ \begin{cases} b \oplus c = a \oplus d & a \neq b, c \neq d \\ (c,d) = (a,b) & , lainnya \end{cases}$$

$$y\ R\ x\ jika\ \begin{cases} c \oplus b = d \oplus a & a \neq b, c \neq d \\ (c,d) = (a,b) & , lainnya \end{cases}$$

Karena jika xRy berlaku yRx maka terbukti bahwa R simetris.

3. Akan ditunjukkan bahwa R transitif

   Berarti akan ditunjukan bahwa untuk setiap $x, y, z \in P_{max}$ jika xRy dan yRz maka xRz.

   Misal diambil sebarang $x, y, z \in P_{max}$ dengan $x = (a,b), y = (c,d)$ dan $z = (e,f)$ serta diketahui xRy dan yRz, berarti

$$x\ R\ y\ jika\ \begin{cases} (i.) \quad a \oplus d = b \oplus c & a \neq b, c \neq d \\ (ii.) \quad (a,b) = (c,d) & , lainnya \end{cases}$$

$$y\ R\ z\ jika\ \begin{cases} (iii.) \quad c \oplus f = d \oplus e & c \neq d, e \neq f \\ (iv.) \quad (c,d) = (e,f) & , lainnya \end{cases}$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa xRz. Untuk membuktikan ketransitifan R dimiliki 4 kasus, yaitu :

(a) Saat kasus $(i.)$ dan $(iii.)$

(b) Saat kasus $(i.)$ dan $(iv.)$

(c) Saat kasus $(ii.)$ dan $(iii.)$

(d) Saat kasus $(ii.)$ dan $(iv.)$

(a) Saat kasus $(i.)$ dan $(iii.)$

Berlaku $a \neq b, c \neq d, e \neq f$ maka $a \oplus d = b \oplus c$ dan $c \oplus f = d \oplus e$. Dalam kasus pertama ini juga memunculkan empat kasus lain yaitu :

i. Apabila berlaku $a \oplus d = a$ dan $c \oplus f = c$ dan karena xRy maka $a = c$, serta yRz maka $c = e$, jadi $a = e$.

Karena $c \oplus f = c$ dan $c = a$ maka $a \oplus f = a$.

Karena $b \oplus c = c$ dan $c = e$ maka $b \oplus e = e$.

Jadi $a \oplus f = b \oplus e$ untuk $a \neq b$ dan $e \neq f$.

Jadi xRz.

ii. Apabila berlaku $a \oplus d = d$ dan $c \oplus f = f$.

Karena xRy maka $d = b$.

Karena yRz maka $f = d$, jadi $b = f$.

Selanjutnya, karena $a \oplus d = d$ dan $d = f$ maka $a \oplus f = f$.

Karena $d \oplus e = d$ dan $d = b$ maka $b \oplus e = b$.

Jadi $a \oplus f = b \oplus e$ untuk $a \neq b$ dan $e \neq f$.

Jadi xRz.

iii. Apabila berlaku $a \oplus d = a$ dan $c \oplus f = f$

Karena xRy dan $a \oplus d = a$ maka $a = c$.

Karena yRz dan $c \oplus f = f$ maka $f = d$.

Sehingga

$$\begin{aligned} b \oplus e &= (b \oplus c) \oplus (d \oplus e) \\ &= c \oplus d \\ &= a \oplus f \end{aligned}$$

iv. Apabila berlaku $a \oplus d = d$ dan $c \oplus f = c$ maka

$$\begin{aligned} a \oplus f &= (a \oplus d) \oplus (c \oplus f) \\ &= d \oplus c \\ &= b \oplus e \end{aligned}$$

(b) Saat kasus $(i.)$ dan $(iv.)$

Jika $a \neq b$ dan $c \neq d$ maka berlaku $a \oplus d = b \oplus c$ dan $(c, d) = (e, f)$. Oleh karena $e = c \neq d = f$ maka $e \neq f$, sehingga jika $a \oplus d = b \oplus c$ maka berlaku $a \oplus f = b \oplus e$. Jadi xRz.

(c) Saat kasus $(ii.)$ dan $(iii.)$.

Jika $c \neq d$ dan $e \neq f$ maka berlaku $c \oplus f = d \oplus e$ dan $(a, b) = (c, d)$.

Oleh karena karena $a = c \neq d = b$ maka $a \neq b$, sehingga jika $c \oplus f = c \oplus e$ maka berlaku $a \oplus f = b \oplus e$. Jadi xRz.

(d) Saat kasus $(ii.)$ dan $(iv.)$

Berarti $(a,b) = (c,d)$ dan $(c,d) = (e,f)$

Jelas berlaku bahwa $(a,b) = (e,f)$. Jadi xRz.

Dari semua kemungkinan tersebut terbukti bahwa jika xRy dan yRz berlaku xRz.

Karena relasi R berlaku sifat refleksif, simetris, dan transitif maka relasi R merupakan relasi ekuivalensi. Sehingga dengan relasi R dapat dibentuk himpunan dengan kelas ekuivalensi yaitu himpunan yang dilengkapi dengan relasi ekuivalensi. Himpunan dengan kelas ekuivalensi yang akan dibentuk disini adalah himpunan $\mathbb{P}_{max}/R$. Berikut definisi aljabar max-plus tersimetri menurut (Bacelli, dkk.,2001):

Definisi 2.8. *Himpunan $\mathbb{P}_{max}/R$ disimbolkan dengan $\mathbb{S}$ adalah himpunan kelas kelas ekuivalensi dengan operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$ didefinisikan :*

$\forall((a,b),(c,d)) \in \mathbb{S}$

$(a,b) \oplus (c,d) = (a \oplus c, b \oplus d)$

$(a,b) \otimes (c,d) = ((a \otimes c) \oplus (b \otimes d), (a \otimes d) \oplus (b \otimes c))$

Struktur $(\mathbb{S}, \oplus, \otimes)$ disebut aljabar max-plus tersimetri

Himpunan $\mathbb{S}$ merupakan himpunan dengan kelas-kelas ekuivalensi, maka hal ini mengakibatkan terbentuknya kelas kelas dalam himpunan $\mathbb{S}$ sepeerti yang dijelaskan oleh (De Scutter dan De Moor,2002) yaitu :

Lemma 2.1.

Kelas-kelas ekuivalensi dalam $\mathbb{S}$*:*

1. *Kelas* $(t, -\infty)$

   $(t, -\infty) = \{(a, b) \mid (a, b)\ R\ (t, -\infty)\}$

   $(t, -\infty) = \{(t, b) \mid b < t\}$

   disebut dengan kelas max-positif dan disimbolkan

   $\mathbb{S}^{\oplus} = \{(t, -\infty) \mid t \in \mathbb{R}_{max}\}$

2. *Kelas* $(-\infty, t)$

   $(-\infty, t) = \{(a, b) \mid (a, b)\ R\ (-\infty, t)\}$

   $(-\infty, t) = \{(t, b) \mid b > t\}$

   disebut dengan kelas max-negatif dan disimbolkan

   $\mathbb{S}^{\ominus} = \{(-\infty, t) \mid t \in \mathbb{R}_{max}\}$

3. *Kelas* (t, t)

   $(t, t) = \{(a, b) \mid (a, b)\ R\ (t, t)\}$

   $(t, t) = \{(t, b) \mid b = t\}$

   disebut dengan kelas seimbang (balance) dan disimbolkan

   $\mathbb{S}^{\bullet} = \{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}_{max}\}$

4. *Kelas* $(\epsilon, \epsilon) = (-\infty, -\infty)$ *disebut kelas nol.*

Anggota- anggota dari $\mathbb{S}$, yaitu $x \in \mathbb{S}$ dapat dituliskan sebagai berikut :

1. x, jika $x \in \mathbb{S}^{\oplus}$

2. $\ominus x$, jika $x \in \mathbb{S}^{\ominus}$

3. $x^{\bullet}$, jika $x \in \mathbb{S}^{\bullet}$

4. $x = \epsilon$, jika $x = (\epsilon, \epsilon)$

Dengan terbentuknya kelas-kelas diatas dapat dituliskan dekomposisi berikut $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{\oplus} \cup \mathbb{S}^{\ominus} \cup \mathbb{S}^{\bullet}$, kemudian dimiliki himpunan $\mathbb{S}^{\vee} = \mathbb{S}^{\oplus} \cup \mathbb{S}^{\ominus}$ dan $\mathbb{S}^{\oplus} \cap \mathbb{S}^{\ominus} \cap \mathbb{S}^{\bullet} = \{(\epsilon, \epsilon)\}$

Selain dalam pasangan aljabar, relasi keseimbangan dalam $\mathbb{S}$ didefinisikan sebagai berikut oleh (Bacelli, dkk.,2001):

Definisi 2.9. *Misal diberikan $x = (a, b), y = (c, d) \in \mathbb{S}$ dimana $a, b, c, d \in \mathbb{R}_{max}$, didefinisikan :*

$$x \nabla y \iff (a, b) \nabla (c, d) \iff a \oplus d = b \oplus c$$

Contoh 2.12. *Operasi pada aljabar max-plus tersimetri*

1. $(4, 2) \oplus (3, 7) = (4, -\infty) \oplus (-\infty, 7) = (4, 7) = (-\infty, 7) = \ominus 7$

2. $(5, 4) \oplus (1, 3) = (5, -\infty) \oplus (-\infty, 3) = (5, 3) = (5, -\infty) = 5$

3. $(4, 2) \oplus (2, 4) = (4, -\infty) \oplus (-\infty, 4) = (4, 4) = 4^{\bullet}$

4. $(7, 2) \otimes (3, 4) = (10, 11) = (-\infty, 11) = \ominus 11$

Dengan beberapa contoh diatas, dapat dituliskan bahwa:

$$x \ominus y = x \qquad jika \quad x > y$$
$$x \ominus y = \ominus y \qquad jika \quad x < y$$
$$x \ominus x = x^{\bullet}$$

Karena himpunan $\mathbb{S}$ merupakan himpunan berpasangan, dibawah ini dikenalkan norma aljabar max-plus, yang akan digunakan dalam pembahasan menurut (De Scutter dan De Moor,2002):

Definisi 2.10. *Misal diberikan $x = (a, b) \in \mathbb{S}$ nilai mutlak dari x dinotasikan dengan $|x|_{\oplus}$, didefinisikan:*

$$|x|_{\oplus} = a \oplus b$$

Operasi-operasi aritmatik yang ada juga dapat diperluas kedalam matriks, operasi ini dijelaskan oleh (Farlow, 2009) yaitu:

1. Penjumlahan matriks

   Misal dimiliki matriks $A \in \mathbb{S}^{m\times n}$ dan matriks $B \in \mathbb{S}^{m\times n}$, maka operasi penjumlahan $(\oplus)$ matriksnya sebagai berikut:

   $$A \oplus B = [(a \oplus b)_{i,j}] = max(a_{i,j}, b_{i,j})$$
   $$i = 1, 2, 3, \ldots, m; j = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

2. Perkalian matriks

   Misal dimiliki matriks $A \in \mathbb{S}^{m\times n}$ dan matriks $B \in \mathbb{S}^{n\times m}$, maka operasi perkalian $(\otimes)$ matriksnya sebagai berikut:

   $$A \otimes B = [(a \otimes b)_{i,l}] = \bigoplus_{j=1}^{n} (a_{i,j} + b_{j,l})$$
   $$i = 1, 2, 3, \ldots, m; l = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

3. Perkalian konstanta dengan matriks Misal dimiliki matriks $A \in \mathbb{S}^{m \times n}$ dan konstanta $\alpha \in \mathbb{R}$, maka operasi perkalian konstanta dengan matriksnya sebagai berikut:

$$\alpha \otimes A = \alpha \otimes [a_{i,j}] = \alpha \otimes a_{i,j}$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, m; j = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Kemudian akan dikenalkan relasi keseimbangan pada matriks dalam aljabar max-plus tersimetri menurut (De Scutter dan De Moor,2002).

