PENGEMBANGAN MODUL PEMBELAJARAN REFLEKTIF BERBASIS *UNITY OF SCIENCES* UNTUK MENINGKATKAN PEMECAHAN MASALAH DAN KARAKTER SISWA MA

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat

Guna Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan

Dalam Ilmu Pendidikan Matematika

Oleh:

AFIDA LUTHFIANI

NIM. 133511023

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO

SEMARANG

2020

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: AFIDA LUTHFIANI
NIM	: 133511023
Program Studi	: Pendidikan Matematika

Menyatakan bahwa skripsi yang berjudul:

PENGEMBANGAN MODUL PEMBELAJARAN REFLEKTIF BERBASIS *UNITY OF SCIENCES* UNTUK MENINGKATKAN PEMECAHAN MASALAH DAN KARAKTER SISWA MA

Secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 27 Desember 2020

Pembuat Pernyataan,

Afida Luthfiani

NIM: 133511023

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO SEMARANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka Km. 1 Semarang Telp. 024 76433366 Semarang 50185

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini:

Judul	: Pengembangan Modul Pembelajaran Reflektif Berbasis *Unity Of Sciences* untuk Meningkatkan Pemecahan Masalah dan Karakter Siswa MA
Nama	: Afida Luthfiani
NIM	: 133511023
Jurusan	: Pendidikan Matematika

Telah diujikan dalam sidang munaqasyah oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Pendidikan Matematika.

Semarang, 20 Maret 2021

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

Dr. Saminanto, S.Pd., M.Sc.
NIP. 19720604 200312 1 002

Penguji II,

Dyan Falasifa Tsani, M.Pd.
NIP. -

Penguji III,

Ulliya Fitriani, M.Pd.
NIP. -

KEMENTERIAN AGAMA FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI UIN WALISONGO SEMARANG REPUBLIK INDONESIA

Penguji IV,

Nadhifah, M.S.I.
NIP. 19750827 200312 2 003

Pembimbing I,

Dr. Saminanto, S.Pd., M.Sc.
NIP. 19720604 200312 1 002

Pembimbing II,

Dyan Falasifa Tsani, M.Pd.
NIP. -

NOTA DINAS

Semarang, 27 Desember 2020

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum wr.wb.
Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan, dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	**Pengembangan Modul Pembelajaran Reflektif Berbasis *Unity of Sciences* untuk Meningkatkan Pemecahan Masalah dan Karakter Siswa MA**
Nama	:	**Afida Luthfiani**
NIM	:	133511023
Program Studi	:	Pendidikan Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.
Wassalamu'alaikum wr.wb.

Pembimbing I,

Dr. Saminanto, M.Sc.
NIP: 197206042003121002

NOTA DINAS

Semarang, 27 Desember 2020

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum wr.wb.
Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan, dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	**Pengembangan Modul Pembelajaran Reflektif Berbasis *Unity of Sciences* untuk Meningkatkan Pemecahan Masalah dan Karakter Siswa MA**
Nama	:	**Afida Luthfiani**
NIM	:	133511023
Program Studi	:	Pendidikan Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.
Wassalamu'alaikum wr.wb.

Pembimbing II,

Dyan Falasifa Tsani, M.Pd.
NIP: -

ABSTRAK

PENGEMBANGAN MODUL PEMBELAJARAN REFLEKTIF BERBASIS *UNITY OF SCIENCES* UNTUK MENINGKATKAN PEMECAHAN MASALAH DAN KARAKTER SISWA MA

Oleh:
Afida Luthfiani
NIM. 133511023

Matematika peminatan merupakan salah satu mata pelajaran yang terdapat dalam struktur kurikulum yang berlaku di SMA/MA. Penyediaan buku mata pelajaran peminataan akademik diserahkan kepada penerbit, sehingga beberapa sekolah yang pengadaan buku perpustakaan di sekolahnya hanya mengandalkan bantuan dari pemerintah belum mampu menyediakan buku-buku peminatan, khususnya matematika peminatan.

Penelitian ini bertujuan untuk menyusun modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* untuk meningkatkan pemecahan masalah dan karakter siswa MA pada materi turunan fungsi trigonometri dan mengetahui proses penyusunannya sehingga dihasilkan modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* yang valid, praktis dan efektif dari segi teori.

Penelitian ini merupakan penelitian dan pengembangan (*research and development*). Penelitian ini merupakan penelitian dan pengembangan level 1 yang paling rendah tingkat kesulitannya, karena penelitian ini bertujuan untuk menghasilkan rancangan produk saja, belum sampai pada tahap memproduksi dan menguji produk di lapangan.

Modul pembelajaran disusun melalui langkah-langkah seperti analisis kurikulum, analisis materi, merumuskan tujuan pembelajaran, menyusun kerangka isi modul, dan menyusun rancangan modul secara utuh. Rancangan modul dinyatakan valid jika materi yang disajikan benar sesuai dengan kaidah keilmuan yang berlaku dan memiliki komponen yang konsisten.

Rancangan modul dinyatakan praktis jika rancangan modul menarik dan dapat digunakan dalam kondisi normal. Rancangan modul dinyatakan efektif jika rancangan modul dapat digunakan untuk mencapai tujuan pembelajaran yang hendak dicapai.

Kata kunci: modul pembelajaran, pembelajaran reflektif, *unity of sciences*, pemecahan masalah, karakter

TRANSLITERASI ARAB-LATIN

Penulisan transliterasi huruf-huruf Arab Latin dalam skripsi ini berpedoman pada SKB Menteri Agama dan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan R.I. Nomor : 158/1987 dan Nomor : 0543b/U/1987. Penyimpangan penulisan kata sandang [al-] disengaja secara konsisten supaya sesuai teks Arabnya.

ا	A	ط	t}
ب	B	ظ	z}
ت	T	ع	‘
ث	s\	غ	G
ج	J	ف	F
ح	h}	ق	Q
خ	Kh	ك	K
د	D	ل	L
ذ	z\	م	M
ر	R	ن	N
ز	Z	و	W
س	S	ه	H
ش	Sy	ء	‘
ص	s}	ئ	Y
ض	d}		

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum wr.wb.

Alhamdulillah, puji syukur atas segala petunjuk dan limpahan rahmat Allah SWT sehingga peneliti dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Pengembangan Modul Pembelajaran Reflektif Berbasis *Unity of Sciences* untuk Meningkatkan Pemecahan Masalah dan Karakter Siswa MA" dengan baik. *Shalawat* dan salam semoga senantiasa tercurah kepada Nabi Muhammad SAW.

Selesainya skripsi ini tentu tidak akan lepas dari segala pihak yang telah membantu. Oleh karena itu, peneliti mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang, Dr. H. Ismail, M.Ag.
2. Ketua Jurusan Pendidikan Matematika UIN Walisongo Semarang, Yulia Romadiastri, S.Si., M.Sc.
3. Dosen Pembimbing, Dr. Saminanto, M.Sc. dan Dyan Falasifa Tsani, M.Pd. yang telah memberikan bimbingan serta arahan selama proses penulisan skripsi.
4. Kepala MA NU 04 Al-Ma'arif Boja, segenap guru, dan karyawan yang telah memberikan banyak arahan dari sebelum penelitian hingga penelitian ini selesai.

5. Kedua orang tua tercinta, Bapak Yakub dan Ibu Rodhiyah atas kasih sayang, motivasi, dukungan, dan do'a yang tidak pernah terhenti.
6. Segenap Dosen Fakultas Sains dan Teknologi yang telah membekali pengetahuan selama belajar di UIN Walisongo Semarang.
7. Teman-teman Pendidikan Matematika angkatan 2013.
8. Semua pihak yang telah memberikan dukungan baik moril dan materiil yang tidak dapat peneliti sebutkan satu per satu.

Peneliti tidak dapat memberikan balasan apapun selain ucapan terima kasih dan iringan do'a semoga Allah SWT membalas kebaikan kalian dengan sebaik-baik balasan. Peneliti menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang konstruktif sangat diharapkan demi kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini bermanfaat bagi semuanya. *Aamiin*.

Wassalamu'alaikum wr.wb.

Semarang, 27 Desember 2020

Peneliti,

Afida Luthfiani

NIM: 133511023

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Karakter mempunyai peran yang besar dalam menentukan kesuksesan seseorang (Zaini, Wuryanto, & Sutanto, 2016). Hal ini dikarenakan kesuksesan seseorang tidak hanya ditentukan oleh pengetahuan dan kemampuan teknis (*hard skill*) saja, tetapi lebih ditentukan oleh kemampuan mengelola diri sendiri dan orang lain (*soft skill*) (Muslich, 2011). Kemampuan seseorang dalam mengelola diri sendiri dan orang lain ini disebut dengan karakter.

Pendidikan nasional bertujuan untuk mengembangkan potensi siswa agar menjadi manusia yang beriman dan bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa, berakhlak mulia, cakap, kreatif, mandiri, dan menjadi warga negara yang demokratis dan bertanggung jawab (Pasal 3 UU No.20 Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional). Rumusan tujuan pendidikan nasional tersebut merupakan rumusan kualitas manusia Indonesia yang harus dikembangkan. Oleh karena itu, pendidikan di Indonesia dituntut untuk mampu mencetak generasi penerus bangsa yang cerdas dan berkarakter.

Muslich (2011) menyatakan bahwa sistem pendidikan yang berhasil adalah sistem pendidikan yang dapat membentuk manusia-manusia berkarakter yang diperlukan dalam mewujudkan suatu negara yang terhormat. Namun pada kenyataannya, pendidikan di Indonesia belakangan ini lebih diarahkan untuk mencetak siswa agar pandai secara kognitif (menekankan pengembangan otak kiri), sedangkan materi pelajaran yang berkaitan dengan pengembangan otak kanan kurang mendapatkan perhatian. Muslich (2011) menyatakan bahwa pendekatan pembelajaran yang terlalu kognitif ini menyebabkan siswa belajar hanya untuk meraih nilai tinggi. Hal tersebut cenderung mendorong siswa untuk mendapatkan nilai yang tinggi dengan cara yang tidak jujur, seperti mencontek. Padahal kejujuran merupakan salah satu karakter utama yang harus dimiliki seseorang.

Lickona menyatakan ada sepuluh tanda yang menunjukkan bahwa sebuah bangsa sedang berjalan menuju jurang kehancuran. Kesepuluh tanda tersebut bahkan sudah muncul di Indonesia. Beberapa di antara tanda tersebut yang muncul di Indonesia adalah meningkatnya kekerasan di kalangan remaja, meningkatnya perilaku merusak diri dengan penggunaan narkoba, alkohol, dan seks bebas, dan lain sebagainya. Ini menunjukkan bahwa bangsa Indonesia sedang berada dalam kondisi yang mencemaskan. Oleh karena itu, pendidikan Indonesia dapat dikatakan belum berhasil dalam mencetak manusia yang berkarakter (Muslich, 2011).

Untuk mewujudkan pendidikan yang dapat mencetak manusia yang berkarakter, pemerintah menyusun program Penguatan Pendidikan Karakter (PPK). Penguatan Pendidikan Karakter merupakan gerakan pendidikan di bawah tanggung jawab satuan pendidikan untuk memperkuat karakter siswa melalui harmonisasi olah hati (etik), olah rasa (estetis), olah pikir (literasi), dan olah raga (kinestetik) dengan melibatkan kerja sama antara satuan pendidikan, keluarga, dan masyarakat sebagai bagian dari Gerakan Nasional Revolusi Mental (Pasal 1 Ayat 1 Peraturan Presiden Nomor 87 Tahun 2017 tentang Penguatan Pendidikan Karakter). PPK dilaksanakan dengan menerapkan nilai-nilai Pancasila dalam pendidikan karakter.

Dalam rangka menghindari pendidikan karakter yang tidak sejalan dengan spirit dan prinsip Islam, perlu diterapkan pendidikan karakter yang bersumber pada ajaran Islam. Oleh karena itu, pendidikan karakter yang berbasis pada paradigma *unity of sciences* perlu diterapkan. Paradigma *unity of sciences* merupakan paradigma yang menyatakan bahwa semua adalah satu kesatuan yang bersumber dari Allah dan bermuara kembali kepada Allah melalui wahyu-Nya, baik secara langsung maupun tidak langsung (Fanani, 2015). Menurut paradigma *unity of* *sciences*, semua ilmu seharusnya saling berdialog untuk mengantarkan pengkajinya semakin mengenal dan semakin dekat kepada Allah. Dengan menerapkan paradigma *unity of sciences*, diharapkan seseorang dapat mentauhidkan Allah semurni-murninya.

Yuli Suliswidiawati menyatakan bahwa seseorang yang menerapkan tauhid (yaitu mengembalikan semuanya kepada Allah, menyandarka segala sesuatu kepada Allah) akan selalu mempunyai prasangka baik kepada Allah, sehingga regulasi emosinya menjadi baik dan jiwanya menjadi sehat (Saif & Almeera, 2019). Orang yang sehat jiwanya adalah orang yang mampu meregulasi emosi dengan sangat baik. Kemampuan seseorang dalam meregulasi emosi termasuk bagian dari kecerdasan emosi, sedangkan beberapa hasil penelitian menunjukkan bahwa kecerdasan emosi berhubungan dengan kualitas karakter seseorang. Oleh karena itu, penerapan paradigma *unity of sciences* dalam kehidupan diharapkan dapat membantu meningkatkan kualitas karakter seseorang.

Setiap manusia dapat dipastikan akan menemui permasalahan dalam menjalani kehidupannya di muka bumi. Untuk menghadapi dan menyelesaikan permasalahan tersebut, manusia membutuhkan beberapa kemampuan. Kemampuan-kemampuan tersebut antara lain kemampuan penalaran, pemecahan masalah, dan komunikasi (Wardhani, Purnomo, & Wahyuningsih, 2010). Kemampuan-kemampuan tersebut dapat dikembangkan melalui pembelajaran matematika.

Kemampuan pemecahan masalah merupakan hal yang sangat penting dalam pembelajaran matematika. Hampir setiap butir kompetensi dasar mencantumkan kemampuan pemecahan masalah. Hal tersebut menegaskan bahwa setiap siswa memerlukan kemampuan pemecahan masalah.

Salah satu tujuan pembelajaran matematika adalah agar siswa memiliki kemampuan pemecahan masalah. Holmes menyatakan bahwa orang yang terampil memecahkan masalah akan mampu dalam memenuhi kebutuhan hidupnya. Selain itu, orang tersebut juga akan menjadi pekerja yang lebih produktif dan mampu memahami isu-isu yang berkaitan dengan masyarakat global (Dhurori & Markaban, 2010). Fakta menunjukkan bahwa orang yang mampu memecahkan masalah akan hidup produktif dalam abad dua puluh satu ini (Wardhani, Purnomo, & Wahyuningsih, 2010).

Cahyani dan Setyawati (2016) menyatakan bahwa kemampuan pemecahan masalah yang rendah akan mengakibatkan rendahnya kualitas sumber daya manusia . Oleh karena itu, kemampuan pemecahan masalah perlu ditingkatkan. Peningkatan kemampuan pemecahan masalah diharapkan dapat mempersiapkan sumber daya manusia yang unggul dan siap bersaing serta mampu memecahkan masalah dalam menghadapi tantangan masyarakat global (Cahyani & Setyawati, 2016).

Seseorang akan lebih mudah memecahkan masalah jika dan hanya jika orang tersebut sering menghadapi masalah yang beragam dan mampu memecahkan permasalahannya (Dhurori & Markaban, 2010). Singkatnya, orang yang mempunyai pengalaman lebih banyak dalam menyelesaikan permasalahan akan lebih terampil dibandingkan orang yang kurang berpengalaman. Namun, pengalaman tersebut tidak akan berarti apa-apa untuk meningkatkan kemampuan pemecahan masalah seseorang jika pengalaman tersebut tidak direfleksikan.

Refleksi merupakan tanggapan seseorang secara mendalam dan kritis terhadap pengalaman tertentu (Saptono, 2012). Refleksi merupakan syarat agar pengalaman dapat dijadikan sebagai guru (Saptono, 2011). Dalam pemecahan masalah, refleksi dapat digunakan untuk mencari strategi pemecahan masalah yang lebih baik untuk menyelesaikan suatu permasalahan. Dengan demikian, refleksi diharapkan dapat meningkatkan kemampuan pemecahan masalah.

Model pembelajaran yang melibatkan refleksi dalam proses pembelajarannya dinamakan dengan model pembelajaran reflektif. Pembelajaran reflektif dibangun berdasarkan pemikiran tentang hakikat berpikir reflektif

(Kesuma, Triatna, & Permana, 2012). Pembelajaran reflektif juga merupakan bentuk model pendidikan karakter yang diarahkan pada pemahaman makna dan nilai yang terkandung di balik teori, fakta, fenomena, informasi, atau benda yang menjadi bahan ajar dalam suatu mata pelajaran (Kesuma, Triatna, & Permana, 2012).

Buku teks pelajaran merupakan sumber pembelajaran utama untuk mencapai kompetensi-kompetensi yang dicantumkan dalam Kompetensi Dasar dan Kompetensi Inti (Peraturan Pemerintah No.32 Tahun 2013 tentang Standar Nasional Pendidikan). Buku teks digunakan untuk meningkatkan efisiensi dan efektivitas pembelajaran yang jumlahnya disesuaikan dengan kebutuhan siswa (Lampiran Permendikbud No.22 Tahun 2016 tentang Standar Proses Pendidikan Dasar dan Menengah). Melalui buku teks, siswa diharapkan dapat memperoleh informasi atau materi pembelajaran selain guru yang terjamin keakuratannya.

Buku teks berperan penting dalam pelaksanaan pembelajaran. Namun belum semua sekolah mampu menyediakan buku teks yang jumlahnya mampu mencukupi kebutuhan siswa, salah satunya MA NU 04 Al-Ma'arif Boja. Fahruddin, salah satu petugas perpustakaan di MA NU 04 Al-Ma'arif Boja, menyatakan bahwa saat ini perpustakaan sekolah belum menyediakan buku yang sesuai dengan Kurikulum 2013 secara optimal. Untuk Kurikulum 2013, perpustakaan hanya menyediakan buku untuk mata pelajaran agama, sedangkan buku mata pelajaran umum seperti matematika belum tersedia (Wawancara, 15 September 2018). Untuk mencukupi kebutuhan buku sesuai dengan jumlah siswa, maka siswa dapat menggunakan bahan ajar untuk menggantikan peran buku teks.

Bahan ajar hadir sebagai solusi untuk membantu siswa dalam mempelajari materi-materi yang dibutuhkan untuk mencapai kompetensi-kompetensi yang telah ditetapkan. Prastowo (2015) menyatakan bahwa bahan ajar merupakan bahan informasi yang disusun untuk mempermudah pelaksanaan pembelajaran. Bahan ajar disusun berdasarkan kompetensi yang akan dikuasai siswa, sehingga bahan ajar diharapkan dapat membantu siswa dalam mencapai Kompetensi Dasar dan Kompetensi Inti.

Salah satu jenis bahan ajar yang dapat digunakan adalah modul. Purwanto (2007) mendefinisikan modul sebagai bahan ajar yang dirancang secara sistematis berdasarkan kurikulum tertentu dan dapat dipelajari siswa secara mandiri. Dengan menggunakan modul, siswa diharapkan dapat belajar lebih terarah dan sistematis, serta dapat mencapai kompetensi yang diharapkan.

Mengingat pentingnya kemampuan pemecahan masalah dan karakter untuk dimiliki setiap individu, perlu dikembangkan modul pembelajaran reflektif berbasis unity of sciences pada materi turunan fungsi trigonometri. Pengembangan modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* pada materi turunan fungsi trigonometri ini dimaksudkan untuk membantu siswa dalam belajar materi turunan fungsi trigonometri sesuai kecepatan belajar masing-masing, serta untuk membantu meningkatkan kemampuan pemecahan masalah dan karakternya.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang masalah, rumusan masalah dalam penelitian pengembangan modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* ini adalah "Bagaimanakah pengembangan modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* untuk meningkatkan pemecahan masalah dan karakter siswa MA yang valid, praktis, dan efektif secara teori?"

C. Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan penelitian pengembangan modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* ini adalah mengetahui pengembangan modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* untuk meningkatkan pemecahan masalah dan karakter siswa MA yang valid, praktis, dan efektif secara teori.

Penelitian pengembangan modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* diharapkan bermanfaat untuk:

1. Memberikan sumbangan ilmu pengetahuan berupa langkah-langkah yang dilakukan dalam mengembangkan modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences*.
2. Memberikan sumbangan hasil atau rancangan produk berupa modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* yang dapat digunakan sebagai salah satu sumber belajar matematika sekaligus dapat membantu meningkatkan kemampuan pemecahan masalah dan karakter siswa.

D. Spesifikasi Produk

Produk yang dikembangkan dalam penelitian dan pengembangan ini adalah modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences*, dengan spesifikasi produk sebagai berikut.

1. Modul yang akan dikembangkan membahas materi tentang turunan fungsi trigonometri untuk siswa kelas XII MA (matematika peminatan).
2. Modul disampaikan menggunakan model pembelajaran refektif berbasis *unity of sciences*.
3. Modul terdiri dari komponen:
   a. Pendahuluan, berisi uraian singkat tentang materi yang akan dipelajari dalam modul, keterkaitan dengan materi sebelumnya (materi prasyarat), tujuan pembelajaran, dan peta konsep.

b. Isi, berisi uraian materi, contoh-contoh, ilustrasi atau diagram, latihan, dan umpan balik.
c. Penutup, berisi rangkuman atau kesimpulan, uraian singkat tentang keterkaitan dengan materi selanjutnya.

4. Agar modul lebih mudah dipelajari siswa, modul dibagi ke dalam dua bab, yaitu turunan fungsi trigonometri dan penerapan turunan fungsi trigonometri.
5. Modul dilengkapi dengan jurnal reflektif yang membantu siswa dalam memantau perkembangan dirinya dan mencatat kemajuan belajarnya.
6. Modul dilengkapi dengan kolom *unity of sciences* yang berisi keterkaitan materi dengan ilmu lain/agama.

E. Asumsi Pengembangan dan Keterbatasan Penelitian

1. Asumsi Pengembangan

Asumsi pengembangan adalah hal-hal yang mendasari dilakukan pengembangan (Setyosari, 2015). Pengembangan modul pembelajaran reflektif berbasis unity of sciences ini didasarkan pada asumsi-asumsi berikut.

a. Kemampuan pemecahan masalah merupakan salah satu kemampuan yang harus dikuasai seseorang untuk menghadapi era revolusi industri 4.0 (Srini, Siagian, Kia, & Dapamerang, 2018).

b. Karakter yang dimiliki seseorang berperan besar terhadap kesuksesannya (Zaini, Wuryanto, & Sutanto, 2016).
c. Kualitas karakter bangsa menentukan kemajuan suatu bangsa (Muslich, 2011).
d. Kegiatan refleksi perlu dilakukan oleh setiap manusia dalam kehidupan sehari-hari. Hal ini ditunjukkan dalam firman Allah dalam Surat Al-Hasyr ayat 18: *"Wahai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan hendaklah setiap orang memperhatikan apa yang telah diperbuatnya untuk hari esok (akhirat). Bertakwalah kepada Allah. Sesungguhnya Allah Mahateliti terhadap apa yang kamu kerjakan."* (TQS Al-Hasyr[59]:18)
e. Kegiatan refleksi dapat membantu siswa dalam membangun keterampilan berpikir tingkat tinggi (Rohana & Ningsih, 2016).
f. Pembelajaran reflektif dipandang memiliki banyak kelebihan jika digunakan sebagai alternatif pembelajaran matematika untuk mengembangkan kemampuan pemecahan masalah matematis (Rohana & Ningsih, 2016).
g. Paradigma *unity of sciences* memandang bahwa semua ilmu pengetahuan merupakan satu kesatuan yang berasal dari Allah dan akan bermuara kembali

pada Allah melalui wahyu-Nya (Fanani, 2015). Hal ini didasarkan pada firman Allah dalam Surat Al-Baqarah ayat 31: *"Dia mengajarkan kepada Adam nama-nama (benda) seluruhnya, kemudian Dia memperlihatkannya kepada para malaikat, seraya berfirman, 'Sebutkan kepada-Ku nama-nama (benda) ini jika kamu benar!'"* (TQS Al-Baqarah[2]:31). Paradigma *unity of sciences* diperlukan agar pendidikan karakter yang diterapkan di sekolah tidak menghilangkan nilai-nilai Islam.

2. Keterbatasan Penelitian

Pengembangan modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* ini mempunyai keterbatasan penelitian, yaitu:

a. Materi yang dikembangkan dalam modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* ini terbatas pada turunan fungsi trigonometri untuk matematika peminatan kelas XII SMA.
b. Strategi untuk mengimplemetasikan *unity of sciences* yang digunakan dalam modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* ini terbatas pada spiritualisasi ilmu-ilmu modern.
c. Evaluasi modul dilakukan menggunakan prinsip evaluasi formatif, yaitu evaluasi yang dilakukan selama proses pengembangan modul berlangsung

yang bertujuan untuk menemukan kelemahan dan kekurangan modul.

BAB II
LANDASAN TEORI

A. Deskripsi Teori

1. Pembentukan Karakter Siswa

Karakter merupakan watak, tabiat, akhlak, atau kepribadian seseorang yang terbentuk dari hasil internalisasi berbagai kebajikan (*virtues*) yang diyakini dan digunakan sebagai landasan cara pandang, berpikir, bersikap, dan bertindak (Puskur, 2010). Karakter merupakan aspek penting yang menentukan kualitas sumber daya manusia. Muslich (2011) menyatakan bahwa kualitas karakter bangsa menentukan kemajuan bangsa tersebut. Bangsa yang maju adalah bangsa yang memiliki karakter yang berkualitas. Zubaedi (2011) menyatakan bahwa hilangnya karakter akan menyebabkan hilangnya generasi penerus bangsa.

Lickona menyatakan bahwa ada tiga unsur yang menyusun karakter, yaitu pengetahuan moral (*moral knowing*), perasaan moral (*moral feeling*), dan perilaku moral (*moral behavior*) (Zubaedi, 2011). Jadi, karakter yang baik tersusun dari pengetahuan tentang kebaikan, keinginan terhadap kebaikan, dan berbuat kebaikan (Zubaedi, 2011).

Orang yang mempunyai karakter baik/unggul bisa didefinisikan sebagai orang yang melakukan hal-hal terbaik yang bisa dilakukan terhadap Allah SWT, dirinya sendiri, sesama manusia, dan lingkungan sekitar dengan mengoptimalkan potensi (pengetahuan) dirinya dan disertai dengan kesadaran, emosi, dan perasaannya (Zubaedi, 2011). Suparlan menyatakan bahwa orang yang berkarakter baik adalah orang yang dapat membuat keputusan dan siap mempertanggungjawabkan setiap akibat dari keputusan yang ia buat (Zubaedi, 2011). Jadi, seseorang akan dianggap mempunyai karakter baik jika seseorang tersebut telah mampu bertindak atau berperilaku berdasarkan etika yang berlaku di masyarakat (Zubaedi, 2011).

Karakter yang dimiliki seseorang berperan besar terhadap kesuksesannya (Zaini, Wuryanto, & Sutanto, 2016). Hal ini dikarenakan orang yang berkarakter baik memiliki kecerdasan emosi yang baik. Kecerdasan emosi merupakan kemampuan seseorang dalam mengelola emosinya. Muslich (2011) menyatakan bahwa orang yang mempunyai kecerdasan emosi yang baik akan berhasil dalam menghadapi segala macam tantangan, termasuk tantangan untuk berhasil secara akademis. Muslich (2011) juga menambahkan, bahwa para remaja yang berkarakter akan terhindar dari permasalahan umum yang dihadapi remaja, seperti kenakalan, tawuran, narkoba, miras, perilaku seks bebas, dan sebagainya.

Orang yang tidak memiliki karakter yang baik, bahkan bisa dikatakan memiliki karakter yang buruk, cenderung akan mengalami kegagalan di berbagai aspek kehidupan. Joseph menyatakan bahwa ada sederet faktor yang menyebabkan siswa gagal di sekolah. Dari deretan faktor tersebut, kecerdasan otak yang sering dicurigai sebagai penyebab kegagalan siswa tidak termasuk ke dalam faktor penyebab kegagalan siswa di sekolah, melainkan karakter. Karakter merupakan faktor yang menyebabkan siswa mengalami kegagalan di sekolah, seperti kurangnya rasa percaya diri, kemampuan bekerjasama, kemampuan bergaul, kemampuan berkonsentrasi, rasa empati, dan kemampuan berkomunikasi (Muslich, 2011).

Karakter tidaklah datang dengan sendirinya, melainkan harus dibangun dan dibentuk (Zubaedi, 2011). Karakter yang dimiliki seseorang berkembang berdasarkan potensi yang dibawanya sejak lahir (karakter dasar) yang bersifat biologis (Zubaedi, 2011). Ki Hadjar Dewantara menyatakan bahwa karakter seseorang merupakan hasil perpaduan antara karakter biologis (karakter dasar) dan hasil interaksi dengan lingkungannya (Zubaedi, 2011). Dari definisi karakter, disebutkan bahwa karakter terbentuk dari hasil internalisasi nilai-nilai kebajikan yang diyakini dalam masyarakat (Puskur, 2010).

Internalisasi nilai-nilai kebajikan yang diyakini dalam masyarakat dapat dilakukan melalui proses pendidikan. Majid (2014) menyatakan bahwa pendidikan merupakan salah satu cara yang efektif dan strategis untuk membina karakter yang mampu mengangkat harkat dan martabat seseorang. Melalui pendidikan, karakter seseorang dapat dibentuk sehingga menjadi suatu kepribadian (Majid, 2014). Oleh karena itu, sistem pendidikan yang berhasil adalah sistem pendidikan yang dapat membentuk manusia-manusia berkarakter (Muslich, 2011).

Hasil internalisasi nilai-nilai kebijakan pada seseorang (yang selanjutnya disebut hierarki perilaku berkarakter) mempunyai tingkatan, yaitu:

a. Pertama, mampu menjelaskan hubungan antara materi dengan nilai.
b. Kedua, menyadari adanya kekuasaan di luar manusia atau menyadari bahwa manusia itu kecil dan bukan pemilik kekuasaan yang sejati.
c. Ketiga, termotivasi untuk melakukan sesuatu dari hasil pemahamannya terhadap makna/nilai yang dipelajari.

d. Keempat, mempraktikkan nilai/makna yang dipahami dalam kehidupan sehari-hari.
e. Kelima, menjadi teladan bagi orang-orang di lingkungan terdekat.
f. Keenam, mengajak orang terdekat untuk melakukan makna/nilai yang dipelajari (Kesuma, Triatna, & Permana, 2012).

2. Kemampuan Pemecahan Masalah

Semua orang pernah menghadapi masalah, baik disadari maupun tidak. Dalam matematika, masalah didefinisikan sebagai soal atau pertanyaan yang harus dijawab. Namun para ahli pendidikan matematika menyatakan bahwa tidak semua soal atau pertanyaan dapat disebut sebagai masalah. Suatu pertanyaan akan menjadi masalah jika pertanyaan itu menunjukkan adanya tantangan yang tidak dapat diselesaikan menggunakan suatu prosedur rutin yang sudah diketahui (Shadiq, 2014).

Dalam matematika, masalah dapat digolongkan menjadi dua jenis, yaitu masalah menemukan (*problem to find*) dan masalah membuktikan (*problem to prove*).

a. Penemuan, yaitu mencari, menentukan, atau mendapatkan nilai atau objek tertentu yang tidak dapat diketahui dari soal serta memenuhi kondisi atau syarat yang sesuai dengan soal.

b. Pembuktian, yaitu prosedur untuk menentukan kebenaran suatu pernyataan (Roebyanto & Harmini, 2017).

Masalah diselesaikan melalui suatu prosedur pemecahan masalah. Polya (1985) mengartikan pemecahan masalah sebagai suatu usaha mencari jalan keluar dari suatu kesulitan guna mencapai suatu tujuan yang tidak segera dapat dicapai. Pemecahan masalah merupakan proses menerapkan pengetahuan yang telah diperoleh sebelumnya ke dalam situasi baru yang belum dikenal (Wardhani, Purnomo, & Wahyuningsih, 2010). Sedangkan Shadiq (2014) mendefinisikan pemecahan masalah sebagai proses berpikir untuk menentukan apa yang harus dilakukan ketika seseorang tidak tahu apa yang harus dilakukan.

Pemecahan masalah merupakan bagian yang sangat penting dalam kurikulum matematika. Melalui proses pemecahan masalah, siswa dapat memperoleh pengalaman menggunakan pengetahuan dan keterampilan yang dimilikinya dalam memecahkan masalah yang bersifat tidak rutin (Roebyanto & Harmini, 2017).

Kemampuan pemecahan masalah merupakan hal yang penting dalam pembelajaran matematika, karena hampir di semua kompetensi dasar akan dijumpai penegasan tentang diperlukannya kemampuan pemecahan masalah (Dhurori & Markaban, 2010). Pembelajaran matematika bertujuan agar siswa memiliki kemampuan pemecahan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model, dan menafsirkan solusi yang diperoleh (Dhurori & Markaban, 2010; Wardhani, Purnomo, & Wahyuningsih, 2010).

Kemampuan pemecahan masalah merupakan salah satu kompetensi yang harus dimiliki siswa setelah belajar matematika. Tanpa kemampuan pemecahan masalah, manfaat serta kekuatan pengetahuan dan keterampilan matematika akan menjadi terbatas (Murdiana, 2015). Polya menyatakan bahwa kemampuan pemecahan masalah penting bagi siswa karena siswa selalu berhadapan dengan masalah setiap hari, baik disadari maupun tidak (Murdiana, 2015).

Kemampuan pemecahan masalah menekankan pada penguasaan yang mendalam tentang konsep-konsep matematika yang dipelajari di sekolah serta mampu mengaplikasikannya dalam kehidupan sehari-hari (Murdiana, 2015). Menurut Holmes, orang yang terampil dalam memecahkan masalah akan mampu berpacu dengan kebutuhan hidupnya, menjadi pekerja yang lebih produktif, dan memahami isu-isu kompleks yang berkaitan dengan masyarakat global (Dhurori & Markaban, 2010; Wardhani, Purnomo, & Wahyuningsih, 2010). Orang yang mampu memecahkan masalah akan hidup dengan produktif dalam abad 21 ini (Wardhani, Purnomo, & Wahyuningsih, 2010).

Beberapa guru percaya bahwa kemampuan pemecahan masalah dapat berkembang secara otomatis dari penguasaan keterampilan berhitung. Menurut Lenchner, keterampilan pemecahan masalah perlu diajarkan (Wardhani, Purnomo, & Wahyuningsih, 2010). Guru dapat membelajarkan keterampilan pemecahan masalah melalui empat langkah strategi memecahkan masalah.

Rendahnya kemampuan pemecahan masalah akan berakibat pada rendahnya kualitas sumber daya manusia (Cahyani & Setyawati, 2016). Peningkatan kemampuan pemecahan masalah siswa diharapkan mampu menyiapkan siswa unggul yang siap bersaing dan mampu memecahkan masalah dalam menghadapi tantangan Masyarakat Ekonomi ASEAN (Cahyani & Setyawati, 2016). Untuk meningkatkan kemampuan pemecahan masalah, perlu dikembangkan keterampilan dalam memahami masalah, membuat model matematika, menyelesaikan masalah, dan menafsirkan solusinya (Dhurori & Markaban, 2010).

Indikator yang dapat menunjukkan bahwa seseorang sudah mempunyai kemampuan pemecahan masalah, antara lain:

a. Memahami masalah,
b. Memiliki strategi yang tepat untuk menyelesaikan masalah,
c. Menyelesaikan masalah dengan benar dan sistematis, dan
d. Memeriksa sendiri ketepatan strategi yang dipilihnya dan kebenaran penyelesaian masalah yang didapatkannya (Widjajanti, 2009).

Cara-cara yang dapat dilakukan untuk meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematika, antara lain:

a. Memulai dari masalah yang sederhana,
b. Memberikan masalah berupa masalah *open-ended* dan investigasi,
c. Menggunakan sebanyak mungkin strategi pemecahan masalah yang relevan,
d. Mencari kesesuaian antara kemampuan berpikir dan strategi pemecahan masalah,
e. Memberikan kesempatan yang cukup untuk memformulasikan dan memecahkan masalah, kemudian mencoba untuk menyelesaikan dengan cara lain,

f. Menggunakan pemodelan untuk menjelaskan dan menganalisis proses berpikir,
g. Memberikan kesempatan untuk merefleksikan dan mengklarifikasi serta melihat kembali kemungkinan lain, mengatakan dengan bahasa sendiri, dan mencoba untuk mencari strategi pemecahan masalah yang lebih baik, dan
h. Memperbolehkan untuk berekspresi dengan maksud untuk memperkuat konseptualisasi dan pengembangan dari kebiasaan berpikir kritis (Dhurori & Markaban, 2010; Sunendar, 2017).

3. Pembelajaran Reflektif

Pendidikan karakter pada satuan pendidikan tidak diberikan dalam satu mata pelajaran khusus, tetapi diberikan secara integratif melalui seluruh mata pelajaran (Ali, 2018). Oleh karena itu, semua pendidik bertanggungjawab atas pembinaan karakter siswa. Salah satu model pembelajaran pendidikan karakter yang dapat diterapkan pada seluruh mata pelajaran adalah model pembelajaran reflektif.

Pembelajaran reflektif adalah model pembelajaran pendidikan karakter yang diarahkan pada pemahaman terhadap makna dan nilai yang terkandung di balik teori, fakta, fenomena, informasi, atau benda yang menjadi bahan ajar dalam suatu mata pelajaran (Kesuma, Triatna,

& Permana, 2012). Pembelajaran reflektif merupakan pembelajaran yang melibatkan kegiatan berpikir reflektif pada prosesnya (Rohana & Ningsih, 2016). Saptono (2012) menyatakan bahwa pembelajaran reflektif merupakan pembelajaran aktif yang berpusat pada siswa.

Prinsip pembelajaran reflektif dibangun berdasarkan hakikat berpikir reflektif (Kesuma, Triatna, & Permana, 2012). Refleksi merupakan proses seseorang untuk memahami makna di balik suatu fakta, fenomena, informasi, atau benda (Kesuma, Triatna, & Permana, 2012). Refleksi juga diartikan sebagai proses berpikir dan meninjau kembali ide, perlakuan, dan situasi yang ada dalam proses pembelajaran sebelum mengambil tindakan selanjutnya (Rohana & Ningsih, 2016). Dengan melakukan refleksi, seseorang diharapkan bisa mengambil hikmah/pelajaran dari setiap fakta, fenomena, informasi, atau benda yang ditemuinya.

Pembelajaran reflektif dipandang memiliki banyak kelebihan jika digunakan sebagai alternatif pembelajaran matematika yang berkarakter. Pembelajaran reflektif mampu memfasilitasi aspek kognitif dan aspek afektif secara bersamaan (Rohana & Ningsih, 2016). Pembelajaran reflektif dapat digunakan untuk mengembangkan kemampuan pemecahan masalah matematis (Rohana & Ningsih, 2016). Hal ini dikarenakan refleksi dapat membantu siswa dalam membangun keterampilan berpikir tingkat tinggi (Rohana & Ningsih, 2016). Sedangkan kemampuan pemecahan masalah termasuk ke dalam keterampilan berpikir tingkat tinggi.

Pembelajaran reflektif juga dapat meningkatkan pemahaman siswa (Aprilia, 2016). Model pembelajaran reflektif memberikan kesempatan kepada siswa untuk menganalisis pengalaman individual yang dialami dan memfasilitasi pembelajaran dari pengalaman tersebut (Aprilia, 2016). Pembelajaran reflektif juga mendorong siswa untuk berpikir kreatif, mempertanyakan sikap dan mendorong kemandirian belajar (Aprilia, 2016).

Pembelajaran reflektif bertujuan untuk:

a. Menguatkan dan mengembangkan nilai-nilai karakter yang akan diperkuat melalui pembelajaran yang secara substansi tidak berkaitan langsung dengan nilai (Kesuma, Triatna, & Permana, 2012).
b. Membiasakan siswa merefleksikan pengalamannya,
c. Mendorong siswa untuk peduli pada pengalaman-pengalaman manusiawi dengan segala makna dan konsekuensinya, dan
d. Membiasakan siswa untuk membuat pilihan hidup dalam bentuk komitmen dan tindakan nyata (Saptono, 2012).