Definisi 2.11. *Misal diberikan* $A \in \mathbb{S}^{m \times n}$ *dan* $B \in \mathbb{S}^{m \times n}$ *Matriks* $A \nabla B$ *jika* $a_{i,j} \nabla b_{i,j}$ *untuk* $i = 1, 2, \ldots, m$ *dan* $j = 1, 2, \ldots, n$

2.1.7 Dekomposisi QR dalam Aljabar Max-Plus Tersimetri

Sebelum masuk dalam dekomposisi QR pada aljabar max-plus tersimetri, akan dikenalkan terlebih dahulu hubungan antara deret fungsi eksponensial dengan aljabar max-plus tersimetri. Hubungan tersebut akan menjembatani pemetaan pada aljabar max-plus tersimetri ke bilangan eksponensial yang nantinya dapat dilakukan operasi pada aljabar konvensional. Dibawah ini dijelaskan tentang persekitaran oleh Rudin dalam (Ulfa,2015).

Definisi 2.12. *Misal* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *dan* $r > 0$. *Persekitaran* α *dengan jari-jari* r *dituliskan* $N_r(\alpha)$ *didefinisikan sebagai himpunan semua bilangan real* x *yang jaraknya terhadap* α

kurang dari r. Atau dapat dituliskan:

$$N_r(\alpha) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha| < r\}$$

yaitu persekitaran dengan pusat α jari-jari r. Sedang jika $\alpha = \infty$ maka himpunannya adalah :

$$N_r(\alpha) = \{x \in \mathbb{R} : x > r\}$$

yaitu persekitaran dengan pusat ∞ dengan jari-jari r.

Kemudian dijelaskan pula tentang fungsi ekuivalen asimtotik oleh Rudin dalam (Ulfa,2015)

Definisi 2.13. *Diberikan f dan g fungsi eksponensial dan $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Fungsi f dikatakan ekuivalen asimtotik dengan fungsi g pada $N_r(\alpha)$,dituliskan dengan $f(x) \sim g(x), x \to \alpha$. jika $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Jika diberikan $\beta \in \mathbb{R}$ dan $r > 0$ sehingga untuk setiap $x \in N_r(\beta)$ berlaku $f(x) = 0$ maka dikatakan $f(x) \sim 0, x \to \beta$. jika diberikan $r \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $x \in N_r(\infty)$ berlaku $f(x) = 0$ maka dikatakan $f(x) \sim 0, x \to \infty$.*
Jika F dan G adalah matriks berukuran $m \times n$ dengan setiap entrinya merupakan fungsi eksponensial maka $F(x) \sim G(x), x \to \alpha$ jika $f_{i,j}(x) \sim g_{i,j}(x), x \to \alpha$ untuk $i = 1, 2, \ldots m$ dan $j = 1, 2, \ldots n$.

Contoh 2.13. *Fungsi Ekuivalen Asimtotik*

Misal diberikan $f(x) = 4e^{4x} + e^{2x}$ *dan* $g(x) = 4e^{4x}$. *Akan ditunjukan bahwa* $f(x) \sim g(x), x \to \infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{4e^{4x} + e^{2x}}{4e^{4x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{4e^{4x}}{4e^{4x}} + \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{4e^{4x}} \\
&= 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4} e^{-2x} \\
&= 1 + 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Karena $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ *maka* $f(x) \sim g(x), x \to \infty$

Sebelum masuk dalam hubungan antara deret eksponensial dengan aljabar max-plus tersimetri, terlebih dahulu akan dikenalkan himpunan fungsi eksponensial berikut (Bacelli, dkk.,2001) :

1. $B_e^+ = \{f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+ | f(s) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i e^{x_i s}$ dengan $n \in \mathbb{N}, \mu_i \in \mathbb{R}_0^+$ dan $x_i \in \mathbb{R}_{max}$ untuk setiap $i\}$
2. $B_e = \{f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} | f(s) = \sum_{i=0}^{n} v_i e^{x_i s}$ dengan $n \in \mathbb{N}, v_i \in \mathbb{R}_0$ dan $x_i \in \mathbb{R}_{max}$ untuk setiap $i\}$

Kemudian dikenalkan teorema tentang hubungan antara aljabar konvensional dengan aljabar max-plus tersimetri menurut (De Scutter dan De Moor,2002) berikut :

Teorema 2.2. *Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}_{max}$ berlaku sifat berikut:*

1. $x \oplus y = z \Leftrightarrow e^{xs} + e^{ys} \sim (1 + \delta_{xy})e^{zs}, s \rightarrow \infty$, *dengan* $\delta_{xy} = 0$ *jika* $x \neq y$, *dan* $\delta_{xy} = 1$ *jika* $x = y$

2. $x \otimes y = z \Leftrightarrow e^{xs} \dot{e}^{ys} = e^{zs}$ *untuk setiap* $s \in \mathbb{R}_0^+$

Bukti dalam (Ulfa , 2015) Dari teorema tersebut, didapatkan bahwa ada hubungan antara operasi $\oplus, \otimes$ dan himpunan $\mathbb{R}_{max}$ dengan operasi $+, \times$ dan himpunan $\mathbb{R}$. Selanjutnya hubungan antara fungsi eksponensial dengan aljabar max-plus tersimetri didefinisikan oleh (De Scutter dan De Moor,2002) dalam pemetaan berikut:

Definisi 2.14. *Diberikan pemetaan $F : (\mathbb{S} \times \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0^+) \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan:*

$$F(x, \mu, s) = \begin{cases} |\mu|e^{xs} jikax \in \mathbb{S}^{\oplus} \\ -|\mu|e^{|x|_{\oplus}s} jikax \in \mathbb{S}^{\ominus} \\ \mu e^{|x|_{\oplus}s} jikax \in \mathbb{S}^{\bullet} \end{cases}$$

untuk setiap $(\overline{x}, \mu, s) \in (\mathbb{S} \times \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0^+)$

Pemetaan F diatas juga dapat diperluas dalam matriks, ha tersebut telah dijelaskan oleh (De Scutter dan De Moor, 2002) berikut:

Definisi 2.15. *Misal diberikan $A \in \mathbb{S}^{m \times n}$ dan $M \in \mathbb{R}_0^{m \times n}$ dengan $m_{i,j} = 1$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$*

1, $s \in \mathbb{R}_0^+$. *Didefinisikan* $\tilde{A} = F(A, M, \dot{)}$, *kemudian* $\tilde{A}(s) \in B_e^{m\times n}$*dengan* $\tilde{a}_{i,j}(s) = F(a_{i,j}, 1, s)$

Sedangkan kebalikan dari pemetaan diatas didefinisikan oleh (De Scutter dan De Moor,2002) sebagai berikut:

Definisi 2.16. *Didefinisikan pemetaan* C *yang memetakan himpunan semua deret fungsi eksponensial* $f \in B_e$ *yang ekuivalen asimtotik dengan fungsi eksponensial pada* $N_r(\infty)$ *ke* $\mathbb{S}$ *sebagai berikut:*

$$f(s) \sim |\mu| e^{xs}, s \to \infty \text{ untuk } \overline{x} \in \mathbb{S} \text{ dan } \mu \in \mathbb{R}_0 \Rightarrow \mathcal{C}(f) = x$$

$$f(s) \sim -|\mu| e^{xs}, s \to \infty \text{ untuk } \overline{x} \in \mathbb{S} \text{ dan } \mu \in \mathbb{R}_0 \Rightarrow \mathcal{C}(f) = \ominus x$$

Pemetaan C diatas juga dapat diperluas dalam matriks, sesuai penjelasan dalam (De Scutter dan De Moor,2002) yaitu:

Definisi 2.17. *Misal diberikan* $\tilde{A}(s) \in B_e^{m\times n}$. *Didefinisikan* $A = \mathcal{C}(\tilde{A}(s))$ *dengan* $A \in \mathbb{S}^{m\times n}$ *dengan* $a_{i,j} = \mathcal{C}(\tilde{a}_{i,j})$

Dekomposisi QR dalam aljabar max-plus tersimetri didefinisikan sebagai berikut dalam (De Scutter dan De Moor ,2002):

Definisi 2.18. *Dekomposisi* QR *adalah dekomposisi suatu matriks* $A \in \mathbb{S}^{m\times n}$ *menjadi perkalian matriks ortogonal* ($Q \in (\mathbb{S}^{\vee})^{m\times m}$) *dan matriks segitiga atas* ($R \in (\mathbb{S}^{\vee})^{m\times n}$). *Misal dimiliki suatu matriks* $A \in \mathbb{S}^{mxm}$ *dapat didekomposisi* QR *menjadi bentuk berikut:*

$$A = Q \otimes R$$

Penyelesaian dekomposisi QR dalam aljabar max-plus tersimetri ini menggunakan algoritma *Gram-Schmidt* sesuai dengan (Golub dan Loan, 1996) dengan beberapa penambahan yaitu:

Misal dimiliki matriks $A \in \mathbb{S}^{m \times n}$ berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Rubah matriks A kedalam matriks $\tilde{A}(s)$ dengan pemetaan F pada definisi (2.15) , kemudian dengan algoritma pada dekomposisi QR dalam aljabar konvensional didapatkan penyelesaian berikut ini:

1. untuk $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\tilde{a}_i = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{1,i} \\ \tilde{a}_{2,i} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{m,i} \end{bmatrix}$$

2. $\tilde{r}_{1,1} = ||\tilde{a}_1||$

3. $\tilde{q}_1 = \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{r}_{1,1}}$

4. untuk $i = 2, 3, \ldots, m$

   $j = 1, 2, \ldots, i-1$

$\tilde{r}_{j,i} = (\tilde{q}_j)^T \tilde{a}_i$

$\hat{q}_i = \tilde{a}_i - \tilde{r}_{j,i}$

selesai

$\tilde{r}_{i,i} = ||\hat{q}_i||$

$\tilde{q}_i = \frac{\hat{q}_i}{\tilde{r}_{i,i}}$

selesai

5. $\tilde{Q}(s) = [\tilde{q}_1|\tilde{q}_2|\ldots|\tilde{q}_n]$
   $\tilde{R}(s) = [R]_{i,j} = r_{i,j}$

6. Cari nilai matriks yang ekuivalen asimtotik dengan $\tilde{Q}(s)$ dan matriks yang ekuivalen asimtotik dengan $\tilde{R}(s)$ untuk $s \to \infty$

7. Rubah matriks yang ekuivalen asimtotik dengan $\tilde{Q}(s)$ dan matriks yang ekuivalen asimtotik dengan $\tilde{R}(s)$ untuk $s \to \infty$ kedalam matriks Q dan R dengan pemetaan C pada definisi (2.16)

Catatan : μ dalam perhitungan Q dan R tidak dimunculkan karena tidak mempengaruhi hasil

Contoh 2.14. *Dekomposisi QR dalam Aljabar Max-Plus Tersimetri*

Misal dimiliki matriks A dibawah ini, akan didekomposisi QR:

$$A = \begin{bmatrix} \ominus 5 & 1 & \ominus 0 \\ -3 & -7^{\bullet} & -2 \end{bmatrix}$$

Selanjtunya rubah matriks $A \in \mathbb{S}^{m\times n}$ kedalam $\tilde{A}(s)$

$$\tilde{A}(s) = \begin{bmatrix} -e^{5s} & e^{s} & -1 \\ e^{-3s} & e^{-7s} & e^{-2s} \end{bmatrix}$$

Dengan metode Gram Schmidt diapatkan :

1. $\tilde{a}_1 = \begin{bmatrix} -e^{5s} \\ e^{-3s} \end{bmatrix} \tilde{a}_2 = \begin{bmatrix} e^{s} \\ e^{-7s} \end{bmatrix} \tilde{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ e^{-2s} \end{bmatrix}$

2. $\tilde{r}_{1,1} = \sqrt{e^{10s} + e^{-6s}} = e^{5s}\sqrt{1 + e^{-16s}}$

3. $\tilde{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{1+e^{-16s}}} \\ \frac{e^{-8s}}{\sqrt{1+e^{-16s}}} \end{bmatrix}$

4. $\tilde{r}_{1,2} = \frac{e^{s}(-1+e^{-16s})}{\sqrt{1+e^{-16s}}}$ $\hat{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2e^{-15s}}{1+e^{-16s}} \\ \frac{2e^{-7s}}{1+e^{-16s}} \end{bmatrix}$ $\tilde{r}_{2,2} = \frac{2e^{-7s}}{\sqrt{1+e^{-16s}}}$

   $\tilde{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{e^{-8s}}{\sqrt{1+e^{-16s}}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+e^{-16s}}} \end{bmatrix}$ $\tilde{r}_{1,3} = \frac{1+e^{-10s}}{\sqrt{1+e^{-16s}}}$ $\tilde{r}_{2,3} = \frac{e^{-2s}(1-e^{-6s})}{\sqrt{1+e^{-16s}}}$

5. $\tilde{Q}(s) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{1+e^{-16s}}} & \frac{e^{-8s}}{\sqrt{1+e^{-16s}}} \\ \frac{e^{-8s}}{\sqrt{1+e^{-16s}}} & \frac{1}{\sqrt{1+e^{-16s}}} \end{bmatrix}$

   $\tilde{R}(s) = \begin{bmatrix} e^{5s}\sqrt{1+e^{-16s}} & \frac{e^{s}(-1+e^{-16s})}{\sqrt{1+e^{-16s}}} & \frac{1+e^{-10s}}{\sqrt{1+e^{-16s}}} \\ 0 & \frac{2e^{-7s}}{\sqrt{1+e^{-16s}}} & \frac{e^{-2s}(1-e^{-6s})}{\sqrt{1+e^{-16s}}} \end{bmatrix}$

6. *Untuk setiap $s \in \mathbb{R}_0^+$, maka :*

$$\tilde{Q}(s) \sim \begin{bmatrix} -1 & e^{-8s} \\ e^{-8s} & 1 \end{bmatrix}, s \to \infty$$

$$\tilde{R}(s) \sim \begin{bmatrix} e^{5s} & -e^{s} & 1 \\ 0 & 2e^{-7s} & e^{-2s} \end{bmatrix}, s \to \infty$$

7. *Kemudian dipetakan kembali dengan pemetaan C:*

$$Q = \begin{bmatrix} \ominus 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \; R = \begin{bmatrix} 5 & \ominus 1 & 0 \\ \epsilon & -7 & \ominus -2 \end{bmatrix}$$

$$Q \otimes R = \begin{bmatrix} \ominus 5 & 1 & \ominus 0 \\ -3 & -7^{\bullet} & -2 \end{bmatrix} \nabla A$$

$$Q \otimes Q^{T} = \begin{bmatrix} 0 & -8^{\bullet} \\ -8^{\bullet} & 0 \end{bmatrix} \nabla I_2$$

2.2 Kajian Pustaka

Pustaka yang mendukung penelitian ini diantaranya :

1. Penelitian karya Bart De Schutter dan Bart De Moor dalam jurnal SIAM vol. 44, no 3, halaman 415-454 pada tahun 2002 dengan judul *The QR decomposition and the singular value decomposition in the symmetrized max-plus algebra revisited**. Penelitian ini menyajikan teori tentang aljabar max-plus, pelebaran aljabar max-plus menjadi aljabar max-plus tersimetri, pemetaan F dan pemetaan C kemudian teori yang ada tersebut digunakan untuk mendapatkan hasil penelitian berupa

aplikasi dekomposisi QR dalam aljabar max-plus tersimetri.

2. Penelitian karya Kasie G. Farlow untuk mendapat gelar *Masters in Mathematic* di *Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University* dengan judul *Max-Plus Agebra*. penelitian membahas tentang dasar-dasar aljabar max-plus kemudian membahas operasi-operasi dalam aljabar max-plus yang digunakan untuk dasar penelitian.

3. Penelitian karya Kurnia Ulfa untuk mendapat gelar *Master of Science* Matematika di Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta dengan judul *Dekomposisi Nilai Singular dalam Aljabar Max-Plus Tersimetri*. Penelitian ini membahas sebagian jurnal Bart De Schutter dan Bart De Moor, bagian yang dibahas adalah tentang dekomposisi nilai singular, dalam pembahasan tersebut juga dibahas tentang hubungan antara aljabar max-plus tersimetri dengan aljabar konvensional sebagai dasar penelitian.

Penelitia ini merupakan penelitian yang berdasar pada jurnal karya Bart De Schutter dan Bart De Moor (De Scutter dan De Moor, 2002). Perbedaan dalam penelitian ini dengan jurnal tersebut adalah pada jurnal tersebut telah dijelaskan tentang dekomposisi QR dalam aljabar max-plus tersimetri, sedangkan dalam penelitian ini dibahas karakteristik solusi dekomposisi QR dalam aljabar max-plus tersimetri. Karakter yang akan dibahas berdasarkan pembentukan himpunan $\mathbb{S}$. Dalam himpunan $\mathbb{S}$ terdapat himpunan kelas *balence*. Himpunan kelas *balance* ini merupakan himpunan baru dalam himpunan real ($\mathbb{R}$ yang biasa dipelajari.

BAB III

METODE PENELITIAN

Bab ini membahas tentang metode penelitian yang dilakukan dalam penelitian. Metode ini berisi tentang penjelasan mengenai jenis dan pendekatan penelitian, sumber data penelitian, teknik pengumpulan dan teknik analisis data penelitian.

3.1 Jenis dan Pendekatan Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah jenis penelitian studi literatur atau penelitian teori. Penelitian studi literatur atau penelitian teori adalah serangkaian kegiatan yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca dan mencatat serta mengolah bahan penelitian (Zed,2008). Pendekatan penelitian yang digunakan merupakan pendekatan kualitatif. Menurut Sugiyono dalam (Depdiknas , 2008), pendekatan kualitatif adalah pendekatan penelitian yang digunakan untuk meneliti pada kondisi objek alamiah dimana peneliti merupakan instrumen kunci (Sugiyono, 2005).

3.2 Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini berupa data tentang dekomposisi aljabar max-plus tersimetri.

Sumber data penelitian ini diantaranya adalah:Jurnal karya Bart De Schutter dan Bart De Moor dengan judul *The QR* *decomposition and the singular value decomposition in the symetrized max-plus algebra revisited* (De Scutter dan De Moor , 2002) sebagai sumber data tentang dekomposisi QR dalam aljabar max-pus tersimetri.

3.3 Teknik Pengumpulan Data

Teknik pengumpulan data yang dilakukan yaitu dengan metode analisis dokumen. Analisis dokumen merupakan metode dengan cara mengumpulkan data yang dilakukan dengan menganalisis isi dokumen yang berhubungan dengan masalah yang diteliti (Widoyoko , 2016). Dokumen yang digunakan dalam penelitian ini berupa jurnal.

3.4 Teknik Analisis Data

Teknik analisis data yang dilakukan yaitu dengan teknik induksi. Teknik induksi yaitu dengan melakukan percobaan-percobaan khusus mempelajari data yang telah ada, kemudian kemudian ditarik suatu kesimpulan umum. Secara praktik, peneliti melakukan percobaan-percobaan perhitungan, kemudian melihat pola yang terbentuk. Pola yang terbentuk kemudian dianalisa dengan dasar teori yang ada. Pola yang sudah dianalisa kemudian disusun kedalam suatu teorema dan dibuktikan secara umum dengan data yang sudah ada.

BAB IV

PEMBAHASAN

Bagian ini akan dibahas mengenai deskripsi data dan pembahasan. Data yang dimiliki dideskripsikan terlebih dahulu kemudian data digunakan untuk mendapatkan hasil penelitian yang dicantumkan dalam pembahasan.

4.1 Deskripsi Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini telah dijelaskan dalam bab 3, yaitu data berupa dokumen. Dokumen disini lebih tepatnya adalah data berupa teori-teori matematika sesuai dengan pustaka-pustaka yang digunakan untuk melakukan penelitian seperti yang telah dijelaskan dalam bab 2. Sebelum dibahas tentang pembahasan hasil penelitian, akan disajikan data berupa beberapa teori yang telah dijelaskan untuk mendukung pembahasan hasil yang ada, diantaranya :

1. Aljabar max-plus dalam definisi (2.2) menjelaskan bahwa untuk setiap $a \in \mathbb{R}_{max}$ berlaku $a \oplus a = a$.

   Contoh 4.15. *Operasi* $\oplus$ *Ajabar Max-Plus*

   $4 \oplus 4 = max(4,4) = 4$

2. Pada definisi (2.8) dijelaskan bahwa jika dimiliki $x = (a,b)$, $y = (c,d)$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}_{max}$ didapatkan : $x \oplus y = (a \oplus c, b \oplus d)$

Contoh 4.16. *Operasi $\oplus$ Pasangan Ajabar*

$(3,2) \ \oplus \ (1,4) = (max(3,1), max(2,4)) = (3,4)$

3. lemma (2.1) menjelaskan:

   (a) Himpunan $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{\oplus} \cup \mathbb{S}^{\ominus} \cup \mathbb{S}^{\bullet}$

   (b) Himpunan $\mathbb{S}^{\vee} = \mathbb{S}^{\oplus} \cup \mathbb{S}^{\ominus}$

   (c) Himpunan $\mathbb{S}^{\oplus} = \{(t, -\infty) \mid t \in \mathbb{R}_{max}\}$

   (d) Himpunan $\mathbb{S}^{\ominus} = \{(-\infty, t) \mid t \in \mathbb{R}_{max}\}$

   (e) Himpunan $\mathbb{S}^{\bullet} = \{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}_{max}\}$

   (f) $\mathbb{S}^{\oplus} \cap \mathbb{S}^{\ominus} \cap \mathbb{S}^{\bullet} = \{(\epsilon, \epsilon)\}$

4. Definisi (2.8) dan lemma (2.1) menjelaskan jika dimiliki $x, \ominus x, x^{\bullet}$, maka didapatkan :

$$x^{\bullet} \oplus x^{\bullet} = x^{\bullet}$$
$$x^{\bullet} \oplus x = x^{\bullet}$$
$$x^{\bullet} \oplus \ominus x = x^{\bullet}$$