Proses pembelajaran reflektif dilakukan dengan mengaitkan materi-materi yang dipelajari dengan makna di balik materi tersebut (Kesuma, Triatna, & Permana, 2012). Proses pembelajaran reflektif dapat dilakukan oleh semua guru mata pelajaran, termasuk matematika. Materi diintegrasikan dengan makna atau nilai tertentu, yang selanjutnya makna atau nilai tersebut akan diperkuat menjadi karakter siswa. Nilai-nilai karakter akan diperkuat hingga mencapai level paling atas, yaitu mengajak orang-orang di lingkungan terdekat untuk mempraktikkan nilai/makna yang dipelajari dalam kehidupan sehari-hari (Kesuma, Triatna, & Permana, 2012).

Dalam pembelajaran reflektif, guru berperan dalam:

a. Menyediakan kesempatan-kesempatan untuk mendorong kreativitas siswa dan melatih mereka untuk berani memutuskan berbagai alternatif tindakan sebagai hasil dan tindak lanjut dari apa yang telah mereka pelajari, memilih tindakan yang paling mungkin dilakukan, dan melakukan tindakan tersebut,
b. Mengajak siswa mengembangkan kemampuannya dalam memahami informasi sehingga ia mampu

memahami makna dan konsekuensinya bagi pengembangan diri mereka, dan

c. Mengajak siswa membiasakan diri melakukan investigasi, tematisasi, dan problematisasi sebelum mereka bertindak (Saptono, 2012).

Langkah-langkah yang dilakukan dalam pelaksanaan pembelajaran reflektif adalah pengenalan konteks, penyajian pengalaman, refleksi, aksi, dan evaluasi (Saptono, 2012).

a. Pengenalan konteks. Konteks merupakan tempat pengalaman berlangsung (Subagya, 2010). Guru perlu mengenali kenyataan-kenyataan kontekstual dunia siswa maupun guru dengan baik (Saptono, 2012). Guru harus mengetahui sebanyak mungkin konteks tempat kegiatan pembelajaran berlangsung (Subagya, 2010).
b. Penyajian pengalaman. Pengalaman merupakan setiap kegiatan yang mengandung pemahaman kognitif dari bahan yang disimak atau dipelajari serta melibatkan dimensi afeksi siswa (Saptono, 2012). Ada dua jenis pengalaman, yaitu pengalaman langsung dan pengalaman tidak langsung.
    1) Pengalaman langsung, yaitu upaya memperoleh informasi melalui diskusi, penelitian, kegiatan

lapangan, aksi sosial, *home stay*, karya wisata, dan lain-lain.

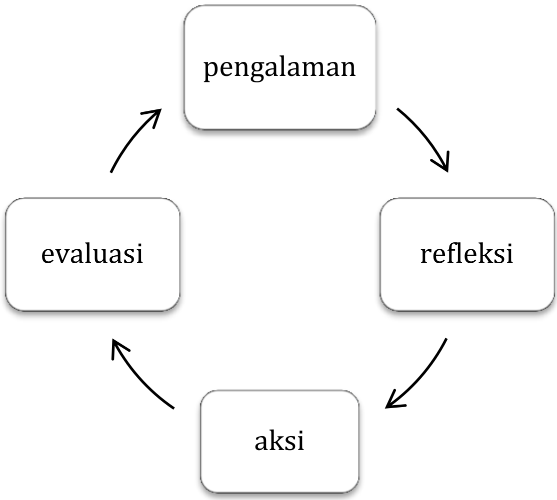
2) Pengalaman tidak langsung, yaitu upaya memperoleh informasi mengenai sebuah peristiwa melalui kegiatan membaca, mendengarkan, atau menyimak gambar (Saptono, 2011). Guru ditantang untuk merangsang imajinasi dan pemakaian indera siswa, sehingga mereka dapat memasuki kenyataan yang sedang dipelajari dengan sungguh-sungguh (Subagya, 2010).

c. Refleksi. Refleksi merupakan upaya menyimak bahan studi tertentu, pengalaman, atau ide-ide dengan penuh perhatian untuk memahaminya secara mendalam sampai pada makna dan konsekuensinya. Melalui refleksi, siswa diajak untuk menggali makna dan konsekuensi (hikmah) dari suatu pengalaman. Dalam tahap ini, guru ditantang untuk merumuskan pertanyaan-pertanyaan reflektif (Saptono, 2012).

d. Aksi. Aksi merupakan pertumbuhan sikap batin dan tindakan yang ditunjukkan siswa berdasarkan pengalaman yang telah direfleksikan. Aksi ditunjukkan siswa dalam dua tingkatan, yaitu pilihan-pilihan dalam batin (berupa komitmen) dan pilihan-

pilihan yang dinyatakan secara lahir (berupa tindakan konkret/kebiasaan) (Saptono, 2012).

e. Evaluasi. Evaluasi merupakan sarana untuk melihat tingkat perkembangan perilaku dan kebiasaan siswa (Saptono, 2012).



Gambar 2.1 Siklus pembelajaran reflektif (Subagya, 2010)

Menurut Subagya, refleksi dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut.

a. Memahami kebenaran yang dipelajari secara lebih baik.
b. Memahami sumber-sumber perasaan dan reaksi yang dialami siswa ketika merenungkan atau menelaah pengalaman itu.

c. Memperdalam pemahaman siswa tentang implikasi yang telah dimengerti (bagi diri sendiri maupun orang lain).
d. Berusaha mendapatkan atau menemukan pengertian/makna pribadi tentang peristiwa-peristiwa, gagasan-gagasan, kebenaran atau pemutarbalikan kebenaran.
e. Memahami siapa dirinya dan bagaimana seharusnya sikapnya terhadap orang lain (Subagya, 2010; Saptono, 2011).

Siswa yang sedang belajar pada hakikatnya dapat merefleksikan pengalaman belajarnya, seperti berdialog dengan diri sendiri menggunakan pertanyaan apa yang membuatnya gagal, apa yang membuatnya berhasil, apa yang dia rasakan, apa kelebihan dan kekurangannya, apakah dia bahagia dengan aktivitas pembelajaran yang dilaksanakan, dan solusi apa yang sesuai untuk memperbaiki kualitas proses dan hasil belajarnya (Priyatni, Hamidah, & Adi, 2017). Selama proses refleksi individual berlangsung, siswa dapat:

a. Menuliskan pengalaman belajar mereka, baik pengetahuan maupun praktik.
b. Merefleksikan apa yang sudah dipahami, apa yang belum dipahami, mengapa ia belum memahami apa yang dipelajarinya, apa yang membuatnya gagal

paham, dan upaya apa yang harus dilakukan untuk melakukan perbaikan (Priyatni, Hamidah, & Adi, 2017).

Dalam pembelajaran reflektif, evaluasi ditujukan untuk melihat sejauh mana karakter dan nilai yang dikembangkan dapat dimiliki oleh siswa (Kesuma, Triatna, & Permana, 2012). Evaluasi ini dilakukan melalui observasi terhadap perilaku anak. Evaluasi yang paling tepat dalam proses reflektif adalah observasi terhadap pemikiran dan sikap anak (Kesuma, Triatna, & Permana, 2012). Beberapa bentuk alat evaluasi yang dapat digunakan antara lain evaluasi diri oleh anak dan penilaian portofolio (Kesuma, Triatna, & Permana, 2012).

4. Paradigma *Unity of Sciences*

Paradigma *unity of sciences* merupakan paradigma yang menyatakan bahwa semua ilmu pada dasarnya merupakan satu kesatuan yang bersumber dari Allah dan akan bermuara kembali pada Allah melalui wahyu-Nya, baik secara langsung maupun tidak langsung (Fanani, 2015). Menurut paradigma *unity of sciences*, semua ilmu harus saling berdialog dan bermuara pada satu tujuan, sehingga ilmu-ilmu tersebut dapat membuat para pengkajinya menjadi semakin mengenal dan semakin mendekat kepada Allah (Fanani, 2015).

Paradigma *unity of sciences* akan melahirkan ilmuwan yang ensiklopedis dan menguasai banyak ilmu, serta memandang semua cabang ilmu sebagai satu kesatuan holistik (Fanani, 2015). Paradigma *unity of sciences* menggunakan pendekatan teo-antroposensentris, yaitu membimbing para pengkaji ilmu agar selalu menjadikan Allah sebagai asal dan tujuan dari segala proses ilmiah tanpa meninggalkan peran manusia sebagai makhluk yang memiliki mandat ilmiah (Fanani, 2015).

Paradigma *unity of sciences* (kesatuan ilmu pengetahuan) sebenarnya telah dipraktikkan oleh para ilmuwan klasik seperti Ibn Sina, al-Kindi, dan al-Farabi (Fanani, 2015). Namun, *unity of sciences* yang dikembangkan UIN Walisongo merupakan penyatuan antara semua cabang ilmu dengan memberikan landasan wahyu sebagai latar atau pengikat penyatuan (Fanani, 2015). Apapun cabang ilmunya, ilmu-ilmu tersebut masih terikat dalam satu kesatuan, yaitu sama-sama bersumber pada wahyu (*ayat qauliyah*) dan alam (*ayat kauniyah*), baik secara langsung maupun tidak langsung. Fanani (2015) menyatakan, "Jika mau diperas lagi, wahyu dan alam adalah pengakuan atas Allah (tauhid)."

Secara sederhana, dapat dikatakan bahwa orang yang menerapkan paradigma *unity of sciences* akan menerapkan tauhid dalam kehidupannya. Yuli Suliswidiawati menyatakan bahwa orang yang menerapkan tauhid (mengembalikan semuanya kepada Allah dan menyandarkan segala sesuatu kepada Allah) akan selalu mempunyai prasangka baik kepada Allah, sehingga orang tersebut memiliki regulasi emosi yang baik dan jiwanya menjadi sehat. Orang yang memiliki regulasi emosi yang baik akan mampu mengendalikan emosinya, sehingga orang tersebut akan memiliki karakter yang baik pula (Saif & Almeera, 2019). Dengan demikian, paradigma *unity of sciences* diharapkan dapat membentuk yang beriman dan berakhlak (berkarakter) mulia.

Paradigma *unity of sciences* memiliki lima prinsip, yaitu integrasi, kolaborasi, dialektika, prospektif, dan pluralistik.

a. Integrasi, yaitu meyakini semua ilmu pengetahuan sebagai satu kesatuan yang saling berhubungan dan semua ilmu tersebut bersumber dari ayat-ayat Allah, baik yang diperoleh melalui para nabi, eksplorasi akal, maupun eksplorasi alam.
b. Kolaborasi, yaitu memadukan nilai universal Islam dengan ilmu pengetahuan modern untuk meningkatkan kualitas hidup dan peradaban manusia.

c. Dialektika, yaitu mengharuskan adanya dialog yang intens antara ilmu-ilmu yang berakar pada wahyu (*revealed sciences*), ilmu pengetahuan modern (*modern sciences*), dan kearifan lokal (*local wisdom*).
d. Prospektif, yaitu meyakini bahwa *unity of sciences* akan menghasilkan ilmu-ilmu baru yang lebih humanis dan etis yang bermanfaat bagi pembangunan martabat dan kualitas bangsa serta kelestarian alam.
e. Pluralistik, yaitu meyakini adanya pluralitas (perbedaan) realitas dan metode dalam semua aktivitas keilmuan (Fanani, 2015).

Ada tiga strategi yang dapat digunakan untuk mengimplementasikan paradigma *unity of sciences*, yaitu humanisasi ilmu-ilmu keislaman, spiritualisasi ilmu-ilmu modern, dan revitalisasi local wisdom (Fanani, 2015).

a. Humanisasi Ilmu-ilmu Keislaman

Humanisasi dilakukan dengan merekonstruksi ilmu-ilmu keislaman agar semakin menyentuh dan dapat memberikan solusi bagi persoalan nyata dalam kehidupan bangsa Indonesia. Humanisasi ilmu-ilmu keislaman akan membuat ilmu-ilmu agama menjadi relevan dengan tantangan zaman pada saat ini. Humanisasi ini menuntut ilmu-ilmu keislaman harus hadir untuk memberikan solusi terhadap segala persoalan yang sedang dihadapi masyarakat (Fanani, 2015).

Strategi humanisasi ilmu-ilmu keislaman mencakup segala upaya untuk memadukan nilai-nilai universal Islam dengan ilmu pengetahuan modern guna peningkatan kualitas hidup dan peradaban manusia (Fanani, 2015). Strategi ini dapat dilakukan melalui tiga cara, yaitu:

1) Memanfaatkan prestasi ilmu pengetahuan dalam memahami ajaran ilmu keislaman,
2) Menghubungkan ajaran ilmu keislaman dengan permasalahan kemasyarakatan, dan
3) Memasukkan substansi ajaran ilmu keislaman dalam pribadi manusia (Fanani, 2015).

b. Spiritualisasi Ilmu-ilmu Modern

Spiritualisasi dilakukan dengan memberikan pijakan nilai-nilai ketuhanan (ilahiyah) dan etika terhadap ilmu-ilmu sekuler untuk memastikan bahwa pada dasarnya semua ilmu berorientasi pada peningkatan kualitas atau keberlangsungan hidup manusia dan alam, bukan untuk menistakan atau bahkan merusak keduanya (Fanani, 2015). Ilmu-ilmu modern harus dipahami lebih mendasar dan kembali pada hikmah suatu ilmu pengetahuan (Fanani, 2015).

Strategi spiritualisasi ilmu-ilmu modern mencakup segala upaya membangun ilmu pengetahuan baru yang didasarkan pada kesatuan ilmu yang bersumber dari ayat-ayat Allah baik yang diperoleh melalui para nabi, eksplorasi akal, maupun eksplorasi alam (Fanani, 2015). Strategi ini dapat dilakukan melalui tiga cara, yaitu:

1) Ayatisasi,
2) Fusi filosofis, dan
3) Fusi *worldview* pengkaji (Fanani, 2015).

c. Revitalisasi *Local Wisdom*

Local wisdom (kearifan lokal) diartikan sebagai kekayaan budaya lokal yang mengandung kebijakan dan pandangan hidup yang mengakomodasi kebijakan dan kearifan hidup. Kearifan lokal merupakan hasil kemampuan seseorang yang menggunakan akal pikirannya untuk menyikapi sebuah permasalahan yang sedang dihadapi suatu masyarakat (Fanani, 2015).

Revitalisasi *local wisdom* dilakukan dengan menguatkan kembali ajaran-ajaran luhur bangsa. Strategi revitalisasi *local wisdom* mencakup segala upaya untuk tetap setia pada ajaran luhur budaya lokal dan pengembangannya guna menguatkan karakter bangsa (Fanani, 2015). Strategi ini dapat dilakukan melalui tiga cara, yaitu:

1) Mengakui atas eksistensi *local wisdom*,
2) Memanfaatkan *local wisdom* dalam aktivitas ilmiah, dan
3) Mengembangkan dan melestarikan *local wisdom* dalam aktivitas ilmiah (Fanani, 2015).

5. Bahan Ajar Modul

Bahan ajar didefinisikan sebagai segala bahan, baik informasi, alat, maupun teks, yang disusun secara sistematis untuk mempermudah perencanaan dan penelaahan implementasi pembelajaran (Prastowo, 2015). Bahan ajar memuat kompetensi yang akan dikuasai siswa secara utuh dan digunakan dalam proses pembelajaran. Menurut Lestari (2013), bahan ajar lebih diartikan sebagai seperangkat materi pembelajaran yang dapat digunakan siswa untuk belajar mandiri tanpa harus bergantung pada keberadaan seorang guru, sehingga proses pembelajaran dapat terus berlangsung meskipun di luar kelas.

Bahan ajar merupakan salah satu bentuk media pembelajaran. Menurut Sanjaya dan Budimanjaya (2017), media pembelajaran tidak dikembangkan untuk mempermudah guru dalam mengajar, tetapi untuk mempermudah siswa dalam belajar. Oleh karena itu, kondisi siswa harus dijadikan pertimbangan utama dalam pengembangan media pembelajaran.

Bahan ajar mempunyai beragam bentuk, salah satunya yaitu modul. Modul merupakan bahan ajar yang dirancang secara sistematis berdasarkan kurikulum tertentu dan dikemas dalam bentuk satuan pembelajaran terkecil (Purwanto, 2007). Modul diharapkan dapat dipelajari siswa secara mandiri dalam satuan waktu tertentu.

Modul disusun agar siswa dapat menguasai kompetensi yang diajarkan dengan baik. Modul berfungsi sebagai bahan belajar yang digunakan dalam kegiatan pembelajaran. Dengan menggunakan modul, siswa dapat belajar lebih terarah dan sistematis. Modul diharapkan dapat memberikan petunjuk belajar bagi siswa selama mengikuti kegiatan belajar (Purwanto, 2007).

Modul diharapkan dapat digunakan siswa sebagai bahan belajar mandiri. Oleh karena itu, ada beberapa hal yang perlu diperlukan dalam pembuatan bahan belajar mandiri, yaitu:

a. Bahan belajar memberikan contoh-contoh dan ilustrasi yang menarik sehingga mendukung paparan materi pembelajaran.
b. Bahan belajar memungkinkan siswa untuk memberi umpan balik atau mengukur tingkat penguasaannya

terhadap materi yang dipelajari dalam modul, yaitu dengan memberikan soal-soal latihan, tugas, dan sejenisnya.

c. Materi yang disajikan di dalam modul bersifat kontekstual, artinya materi yang disajikan mempunyai keterkaitan dengan suasana atau konteks tugas dan lingkungan siswa.
d. Bahasa yang digunakan cukup sederhana karena siswa hanya berhadapan dengan bahan belajar ketika sedang belajar mandiri (Lestari, 2013).

Modul memiliki tujuh unsur utama, yaitu judul, petunjuk belajar (untuk siswa maupun guru), kompetensi yang ingin dicapai, informasi pendukung, latihan-latihan, petunjuk kerja atau lembar kerja (LK), dan evaluasi (Prastowo, 2015). Menurut Purwanto (2007), modul terdiri atas tiga bagian utama, yaitu bagian pendahuluan, bagian inti, dan bagian penutup.

a. Bagian pendahuluan, berisi uraian singkat tentang materi yang akan dijelaskan dalam modul, keterkaitan materi dengan materi sebelumnya, tujuan, peralatan dan waktu yang dibutuhkan dalam mempelajari modul, dan sebagainya.
b. Bagian inti, berisi uraian materi, contoh-contoh, ilustrasi atau diagram, latihan, dan umpan balik.

c. Bagian penutup, berisi rangkuman atau kesimpulan, penjelasan tentang hubungan dengan materi selanjutnya, dan dorongan kepada pengguna modul untuk mengikuti tes karena telah berhasil menyelesaikan modul (Purwanto, 2007).

Sebuah modul bisa dikatakan baik dan menarik jika mempunyai karakteristik *self instructional, self contained, stand alone, adaptive*, dan *user friendly* (Depdiknas, 2008; Daryanto, 2013).

a. *Self instructional*, yaitu modul tersebut dapat membuat siswa mampu membelajarkan diri sendiri (Lestari, 2013). Untuk memenuhi karakter *selif instructional*, Depdiknas (2008:3) menyatakan bahwa modul harus:
    1) Memuat tujuan pembelajaran yang jelas dan dapat menggambarkan pencapaian Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar (SK-KD),
    2) Memuat materi pembelajaran yang dikemas dalam unit-unit kegiatan yang kecil/spesifik sehingga materi mudah dipelajari secara tuntas,
    3) Dilengkapi dengan contoh dan ilustrasi yang mendukung kejelasan uraian materi pembelajaran,

4) Memuat soal-soal latihan, tugas, dan sejenisnya yang dapat digunakan untuk mengukur tingkat penguasaan siswa,
5) Materi yang disajikan bersifat kontekstual, artinya materi yang disajikan mempunyai keterkaitan dengan suasana atau konteks tugas dan lingkungan siswa,
6) Menggunakan bahasa yang sederhana dan komunikatif,
7) Dilengkapi dengan rangkuman materi pembelajaran,
8) Dilengkapi dengan instrumen penilaian, sehingga siswa dapat melakukan penilaian mandiri (*self assessment*),
9) Dilengkapi dengan instrumen yang dapat digunakan siswa untuk mengukur atau mengevaluasi tingkat penguasaan materi,
10) Dilengkapi dengan umpan balik atas penilaian siswa, sehingga siswa dapat mengetahui tingkat penguasaan materi, dan
11) Memuat informasi tentang rujukan/referensi atau pengayaan yang mendukung paparan materi pembelajaran yang disajikan (Depdiknas, 2008).

b. *Self contained*, yaitu seluruh materi pembelajaran dari satu unit kompetensi atau sub kompetensi yang dipelajari terdapat di dalam satu modul secara utuh (Depdiknas, 2008). Siswa mempunyai kesempatan untuk mempelajari materi secara tuntas karena materi pembelajaran dikemas dalam satu modul secara utuh (Daryanto, 2013).

c. *Stand alone* (berdiri sendiri), yaitu modul yang dikembangkan tidak bergantung pada media lain atau tidak harus digunakan bersama-sama dengan media pembelajaran lain (Depdiknas, 2008). Dengan menggunakan modul, siswa tidak memerlukan media lain untuk mempelajari dan/atau mengerjakan tugas yang ada dalam modul (Daryanto, 2013).

d. *Adaptive*, yaitu modul hendaknya memiliki daya adaptif yang tinggi terhadap perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi (Depdiknas, 2008). Modul dikatakan adaptif jika modul tersebut bersifat fleksibel/luwes jika digunakan (Daryanto, 2013). Depdiknas (2008) juga menyatakan bahwa modul dikatakan adaptif jika isi materi pembelajaran dapat digunakan sampai dengan kurun waktu tertentu.

e. *User friendly*, yaitu modul hendaknya bersahabat atau akrab dengan pemakainya (Depdiknas, 2008). Setiap instruksi dan paparan informasi yang disajikan dalam modul bersifat membantu dan bersahabat dengan pemakainya. Pengguna modul dapat merespon dan mengakses modul sesuai keinginan dengan mudah. Bahasa yang digunakan dalam modul hendaknya merupakan bahasa yang sederhana dan mudah diikuti serta menggunakan istilah yang umum digunakan (Daryanto, 2013).

6. Pengembangan Bahan Ajar Modul

Ada empat langkah yang dapat digunakan untuk mengembangkan sebuah modul, yaitu tahap perencanaan; tahap penulisan; tahap review, uji coba dan revisi; serta tahap finalisasi dan pencetakan (Purwanto, 2007).

a. Tahap Perencanaan

Tahap perencanaan bertujuan untuk menyusun Garis Besar Isi Modul (GBIM). GBIM dijadikan sebagai pedoman dalam penyusunan modul (Purwanto, 2007). GBIM berisi tentang sasaran/pengguna modul, tujuan pembelajaran umum (kompetensi dasar) dan tujuan pembelajaran khusus (indikator), materi atau isi pelajaran, media yang digunakan, dan strategi penilaian (Purwanto, 2007).

b. Tahap Penulisan

Tahap penulisan bertujuan untuk mempersiapkan rancangan/outline modul dan menulis draft modul. Outline modul dipersiapkan dengan menentukan topik materi yang akan dimuat dan mengatur urutan topik-topik sesuai dengan urutan tujuan pembelajaran (Purwanto, 2007:26). Selanjutnya, outline modul dikembangkan menjadi draft modul.

c. Tahap Review, Uji Coba dan Revisi

Tahap review dan uji coba bertujuan untuk memperbaiki modul (Purwanto, 2007). Review modul dapat dilakukan oleh ahli materi, ahli media, dan teman sejawat (Purwanto, 2007). Semua informasi yang diperoleh dari ahli materi, ahli media, maupun teman sejawat digunakan untuk memperbaiki modul.

d. Tahap Finalisasi dan Pencetakan

Tahap finalisasi dilakukan setelah modul melewati tahap review, uji coba, dan revisi. Finalisasi dilakukan untuk melihat kembali kebenaran teks dan kelengkapan modul sebelum modul siap untuk dicetak (Purwanto, 2007).

Selain Purwanto, Mulyatiningsih menyatakan bahwa bahan ajar modul juga dapat dikembangkan melalui sebuah prosedur yang telah disesuaikan dengan model 4D yang dikembangkan oleh Thiagarajan, Semmel & Semmel, yaitu melalui tahap *define*, *design*, *develop*, dan *disseminate*.

a. Tahap *Define* (Pendefinisian)

Tahap *define* dilakukan untuk menetapkan dan mendefinisikan syarat-syarat pengembangan. Dalam mengembangkan bahan ajar modul, menyatakan bahwa tahap pendefinisian dapat dilakukan dengan melakukan analisis kurikulum, analisis karakteristik siswa, analisis materi, dan merumuskan tujuan pembelajaran (Mulyatiningsih, 2013).

1) Analisis kurikulum dilakukan dengan menetapkan kompetensi yang akan dikembangkan dalam bahan ajar.
2) Analisis karakteristik siswa, dilakukan untuk mendapatkan informasi tentang profil siswa yang akan mengikuti pembelajaran (Pribadi, 2001). Informasi tentang karakteristik siswa dapat diperoleh melalui observasi, wawancara, kuesioner, dan pre-test.
3) Analisis materi, dilakukan dengan mengidentifikasi materi utama yang perlu diajarkan, mengumpulkan dan memilih materi yang relevan, dan menyusunnya kembali secara sistematis (Mulyatiningsih, 2013).
4) Merumuskan tujuan pembelajaran.

b. Tahap *Design* (Perancangan)

Tahap *design* dilakukan untuk membuat modul sesuai dengan kerangka isi hasil analisis kurikulum dan materi (Mulyatiningsih, 2013).

c. Tahap *Develop* (Pengembangan)

Tahap *develop* dilakukan dengan menguji isi dan keterbacaan modul kepada pakar yang terlibat dalam proses validasi dan siswa yang akan menggunakan modul. Hasil pengujian digunakan untuk memperbaiki modul sehingga modul tersebut benar-benar dapat memenuhi kebutuhan pengguna (Mulyatiningsih, 2013). Selanjutnya, kegiatan *develop* dapat dilanjutkan dengan memberikan soal latihan yang materinya diambil dari modul untuk menguji efektivitas modul tersebut dalam meningkatkan hasil belajar.

d. Tahap *Disseminate* (Penyebaran)

Tahap *disseminate* dilakukan dengan mensosialisasikan modul melalui distribusi terbatas kepada guru dan siswa. Distribusi ini bertujuan untuk mendapatkan respon dan umpan balik terhadap modul yang telah dikembangkan (Mulyatiningsih, 2013).

7. Evaluasi atau Penilaian Modul

Ada dua jenis penilaian yang dapat digunakan untuk menilai modul, yaitu evaluasi formatif dan evaluasi sumatif. Evaluasi formatif digunakan untuk menemukan berbagai kekurangan dan kelemahan yang dimiliki modul. Sedangkan evaluasi sumatif digunakan untuk menentukan kualitas modul yang dikembangkan, sehingga kelayakan modul dapat diketahui (Purwanto, 2007).

Evaluasi modul secara formatif dilakukan selama proses pengembangan modul masih berlangsung. Purwanto (2007) menyatakan bahwa evaluasi modul secara formatif dapat dilakukan melalui berbagai cara, antara lain melalui pengkajian oleh ahli, pengkajian oleh sejawat, dan penilaian modul melalui uji coba terbatas.

a. Pengkajian oleh ahli (validasi modul oleh ahli), dilakukan oleh ahli yang memiliki kompetensi sesuai bidangnya, yaitu ahli materi dan ahli media. Pertanyaan yang menyangkut isi/bidang studi menjadi tanggung jawab ahli materi, sedangkan pertanyaan yang menyangkut penyajian dan efektivitas menjadi tanggung jawab ahli media (Purwanto, 2007). Modul dinyatakan valid jika isi modul sesuai untuk mempelajari kompetensi yang menjadi tujuan belajar (Daryanto & Dwicahyono, 2014).

b. Pengkajian oleh sejawat, dilakukan oleh sesama penulis atau orang yang memiliki kesamaan kompetensi di bidang substansi isi. Pengkajian oleh sejawat bertujuan untuk memperoleh kritik, masukan, dan saran-saran yang dapat digunakan sebagai bahan untuk menyempurnakan modul (Purwanto, 2007).

c. Penilaian melalui uji coba terbatas, dilakukan untuk memperoleh masukan tentang tingkat kesulitan, kejelasan, kemenarikan modul, dan sebagainya dari calon pengguna modul. Selama modul diujicobakan secara terbatas, pengembang modul juga dapat melakukan pengamatan untuk mengetahui efektivitas modul (Purwanto, 2007).

Menurut Daryanto (2013), evaluasi modul dapat dilakukan menggunakan instrumen evaluasi yang dikembangkan berdasarkan karakteristik modul. Instrumen evaluasi dapat ditujukan kepada guru maupun siswa, karena keduanya terlibat langsung dalam proses implementasi modul.

8. Kompetensi Materi Turunan Fungsi Trigonometri

Materi turunan fungsi trigonometri merupakan salah satu materi matematika peminatan yang dipelajari siswa kelas XII Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah (SMA/MA). Berdasarkan struktur Kurikulum 2013 Revisi 2018 yang berlaku, kompetensi dasar untuk materi turunan fungsi trigonometri adalah sebagai berikut.

Tabel 2.1 Kompetensi inti dan kompetensi dasar untuk siswa kelas XII SMA/MA pada materi turunan fungsi trigonometri (Sumber: Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 37 Tahun 2018)

Kompetensi Inti	Kompetensi Dasar
3. Memahami, menerapkan, menganalisis, dan mengevaluasi pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.	3.3 Menggunakan prinsip turunan ke fungsi trigonometri sederhana
	3.4 Menjelaskan keberkaitanan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung, serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.
4. Mengolah, menalar, menyaji, dan mencipta dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri serta bertindak secara efektif dan kreatif, dan mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.	4.3 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri.
	4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, dan kemiringan garis singgung serta titik belok dan kecekungan kurva fungsi trigonometri.

B. Kajian Pustaka

Penelitian eksperimen yang telah dilakukan oleh Rohana dan Yunika Lestaria Ningsih (2016) yang berjudul "*Model Pembelajaran Reflektif untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Mahasiswa Calon Guru*". Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis mahasiswa calon guru melalui pembelajaran reflektif. Hasil penelitian menunjukkan bahwa peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis mahasiswa calon guru yang mendapatkan pembelajaran reflektif lebih baik daripada mahasiswa calon guru yang mendapatkan pembelajaran konvensional. Selain itu, tidak terdapat pengaruh interaksi antara faktor pembelajaran (pembelajaran reflektif dan pembelajaran konvensional) dan kemampuan awal mahasiswa terhadap peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis mahasiswa calon guru. Hal ini menunjukkan bahwa peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis mahasiswa calon guru terjadi karena faktor pembelajaran (Rohana & Ningsih, 2016). Berdasarkan penelitian tersebut, peneliti ingin melakukan penelitian dengan menerapkan pembelajaran reflektif dalam bentuk modul pembelajaran.

Penelitian selanjutnya yang telah dilakukan oleh Ratih Rizqi Nirwana dan Rikha Fitriyana (2018) yang berjudul "*Pengembangan Modul Biomolekul dan Metabolisme dengan Paradigma Unity of Sciences dan Growth Mindset*". Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan modul biokimia dan metabolisme dengan paradigma *unity of sciences* dan *growth mindset* sekaligus menguji efektivitasnya. Penelitian ini berhasil mengembangkan modul perkuliahan biokimia materi biomolekul dan metabolisme berparadigma *unity of sciences* dan *growth mindset* dengan skor validasi oleh ahli agama sebesar 92% (kategori sangat tinggi) dan skor validasi oleh ahli biokimia sebesar 88% (kategori sangat tinggi). Berdasarkan aspek peningkatan hasil belajar kognitif dan tanggapan siswa, modul yang telah dikembangkan mempunyai efektivitas tinggi. Hal ini dibuktikan berdasarkan hasil belajar kognitif kelas kecil dengan ketuntasan sebesar 85% dan kelas besar yang mencapai 79% (Nirwana & Fitriyana, 2018). Berdasarkan penelitian tersebut, peneliti ingin melakukan penelitian tentang pembelajaran berbasis *unity of sciences* yang dipadukan dengan model pembelajaran reflektif.

C. Kerangka Berpikir

Kerangka berpikir merupakan rangkuman yang menjelaskan tentang hubungan antar variabel yang disusun dari berbagai teori yang telah dideskripsikan (Sugiyono, 2016).

Salah satu keterampilan yang perlu dikuasai seseorang untuk menghadapi era revolusi industri 4.0 adalah kemampuan pemecahan masalah. Dalam pembelajaran matematika, kemampuan pemecahan masalah siswa dapat ditingkatkan dengan membiasakan siswa untuk menyelesaikan soal-soal matematika yang berbentuk masalah. Dengan demikian, siswa akan mempunyai banyak pengalaman dalam menyelesaikan permasalahan matematika. Namun pengalaman-pengalaman tersebut tidak akan berarti apa-apa jika tidak direfleksikan.

Refleksi merupakan syarat agar suatu pengalaman dapat diubah menjadi sebuah ilmu baru. Dengan refleksi, seseorang dapat mengambil hikmah atau pelajaran dari sebuah pengalaman. Melalui kegiatan refleksi, diharapkan siswa juga dapat mengembangkan kemampuan pemecahan masalahnya. Di dalam Al-Qur'an, Allah menghendaki setiap hamba-Nya yang beriman untuk melakukan refleksi terhadap setiap perbuatannya.

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا ٱتَّقُوا ٱللَّهَ وَلۡتَنظُرۡ نَفۡسٞ مَّا قَدَّمَتۡ لِغَدٖۖ

وَٱتَّقُوا ٱللَّهَۚ إِنَّ ٱللَّهَ خَبِيرُۢ بِمَا تَعۡمَلُونَ ١٨ (الحشر/59: 18)

Artinya: *"Wahai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan hendaklah setiap orang memperhatikan apa yang telah diperbuatnya untuk hari esok (akhirat). Bertakwalah kepada Allah. Sesungguhnya Allah Mahateliti terhadap apa yang kamu kerjakan."* (TQS Al-Hasyr[59]:18)

Salah satu model pembelajaran yang melibatkan proses refleksi di dalam langkah pembelajarannya adalah pembelajaran reflektif. Model pembelajaran reflektif juga merupakan salah satu bentuk model pendidikan karakter. Untuk menghindari terhapusnya nilai-nilai Islam dalam pendidikan karakter, maka pendidikan karakter berbasis Islam perlu diterapkan. Oleh karena itu, paradigma u*nity of sciences* perlu diterapkan. Hal ini dikarenakan paradigma *unity of sciences* meyakini bahwa semua ilmu pengetahuan bersumber dari Allah dan akan bermuara kembali pada Allah, baik secara langsung maupun tidak langsung. sehingga pendidikan karakter yang diterapkan tidak bertentangan dengan nilai-nilai Islam.

Konsekuensi dari penerapan paradigma *unity of sciences* adalah seseorang akan mempertimbangkan segala aktivitas yang dilakukannya. Setiap aktivitas yang dilakukan seseorang akan dimintai pertanggungjawaban oleh Allah di hari akhir kelak, termasuk aktivitas keilmuan. Apabila manusia memiliki kesadaran bahwa semua perbuatan yang dilakukan akan dimintai pertanggunjawaban, maka seseorang akan senantiasa berhati-hati dalam bertindak. Dengan demikian, karakter positif orang tersebut dapat terbentuk.

Dengan menggunakan modul yang menggunakan model pembelajaran reflektif berbasis pada paradigma *unity of sciences,* diharapkan dapat membantu siswa dalam meningkatkan kemampuan pemecahan masalah. Selain itu, karakter siswa juga diharapkan dapat berkembang setelah menggunakan modul tersebut.

BAB III
METODE PENELITIAN

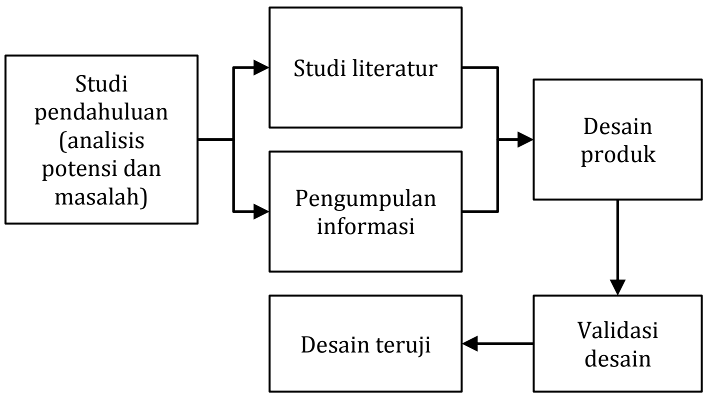
A. Model Pengembangan

Metode penelitian yang digunakan untuk mengembangkan modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* adalah metode penelitian dan pengembangan (*research and development*). Penelitian dan pengembangan merupakan suatu cara ilmiah untuk meneliti, merancang, memproduksi, dan menguji validitas produk yang telah dihasilkan (Sugiyono, 2016).

Sugiyono (2016) mengemukakan bahwa penelitian dan pengembangan mempunyai empat tingkat kesulitan, yaitu meneliti tanpa membuat dan menguji produk, tanpa meneliti hanya menguji produk yang telah ada, meneliiti dan mengembangkan produk yang telah ada, serta meneliti dan menciptakan produk baru. Peneliti menggunakan penelitian dan pengembangan pada level 1 karena penelitian hanya bertujuan untuk menghasilkan rancangan modul dan menguji rancangan modul secara internal (pendapat ahli dan praktisi) tanpa memproduksi rancangan produk atau mengujinya secara eksternal (pengujian lapangan).

B. Prosedur Pengembangan

Prosedur penelitian dan pengembangan level 1 yang digunakan dalam pengembangan modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* untuk meningkatkan pemecahan masalah dan karakter siswa MA dapat dilihat dalam gambar berikut.



Gambar 3.2 Langkah-langkah penelitian dan pengembangan level 1 (Sugiyono, 2016)

1. Potensi dan Masalah

Penelitian dan pengembangan bisa berangkat dari potensi atau masalah. Potensi merupakan segala sesuatu yang apabila dikembangkan akan mendapat nilai tambah. Sedangkan masalah merupakan penyimpangan antara yang diharapkan dengan yang terjadi (Sugiyono, 2016). Peneliti mengumpulkan data melalui pengamatan, wawancara, atau dokumentasi.

2. Studi Literatur dan Pengumpulan Informasi

    Setelah mendapatkan potensi dan masalah, peneliti melakukan studi literatur dengan mengumpulkan hasil-hasil penelitian dan informasi lain yang dapat digunakan sebagai bahan untuk merancang produk.

3. Desain Produk

    Berdasarkan potensi, masalah, dan studi literatur yang dilakukan, peneliti membuat desain/rancangan produk berupa modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences*, sehingga rancangan produk tersebut diharapkan dapat mengembangkan potensi maupun mengatasi masalah yang ditemukan.

4. Validasi Desain

    Validasi desain/rancangan produk dilakukan oleh orang yang dianggap ahli dan praktisi untuk menilai kelayakan desain produk. Validasi dilakukan dengan cara meminta para ahli dan praktisi untuk memberikan penilaian dan saran-saran perbaikan terhadap rancangan produk tersebut agar peneliti dapat memperbaiki rancangan produk. Aspek yang dinilai adalah kevalidan, kepraktisan, dan keefektifan produk secara teoretis.

5. Desain Teruji

    Berdasarkan penilaian dan saran-saran perbaikan dari para ahli dan praktisi, peneliti memperbaiki rancangan produk. Setelah produk diperbaiki, maka desain produk tersebut menjadi desain yang teruji secara internal.

C. Teknik Pengumpulan Data

Teknik pengumpulan data yang digunakan dalam penelitian pengembangan modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* untuk meningkatkan pemecahan masalah dan karakter siswa MA adalah wawancara dan angket/kuesioner.