Contoh 4.17. *Operasi $\oplus$ pada Kelas Balance*

$$\begin{aligned} 3^{\bullet} \oplus 3^{\bullet} &= (3,3) \ \oplus \ (3,3) = (max(3,3), max(3,3)) \\ &= (3,3) = 3^{\bullet} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^{\bullet} \oplus 3 &= (3,3) \ \oplus \ (3,-\infty) = (max(3,3), max(3,-\infty)) \\ &= (3,3) = 3^{\bullet} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^{\bullet} \oplus \ominus 3 &= (3,3) \ \oplus \ (-\infty,3) = (max(3,3), max(-\infty,3)) \\ &= (3,3) = 3^{\bullet} \end{aligned}$$

5. Definisi (2.10) dan lemma (2.1) menjelaskan jika dimiliki
   $x = (a, b)$ dengan $a > b$ maka
   $|x|_{\oplus} = a \oplus b = a = (a, -\infty)$

Contoh 4.18. *Mutlak pada Aljabar Max-Plus Tersimetri*

$x = (5, 3)$,
$|x|_{\oplus} = 5 \oplus 3 = 5 = (5, -\infty)$

4.2 Pembahasan

Dari teori-teori diatas, peneliti menyimpulkan suatu teori berikut :

Teorema 4.3. *Jika dimiliki $A \in \mathbb{S}^{m \times n}$ dengan beberapa entri elemen balance kemudian dimiliki $B \in (\mathbb{S}^{\vee})^{m \times n}$ dengan ketentuan :*

$$b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & ;jika\ \ a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\vee} \\ |a|_{\oplus}\ \ atau\ \ \ominus |a|_{\oplus}\ \ atau\ \ a_{i,j} & ;jika\ \ a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\bullet} \end{cases}$$

Kemudian dekomposisi QR $A \ \nabla\ Q \otimes R$ maka berlaku dekomposisi QR $A \oplus B \ \nabla\ Q \otimes R$.

Bukti dari teorema (4.3) yaitu:

1. **Dimiliki**:

   (a) Matriks $A \in \mathbb{S}^{m \times n}$ dengan beberapa entri elemen *balance*:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

dengan setiap $a_{i,j} \in \mathbb{S}$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

(b) Matriks $B \in (\mathbb{S}^{\vee})^{m \times n}$:

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix}$$

dengan

$$b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & ; jika \ \ a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\vee} \\ |a|_{\oplus} \ \ atau \ \ \ominus |a|_{\oplus} \ \ atau \ \ a_{i,j} & ; jika \ \ a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\bullet} \end{cases}$$

2. **Akan dibuktikan** bahwa jika matriks A dan B ditentukan sesuai teorema (4.3), dan dekomposisi QR $A \ \nabla \ Q \otimes R$ maka berlaku dekomposisi QR $A \oplus B \ \nabla \ Q \otimes R$.

   Dengan ketentuan matriks $A \in \mathbb{S}^{m \times n}$ maka hal ini memberikan kemungkinan:

$$a_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\oplus} \\ a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\ominus} atau \\ a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\bullet} atau \\ a_{i,j} = (\epsilon, \epsilon) \end{cases}$$

Kemudian, dengan ketentuan matriks $B \in (\mathbb{S}^{\vee})^{m \times n}$, dan

$$b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & ; jika \ \ a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\vee} \\ |a|_{\oplus} \ \ atau \ \ \ominus |a|_{\oplus} \ \ atau \ \ a_{i,j} & ; jika \ \ a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\bullet} \end{cases}$$

maka, hal ini memberikan kemungkinan:

$$b_{i,j} = \begin{cases} b_{i,j} = |a_{i,j}|_{\oplus} \in \mathbb{S}^{\oplus} \\ b_{i,j} = \ominus |a_{i,j}|_{\oplus} \in \mathbb{S}^{\ominus} atau \\ b_{i,j} = (\epsilon, \epsilon) \end{cases}$$

Kemudian operasi penjumlahan ($\oplus$) matriks A dan B memberikan kemungkinan berikut :

$$[(a \oplus b)_{i,j}] = \begin{cases} a_{i,j} \oplus b_{i,j} = a_{i,j} \oplus a_{i,j} & ; a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\oplus} \\ a_{i,j} \oplus b_{i,j} = a_{i,j} \oplus a_{i,j} & ; a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\ominus} \\ a_{i,j} \oplus b_{i,j} = a_{i,j} \oplus |a_{i,j}|_{\oplus} & ; a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\bullet} \\ a_{i,j} \oplus b_{i,j} = a_{i,j} \oplus \ominus |a_{i,j}|_{\oplus} & ; a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\bullet} \\ a_{i,j} \oplus b_{i,j} = a_{i,j} \oplus a_{i,j} & ; a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\bullet} \\ a_{i,j} \oplus b_{i,j} = a_{i,j} \oplus a_{i,j} & ; a_{i,j} = (\epsilon, \epsilon) \end{cases}$$

dengan :

(a) $a_{i,j} \oplus a_{i,j} = (a_{i,j}, -\infty) \oplus (a_{i,j}, -\infty)$
$= (max(a_{i,j}, a_{i,j}), max(-\infty, -\infty)) = (a_{i,j}, -\infty)$
$= a_{i,j}$ jika $a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\oplus}$

(b) $a_{i,j} \oplus a_{i,j} = (-\infty, a_{i,j}) \oplus (-\infty, a_{i,j})$
$= (max(-\infty, -\infty), max(a_{i,j}, a_{i,j})) = (-\infty, a_{i,j})$
$= a_{i,j}$ jika $a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\ominus}$

(c) $a_{i,j} \oplus |a_{i,j}|_{\oplus} = (a_{i,j}, a_{i,j}) \oplus (a_{i,j}, -\infty)$
$= (max(a_{i,j}, a_{i,j}), max(a_{i,j}, -\infty)) = (a_{i,j}, a_{i,j})$
$= a_{i,j}$ jika $a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\bullet}$

(d) $a_{i,j} \oplus \ominus |a_{i,j}|_{\oplus} = (a_{i,j}, a_{i,j}) \oplus (-\infty, a_{i,j})$
$= (max(a_{i,j}, -\infty), max(a_{i,j}, a_{i,j})) = (a_{i,j}, a_{i,j})$
$= a_{i,j}$ jika $a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\bullet}$

(e) $a_{i,j} \oplus a_{i,j} = (a_{i,j}, a_{i,j}) \oplus (a_{i,j}, a_{i,j})$
$= (max(a_{i,j}, a_{i,j}), max(a_{i,j}, a_{i,j})) = (a_{i,j}, a_{i,j})$
$= a_{i,j}$ jika $a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\bullet}$

(f) $a_{i,j} \oplus a_{i,j} = (-\infty, -\infty) \oplus (-\infty, -\infty)$
$= (max(-\infty, -\infty), max(-\infty, -\infty)) = (-\infty, -\infty)$
$= a_{i,j}$ jika $a_{i,j} \in (\epsilon, \epsilon)$

Hasil dari semua kemungkinan diatas menunjukkan bahwa $A \oplus B = A$, sehingga dengan jelas bahwa jika dekomposisi QR $A \nabla Q \otimes R$ maka berlaku dekomposisi QR $A \oplus B \nabla Q \otimes R$.

3. **Terbukti** bahwa jika matriks A dan B ditentukan sesuai teori teori (4.3), dan dekomposisi QR $A \nabla Q \otimes R$, maka berlaku dekomposisi QR $A \oplus B \nabla Q \otimes R$.

Untuk memberikan gambaran yang lebih jelas akan diberikan pembuktian dengan sampel matriks ukuran 3×3 berikut ini:
Diberikan matriks $A \in \mathbb{S}^{m \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \\ a^{\bullet}_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a^{\bullet}_{3,2} & a^{\bullet}_{3,3} \end{bmatrix}$$

Matriks $B \in (\mathbb{S}^{\vee})^{m \times n}$ dengan syarat yang teah dijelaskan, maka secara khusus di miliki B dengan beberapa kemungkinan berikut:

1. $b_{i,j} = |a|_{\oplus}$ jika $a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\bullet}$.

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

2. $b_{i,j} = \ominus|a|_{\oplus}$ jika $a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\bullet}$.

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ominus a_{1,3} \\ \ominus a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & \ominus a_{3,2} & \ominus a_{3,3} \end{bmatrix}$$

3. $b_{i,j} = a_{i,j}$ jika $a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\bullet}$.

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \\ a^{\bullet}_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a^{\bullet}_{3,2} & a^{\bullet}_{3,3} \end{bmatrix}$$

4. $b_{i,j} =$ kombinasi $|a|_{\oplus}$, $\ominus|a|_{\oplus}$, dan $a_{i,j}$ jika $a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\bullet}$.

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \\ \ominus a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \ominus a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Maka nilai dari $A \oplus B$ dengan permisalan B yang telah ditentukan:

1. pada kemungkinan 1.

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \\ a^{\bullet}_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a^{\bullet}_{3,2} & a^{\bullet}_{3,3} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \\ a^{\bullet}_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a^{\bullet}_{3,2} & a^{\bullet}_{3,3} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} \oplus a_{1,1} & a_{1,2} \oplus a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \oplus a_{1,3} \\ a^{\bullet}_{2,1} \oplus a_{2,1} & a_{2,2} \oplus a_{2,2} & a_{2,3} \oplus a_{2,3} \\ a_{3,1} \oplus a_{3,1} & a^{\bullet}_{3,2} \oplus a_{3,2} & a^{\bullet}_{3,3} \oplus a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(a_{1,1}, a_{1,1}) & max(a_{1,2}, a_{1,2}) & max(a^{\bullet}_{1,3}, a_{1,3}) \\ max(a^{\bullet}_{2,1}, a_{2,1}) & max(a_{2,2}, a_{2,2}) & max(a_{2,3}, a_{2,3}) \\ max(a_{3,1}, a_{3,1}) & max(a^{\bullet}_{3,2}, a_{3,2}) & max(a^{\bullet}_{3,3}, a_{3,3}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \\ a^{\bullet}_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a^{\bullet}_{3,2} & a^{\bullet}_{3,3} \end{bmatrix} = A$$

2. pada kemungkinan 2.

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \\ a^{\bullet}_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a^{\bullet}_{3,2} & a^{\bullet}_{3,3} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \\ a^{\bullet}_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a^{\bullet}_{3,2} & a^{\bullet}_{3,3} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ominus a_{1,3} \\ \ominus a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & \ominus a_{3,2} & \ominus a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} \oplus a_{1,1} & a_{1,2} \oplus a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \oplus \ominus a_{1,3} \\ a^{\bullet}_{2,1} \oplus \ominus a_{2,1} & a_{2,2} \oplus a_{2,2} & a_{2,3} \oplus a_{2,3} \\ a_{3,1} \oplus a_{3,1} & a^{\bullet}_{3,2} \oplus \ominus a_{3,2} & a^{\bullet}_{3,3} \oplus \ominus a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(a_{1,1}, a_{1,1}) & max(a_{1,2}, a_{1,2}) & max(a^{\bullet}_{1,3}, \ominus a_{1,3}) \\ max(a^{\bullet}_{2,1}, \ominus a_{2,1}) & max(a_{2,2}, a_{2,2}) & max(a_{2,3}, a_{2,3}) \\ max(a_{3,1}, a_{3,1}) & max(a^{\bullet}_{3,2}, \ominus a_{3,2}) & max(a^{\bullet}_{3,3}, \ominus a_{3,3}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \\ a^{\bullet}_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a^{\bullet}_{3,2} & a^{\bullet}_{3,3} \end{bmatrix} = A$$

3. pada kemungkinan 3.

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \\ a^{\bullet}_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a^{\bullet}_{3,2} & a^{\bullet}_{3,3} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \\ a^{\bullet}_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a^{\bullet}_{3,2} & a^{\bullet}_{3,3} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \\ a^{\bullet}_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a^{\bullet}_{3,2} & a^{\bullet}_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} \oplus a_{1,1} & a_{1,2} \oplus a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \oplus a^{\bullet}_{1,3} \\ a^{\bullet}_{2,1} \oplus a^{\bullet}_{2,1} & a_{2,2} \oplus a_{2,2} & a_{2,3} \oplus a_{2,3} \\ a_{3,1} \oplus a_{3,1} & a^{\bullet}_{3,2} \oplus a^{\bullet}_{3,2} & a^{\bullet}_{3,3} \oplus a^{\bullet}_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(a_{1,1}, a_{1,1}) & max(a_{1,2}, a_{1,2}) & max(a^{\bullet}_{1,3}, a^{\bullet}_{1,3}) \\ max(a^{\bullet}_{2,1}, a^{\bullet}_{2,1}) & max(a_{2,2}, a_{2,2}) & max(a_{2,3}, a_{2,3}) \\ max(a_{3,1}, a_{3,1}) & max(a^{\bullet}_{3,2}, a^{\bullet}_{3,2}) & max(a^{\bullet}_{3,3}, a^{\bullet}_{3,3}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \\ a^{\bullet}_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a^{\bullet}_{3,2} & a^{\bullet}_{3,3} \end{bmatrix} = A$$

4. pada kemungkinan 4.

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \\ a^{\bullet}_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a^{\bullet}_{3,2} & a^{\bullet}_{3,3} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \\ a^{\bullet}_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a^{\bullet}_{3,2} & a^{\bullet}_{3,3} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \\ \ominus a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \ominus a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} \oplus a_{1,1} & a_{1,2} \oplus a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \oplus a^{\bullet}_{1,3} \\ a^{\bullet}_{2,1} \oplus \ominus a_{2,1} & a_{2,2} \oplus a_{2,2} & a_{2,3} \oplus a_{2,3} \\ a_{3,1} \oplus a_{3,1} & a^{\bullet}_{3,2} \oplus a_{3,2} & a^{\bullet}_{3,3} \oplus \ominus a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(a_{1,1}, a_{1,1}) & max(a_{1,2}, a_{1,2}) & max(a^{\bullet}_{1,3}, a^{\bullet}_{1,3}) \\ max(a^{\bullet}_{2,1}, \ominus a_{2,1}) & max(a_{2,2}, a_{2,2}) & max(a_{2,3}, a_{2,3}) \\ max(a_{3,1}, a_{3,1}) & max(a^{\bullet}_{3,2}, a_{3,2}) & max(a^{\bullet}_{3,3}, \ominus a_{3,3}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a^{\bullet}_{1,3} \\ a^{\bullet}_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a^{\bullet}_{3,2} & a^{\bullet}_{3,3} \end{bmatrix} = A$$

Contoh 4.19. *Penggunaan Teori yang didapat*

1. *Misal dimiliki matriks A berikut:*

$$A = \begin{bmatrix} 2^{\bullet} & -1 & \ominus 4 \\ 3 & 2^{\bullet} & 7 \\ \ominus 1 & 5 & 2^{\bullet} \end{bmatrix}$$

Maka dapat ditentukan beberapa matriks B berikut:

$$B1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \ominus 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ \ominus 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad B2 = \begin{bmatrix} \ominus 2 & -1 & \ominus 4 \\ 3 & \ominus 2 & 7 \\ \ominus 1 & 5 & \ominus 2 \end{bmatrix}$$

$$B3 = A \quad B4 = \begin{bmatrix} 2^{\bullet} & -1 & \ominus 4 \\ 3 & \ominus 2 & 7 \\ \ominus 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Pemetaan F memberikan :

$$\tilde{A}(s) = \begin{bmatrix} e^2 & e^{-1} & -e^4 \\ e^3 & e^2 & e^7 \\ -e & e^5 & e^2 \end{bmatrix}$$

Dengan hasil perhitungan selengkapnya pada ***lampiran 4.****, didapatkan:*

$\tilde{Q}(s) = Q1$ *($Q1$ ada pada lampiran)*

$\tilde{R}(s) = R1$ *($R1$ ada pada lampiran)*

Untuk setiap $s \in \mathbb{R}_0^+$, maka :

$$\tilde{Q}(s) \sim \begin{bmatrix} e^{-1} & e^{-3} & -1 \\ 1 & e^{-2} & e^{-1} \\ -e^{-2} & 1 & -e^{-4} \end{bmatrix}, s \to \infty$$

$$\tilde{R}(s) = \begin{bmatrix} e^3 & -e^3 & e^7 \\ 0 & e^5 & e^5 \\ 0 & 0 & e^6 \end{bmatrix}, s \to \infty$$

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & -3 & \ominus 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ \ominus - 2 & 0 & \ominus - 4 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 3 & \ominus 3 & 7 \\ \epsilon & 5 & 5 \\ \epsilon & \epsilon & 6 \end{bmatrix}$$

$$Q \otimes R = \begin{bmatrix} 2 & 2^{\bullet} & 6^{\bullet} \\ 3 & 3^{\bullet} & 7 \\ \ominus 1 & 5 & 5^{\bullet} \end{bmatrix} \nabla A$$

Dengan teori (4.3) *yang ada, dapat dikatakan bahwa :*

$A \oplus B \ \ \nabla \ \ Q \otimes R$, *untuk setiap* B *yang telah ditentukan ataupun* B *lain yang sesuai dengan* (4.3)

Karena:

$$\text{(a)} \quad A \oplus B1 = \begin{bmatrix} 2^{\bullet} & -1 & \ominus 4 \\ 3 & 2^{\bullet} & 7 \\ \ominus 1 & 5 & 2^{\bullet} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & -1 & \ominus 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ \ominus 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{\bullet} \oplus 2 & -1 \oplus -1 & \ominus 4 \oplus \ominus 4 \\ 3 \oplus 3 & 2^{\bullet} \oplus 2 & 7 \oplus 7 \\ \ominus 1 \oplus \ominus 1 & 5 \oplus 5 & 2^{\bullet} \oplus 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(2^{\bullet}, 2) & max(-1, -1) & max(\ominus 4, \ominus 4) \\ max(3, 3) & max(2^{\bullet}, 2) & max(7, 7) \\ max(\ominus 1, \ominus 1) & max(5, 5) & max(2^{\bullet}, 2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{\bullet} & -1 & \ominus 4 \\ 3 & 2^{\bullet} & 7 \\ \ominus 1 & 5 & 2^{\bullet} \end{bmatrix} = A$$

$$\text{(b)} \quad A \oplus B2 = \begin{bmatrix} 2^{\bullet} & -1 & \ominus 4 \\ 3 & 2^{\bullet} & 7 \\ \ominus 1 & 5 & 2^{\bullet} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \ominus 2 & -1 & \ominus 4 \\ 3 & \ominus 2 & 7 \\ \ominus 1 & 5 & \ominus 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{\bullet} \oplus \ominus 2 & -1 \oplus -1 & \ominus 4 \oplus \ominus 4 \\ 3 \oplus 3 & 2^{\bullet} \oplus \ominus 2 & 7 \oplus 7 \\ \ominus 1 \oplus \ominus 1 & 5 \oplus 5 & 2^{\bullet} \oplus \ominus 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(2^{\bullet}, \ominus 2) & max(-1, -1) & max(\ominus 4, \ominus 4) \\ max(3, 3) & max(2^{\bullet}, \ominus 2) & max(7, 7) \\ max(\ominus 1, \ominus 1) & max(5, 5) & max(2^{\bullet}, \ominus 2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{\bullet} & -1 & \ominus 4 \\ 3 & 2^{\bullet} & 7 \\ \ominus 1 & 5 & 2^{\bullet} \end{bmatrix} = A$$

(c) $$A \oplus B3 = \begin{bmatrix} 2^{\bullet} & -1 & \ominus 4 \\ 3 & 2^{\bullet} & 7 \\ \ominus 1 & 5 & 2^{\bullet} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2^{\bullet} & -1 & \ominus 4 \\ 3 & 2^{\bullet} & 7 \\ \ominus 1 & 5 & 2^{\bullet} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{\bullet} \oplus 2^{\bullet} & -1 \oplus -1 & \ominus 4 \oplus \ominus 4 \\ 3 \oplus 3 & 2^{\bullet} \oplus 2^{\bullet} & 7 \oplus 7 \\ \ominus 1 \oplus \ominus 1 & 5 \oplus 5 & 2^{\bullet} \oplus 2^{\bullet} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(2^{\bullet}, 2) & max(-1, -1) & max(\ominus 4, \ominus 4) \\ max(3, 3) & max(2^{\bullet}, 2) & max(7, 7) \\ max(\ominus 1, \ominus 1) & max(5, 5) & max(2^{\bullet}, 2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(2^{\bullet}, 2^{\bullet}) & max(-1, -1) & max(\ominus 4, \ominus 4) \\ max(3, 3) & max(2^{\bullet}, 2^{\bullet}) & max(7, 7) \\ max(\ominus 1, \ominus 1) & max(5, 5) & max(2^{\bullet}, 2^{\bullet}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{\bullet} & -1 & \ominus 4 \\ 3 & 2^{\bullet} & 7 \\ \ominus 1 & 5 & 2^{\bullet} \end{bmatrix} = A$$

(d) $$A \oplus B4 = \begin{bmatrix} 2^{\bullet} & -1 & \ominus 4 \\ 3 & 2^{\bullet} & 7 \\ \ominus 1 & 5 & 2^{\bullet} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2^{\bullet} & -1 & \ominus 4 \\ 3 & \ominus 2 & 7 \\ \ominus 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{\bullet} \oplus 2^{\bullet} & -1 \oplus -1 & \ominus 4 \oplus \ominus 4 \\ 3 \oplus 3 & 2^{\bullet} \oplus \ominus 2 & 7 \oplus 7 \\ \ominus 1 \oplus \ominus 1 & 5 \oplus 5 & 2^{\bullet} \oplus 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(2^\bullet, 2^\bullet) & max(-1,-1) & max(\ominus 4, \ominus 4) \\ max(3,3) & max(2^\bullet, \ominus 2) & max(7,7) \\ max(\ominus 1, \ominus 1) & max(5,5) & max(2^\bullet, 2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^\bullet & -1 & \ominus 4 \\ 3 & 2^\bullet & 7 \\ \ominus 1 & 5 & 2^\bullet \end{bmatrix} = A$$

2. *Misal dimiliki matriks A berikut:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \ominus - 2 & \ominus 4 \\ 0^\bullet & 4 & -2 \\ \ominus 1 & 5^\bullet & 3 \end{bmatrix}$$