1. Wawancara

   Wawancara digunakan untuk mengidentifikasi kebutuhan-kebutuhan yang diperlukan dalam pengembangan modul. Wawancara dilakukan terhadap salah satu petugas perpustakaan di MA NU 04 Al-Ma'arif Boja Kendal.

2. Angket/kuesioner

   Angket/kuesioner digunakan untuk mengumpulkan data yang diperlukan saat kegiatan evaluasi formatif modul. Angket digunakan untuk mengidentifikasi kesalahan, kelemahan, dan kekurangan yang ada dalam modul. Angket disusun berdasarkan karakteristik modul yang baik.

D. Teknik Analisis Data

Penilaian modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* dalam penelitian ini menggunakan teknik evaluasi formatif, yaitu evaluasi yang dilakukan selama proses pengembangan modul berlangsung dan bertujuan untuk menemukan kekurangan dan kelemahan modul agar bisa segera diperbaiki. Penilaian modul dilihat dari aspek kevalidan, kepraktisan, dan keefektifan dari segi teori.

1. Analisis Kevalidan Modul

   Validity refers to the extent that the design of the intervention is based on state-of-the-art knowledge (content validity) and that the various components of the intervention are consistently linked to each other (construct validity) (Akker, 1999). Kevalidan modul dilihat dari kebenaran materi yang disajikan dalam modul dan kekonsistenan komponen dalam modul. Modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* untuk meningkatkan pemecahan masalah dan karakter siswa MA dinyatakan valid jika semua aspek pernyataan dalam angket validasi modul mendapatkan respon positif dari para ahli.

   Analisis kevalidan modul dilakukan dengan cara:

   a. Menghitung skor validitas dari hasil validasi ahli menggunakan rumus:

$$\text{skor } (\%) = \frac{\text{jumlah skor komponen validasi}}{\text{skor maksimal}} \times 100\%$$

   b. Setelah itu, skor (%) yang sudah dihasilkan dikonversikan dalam bentuk tabel kriteria sebagai berikut.

Tabel 3.2 Kriteria kevalidan bahan ajar (Akbar, 2017)

No.	Kriteria Validitas	Tingkat Validitas
1.	82,01%-100%	Sangat valid, atau dapat digunakan tanpa revisi.
2.	62,01%-82%	Valid, atau dapat digunakan namun perlu direvisi kecil.
3.	44,01%-62%	Kurang valid, disarankan tidak dipergunakan, perlu revisi besar-besaran.
4.	25,01%-44%	Tidak valid, tidak boleh dipergunakan, perlu revisi besar-besaran.
5.	0%-25%	Sangat tidak valid, tidak boleh dipergunakan.

2. Analisis Kepraktisan Modul

Practicality refers to the extent that users (and other experts) consider the intervention as appealing and usable in normal conditions (Akker, 1999). Kepraktisan modul dilihat dari kemenarikan modul dan penggunaan modul dalam kondisi normal. Modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* untuk meningkatkan pemecahan masalah dan karakter siswa MA dinyatakan praktis jika semua aspek pernyataan dalam angket kepraktisan modul mendapatkan respon positif dari para ahli.

Uji kepraktisan modul dilakukan oleh guru, di mana guru sebagai tenaga ahli sekaligus salah satu pengguna modul pada proses pembelajaran. Data yang diperoleh kemudian diolah melalui penskoran angket tanggapan guru sebagaimana berikut.

Tabel 3.3 Pedoman Penskoran Lembar Angket Tanggapan Guru

Kriteria	**Kategori**	**Skor**
STS	Sangat Tidak Setuju	1
TS	Tidak Setuju	2
S	Setuju	3
SS	Sangat Setuju	4

Kemudian dicari skor rata-rata total dari data yang diperoleh untuk dikonversikan menjadi nilai kualitatif sesuai kriteria penilaian sebagaimana berikut.

Tabel 3.4 Kriteria Kepraktisan Modul Berdasarkan Tanggapan Guru dan Siswa

Interval	Kategori
$X > 3{,}4$	Sangat praktis
$2{,}8 < X \leq 3{,}4$	Praktis
$2{,}2 < X \leq 2{,}8$	Cukup praktis
$1{,}6 < X \leq 2{,}2$	Kurang praktis
$X \leq 1{,}6$	Sangat kurang praktis

Keterangan: X =rata-rata skor aktual guru atau siswa (Yulianan, 2017)

3. Analisis Keefektifan Modul

Effectiveness refers to the extent that the experiences and outcomes with the intervention are consistent with the intented aims (Akker, 1999). Keefektifan modul dilihat berdasarkan apakah modul dapat digunakan untuk mencapai tujuan yang diinginkan. Modul dinyatakan efektif apabila modul dapat digunakan untuk mencapai tujuan pembelajaran yang hendak dicapai siswa menurut para ahli.

Penilaian keefektifan modul secara teoritik dilakukan dengan pengisian angket oleh guru. Modul dikatakan efektif sesuai dengan tinjauan teoritik jika penilaian guru terhadap modul pembelajaran minimal berada dalam kriteria cukup efektif.

Analisis keefektifan modul dilakukan dengan cara:

a. Menghitung skor dari hasil angket keefektifan menggunakan rumus:

$$N = \frac{\sum X}{\sum S}$$

Keterangan:

$N =$ nilai yang dicari (rata-rata)

$X =$ Jumlah skor keefektifan

$S =$ Jumlah butir penilaian (Arifin, 2012)

b. Membandingkan nilai rata-rata yang diperoleh dengan kriteria penilaian sebagai berikut (Widoyoko, 2017):

Tabel 3.5 Klasifikasi Penilaian Keefektifan

No.	Rumus Interval	Interval Hasil Perhitungan	Kategori
1.	$X \leq \overline{X_t} - 1,8Sb_i$	$X \leq 1,8$	Sangat kurang efektif
2.	$\overline{X_t} - 1,8Sb_i < X \leq \overline{X_t} - 0,6Sb_i$	$1,8 < X \leq 2,6$	Kurang efektif
3.	$\overline{X_t} - 0,6Sb_i < X \leq \overline{X_t} + 0,6Sb_i$	$2,6 < X \leq 3,4$	Cukup efektif
4.	$\overline{X_t} + 0,6Sb_i < X \leq \overline{X_t} + 1,8Sb_i$	$3,4 < X \leq 4,2$	Efektif
5.	$X > \overline{X_t} + 1,8Sb_i$	$X > 4,2$	Sangat efektif

Keterangan:

$$\begin{aligned}\overline{X_t} &= \frac{1}{2} \times (\text{skor maks ideal} + \text{skor min ideal}) \\ &= \frac{1}{2} \times (5+1) \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{bi} &= \frac{1}{6} \times (\text{skor maks ideal} - \text{skor min ideal}) \\ &= \frac{1}{6} \times (5-1) \\ &= 0,67\end{aligned}$$

$X = \text{skor empiris}$

BAB IV
HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Produk yang dihasilkan dalam penelitian ini adalah rancangan modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* pada materi turunan fungsi trigonometri yang akan digunakan untuk siswa kelas XII SMA/MA pada mata pelajaran matematika peminatan. Modul pembelajaran yang dihasilkan dalam penelitian ini mencakup dua materi pokok, yaitu turunan fungsi trigonometri dan penerapan turunan fungsi trigonometri.

Tahap-tahap penyusunan produk berupa rancangan modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* pada materi turunan fungsi trigonometri adalah sebagai berikut.

A. Studi Pendahuluan (Menemukan Potensi dan Masalah)

Berdasarkan studi pendahuluan yang dilakukan peneliti melalui wawancara dan dokumentasi, diperoleh potensi dan masalah yang dapat diidentifikasi sebagai berikut.

1. Bangsa yang besar adalah bangsa yang memiliki karakter yang kuat dan kompetensi yang tinggi. Dengan memiliki karakter yang kuat dan tangguh disertai kompetesi yang tinggi, maka berbagai kebutuhan, tantangan dan tuntutan dapat dipenuhi dan diatasi (Kemdikbud).

2. Bangsa-bangsa yang memiliki karakter yang tangguh lazimnya tumbuh dan berkembang semakin maju dan sejahtera. Sebaliknya, bangsa-bangsa yang lemah karakternya akan kian terpuruk (Saptono, 2011).
3. Salah satu kemampuan yang dibutuhkan untuk menghadapi era globalisasi adalah kemampuan pemecahan masalah. Rendahnya kemampuan pemecahan masalah akan berakibat pada rendahnya kualitas sumber daya manusia (Cahyani & Setyawati, 2016).
4. Orang yang terampil dalam memecahkan masalah akan mampu berpacu dengan kebutuhan hidupnya, menjadi pekerja yang lebih produktif, dan mampu memahami isu-isu kompleks yang terjadi di masyarakat (Dhurori & Markaban, 2010).
5. Salah satu model pembelajaran yang dapat meningkatkan kemampuan pemecahan masalah adalah pembelajaran reflektif (Rohana & Ningsih, 2016).
6. Untuk membekali siswa sebagai generasi emas tahun 2045 dengan jiwa Pancasila dan karakter yang baik guna menghadapi dinamika perubahan di masa depan, pemerintah mencanangkan program Penguatan Pendidikan Karakter (Peraturan Presiden Nomor 87 Tahun 2017 tentang Penguatan Pendidikan Karakter).

7. Penguatan Pendidikan Karakter (PPK) menggunakan tiga basis pendekatan utama, salah satunya yaitu pendidikan karakter berbasis kelas. Pendidikan karakter berbasis kelas dapat dilakukan dengan mengintegrasikan nilai-nilai karakter dalam proses pembelajaran sesuai dengan isi kurikulum. Salah satu model pembelajaran pendidikan karakter yang dapat digunakan adalah pembelajaran reflektif.
8. Dalam rangka menghindari pendidikan karakter yang tidak sejalan dengan spirit dan prinsip Islam, perlu diterapkan pendidikan karakter yang bersumber pada ajaran Islam.
9. Pemerintah mengeluarkan kebijakan Pembelajaran Jarak Jauh (PJJ) untuk mencegah penyebaran Covid-19 di sekolah dan kampus.
10. Pelaksanaan pembelajaran jarak jauh terkendala oleh ketersediaan listrik, jaringan internet, dan gawai sebagai sarana untuk mengikuti pembelajaran jarak jauh (kompas.com 2020, diakses 30 Desember 2020).
11. Tidak semua guru dan siswa memiliki kemampuan IT yang memadai untuk melaksanakan pembelajaran jarak jauh, terutama untuk guru dan siswa yang berada di wilayah terpencil, tertinggal, dan terbelakang (puspensos.kemsos.go.id 2020, diakses 30 Desember 2020).

12. Respon siswa terhadap pembelajaran daring (pembelajaran jarak jauh) kurang menyenangkan dengan keterbatasan kuota, aplikasi yang sering error, kurangnya bimbingan guru, tidak dapat berdiskusi langsung dengan teman, susah dalam menerima materi, dan banyaknya tugas yang diberikan (Arifin, 2020).
13. Meskipun respon siswa kurang menyenangkan terhadap pembelajaran daring, pembelajaran daring bermanfaat untuk menambah wawasan siswa tentang penggunaan teknologi dalam pembelajaran, siswa bebas menentukan sistem belajarnya sehingga lebih fleksibel dan lebih efisien (Arifin, 2020).
14. Struktur kurikulum di SMA/MA terdiri atas mata pelajaran umum kelompok A, mata pelajaran umum kelompok B, dan mata pelajaran akademik kelompok C (Permendikbud No.36 Tahun 2018 tentang Kurikulum 2013 SMA/MA).
15. Penyediaan buku mata pelajaran peminatan akademik di SMA/SMK diserahkan kepada penerbit (wartakotalive.com, diakses 10 Desember 2020). Sedangkan beberapa sekolah mengandalkan bantuan pemerintah dalam menyediakan buku-buku pelajaran di perpustakaan sekolah, sehingga perpustakaan sekolah belum mampu menyediakan buku-buku mata pelajaran

peminatan akademik sesuai dengan Kurikulum 2013 yang berlaku.

16. Siswa membutuhkan bahan belajar lain selain guru untuk mempelajari mata pelajaran peminatan akademik.
17. Dalam kondisi pembelajaran jarak jauh yang saat ini diterapkan, siswa membutuhkan bahan belajar yang dapat dipelajari secara mandiri dengan atau tanpa guru.

Berdasarkan hasil identifikasi potensi dan masalah yang ditemukan, peneliti hendak mengembangkan rancangan produk berupa modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* yang diharapkan dapat membantu meningkatkan kemampuan pemecahan masalah dan karakter siswa serta dapat dipelajari siswa secara mandiri.

B. Studi Literatur dan Pengumpulan Informasi

Setelah mendapatkan potensi dan masalah, peneliti melakukan studi literatur dengan mengumpulkan hasil-hasil penelitian dan informasi lain yang dapat digunakan sebagai bahan untuk merancang produk. Informasi-informasi yang dibutuhkan antara lain cara-cara dalam mengembangkan modul, langkah-langkah pembelajaran reflektif, dan strategi untuk mengimplementasikan paradigma *unity of sciences*.

C. Desain Produk

Berdasarkan potensi, masalah, dan studi literatur yang dilakukan, peneliti membuat desain/rancangan produk berupa modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of* *sciences*, sehingga rancangan produk tersebut diharapkan dapat mengembangkan potensi maupun mengatasi masalah yang ditemukan. Tahapan yang dilakukan dalam pengembangan modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* adalah analisis kurikulum, analisis materi, merumuskan tujuan pembelajaran berdasarkan hasil analisis kurikulum dan materi, menyusun kerangka isi modul, dan menulis rancangan modul berdasarkan kerangka isi modul.

1. Analisis kurikulum, dilakukan dengan menetapkan kompetensi dasar yang akan dikembangkan dalam bentuk bahan ajar modul. Kompetensi dasar yang dipilih adalah KD 3.3, KD 4.3, KD 3.4, dan KD 4.4 matematika peminatan SMA/MA kelas XII yang berkaitan dengan materi turunan fungsi trigonometri (berdasarkan Permendikbud No.37 Tahun 2018).
2. Analisis karakteristik siswa, dilakukan untuk mendapatkan informasi tentang profil siswa yang akan mengikuti pembelajaran. Siswa yang akan menggunakan adalah siswa SMA/MA yang secara kognitif sudah memasuki tahap operasional formal.
3. Analisis materi, dilakukan dengan mengidentifikasi materi utama yang perlu diajarkan, mengumpulkan dan memilih materi yang relevan. Materi yang perlu diajarkan dalam modul adalah turunan fungsi trigonometri dan penerapan turunan fungsi trigonometri.

4. Merumuskan tujuan pembelajaran, dilakukan berdasarkan analisis kurikulum dan analisis materi, dan memilih kata kerja operasional yang sesuai dengan tingkat perkembangan kognitif siswa yang sudah memasuki tahap operasional formal.
5. Menyusun kerangka isi modul, dilakukan dengan menyusun kembali pokok-pokok materi yang dipelajari di dalam modul dan rumusan tujuan pembelajaran secara sistematis sehingga urutan pembelajaran yang dihasilkan mudah dipelajari dan dipahami oleh siswa.

Pada tahap ini, didapatkan kerangka isi modul sebagai berikut.

1. Judul modul: Modul Pembelajaran Reflektif Berbasis *Unity of Sciences* pada Materi Turunan Fungsi Trigonometri
2. Sasaran pengguna: siswa kelas XII SMA/MA Peminatan MIPA
3. Kompetensi inti:

   KI-3. Memahami, menerapkan, menganalisis, dan mengevaluasi pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.

KI-4. Mengolah, menalar, menyaji, dan mencipta dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri serta bertindak secara efektif dan kreatif, dan mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.

4. Kompetensi dasar:
   - 3.3 Menggunakan prinsip turunan ke fungsi trigonometri sederhana
   - 3.4 Menjelaskan keberkaitanan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung, serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.
   - 4.3 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri.
   - 4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, dan kemiringan garis singgung serta titik belok dan kecekungan kurva fungsi trigonometri.

5. Materi modul:
    a. Bab I Turunan Fungsi Trigonometri, terdiri atas:
        1) Kegiatan Belajar 1 Turunan Fungsi Trigonometri Sederhana
        2) Kegiatan Belajar 2 Turunan Fungsi Trigonometri Komposisi
        3) Kegiatan Belajar 3 Turunan Lanjutan Fungsi Trigonometri
    b. Bab II Penerapan Turunan Fungsi Trigonometri, terdiri atas:
        1) Kegiatan Belajar 1 Kemiringan Garis Singgung Kurva Fungsi Trigonometri
        2) Kegiatan Belajar 2 Nilai Stasioner dan Titik Stasioner Fungsi Trigonometri
        3) Kegiatan Belajar 3 Kemonotonan Fungsi Trigonometri
        4) Kegiatan Belajar 4 Nilai Maksimum dan Nilai Minimum Fungsi Trigonometri
        5) Kegiatan Belajar 5 Jenis Titik Stasioner Fungsi Trigonometri
        6) Kegiatan Belajar 6 Titik Belok Kurva Fungsi Trigonometri
        7) Kegiatan Belajar 7 Kecekungan Kurva Fungsi Trigonometri

D. Validasi Desain

Validasi desain/rancangan produk dilakukan oleh orang yang dianggap ahli dan praktisi untuk menilai kelayakan desain produk. Validasi dilakukan dengan cara meminta para ahli dan praktisi untuk memberikan penilaian dan saran-saran perbaikan terhadap rancangan produk tersebut agar peneliti dapat memperbaiki rancangan produk. Aspek yang dinilai adalah kevalidan, kepraktisan, dan keefektifan produk secara teoretis.

Secara teoretis, kualitas suatu produk dapat dilihat dari aspek kevalidan, kepraktisan, dan keefektifan.

1. Produk valid jika materi yang disajikan benar (*up to date*) dan komponen produk konsisten.
2. Produk praktis jika produk menarik dan dapat digunakan dalam kondisi normal.
3. Produk efektif jika produk dapat mencapai tujuan yang diinginkan.

E. Desain Teruji

Berdasarkan penilaian dan saran-saran perbaikan dari para ahli dan praktisi, peneliti memperbaiki rancangan produk. Setelah produk diperbaiki, maka desain produk tersebut menjadi desain yang teruji secara internal.

F. Kevalidan Modul

Modul yang layak digunakan adalah bahan ajar yang telah melalui tahap penilaian oleh validator. Validator ahli materi memberikan beberapa saran, yaitu: peta konsep pada penempatan materi, harus ada kesepakatan (definisi) reflektif dan karakter siswa yang ingin diteliti atau diukur melalui modul ini. Selain itu, harus ada pula penjabaran lebih detail tentang materi dan soal yang digunakan pada bab turunan fungsi trigonometri maupun penerapannya.

Berdasarkan hasil validasi oleh validator ahli materi, didapatkan persentase sebesar 82,01%. Persentase ini apabila dikonversikan ke Tabel 3.1 termasuk dalam kategori sangat valid, sehingga modul dapat digunakan.

Adapun ahli media modul memberikan beberapa saran, yaitu perhatikan tata penulisan tanda baca, gunakan gambar-gambar yang berkualitas dan jikalau mengambil dari internet sertakan referensinya atau buat sendiri jika memungkinkan, serta berikan kolom khusus untuk rumus, dan berikan warna yang berbeda pada beberapa istilah yang dianggap penting. Berdasarkan hasil validasi oleh validator ahli media, didapatkan persentase sebesar 66%. Persentase ini apabila dikonversikan ke Tabel 3.1 termasuk dalam kategori valid, sehingga modul dapat digunakan.

Berdasarkan data tersebut, diperoleh rata-rata hasil uji kevalidan modul oleh ahli materi dan media sebesar 75%.

Apabila dikonversikan pada Tabel 3.1 termasuk dalam kategori valid. Adapun rata-rata hasil validasi ahli materi dan ahli media modul apabila dikonversikan pada Tabel 3.4 memiliki kualitas yang termasuk dalam kategori baik. Hal ini menunjukkan bahwa kualitas modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* untuk meningkatkan pemecahan masalah dan karakter siswa MA ditinjau dari aspek kevalidan termasuk dalam kategori baik.

G. Kepraktisan Modul

Analisis kepraktisan modul dilakukan setelah validasi dan direvisi. Analisis ini dilakukan dengan angket tanggapan guru terhadap penggunaan modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* untuk meningkatkan pemecahan masalah dan karakter siswa MA yang telah dikembangkan. Aspek yang diajukan dalam uji kepraktisan kepada praktisi guru berjumlah 20 aspek dan memperoleh skor 3,40. Apabila dikonversikan pada Tabel 3.3, maka tingkat kepraktisan modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* untuk meningkatkan pemecahan masalah dan karakter siswa MA termasuk dalam kategori praktis berdasarkan tanggapan guru.

H. Keefektifan Modul

Uji keefektifan modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* untuk meningkatkan pemecahan masalah dan karakter siswa MA dilakukan dengan tinjauan teoritik menggunakan angket oleh responden yang sama dengan responden uji kepraktisan. Hasil angket keefektifan modul pembelajaran ini diperoleh rata-rata akhir 4,72. Apabila dikonversikan ke dalam Tabel 3.4 masuk dalam kategori sangat efektif secara teoritik. Berdasarkan hasil angket tersebut, modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* secara teori dapat meningkatkan pemecahan masalah dan karakter siswa MA serta efektif digunakan di kelas.

BAB V
PENUTUP

A. Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan yang diuraikan pada Bab IV, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Penelitian ini menghasilkan modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* pada materi turunan fungsi trigonometri. Modul pembelajaran turunan fungsi trigonometri disusun dengan mengacu pada Kompetensi Inti dan Kompetensi Dasar yang tercantum dalam Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 37 Tahun 2018 tentang Perubahan Atas Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 24 Tahun 2016 tentang Kompetensi Inti dan Kompetensi Dasar Pelajaran pada Kurikulum 2013 pada Pendidikan Dasar dan Pendidikan Menengah.
2. Modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* untuk meningkatkan pemecahan masalah dan karakter siswa MA pada materi turunan fungsi trigonometri disusun melalui langkah: analisis kurikulum, analisis karakteristik siswa, analisis materi, merumuskan tujuan pembelajaran, menyusun kerangka isi modul, dan menyusun rancangan modul berdasarkan kerangka isi modul yang telah dibuat.

B. Saran

Dari hasil penelitian pengembangan modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* untuk meningkatkan pemecahan masalah dan karakter siswa MA, peneliti memberikan saran sebagai berikut.

1. Modul pembelajaran reflektif berbasis *unity of sciences* pada materi turunan fungsi trigonometri sebaiknya digunakan oleh siswa sebagai salah satu bahan belajar mandiri, terutama untuk mendampingi pelaksanaan pembelajaran jarak jauh dalam masa pandemi Covid-19.
2. Penelitian ini hanya sebatas untuk menghasilkan rancangan modul saja, sehingga masih diperlukan penelitian selanjutnya untuk menguji kevalidan, kepraktisan, dan keefektifan rancangan modul di lapangan.

DAFTAR PUSTAKA

Akbar, Sa'dun. 2017. *Instrumen Perangkat Pembelajaran*. Bandung: Remaja Rosdakarya.

Akker, J. v. 1999. *Principles and Methods of Development Research. Dalam Design Approaches and Tools in Education and Training*. Dordrecht: Springer Science+Business Media.

Ali, A. M. 2018. *Pendidikan Karakter: Konsep dan Implementasinya*. Jakarta: Prenadamedia Group.

Aprilia, N. 2016. Implementasi Model Pembelajaran Reflektif untuk Meningkatkan Kemampuan Pemahaman Mahasiswa Pendidikan Biologi pada Mata Kuliah Strategi Pembelajaran di Program Studi FKIP Universitas Ahmad Dahlan. *Jurnal Bioedukatika*, 4(1):27-30.

Arifin, H. N. 2020. Respon Siswa Terhadap Pembelajaran Dalam Jaringan Masa Pandemi Chovid-19 di Madrasah Aliyah Al-Amin Tabanan. *Widya Balina*, 5(9):1-12.

Cahyani, H., & Setyawati, R. H. 2016. Pentingnya Peningkatan Kemampuan Pemecahan Masalah Melalui PBL untuk Mempersiapkan Generasi Unggul Menghadapi MEA. *Seminar Nasional Matematika X Universitas Negeri Semarang*, (hal. 151-160). Semarang.

Daryanto. 2013. *Menyusun Modul: Bahan Ajar untuk Persiapan Guru dalam Mengajar*. Yogyakarta: Gava Media.

Daryanto dan Dwicahyono, A. 2014. *Pengembangan Perangkat Pembelajaran: Silabus, RPP, PHB, Bahan Ajar*. Yogyakarta: Gava Media.

Depdiknas. 2008. *Penulisan Modul*. Jakarta: Direktorat Tenaga Kependidikan Direktorat Jenderal Peningkatan Mutu Pendidik dan Tenaga Kependidikan (Ditjen PMPTK) Departemen Pendidikan Nasional.

Dhurori, A., & Markaban. 2010. *Pembelajaran Kemampuan Pemecahan Masalah dalam Kajian Aljabar di SMP*. Yogyakarta: Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika.

Fanani, M. 2015. *Paradigma Kesatuan Ilmu Pengetahuan*. Semarang: Karya Abadi Jaya.

Kemdikbud, T. P. t.thn. *Konsep dan Pedoman Penguatan Pendidikan Karakter Tingkat Sekolah Dasar dan Sekolah Menengah Pertama*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia.

Kementerian Agama RI. 2019. *Al-Qur'an dan Terjemahannya Edisi Penyempurnaan 2019*. Jakarta: Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Qur'an Badan Litbang dan Diklat Kemeterian Agama RI.

Kesuma, D., Triatna, C., & Permana, J. 2012. *Pendidikan Karakter: Kajian Teori dan Praktik di Sekolah*. Bandung: Remaja Rosdakarya.

Lestari, I. 2013. *Pengembangan Bahan Ajar Berbasis Kompetensi*. Padang: Akademia Permata.

Majid, A. 2014. *Pendidikan Berbasis Ketuhanan: Membangun Manusia Berkarakter*. Bogor: Penerbit Ghalia Indonesia.

Mulyatiningsih, E. 2013. *Metode Penelitian Terapan Bidang Pendidikan*. Bandung: Alfabeta.

Murdiana, I. N. 2015. Pembelajaran Pemecahan Masalah dalam Pembelajaran Matematika. *Aksioma: Jurnal Pendidikan Matematika*, 4(1):1-11.

Muslich, M. 2011. *Pendidikan Karakter: Menjawab Tantangan Krisis Multidimensional*. Jakarta: Bumi Aksara.

Nirwana, R. R., & Fitriyana, R. 2018. Pengembangan Modul Biomolekul dan Metabolisme dengan Paradigma Unity of Sciences dan Growth Mindset. *Phenomenon*, 83-100.

Prastowo, A. 2015. *Panduan Kreatif Membuat Bahan Ajar Inovatif*. Yogyakarta: Diva Press.

Pribadi, B. A. 2001. *Model ASSURE untuk Mendesain Pembelajaran Sukses*. Jakarta: Dian Rakyat.

Priyatni, E. T., Hamidah, S. C., & Adi, P. 2017. *Pembelajaran Reflektif: Model Pembelajaran Reflektif yang Responsif Teknologi*. Tangerang: Tira Smart.

Purwanto. 2007. *Pengembangan Modul*. Jakarta: Pusat Teknologi Informasi dan Komunikasi Pendidikan (Pustekkom) Departemen Pendidikan Nasional.

Puskur. 2010. *Pengembangan Pendidikan Budaya dan Karakter Bangsa*. Jakarta: Pusat Kurikulum Badan Penelitian dan Pengembangan Kementerian Pendidikan Nasional.

Roebyanto, G., & Harmini, S. 2017. *Pemecahan Masalah Matematika*. Bandung: Remaja Rosdakarya.

Rohana, & Ningsih, Y. L. 2016. Model Pembelajaran Reflektif untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Mahasiswa Calon Guru. *JPPM: Jurnal Penelitian dan Pembelajaran Matematika*, 9(2):145-158.

Saif, U. A., & Almeera, F. 2019. *Membasuh Luka Pengasuhan*. Bandung: Strong From Home.

Sanjaya, W., & Budimanjaya, A. 2017. *Paradigma Baru Mengajar*. Jakarta: Kencana.

Saptono. 2011. *Dimensi-Dimensi Pendidikan Karakter: Wawasan, Strategi, dan Langkah Praktis*. Jakarta: Esensi Erlangga Group.

Saptono. 2012. *Pembelajaran Reflektif: Upaya Membumikan Hermeneutik dalam Praktik Pendidikan*. Satya Widya, 28(1):73-82.

Setyosari, P. 2015. *Metode Penelitian Pendidikan dan Pengembangan Edisi Keempat*. Jakarta: Kencana Prenadamedia Group.

Shadiq, F. 2014. *Pembelajaran Matematika: Cara Meningkatkan Kemampuan Berpikir Siswa*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Srini, S., Siagian, N., Kia, D. O., & Dapamerang, D. 2018. *Panduan Praktis Penguatan Pendidikan Karakter Kontekstual*. Jakarta: Wahana Visi Indonesia.

Subagya. 2010. *Paradigma Pedagogi Reflektif: Mendampingi Peserta Didik Menjadi Cerdas dan Berkarakter*. Yogyakarta: Penerbit Kanisius.

Sugiyono. 2016. *Metode Penelitian dan Pengembangan (Research and Development/R&D)*. Bandung: Alfabeta.

Sunendar, A. 2017. Pembelajaran Matematika dengan Pemecahan Masalah. *Theorems: The Original Research of Mathematics*, 2(1):86-93.

Wardhani, S., Purnomo, S. S., & Wahyuningsih, E. 2010. *Pembelajaran Kemampuan Pemecahan Masalah Matematika di SD*. Yogyakarta: Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika.

Widjajanti, D. B. 2009. Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Mahasiswa Calon Guru Matematika: Apa dan Bagaimana Mengembangkannya. *Seminar Nasional*

Matematika dan Pendidikan Matematika (hal. 402-413). Yogyakarta: Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY.

Widoyoko, E. P. 2017. *Evaluasi Program Pembelajaran*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

Zaini, N., Wuryanto, & Sutanto. 2016. Peningkatan Kemampuan Pemecahan Masalah dan Pengembangan Karakter Siswa Kelas VII Melalui Model PBL Berbantuan Scaffolding. *UJME: Unnes Journal of Mathematics Education*, 5(1):62-68.

Zubaedi. 2011. *Desain Pendidikan Karakter: Konsepsi dan Aplikasinya dalam Lembaga Pendidikan*. Jakarta: Kencana Prenada Media Group.

Undang-undang:

Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 22 Tahun 2016 tentang Standar Proses Pendidikan Dasar dan Menengah.

Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 36 Tahun 2018 tentang Perubahan Atas Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 59 Tahun 2014 tentang Kurikulum 2013 Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah.

Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 37 Tahun 2018 tentang Perubahan Atas Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 24 Tahun 2016 tentang Kompetensi Inti dan Kompetensi Dasar Pelajaran pada Kurikulum 2013 pada Pendidikan Dasar dan Pendidikan Menengah.

Peraturan Pemerintah Nomor 32 Tahun 2013 tentang Standar Nasional Pendidikan.

Peraturan Presiden Nomor 87 Tahun 2017 tentang Penguatan Pendidikan Karakter.

Undang-Undang Nomor 20 Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional.

Sumber Online:

Alifa, Syadza. 2020. *Dinamika Pembelajaran Jarak Jauh di Era Pandemi Covid-19*. Diunduh di https://puspensos.kemsos.go.id/dinamika-pembelajaran-jarak-jauh-di-era-pandemi-covid-19/ tanggal 30 Desember 2020.

Kamil, Irfan. 2020. *Kilas Balik Pembelajaran Jarak Jauh Akibat Pandemi Covid-19*. Diunduh di https://amp.kompas.com/nasional/read/2020/09/03/10063201/kilas-balik-pembelajaran-jarak-jauh-akibat-pandemi-covid-19/ tanggal 30 Desember 2020.

Palmerah. 2013. *Buku Peminatan SMA Diserahkan ke Penerbit*. diunduh di https://wartakota.tribbunnews.com/amp/2013/07/25/buku-peminatan-sma-diserahkan-ke-penerbit/ tanggal 10 Desember 2020.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

Analisis Kurikulum

Mata Pelajaran : Matematika Peminatan

Kelas : XII SMA/MA

Materi Pokok : Turunan Fungsi Trigonometri

Kompetensi Inti	Kompetensi Dasar
3. Memahami, menerapkan, menganalisis, dan mengevaluasi pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.	3.3 Menggunakan prinsip turunan ke fungsi trigonometri sederhana. 3.4 Menjelaskan keberkaitanan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung, serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.
4. Mengolah, menalar, menyaji, dan mencipta dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri serta bertindak secara efektif dan	4.3 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri. 4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi,

Kompetensi Inti	Kompetensi Dasar
kreatif, dan mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.	dan kemiringan garis singgung serta titik belok dan kecekungan kurva fungsi trigonometri.

Analisis Materi

Mata Pelajaran : Matematika Peminatan

Kelas : XII SMA/MA

Materi Pokok : Turunan Fungsi Trigonometri

Kompetensi Dasar	Pokok-Pokok Materi
3.3 Menggunakan prinsip turunan ke fungsi trigonometri sederhana.	Turunan Fungsi Trigonometri: 1. Turunan fungsi trigonometri sederhana 2. Turunan fungsi trigonometri komposisi 3. Turunan lanjutan (turunan kedua, ketiga, dst) fungsi trigonometri
4.3 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri.	
3.4 Menjelaskan keberkaitanan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung, serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	Penerapan Turunan Fungsi Trigonometri: 1. Gradien/kemiringan garis singgung kurva fungsi trigonometri 2. Nilai stasioner dan titik stasioner fungsi trigonometri 3. Selang kemonotonan fungsi trigonometri 4. Nilai maksimum dan nilai minimum fungsi trigonometri 5. Jenis-jenis titik stasioner fungsi trigonometri
4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, dan kemiringan garis	

Kompetensi Dasar	Pokok-Pokok Materi
singgung serta titik belok dan kecekungan kurva fungsi trigonometri.	6. Titik belok kurva fungsi trigonometri 7. Selang kecekungan kurva fungsi trigonometri

Perumusan Tujuan Pembelajaran
(Hasil Analisis Kurikulum dan Materi)

Mata Pelajaran : Matematika Peminatan

Kelas : XII SMA/MA

Materi : Turunan Fungsi Trigonometri

Materi Pokok dan Topik Bahasan	Kompetensi Dasar (Tujuan Pembelajaran Umum)	Indikator (Tujuan Pembelajaran Khusus)
Turunan Fungsi Trigonometri: 1. Turunan fungsi trigonometri sederhana 2. Turunan fungsi trigonometri komposisi 3. Turunan lanjutan (turunan kedua, ketiga, dst) fungsi trigonometri	3.3 Menggunakan prinsip turunan ke fungsi trigonometri sederhana	3.3.1 Menentukan turunan fungsi trigonometri sederhana menggunakan prinsip turunan.
	4.3 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri.	4.3.1 Menentukan turunan fungsi trigonometri komposisi menggunakan aturan rantai.
		4.3.2 Menentukan turunan lanjutan (turunan kedua, ketiga, dst) fungsi trigonometri.

Materi Pokok dan Topik Bahasan	Kompetensi Dasar (Tujuan Pembelajaran Umum)	Indikator (Tujuan Pembelajaran Khusus)
Penerapan Turunan Fungsi Trigonometri: 1. Gradien/kemiringan garis singgung kurva fungsi trigonometri 2. Nilai stasioner dan titik stasioner fungsi trigonometri 3. Selang kemonotonan fungsi trigonometri 4. Nilai maksimum dan nilai minimum fungsi trigonometri 5. Jenis-jenis titik stasioner 6. Titik belok fungsi trigonometri 7. Selang kecekungan kurva fungsi trigonometri	3.4 Menjelaskan keberkaitanan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung, serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	3.4.1 Menjelaskan hubungan turunan pertama fungsi dengan gradien/kemiringan garis singgung kurva fungsi trigonometri.
		3.4.2 Menjelaskan hubungan turunan pertama fungsi dengan titik stasioner fungsi trigonometri.
		3.4.3 Menjelaskan hubungan turunan pertama fungsi dengan selang kemonotonan fungsi trigonometri.
		3.4.4 Menjelaskan hubungan turunan kedua fungsi dengan titik belok kurva fungsi trigonometri.
		3.4.5 Menjelaskan hubungan turunan kedua fungsi dengan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.
	4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang	4.4.1 Menentukan gradien/kemiringan garis singgung kurva fungsi trigonometri menggunakan turunan pertama fungsi trigonometri.

Materi Pokok dan Topik Bahasan	Kompetensi Dasar (Tujuan Pembelajaran Umum)	Indikator (Tujuan Pembelajaran Khusus)
	kemonotonan fungsi, dan kemiringan garis singgung serta titik belok dan kecekungan kurva fungsi trigonometri.	4.4.2 Menentukan nilai stasioner dan titik stasioner fungsi trigonometri menggunakan turunan pertama fungsi trigonometri.
		4.4.3 Menentukan selang/interval saat fungsi trigonometri monoton naik menggunakan turunan pertama fungsi trigonometri.
		4.4.4 Menentukan selang/interval saat fungsi trigonometri monoton turun menggunakan turunan pertama fungsi trigonometri.
		4.4.5 Menentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi trigonometri.
		4.4.6 Menentukan jenis titik stasioner fungsi trigonometri menggunakan uji turunan pertama.
		4.4.7 Menentukan jenis titik stasioner fungsi trigonometri menggunakan uji turunan kedua.

Materi Pokok dan Topik Bahasan	Kompetensi Dasar (Tujuan Pembelajaran Umum)	Indikator (Tujuan Pembelajaran Khusus)
		4.4.8 Menentukan titik belok kurva fungsi trigonometri menggunakan turunan kedua fungsi trigonometri.
		4.4.9 Menentukan selang/interval saat kurva fungsi trigonometri cekung ke atas menggunakan turunan kedua fungsi trigonometri.
		4.4.10 Menentukan selang/interval saat kurva fungsi trigonometri cekung ke bawah menggunakan turunan kedua fungsi trigonometri.

Kerangka Isi Modul

Mata Pelajaran : Matematika Peminatan

Kelas : XII SMA/MA

Materi : Turunan Fungsi Trigonometri

Judul Bab	Kegiatan Belajar	Indikator
Bab I Turunan Fungsi Trigonometri	1. Turunan fungsi trigonometri sederhana	3.3.1 Menentukan turunan fungsi trigonometri sederhana menggunakan prinsip turunan.
	2. Turunan fungsi trigonometri komposisi	4.3.1 Menentukan turunan fungsi trigonometri komposisi menggunakan aturan rantai.
	3. Turunan lanjutan (turunan kedua, ketiga, dst) fungsi trigonometri	4.3.2 Menentukan turunan lanjutan (turunan kedua, ketiga, dst) fungsi trigonometri.
Bab II Penerapan Turunan Fungsi Trigonometri	1. Kemiringan garis singgung kurva fungsi trigonometri	3.4.1 Menjelaskan hubungan turunan pertama fungsi dengan gradien/kemiringan garis singgung kurva fungsi trigonometri.

Judul Bab	Kegiatan Belajar	Indikator
		4.4.1 Menentukan gradien/kemiringan garis singgung kurva fungsi trigonometri menggunakan turunan pertama fungsi trigonometri.
	2. Nilai stasioner dan titik stasioner fungsi trigonometri	3.4.2 Menjelaskan hubungan turunan pertama fungsi dengan titik stasioner fungsi trigonometri.
		4.4.2 Menentukan nilai stasioner dan titik stasioner fungsi trigonometri menggunakan turunan pertama fungsi trigonometri.
	3. Kemonotonan fungsi trigonometri	3.4.3 Menjelaskan hubungan turunan pertama fungsi dengan selang kemonotonan fungsi trigonometri.
		4.4.3 Menentukan selang/interval saat fungsi trigonometri monoton naik menggunakan turunan pertama fungsi trigonometri.
		4.4.4 Menentukan selang/interval saat fungsi trigonometri monoton turun menggunakan turunan pertama fungsi trigonometri.