Maka dapat ditentukan beberapa matriks B berikut:

$$B1 = \begin{bmatrix} -1 & \ominus - 2 & \ominus 4 \\ 0 & 4 & -2 \\ \ominus 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad B2 = \begin{bmatrix} -1 & \ominus - 2 & \ominus 4 \\ \ominus 0 & 4 & -2 \\ \ominus 1 & \ominus 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B3 = A \quad B4 = \begin{bmatrix} -1 & \ominus - 2 & \ominus 4 \\ \ominus 0 & 4 & -2 \\ \ominus 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Pemetaan F memberikan :

$$\tilde{A}(s) = \begin{bmatrix} e^{-1} & -e^{-2} & -e^{4} \\ 1 & e^{4} & e^{-2} \\ -e & e^{5} & e^{3} \end{bmatrix}$$

Dengan hasil perhitungan selengkapnya pada ***lampiran 5.****, didapatkan:*

$\tilde{Q}(s) = Q1$ *(Q1 ada pada lampiran)*

$\tilde{R}(s) = R1$ *(R1 ada pada lampiran)*

Untuk setiap $s \in \mathbb{R}_0^+$, maka :

$$\tilde{Q}(s) \sim \begin{bmatrix} e^{-2} & e^{-1} & -1 \\ e^{-1} & 1 & e^{-1} \\ -1 & e^{-1} & -e^{-2} \end{bmatrix}, s \to \infty$$

$$\tilde{R}(s) = \begin{bmatrix} e & -e^{5} & -e^{3} \\ 0 & e^{4} & -e^{3} \\ 0 & 0 & e^{4} \end{bmatrix}, s \to \infty$$

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & -1 & \ominus 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ \ominus 0 & -1 & \ominus -2 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \ominus 5 & \ominus 3 \\ \epsilon & 4 & \ominus 3 \\ \epsilon & \epsilon & 4 \end{bmatrix}$$

$$Q \otimes R = \begin{bmatrix} -1 & 3^{\bullet} & \ominus 4 \\ 0 & 4^{\bullet} & 3^{\bullet} \\ \ominus 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \nabla A$$

Dengan teori (4.3) *yang ada, dapat dikatakan bahwa :*

$A \oplus B \;\; \nabla \;\; Q \otimes R$*, untuk setiap* B *yang telah ditentukan ataupun* B *lain yang sesuai dengan* (4.3)

Karena:

(a) $A \oplus B1$

$$= \begin{bmatrix} -1 & \ominus -2 & \ominus 4 \\ 0^{\bullet} & 4 & -2 \\ \ominus 1 & 5^{\bullet} & 3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 & \ominus -2 & \ominus 4 \\ 0 & 4 & -2 \\ \ominus 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \oplus -1 & \ominus - 2 \oplus \ominus - 2 & \ominus 4 \oplus \ominus 4 \\ 0^{\bullet} \oplus 0 & 4 \oplus 4 & -2 \oplus -2 \\ \ominus 1 \oplus \ominus 1 & 5^{\bullet} \oplus 5 & 3 \oplus 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(-1,-1) & max(\ominus - 2, \ominus - 2) & max(\ominus 4, \ominus 4) \\ max(0^{\bullet}, 0) & max(4,4) & max(-2,-2) \\ max(\ominus 1, \ominus 1) & max(5^{\bullet}, 5) & max(3,3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & \ominus - 2 & \ominus 4 \\ 0^{\bullet} & 4 & -2 \\ \ominus 1 & 5^{\bullet} & 3 \end{bmatrix} = A$$

(b) $A \oplus B2$

$$= \begin{bmatrix} -1 & \ominus - 2 & \ominus 4 \\ 0^{\bullet} & 4 & -2 \\ \ominus 1 & 5^{\bullet} & 3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 & \ominus - 2 & \ominus 4 \\ \ominus 0 & 4 & -2 \\ \ominus 1 & \ominus 5 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \oplus -1 & \ominus - 2 \oplus \ominus - 2 & \ominus 4 \oplus \ominus 4 \\ 0^{\bullet} \oplus \ominus 0 & 4 \oplus 4 & -2 \oplus -2 \\ \ominus 1 \oplus \ominus 1 & 5^{\bullet} \oplus \ominus 5 & 3 \oplus 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} max(-1,-1) & max(\ominus - 2, \ominus - 2) & max(\ominus 4, \ominus 4) \\ max(0^{\bullet}, \ominus 0) & max(4,4) & max(-2,-2) \\ max(\ominus 1, \ominus 1) & max(5^{\bullet}, \ominus 5) & max(3,3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & \ominus - 2 & \ominus 4 \\ 0^{\bullet} & 4 & -2 \\ \ominus 1 & 5^{\bullet} & 3 \end{bmatrix} = A$$

(c) $A \oplus B3$

$$= \begin{bmatrix} -1 & \ominus-2 & \ominus 4 \\ 0^{\bullet} & 4 & -2 \\ \ominus 1 & 5^{\bullet} & 3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 & \ominus-2 & \ominus 4 \\ 0^{\bullet} & 4 & -2 \\ \ominus 1 & 5^{\bullet} & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \oplus -1 & \ominus-2 \oplus \ominus-2 & \ominus 4 \oplus \ominus 4 \\ 0^{\bullet} \oplus 0^{\bullet} & 4 \oplus 4 & -2 \oplus -2 \\ \ominus 1 \oplus \ominus 1 & 5^{\bullet} \oplus 5^{\bullet} & 3 \oplus 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} max(-1,-1) & max(\ominus-2, \ominus-2) & max(\ominus 4, \ominus 4) \\ max(0^{\bullet}, 0^{\bullet}) & max(4,4) & max(-2,-2) \\ max(\ominus 1, \ominus 1) & max(5^{\bullet}, 5^{\bullet}) & max(3,3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & \ominus-2 & \ominus 4 \\ 0^{\bullet} & 4 & -2 \\ \ominus 1 & 5^{\bullet} & 3 \end{bmatrix} = A$$

(d) $A \oplus B4$

$$= \begin{bmatrix} -1 & \ominus-2 & \ominus 4 \\ 0^{\bullet} & 4 & -2 \\ \ominus 1 & 5^{\bullet} & 3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 & \ominus-2 & \ominus 4 \\ \ominus 0 & 4 & -2 \\ \ominus 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \oplus -1 & \ominus-2 \oplus \ominus-2 & \ominus 4 \oplus \ominus 4 \\ 0^{\bullet} \oplus \ominus 0 & 4 \oplus 4 & -2 \oplus -2 \\ \ominus 1 \oplus \ominus 1 & 5^{\bullet} \oplus 5 & 3 \oplus 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} max(-1,-1) & max(\ominus-2, \ominus-2) & max(\ominus 4, \ominus 4) \\ max(0^{\bullet}, \ominus 0) & max(4,4) & max(-2,-2) \\ max(\ominus 1, \ominus 1) & max(5^{\bullet}, 5) & max(3,3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & \ominus-2 & \ominus 4 \\ 0^{\bullet} & 4 & -2 \\ \ominus 1 & 5^{\bullet} & 3 \end{bmatrix} = A$$

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Penelitian ini menunjukkan bahwa dalam solusi dekomposisi QR dalam aljabar max-plus tersimetri didapatkan :

Karakteristik solusi dekomposisi QR dalam aljabar max-plus tersimetri dengan beberapa entri berupa bilangan dalam kelas *balance*, misal matriks yang dimaksud adalah matriks $A \in \mathbb{S}^{m \times n}$ dengan beberapa entri elemen *balance* kemudian dimiliki $B \in (\mathbb{S}^{\vee})^{m \times n}$ dengan ketentuan :

$$b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & ; jika \;\; a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\vee} \\ |a|_{\oplus} \;\; atau \;\; \ominus |a|_{\oplus} \;\; atau \;\; a_{i,j} & ; jika \;\; a_{i,j} \in \mathbb{S}^{\bullet} \end{cases}$$

Kemudian dekomposisi QR $A \;\; \nabla \;\; Q \otimes R$ maka berlaku dekomposisi QR $A \oplus B \;\nabla\; Q \otimes R$.

5.2 Saran

Penelitian ini masih memiliki ruang lingkup yang sempit, yaitu hanya pada fokus himpunan *balance*. Selain itu, peneitian ini juga hanya memberikan satu karakteristik solusi dekomposisi QR dalam aljabar max-plus tersimetri. Peneliti memberi saran, pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan untuk mencari karakteristik yang lain pada dekomposisi QR dalam aljabar max-plus tersimetri pada fokus himpunan *balance* atau bahkan pada himpunan lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 1987. *Aljabar Linear Elementer*. Edisi 5. Terjemahan Pantur Silaban dan I Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga.

Bacelli, F. dkk. 2001. *Synchronization and Linearity An Algebra for Discrete Event Systems*. New York: John Wiley and Sons.

De Schutter, Bart. 1996. 1996. *Max-Algebraic System Theory for Discrete Event Systems*. Belgia: Katholieke Universiteit Leuven- Facultiet Toegepaste Wtenschappen Arrenbergkasteel, B3001 Hevelee.

De Schutter, B. dan De Moor, B. 2002. *The QR decomposition and the singular value decomposition in the symetrized max-plus algebra revisited*. SIAM. 44(3):417-454.

Departemen Agama. 1989. *Alqur'an dan Terjemahannya*. Semarang: Toha Putra

Departemen Pendidikan Nasional. 2008. *Pendekatan, Jenis, dan Metode Penelitian Pendidikan*. Jakarta: Direktorat Tenaga Kependidikan, Direktorat Jenderal Peningkatan Mutu Pendidik dan Tenaga Kependidikan,Departemen Pendidikan Nasional

Farlow, G. Kasie. 2009. *Max-Plus Algebra*. Tesis. Virginia: Universitas Negeri dan Institut Politeknik Virginia.

Golub, Gene H. dan Charles F. Van Loan. 1996. *Matrix Computation, Third edition*. London: The Johns Hopkins Press Ltd.

Hoffman. J. D. 2001. *Numerical Methods for Engineer and Scientists*. Edisi 2. New York: Marcel Dekker.

Larson, Ron. dan Dafid C. Favo. 2009. *Elementary Linear Algebra- Sixth Edition*.Boston: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.

Nugroho, Didit Budi. 2011. *Persamaan Differensial Biasa dan Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Rudin, Walter. 1984. *Principles of Mathematical Analysis*. Singapore: McGraw-Hill.

Ruminta. 2014. *Matriks (Persamaan Linier dan Pemrograman Linier) Edisi Revisi*. Bandung: Rekayasa Sains.

Sagita Y. 2017. *Modifikasi Kondensasi Chio Pivot Fleksibel pada Aturan Cramer untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier*. Surabaya: Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh November.

Subiono. 2015. *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya*. Surabaya: Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh November.

Sugiyono. 2018. *Metode Penelitian Kuantitatif, Kualitatif, dan RD*. Bandung: Alfabeta.

Ulfa, Kurnia. 2015. *Dekomposisi Nilai Singular dalam Aljabar Max-Plus Tersimetri*. Tesis. Yogyakarta: Program Studi S2 Matematika Universitas Gadjah Mada.

Widoyoko, Eko Putro. 2016. *Teknik Penyusunan Instrumen Penelitian*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

Widowati dan Sutimin. 2007. *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang: Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Diponegoro.