Judul Bab	Kegiatan Belajar	Indikator
	4. Nilai maksimum dan nilai minimum fungsi trigonometri	4.4.5 Menentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi trigonometri.
	5. Jenis titik stasioner fungsi trigonometri	4.4.6 Menentukan jenis titik stasioner fungsi trigonometri menggunakan uji turunan pertama.
		4.4.7 Menentukan jenis titik stasioner fungsi trigonometri menggunakan uji turunan kedua.
	6. Titik belok kurva fungsi trigonometri	3.4.4 Menjelaskan hubungan turunan kedua fungsi dengan titik belok kurva fungsi trigonometri.
		4.4.8 Menentukan titik belok kurva fungsi trigonometri menggunakan turunan kedua fungsi trigonometri.
	7. Kecekungan kurva fungsi trigonometri	3.4.5 Menjelaskan hubungan turunan kedua fungsi dengan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.
		4.4.9 Menentukan selang/interval saat kurva fungsi trigonometri cekung ke atas menggunakan turunan kedua fungsi trigonometri.

Judul Bab	Kegiatan Belajar	Indikator
		4.4.10 Menentukan selang/interval saat kurva fungsi trigonometri cekung ke bawah menggunakan turunan kedua fungsi trigonometri.

Modul

Turunan Fungsi Trigonometri

Nama : ....

No. Absen : ....

Kelas : ....

Matematika Peminatan

Untuk Kelas XII

SMA/MA

Judul:

Modul Pembelajaran Reflektif Berbasis Unity of Sciences pada Materi Turunan Fungsi Trigonometri untuk Siswa SMA/MA Peminatan MIPA Kelas XII

Penyusun:

Afida Luthfiani
Dr. Saminanto, M.Sc.
Dyan Falasifa Tsani, M.Pd.

Kritik dan Saran:

Email: afidaluthfiani@gmail.com

Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN) Walisongo
Semarang
2020

Kata Pengantar

Puji syukur alhamdulillah kami haturkan kepada Allah SWT atas rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, sehingga penyusun bisa menyelesaikan penyusunan Modul Pembelajaran Reflektif Berbasis *Unity of Sciences* pada materi Turunan Fungsi Trigonometri untuk siswa SMA/MA Peminatan MIPA kelas XII.

Modul ini disusun untuk memenuhi kebutuhan siswa terhadap bahan belajar matematika materi turunan fungsi trigonometri. Dengan menggunakan modul turunan fungsi trigonometri ini, diharapkan siswa dapat belajar berbagai hal yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri secara mandiri. Selain itu, modul ini diharapkan dapat meningkatkan kemampuan pemecahan masalah dan karakter siswa. Modul ini disusun berdasarkan Kurikulum 2013 edisi revisi 2018.

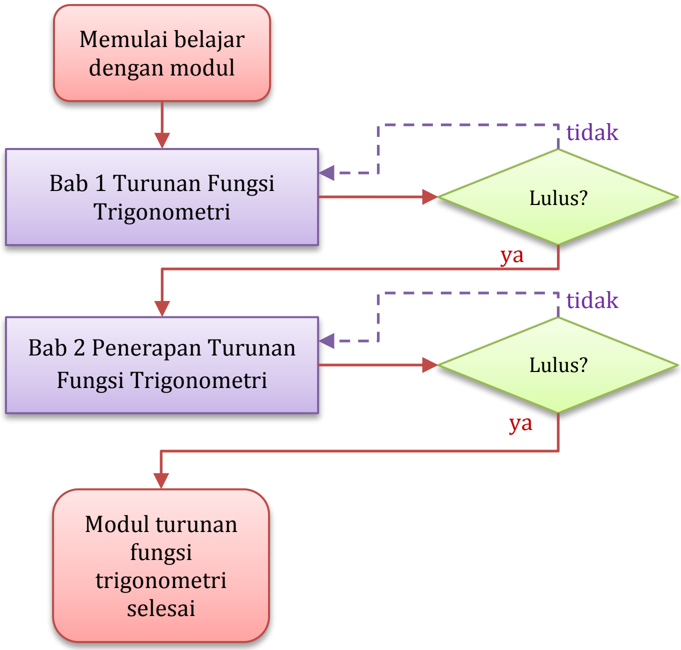
Penyusun berharap modul ini bermanfaat bagi siswa dan dapat digunakan sebagai bahan belajar, baik dalam pembelajaran di kelas maupun dalam pembelajaran mandiri di luar kelas. Kritik dan saran selalu terbuka untuk perbaikan modul ini agar menjadi lebih baik lagi.

Semarang, Desember 2020
Penyusun,

Afida Luthfiani

Daftar Isi

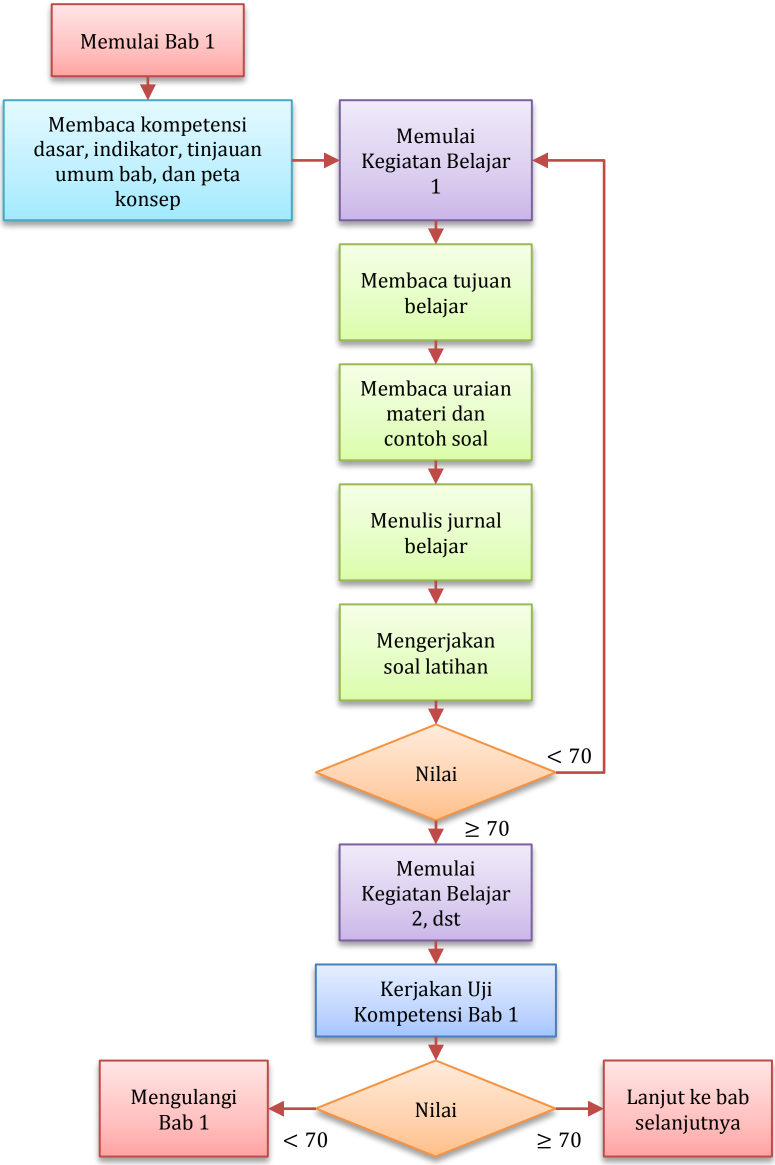
Petunjuk Penggunaan Modul



Gambar 3 Petunjuk penggunaan modul turunan fungsi trigonometri secara keseluruhan.

Keterangan:

Mohon untuk menyimpan modul ini baik-baik karena di dalamnya terdapat ayat-ayat Al-Qur’an.



Gambar 4 Petunjuk penggunaan modul untuk setiap bab.

Langkah-Langkah Pemecahan Masalah

Untuk menyelesaikan suatu masalah matematika, kalian dapat bertanya kepada diri kalian sendiri dengan pertanyaan-pertanyaan berikut untuk memandu selama proses penyelesaian masalah berlangsung.

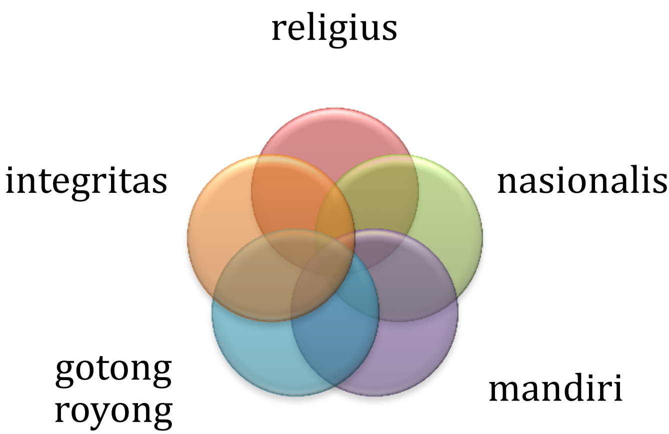
Langkah	Pertanyaan Reflektif
1. Memahami masalah (*understanding the problem*)	- Apa yang tidak diketahui dalam soal? - Data apa saja yang diberikan dalam soal? - Apakah data yang diberikan dalam soal cukup untuk mencari apa yang ditanyakan?
2. Merencanakan penyelesaian masalah (*planning*)	- Pernahkah aku menjumpai soal seperti ini sebelumnya? Pernahkah ada soal yang serupa dalam bentuk lain? - Andaikan ada soal lain (yang sudah terselesaikan) yang mirip dengan soal yang sedang dihadapi, dapatkah cara penyelesaian soal tersebut digunakan untuk menyelesaikan soal ini? - Dapatkah masalah ini disederhanakan?
3. Menyelesaikan masalah sesuai rencana (*carrying out plans*)	- Apakah setiap langkah penyelesaian sudah benar sesuai rencana penyelesaian? - Apakah langkah penyelesaian yang dilakukan sudah menghasilkan penyelesaian yang benar?
4. Melihat kembali ke belakang atau meninjau ulang (*looking back*)	- Dapatkah aku menyelesaikan soal ini dengan cara yang lain? - Jika soal diganti, apakah aku masih bisa mengerjakan soal tersebut dengan cara yang sama? - Apa yang dapat aku pelajari setelah menyelesaikan soal ini?

Nilai Utama Karakter yang Perlu Dikembangkan Melalui PPK (Penguatan Pendidikan Karakter)

Ada lima nilai utama karakter yang saling berkaitan yang perlu dikembangkan sebagai prioritas Gerakan PPK (Penguatan Pendidikan Karakter), yaitu karakter religius, nasionalis, mandiri, gotong royong, dan integritas.

1. Religius	a. Melaksanakan ajaran agama dan kepercayaan yang dianut b. Menghargai perbedaan agama c. Menjunjung tinggi sikap toleran terhadap pelaksanaan ibadah agama dan kepercayaan lain d. Hidup rukun dan damai dengan pemeluk agama lain
2. Nasionalis	a. Berpikir, bersikap, dan berbuat yang menunjukkan kesetiaan, kepedulian, dan penghargaan yang tinggi terhadap bahasa, lingkungan fisik, sosial, budaya, ekonomi, dan politik bangsa b. Menempatkan kepentingan bangsa dan negara di atas kepentingan diri dan kelompok
3. Mandiri	a. Tidak bergantung pada orang lain b. Menggunakan segala tenaga, pikiran, dan waktu untuk merealisasikan harapan, mimpi dan cita-cita

4.	**Gotong royong**	a. Menghargai semangat kerja sama b. Bahu-membahu menyelesaikan persoalan bersama c. Menjalin komunikasi dan persahabatan d. Memberi bantuan dan pertolongan pada orang-orang yang membutuhkan
5.	**Integritas**	a. Berupaya menjadikan dirinya sebagai orang yang selalu dapat dipercaya dalam perkataan, tindakan, dan pekerjaan b. Memiliki komitmen dan kesetiaan pada nilai-nilai kemanusiaan dan moral (integritas moral)



Gambar 5 Nilai utama karakter yang perlu dikembangkan melalui PPK (Penguatan Pendidikan Karakter)

Pentingnya Refleksi dalam Pembelajaran

Di dalam Al-Qur'an, Allah SWT berfirman:

يٰٓاَيُّهَا الَّذِيْنَ اٰمَنُوا اتَّقُوا اللّٰهَ وَلْتَنْظُرْ نَفْسٌ مَّا قَدَّمَتْ لِغَدٍۚ وَاتَّقُوا اللّٰهَ ۗاِنَّ اللّٰهَ خَبِيْرٌ ۢبِمَا تَعْمَلُوْنَ ۝١٨ (الحشر/59: 18)

Terjemah Kemenag 2019

18. Wahai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan hendaklah setiap orang memperhatikan apa yang telah diperbuatnya untuk hari esok (akhirat). Bertakwalah kepada Allah. Sesungguhnya Allah Mahateliti terhadap apa yang kamu kerjakan. **(Al-Hasyr/59:18)**

Refleksi merupakan proses berpikir untuk meninjau kembali kegiatan apa saja yang telah terjadi (pengalaman) sebelum kita mengambil tindakan selanjutnya. Dengan melakukan refleksi, kita bisa mengambil hikmah/pelajaran dari setiap pengalaman atau kejadian yang kita jumpai.

Berdasarkan ayat tersebut, Allah menginginkan kita agar selalu melakukan refleksi atas apa saja yang telah kita lakukan, supaya kita bisa menjadi pribadi yang lebih baik lagi bila dibandingkan dengan diri kita di masa lalu.

Peta Kompetensi

Turunan Fungsi Trigonometri

Bab I
Turunan Fungsi Trigonometri

1. Turunan fungsi trigonometri sederhana
2. Turunan fungsi trigonometri komposisi
3. Turunan lanjutan fungsi trigonometri

Bab II
Penerapan Turunan Fungsi Trigonometri

1. Kemiringan garis singgung kurva fungsi trigonometri
2. Nilai stasioner dan titik stasioner fungsi trigonometri
3. Kemonotonan fungsi trigonometri
4. Nilai maksimum dan nilai minimum fungsi trigonometri
5. Jenis titik stasioner fungsi trigonometri
6. Titik belok kurva fungsi trigonometri
7. Kecekungan kurva fungsi trigonometri

Gambar 6 Pembagian Bab dan Materi dalam Modul Turunan Fungsi Trigonometri

<table>
<tr><th>Judul Bab</th><th>Kompetensi Dasar</th><th>Materi Pokok</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Bab 1
Turunan Fungsi Trigonometri</td><td>3.3 Menggunakan prinsip turunan ke fungsi trigonometri sederhana.</td><td rowspan="2">1. Turunan fungsi trigonometri sederhana
2. Turunan fungsi trigonometri komposisi
3. Turunan lanjutan fungsi trigonometri</td></tr>
<tr><td>4.3 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Bab 2
Penerapan Turunan Fungsi Trigonometri</td><td>3.4 Menjelaskan keberkaitanan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung, serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.</td><td rowspan="2">1. Kemiringan garis singgung fungsi trigonometri
2. Nilai stasioner dan titik stasioner fungsi trigonometri
3. Kemonotonan fungsi trigonometri
4. Nilai maksimum dan nilai minimum fungsi trigonometri
5. Jenis titik stasioner
6. Titik belok kurva fungsi trigonometri
7. Kecekungan kurva fungsi trigonometri</td></tr>
<tr><td>4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, dan kemiringan garis singgung serta titik belok dan kecekungan kurva fungsi trigonometri.</td></tr>
</table>

BAB I

Turunan Fungsi Trigonometri

Gambar 1.7 Gerakan naik turun dari lumba-lumba yang berenang di lautan membentuk lintasan berupa grafik fungsi trigonometri.

Fungsi trigonometri merupakan suatu fungsi yang grafiknya berulang secara terus-menerus dalam periode tertentu. Dalam bentuk grafik, fungsi trigonometri dapat kita jumpai dalam kehidupan. Pada Bab I Turunan Fungsi Trigonometri, kita akan belajar tentang cara-cara menentukan turunan dari fungsi trigonometri, yaitu dengan menggunakan:

1. Definisi turunan fungsi,
2. Sifat-sifat turunan fungsi, dan
3. Aturan rantai.

Kemampuan dasar minimal yang harus kalian miliki sebelum mempelajari Bab I Turunan Fungsi Trigonometri antara lain:

1. Definisi dan sifat-sifat turunan fungsi.
2. Rumus-rumus trigonometri

A. Kompetensi Dasar

Setelah mempelajari Bab I Turunan Fungsi Trigonometri, diharapkan siswa dapat:

3.3 Menggunakan prinsip turunan ke fungsi trigonometri sederhana.

4.3 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri.

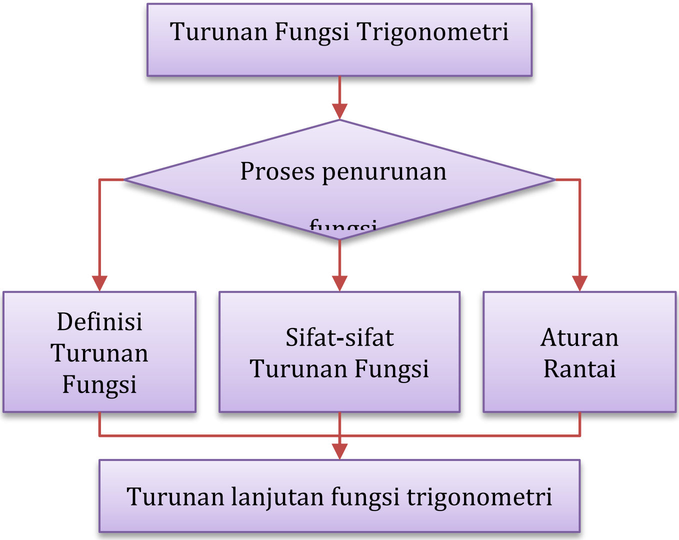
B. Indikator Ketuntasan Belajar

3.3.1 Menentukan turunan fungsi trigonometri sederhana menggunakan prinsip turunan.

4.3.1 Menentukan turunan fungsi trigonometri komposisi menggunakan aturan rantai.

4.3.2 Menentukan turunan lanjutan (turunan kedua, ketiga, dst) fungsi trigonometri.

C. Peta Konsep



Gambar 1.8 Peta konsep materi turunan fungsi trigonometri

Kegiatan Belajar 1

Turunan Fungsi Trigonometri Sederhana

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Tujuan Belajar

Setelah mengikuti Kegiatan Belajar 1, diharapkan siswa dapat:

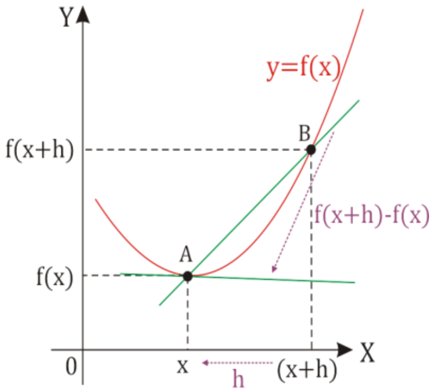
3.3.1 Menentukan turunan fungsi trigonometri sederhana menggunakan prinsip turunan.

Pada mata pelajaran matematika wajib kelas XI, kita sudah belajar tentang materi turunan fungsi aljabar. Apakah kalian masih ingat dan paham tentang cara-cara mencari turunan fungsi aljabar? Cobalah kalian bertanya pada diri sendiri tentang:

1. Apa itu definisi turunan fungsi?
2. Bagaimana cara untuk mendapatkan turunan dari sebuah fungsi?
3. Bagaimanakah sifat-sifat turunan fungsi?

Pada kesempatan ini, kita akan belajar kembali tentang cara menentukan turunan fungsi, lebih tepatnya menentukan turunan fungsi trigonometri.

Untuk mencari turunan dari fungsi trigonometri, kita bisa menggunakan definisi turunan maupun sifat-sifat turunan fungsi.



Gambar 1.9. Definisi turunan fungsi di suatu titik

Definisi dan Sifat-sifat Turunan Fungsi

A. Definisi Turunan Fungsi

Turunan dari fungsi $y = f(x)$ dirumuskan dengan:

$$\boxed{y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Jika nilai limitnya ada dan bukan ∞ atau $-\infty$.

B. Sifat-sifat Turunan Fungsi

Misalkan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$ adalah dua fungsi yang masing-masing mempunyai turunan $u' = u'(x)$ dan $v' = v'(x)$, maka berlaku sifat-sifat:

1. Penjumlahan. Jika fungsi $y = u + v$, maka $y' = u' + v'$.
2. Pengurangan. Jika fungsi $y = u - v$, maka $y' = u' - v'$.
3. Perkalian. Jika fungsi $y = uv$, maka $y' = u'v + uv'$.
4. Pembagian. Jika fungsi $y = \frac{u}{v}$ dengan $v \neq 0$, maka $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Info: Definisi Turunan Fungsi Secara Geometris

Secara geometris, turunan fungsi dapat diartikan sebagai:

a. Kemiringan garis singgung,
b. Laju perubahan benda
c. Kecepatan sesaat

Jadi, apabila ada permasalahan yang berkaitan dengan laju perubahan, kita bisa menyelesaikannya dengan turunan fungsi.

Notasi Turunan Fungsi

Turunan dari sebuah fungsi dapat ditulis/dinotasikan dengan:

a. Notasi Newton: y' atau $f'(x)$

b. Notasi Leibniz: $\frac{dy}{dx}$ atau $\frac{df(x)}{dx}$

Info: Notasi Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz adalah salah seorang dari dua penemu utama kalkulus (yang lainnya adalah Isaac Newton). Penulisan notasi Leibniz untuk turunan dipakai secara luas, khususnya dalam bidang terapan seperti halnya fisika, kimia, dan ekonomi.

Kegiatan Belajar A

Menentukan turunan dari fungsi $f(x) = \sin ax$.

Penyelesaian

Diketahui fungsi $f(x) = \sin ax$.

Kita bisa menentukan turunan dari fungsi $f(x) = \sin ax$ dengan menggunakan definisi turunan.

$$\begin{aligned} f(x) = \sin ax \Rightarrow f(x+h) &= \sin a(x+h) \\ &= \sin(ax+ah) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan definisi turunan fungsi, kita akan memperoleh:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(ax+ah)-\sin ax}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{1}{2}(ax+ah+ax)\sin\frac{1}{2}(ax+ah-ax)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{1}{2}(2ax+ah)\sin\left(\frac{1}{2}ah\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{2}\cos\frac{1}{2}(2ax+ah)\sin\left(\frac{1}{2}ah\right)}{h}\cdot\frac{\frac{1}{\cancel{2}}a}{\frac{1}{2}a} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a\cos\frac{1}{2}(2ax+ah)\sin\left(\frac{1}{2}ah\right)}{\frac{1}{2}ah} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[a\cos\left(\frac{2ax+ah}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{2}ah\right)}{\left(\frac{1}{2}ah\right)}\right] \\
&= \left[\lim_{h\to 0} a\cos\left(\frac{2ax+ah}{2}\right)\right]\left[\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}ah\right)}{\left(\frac{1}{2}ah\right)}\right] \\
&= a\cos\left(\frac{2ax+a.0}{2}\right)\cdot(1) \\
&= a\cos ax
\end{aligned}
$$

Catatan: $\boxed{\sin A-\sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}$

Jadi, turunan dari fungsi $f(x)=\sin ax$ adalah $f'(x)=a\cos ax$.

Kegiatan Belajar B

Menentukan turunan dari fungsi $f(x)=\cos ax$.

Penyelesaian

Diketahui fungsi: $f(x)=\cos ax$.

Kita bisa menentukan turunan dari fungsi $f(x)=\cos ax$ menggunakan definisi turunan.

$$f(x)=\cos ax \Rightarrow f(x+h)=\cos a(x+h) = \cos(ax+ah)$$

Dengan menggunakan definisi turunan fungsi, diperoleh:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(ax+ah)-\cos ax}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{1}{2}(ax+ah+ax)\sin\frac{1}{2}(ax+ah-ax)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{1}{2}(2ax+ah)\sin\frac{1}{2}(ah)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{2}\sin\frac{1}{2}(2ax+ah)\sin\frac{1}{2}(ah)}{h}\cdot\frac{\frac{1}{\cancel{2}}a}{\frac{1}{2}a}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-a\sin\frac{1}{2}(2ax+ah)\sin\frac{1}{2}(ah)}{\frac{1}{2}ah}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[-a\sin\left(\frac{2ax+ah}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{2}ah\right)}{\left(\frac{1}{2}ah\right)}\right]\\
&= \left[-a\lim_{h\to 0}\sin\left(\frac{2ax+ah}{2}\right)\right]\left[\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}ah\right)}{\left(\frac{1}{2}ah\right)}\right]\\
&= -a\sin\left(\frac{2ax+0}{2}\right)\cdot(1)\\
&= -a\sin ax
\end{aligned}$$

Catatan: $\boxed{\cos A-\cos B=-2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}$

Jadi, turunan dari fungsi $f(x)=\cos ax$ adalah $f'(x)=-a\sin ax$.

Contoh 1.1

Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$.

Penyelesaian

$$f(x) = 2\sin x + 3\cos x \Rightarrow f'(x) = 2\cos x + 3(-\sin x)$$
$$= 2\cos x - 3\sin x$$

Jadi, turunan dari fungsi $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ adalah $f'(x) = 2\cos x - 3\sin x$.

Contoh 1.2

Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = 2\sin 3x - 5\cos 4x$.

Penyelesaian

$$f(x) = 2\sin 3x - 5\cos 4x \Rightarrow f'(x) = 3(2\cos 3x) - (4(-5\sin 4x))$$
$$= 6\cos 3x + 20\sin 4x$$

Jadi, turunan dari fungsi $f(x) = 2\sin 3x - 5\cos 4x$ adalah $f'(x) = 6\cos 3x + 20\sin 4x$.

Kegiatan Belajar C

Menentukan turunan dari fungsi $f(x) = \tan ax$.

Penyelesaian

Kita bisa menentukan turunan dari fungsi $f(x) = \tan ax$ menggunakan sifat turunan fungsi.

Diketahui fungsi: $f(x) = \tan ax \Rightarrow f(x) = \dfrac{\sin ax}{\cos ax} = \dfrac{u}{v}$. Maka:

a. Untuk $u = \sin ax \Rightarrow u' = a\cos ax$

b. Untuk $v = \cos ax \Rightarrow v' = -a\sin ax$

Dengan menggunakan sifat turunan fungsi pembagian, yaitu jika $y=\frac{u}{v}$ maka $y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$, kita akan memperoleh:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'v-uv'}{v^2} \\
&= \frac{(a\cos ax)(\cos ax)-(\sin ax)(-a\sin ax)}{(\cos ax)^2} \\
&= \frac{a\cos^2 ax + a\sin^2 ax}{\cos^2 ax} \\
&= \frac{a\left(\sin^2 ax+\cos^2 ax\right)}{\cos^2 ax} \\
&= a\left(\frac{1}{\cos^2 ax}\right) \\
&= a\sec^2 ax
\end{aligned}
$$

Jadi, turunan dari fungsi $f(x)=\tan ax$ adalah $f'(x)=a\sec^2 ax$.

Contoh 1.3

Tentukan turunan dari fungsi $f(x)=\tan 4x$.

Penyelesaian

$$f(x)=\tan 4x \Rightarrow f'(x)=4\sec^2 4x$$

Jadi, turunan dari fungsi $f(x)=\tan 4x$ adalah $f'(x)=4\sec^2 4x$.

Contoh 1.4

Tentukan turunan dari fungsi $f(x)=3\tan 2x$.

Penyelesaian

$$f(x)=2\tan 3x \Rightarrow f'(x)=2\left(3\sec^2 3x\right)=6\sec^2 3x$$

Jadi, turunan dari fungsi $f(x)=2\tan 3x$ adalah $f'(x)=6\sec^2 3x$.

Lembar Kegiatan Siswa

Carilah turunan dari fungsi-fungsi trigonometri dasar lainnya, yaitu $f(x) = \cot ax$, $f(x) = \sec ax$, dan $f(x) = \csc ax$ dengan menggunakan sifat-sifat turunan fungsi. Buat kesimpulan berdasarkan hasil yang kamu peroleh.

Petunjuk:

1. $f(x) = \cot ax = \dfrac{\cos ax}{\sin ax}$
2. $f(x) = \sec ax = \dfrac{1}{\cos ax}$
3. $f(x) = \csc ax = \dfrac{1}{\sin ax}$

Kesimpulan: Rumus Turunan Fungsi Trigonometri Dasar

1. Jika $f(x)=\sin ax$, maka $f'(x)=a\cos ax$
2. Jika $f(x)=\cos ax$, maka $f'(x)=-a\sin ax$
3. Jika $f(x)=\tan ax$, maka $f'(x)=a\sec^2 ax$
4. Jika $f(x)=\cot ax$, maka $f'(x)=-a\csc^2 ax$
5. Jika $f(x)=\sec ax$, maka $f'(x)=a\sec ax\tan ax$
6. Jika $f(x)=\csc ax$, maka $f'(x)=-\csc ax\cot ax$

Keterangan:

1. a adalah bilangan real
2. Besar sudut (yaitu ax) **akan selalu tetap** meskipun fungsi diturunkan.

Pengayaan Materi

Untuk memperjelas pemahaman kalian tentang cara memperoleh turunan fungsi trigonometri sederhana, kalian dapat mengakses video pembelajaran dengan alamat:
https://m.youtube.com/watch?v=UxxMVgY1AyI

Kolom Unity of Sciences

Kenapa sih kita harus belajar matematika, khususnya materi turunan fungsi trigonometri? Mungkin pertanyaan seperti itu pernah melintas dalam benak kalian. Menurut kalian kenapa ya?

Kita tahu bahwa semua yang Allah ciptakan tidaklah sia-sia. Seperti firman Allah SWT dalam Al-Qur'an Surat Ali Imran ayat 191 berikut.

الَّذِيْنَ يَذْكُرُوْنَ اللّٰهَ قِيَامًا وَّقُعُوْدًا وَّعَلٰى جُنُوْبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُوْنَ فِيْ خَلْقِ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِۚ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هٰذَا بَاطِلًاۚ سُبْحٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ ١٩١ (اٰل عمران/3: 191)

Terjemah Kemenag 2019

191. (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri, duduk, atau dalam keadaan berbaring, dan memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata), "Ya Tuhan kami, tidaklah Engkau menciptakan semua ini sia-sia. Mahasuci Engkau. Lindungilah kami dari azab neraka.

(Ali 'Imran/3:191)

Jadi, apabila saat ini kita belum tahu tentang manfaat mempelajari materi turunan fungsi trigonometri secara langsung dalam kehidupan kita, ini dikarenakan pengetahuan kita yang sangat terbatas bila dibandingkan dengan ilmu Allah yang sangat luas.

Latihan 1

Kerjakan soal-soal latihan berikut di buku tugasmu!

Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi trigonometri berikut.

1. $f(x) = 2\sin x + \cos x$
2. $f(x) = \sin x - 3\tan x$
3. $f(x) = (2\sin x)(\cos x)$
4. $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x}$
5. $f(x) = \sin 4x - 5\cos 3x$
6. $f(x) = 3\sin(-5x)$
7. $f(x) = x^2 + \sin 4x$
8. $f(x) = 3x^4 \sin 5x$
9. $f(x) = \sin 2x \cos x$
10. $f(x) = \dfrac{\sin 5x}{x^2}$

Umpan Balik dan Tindak Lanjut

اَلْحَمْدُ لِلّٰهِ رَبِّ الْعٰلَمِيْنَ

Kita telah selesai mengerjakan Latihan 1. Selanjutnya, nilailah jawabanmu secara mandiri berdasarkan panduan penskoran yang telah tersedia. Cocokkan jawaban Latihan 1 dengan kunci jawaban yang tersedia di bagian akhir modul ini. Ukurlah tingkat penguasaan materi Kegiatan Belajar 1 dengan rumus:

$$\boxed{\text{Nilai} = \frac{\text{jumlah skor yang diperoleh}}{\text{skor total}} \times 100}$$

Jika:

a. Nilai ≥ 70, lanjut pelajari Kegiatan Belajar 2.

b. Nilai < 70, ulangi Kegiatan Belajar 1 (terutama pada bagian yang belum kalian kuasai dengan baik).

Jurnal Belajar untuk Refleksi Diri

Setelah mengerjakan Latihan 1 dan menilainya, isilah kolom berikut ini untuk mengetahui perkembangan dirimu!

Pertanyaan	Jawaban
1. Materi apa saja yang kamu pelajari hari ini?	
2. Apakah kamu bahagia dengan kegiatan belajar yang sudah terlaksana? Mengapa?	
3. Apa yang sudah kamu pahami dengan baik? Dan apa yang membuatmu berhasil memahaminya?	
4. Apa yang belum kamu pahami dengan baik? Menurut pendapatmu, apa yang membuatmu gagal memahami materi tersebut?	
5. Tindak Lanjut: **a. Jika hari ini sudah berhasil, upaya apa yang akan kamu lakukan untuk mempertahankannya?**	
b. Jika hari ini masih gagal, upaya apa yang akan kamu lakukan untuk memperbaikinya?	

Kegiatan Belajar 2

Turunan Fungsi Trigonometri Komposisi

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Tujuan Belajar

Setelah mengikuti Kegiatan Belajar 2, diharapkan siswa dapat:

4.3.1 Menentukan turunan fungsi trigonometri komposisi menggunakan aturan rantai.

Pertanyaan

Bagaimanakah cara untuk menentukan turunan dari fungsi trigonometri komposisi, seperti fungsi $y=\sin\left[g(x)\right]$, $y=\cos\left[g(x)\right]$, dst yang sudutnya berupa fungsi, serta fungsi $y=\sin^n\left[g(x)\right]$, $f(x)=\cos^n\left[g(x)\right]$, dst?

Fungsi komposisi merupakan fungsi yang dibentuk oleh beberapa fungsi pembentuk.

a. Fungsi $y=\sin\left[g(x)\right]$ merupakan fungsi trigonometri komposisi dengan dua fungsi pembentuk, yaitu fungsi $u=g(x)$ dan $y=\sin u$.

b. Fungsi $y=\sin^n\left[g(x)\right]$ merupakan fungsi trigonometri komposisi dengan tiga fungsi pembentuk, yaitu fungsi $u=g(x)$, $v=\sin u$, dan $y=v^n$.

Untuk menentukan turunan dari fungsi komposisi, kita dapat menggunakan **aturan rantai**.

Aturan Rantai

Aturan rantai digunakan untuk menentukan turunan dari fungsi komposisi. Banyaknya langkah untuk menurunkan fungsi komposisi ditentukan oleh jumlah fungsi yang membentuknya. Aturan rantai ditulis dalam notasi Leibniz.

a. Fungsi Komposisi dengan Dua Fungsi Pembentuk

Diketahui fungsi komposisi $y=f\left[g\left(x\right)\right]$, dengan $u=g\left(x\right)$ dan $y=f\left(u\right)$. Turunan dari fungsi $y=f\left[g\left(x\right)\right]$ terhadap variabel x adalah:

$$\boxed{y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

b. Fungsi Komposisi dengan Tiga Fungsi Pembentuk

Diketahui fungsi komposisi $y=f\left[g\left\{h\left(x\right)\right\}\right]$, dengan $u=h\left(x\right)$, $v=g\left(u\right)$, dan $y=f\left(v\right)$. Turunan dari fungsi $y=f\left[g\left\{h\left(x\right)\right\}\right]$ terhadap variabel x adalah:

$$\boxed{y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

Keterangan:

a. $\frac{dy}{dx}$: turunan fungsi y terhadap variabel x

b. $\frac{dy}{du}$: turunan fungsi y terhadap variabel u

c. $\frac{du}{dx}$: turunan fungsi u terhadap variabel x

d. $\frac{dy}{dv}$: turunan fungsi y terhadap variabel v

e. $\frac{dv}{du}$: turunan fungsi v terhadap variabel u

Kegiatan A
Menentukan turunan dari fungsi $y=\sin\left[g\left(x\right)\right]$.

Penyelesaian

Diketahui fungsi trigonometri komposisi $y=\sin\left[g\left(x\right)\right]$ yang dibentuk oleh dua fungsi, dengan $u=g\left(x\right)$ dan $y=\sin u$. Maka:

a. Untuk $u=g\left(x\right)\Rightarrow\dfrac{du}{dx}=g'\left(x\right)$

b. Untuk $y=\sin u\Rightarrow\dfrac{dy}{du}=\cos u$

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$\begin{aligned}y'&=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=\cos u\cdot g'\left(x\right)\\&=g'\left(x\right)\cos\left[g\left(x\right)\right]\end{aligned}$$

Jadi, turunan dari fungsi $y=\sin\left[g\left(x\right)\right]$ adalah $y'=g'\left(x\right)\cos\left[g\left(x\right)\right]$.

Contoh 2.1

Tentukan turunan dari fungsi $f\left(x\right)=2\cos\left(x^2+3x\right)$.

Penyelesaian

Diketahui fungsi $f\left(x\right)=2\cos\left(x^2+3x\right)$ yang dibentuk oleh dua fungsi, yaitu $u=\left(x^2+3x\right)$ dan $y=f\left(u\right)=2\cos u$. Maka:

a. Untuk $u=\left(x^2+3x\right)\Rightarrow\dfrac{du}{dx}=2x+3$

b. Untuk $y=2\cos u\Rightarrow\dfrac{dy}{du}=-2\sin u$

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= -2\sin u\left(2x+3\right) \\ &= \left(-4x-6\right)\sin\left(x^2+3x\right) \end{aligned}$$

Jadi, turunan dari fungsi $f\left(x\right)=2\cos\left(x^2+3x\right)$ adalah $f'\left(x\right)=\left(-4x-6\right)\sin\left(x^2+3x\right)$.

Kegiatan B

Menentukan turunan dari fungsi $y=\cos^n\left[g\left(x\right)\right]$.

Penyelesaian

Diketahui fungsi trigonometri komposisi $y=\cos^n\left[g\left(x\right)\right]$ yang dibentuk oleh tiga fungsi, yaitu $u=g\left(x\right)$, $v=\cos u$, dan $y=v^n$. Maka:

a. Untuk $u=g\left(x\right)\Rightarrow\dfrac{du}{dx}=g'\left(x\right)$

b. Untuk $v=\cos u\Rightarrow\dfrac{dv}{du}=-\sin u=-\sin\left[g\left(x\right)\right]$

c. Untuk $y=v^n\Rightarrow\dfrac{dy}{dv}=nv^{n-1}=n\cos^{n-1}u=n\cos^{n-1}\left[g\left(x\right)\right]$

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \left(n \cos^{n-1}\left[g(x)\right]\right)\left(-\sin\left[g(x)\right]\right)\left[g'(x)\right]$$

$$= -ng'(x)\sin\left[g(x)\right]\cos^{n-1}\left[g(x)\right]$$

Jadi, turunan dari fungsi $y = \cos^n\left[g(x)\right]$ adalah $y' = -ng'(x)\sin\left[g(x)\right]\cos^{n-1}\left[g(x)\right]$.

Contoh 2.2

Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = 3\tan^4\left(x^2 - 4x\right)$.

Penyelesaian

Diketahui fungsi $f(x) = 3\tan^4\left(x^2 - 4x\right)$ yang dibentuk oleh tiga fungsi, dengan $u = x^2 - 4x$, $v = \tan u$, dan $y = 3v^4$. Maka:

a. Untuk $u = x^2 - 4x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x - 4$

b. Untuk $v = \tan u \Rightarrow \frac{dv}{du} = \sec^2 u = \sec^2\left(x^2 - 4x\right)$

c. Untuk $y = 3v^4 \Rightarrow \frac{dy}{dv} = 12v^3 = 12\tan^3 u = 12\tan^3\left(x^2 - 4x\right)$

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \left[12\tan^3\left(x^2 - 4x\right)\right]\left[\sec^2\left(x^2 - 4x\right)\right](2x - 4)$$

$$= 12(2x - 4)\sec^2\left(x^2 - 4x\right)\tan^3\left(x^2 - 4x\right)$$

$$= (24x - 48)\sec^2\left(x^2 - 4x\right)\tan^3\left(x^2 - 4x\right)$$

Jadi, turunan dari fungsi $f(x)=3\tan^4\left(x^2-4x\right)$ adalah $f'(x)=(24x-48)\sec^2\left(x^2-4x\right)\tan^3\left(x^2-4x\right)$.

Pengayaan Materi
Untuk memperjelas pemahaman kalian tentang cara memperoleh turunan fungsi trigonometri komposisi, kalian dapat mengakses video pembelajaran dengan alamat: https://m.youtube.com/watch?v=O3f6cwynTXQ dan https://m.youtube.com/watch?v=pV8idULzfko

Kolom Unity of Sciences

Di saat kita merasakan kesulitan, baik dalam mempelajari materi turunan fungsi trigonometri maupun dalam kehidupan, ingatlah bahwa semua orang pasti mempunyai masalah. Dan orang yang beruntung adalah orang-orang yang bersabar.
Siapakah yang dimaksud dengan orang yang bersabar itu? Yaitu orang yang mengucapkan kalimat *inna lillahi wa inna ilaihi roji'un*.

وَلَنَبْلُوَنَّكُمْ بِشَيْءٍ مِّنَ الْخَوْفِ وَالْجُوْعِ وَنَقْصٍ مِّنَ الْاَمْوَالِ وَالْاَنْفُسِ

وَالثَّمَرٰتِۗ وَبَشِّرِ الصّٰبِرِيْنَ ۝١٥٥ اَلَّذِيْنَ اِذَآ اَصَابَتْهُمْ مُّصِيْبَةٌ ۗ قَالُوْٓا اِنَّا

لِلّٰهِ وَاِنَّآ اِلَيْهِ رٰجِعُوْنَۗ ۝١٥٦ (البقرة/2: 155-156)

Terjemah Kemenag 2019
155. Kami pasti akan mengujimu dengan sedikit ketakutan dan kelaparan, kekurangan harta, jiwa, dan buah-buahan. Sampaikanlah (wahai Nabi Muhammad,) kabar gembira kepada orang-orang sabar,
156. (yaitu) orang-orang yang apabila ditimpa musibah, mereka mengucapkan "Innā lillāhi wa innā ilaihi rāji'ūn" (sesungguhnya kami adalah milik Allah dan sesungguhnya hanya kepada-Nya kami akan kembali).
(Al-Baqarah/2:155-156)

Latihan 2

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu!

Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut ini.

1. $y = \cos\left(2x + x^3\right)$
2. $y = \sin^2\left(x^2 + 2x\right)$
3. $y = \sqrt{\sec x^2}$
4. $y = \sin^3 2x$
5. $y = -\cos\left(x^2 - 4x + 1\right)$
6. $y = \sin^3 x$
7. $y = \tan^2 x$
8. $y = \sin\left(3x^2\right)$
9. $y = \csc\left(8x^5 + 3x^2 - x\right)$
10. $y = \cot^3\left(x^2 + 3x - 1\right)$

Umpan Balik dan Tindak Lanjut

اَلْحَمْدُ لِلّٰهِ رَبِّ الْعٰلَمِيْنَ

Kita telah selesai mengerjakan Latihan 2. Selanjutnya, nilailah jawabanmu secara mandiri berdasarkan panduan penskoran yang telah tersedia. Cocokkan jawaban Latihan 2 dengan kunci jawaban yang tersedia di bagian akhir modul ini. Ukurlah tingkat penguasaan materi Kegiatan Belajar 2 dengan rumus:

$$\boxed{\text{Nilai} = \frac{\text{jumlah skor yang diperoleh}}{\text{skor total}} \times 100}$$

Jika:

a. Nilai ≥ 70, lanjut pelajari Kegiatan Belajar 3.

b. Nilai < 70, ulangi Kegiatan Belajar 2 (terutama pada bagian yang belum kalian kuasai dengan baik).

Jurnal Belajar untuk Refleksi Diri

Setelah mengerjakan Latihan 2 dan menilainya, isilah kolom berikut ini untuk mengetahui perkembangan dirimu!

Pertanyaan	Jawaban
1. Materi apa saja yang kamu pelajari hari ini?	
2. Apakah kamu bahagia dengan kegiatan belajar yang sudah terlaksana? Mengapa?	
3. Apa yang sudah kamu pahami dengan baik? Dan apa yang membuatmu berhasil memahaminya?	
4. Apa yang belum kamu pahami dengan baik? Menurut pendapatmu, apa yang membuatmu gagal memahami materi tersebut?	
5. Tindak Lanjut: **a. Jika hari ini sudah berhasil, upaya apa yang akan kamu lakukan untuk mempertahankannya?**	
b. Jika hari ini masih gagal, upaya apa yang akan kamu lakukan untuk memperbaikinya?	

Kegiatan Belajar 3

Turunan Lanjutan Fungsi Trigonometri

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Tujuan Belajar

Setelah mengikuti Kegiatan Belajar 3, diharapkan siswa dapat:

4.3.2 Menentukan turunan lanjutan (turunan kedua, ketiga, dst) dari fungsi trigonometri.

Pertanyaan

Bagaimanakah cara untuk menentukan turunan keempat dari suatu fungsi trigonometri?

Fungsi trigonometri dapat diturunkan lebih dari satu kali. Simak penjelasan berikut ini.

Turunan Lanjutan atau Turunan Tingkat Tinggi

Sebuah fungsi $y = f(x)$ dapat diturunkan lebih dari satu kali. Turunan kedua, ketiga, keempat dan seterusnya dari fungsi $y = f(x)$ dinamakan **turunan lanjutan** atau **turunan tingkat tinggi** dari $y = f(x)$.

Untuk menentukan turunan keempat dari suatu fungsi, kita harus mencari turunan pertama, turunan kedua, dan turunan ketiga terlebih dahulu.

Misalkan diketahui fungsi trigonometri $y = f(x)$.

a. Turunan pertama, diturunkan dari fungsi awal $y = f(x)$, yaitu $y' = f'(x)$.

b. Turunan kedua, diturunkan dari fungsi turunan pertama $y' = f'(x)$, yaitu $y'' = f''(x)$.

c. Turunan ketiga, diturunkan dari fungsi turunan kedua $y'' = f''(x)$, yaitu $y''' = f'''(x)$.

d. Turunan keempat, diturunkan dari fungsi turunan ketiga $y''' = f'''(x)$, yaitu $y^{(4)} = f^{(4)}(x)$.

e. Dan seterusnya sampai turunan ke-n, ditulis $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$.

Contoh 3.1

Tentukan turunan kelima dari fungsi $f(x) = \sin 2x$.

Penyelesaian

Diketahui fungsi $f(x) = \sin 2x$. Maka:

Fungsi Awal	$f(x) = \sin 2x$
Turunan pertama	$f'(x) = 2\cos 2x$
Turunan kedua	$f''(x) = 2(-2\sin 2x) = -4\sin 2x$
Turunan ketiga	$f'''(x) = 2(-4\cos 2x) = -8\cos 2x$
Turunan keempat	$f^{(4)}(x) = 2(8\sin 2x) = 16\sin 2x$
Turunan kelima	$f^{(5)}(x) = 2(16\cos 2x) = 32\cos 2x$

Jadi, turunan kelima dari fungsi $f(x) = \sin 2x$ adalah $f^{(5)}(x) = 32\cos 2x$.

Info: Penyelesaian Limit Fungsi Trigonometri dengan Turunan (Dalil L'Hopital)

Dalil L'Hopital merupakan salah satu bentuk penerapan turunan lanjutan fungsi trigonometri.

Untuk menentukan nilai $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ yang menghasilkan bentuk tak tentu, yaitu $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$, kita dapat menggunakan dalil L'Hopital, yaitu:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\ldots}$$

Proses penurunan fungsi dilanjutkan hingga nilai limitnya tidak lagi berbentuk tak tentu. Jika nilai limitnya bukan $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$ lagi, maka proses penurunan fungsi selesai.

Contoh 3.2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x+\sin 2x}{3x\cos x}=\ldots$$

Penyelesaian

Limit tersebut berbentuk limit tak tentu. Kita akan mencari nilai limitnya menggunakan dalil L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x+\sin 2x}{3x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos 4x+2\cos 2x}{3\cos x-3x\sin x}=\frac{4\cos 4(0)+2\cos 2(0)}{3\cos(0)-3(0)\sin(0)}$$

$$=\frac{4\cos 0+2\cos 0}{3\cos 0-0}=\frac{4(1)+2(1)}{3(1)}=\frac{6}{3}=2$$

Jadi, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x+\sin 2x}{3x\cos x}=2$

Kolom Unity of Sciences

Kita telah mengetahui bahwa kita dapat mencari turunan lanjutan dari suatu fungsi trigonometri, seperti turunan kedua, ketiga, dan seterusnya.

Sama seperti turunan fungsi, manusia pun melewati fase kehidupan yang bertingkat-tingkat, yaitu mulai dari mati lalu dihidupkan kembali, kemudian menyaksikan keadaan-keadaan di hari kiamat. Seperti firman Allah dalam Surat Al-Insyiqaq ayat 19-20 berikut:

لَتَرۡكَبُنَّ طَبَقًا عَنۡ طَبَقٍۗ ﴿١٩﴾ فَمَا لَهُمۡ لَا يُؤۡمِنُوۡنَۙ ﴿٢٠﴾ (الانشقاق/84:

(20-19

Terjemah Kemenag 2019

19. Sungguh, kamu benar-benar akan menjalani tingkat demi tingkat (dalam kehidupan).(752)

20. Maka, mengapa mereka tidak mau beriman?

(Al-Insyiqaq/84:19-20)

(752) Yang dimaksud dengan tingkat demi tingkat adalah perkembangan dari setetes mani menuju kelahiran, kanak-kanak, remaja, dewasa, dan tua atau perkembangan dari hidup menuju mati, kemudian dibangkitkan kembali.

Yuk, perbaiki iman dan perilaku kita agar kita semua selamat di hari akhir kelak, aamiin.

Latihan 3

Diketahui fungsi $f(x) = \cos 4x$. Tentukan:

1. Turunan pertama dari fungsi $f(x)$
2. Turunan kedua dari fungsi $f(x)$
3. Turunan ketiga dari fungsi $f(x)$
4. Turunan keempat dari fungsi $f(x)$
5. Turunan kelima dari fungsi $f(x)$

Umpan Balik dan Tindak Lanjut

اَلْحَمْدُ لِلّٰهِ رَبِّ الْعٰلَمِيْنَ

Kita telah selesai mengerjakan Latihan 3. Selanjutnya, nilailah jawabanmu secara mandiri berdasarkan panduan penskoran yang telah tersedia. Cocokkan jawaban Latihan 3 dengan kunci jawaban yang tersedia di bagian akhir modul ini. Ukurlah tingkat penguasaan materi Kegiatan Belajar 3 dengan rumus:

$$\boxed{\text{Nilai} = \frac{\text{jumlah skor yang diperoleh}}{\text{skor total}} \times 100}$$

Jika:

a. Nilai ≥ 70, lanjut mengerjakan Uji Kompetensi Bab I Turunan Fungsi Trigonometri.

b. Nilai < 70, ulangi Kegiatan Belajar 3 (terutama pada bagian yang belum kalian kuasai dengan baik).

Jurnal Belajar untuk Refleksi Diri

Setelah selesai mengerjakan Latihan 3 dan menilainya, isilah kolom berikut ini untuk mengetahui perkembangan dirimu!

Pertanyaan	Jawaban
1. Materi apa saja yang kamu pelajari hari ini?	
2. Apakah kamu bahagia dengan kegiatan belajar yang sudah terlaksana? Mengapa?	
3. Apa yang sudah kamu pahami dengan baik? Dan apa yang membuatmu berhasil memahaminya?	
4. Apa yang belum kamu pahami dengan baik? Menurut pendapatmu, apa yang membuatmu gagal memahami materi tersebut?	
5. Tindak Lanjut: **a. Jika hari ini sudah berhasil, upaya apa yang akan kamu lakukan untuk mempertahankannya?**	
b. Jika hari ini masih gagal, upaya apa yang akan kamu lakukan untuk memperbaikinya?	

Rangkuman

1. Turunan fungsi trigonometri dapat dicari menggunakan definisi turunan fungsi, sifat-sifat turunan fungsi, dan aturan rantai.
2. Definisi turunan fungsi:

   Turunan dari fungsi $y = f(x)$ didefinisikan dengan:

   $$\boxed{y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

   Syarat: Jika nilai limitnya ada dan bukan ∞ atau $-\infty$.
3. Secara geometris, turunan fungsi dapat diartikan sebagai:
   a. Kemiringan garis singgung,
   b. Laju perubahan benda
   c. Kecepatan sesaat

   Jadi, apabila ada permasalahan yang berkaitan dengan laju perubahan, kita bisa menyelesaikannya dengan turunan fungsi.
4. Sifat-sifat turunan fungsi:
   a. Jika fungsi $y = u + v$, maka $y' = u' + v'$.
   b. Jika fungsi $y = u - v$, maka $y' = u' - v'$.
   c. Jika fungsi $y = uv$, maka $y' = u'v + uv'$.
   d. Jika fungsi $y = \frac{u}{v}$ dengan $v \neq 0$, maka $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
5. Rumus turunan fungsi trigonometri dasar:
   a. $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$
   b. $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$
   c. $y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x$
   d. $y = \cot x \Rightarrow y' = -\csc^2 x$

e. $y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \tan x$

f. $y = \csc x \Rightarrow y' = -\csc x \cot x$

6. Rumus turunan fungsi trigonometri sederhana yang diperoleh berdasarkan definisi turunan dan sifat-sifat turunan fungsi, yaitu:
   a. $y = \sin ax \Rightarrow y' = a\cos ax$
   b. $y = \cos ax \Rightarrow y' = -a\sin ax$
   c. $y = \tan ax \Rightarrow y' = a\sec^2 ax$
   d. $y = \cot ax \Rightarrow y' = -a\csc^2 ax$
   e. $y = \sec ax \Rightarrow y' = a\sec ax \tan ax$
   f. $y = \csc ax \Rightarrow y' = -a\csc ax \cot ax$
7. Aturan rantai dapat digunakan untuk menentukan turunan fungsi komposisi. Banyaknya langkah untuk menurunkan fungsi komposisi ditentukan oleh jumlah fungsi yang membentuknya. Aturan rantai ditulis dalam notasi Leibniz.
   a. Fungsi Komposisi dengan Dua Fungsi Pembentuk

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

   b. Fungsi Komposisi dengan Tiga Fungsi Pembentuk

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

8. Beberapa rumus turunan fungsi trigonometri yang sudutnya berupa fungsi (diperoleh menggunakan aturan rantai):
   a. $f(x) = \sin[g(x)] \Rightarrow f'(x) = g'(x)\cos[g(x)]$
   b. $f(x) = \cos[g(x)] \Rightarrow f'(x) = -g'(x)\sin[g(x)]$
   c. $f(x) = \tan[g(x)] \Rightarrow f'(x) = g'(x)\sec^2[g(x)]$
   d. $f(x) = \cot[g(x)] \Rightarrow f'(x) = -g'(x)\csc^2[g(x)]$

e. $f(x)=\sec\left[g(x)\right]\Rightarrow f'(x)=g'(x)\sec\left[g(x)\right]\tan\left[g(x)\right]$

f. $f(x)=\csc\left[g(x)\right]\Rightarrow f'(x)=-g'(x)\csc\left[g(x)\right]\cot\left[g(x)\right]$

Catatan: besar sudut **akan selalu tetap** meskipun fungsi diturunkan.

9. Beberapa rumus turunan fungsi trigonometri berpangkat yang sudutnya berupa fungsi (diperoleh mengggunakan aturan rantai):

a. $f(x)=\sin^n\left[g(x)\right]\Rightarrow f'(x)=ng'(x)\cos\left[g(x)\right]\sin^{n-1}\left[g(x)\right]$

b. $f(x)=\cos^n\left[g(x)\right]\Rightarrow f'(x)=-ng'(x)\sin\left[g(x)\right]\cos^{n-1}\left[g(x)\right]$

c. $f(x)=\tan^n\left[g(x)\right]\Rightarrow f'(x)=ng'(x)\sec^2\left[g(x)\right]\tan^{n-1}\left[g(x)\right]$

d. $f(x)=\cot^n\left[g(x)\right]\Rightarrow f'(x)=-ng'(x)\csc^2\left[g(x)\right]\cot^{n-1}\left[g(x)\right]$

e. $f(x)=\sec^n\left[g(x)\right]\Rightarrow f'(x)=ng'(x)\sec^n\left[g(x)\right]\tan\left[g(x)\right]$

f. $f(x)=\csc^n\left[g(x)\right]\Rightarrow f'(x)=-ng'(x)\csc^n\left[g(x)\right]\cot\left[g(x)\right]$

Catatan: besar sudut **akan selalu tetap** meskipun fungsi diturunkan.

10. Fungsi trigonometri dapat diturunkan lebih dari satu kali. Turunan kedua, turunan ketiga, turunan keempat, dan seterusnya dari suatu fungsi dinamakan turunan lanjutan atau turunan tingkat tinggi.

11. Dalil L'Hopital merupakan salah satu cara untuk mencari limit fungsi trigonometri yang berbentuk tak tentu. Dalil L'Hopital menerapkan prinsip turunan lanjutan suatu fungsi.

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'''(a)}{g'''(a)}=\ldots}$$

Proses penurunan akan berhenti jika nilai limitnya tidak menghasilkan bentuk tak tentu lagi.

Info Aplikasi: Mencari Turunan Fungsi Trigonometri

Setelah kita belajar tentang cara-cara mencari turunan suatu fungsi trigonometri, ternyata kita bisa mencari turunan fungsi trigonometri dengan bantuan aplikasi di android. Salah satu aplikasi yang dapat membantu kita mencari turunan suatu fungsi adalah aplikasi *Derivatives Calculator* yang dapat kamu unduh secara gratis di Google Playstore.

Namun sebaiknya, gunakan aplikasi tersebut hanya untuk membantu kita dalam memeriksa hasil penurunan fungsi yang sudah kita lakukan secara manual.

Uji Kompetensi Bab I

Turunan Fungsi Trigonometri

Petunjuk

- Kerjakan Uji Kompetensi Bab I ini untuk mengetahui tingkat penguasaanmu, baik pilihan ganda maupun uraian.
- Setelah selesai, bandingkan hasilnya dengan kunci jawaban yang tersedia dan berilah skor.
- Nilailah sendiri hasil pekerjaanmu sesuai dengan panduan penskoran yang ada.

A. Pilihan Ganda

1. Jika $f(x) = -2\cos x$, maka $f'(x) = \ldots$

   a. $2\sin x$
   b. $-2\sin x$
   c. $2\sin 2x$
   d. $-2\cos 2x$
   e. $-2\sin 2x$

2. Turunan pertama dari $f(x) = 4\sin x + 5\cos x$ adalah ...

   a. $f'(x) = 4\cos x - 5\cos x$
   b. $f'(x) = -4\cos x + 5\sin x$
   c. $f'(x) = -4\cos x - 5\sin x$
   d. $f'(x) = 4\cos x - 5\sin x$
   e. $f'(x) = -4\sin x + 5\cos x$

3. Jika $y = x^2 \sin 3x$, maka $\dfrac{dy}{dx} = \ldots$

   a. $2x\sin 3x + 2x^2 \cos x$
   b. $2x\sin 3x + 3x^2 \cos 3x$
   c. $2x\sin x + 3x^2 \cos x$
   d. $3x\cos 3x + 2x^2 \sin x$
   e. $2x^2 \cos x + 3x\sin 3x$

4. Jika $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}$, dengan $\sin x \neq 0$ dan $f'(x)$ adalah turunan pertama dari fungsi $f(x)$, maka $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ldots$

   a. -2
   b. -1
   c. 0
   d. 1
   e. 2

5. Turunan pertama fungsi $y=\cos\left(2x^3-x^2\right)$ adalah $y'=\ldots$

   a. $\sin\left(2x^3-x^2\right)$
   b. $-\sin\left(2x^3-x^2\right)$
   c. $\left(6x^2-2x\right)\cos\left(2x^3-x^2\right)$
   d. $\left(6x^2-2x\right)\sin\left(2x^3-x^2\right)$
   e. $-\left(6x^2-2x\right)\sin\left(2x^3-x^2\right)$

6. Turunan pertama dari fungsi $f(x)=(3x-2)\sin(2x+1)$ adalah $f'(x)=\ldots$

   a. $3\sin(2x+1)+(6x-4)\cos(2x+1)$
   b. $3\sin(2x+1)-(6x-4)\cos(2x+1)$
   c. $3\sin(2x+1)+(3x-2)\cos(2x+1)$
   d. $3x\sin(2x+1)+(6x-4)\cos(2x+1)$
   e. $3x\sin(2x+1)-(6x-4)\cos(2x+1)$

7. Diketahui fungsi $f(x)=\sin^2(2x+3)$. Turunan pertama dari fungsi $f(x)$ adalah $f'(x)=\ldots$

   a. $4\sin(2x+3)\cos(2x+3)$
   b. $-2\sin(2x+3)\cos(2x+3)$
   c. $2\sin(2x+3)\cos(2x+3)$
   d. $-4\sin(2x+3)\cos(2x+3)$
   e. $\sin(2x+3)\cos(2x+3)$

8. Diketahui fungsi $f(x)=\sin^3(3-2x)$. Turunan pertama dari fungsi $f(x)$ adalah $f'(x)=\ldots$

a. $6\sin^2(3-2x)\cos(3-2x)$

b. $3\sin^2(3-2x)\cos(3-2x)$

c. $-2\sin^2(3-2x)\cos(3-2x)$

d. $-6\sin(3-2x)\cos(6-4x)$

e. $-3\sin(3-2x)\sin(6-4x)$

9. Turunan pertama dari fungsi $f(x)=\cos^3(3-2x)$ adalah $f'(x)=\ldots$

a. $-3\cos^2(3-2x)\sin(3-2x)$

b. $3\cos^2(3-2x)\sin(3-2x)$

c. $-6\cos(3-2x)\sin(3-2x)$

d. $-3\cos(3-2x)\sin(6-4x)$

e. $3\cos(3-2x)\sin(6-4x)$

10. Turunan ketiga dari fungsi $f(x)=5\sin 2x$ adalah $f'''(x)=\ldots$

a. $10\cos 2x$

b. $-20\sin 2x$

c. $20\sin 2x$

d. $-40\cos 2x$

e. $40\cos 2x$

B. Uraian

1. Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)=(5x-2)\cos(3x+1)$.
2. Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)=\dfrac{\cos 3x}{x}$.
3. Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)=7\cos(5-3x)$.
4. Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)=\sin^3(x^2+2x)$.
5. Tentukan turunan kedua dari fungsi $f(x)=x^3-5\sin x$.

Penutup

Panduan penilaian:

$$\boxed{\text{Nilai} = \frac{\text{jumlah skor yang diperoleh}}{\text{skor total}} \times 100}$$

Kriteria kelulusan:

a. Jika nilai kalian mencapai 70 ke atas, lanjutkan ke materi selanjutnya (Bab II Penerapan Turunan Fungsi Trigonometri).
b. Jika nilai kalian di bawah 70, pelajari kembali Bab I Turunan Fungsi Trigonometri (khususnya bagian yang kurang dipahami) dan kerjakan kembali Uji Kompetensi Bab I.

اَلْحَمْدُ لِلّٰهِ رَبِّ الْعٰلَمِيْنَ

Demikianlah materi tentang konsep turunan fungsi trigonometri dan cara-cara yang digunakan untuk memperoleh turunan fungsi trigonometri.

Selanjutnya, kita akan belajar tentang penerapan turunan pertama fungsi dan kedua fungsi trigonometri dalam Bab II Penerapan Turunan Fungsi Trigonometri.

Kolom Muhasabah

Pengalaman adalah guru terbaik. Namun, pengalaman itu tidak akan berarti jika pengalaman tersebut tidak direfleksikan. Gunakan pengalaman di masa lalu untuk memperbaiki saat ini dan esok hari. Karena manusia yang beruntung adalah dia yang lebih baik dari kemarin.

يٰٓاَيُّهَا الَّذِيْنَ اٰمَنُوا اتَّقُوا اللّٰهَ وَلْتَنْظُرْ نَفْسٌ مَّا قَدَّمَتْ لِغَدٍۚ وَاتَّقُوا اللّٰهَ ۗاِنَّ اللّٰهَ خَبِيْرٌ ۢبِمَا تَعْمَلُوْنَ ۝١٨ (الحشر/59: 18)

Terjemah Kemenag 2019
18. Wahai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan hendaklah setiap orang memperhatikan apa yang telah diperbuatnya untuk hari esok (akhirat). Bertakwalah kepada Allah. Sesungguhnya Allah Mahateliti terhadap apa yang kamu kerjakan.
(Al-Hasyr/59:18)

Oleh karena itu, berusahalah selalu untuk menjadi pribadi yang lebih baik dari hari kemarin.

BAB II

Penerapan Turunan Fungsi Trigonometri

Gambar 2.10. Ketinggian air laut pada waktu tertentu dapat dihitung menggunakan turunan fungsi trigonometri.

Salah satu penerapan fungsi trigonometri dalam kehidupan nyata adalah untuk mendeteksi ketinggian air laut di bidang oseanografi. Mengapa? Karena ketinggian air laut pada waktu tertentu dapat disajikan dalam bentuk grafik fungsi trigonometri. Dengan demikian, kita dapat menentukan ketinggian maksimum air laut dengan melihat grafik fungsi tersebut, ataupun menggunakan turunan fungsi trigonometrinya.

Pada Bab II Penerapan Turunan Fungsi Trigonometri, kita akan belajar tentang penerapan turunan pertama fungsi trigonometri, yaitu untuk mencari:

1. Gradien/kemiringan garis singgung kurva fungsi trigonometri,
2. Nilai stasioner dan titik stasioner fungsi trigonometri,
3. Selang kemonotonan fungsi trigonometri,
4. Nilai maksimum dan nilai minimum fungsi trigonometri,
5. Jenis titik stasioner fungsi trigonometri,
6. Titik belok fungsi trigonometri, dan
7. Kecekungan kurva fungsi trigonometri.

Kemampuan dasar minimal yang harus kalian miliki sebelum mempelajari Bab II Penerapan Turunan Fungsi Trigonometri antara lain:
1. Nilai fungsi trigonometri pada sudut tertentu
2. Turunan fungsi trigonometri

A. Kompetensi Dasar

Setelah mempelajari Bab II Penerapan Turunan Pertama Turunan Fungsi Trigonometri, diharapkan siswa dapat:

3.4 Menjelaskan keberkaitanan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, dan selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung, serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.

4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, dan kemiringan garis singgung serta titik belok dan kecekungan kurva fungsi trigonometri.

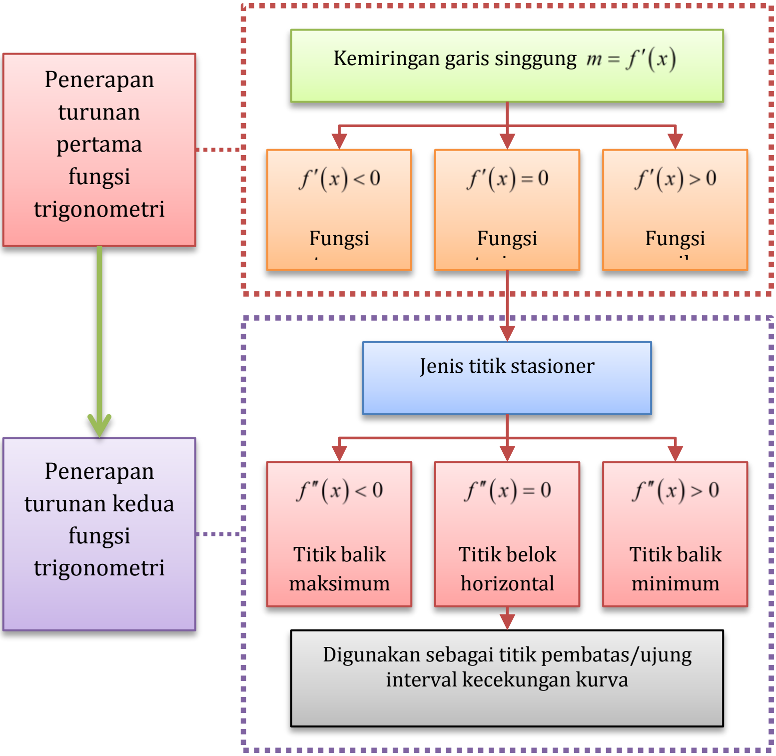
B. Indikator Ketuntasan Belajar

3.4.1 Menjelaskan hubungan turunan pertama fungsi dengan gradien/kemiringan garis singgung kurva fungsi trigonometri.

3.4.2 Menjelaskan hubungan turunan pertama fungsi dengan titik stasioner dan nilai stasioner fungsi trigonometri.
3.4.3 Menjelaskan hubungan turunan pertama fungsi dengan selang kemonotonan fungsi trigonometri.
3.4.4 Menjelaskan hubungan turunan kedua fungsi dengan titik belok kurva fungsi trigonometri.
3.4.5 Menjelaskan hubungan turunan kedua fungsi dengan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.
4.4.1 Menentukan gradien/kemiringan garis singgung kurva fungsi trigonometri menggunakan turunan pertama fungsi trigonometri.
4.4.2 Menentukan nilai stasioner dan titik stasioner fungsi trigonometri menggunakan turunan pertama fungsi trigonometri.
4.4.3 Menentukan selang/interval saat fungsi trigonometri monoton naik menggunakan turunan pertama fungsi trigonometri.
4.4.4 Menentukan selang/interval saat fungsi trigonometri monoton turun menggunakan turunan pertama fungsi trigonometri.
4.4.5 Menentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi trigonometri.
4.4.6 Menentukan jenis titik stasioner fungsi trigonometri menggunakan uji turunan pertama.
4.4.7 Menentukan jenis titik stasioner fungsi trigonometri menggunakan uji turunan kedua.
4.4.8 Menentukan titik belok kurva fungsi trigonometri menggunakan turunan kedua fungsi trigonometri.
4.4.9 Menentukan selang/interval saat kurva fungsi trigonometri cekung ke atas menggunakan turunan kedua fungsi trigonometri.

4.4.10 Menentukan selang/interval saat kurva fungsi trigonomteri cekung ke bawah menggunakan turunan kedua fungsi trigonometri.

C. Peta Konsep



Gambar 2.11 Peta konsep materi penerapan turunan fungsi trigonometri

Kegiatan Belajar 1

Kemiringan Garis Singgung Kurva Fungsi Trigonometri

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Tujuan Belajar

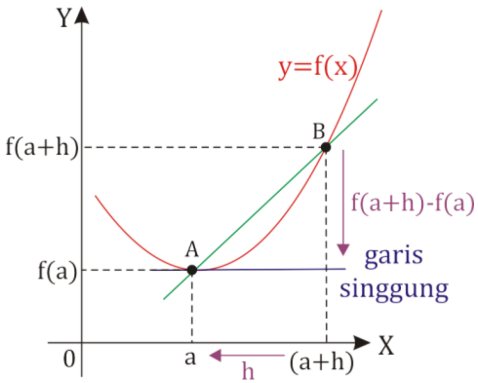
Setelah mengikuti Kegiatan Belajar 1, diharapkan siswa dapat:

3.3.1 Menjelaskan hubungan turunan pertama fungsi dengan gradien/kemiringan garis singgung kurva fungsi trigonometri.

4.4.1 Menentukan gradien/kemiringan garis singgung kurva fungsi trigonometri menggunakan turunan pertama fungsi trigonometri.

Pertanyaan:
Bagaimanakah cara untuk menentukan kemiringan garis singgung kurva fungsi trigonometri di satu titik?

Garis singgung adalah garis yang menyinggung kurva di satu titik. Untuk mencari kemiringan garis singgung kurva di suatu titik, perhatikan gambar berikut.



Gambar 2.12 Kemiringan garis singgung kurva dapat dihitung menggunakan turunan fungsi

Berdasarkan Gambar 2.3, kemiringan garis singgung kurva fungsi $y = f(x)$ di titik $A(a, f(a))$ dapat kita rumuskan dengan:

$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)}$$

Jadi, kita dapat menggunakan turunan pertama fungsi untuk mencari kemiringan garis singgung kurva di suatu titik.

Gradien Garis Singgung Kurva Fungsi Trigonometri

Gradien/kemiringan garis singgung kurva fungsi trigonometri $y = f(x)$ di titik dengan absis $x = x_1$ adalah:

$$\boxed{m = f'(x_1)}$$

Keterangan:
$f'(x)$ adalah turunan pertama dari fungsi $y = f(x)$

Contoh 1.1

Tentukan kemiringan garis singgung kurva fungsi $y = \sin x$ pada titik dengan $x = 90°$.

Penyelesaian

$y = f(x) = \sin x \Rightarrow y' = f'(x) = \cos x$

Gradien garis singgung kurva saat $x = 90°$ adalah:

$x = 90° \Rightarrow m = f'(90°) = \cos(90°) = 0$

Jadi, kemiringan garis singgung kurva fungsi $y = \sin x$ saat $x = 90°$ adalah $m = 0$.

Contoh 1.2

Permukaan air laut pada suatu waktu dapat dirumuskan dalam fungsi $f(x) = \sin x$. Tentukan kemiringan kapal yang berada di permukaan air laut tersebut pada saat $x = 60°$.

Penyelesaian

Kita akan mencari kemiringan kapal pada permukaan air laut merupakan garis singgung.

$y = f(x) = \sin x \Rightarrow y' = f'(x) = \cos x$

Gradien garis singgung kurva saat $x = 60°$ adalah:

$$x = 60° \Rightarrow m = f'(60°) = \cos(60°) = \frac{1}{2}$$

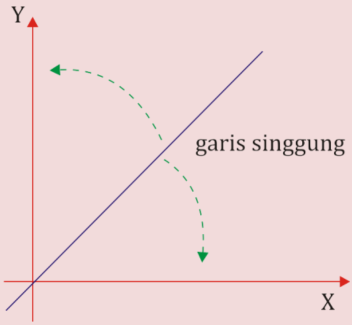
Jadi, kemiringan kapal tersebut saat $x = 60°$ adalah $m = \frac{1}{2}$.

Pengayaan Materi

Untuk memperjelas pemahaman kalian tentang cara menentukan kemiringan garis singgung kurva fungsi trigonometri, kalian dapat mengakses video pembelajaran dengan alamat:
https://m.youtube.com/watch?v=q0qstWXY6bM

Kolom Unity of Sciences

Keadaan iman seseorang yang selalu naik turun dapat digambarkan seperti kurva fungsi trigonometri.
Misalkan garis singgung kurva fungsi trigonometri di suatu titik pada kurva tersebut dapat menggambarkan ketaatan seseorang kepada Allah. Hubungan antara besarnya nilai gradien/kemiringan garis singgung terhadap bentuk garis tersebut secara geometris dapat digambarkan dengan:



Gambar 2.13 Kemiringan suatu garis

Dari gambar 2.4, kita dapatkan bahwa:
1. Jika kemiringan garis semakin besar nilainya (mendekati $+\infty$, atau $-\infty$), maka bentuk garis tersebut akan semakin mendekati sumbu Y (semakin tegak).
2. Jika kemiringan garis semakin kecil nilainya (mendekati nilai 0), maka garis tersebut akan semakin menjauhi sumbu Y (semakin datar).

Maka dari itu, jika kita ingin semakin dekat dengan Allah, maka kita harus semakin taat kepada Allah dengan beriman kepada-Nya dan memperbanyak/memperbagus amal shalih kita, sebagaimana firman Allah dalam Al-Qur’an Surat Saba’ ayat 37 berikut.

وَمَآ اَمْوَالُكُمْ وَلَآ اَوْلَادُكُمْ بِالَّتِيْ تُقَرِّبُكُمْ عِنْدَنَا زُلْفٰىٓ اِلَّا مَنْ اٰمَنَ
وَعَمِلَ صَالِحًاۙ فَاُولٰۤىِٕكَ لَهُمْ جَزَاۤءُ الضِّعْفِ بِمَا عَمِلُوْا وَهُمْ فِى
الْغُرُفٰتِ اٰمِنُوْنَ ۝٣٧ (سبأ/34: 37)

Terjemah Kemenag 2019
37. Bukanlah harta atau anak-anakmu yang mendekatkan kamu kepada Kami sedekat-dekatnya, melainkan orang yang beriman dan beramal saleh. Mereka itulah yang memperoleh balasan yang berlipat ganda atas apa yang mereka kerjakan. Mereka aman sentosa di tempat-tempat yang tinggi (dalam surga).
(Saba'/34:37)

Latihan 1

1. Carilah kemiringan garis singgung pada kurva $y = 2\tan x$ di titik dengan $x = 0°$.
2. Carilah kemiringan garis singgung pada kurva $y = \sin 2x - 5$ di titik dengan $x = 90°$.
3. Carilah kemiringan garis singgung pada kurva $y = \sec x$ di titik dengan $x = 0°$.
4. Carilah kemiringan garis singgung pada kurva $y = \cos 2x$ di titik dengan $x = 90°$.
5. Carilah kemiringan garis singgung pada kurva $y = \sec x + \csc x$ di titik dengan $x = 45°$.

Umpan Balik dan Tindak Lanjut

اَلْحَمْدُ لِلّٰهِ رَبِّ الْعٰلَمِيْنَ

Kita telah menyelesaikan Kegiatan Belajar 1. Selanjutnya, nilailah jawabanmu secara mandiri berdasarkan panduan penskoran yang telah tersedia. Cocokkan jawaban Latihan 1 dengan kunci jawaban yang tersedia di bagian akhir modul ini. Ukurlah tingkat penguasaan materi Kegiatan Belajar 1 dengan rumus:

$$\boxed{\text{Nilai} = \frac{\text{jumlah skor yang diperoleh}}{\text{skor total}} \times 100}$$

Jika:

a. Nilai ≥ 70, kalian bisa lanjut mempelajari Kegiatan Belajar 2.
b. Nilai < 70, ulangi Kegiatan Belajar 1 (terutama pada bagian yang belum kalian kuasai dengan baik).

Jurnal Belajar untuk Refleksi Diri

Setelah mengerjakan Latihan 1 dan menilainya, isilah kolom berikut ini untuk mengetahui perkembangan dirimu!

Pertanyaan	Jawaban
1. Materi apa saja yang kamu pelajari hari ini?	
2. Apakah kamu bahagia dengan kegiatan belajar yang sudah terlaksana? Mengapa?	
3. Apa yang sudah kamu pahami dengan baik? Dan apa yang membuatmu berhasil memahaminya?	
4. Apa yang belum kamu pahami dengan baik? Menurut pendapatmu, apa yang membuatmu gagal memahami materi tersebut?	
5. Tindak Lanjut: **a. Jika hari ini sudah berhasil, upaya apa yang akan kamu lakukan untuk mempertahankannya?**	
b. Jika hari ini masih gagal, upaya apa yang akan kamu lakukan untuk memperbaikinya?	

Kegiatan Belajar 2

Nilai Stasioner dan Titik Stasioner Fungsi Trigonometri

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Tujuan Belajar

Setelah mengikuti Kegiatan Belajar 2, diharapkan siswa dapat:

3.4.2 Menjelaskan hubungan turunan pertama fungsi dengan titik stasioner fungsi trigonometri.

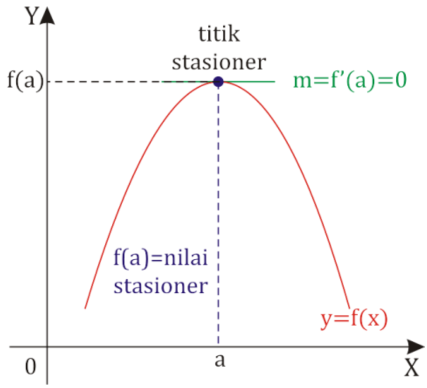
4.4.2 Menentukan nilai stasioner dan titik stasioner fungsi trigonometri menggunakan turunan pertama fungsi trigonometri.

Pada Kegiatan Belajar 1, kita sudah belajar tentang kemiringan garis singgung kurva suatu fungsi trigonometri pada sebuah titik. Kemiringan garis singgung tersebut dapat kita cari menggunakan nilai turunan fungsi di titik singgung. Saat kemiringan garis singgung di suatu titik bernilai nol, maka fungsi tersebut dalam keadaan **stasioner** (tidak bergerak, tidak naik, tidak turun).