Zed, Mestika. 2008. *Metode Penelitian Kepustakaan*.Jakarta: Yayasan Obor Indonesia.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Program-program yang dibuat pada aplikasi Matlab R2013a untuk membantu perhitungan dalam penelitian

Program 1. Fungsi untuk penjumlahan pada $\mathbb{R}_{max}$

```
function fx=oplus(a, b)
if a>b
    fx=a;
elseif b>a
    fx=b;
else fx = a;
end
```

Program 2. Fungsi untuk perkalian dalam $\mathbb{R}_{max}$

```
function fx=otimes(a, b)
fx= a+b;
```

Program 3. Fungsi untuk penjumlahan pada pasangan aljabar

```
function [ca cb]=poplus(aa,ab,ba,bb);
ca=oplus(aa,ba);
cb=oplus(ab,bb);
```

Program 4. Fungsi untuk perkalian pada pasangan aljabar

```
function [ca cb]=potimes(aa,ab,ba,bb);
ca=oplus(otimes(aa,ba),otimes(ab,bb));
cb=oplus(otimes(aa,bb),otimes(ab,ba));
```

Program 5. Fungsi untuk mengetahui apakah dua elemen pada $\mathbb{S}$ seimbang

```
function fx=bal(aa,ab,ba,bb)
x=-inf;
a=oplus(aa,bb);
```

```
b=oplus(ab,ba);
if a==b
    fx=1;
else
    fx=0;
end
```

Program 6. Fungsi untuk menandai kelas max-positif pada $\mathbb{S}$

```
function f=p(c)
a=c;
b=-inf;
f=[a b];
```

Program 7. Fungsi untuk menandai kelas max-negatif pada $\mathbb{S}$

```
function f=n(c)
a=-inf;
b=c;
f=[a b];
```

Program 8. Fungsi untuk menandai kelas *balance* pada $\mathbb{S}$

```
function f=b(c)
a=c;
f=[a a];
```

Program 9. Fungsi untuk mencari transpose matriks pada $\mathbb{S}$

```
function F=trans(A)
[Ar Ac]=size(A);
F=zeros(Ar,Ac);
for i=1:Ar;
    for j=1:Ac/2;
        for k=1:2;
        F(i,2*j-1:2*j)=A(j,2*i-1:2*i);
        end
    end
end
```

Program 10. Fungsi penjumlahan dua matriks pada $\mathbb{S}$

```
function Y=Moplus(C,D)
A=C;
B=D;
[Ar Ac]=size(A);
[Br Bc]=size(B);
Y=zeros(Ar,Bc);
r=0; c=0;
for i=1:Ar;
    for j=1:Bc/2;
        [r c]=poplus(A(i,2*j-
1),A(i,2*j),B(i,2*j-1),B(i,2*j));
        Y(i,2*j-1:2*j)=[r c];
        r=0; c=0;
    end
end
```

Program 11. Fungsi perkalian dua matriks pada $\mathbb{S}$

```
function Y=Motimes(C,D)
x=-inf;
A=C;
B=D;
[Ar, Ac]=size(A);
[Br, Bc]=size(B);
Y=-inf(Ar,Bc);
r=-inf;
c=-inf;
rr=-inf;
rc=-inf;
for i=1:Ar;
    for j=1:Bc/2;
        for k=1:Ac/2;
            [r, c]=potimes(A(i,(2*k)-
1),A(i,2*k),B(k, (2*j)-1),B(k,2*j));
            [rr, rc]=poplus(rr,rc,r,c);
              r=-inf;
              c=-inf;
        end
        Y(i,2*j-1:2*j)=[rr rc];
```

```
        rr=-inf;
        rc=-inf;
    end
end
```

Program 12. Fungsi untuk mengetahui apakah dua matriks pada 𝕊 seimbang

```
function f=Tbal(A,B)
[Ar Ac]=size(A);
X=zeros(Ar,Ac/2);
for i=1:Ar;
    for j=1:Ac/2;
        A(i,2*j-1);
        A(i,2*j);
        B(i,2*j-1);
        B(i,2*j);
X(i,j)=bal(A(i,2*j-1),A(i,2*j),B(i,2*j-
1),B(i,2*j));
    end
end
x=0;
for i=1:Ar
    for j=1:Ac/2
    x=x+X(i,j);
    end
end
y=Ar*Ac/2;
if x==y
    f=1;
    fprintf ('Balance');
else
    f=0;
    fprintf('Not Balance');
end
```

Program 13. Fungsi untuk memastikan keortogonalan matriks pada $\mathbb{S}$

```
function F=Torto(A)
B=trans(A);
F=Motimes(A,B);
```

Lampiran 2. Bahasa pada aplikasi Maple 17 untuk membantu perhitungan dalam penelitian

> $with(LinearAlgebra):$

> $A := \left\langle \langle 2, 3, 1\rangle \middle| \langle 4, 6, -1\rangle \middle| \left\langle -1, -\frac{3}{2}, -2\right\rangle \right\rangle$

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

> $Q1, R1 := QRDecomposition(A)$

$$Q1, R1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{7}\sqrt{14} & \frac{1}{91}\sqrt{182} \\ \frac{3}{14}\sqrt{14} & \frac{3}{182}\sqrt{182} \\ \frac{1}{14}\sqrt{14} & -\frac{1}{14}\sqrt{182} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{14} & \frac{25}{14}\sqrt{14} & -\frac{17}{28}\sqrt{14} \\ 0 & \frac{3}{14}\sqrt{182} & \frac{3}{28}\sqrt{182} \end{bmatrix}$$

Lampiran 3. Contoh cara penggunaan fungsi- fungsi pada Matlab 2013a yang sudah dibuat

```
>> A=[b(2) p(-1) n(4); p(3) b(2) p(7);n(1) p(5) b(2)]
A =  2     2    -1  -Inf  -Inf     4
     3  -Inf     2     2     7  -Inf
  -Inf     1     5  -Inf     2     2
>> Q=[p(-1) p(-3) n(0);p(0) p(-2) p(-1);n(-2) p(0) n(-4)]
Q =    -1  -Inf    -3  -Inf  -Inf     0
        0  -Inf    -2  -Inf    -1  -Inf
     -Inf    -2     0  -Inf  -Inf    -4
>> x=-inf
x =  -Inf
>> R=[p(3) n(3) p(7);b(x) p(5) p(5);b(x) b(x) p(6)]
R =
     3  -Inf  -Inf     3     7  -Inf
  -Inf  -Inf     5  -Inf     5  -Inf
  -Inf  -Inf  -Inf  -Inf     6  -Inf
>> QR=Motimes(Q,R)
QR =
     2  -Inf     2     2     6     6
     3  -Inf     3     3     7  -Inf
  -Inf     1     5  -Inf     5     5
>> Tbal(A,QR)
Balance
ans =
     1
>> Torto(Q)
ans =
     0  -Inf    -1    -1    -3    -3
    -1    -1     0  -Inf    -2    -2
    -3    -3    -2    -2     0  -Inf
```

Lampiran 4. Hasil perhitungan contoh 3.14 poin (1.)

$$A := \langle\langle e^2, e^3, -e\rangle|\langle e^{-1}, e^2, e^5\rangle|\langle -e^4, e^7, e^2\rangle\rangle \quad \#2$$

$$\begin{bmatrix} e^2 & \frac{1}{e} & -e^4 \\ e^3 & e^2 & e^7 \\ -e & e^5 & e^2 \end{bmatrix}$$

$$Q1, R1 := QRDecomposition(A) \ \#2$$

$$\Bigg[\Bigg[\frac{e^2}{\sqrt{e^6+e^4+e^2}},$$

$$\frac{e^5-e^3+e+1}{e\,(e^2+e+1)\sqrt{\frac{e^{14}+e^{13}+e^{12}-e^{10}+e^9+2e^8+e^7+e^5-e^3+e+1}{(e^2+e+1)\,e^2}}},$$

$$-\big((e^{13}-2e^{12}+4e^{11}-6e^{10}+8e^9-9e^8+10e^7-8e^6+5e^5-2e^4$$

$$+2e^2-2e+1)\,e^7\big)\Big/\Big((e^{12}-e^{11}+2e^{10}-3e^9+3e^8-2e^7+3e^6-3e^5$$

$$+3e^4-2e^3+e^2-e+1)\,(e^2-e$$

$$+1)$$

$$\Big(\big(e^8\,(e^{18}-2e^{17}+5e^{16}-8e^{15}+12e^{14}-16e^{13}+20e^{12}-20e^{11}+18e^{10}-12e^9+$$

$$-8e^4+4e^3+e^2-2e+1)\big)\Big/\big((e^2-e+1)\,(e^{12}-e^{11}+2e^{10}-3e^9+3e^8$$

$$-2e^7+3e^6-3e^5+3e^4-2e^3+e^2-e+1)\big)\Big)^{1/2}\Big)\Bigg],$$

$$\Bigg[\frac{e^3}{\sqrt{e^6+e^4+e^2}},$$

$$\big(e^4\,(1+e)\big)\Big/\Big((e^2+e$$

$$+1)\sqrt{\frac{e^{14}+e^{13}+e^{12}-e^{10}+e^9+2e^8+e^7+e^5-e^3+e+1}{(e^2+e+1)\,e^2}}\Big), \big((e^{15}$$

$$-2e^{14}+4e^{13}-6e^{12}+8e^{11}-10e^{10}+12e^9-11e^8+9e^7-6e^6+4e^5$$

$$-2e^4+2e^2-2e+1)\,e^4\big)\Big/\Big((e^{12}-e^{11}+2e^{10}-3e^9+3e^8-2e^7+3e^6$$

$$-3e^5+3e^4-2e^3+e^2-e+1)\,(e^2-e$$

$$+ 1)$$

$$((e^8 (e^{18} - 2 e^{17} + 5 e^{16} - 8 e^{15} + 12 e^{14} - 16 e^{13} + 20 e^{12} - 20 e^{11} + 18 e^{10} - 12 e^9 +$$

$$- 8 e^4 + 4 e^3 + e^2 - 2 e + 1)) / ((e^2 - e + 1) (e^{12} - e^{11} + 2 e^{10} - 3 e^9 + 3 e^8$$

$$- 2 e^7 + 3 e^6 - 3 e^5 + 3 e^4 - 2 e^3 + e^2 - e + 1)))^{1/2})],$$

$$\left[\frac{e^3}{\sqrt{e^6 + e^4 + e^2}}, \right.$$

$$(e^4 (1 + e)) \Bigg/ \Bigg((e^2 + e$$

$$+ 1) \sqrt{\frac{e^{14} + e^{13} + e^{12} - e^{10} + e^9 + 2 e^8 + e^7 + e^5 - e^3 + e + 1}{(e^2 + e + 1) e^2}} \Bigg), ((e^{15}$$

$$- 2 e^{14} + 4 e^{13} - 6 e^{12} + 8 e^{11} - 10 e^{10} + 12 e^9 - 11 e^8 + 9 e^7 - 6 e^6 + 4 e^5$$

$$- 2 e^4 + 2 e^2 - 2 e + 1) e^4) \Bigg/ \Bigg((e^{12} - e^{11} + 2 e^{10} - 3 e^9 + 3 e^8 - 2 e^7 + 3 e^6$$

$$- 3 e^5 + 3 e^4 - 2 e^3 + e^2 - e + 1) (e^2 - e$$

$$+ 1)$$

$$((e^8 (e^{18} - 2 e^{17} + 5 e^{16} - 8 e^{15} + 12 e^{14} - 16 e^{13} + 20 e^{12} - 20 e^{11} + 18 e^{10} - 12 e^9 +$$

$$+ 4 e^3 + e^2 - 2 e + 1)) / ((e^2 - e + 1) (e^{12} - e^{11} + 2 e^{10} - 3 e^9 + 3 e^8 - 2 e^7$$

$$+ 3 e^6 - 3 e^5 + 3 e^4 - 2 e^3 + e^2 - e + 1)))^{1/2})],$$

$$\left[-\frac{e}{\sqrt{e^6 + e^4 + e^2}}, \right.$$

$$(e^7 + e^6 + e^5 - e^3 + e + 1) \Bigg/ \Bigg((e^2 + e$$

$$+ 1) \sqrt{\frac{e^{14} + e^{13} + e^{12} - e^{10} + e^9 + 2 e^8 + e^7 + e^5 - e^3 + e + 1}{(e^2 + e + 1) e^2}} \Bigg), -((e^{10}$$

$$- 2 e^9 + 3 e^8 - 4 e^7 + 4 e^6 - 4 e^5 + 4 e^4 - 2 e^3 - e^2 + 2 e - 1) e^6) \Bigg/ \Bigg((e^{12}$$

$$- e^{11} + 2 e^{10} - 3 e^9 + 3 e^8 - 2 e^7 + 3 e^6 - 3 e^5 + 3 e^4 - 2 e^3 + e^2 - e + 1) (e^2$$

$$- e + 1)$$

$$\Big(\big(e^{8}\,(e^{18}-2\,e^{17}+5\,e^{16}-8\,e^{15}+12\,e^{14}-16\,e^{13}+20\,e^{12}-20\,e^{11}+18\,e^{10}-12\,e^{9}+$$

$$-e^{11}+2\,e^{10}-3\,e^{9}+3\,e^{8}-2\,e^{7}+3\,e^{6}-3\,e^{5}+3\,e^{4}-2\,e^{3}+e^{2}-e+1)\big)\Big)$$

$$^{1/2}\Big)\Big]\Big],\ \left[\left[\sqrt{e^{6}+e^{4}+e^{2}},\ -\frac{e\,(e^{5}-e^{4}-1)}{\sqrt{e^{6}+e^{4}+e^{2}}},\ \frac{e^{3}\,(e^{7}-e^{3}-1)}{\sqrt{e^{6}+e^{4}+e^{2}}}\right],\right.$$

$$\left[0,\ \sqrt{\frac{e^{14}+e^{13}+e^{12}-e^{10}+e^{9}+2\,e^{8}+e^{7}+e^{5}-e^{3}+e+1}{(e^{2}+e+1)\,e^{2}}},\right.$$

$$\left.\frac{e^{2}\,(e^{10}+e^{9}+e^{7}+e^{5}+e^{4}-e^{3}-e^{2}+1)}{(e^{2}+e+1)\sqrt{\frac{e^{14}+e^{13}+e^{12}-e^{10}+e^{9}+2\,e^{8}+e^{7}+e^{5}-e^{3}+e+1}{(e^{2}+e+1)\,e^{2}}}}\right],$$

$$\Big[0,\ 0,$$

$$\Big(\big(e^{8}\,(e^{18}-2\,e^{17}+5\,e^{16}-8\,e^{15}+12\,e^{14}-16\,e^{13}+20\,e^{12}-20\,e^{11}$$

$$+18\,e^{10}-12\,e^{9}+6\,e^{8}-4\,e^{6}+8\,e^{5}-8\,e^{4}+4\,e^{3}+e^{2}-2\,e+1)\big)\Big/\big((e^{2}-e$$

$$+1)\,(e^{12}-e^{11}+2\,e^{10}-3\,e^{9}+3\,e^{8}-2\,e^{7}+3\,e^{6}-3\,e^{5}+3\,e^{4}-2\,e^{3}+e^{2}-e$$

$$+1)\big)\Big)^{1/2}\Big]\Big]$$

Lampiran 5. Hasil perhitungan contoh 3.14 poin (2.)

$$A := \langle\langle e^{-1}, 1, -e\rangle|\langle -e^{-2}, e^{4}, e^{5}\rangle|\langle -e^{4}, e^{-2}, e^{3}\rangle\rangle$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{e} & -\frac{1}{e^{2}} & -e^{4} \\ 1 & e^{4} & \frac{1}{e^{2}} \\ -e & e^{5} & e^{3} \end{bmatrix}$$

$$Q1, R1 := QRDecomposition(A)$$

$$\left[\left[\frac{1}{e\sqrt{\frac{e^{4}+e^{2}+1}{e^{2}}}}, \frac{e^{7}-e^{5}-e^{2}-1}{\left(e^{4}+e^{2}+1\right)\sqrt{\frac{4\,e^{14}+e^{12}+e^{10}-2\,e^{7}+2\,e^{5}+e^{2}+1}{e^{2}\left(e^{4}+e^{2}+1\right)}}},\right.\right.$$

$$-\left(2\left(2\,e^{12}-e^{9}+e^{5}-e^{4}-1\right)e^{6}\right)\Bigg/\Bigg(\left(4\,e^{14}+e^{12}+e^{10}-2\,e^{7}+2\,e^{5}+e^{2}+1\right)$$

$$\left(\frac{1}{\left(4\,e^{14}+e^{12}+e^{10}-2\,e^{7}+2\,e^{5}+e^{2}+1\right)e^{2}}\left(4\,e^{24}-4\,e^{21}+e^{18}+4\,e^{17}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-4\,e^{16}-2\,e^{14}+2\,e^{13}-4\,e^{12}+e^{10}+e^{8}-2\,e^{5}+2\,e^{4}+1\right)\right)^{1/2}\Bigg)\right],$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{e^{4}+e^{2}+1}{e^{2}}}}, \frac{2\,e^{9}+e^{3}+1}{\left(e^{4}+e^{2}+1\right)e\sqrt{\frac{4\,e^{14}+e^{12}+e^{10}-2\,e^{7}+2\,e^{5}+e^{2}+1}{e^{2}\left(e^{4}+e^{2}+1\right)}}},\right.$$

$$\left(2\,e^{17}-e^{14}-2\,e^{12}+e^{10}-2\,e^{5}+e^{4}+1\right)\Bigg/\Bigg(\left(4\,e^{14}+e^{12}+e^{10}-2\,e^{7}+2\,e^{5}+e^{2}+1\right)$$

$$\left(\frac{1}{\left(4\,e^{14}+e^{12}+e^{10}-2\,e^{7}+2\,e^{5}+e^{2}+1\right)e^{2}}\left(4\,e^{24}-4\,e^{21}+e^{18}+4\,e^{17}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-4\,e^{16}-2\,e^{14}+2\,e^{13}-4\,e^{12}+e^{10}+e^{8}-2\,e^{5}+2\,e^{4}+1\right)\right)^{1/2}\Bigg)\right],$$

$$\left[-\frac{e}{\sqrt{\frac{e^4+e^2+1}{e^2}}}, \frac{2\,e^7+e^5-1}{\left(e^4+e^2+1\right)\sqrt{\frac{4\,e^{14}+e^{12}+e^{10}-2\,e^7+2\,e^5+e^2+1}{e^2\left(e^4+e^2+1\right)}}},\right.$$

$$-\left(2\,e^{17}-e^{14}+2\,e^{12}+e^{10}-2\,e^9-e^4-1\right)\Big/\Big(e\left(4\,e^{14}+e^{12}+e^{10}-2\,e^7+2\,e^5+e^2\right.$$

$$\left.+1\right)$$

$$\left(\frac{1}{\left(4\,e^{14}+e^{12}+e^{10}-2\,e^7+2\,e^5+e^2+1\right)e^2}\left(4\,e^{24}-4\,e^{21}+e^{18}+4\,e^{17}\right.\right.$$

$$\left.\left.-4\,e^{16}-2\,e^{14}+2\,e^{13}-4\,e^{12}+e^{10}+e^8-2\,e^5+2\,e^4+1\right)\right)^{1/2}\Big)\Big]\Big],\Big[$$

$$\left[\sqrt{\frac{e^4+e^2+1}{e^2}}, -\frac{e^9-e^7+1}{e^3\sqrt{\frac{e^4+e^2+1}{e^2}}}, -\frac{e^6+e^5-1}{e^2\sqrt{\frac{e^4+e^2+1}{e^2}}}\right],$$

$$\left[0, \sqrt{\frac{4\,e^{14}+e^{12}+e^{10}-2\,e^7+2\,e^5+e^2+1}{e^2\left(e^4+e^2+1\right)}},\right.$$

$$\left.-\frac{e^{14}-2\,e^{13}-e^{12}-e^{11}-3\,e^9-e^7+e^6-e^5-1}{\left(e^4+e^2+1\right)e^3\sqrt{\frac{4\,e^{14}+e^{12}+e^{10}-2\,e^7+2\,e^5+e^2+1}{e^2\left(e^4+e^2+1\right)}}}\right],$$

$$\Big[0, 0,$$

$$\left(\frac{1}{\left(4\,e^{14}+e^{12}+e^{10}-2\,e^7+2\,e^5+e^2+1\right)e^2}\left(4\,e^{24}-4\,e^{21}+e^{18}+4\,e^{17}\right.\right.$$

$$\left.\left.-4\,e^{16}-2\,e^{14}+2\,e^{13}-4\,e^{12}+e^{10}+e^8-2\,e^5+2\,e^4+1\right)\right)^{1/2}\Big]\Big]$$

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka Ngaliyan, Semarang 50185 Telp. 024-7601295, Fax. 024-7615387

Semarang, 27 Agustus 2018

Nomer : B-2985/Un.10.8/J.5/PP.00.9/08/2018
Hal : Penunjukan Pembimbing Skripsi

Kepada Yth:
1. Dr. Saminanto, M., Sc.
2. Budi Cahyono, M., Si.

Di Semarang

Assalamu'alaikum Wr. Wb

Berdasarkan hasil pembahasan usulan judul penelitian di Program Studi Matematika, maka Fakultas Sains dan Teknologi menyetujui judul skripsi mahasiswa:

Nama : Zakaria Bani Ikhtiyar
NIM : 1508046025
Judul : **DEKOMPOSISI QR MATRIKS 2 X 2 PADA ALJABAR MAX-PLUS TERSIMETRI DENGAN METODE GRAM SMIDTH**

Sehubungan dengan hal tersebut kami menunjuk saudara:
1. Dr. Saminanto, M., Sc. sebagai Pembimbing I
2. Budi Cahyono, M., Si. sebagai Pembimbing II

Demikian penunjukan pembimbing skripsi ini disampaikan dan atas kerjasama yang diberikan kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb

A.n Dekan
Ketua Program Studi Matematika

KEMENTERIAN AGAMA FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI UIN WALISONGO SEMARANG REPUBLIK INDONESIA

Emy Siswanah, M.Sc
NIP. 19870202 201101 2 014

Tembusan:
1. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo sebagai laporan
2. Mahasiswa yang bersangkutan
3. Arsip

RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

1. Nama Lengkap : Zakaria Bani Ikhtiyar
2. Tempat & Tgl. Lahir : Semarang, 28 Maret 1997
3. Alamat Rumah : Dawung RT 03/ RW 03, Kedungpane, Mijen, Semarang, Jawa Tengah
4. HP : 085727750570
5. E-mail : zakaria.bani45@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. SD Negeri Kedungpane 01 Semarang (2002-2008)
2. SMP Negeri 16 Semarang (2008-2011)
3. SMK Negeri 7 Semarang (2011-2015)

Semarang, 27 Juni 2019

Zakaria Bani Ikhtiyar

NIM. 1508046025