Titik Stasioner dan Nilai Stasioner

Titik stasioner fungsi trigonometri $y = f(x)$ dapat ditentukan dengan mencari nilai $x = x_1$ yang menyebabkan fungsi stasioner, dengan **syarat** $f'(x) = 0$.

Titik $(x_1, f(x_1))$ disebut **titik stasioner**, dan $f(x_1)$ adalah **nilai stasioner**.



Gambar 2.14 Titik stasioner dan nilai stasioner fungsi $y = f(x)$

Perhatikan Gambar 2.5 di atas. Dari gambar tersebut, kita dapat mengetahui bahwa:

1. Titik $(a, f(a))$ adalah **titik stasioner** fungsi $y = f(x)$
2. Nilai $f(a)$ adalah **nilai stasioner** fungsi $y = f(x)$.

Contoh 2.1

Pada interval tertutup $0° \leq x \leq 360°$, tentukan titik-titik stasioner dari fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$.

Penyelesaian

$$f(x) = \sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - \sin x$$

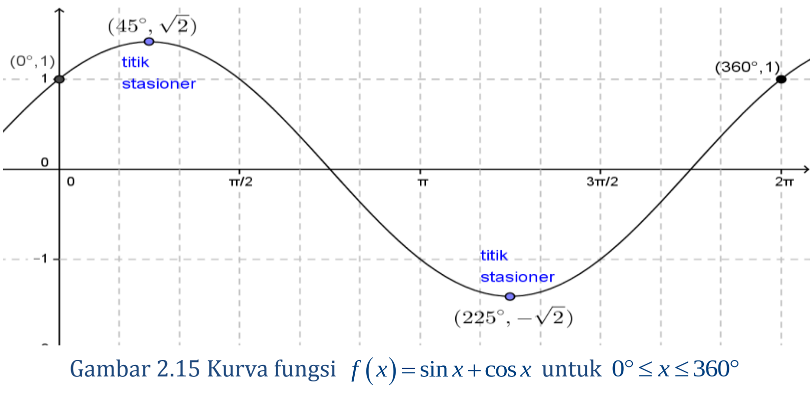
Menentukan nilai x saat stasioner dengan syarat: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x &= \sin x \\
1 &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
1 &= \tan x \\
\tan x &= 1 \\
x &= 45° \text{ atau } 225°
\end{aligned}$$

Menghitung nilai stasioner fungsi, yaitu dengan mensubstitusikan $x = 45°$ atau $x = 225°$ ke dalam fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$:

Nilai x	$f(x) = \sin x + \cos x$	Titik stasioner
$x = 45°$	$f(45°) = \sin(45°) + \cos(45°)$ $= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $= \sqrt{2}$	$(45°, \sqrt{2})$
$x = 225°$	$f(225°) = \sin(225°) + \cos(225°)$ $= -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ $= -\sqrt{2}$	$(225°, -\sqrt{2})$

Jadi, titik-titik stasioner fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$ adalah titik $(45°, \sqrt{2})$ dan titik $(225°, -\sqrt{2})$.



Gambar 2.15 Kurva fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$ untuk $0° \le x \le 360°$

Pengayaan Materi

Untuk memperjelas pemahaman kalian tentang cara menentukan titik-titik stasioner fungsi trigonometri, kalian dapat mengakses video pembelajaran dengan alamat:
https://m.youtube.com/watch?v=YeM6nUKxkxw

Kolom Unity of Sciences

Titik stasioner juga dapat kita sebut dengan istilah titik kritis/titik ekstrim. Dalam kehidupan, terkadang kita juga menghadapi situasi-situasi kritis, seperti saat menghadapi masalah.

Dalam menghadapi situasi kritis, kita harus senantiasa berusaha menjaga keimanan kita agar iman tersebut tetap kokoh di dalam hati kita, supaya kita tidak menjadi orang yang rugi. Allah SWT berfirman dalam Al-Qur’an Surat Al Hajj ayat 11 berikut.

وَمِنَ النَّاسِ مَنْ يَّعْبُدُ اللّٰهَ عَلٰى حَرْفٍۚ فَاِنْ اَصَابَهٗ خَيْرُ ِۨاطْمَـَٔنَّ بِهٖۚ
وَاِنْ اَصَابَتْهُ فِتْنَةُ ِۨانْقَلَبَ عَلٰى وَجْهِهٖۗ خَسِرَ الدُّنْيَا وَالْاٰخِرَةَۗ ذٰلِكَ هُوَ
الْخُسْرَانُ الْمُبِيْنُ ۝١١ (الحج/22: 11)

Terjemah Kemenag 2019

11. Di antara manusia ada yang menyembah Allah hanya di tepi (tidak dengan penuh keyakinan). Jika memperoleh kebaikan, dia pun tenang. Akan tetapi, jika ditimpa suatu cobaan, dia berbalik ke belakang (kembali kufur). Dia merugi di dunia dan akhirat. Itulah kerugian yang nyata.

(Al-Hajj/22:11)

Latihan 2

1. Tentukan titik-titik stasioner dari fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ dalam interval $0^\circ \le x \le 360^\circ$.
2. Tentukan titik-titik stasioner dari fungsi $f(x)=2\cos x-2\sin x$ dalam interval $0^\circ \le x \le 360^\circ$.
3. Tentukan titik-titik stasioner dari fungsi $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ dalam interval $0^\circ \le x \le 360^\circ$.
4. Tentukan titik-titik stasioner dari fungsi $f(x)=\sqrt{3}\cos x+3\sin x$ dalam interval $0^\circ \le x \le 360^\circ$.
5. Tentukan titik-titik stasioner dari fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ dalam interval $0^\circ \le x \le 360^\circ$.

Umpan Balik dan Tindak Lanjut

اَلْحَمْدُ لِلّٰهِ رَبِّ الْعٰلَمِيْنَ

Kita telah selesai mengerjakan Latihan 2. Selanjutnya, nilailah jawabanmu secara mandiri berdasarkan panduan penskoran yang telah tersedia. Cocokkan jawaban Latihan 2 dengan kunci jawaban yang tersedia di bagian akhir modul ini. Ukurlah tingkat penguasaan materi Kegiatan Belajar 2 dengan rumus:

$$\boxed{\text{Nilai} = \frac{\text{jumlah skor yang diperoleh}}{\text{skor total}} \times 100}$$

Jika:

a. Nilai ≥ 70, lanjut pelajari Kegiatan Belajar 3.

b. Nilai < 70, ulangi Kegiatan Belajar 2 (terutama pada bagian yang belum kalian kuasai dengan baik).

Jurnal Belajar untuk Refleksi Diri

Setelah mengerjakan Latihan 2 dan menilainya, isilah kolom berikut ini untuk mengetahui perkembangan dirimu!

Pertanyaan	Jawaban
1. Materi apa saja yang kamu pelajari hari ini?	
2. Apakah kamu bahagia dengan kegiatan belajar yang sudah terlaksana? Mengapa?	
3. Apa yang sudah kamu pahami dengan baik? Dan apa yang membuatmu berhasil memahaminya?	
4. Apa yang belum kamu pahami dengan baik? Menurut pendapatmu, apa yang membuatmu gagal memahami materi tersebut?	
5. Tindak Lanjut: **a. Jika hari ini sudah berhasil, upaya apa yang akan kamu lakukan untuk mempertahankannya?**	
b. Jika hari ini masih gagal, upaya apa yang akan kamu lakukan untuk memperbaikinya?	

Kegiatan Belajar 3

Kemonotonan Fungsi Trigonometri

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Tujuan Belajar

Setelah mengikuti Kegiatan Belajar 3, diharapkan siswa dapat:

3.4.3 Menjelaskan hubungan turunan pertama fungsi dengan selang kemonotonan fungsi trigonometri.

4.4.3 Menentukan selang/interval saat fungsi trigonometri monoton naik menggunakan turunan pertama fungsi trigonometri.

4.4.4 Menentukan selang/interval saat fungsi trigonometri monoton turun menggunakan turunan pertama fungsi trigonometri.

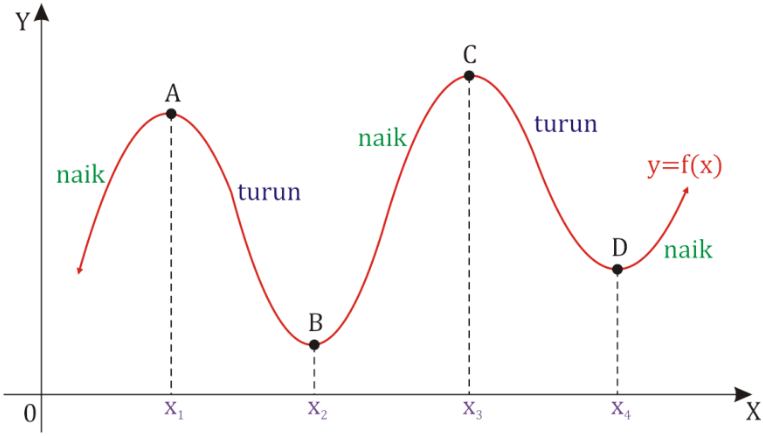
Gambar 2.16 Lumba-lumba sedang berenang di lautan.

Pertanyaan

Perhatikan gambar di atas. Dapatkah kalian menentukan waktu saat lumba-lumba tersebut naik atau turun? Bagaimanakah caranya?

Lintasan gerak lumba-lumba tersebut dapat kita gambarkan dalam grafik fungsi trigonometri. Melalui grafik fungsi, kita dapat melihat interval saat fungsi tersebut naik atau turun.

Pada materi turunan fungsi aljabar, kita sudah pernah belajar tentang fungsi naik dan fungsi turun. Mari kita ingat kembali materi tersebut.
Perhatikan gambar berikut ini.

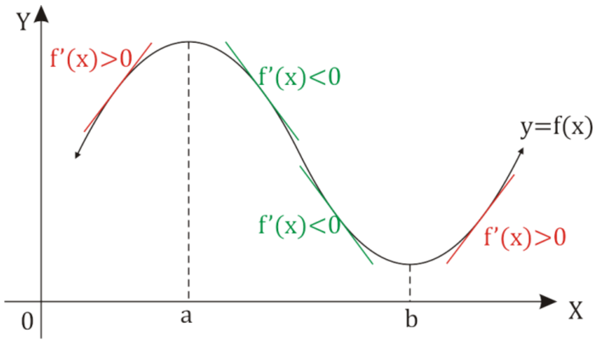


Gambar 2.17 Kemonotonan suatu fungsi $y = f(x)$

Dari gambar tersebut, kita dapat mengetahui bahwa:

1. Pada interval $x < x_1$, fungsi $y = f(x)$ monoton naik
2. Pada interval $x_1 < x < x_2$, fungsi $y = f(x)$ monoton turun
3. Pada interval $x_2 < x < x_3$, fungsi $y = f(x)$ monoton naik
4. Pada interval $x_3 < x < x_4$, fungsi $y = f(x)$ monoton turun
5. Pada interval $x > x_4$, fungsi $y = f(x)$ monoton naik

Apabila grafik fungsi tidak tersedia, interval saat fungsi naik atau turun dapat kita tentukan menggunakan turunan pertama fungsinya.



Gambar 2.18 Kemonotonan fungsi trigonometri $y = f(x)$.

Dari gambar tersebut, kita dapat mengetahui bahwa:

1. Grafik fungsi $y = f(x)$ akan monoton naik pada interval $x < a$ atau $x > b$.
2. Grafik fungsi $y = f(x)$ monoton turun pada interval $a < x < b$.

Kemonotonan Fungsi Trigonometri

Diketahui fungsi trigonometri $y = f(x)$ pada suatu interval $a < x < b$, dengan $f'(x)$ adalah turunan pertama dari fungsi $y = f(x)$.

a. Jika nilai $f'(x) > 0$ (positif), maka fungsi naik pada interval $a < x < b$

b. Jika nilai $f'(x) < 0$ (negatif), maka fungsi turun pada interval $a < x < b$

Catatan: nilai $x = a$ dan $x = b$ yang digunakan sebagai batas interval dapat dicari menggunakan syarat stasioner $f'(x) = 0$.

Contoh 4.1

Pada interval tertutup $0° \le x \le 360°$, tentukan semua interval saat fungsi $f(x) = \sin x$ naik atau turun.

Penyelesaian

Mencari turunan pertama dari fungsi $f(x)=\sin x$, yaitu:

$$f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$$

Syarat stasioner: $f'(x)=0$

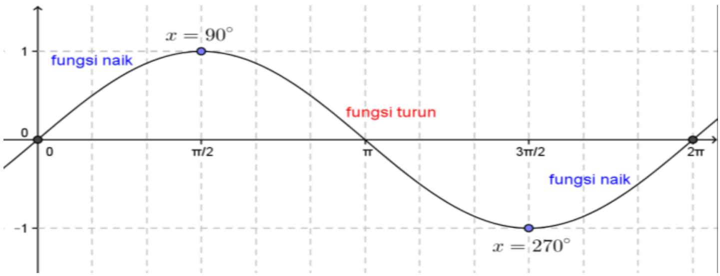
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos x=0$$

$$x=90^\circ \text{ atau } 270^\circ$$

Substitusikan nilai-nilai x pada interval yang dibatasi oleh $x=90^\circ$ dan $x=270^\circ$ ke dalam fungsi $f'(x)=\cos x$:

Interval	$0^\circ \le x < 90^\circ$	$90^\circ < x < 270^\circ$	$270^\circ < x \le 360^\circ$
Nilai $f'(x)$	positif	negatif	positif
Sifat Fungsi	naik	turun	naik

Jadi, fungsi $f(x)=\sin x$ akan naik pada interval $0^\circ \le x < 90^\circ$ atau $270^\circ < x \le 360^\circ$ dan turun pada interval $90^\circ < x < 270^\circ$.



Gambar 2.19 Kurva fungsi $f(x)=\sin x$ untuk $0^\circ \le x \le 360^\circ$

Contoh 4.2

Pada interval tertutup $0^\circ \le x \le 360^\circ$, tentukan semua interval saat fungsi $f(x)=\sin x+\cos x$ naik atau turun.

Penyelesaian

Mencari turunan pertama dari fungsi $f(x)=\sin x+\cos x$, yaitu:

$$f(x)=\sin x+\cos x \Rightarrow f'(x)=\cos x-\sin x$$

Syarat stasioner: $f'(x)=0$

$$\cos x-\sin x=0 \Leftrightarrow \cos x=\sin x$$

$$1=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1=\tan x$$

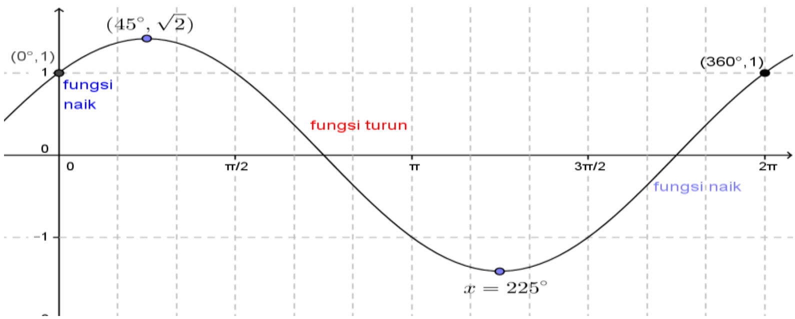
$$\tan x=1$$

$$x=45° \text{ atau } 225°$$

Substitusikan nilai-nilai x pada interval yang dibatasi oleh $x=45°$ dan $x=225°$ ke dalam fungsi $f'(x)=\cos x-\sin x$:

Interval	$0° \le x < 45°$	$45° < x < 225°$	$225° < x \le 360°$
Nilai $f'(x)$	positif	negatif	positif
Sifat Fungsi	naik	turun	naik

Jadi, fungsi $f(x)=\sin x+\cos x$ akan naik pada interval $0° \le x < 45°$ atau $225° < x \le 360°$ dan turun pada interval $45° < x < 225°$.



Gambar 2.20 Kurva fungsi $f(x)=\sin x+\cos x$ untuk $0° \le x \le 360°$

Kolom Unity of Sciences

Kurva fungsi trigonometri dapat menggambarkan keadaan iman manusia yang senantiasa naik dan turun.

وَاِذَا مَآ اُنْزِلَتْ سُوْرَةٌ فَمِنْهُمْ مَّنْ يَّقُوْلُ اَيُّكُمْ زَادَتْهُ هٰذِهٖٓ اِيْمَانًاۚ فَاَمَّا
الَّذِيْنَ اٰمَنُوْا فَزَادَتْهُمْ اِيْمَانًا وَّهُمْ يَسْتَبْشِرُوْنَ ۝١٢٤ وَاَمَّا الَّذِيْنَ فِيْ
قُلُوْبِهِمْ مَّرَضٌ فَزَادَتْهُمْ رِجْسًا اِلٰى رِجْسِهِمْ وَمَاتُوْا وَهُمْ كٰفِرُوْنَ
۝١٢٥ (التوبة/9: 124-125)

Terjemah Kemenag 2019
124. Apabila diturunkan suatu surah, di antara mereka (orang-orang munafik) ada yang berkata, "Siapakah di antara kamu yang bertambah imannya dengan (turunnya) surah ini?" Adapun (bagi) orang-orang yang beriman, (surah yang turun) ini pasti menambah imannya dan mereka merasa gembira.
125. Adapun (bagi) orang-orang yang di dalam hatinya ada penyakit,[340] *(surah yang turun ini) akan menambah kekufuran mereka yang telah ada dan mereka akan mati dalam keadaan kafir.* (**At-Taubah/9:124-125**)
[340] Penyakit batin pada ayat ini meliputi kekufuran, kemunafikan, keragu-raguan, dan sebagainya.

Hal-hal yang dapat menambah ataupun mengurangi iman:
1. Iman bertambah saat melaksanakan perintah Allah
2. Iman berkurang saat melanggar larangan Allah (atau bermaksiat)

Pengayaan Materi

Untuk memperjelas pemahaman kalian tentang cara menentukan selang kemonotonan fungsi trigonometri, kalian dapat mengakses video pembelajaran dengan alamat: https://m.youtube.com/watch?v=1plWYW60jZ4&t=731s dan https://m.youtube.com/watch?v=kuTaxGFtyJM

Latihan 3

1. Tentukan semua interval saat fungsi $f(x)=\sin x-\cos x$ naik atau turun, dengan $0^\circ \le x \le 360^\circ$.
2. Tentukan semua interval saat fungsi $f(x)=3+2\sin x$ naik atau turun, dengan $0^\circ \le x \le 360^\circ$.
3. Tentukan semua interval saat fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ naik atau turun, dengan $0^\circ \le x \le 360^\circ$.
4. Tentukan semua interval saat fungsi $f(x)=2\cos x-2\sin x$ naik atau turun, dengan $0^\circ \le x \le 360^\circ$.
5. Tentukan semua interval saat fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ naik atau turun, dengan $0^\circ \le x \le 360^\circ$.

Umpan Balik dan Tindak Lanjut

اَلْحَمْدُ لِلّٰهِ رَبِّ الْعٰلَمِيْنَ

Kita telah selesai mengerjakan Latihan 3. Selanjutnya, nilailah jawabanmu secara mandiri berdasarkan panduan penskoran yang telah tersedia. Cocokkan jawaban Latihan 3 dengan kunci jawaban yang tersedia di bagian akhir modul ini. Ukurlah tingkat penguasaan materi Kegiatan Belajar 3 dengan rumus:

$$\boxed{\text{Nilai} = \frac{\text{jumlah skor yang diperoleh}}{\text{skor total}} \times 100}$$

Jika:

a. Nilai ≥ 70, lanjut pelajari Kegiatan Belajar 4.

b. Nilai < 70, ulangi Kegiatan Belajar 3 (terutama pada bagian yang belum kalian kuasai dengan baik).

Jurnal Belajar untuk Refleksi Diri

Setelah mengerjakan Latihan 3 dan menilainya, isilah kolom berikut ini untuk mengetahui perkembangan dirimu!

Pertanyaan	Jawaban
1. Materi apa saja yang kamu pelajari hari ini?	
2. Apakah kamu bahagia dengan kegiatan belajar yang sudah terlaksana? Mengapa?	
3. Apa yang sudah kamu pahami dengan baik? Dan apa yang membuatmu berhasil memahaminya?	
4. Apa yang belum kamu pahami dengan baik? Menurut pendapatmu, apa yang membuatmu gagal memahami materi tersebut?	
5. Tindak Lanjut: **a. Jika hari ini sudah berhasil, upaya apa yang akan kamu lakukan untuk mempertahankannya?**	
b. Jika hari ini masih gagal, upaya apa yang akan kamu lakukan untuk memperbaikinya?	

Kegiatan Belajar 4

Nilai Maksimum dan Nilai Minimum Fungsi Trigonometri

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Tujuan Belajar

Setelah mengikuti Kegiatan Belajar 4, diharapkan siswa dapat:

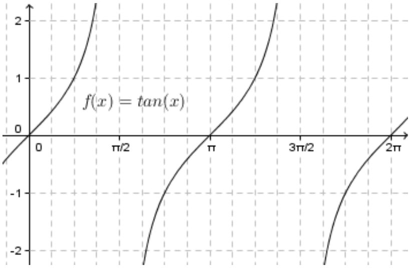
4.4.5 Menentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi trigonometri.

Gambar 2.21 Ketinggian permukaan air laut pada waktu tertentu dapat dirumuskan dengan fungsi trigonometri

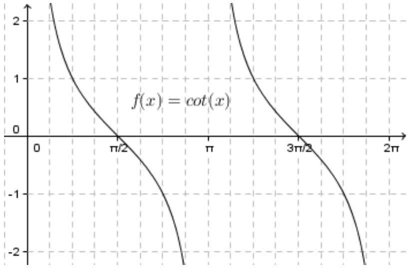
Fungsi trigonometri memiliki nilai maksimum dan nilai minimum. **Nilai maksimum** adalah nilai fungsi yang terbesar pada suatu interval. Sedangkan **nilai minimum** adalah nilai fungsi yang terkecil pada suatu interval.

Pertanyaan:
Apakah semua fungsi trigonometri mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum?

Jawabannya tidak. Tidak semua fungsi trigonometri mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum, contohnya seperti fungsi tangen dan cotangen yang tidak memiliki nilai maksimum dan nilai minimum. Perhatikan grafik fungsi tangen dan cotangen berikut.



Gambar 2.22 Grafik fungsi $f(x)=\tan(x)$



Gambar 2.23 Grafik fungsi $f(x)=\cot(x)$

Pada grafik fungsi $f(x)=\tan(x)$, fungsi tersebut akan bernilai tak terhingga (∞) untuk $x=\frac{\pi}{2}=90°$ maupun $x=\frac{3\pi}{2}=270°$. Jadi, fungsi $f(x)=\tan(x)$ tidak mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum.
Pada grafik fungsi $f(x)=\cot(x)$, fungsi tersebut akan bernilai tak terhingga (∞) untuk $x=0°$ maupun $x=\pi=180°$. Jadi, fungsi $f(x)=\cot(x)$ tidak mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum.

Kita dapat menentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi trigonometri menggunakan metode grafik, rumus, atau pun turunan fungsi trigonometri. Pada modul ini, kita akan belajar tentang cara menentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi menggunakan turunan fungsi trigonometri.

Keberadaan Nilai Maksimum dan Nilai Minimum Suatu Fungsi

Suatu fungsi $f\left(x\right)$ mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum jika fungsi tersebut kontinu dan berada pada interval tertutup.
Nilai maksimum dan nilai minimum suatu fungsi $y=f\left(x\right)$ dalam suatu interval tertutup $a\leq x\leq b$ dapat diperoleh dari:

1. Nilai stasioner fungsi $y=f\left(x\right)$ dalam interval tersebut
2. Nilai fungsi $y=f\left(x\right)$ pada ujung interval

Jadi, nilai maksimum atau nilai minimum suatu fungsi dapat ditentukan dengan mencari nilai stasioner fungsi dan nilai fungsi pada ujung intervalnya terlebih dahulu.
Selanjutnya, kita pilih nilai yang terbesar (nilai maksimum) atau nilai yang terkecil (nilai minimum).

Contoh 3.1

Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi $f\left(x\right)=4\cos x+\cos 2x$ untuk $0°\leq x\leq 360°$.

Penyelesaian

$f\left(x\right)=4\cos x+\cos 2x\rightarrow f'\left(x\right)=-4\sin x-2\sin 2x$

Menentukan nilai x saat stasioner dengan syarat: $f'\left(x\right)=0$

$$
\begin{aligned}
-4\sin x-2\sin 2x=0 \Leftrightarrow -4\sin x-2\left(2\sin x\cos x\right)&=0\\
-4\sin x-4\sin x\cos x&=0\\
-4\sin x\left(1+\cos x\right)&=0
\end{aligned}
$$

Penyelesaian persamaan $-4\sin x(1+\cos x)=0$:

a. Untuk $-4\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$

$$x=\sin^{-1}(0)$$
$$x=0°,180°,360°$$

b. Untuk $1+\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1$

$$x=\cos^{-1}(-1)$$
$$x=180°$$

Jadi, $f(x)=4\cos x+\cos 2x$ stasioner saat $x=0°,180°,360°$ (untuk interval $0° \le x \le 360°$).

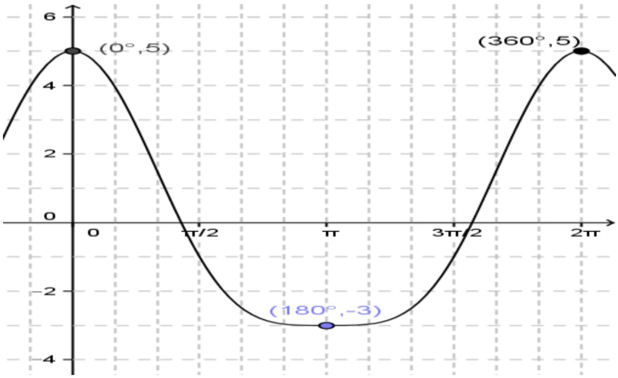
Menghitung nilai fungsi $f(x)=4\cos x+\cos 2x$ saat stasioner (untuk $x=0°,180°,360°$) dan ujung interval (untuk $x=0°,360°$):

Nilai x	$f(x)=4\cos x+\cos 2x$	Keterangan
$x=0°$	$f(0°)=4\cos(0°)+\cos 2(0°)$ $=4\cos(0°)+\cos(0°)$ $=4(1)+1=5$	Nilai ujung interval (terbesar)
$x=180°$	$f(180°)=4\cos(180°)+\cos 2(180°)$ $=4\cos(180°)+\cos(360°)$ $=4(-1)+1=-3$	Nilai stasioner (terkecil)
$x=360°$	$f(360°)=4\cos(360°)+\cos 2(360°)$ $=4\cos(360°)+\cos(720°)$ $=4(1)+1=5$	Nilai ujung interval (terbesar)

Jadi, fungsi $f(x)=4\cos x+\cos 2x$ pada interval $0° \le x \le 360°$ mempunyai:

a. Nilai maksimum $f(0°)=f(360°)=5$ saat $x=0°$ atau $x=360°$

b. Nilai minimum $f(180°)=-3$ saat $x=180°$



Gambar 2.24. Kurva fungsi $f(x) = 4\cos x + \cos 2x$ untuk $0° \le x \le 360°$

Contoh 3.2

Sebuah perusahaan mainan anak-anak memprediksi hasil penjualan bulanan produknya selama 2 tahun (dalam satuan ribuan unit) sebagai $P(t) = 3,25 - 2\cos(t.30°)$ dengan $t =$ waktu (bulan) dan $1 \le t \le 20$. Jika $t = 1$ mewakili hasil penjualan pada bulan Januari 2018, tentukan pada bulan apa saja perusahaan diprediksi memperoleh penjualan tertinggi dan banyak produk yang terjual pada bulan tersebut.

Penyelesaian

Fungsi penjualan: $P(t) = 3,25 - 2\cos(t.30°)$*, dengan* $1 \le t \le 20$

Turunan pertama: $P'(t) = -2(30°)\left[-\sin(t.30°)\right]$

$$P'(t) = 60°\sin(t.30°)$$

Menentukan nilai t *dengan syarat stasioner:* $P'(t) = 0$

$$60°\sin(t.30°) = 0 \Leftrightarrow \sin(t.30°) = 0$$

$$t.30° = 0°, 180°, 360°, 540°, 720°, \ldots$$

$$t = \frac{0°}{30°}, \frac{180°}{30°}, \frac{360°}{30°}, \frac{540°}{30°}, \frac{720°}{30°}, \ldots$$

$$t = 0, 6, 12, 18, 24, \ldots$$

Jadi fungsi $P(t)$ stasioner saat $t = 6{,}12{,}18$ (pada interval $1 \le t \le 20$).

Menghitung nilai fungsi penjualan $P(t) = 3,25 - 2\cos(t.30°)$ saat stasioner (untuk $t = 6{,}12{,}18$) dan ujung interval (untuk $t = 1$ dan $t = 20$) dan cari nilai terbesar:

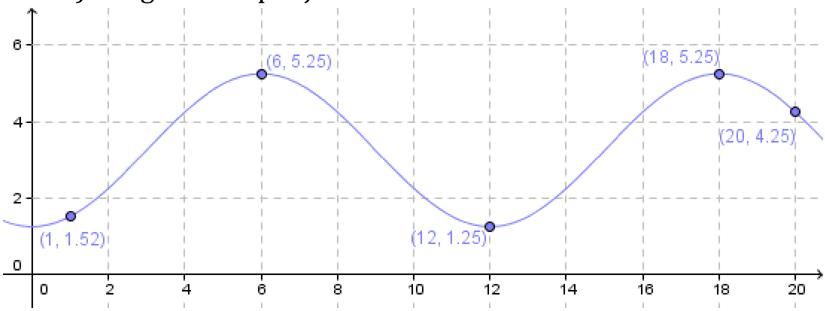
Nilai x	$P(t) = 3,25 - 2\cos(t.30°)$	Keterangan
$t = 1$	$P(1) = 3,25 - 2\cos(1.30°)$ $= 3,25 - 2\cos(30°)$ $= 3,25 - 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ $= 3,25 - \sqrt{3}$	Nilai ujung interval
$t = 6$	$P(6) = 3,25 - 2\cos(6.30°)$ $= 3,25 - 2\cos(180°)$ $= 3,25 - 2(-1)$ $= 3,25 + 2 = 5,25$	Nilai stasioner
$t = 12$	$P(12) = 3,25 - 2\cos(12.30°)$ $= 3,25 - 2\cos(360°) = 3,25 - 2(1)$ $= 3,25 - 2 = 1,25$	Nilai stasioner
$t = 18$	$P(18) = 3,25 - 2\cos(18.30°)$ $= 3,25 - 2\cos(540°)$ $= 3,25 - 2\cos(360° + 180°)$ $= 3,25 - 2\cos(180°) = 3,25 - 2(-1)$ $= 3,25 + 2 = 5,25$	Nilai stasioner

Nilai x	$P(t)=3,25-2\cos(t.30°)$	Keterangan
$t=20$	$P(20)=3,25-2\cos(20.30°)$ $=3,25-2\cos(600°)$ $=3,25-2\cos(360°+240°)$ $=3,25-2\cos(240°)$ $=3,25-2\left(-\frac{1}{2}\right)$ $=3,25+1=4,25$	Nilai ujung interval

Nilai terbesar fungsi $P(t)$ adalah $5,25$ (dalam satuan ribuan unit) saat $t=6$ dan $t=18$.

Kesimpulan:

Jadi, perusahaan diprediksi memperoleh hasil penjualan terbesar pada bulan Juni 2018 (bulan ke-6) dan bulan Juni 2019 (bulan ke-18) dengan hasil penjualan sebesar 5.250 unit.



Gambar 2.25 Hasil penjualan bulanan produk sebuah perusahaan mainan selama 2 tahun (dalam satuan ribuan unit) yang dimodelkan dalam fungsi $P(t)=3,25-2\cos(t.30°)$ dengan $t=\text{waktu}$ (bulan) dan $1\le t\le 20$.

Pengayaan Materi

Untuk memperjelas pemahaman kalian tentang cara menentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi trigonometri, kalian dapat mengakses video pembelajaran dengan alamat:

1. https://m.youtube.com/watch?v=3rrYy_jAhhc
2. https://m.youtube.com/watch?v=mAKVgoulqDw
3. https://m.youtube.com/watch?v=et4vSzgqh9Q

Kolom Unity of Sciences

Dalam kehidupan, kadang kita berada di posisi tertinggi (merasakan kebahagian) maupun di posisi terendah (merasakan kesulitan). Namun sebagai seorang muslim yang baik, seperti apapun kejadian yang menimpa diri kita, hendaknya kita selalu bersyukur dan bersabar, karena semua kejadian tersebut terjadi atas kehendak Allah.

حَدَّثَنَا ثَابِتٌ عَنْ عَبْدِ الرَّحْمَنِ ابْنِ أَبِيْ لَيْلَى، عَنْ صُهَيْبٍ قَالَ: قَالَ رَسُوْلُ اللهِ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَ سَلَّمَ: عَجَبًا لِأَمْرِ الْمُؤْمِنِ، إِنَّ أَمْرُهُ كُلَّهُ خَيْرٌ، وَ لَيْسَ ذَلِكَ لِأَحَدٍ إِلَّا لِلْمُؤْمِنِ، إِنْ أَصَابَتْهُ سَرَّاءُ شَكَرَ، فَكَانَ خَيْرًا لَهُ، وَ إِنْ أَصَابَتْهُ ضَرَّاءُ صَبَرَ، فَكَانَ خَيْرًا لَهُ.

Artinya: Diceritakan dari Tsabit, dari Abdurrahman bin Abi Laila, dari Suhaib, bahwa Rasulullah SAW bersabda: *"Alangkah mengagumkan keadaan orang yang beriman, karena semua keadaannya (membawa) kebaikan (untuk dirinya), dan ini hanya ada pada seorang mukmin. Jika dia mendapatkan kesenangan dia akan bersyukur, maka itu adalah kebaikan baginya. Dan jika dia ditimpa kesusahan dia akan bersabar, maka itu adalah kebaikan baginya."* (**HR Muslim No.2999**)

Latihan 4

1. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x) = \sqrt{3}\cos x + 3\sin x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$.
2. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$.
3. Sebuah perusahaan farmasi menghasilkan produknya selama 1 tahun (dalam satuan ratusan ribu unit) sebagai $H(t) = 5,5 + 2\sin(t.45°)$ dengan $t = \text{waktu}$ (bulan) dan $1 \le t \le 15$. Jika $t = 1$ menunjukkan produk farmasi pada bulan Januari 2018, tentukan pada bulan apa saja produk yang dihasilkan adalah minimal dan banyak produk minimal tersebut.
4. Sepanjang hari, ketinggian air laut pada suatu dermaga bervariasi karena mengalami pasang surut. Ketinggian air tersebut dapat dimodelkan oleh fungsi $D(t) = 3,5 + 1,5\cos(t.30°)$ (dalam satuan meter) dan $0 \le t \le 24$ (dengan $t = 0$ mewakili tengah malam).
   a. Tentukan $D'(t)$
   b. Tentukan waktu ketika ketinggian air mencapai maksimum dan minimum.
   c. Berapakah ketinggian maksimum air tersebut?
5. Suhu suatu ruangan dapat dimodelkan oleh $T(t) = 98,1 + 0,6\cos(t.30°)$ (dalam derajat Fahrenheit) dengan $t = \text{waktu}$ (dalam jam) dan $0 \le t \le 24$. Kapan ruangan tersebut akan bersuhu maksimum dan bersuhu minimum? Berapakah besar suhu saat maksimum dan minimum?

Umpan Balik dan Tindak Lanjut

اَلْحَمْدُ لِلّٰهِ رَبِّ الْعٰلَمِيْنَ

Kita telah selesai mengerjakan Latihan 4. Selanjutnya, nilailah jawabanmu secara mandiri berdasarkan panduan penskoran yang telah tersedia. Cocokkan jawaban Latihan 4 dengan kunci jawaban yang tersedia di bagian akhir modul ini. Ukurlah tingkat penguasaan materi Kegiatan Belajar 4 dengan rumus:

$$\boxed{\text{Nilai} = \frac{\text{jumlah skor yang diperoleh}}{\text{skor total}} \times 100}$$

Jika:

a. Nilai ≥ 70, lanjut pelajari Kegiatan Belajar 5.

b. Nilai < 70, ulangi Kegiatan Belajar 4 (terutama pada bagian yang belum kalian kuasai dengan baik).

Jurnal Belajar untuk Refleksi Diri

Setelah mengerjakan Latihan 4 dan menilainya, isilah kolom berikut ini untuk mengetahui perkembangan dirimu!

Pertanyaan	Jawaban
1. Materi apa saja yang kamu pelajari hari ini?	
2. Apakah kamu bahagia dengan kegiatan belajar yang sudah terlaksana? Mengapa?	
3. Apa yang sudah kamu pahami dengan baik? Dan apa yang membuatmu berhasil memahaminya?	
4. Apa yang belum kamu pahami dengan baik? Menurut pendapatmu, apa yang membuatmu gagal memahami materi tersebut?	
5. Tindak Lanjut: **a. Jika hari ini sudah berhasil, upaya apa yang akan kamu lakukan untuk mempertahankannya?**	
b. Jika hari ini masih gagal, upaya apa yang akan kamu lakukan untuk memperbaikinya?	

Kegiatan Belajar 5

Jenis Titik Stasioner Fungsi Trigonometri

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Tujuan Belajar

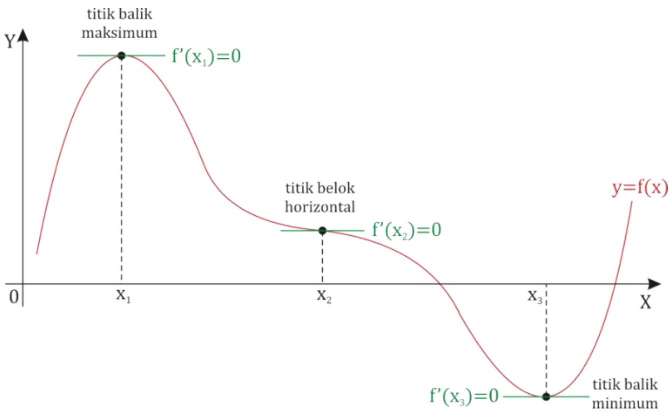
Setelah mengikuti Kegiatan Belajar 5, diharapkan siswa dapat:

4.4.6 Menentukan jenis titik stasioner fungsi trigonometri menggunakan uji turunan pertama.

4.4.7 Menentukan jenis titik stasioner fungsi trigonometri menggunakan uji turunan kedua.

Pada kegiatan belajar sebelumnya, kita telah belajar tentang titik stasioner yang juga dapat digunakan sebagai batas interval kemonotonan fungsi. Ada tiga jenis titik stasioner, yaitu:

1. Titik balik maksimum. Syarat: $f'(x)=0$ dan $f''(x)<0$
2. Titik balik minimum. Syarat: $f'(x)=0$ dan $f''(x)>0$
3. Titik belok horizontal. Syarat: $f'(x)=0$ dan $f''(x)=0$



Gambar 2.26 Jenis-jenis titik stasioner

Pertanyaan
Bagaimanakah cara untuk menentukan jenis titik stasioner fungsi trigonometri?

Ada dua cara yang dapat kita gunakan untuk menentukan jenis titik stasioner, yaitu dengan:
1. Uji turunan pertama
2. Uji turunan kedua

Uji Turunan Pertama untuk Menentukan Jenis Titik Stasioner

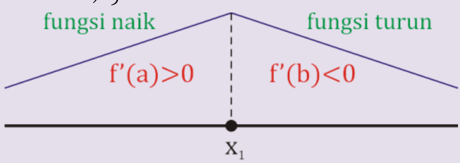
Uji turunan pertama dilakukan dengan melihat perubahan tanda/nilai fungsi turunan pertamanya pada daerah di sekitar titik stasioner.

Diketahui titik $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ adalah titik stasioner dari fungsi $y=f\left(x\right)$. Ambil nilai $x=a$ (di sebelah kiri $x=x_1$) dan $x=b$ (di sebelah kanan $x=x_1$), dengan $a<x_1<b$. Substitusikan nilai $x=a$ dan $x=b$ ke dalam fungsi turunan pertamanya, yaitu $f'\left(x\right)$.

Ada tiga kemungkinan jenis stasioner titik $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ yang akan kita peroleh, yaitu:

a. **Titik balik maksimum**, jika:

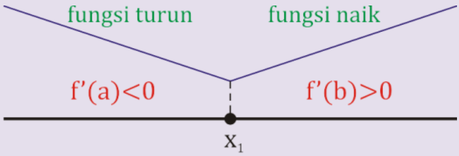
$$\left.\begin{array}{l} f'\left(a\right)>0\ \left(\text{fs. naik}\right) \\ f'\left(x_1\right)=0\ \left(\text{stasioner}\right) \\ f'\left(b\right)<0\ \left(\text{fs. turun}\right) \end{array}\right\} \therefore \left(x_1, f\left(x_1\right)\right) \text{ titik balik maksimum}$$



Gambar 2.27 Titik balik maksimum

b. **Titik balik minimum**, jika:

$$\left.\begin{aligned} f'(a)&<0\ (\text{fs. turun}) \\ f'(x_1)&=0\ (\text{stasioner}) \\ f'(b)&>0\ (\text{fs. naik}) \end{aligned}\right\} \therefore \left(x_1, f\left(x_1\right)\right) \text{ titik balik minimum}$$



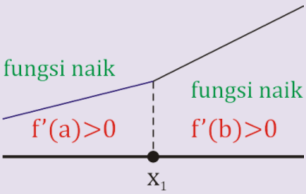
Gambar 2.28 Titik balik minimum

c. **Titik belok horizontal**, jika:

$$\left.\begin{aligned} f'(a)&>0\ (\text{fs. naik}) \\ f'(x_1)&=0\ (\text{stasioner}) \\ f'(b)&>0\ (\text{fs. naik}) \end{aligned}\right\} \therefore \left(x_1, f\left(x_1\right)\right) \text{ titik belok horizontal}$$

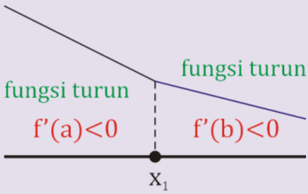
Atau

$$\left.\begin{aligned} f'(a)&<0\ (\text{fs. turun}) \\ f'(x_1)&=0\ (\text{stasioner}) \\ f'(b)&<0\ (\text{fs. turun}) \end{aligned}\right\} \therefore \left(x_1, f\left(x_1\right)\right) \text{ titik belok horizontal}$$



Gambar 2.29 Titik belok horizontal

atau



Gambar 2.30 Titik belok horizontal

Contoh 5.1

Pada interval tertutup $0° \le x \le 360°$, tentukan titik-titik stasioner dan jenisnya dari fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$.

Penyelesaian

$f(x) = \sin x + \cos x \rightarrow f'(x) = \cos x - \sin x$

Dari contoh 2.1, kita telah mengetahui bahwa titik stasioner fungsi $f(x)=\sin x+\cos x$ adalah titik $\left(45°,\sqrt{2}\right)$ dan titik $\left(225°,-\sqrt{2}\right)$.

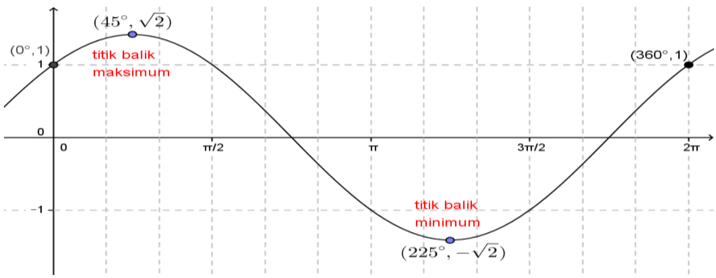
Menentukan jenis stasioner menggunakan uji turunan pertama $f'(x)=\cos x-\sin x$:

Nilai x	Tanda $f'(x)$	Sifat fungsi	Jenis Stasioner
$0° \le x < 45°$	positif	naik	-
$x = 45°$	0	stasioner	Titik balik maksimum
$45° < x < 225°$	negatif	turun	-
$x = 225°$	0	stasioner	Titik balik minimum
$225° < x \le 360°$	positif	naik	-

Jadi, fungsi $f(x)=\sin x+\cos x$ pada interval $0° \le x \le 360°$ mempunyai titik stasioner:

a. Titik $\left(45°,\sqrt{2}\right)$: titik balik maksimum

b. Titik $\left(225°,-\sqrt{2}\right)$: titik balik minimum



Gambar 2.31 Kurva fungsi $f(x)=\sin x+\cos x$ untuk $0° \le x \le 360°$

Lalu, bagaimana cara menentukan jenis titik stasioner fungsi trigonometri menggunakan uji turunan kedua?

Uji Turunan Kedua untuk Menentukan Jenis Titik Stasioner

Uji turunan kedua dilakukan dengan melihat nilai fungsi turunan kedua (bertanda positif/negatif) pada saat stasioner.

Diketahui titik $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ adalah titik stasioner dari fungsi $y = f\left(x\right)$. Substitusikan nilai $x = x_1$ ke dalam fungsi turunan kedua, yaitu $f''\left(x\right)$. Perhatikan tanda bilangannya:

a. Jika $f''\left(x\right) < 0$ (negatif), maka $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ adalah titik balik maksimum.

b. Jika $f''\left(x_1\right) > 0$ (positif), maka $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ adalah titik balik minimum.

c. Jika $f''\left(x_1\right) = 0$ (nol), maka $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ adalah titik belok horizontal.

Contoh 5.2

Pada interval tertutup $0° \leq x \leq 360°$, tentukan titik-titik stasioner dan jenisnya dari fungsi $f\left(x\right) = \sin x + \cos x$.

Penyelesaian

$$f\left(x\right) = \sin x + \cos x \Rightarrow f'\left(x\right) = \cos x - \sin x$$

$$f''\left(x\right) = -\sin x - \cos x$$

Dari contoh 5.1, kita telah mengetahui bahwa titik stasioner fungsi $f\left(x\right) = \sin x + \cos x$ adalah titik $\left(45°, \sqrt{2}\right)$ dan titik $\left(225°, -\sqrt{2}\right)$.

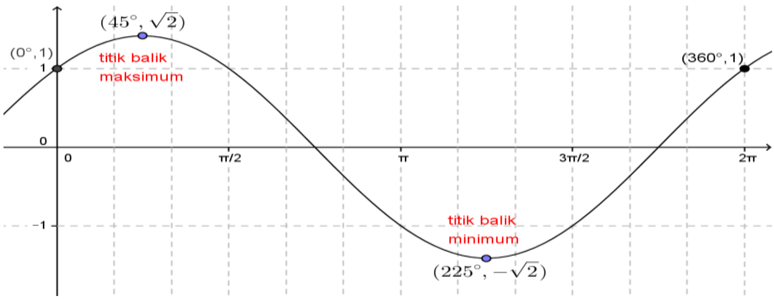
Menentukan jenis titik stasioner dengan uji turunan kedua $f''\left(x\right) = -\sin x - \cos x$:

Nilai x	$f''(x) = -\sin x - \cos x$	Jenis Stasioner
$x = 45°$	$f''(45°) = -\sin(45°) - \cos(45°)$ $= -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\sqrt{2}$ Jadi, $f''(45°)$ bertanda negatif	Titik balik maksimum
$x = 225°$	$f''(225°) = -\sin(225°) - \cos(225°)$ $= -\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ $= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$ Jadi, $f''(225°)$ bertanda positif	Titik balik minimum

Jadi, fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$ mempunyai titik stasioner:

a. Titik $\left(45°, \sqrt{2}\right)$: titik balik maksimum

b. Titik $\left(225°, -\sqrt{2}\right)$: titik balik minimum



Gambar 2.32 Kurva fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$ untuk $0° \le x \le 360°$

Kolom Unity of Sciences

Ada tiga jenis titik stasioner (titik kritis/titik ekstrim), yaitu titik balik maksimum, titik balik minimum, dan titik belok horizontal. Sama seperti keadaan titik-titik stasioner/titik kritis, manusia pun juga terkadang mengalami krisis dalam kehidupan, dapat berupa kesenangan ataupun kesedihan.

Dalam kehidupan sebagai manusia, kita akan diuji baik dengan perkara yang tidak kita sukai maupun dengan perkara yang menyenangkan. Allah berfirman:

كُلُّ نَفْسٍ ذَاۤىِٕقَةُ الْمَوْتِۗ وَنَبْلُوْكُمْ بِالشَّرِّ وَالْخَيْرِ فِتْنَةًۗ وَاِلَيْنَا تُرْجَعُوْنَ ﴿٣٥﴾ (الانبياۤء/21: 35)

Terjemah Kemenag 2019

35. Setiap yang bernyawa akan merasakan kematian. Kami menguji kamu dengan keburukan dan kebaikan sebagai cobaan. Kepada Kamilah kamu akan dikembalikan.

(Al-Anbiya'/21:35)

Latihan 5

1. Tentukan jenis titik-titik stasioner dari fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$.
   a. Menggunakan uji turunan pertama
   b. Menggunakan uji turunan kedua
2. Tentukan jenis titik-titik stasioner dari fungsi $f(x)=2\cos x-2\sin x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$.
   a. Menggunakan uji turunan pertama
   b. Menggunakan uji turunan kedua
3. Tentukan jenis titik-titik stasioner dan jenisnya dari fungsi $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$.
   a. Menggunakan uji turunan pertama
   b. Menggunakan uji turunan kedua
4. Tentukan jenis titik-titik stasioner dan jenisnya dari fungsi $f(x)=\sqrt{3}\cos x+3\sin x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$.
   a. Menggunakan uji turunan pertama
   b. Menggunakan uji turunan kedua
5. Tentukan jenis titik-titik stasioner dan jenisnya dari fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$.
   a. Menggunakan uji turunan pertama
   b. Menggunakan uji turunan kedua

Cara Manakah yang Lebih Mudah dalam Menentukan Jenis Titik Stasioner?

Setelah berlatih menentukan jenis titik stasioner menggunakan uji turunan pertama dan kedua, cara manakah yang paling mudah? Untuk selanjutnya, silakan gunakan cara yang paling mudah menurut kalian.

Umpan Balik dan Tindak Lanjut

اَلْحَمْدُ لِلّٰهِ رَبِّ الْعٰلَمِيْنَ

Kita telah selesai mengerjakan Latihan 5. Selanjutnya, nilailah jawabanmu secara mandiri berdasarkan panduan penskoran yang telah tersedia. Cocokkan jawaban Latihan 5 dengan kunci jawaban yang tersedia di bagian akhir modul ini. Ukurlah tingkat penguasaan materi Kegiatan Belajar 5 dengan rumus:

$$\boxed{\text{Nilai} = \frac{\text{jumlah skor yang diperoleh}}{\text{skor total}} \times 100}$$

Jika:

a. Nilai ≥ 70, lanjut pelajari Kegiatan Belajar 6.

b. Nilai < 70, ulangi Kegiatan Belajar 5 (terutama pada bagian yang belum kalian kuasai dengan baik).

Jurnal Belajar untuk Refleksi Diri

Setelah mengerjakan Latihan 5 dan menilainya, isilah kolom berikut ini untuk mengetahui perkembangan dirimu!

Pertanyaan	Jawaban
1. Materi apa saja yang kamu pelajari hari ini?	
2. Apakah kamu bahagia dengan kegiatan belajar yang sudah terlaksana? Mengapa?	
3. Apa yang sudah kamu pahami dengan baik? Dan apa yang membuatmu berhasil memahaminya?	
4. Apa yang belum kamu pahami dengan baik? Menurut pendapatmu, apa yang membuatmu gagal memahami materi tersebut?	
5. Tindak Lanjut: **a. Jika hari ini sudah berhasil, upaya apa yang akan kamu lakukan untuk mempertahankannya?**	
b. Jika hari ini masih gagal, upaya apa yang akan kamu lakukan untuk memperbaikinya?	

Kegiatan Belajar 6

Titik Belok Kurva Fungsi Trigonometri

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Tujuan Belajar

Setelah mengikuti Kegiatan Belajar 6, diharapkan siswa dapat:

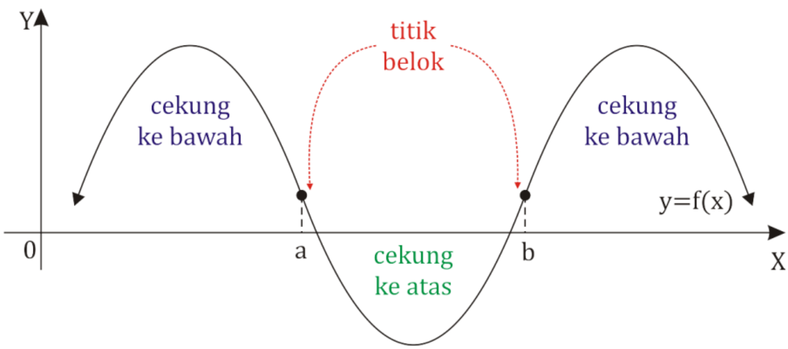
3.4.4 Menjelaskan hubungan turunan kedua fungsi dengan titik belok kurva fungsi trigonometri.

4.4.8 Menentukan titik belok kurva fungsi trigonometri menggunakan turunan kedua fungsi trigonometri.

Pertanyaan

Bagaimanakah cara untuk menentukan titik belok kurva fungsi trigonometri?

Sebelum kita belajar tentang cara menentukan titik belok, kita harus mengetahui definisi titik belok terlebih dahulu. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 2.33 Titik belok kurva fungsi trigonometri

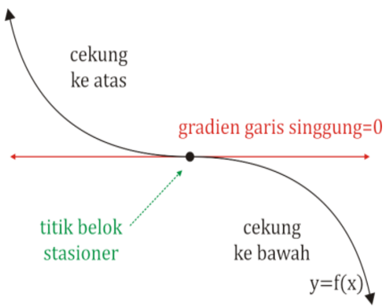
Titik belok (titik infleksi) adalah titik ketika suatu fungsi $y = f(x)$ mengalami perubahan bentuk, dari cekung ke atas menjadi cekung ke bawah, atau sebaliknya.

Titik Belok

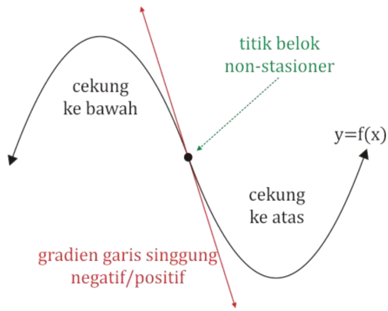
Titik belok adalah titik pada kurva $y = f(x)$ yang mengakibatkan terjadinya perubahan bentuk.
Titik belok dari suatu fungsi $y = f(x)$ dapat ditentukan dengan menggunakan turunan kedua fungsi $y = f(x)$, yaitu $f''(x) = 0$.

Ada dua jenis titik belok, yaitu titik belok horizontal dan titik belok non-horizontal.

1. Titik belok horizontal (titik belok stasioner), yaitu jika $f''(x) = 0$ dan $f'(x) = 0$ (garis singgung pada titik belok berada pada posisi horizontal/mendatar)
2. Titik belok non-horizontal (titik belok non-stasioner), yaitu jika $f''(x) = 0$ dan $f'(x) \neq 0$ (garis singgung pada titik belok bukan berada pada posisi horizontal)



Gambar 2.34 Titik belok horizontal (titik belok stasioner)



Gambar 2.35 Titik belok non-horizontal (titik belok non-stasioner)

Contoh 6.1

Carilah titik belok dari fungsi $f(x) = \sin x$ pada interval $0° < x < 360°$.

Penyelesaian

Diketahui fungsi trigonometri $f(x) = \sin x$. Kita akan menggunakan fungsi turunan kedua untuk mencari titik belok.

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$
$$f''(x) = -\sin x$$

Syarat titik belok: $f''(x) = 0$

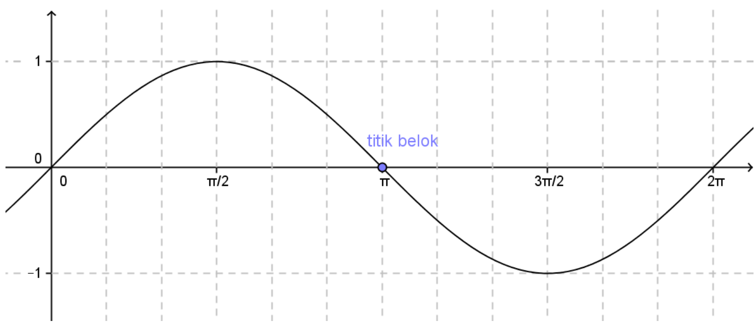
$$f''(x) = 0 \Rightarrow -\sin x = 0$$
$$\sin x = 0$$
$$x = 0°, 180°, 360°$$

Menghitung nilai fungsi $f(x) = \sin x$ saat $x = 180°$:

- $x = 180° \Rightarrow f(180°) = \sin(180°) = 0$

Keterangan: $x = 0°$ dan $x = 360°$ berada di luar interval $0° < x < 360°$.

Jadi, fungsi $f(x) = \sin x$ mempunyai titik belok $(180°, 0)$ pada interval $0° < x < 360°$.



Gambar 2.36 Kurva fungsi $f(x) = \sin x$ pada interval $0° < x < 360°$

Contoh 6.2

Carilah titik belok dari fungsi $f(x)=\cos x$ pada interval $0° < x < 360°$.

Penyelesaian

Diketahui fungsi trigonometri $f(x)=\cos x$.

$$f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x$$
$$f''(x)=-\cos x$$

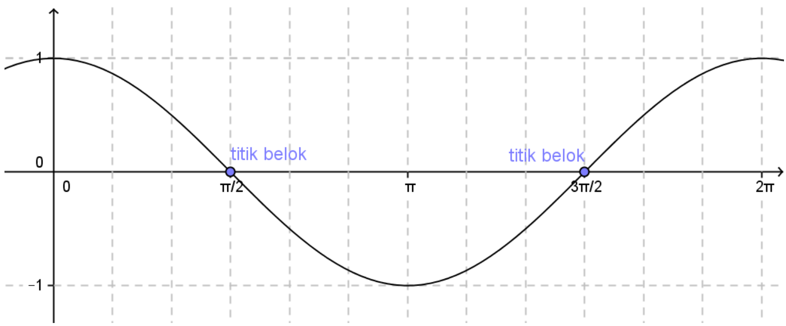
Syarat titik belok: $f''(x)=0$

$$f''(x)=0 \Rightarrow -\cos x=0$$
$$\cos x=0$$
$$x=90°, 270°$$

Menghitung nilai fungsi $f(x)=\cos x$ saat $x=90°$ dan $x=270°$:

- $x=90° \Rightarrow f(90°)=\cos(90°)=0$
- $x=270° \Rightarrow f(270°)=\cos(270°)=0$

Jadi, fungsi $f(x)=\cos x$ mempunyai titik belok $(90°,0)$ dan $(270°,0)$ pada interval $0° < x < 360°$.



Gambar 2.37 Kurva fungsi $f(x)=\cos x$ pada interval $0° < x < 360°$

Pengayaan Materi

Untuk memperjelas pemahaman kalian tentang cara menentukan titik belok kurva fungsi trigonometri, kalian dapat mengakses video pembelajaran dengan alamat:
https://m.youtube.com/watch?v=I7GekxUZ7ik&t=13s

Kolom Unity of Sciences

Sebagai manusia, kita harus senantiasa berjuang untuk taat. Hal ini karena pada dasarnya, hawa nafsu manusia selalu menyeru (condong) pada keburukan. Allah berfirman dalam Al-Qur'an Surat Yusuf ayat 53 berikut:

۞ وَمَآ اُبَرِّئُ نَفْسِيْۚ اِنَّ النَّفْسَ لَاَمَّارَةٌ ۢ بِالسُّوْۤءِ اِلَّا مَا رَحِمَ رَبِّيْۗ اِنَّ رَبِّيْ غَفُوْرٌ رَّحِيْمٌ ۝٥٣ (يوسف/12: 53)

Terjemah Kemenag 2019

53. Aku tidak (menyatakan) diriku bebas (dari kesalahan) karena sesungguhnya nafsu itu selalu mendorong kepada kejahatan, kecuali (nafsu) yang diberi rahmat oleh Tuhanku. Sesungguhnya Tuhanku Maha Pengampun lagi Maha Penyayang."

(Yusuf/12:53)

Karena itulah, kita harus selalu berusaha mengendalikan hawa nafsu kita, agar diri kita cenderung kepada kebaikan. Ketika kita sudah berada di jalan kebaikan, janganlah pernah berbalik arah!

Latihan 6

Dalam interval $0° \leq x \leq 360°$:

1. Tentukan titik belok dari fungsi $f(x) = -\sin x + \cos x$.
2. Tentukan titik belok dari fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$.
3. Tentukan titik belok dari fungsi $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$.
4. Tentukan titik belok dari fungsi $f(x) = 3 + 2\sin x$.
5. Tentukan titik belok dari fungsi $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$.

Umpan Balik dan Tindak Lanjut

اَلْحَمْدُ لِلّٰهِ رَبِّ الْعٰلَمِيْنَ

Kita telah selesai mengerjakan Latihan 6. Selanjutnya, nilailah jawabanmu secara mandiri berdasarkan panduan penskoran yang telah tersedia. Cocokkan jawaban Latihan 6 dengan kunci jawaban yang tersedia di bagian akhir modul ini. Ukurlah tingkat penguasaan materi Kegiatan Belajar 6 dengan rumus:

$$\boxed{\text{Nilai} = \frac{\text{jumlah skor yang diperoleh}}{\text{skor total}} \times 100}$$

Jika:

a. Nilai $\geq$ 70, lanjut pelajari Kegiatan Belajar 7.

b. Nilai $<$ 70, ulangi Kegiatan Belajar 6 (terutama pada bagian yang belum kalian kuasai dengan baik).

Jurnal Belajar untuk Refleksi Diri

Setelah mengerjakan Latihan 6 dan menilainya, isilah kolom berikut ini untuk mengetahui perkembangan dirimu!

Pertanyaan	Jawaban
1. Materi apa saja yang kamu pelajari hari ini?	
2. Apakah kamu bahagia dengan kegiatan belajar yang sudah terlaksana? Mengapa?	
3. Apa yang sudah kamu pahami dengan baik? Dan apa yang membuatmu berhasil memahaminya?	
4. Apa yang belum kamu pahami dengan baik? Menurut pendapatmu, apa yang membuatmu gagal memahami materi tersebut?	
5. Tindak Lanjut: **a. Jika hari ini sudah berhasil, upaya apa yang akan kamu lakukan untuk mempertahankannya?**	
b. Jika hari ini masih gagal, upaya apa yang akan kamu lakukan untuk memperbaikinya?	

Kegiatan Belajar 7

Kecekungan Kurva Fungsi Trigonometri

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Tujuan Belajar

Setelah mengikuti Kegiatan Belajar 7, diharapkan siswa dapat:

3.4.5 Menjelaskan hubungan turunan kedua fungsi dengan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.

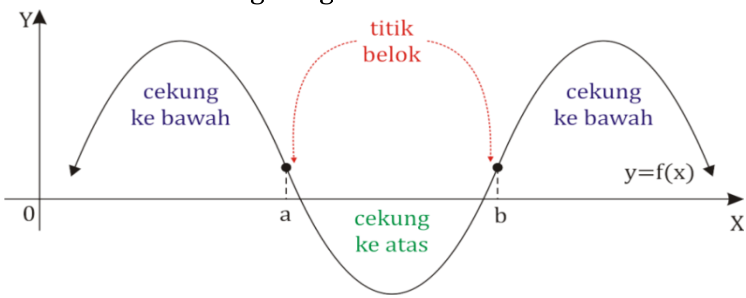
4.4.9 Menentukan selang/interval saat kurva fungsi trigonometri cekung ke atas.

4.4.10 Menentukan selang/interval saat kurva fungsi trigonometri cekung ke bawah.

Pertanyaan

Bagaimanakah cara menentukan interval saat kurva fungsi trigonometri berbentuk cekung ke atas maupun cekung ke bawah?

Sebelum kita belajar tentang cara menentukan interval kecekungan kurva fungsi trigonometri, perhatikan Gambar 2.29 berikut. Kita akan mengulang kembali definisi titik belok.



Gambar 2.38 Titik belok dan kecekungan kurva fungsi trigonometri $y = f(x)$

Berdasarkan Gambar 2.29, kita dapat mengetahui bahwa:

1. Pada interval $x < a$, kurva $y = f(x)$ berbentuk cekung ke bawah.
2. Titik $x = a$ pada kurva $y = f(x)$ merupakan titik belok.
3. Pada interval $a < x < b$, kurva $y = f(x)$ berbentuk cekung ke atas.
4. Titik $x = b$ pada kurva $y = f(x)$ merupakan titik belok.
5. Pada interval $x > b$, kurva $y = f(x)$ berbentuk cekung ke bawah.

Titik belok diartikan sebagai titik pada kurva yang mengakibatkan terjadinya perubahan bentuk.
Oleh karena itu, titik belok dijadikan sebagai batas interval kecekungan kurva fungsi trigonometri.

Kecekungan Kurva Fungsi Trigonometri

Diketahui fungsi trigonometri $y = f(x)$ pada suatu interval $a < x < b$, sedangkan $f''(x)$ merupakan turunan kedua fungsi $y = f(x)$.

a. Jika $f''(x) > 0$ (positif), maka fungsi $y = f(x)$ cekung ke atas.
b. Jika $f''(x) < 0$ (negatif), maka fungsi $y = f(x)$ cekung ke bawah.

Catatan: Nilai $x = a$, $x = b$, dst yang digunakan sebagai batas interval kecekungan kurva dapat dicari menggunakan syarat titik belok $f''(x) = 0$.

Contoh 7.1

Untuk $0° \leq x \leq 360°$, carilah interval saat kurva fungsi $f(x) = 1 + \sin x$:

a. Cekung ke atas
b. Cekung ke bawah

Penyelesaian

$$f(x) = 1 + \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$
$$f''(x) = -\sin x$$

Syarat titik belok: $f'(x) = 0$

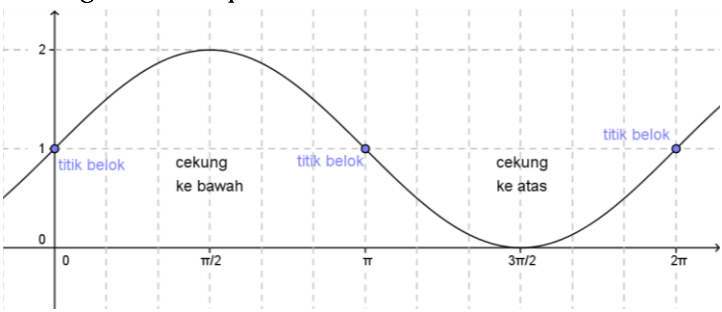
$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\sin x = 0$$
$$\sin x = 0$$
$$x = 0°, 180°, 360°$$

Fungsi $f(x) = 1 + \sin x$ mempunyai titik belok saat $x = 0°$, $x = 180°$, dan $x = 360°$ (gunakan sebagai batas interval):

Interval	Nilai $f''(x) = -\sin x$	Bentuk Kurva
$0° < x < 180°$	negatif	Cekung ke bawah
$180° < x < 360°$	positif	Cekung ke atas

Jadi, fungsi $f(x) = 1 + \sin x$ berbentuk:

a. Cekung ke atas pada interval $180° < x < 360°$
b. Cekung ke bawah pada interval $0° < x < 180°$



Gambar 2.39 Kurva fungsi $f(x) = 1 + \sin x$ pada interval $0° \leq x \leq 360°$

Contoh 7.2

Untuk $0° \le x \le 360°$, carilah interval saat kurva fungsi $f(x) = 1 - \cos x$:

a. Cekung ke atas
b. Cekung ke bawah

Penyelesaian

$$f(x) = 1 - \cos x \Rightarrow f'(x) = \sin x$$
$$f''(x) = \cos x$$

Syarat titik belok: $f''(x) = 0$

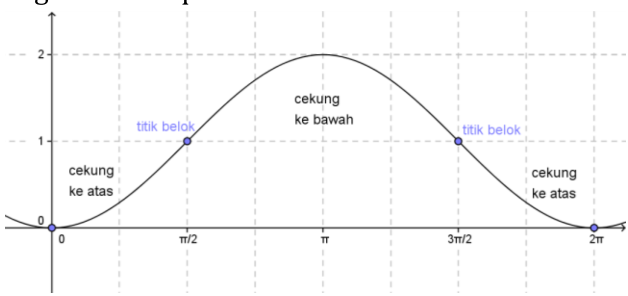
$$f''(x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$$
$$x = 90°, 270°$$

Fungsi $f(x) = 1 - \cos x$ mempunyai titik belok saat $x = 90°$ dan $x = 270°$ yang digunakan sebagai batas interval.

Interval	Nilai $f''(x) = \cos x$	Bentuk Kurva
$0° \le x < 90°$	positif	Cekung ke atas
$90° < x < 270°$	negatif	Cekung ke bawah
$270° < x \le 360°$	positif	Cekung ke atas

Jadi, fungsi $f(x) = 1 - \cos x$ berbentuk:

a. Cekung ke atas pada interval $0° \le x < 90°$ atau $270° < x \le 360°$
b. Cekung ke bawah pada interval $90° < x < 270°$



Gambar 2.40 Kurva fungsi $f(x) = 1 - \cos x$ pada interval $0° \le x \le 360°$

Pengayaan Materi

Untuk memperjelas pemahaman kalian tentang cara menentukan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri, kalian dapat mengakses video pembelajaran dengan alamat: https://m.youtube.com/watch?v=fzoXhH4wQhI&t=213s

Kolom Unity of Sciences

Selain berusaha untuk selalu berada di dalam kebaikan, jangan lupa juga untuk berdoa agar senantiasa dicondongkan kepada kebaikan. Doa agar selalu dicondongkan dalam kebaikan:

رَبَّنَا لَا تُزِغْ قُلُوْبَنَا بَعْدَ اِذْ هَدَيْتَنَا وَهَبْ لَنَا مِنْ لَّدُنْكَ رَحْمَةً ۚ اِنَّكَ اَنْتَ الْوَهَّابُ ۝٨ (اٰل عمران/3: 8)

Terjemah Kemenag 2019

8. (Mereka berdoa,) "Wahai Tuhan kami, janganlah Engkau jadikan hati kami berpaling setelah Engkau berikan petunjuk kepada kami dan anugerahkanlah kepada kami rahmat dari hadirat-Mu. Sesungguhnya Engkau Maha Pemberi.

(Ali 'Imran/3:8)

Jika kita sudah berada di jalan yang benar, yuk terus berusaha dan berdoa agar kita tidak mudah tergoda untuk berbalik arah (mengerjakan keburukan).

Latihan 7

1. Tentukan interval saat fungsi $f(x) = -\sin x + \cos x$ cekung ke atas maupun cekung ke bawah.
2. Tentukan interval saat fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$ cekung ke atas maupun cekung ke bawah.
3. Tentukan interval saat fungsi $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ cekung ke atas maupun cekung ke bawah.
4. Tentukan interval saat fungsi $f(x) = 3 + 2\sin x$ cekung ke atas maupun cekung ke bawah.
5. Tentukan interval saat fungsi $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ cekung ke atas maupun cekung ke bawah.

Umpan Balik dan Tindak Lanjut

اَلْحَمْدُ لِلّٰهِ رَبِّ الْعٰلَمِيْنَ

Kita telah selesai mengerjakan Latihan 7. Selanjutnya, nilailah jawabanmu secara mandiri berdasarkan panduan penskoran yang telah tersedia. Cocokkan jawaban Latihan 7 dengan kunci jawaban yang tersedia di bagian akhir modul ini. Ukurlah tingkat penguasaan materi Kegiatan Belajar 7 dengan rumus:

$$\boxed{\text{Nilai} = \frac{\text{jumlah skor yang diperoleh}}{\text{skor total}} \times 100}$$

Jika:

a. Nilai ≥ 70, lanjut mengerjakan Uji Kompetensi Bab II Penerapan Turunan Fungsi Trigonometri.

b. Nilai < 70, ulangi Kegiatan Belajar 7 (terutama pada bagian yang belum kalian kuasai dengan baik).

Jurnal Belajar untuk Refleksi Diri

Setelah mengerjakan Latihan 7 dan menilainya, isilah kolom berikut ini untuk mengetahui perkembangan dirimu!

Pertanyaan	Jawaban
1. Materi apa saja yang kamu pelajari hari ini?	
2. Apakah kamu bahagia dengan kegiatan belajar yang sudah terlaksana? Mengapa?	
3. Apa yang sudah kamu pahami dengan baik? Dan apa yang membuatmu berhasil memahaminya?	
4. Apa yang belum kamu pahami dengan baik? Menurut pendapatmu, apa yang membuatmu gagal memahami materi tersebut?	
5. Tindak Lanjut: **a. Jika hari ini sudah berhasil, upaya apa yang akan kamu lakukan untuk mempertahankannya?**	
b. Jika hari ini masih gagal, upaya apa yang akan kamu lakukan untuk memperbaikinya?	

Rangkuman

1. Turunan pertama fungsi trigonometri dapat digunakan untuk menentukan:
   a. Gradien garis singgung kurva trigonometri di satu titik
   b. Kemonotonan fungsi trigonometri
   c. Titik stasioner fungsi trigonometri
2. Gradien/kemiringan garis singgung kurva fungsi trigonometri $y = f(x)$ pada titik dengan absis $x = x_1$ adalah $m = f'(x_1)$.
3. Persamaan garis singgung kurva fungsi trigonometri $y = f(x)$ di titik (x_1, y_1) adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$, dengan $m = f'(x_1)$.
4. Syarat fungsi trigonometri monoton naik atau turun pada suatu interval:
   a. Fungsi naik saat $f'(x) > 0$ (positif)
   b. Fungsi turun saat $f'(x) < 0$ (negatif)
5. Titik stasioner fungsi trigonometri $y = f(x)$ dapat ditentukan dengan mencari nilai $x = x_1$ yang menyebabkan $f'(x) = 0$. Titik $(x_1, f(x_1))$ disebut titik stasioner, dan $f(x_1)$ adalah nilai stasioner.
6. Jenis titik stasioner:
   a. Titik balik maksimum
   b. Titik balik minimum
   c. Titik belok horizontal
7. Ada dua cara dalam menentukan jenis stasioner, yaitu dengan menggunakan uji turunan pertama dan uji turunan kedua.

8. Uji turunan pertama dilakukan dengan menguji daerah di sebelah kiri $(x = a)$ dan sebelah kanan $(x = b)$ dari titik stasioner $(x_1, f(x_1))$. Substitusikan nilai $x = a$ dan $x = b$ ke dalam fungsi turunan pertama. Jika:
   a. $f'(a) > 0$ (fungsi naik) dan $f'(b) < 0$ (fungsi turun): jenis stasionernya adalah titik balik maksimum.
   b. $f'(a) < 0$ (fungsi turun) dan $f'(b) > 0$ (fungsi naik): jenis stasionernya adalah titik balik minimum.
   c. $f'(a) > 0$ (fungsi naik) dan $f'(b) > 0$ (fungsi naik): jenis stasionernya adalah titik belok horizontal.
   d. $f'(a) < 0$ (fungsi turun) dan $f'(a) < 0$ (fungsi turun): jenis stasionernya adalah titik belok horizontal.
9. Nilai maksimum dan nilai minimum suatu fungsi $y = f(x)$ dalam suatu interval tertutup $a \leq x \leq b$ dapat diperoleh dari:
   a. Nilai stasioner fungsi $y = f(x)$ dalam interval tersebut
   b. Nilai fungsi $y = f(x)$ pada ujung interval
10. Turunan kedua fungsi trigonometri dapat digunakan untuk menentukan titik belok kurva dan melihat bentuk kecekungan kurva fungsi trigonometri.
11. Secara umum, kurva mempunyai dua bentuk, yaitu berbentuk cekung ke atas dan cekung ke bawah.
12. Titik belok merupakan titik ketika kurva suatu fungsi mengalami perubahan bentuk, dari dari cekung ke atas berubah cekung ke bawah, atau sebaliknya.
13. Titik belok fungsi $y = f(x)$ dapat dicari dengan menggunakan turunan kedua fungsi, dengan syarat titik belok yaitu $f''(x) = 0$.

14. Bentuk kurva fungsi $y = f(x)$ pada suatu interval $a < x < b$ dapat dilihat menggunakan turunan kedua fungsinya, yaitu:
    1. Jika $f''(x) > 0$ (positif), maka kurva berbentuk cekung ke atas.
    2. Jika $f''(x) < 0$ (negatif), maka kurva berbentuk cekung ke bawah.
15. Titik belok dan kecekungan kurva suatu fungsi dapat membantu penggambaran sketsa kurva fungsi trigonometri.

Info Aplikasi: Kurva Fungsi Trigonometri

Pada halaman 56, kita mengetahui bahwa salah satu cara untuk mengetahui nilai maksimum dan nilai minimum suatu fungsi adalah dengan melihat grafik fungsinya. Melalui grafik fungsi, kita dapat mengetahui:

1. Titik stasioner fungsi
2. Nilai maksimum dan nilai minimum fungsi
3. Kemonotonan (naik-turunnya) kurva fungsi pada suatu interval
4. Titik belok kurva fungsi
5. Bentuk kecekungan kurva fungsi pada suatu interval

Untuk mengetahui bentuk grafik suatu fungsi, kita dapat melukis grafiknya secara manual di buku tulis ataupun dengan bantuan kalkulator grafik (seperti: *Kalkulator Grafik Mathlab*, *Graphing Calculator-Algeo*, ataupun *Kalkulator Grafik Desmos*) yang dapat kalian unduh secara gratis.
Kalian dapat menggunakan kalkulator grafik ini setelah mengerjakan soal-soal latihan dalam Bab II Penerapan Turunan Fungsi Trigonometri untuk memeriksa grafik fungsinya dan memeriksa apakah jawaban kalian sudah tepat atau belum.

Uji Kompetensi Bab II

Penerapan Turunan Fungsi Trigonometri

Petunjuk:

- Kerjakan Uji Kompetensi Bab II ini untuk mengetahui tingkat penguasaanmu, baik pilihan ganda maupun uraian.
- Setelah selesai, bandingkan hasilnya dengan kunci jawaban yang tersedia dan berilah skor.
- Nilailah sendiri hasil pekerjaanmu sesuai petunjuk yang ada.

A. Pilihan Ganda

1. Turunan pertama suatu fungsi dapat digunakan untuk menentukan hal-hal berikut, **kecuali** ...
   a. Gradien garis singgung
   b. Laju perubahan
   c. Naik-turunnya fungsi
   d. Titik belok
   e. Titik stasioner
2. Garis singgung yang menyinggung kurva $f(x) = \cot x$ di titik yang berabsis $x = 60°$ mempunyai gradien sebesar ...
   a. $-\frac{4}{3}$ c. $\frac{4}{3}$ e. 4
   b. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ d. $\sqrt{3}$
3. Fungsi $f(x) = \sin x$ akan naik pada interval ...
   a. $0° \le x < 180°$
   b. $90° < x < 270°$
   c. $180° < x \le 360°$
   d. $180° < x < 270°$
   e. $0° \le x < 90°$ atau $270° < x \le 360°$
4. Fungsi $f(x) = \cos 2x$ akan turun pada interval ...

a. $0° < x < 90°$ atau $180° < x < 270°$
b. $90° < x < 180°$ atau $270° < x < 360°$
c. $0° < x < 90°$ atau $90° < x < 180°$
d. $180° < x < 270°$ atau $270° < x < 360°$
e. $0° < x < 90°$ atau $270° < x < 360°$

5. Titik stasioner fungsi $y = 2\sin x$ pada interval $0° \le x \le 360°$ adalah ...
   a. $(0°, 0)$ dan $(180°, 0)$
   b. $(0°, 0)$ dan $(360°, 0)$
   c. $(90°, 2)$ dan $(270°, -2)$
   d. $(90°, 2)$ dan $(180°, 0)$
   e. $(180°, 0)$ dan $(360°, 0)$
6. Nilai maksimum dari fungsi $f(x) = x + 2\cos x$ dalam interval $0° \le x \le 180°$ adalah ...
   a. $\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$
   b. $\frac{\pi}{6} + 1$
   c. $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$
   d. $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$
   e. $\frac{5\pi}{6} + \sqrt{3}$
7. Nilai minimum dari fungsi $f(x) = x + 2\sin x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$ adalah ...
   a. 0
   b. $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$
   c. $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$
   d. $\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$
   e. 2π
8. Titik-titik belok dari fungsi $f(x) = 1 + 2\sin x$ pada interval $0° < x < 360°$ adalah ...
   a. $(0°, 1)$ dan $(360°, 1)$
   b. $(0°, 1)$, $(180°, 1)$ dan $(360°, 1)$

c. $(90°,3)$ dan $(270°,-1)$

d. $(90°,3)$, $(180°,1)$ dan $(270°,-1)$

e. $(180°,1)$

9. Kurva fungsi $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ berbentuk cekung ke atas pada interval ...
   a. $0° \le x < 30°$ atau $210° < x \le 360°$
   b. $0° \le x < 60°$ atau $240° < x \le 360°$
   c. $30° < x < 210°$
   d. $60° < x < 240°$
   e. $150° < x < 330°$
10. Kurva fungsi $f(x)=\sqrt{3}\cos x+3\sin x$ berbentuk cekung ke bawah pada interval ...
   a. $0° \le x < 30°$ atau $210° < x \le 360°$
   b. $0° \le x < 150°$ atau $330° < x \le 360°$
   c. $30° < x < 210°$
   d. $120° < x < 300°$
   e. $150° < x < 330°$

B. Uraian

1. Tentukan kemiringan garis singgung pada kurva $f(x)=2\sin x-1$ di titik yang berabsis $x=30°$.
2. Tentukan semua interval saat fungsi $f(x)=2\cos x+1$ naik atau turun, dengan $0° \le x \le 360°$.
3. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $f(x)=\sqrt{3}\cos x-3\sin x$ pada interval $0° \le x \le 360°$.
4. Tentukan titik belok dari fungsi $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ pada interval $0° \le x \le 360°$.
5. Tentukan interval saat fungsi $f(x)=-\sqrt{3}\sin x+3\cos x$ cekung ke atas maupun cekung ke bawah.

Penutup

Panduan penilaian:

$$\boxed{\text{Nilai} = \frac{\text{jumlah skor yang diperoleh}}{\text{skor total}} \times 100}$$

Kriteria kelulusan:

a. Jika nilai kalian mencapai 70 ke atas, selamat. Teruslah belajar! Semangat!
b. Jika nilai kalian di bawah 70, pelajari kembali Bab II Penerapan Turunan Fungsi Trigonometri (khususnya bagian yang kurang dipahami) dan kerjakan kembali Uji Kompetensi Bab II.

Demikianlah materi tentang penerapan turunan pertama dan kedua fungsi trigonometri dalam menentukan kemiringan garis singgung kurva, kemonotonan fungsi trigonometri, dan titik stasioner fungsi trigonometri, titik belok kurva fungsi trigonometri, dan kecekungan kurva fungsi trigonometri.

Kolom Muhasabah

Doa berlindung dari ilmu yang tidak bermanfaat:

أَللَّهُمَّ إِنِّيْ أَعُوْذُ بِكَ مِنَ الْأَرْبَعِ: مِنْ عِلْمٍ لاَ يَنْفَعُ، وَ مِنْ قَلْبٍ لاَ يَخْشَعُ، وَ مِنْ نَفْسٍ لاَ تَشْبَعُ، وَ مِنْ دُعَاءٍ لاَ يُسْمَعُ.

Artinya: *"Ya Allah, aku berlindung kepada-Mu dari empat perkara: dari ilmu yang tidak bermanfaat, dari hati yang tidak khusyuk, dari jiwa yang tidak merasa puas, dan dari doa yang tidak didengar (tidak dikabulkan)."* (**HR Abu Dawud No.1458**)

Daftar Pustaka

Bird, John. 2004. *Matematika Dasar: Teori dan Aplikasi Praktis*. Edisi Ketiga. Terjemahan Refina Indriasari. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Budhi, Wono Setya. 2010. *Matematika 4: Bahan Ajar Persiapan Menuju Olimpiade Sains Nasional/Internasional SMA*. Jakarta: Zamrud Kemala.

Al-Bukhari, al-Imam Abi Abdillah Muhammad bin Isma'il. 2002. *Shahih al-Bukhari*. Beirut: Dar Ibnu Katsir.

Cunayah, Cucun dan Etsa Indra Irawan. 2015. *1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika untuk SMA/MA*. Bandung: Yrama Widya.

Gazali, Wikaria dan Soedadyatmodjo. 2007. *Kalkulus*. Edisi Kedua. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Hoffmann, Larence D. dan Gerald L. Bradley. 2007. *Student's Solutions Manual to Accompany Applied Calculus: For Business, Economics, and The Social and Life Sciences, Expanded Ninth Edition*. New York: McGraw-Hill Higher Education.

Juliartawan, I Wayan. 2005. *Matematika: Contoh Soal dan Penyelesaian dengan Formula Tercepat SMA*. Yogyakarta: Andi.

Kementerian Agama RI. 2019. *Al-Qur'an dan Terjemahannya Edisi Penyempurnaan 2019*. Jakarta: Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Qur'an Badan Litbang dan Diklat Kemeterian Agama RI.

Kurnia, Novianto dan S.N. Sharma. 2014. *Matematika 2 SMA Kelas XI: Peminatan MIPA*. Bogor: Yudhistira.

Muslim, Al-Imam Abi al-Husain bin al-Hajjaj bin Muslim al-Qusyairi an-Naisabury. 2000. *Shahih Muslim*. Riyadh: Darussalam.

Muslim, Imam. 2007. *Terjemahan Hadis Shahih Muslim Jilid I, II, III & IV*. Terjemahan Ma'mur Daud. Selangor: Klang Book Centre.

Negoro, S.T. dan B. Harahap. 2005. *Ensiklopedia Matematika*. Bogor: Penerbit Ghalia Indonesia.

Al-Qasthalani, Imam dan Imam an-Nawawi. 2007. *Ensiklopedi Hadits Qudsi dan Penjelasannya*. Jakarta: Pustaka As-Sunnah.

Razali, Muhammad, dkk. 2010. *Kalkulus Diferensial*. Bogor: Penerbit Ghalia Indonesia.

Rohana, & Ningsih, Y. L. 2016. Model Pembelajaran Reflektif untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Mahasiswa Calon Guru. *JPPM: Jurnal Penelitian dan Pembelajaran Matematika*, 9(2):145-158.

Sulaiman, Al-Imam al-Hafizh Abi Dawud bin al-Asya'ats al-Azdy as-Sijistany. 2009. *Sunan Abi Dawud Juz 2*. Hijaz: Dar al-Risalah al-'Alamiah.

Sharma, S.N. dkk. 2014. *Jelajah Matematika 2B SMA Kelas XI: Program Wajib*. Bogor: Yudhistira.

Sudaryono. 2013. *Kalkulus Diferensial (Teori dan Aplikasi)*. Jakarta: Kencana Prenada Media Group.

Tung, Khoe Yao. 2011. *Pintar Matematika SMA Kelas XI IPA untuk Olimpiade dan Pengayaan Pelajaran*. Yogyakarta: Andi Offset.

Varberg, Dale, Edwin J. Purcell dan Steven E. Rigdon. 2010. *Kalkulus Edisi Kesembilan: Jilid 1*. Terjemahan I Nyoman Susila. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Zandy, Bernard V. dan Jonathan J. White. 2004. *CliffsQuickReview™ Kalkulus*. Terjemahan Endang Santyaningsih. Bandung: Pakar Raya.

Sumber Online:

Adistiana, Karina Dwi. 2018. *Matematika Kelas 10: Memahami Fungsi Trigonometri Sederhana*. https://blog.ruangguru.com/memahami-fungsi-trigonometri-sederhana

Belajaran. 2020. *Cekung Atas dan Cekung Bawah (Selang Kecekungan) pada Fungsi Trigonometri Kelas 12 Matematika Minat*. https://m.youtube.com/watch?v=fzoXhH4wQhI&t=213s.

Belajaran. 2020. *Nilai Maksimum dan Minimum Fungsi Trigonometri Kelas 12 SMA Matematika Peminatan*. https://m.youtube.com/watch?v=3rrYy_jAhhc.

Belajaran. 2020. *Persamaan Garis Singgung Fungsi Trigonometri Kelas 12 Matematika Peminatan*. https://m.youtube.com/watch?v=q0qstWXY6bM.

Halim, Buku Matematika Gulam. 2020. *Titik Belok Fungsi Trigonometri Contoh 1*. https://m.youtube.com/watch?v=I7GekxUZ7ik&t=13s.

Rauf, Fathi. 2020. *Belajar Turunan Fungsi Trigonometri dengan Mudah*. https://blog.edukasystem.com/turunan-fungsi-trigonometri/

S., Eran Kyas. 2020. *Kelas XII Mat Minat – Aplikasi Turunan Trigonometri Titik Stasioner*. https://m.youtube.com/watch?v=YeM6nUKxkxw.

S., Eran Kyas. 2020. *Kelas XII Mat Minat – Aplikasi Turunan Trigonometri Selang Kemonotonan 1*. https://m.youtube.com/watch?v=1plWYW60jZ4&t=731s.

S., Eran Kyas. 2020. *Kelas XII Mat Minat – Aplikasi Turunan Trigonometri Selang Kemonotonan 2*. https://m.youtube.com/watch?v=kuTaxGFtyJM.

S., Eran Kyas. 2020. *Kelas XII Mat Minat – Aplikasi Turunan Trigonometri Soal Cerita 1*. https://m.youtube.com/watch?v=mAKVgoulqDw.
S., Eran Kyas. 2020. *Kelas XII Mat Minat – Aplikasi Turunan Trigonometri Soal Cerita 2*. https://m.youtube.com/watch?v=et4vSzgqh9Q.
S., Eran Kyas. 2020. *Kelas XII Matematika Minat - Turunan Trigonometri Part 1 (Soal-Soal Dasar)*. https://m.youtube.com/watch?v=UxxMVgY1AyI.
S., Eran Kyas. 2020. *Kelas XII Matematika Minat – Turunan Trigonometri Part 2 (Soal-Soal Lanjutan)*. https://m.youtube.com/watch?v=O3f6cwynTXQ.
S., Eran Kyas. 2020. *Kelas XII Matematika Minat – Turunan Trigonometri Part 3 (Soal-Soal Lanjutan)*. https://m.youtube.com/watch?v=pV8idULzfko.
https://www.quipper.com/id/blog/mapel/matematika/grafik-fungsi-trigonometri-matematika-kelas-10/

Glosarium

1. **Aturan rantai.** Aturan yang digunakan untuk mencari turunan fungsi komposisi (gabungan fungsi). Aturan rantai menyebutkan bahwa turunan dari gabungan fungsi adalah turunan dari fungsi luar sampai fungsi dalam dikali turunan dari fungsi dalam. Simbol aturan rantai:
$$\frac{d}{dx}\left[f\left(g\left(x\right)\right)\right]=f'\left(g\left(x\right)\right)\times g'\left(x\right)$$
2. **Garis singgung.** Garis singgung kurva adalah garis lurus yang menyentuh/menyinggung kurva pada titik tertentu dan mempunyai gradien yang sama dengan turunan fungsi pada titik tersebut.
3. **Gradien garis singgung.** Gradien garis singgung kurva pada suatu adalah satu cara untuk menyatakan turunan fungsi pada titik tersebut.
4. **Kecepatan sesaat.** Kecepatan sesaat adalah salah satu cara untuk menyatakan turunan sebuah fungsi posisi $s\left(t\right)$ pada saat t.
5. **Kontinu.** Sebuah fungsi $f\left(x\right)$ dikatakan kontinu pada sebuah titik $x=c$ jika:
   a. $f\left(c\right)$ ada,
   b. $\lim\limits_{x\to c} f\left(x\right)$ ada, dan
   c. $\lim\limits_{x\to c} f\left(x\right)=f\left(c\right)$

   Sebuah fungsi dikatakan kontinu pada suatu interval jika fungsi tersebut kontinu untuk semua titik dalam interval tersebut.
6. **Laju perubahan sesaat.** Laju perubahan sesaat atau limit dari laju perubahan rata-rata di antara titik tertentu dengan

titik- lain pada kurva yang semakin mendekati titik tertentu tersebut adalah salah satu cara untuk menyatakan turunan sebuah fungsi pada suatu titik.

7. **Limit**. Sebuah fungsi $f(x)$ mempunyai nilai L untuk limitnya ketika x mendekati c. Jika nilai x semakin mendekati c, maka nilai $f(x)$ semakin mendekati L.
8. **Teorema nilai ekstrim**. Teorema yang menyatakan bahwa sebuah fungsi yang kontinu pada interval tertutup $[a,b]$ harus mempunyai nilai maksimum dan minimum pada $[a,b]$.
9. **Titik infleksi (titik belok)**. Sebuah titik disebut titik infleksi sebuah fungsi jika fungsi tersebut berubah dari melengkung ke atas menjadi melengkung ke bawah atau sebaliknya, pada titik tersebut.
10. **Titik kritis (titik stasioner)**. Titik kritis sebuah fungsi adalah titik $(x, f(x))$, dengan x pada ranah fungsi tersebut, baik $f'(x)=0$ atau $f'(x)$ tidak ditentukan. Titik-titik kritis berada di antara angka-angka akan menjadi nilai maksimum atau minimum sebuah fungsi.
11. **Turunan**. Turunan sebuah fungsi $f(x)$ merupakan sebuah fungsi yang menyatakan gradien garis singgung fungsi $f(x)$ pada setiap nilai x. Turunan paling sering dinyatakan sebagai $f'(x)$. Definisi matematis turunan ini adalah $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, atau dengan kata lain limit gradien-gradien dari garis sekan melalui titik $(x, f(x))$ dan titik kedua pada grafik $f(x)$ ketika titik kedua tersebut mendekati yang pertama. Turunan dapat diartikan sebagai

gradien dari sebuah garis singgung ke fungsi tersebut, atau kecepatan sesaat dari fungsi tersebut.

12. **Turunan tingkat tinggi (turunan lanjutan).** Turunan tingkat tinggi adalah turunan kedua, ketiga, keempat, dan seterusnya untuk suatu fungsi.
13. **Uji turunan pertama untuk titik stasioner.** Metode yang digunakan untuk menentukan jenis titik stasioner dengan melihat perubahan tanda/nilai turunan pertama fungsinya pada daerah di sekitar titik stasioner.
14. **Uji turunan kedua untuk titik stasioner.** Metode yang digunakan untuk menentukan jenis titik stasioner menggunakan tanda/nilai turunan kedua fungsinya pada titik stasioner.
15. **Variabel.** Variabel/peubah adalah lambang kuantitas yang berubah-ubah.

Nilai Fungsi Trigonometri pada Sudut-Sudut Istimewa

Nilai x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\sec x$	$\csc x$
$0°$	0	1	0	∞	1	∞
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
$45°$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60°$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$90°$	1	0	∞	0	∞	1
$120°$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$135°$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$150°$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
$180°$	0	-1	0	∞	-1	∞
$210°$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
$225°$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$240°$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$270°$	-1	0	∞	0	∞	-1

Nilai x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\sec x$	$\csc x$
300°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
315°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
360°	0	1	0	∞	1	∞

Kunci Jawaban dan Panduan Penskoran

Modul Turunan Fungsi Trigonometri

Bab I Turunan Fungsi Trigonometri

Latihan 1: Turunan Fungsi Trigonometri Sederhana

No	Jawaban	Skor
1.	$f'(x) = 2\cos x - \sin x$	1
2.	$f'(x) = \cos x - 3\sec^2 x$	1
3.	$f'(x) = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = 2\cos 2x$	1
4.	$f'(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x = 1 + \cot^2 x$	1
5.	$f'(x) = 4\cos 4x + 15\sin 3x$	1
6.	$f'(x) = -15\cos(-5x)$	1
7.	$f'(x) = 2x + 4\cos 4x$	1
8.	$f'(x) = 12x^3 \sin 5x + 15x^4 \cos 5x$	1
9.	$f'(x) = 2\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$	1
10.	$f'(x) = \dfrac{5x^2 \cos 5x - 2x\sin 5x}{x^4} = \dfrac{5x\cos 5x - 2\sin 5x}{x^3}$	1
Skor Total		10

Latihan 2: Turunan Fungsi Trigonometri Komposisi

No	Jawaban	Skor
1.	$y' = \left(-2-3x^2\right)\sin\left(2x+x^3\right)$	1
2.	$y' = (4x+4)\sin\left(x^2+2x\right)\cos\left(x^2+2x\right)$	1
3.	$y' = \dfrac{x\sec x^2 \tan x^2}{\sqrt{\sec x^2}}$	1
4.	$y' = 6\cos 2x \sin^2 2x$	1
5.	$y' = (2x-4)\sin\left(x^2-4x+1\right)$	1
6.	$y' = 3\sin^2 x \cos x$	1
7.	$y' = 2\tan x \sec^2 x$	1
8.	$y' = 6x\cos\left(3x^2\right)$	1
9.	$y' = \left(-40x^4-6x+1\right)\csc\left(8x^5+3x^2-x\right)\cot\left(8x^5+3x^2-x\right)$	1
10.	$y' = (-6x-9)\cot^2\left(x^2+3x-1\right)\csc^2\left(x^2+3x-x\right)$	1
Skor Total		10

Latihan 3: Turunan Lanjutan Fungsi Trigonometri

No	Jawaban	Skor
1.	Turunan pertama: $f'(x) = -4\sin 4x$	1
2.	Turunan kedua: $f''(x) = -16\cos 4x$	1
3.	Turunan ketiga: $f'''(x) = 64\sin 4x$	1
4.	Turunan keempat: $f^{(4)}(x) = 256\cos 4x$	1
5.	Turunan kelima: $f^{(5)}(x) = -1024\sin 4x$	1
Skor Total		5

Uji Kompetensi Bab I Turunan Fungsi Trigonometri

A. Pilihan Ganda

No	Jawaban	Skor
1.	A. $2\sin x$	1
2.	D. $f'(x) = 4\cos x - 5\sin x$	1
3.	B. $2x\sin 3x + 3x^2\cos 3x$	1
4.	B. -1	1
5.	E. $-\left(6x^2 - 2x\right)\sin\left(2x^3 - x^2\right)$	1
6.	A. $3\sin(2x+1) + (6x-4)\cos(2x+1)$	1
7.	A. $4\sin(2x+3)\cos(2x+3)$	1
8.	E. $-3\sin(3-2x)\sin(6-4x)$	1
9.	E. $3\cos(3-2x)\sin(6-4x)$	1
10.	D. $-40\cos 2x$	1
Skor Total		10

B. Uraian

No	Jawaban	Skor
1.	$f'(x) = 5\cos(3x+1) - (15x-6)\sin(3x+1)$ atau $f'(x) = 5\cos(3x+1) + (6-15x)\sin(3x+1)$	2
2.	$f'(x) = \dfrac{-3x\sin 3x - \cos 3x}{x^2}$	2
3.	$f'(x) = 21\sin(5-3x)$	2
4.	$f'(x) = (6x+6)\sin^2\left(x^2+2x\right)\cos\left(x^2+2x\right)$	2
5.	$f''(x) = 6x + 5\sin x$	2
Skor Total		10

Bab II Penerapan Turunan Fungsi Trigonometri

Latihan 1: Kemiringan Garis Singgung Kurva Fungsi Trigonometri

No	Rincian	Jawaban	Skor
1.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = 2\sec^2 x$	1
	Gradien garis singgung	$m = 2$	1
2.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = 2\cos 2x$	1
	Gradien garis singgung	$m = -2$	1
3.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = \sec x \tan x$	1
	Gradien garis singgung	$m = 0$	1
4.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = -2\sin 2x$	1
	Gradien garis singgung	$m = 0$	1
5.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = \sec x \tan x - \csc x \cot x$	1
	Gradien garis singgung	$m = 0$	1
Skor Total			10

Latihan 2: Nilai Stasioner dan Titik Stasioner Fungsi Trigonometri

No	Rincian	Jawaban	Skor
1.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$	1
	Nilai x saat stasioner	$x = 60°$ dan $x = 240°$	1
	Nilai stasioner	$f(60°) = 2$ dan $f(240°) = -2$	1
	Titik stasioner	$(60°, 2)$ dan $(240°, -2)$	1
2.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = -2\sin x - 2\cos x$	1
	Nilai x saat stasioner	$x = 135°$ dan $x = 315°$	1
	Nilai stasioner	$f(135°) = -2\sqrt{2}$ dan $f(315°) = 2\sqrt{2}$	1
	Titik stasioner	$(135°, -2\sqrt{2})$ dan $(315°, 2\sqrt{2})$	1
3.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = 2\cos 2x - 2\sqrt{3}\sin 2x$	1
	Nilai x saat stasioner	$x = 15°$, $x = 105°$, $x = 195°$ dan $x = 285°$	1
	Nilai stasioner	$f(15°) = 2$, $f(105°) = -2$, $f(195°) = 2$ dan $f(285°) = -2$	1
	Titik stasioner	$(15°, 2)$, $(105°, -2)$, $(195°, 2)$ dan $(285°, -2)$	1

No	Rincian	Jawaban	Skor
4.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = -\sqrt{3}\sin x + 3\cos x$	1
	Nilai x saat stasioner	$x = 60^\circ$ dan $x = 240^\circ$	1
	Nilai stasioner	$f(60^\circ) = 2\sqrt{3}$ dan $f(240^\circ) = -2\sqrt{3}$	1
	Titik stasioner	$(60^\circ, 2\sqrt{3})$ dan $(240^\circ, -2\sqrt{3})$	1
5.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$	1
	Nilai x saat stasioner	$x = 120^\circ$ dan $x = 300^\circ$	1
	Nilai stasioner	$f(120^\circ) = 2$ dan $f(300^\circ) = -2$	1
	Titik stasioner	$(120^\circ, 2)$ dan $(300^\circ, -2)$	1
Skor Total			20

Latihan 3: Kemonotonan Fungsi Trigonometri

No	Rincian	Jawaban	Skor
1.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = \cos x + \sin x$	1
	Nilai x saat stasioner	$x = 135^\circ$ dan $x = 315^\circ$	1
	Interval saat fungsi naik	$0^\circ \le x < 135^\circ$ atau $315^\circ < x \le 360^\circ$	1
	Interval saat fungsi turun	$135^\circ < x < 315^\circ$	1
2.	Fungsi turunan	$f'(x) = 2\cos x$	1

No	Rincian	Jawaban	Skor
	pertama		
	Nilai x saat stasioner	$x = 90°$ dan $x = 270°$	1
	Interval saat fungsi naik	$0° \leq x < 90°$ atau $270° < x \leq 360°$	1
	Interval saat fungsi turun	$90° < x < 270°$	1
3.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$	1
	Nilai x saat stasioner	$x = 60°$ dan $x = 240°$	1
	Interval saat fungsi naik	$0° \leq x < 60°$ atau $240° < x \leq 360°$	1
	Interval saat fungsi turun	$60° < x < 240°$	1
4.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = -2\sin x - 2\cos x$	1
	Nilai x saat stasioner	$x = 135°$ dan $x = 315°$	1
	Interval saat fungsi naik	$135° < x < 315°$	1
	Interval saat fungsi turun	$0° \leq x < 135°$ atau $315° < x \leq 360°$	1
5.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$	1
	Nilai x saat stasioner	$x = 120°$ dan $x = 300°$	1
	Interval saat fungsi naik	$0° \leq x < 120°$ atau $300° < x \leq 360°$	1
	Interval saat fungsi turun	$120° < x < 300°$	1
Skor Total			20

Latihan 4: Nilai Maksimum dan Nilai Minimum Fungsi Trigonometri

No	Rincian	Jawaban	Skor
1.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = -\sqrt{3}\sin x + 3\cos x$	1
	Nilai x saat stasioner	$x = 60°$ dan $x = 240°$	1
	Nilai ujung interval dan nilai stasioner	- $f(0°) = \sqrt{3}$ - $f(60°) = 2\sqrt{3}$ - $f(240°) = -2\sqrt{3}$ - $f(360°) = \sqrt{3}$	1
	Nilai maksimum	$2\sqrt{3}$ saat $x = 60°$	1
	Nilai minimum	$-2\sqrt{3}$ saat $x = 240°$	1
2.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$	1
	Nilai x saat stasioner	$x = 120°$ dan $x = 300°$	1
	Nilai ujung interval dan nilai stasioner	- $f(0°) = -1$ - $f(120°) = 2$ - $f(300°) = -2$ - $f(360°) = -1$	1
	Nilai maksimum	2 saat $x = 120°$	1
	Nilai minimum	-2 saat $x = 300°$	1
3.	Fungsi turunan pertama	$H'(t) = 90°\cos(t.45°)$	1
	Nilai t saat stasioner	$t = 2, 6, 10, 14, 18, \ldots$	1
	Nilai ujung interval dan nilai stasioner	- $H(1) = 5{,}5 + \sqrt{2}$	1

No	Rincian	Jawaban	Skor
		- $H(2)=7,5$ - $H(6)=3,5$ - $H(10)=7,5$ - $H(14)=3,5$ - $H(15)=5,5-\sqrt{2}$	
	Jumlah produksi minimal	350.000 unit	1
	Waktu saat jumlah produksi minimal	- $t=6$ (bulan ke-6, yaitu Juni 2018) - $t=14$ (bulan ke-14, yaitu Februari 2019)	1
4.	Fungsi turunan pertama	$D'(t)=-45°\sin(t.30°)$	1
	Nilai t saat stasioner	$t=0,6,12,18,24,30,36,\ldots$	1
	Nilai ujung interval dan nilai stasioner	- $D(0)=5$ - $D(6)=2$ - $D(12)=5$ - $D(18)=2$ - $D(24)=5$	1
	Waktu ketika ketinggian air laut mencapai maksimum	$t=0$, $t=12$, $t=24$ (pukul 12 malam dan 12 siang)	1
	Waktu ketika ketinggian air laut mencapai minimum	$t=6$ dan $t=18$ (pukul 6 pagi dan 6 sore)	1
	Ketinggian maksimum air laut	5 meter	1
5.	Fungsi turunan	$T'(t)=-48°\sin(t.30°)$	1

No	Rincian	Jawaban	Skor
	pertama		
	Nilai t saat stasioner	$t = 0, 6, 12, 18, 24, \ldots$	1
	Nilai ujung interval dan nilai stasioner	- $T(0) = 98,7$ - $T(6) = 97,5$ - $T(12) = 98,7$ - $T(18) = 97,5$ - $T(24) = 98,7$	1
	Waktu saat ruangan bersuhu maksimum	$t = 0$, $t = 12$, $t = 24$ (pukul 12 malam dan 12 siang)	1
	Waktu saat ruangan bersuhu minimum	$t = 6$ dan $t = 18$ (pukul 6 pagi dan 6 sore)	1
	Suhu maksimum ruangan	$98,7°F$	1
	Suhu minimum ruangan	$97,5°F$	1
Skor Total			28

Latihan 5: Jenis Titik Stasioner

No	Rincian	Jawaban	Skor
1.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$	1
	Fungsi turunan kedua	$f''(x) = -\sqrt{3}\sin x - \cos x$	1
	Nilai x saat stasioner	$x = 60°$ dan $x = 240°$	1
	Nilai stasioner	$f(60°) = 2$ dan $f(240°) = -2$	1

No	Rincian	Jawaban	Skor
	Titik stasioner	$(60°, 2)$ dan $(240°, -2)$	1
	Jenis titik stasioner	$(60°, 2)$: titik balik maksimum $(240°, -2)$: titik balik minimum	1
2.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = -2\sin x - 2\cos x$	1
	Fungsi turunan kedua	$f''(x) = -2\cos x + 2\sin x$	1
	Nilai x saat stasioner	$x = 135°$ dan $x = 315°$	1
	Nilai stasioner	$f(135°) = -2\sqrt{2}$ dan $f(315°) = 2\sqrt{2}$	1
	Titik stasioner	$(135°, -2\sqrt{2})$ dan $(315°, 2\sqrt{2})$	1
	Jenis titik stasioner	$(135°, -2\sqrt{2})$: titik balik minimum $(315°, 2\sqrt{2})$: titik balik maksimum	1
3.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = 2\cos 2x - 2\sqrt{3}\sin 2x$	1
	Fungsi turunan kedua	$f''(x) = -4\sin 2x - 4\sqrt{3}\cos 2x$	1
	Nilai x saat stasioner	$x = 15°$, $x = 105°$, $x = 195°$ dan $x = 285°$	1
	Nilai stasioner	$f(15°) = 2$, $f(105°) = -2$, $f(195°) = 2$ dan	1

No	Rincian	Jawaban	Skor
		$f(285°)=-2$	
	Titik stasioner	$(15°,2)$, $(105°,-2)$, $(195°,2)$ dan $(285°,-2)$	1
	Jenis titik stasioner	$(15°,2)$: titik balik maksimum $(105°,-2)$: titik balik minimum $(195°,2)$: titik balik maksimum $(285°,-2)$: titik balik minimum	1
4.	Fungsi turunan pertama	$f'(x)=-\sqrt{3}\sin x+3\cos x$	1
	Fungsi turunan kedua	$f''(x)=-\sqrt{3}\cos x-3\sin x$	1
	Nilai x saat stasioner	$x=60°$ dan $x=240°$	1
	Nilai stasioner	$f(60°)=2\sqrt{3}$ dan $f(240°)=-2\sqrt{3}$	1
	Titik stasioner	$(60°,2\sqrt{3})$ dan $(240°,-2\sqrt{3})$	1
	Jenis titik stasioner	$(60°,2\sqrt{3})$: titik balik maksimum $(240°,-2\sqrt{3})$: titik balik minimum	1
5.	Fungsi turunan pertama	$f'(x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x$	1
	Fungsi turunan	$f''(x)=-\sqrt{3}\sin x+\cos x$	1

No	Rincian	Jawaban	Skor
	kedua		
	Nilai x saat stasioner	$x=120°$ dan $x=300°$	1
	Nilai stasioner	$f(120°)=2$ dan $f(300°)=-2$	1
	Titik stasioner	$(120°,2)$ dan $(300°,-2)$	1
	Jenis titik stasioner	$(120°,2)$: titik balik maksimum $(300°,-2)$: titik balik minimum	1
Skor Total			30

Latihan 6: Titik Belok Kurva Fungsi Trigonometri

No	Rincian	Jawaban	Skor
1.	Fungsi turunan pertama	$f'(x)=-\cos x-\sin x$	1
	Fungsi turunan kedua	$f''(x)=\sin x-\cos x$	1
	Nilai x saat belok	$x=45°$ dan $x=225°$	1
	Nilai fungsi $f(x)$ saat belok	$f(45°)=0$ dan $f(225°)=0$	1
	Titik belok	$(45°,0)$ dan $(225°,0)$	1
2.	Fungsi turunan pertama	$f'(x)=\cos x-\sin x$	1
	Fungsi turunan kedua	$f''(x)=-\sin x-\cos x$	1
	Nilai x saat belok	$x=135°$ dan $x=315°$	1
	Nilai fungsi $f(x)$	$f(135°)=0$ dan	1

No	Rincian	Jawaban	Skor
	saat belok	$f(315°)=0$	
	Titik belok	$(135°,0)$ dan $(315°,0)$	1
3.	Fungsi turunan pertama	$f'(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$	1
	Fungsi turunan kedua	$f''(x)=-\sqrt{3}\sin x-\cos x$	1
	Nilai x saat belok	$x=150°$ dan $x=330°$	1
	Nilai fungsi $f(x)$ saat belok	$f(150°)=0$ dan $f(330°)=0$	1
	Titik belok	$(150°,0)$ dan $(330°,0)$	1
4.	Fungsi turunan pertama	$f'(x)=2\cos x$	1
	Fungsi turunan kedua	$f''(x)=-2\sin x$	1
	Nilai x saat belok	$x=0°$, $x=180°$ dan $x=360°$	1
	Nilai fungsi $f(x)$ saat belok	$f(0°)=3$, $f(180°)=3$ dan $f(360°)=3$	1
	Titik belok	$(0°,3)$, $(180°,3)$ dan $(360°,3)$	1
5.	Fungsi turunan pertama	$f'(x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x$	1
	Fungsi turunan kedua	$f''(x)=-\sqrt{3}\sin x+\cos x$	1
	Nilai x saat belok	$x=30°$ dan $x=210°$	1
	Nilai fungsi $f(x)$ saat belok	$f(30°)=0$ dan $f(210°)=0$	1

No	Rincian	Jawaban	Skor
	Titik stasioner	$(30°,0)$ dan $(210°,0)$	1
Skor Total			25

Latihan 7: Kecekungan Kurva Fungsi Trigonometri

No	Rincian	Jawaban	Skor
1.	Fungsi turunan pertama	$f'(x)=-\cos x-\sin x$	1
	Fungsi turunan kedua	$f''(x)=\sin x-\cos x$	1
	Nilai x saat belok	$x=45°$ dan $x=225°$	1
	Interval saat fungsi cekung ke atas	$45°<x<225°$	1
	Interval saat fungsi cekung ke bawah	$0°\leq x<45°$ atau $225°<x\leq 360°$	1
2.	Fungsi turunan pertama	$f'(x)=\cos x-\sin x$	1
	Fungsi turunan kedua	$f''(x)=-\sin x-\cos x$	1
	Nilai x saat belok	$x=135°$ dan $x=315°$	1
	Interval saat fungsi cekung ke atas	$135°<x<315°$	1
	Interval saat fungsi cekung ke bawah	$0°\leq x<135°$ atau $315°<x\leq 360°$	1
3.	Fungsi turunan pertama	$f'(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$	1
	Fungsi turunan kedua	$f''(x)=-\sqrt{3}\sin x-\cos x$	1
	Nilai x saat belok	$x=150°$ dan $x=330°$	1
	Interval saat fungsi cekung ke atas	$150°<x<330°$	1
	Interval saat fungsi cekung ke bawah	$0°\leq x<150°$ atau	1

No	Rincian	Jawaban	Skor
		$330° < x \leq 360°$	
4.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = 2\cos x$	1
	Fungsi turunan kedua	$f''(x) = -2\sin x$	1
	Nilai x saat belok	$x = 0°$, $x = 180°$ dan $x = 360°$	1
	Interval saat fungsi cekung ke atas	$180° < x < 360°$	1
	Interval saat fungsi cekung ke bawah	$0° < x < 180°$	1
5.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$	1
	Fungsi turunan kedua	$f''(x) = -\sqrt{3}\sin x + \cos x$	1
	Nilai x saat belok	$x = 30°$ dan $x = 210°$	1
	Interval saat fungsi cekung ke atas	$0° \leq x < 30°$ atau $210° < x \leq 360°$	1
	Interval saat fungsi cekung ke bawah	$30° < x < 210°$	1
Skor Total			25

Uji Kompetensi Bab II Penerapan Turunan Fungsi Trigonometri

A. Pilihan Ganda

No	Jawaban	Skor
1.	D. Titik belok	1
2.	A. $-\frac{4}{3}$	1
3.	E. $0° \le x < 90°$ atau $270° < x \le 360°$	1
4.	A. $0° < x < 90°$ atau $180° < x < 270°$	1
5.	C. $(90°, 2)$ dan $(270°, -2)$	1
6.	C. $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$	1
7.	A. 0	1
8.	E. $(180°, 1)$	1
9.	B. $0° \le x < 60°$ atau $240° < x \le 360°$	1
10.	B. $0° \le x < 150°$ atau $330° < x \le 360°$	1
Skor Total		10

B. Uraian

No	Rincian	Jawaban	Skor
1.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = 2\cos x$	1
	Gradien garis singgung saat $x = 30°$	$m = \sqrt{3}$	1
2.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = -2\sin x$	1
	Nilai x saat stasioner	$x = 0°$, $x = 180°$ dan $x = 360°$	1
	Interval saat fungsi naik	$180° < x < 360°$	1

No	Rincian	Jawaban	Skor
	Interval saat fungsi turun	$0° < x < 180°$	1
3.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = -\sqrt{3}\sin x - 3\cos x$	1
	Nilai x saat stasioner	$x = 120°$ dan $x = 300°$	1
	Nilai ujung interval dan nilai stasioner	- $f(0°) = \sqrt{3}$ - $f(120°) = -2\sqrt{3}$ - $f(300°) = 2\sqrt{3}$ - $f(360°) = \sqrt{3}$	1
	Nilai maksimum	$2\sqrt{3}$ saat $x = 300°$	1
	Nilai minimum	$-2\sqrt{3}$ saat $x = 120°$	1
4.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$	1
	Fungsi turunan kedua	$f''(x) = -\sin x - \sqrt{3}\cos x$	1
	Nilai x saat belok	$x = 120°$ atau $x = 300°$	1
	Titik belok	$(120°, 0)$ atau $(300°, 0)$	1
5.	Fungsi turunan pertama	$f'(x) = -\sqrt{3}\cos x - 3\sin x$	1
	Fungsi turunan kedua	$f''(x) = \sqrt{3}\sin x - 3\cos x$	1
	Nilai x saat belok	$x = 60°$ atau $x = 240°$	1
	Interval saat fungsi cekung ke atas	$60° < x < 240°$	1
	Interval saat fungsi cekung ke bawah	$0° \leq x < 60°$ atau $240° < x \leq 360°$	1
Skor Total			20

Modul Turunan Fungsi Trigonometri

Bab I Turunan Fungsi Trigonometri

Latihan 1: Turunan Fungsi Trigonometri Sederhana

1. $f(x) = 2\sin x + \cos x$

   Penyelesaian:

   $f(x) = 2\sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = 2\cos x - \sin x$

2. $f(x) = \sin x - 3\tan x$

   Penyelesaian:

   $f(x) = \sin x - 3\tan x \Rightarrow f'(x) = \cos x - 3\sec^2 x$

3. $f(x) = (2\sin x)(\cos x)$

   Penyelesaian:

   Misalkan $f(x) = (2\sin x)(\cos x) = uv$.

   Maka: $u = 2\sin x \Rightarrow u' = 2\cos x$ dan $v = \cos x \Rightarrow v' = -\sin x$.

   Diperoleh: $f'(x) = u'v + uv'$

   $$\begin{aligned} &= (2\cos x)(\cos x) + (2\sin x)(-\sin x) \\ &= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = 2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \\ &= 2\cos 2x \end{aligned}$$

4. $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x}$

   Penyelesaian:

   Misalkan $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x} = \dfrac{u}{v}$. Maka:

   $u = \sin x - \cos x \Rightarrow u' = \cos x + \sin x$ dan $v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$

Diperoleh: $f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)(\sin x)-(\sin x-\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\sin x\cos x+\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}=\csc^2 x=1+\cot^2 x$$

5. $f(x)=\sin 4x-5\cos 3x$

Penyelesaian:

$$f(x)=\sin 4x-5\cos 3x \Rightarrow f'(x)=4(\cos 4x)-5(-3\sin 3x)$$
$$=4\cos 4x+15\sin 3x$$

6. $f(x)=3\sin(-5x)$

Penyelesaian:

$$f(x)=3\sin(-5x)\Rightarrow f'(x)=3(-5)\cos(-5x)=-15\cos(-5x)$$

7. $f(x)=x^2+\sin 4x$

Penyelesaian:

$$f(x)=x^2+\sin 4x\Rightarrow f'(x)=2x+4\cos 4x$$

8. $f(x)=3x^4\sin 5x$

Penyelesaian:

Misalkan $f(x)=3x^4\sin 5x=uv$. Maka:

$u=3x^4\Rightarrow u'=12x^3$ dan $v=\sin 5x\Rightarrow v'=5\cos 5x$

Diperoleh: $f'(x)=u'v+uv'$

$$=(12x^3)(\sin 5x)+(3x^4)(5\cos 5x)$$

$$=12x^3\sin 5x+15x^4\cos 5x$$

9. $f(x)=\sin 2x\cos x$

Penyelesaian:

Misalkan $f(x)=\sin 2x \cos x = uv$. Maka:

$u=\sin 2x \Rightarrow u' = 2\cos 2x$ dan $v=\cos x \Rightarrow v' = -\sin x$

Diperoleh: $f'(x) = u'v + uv'$

$$= (2\cos 2x)(\cos x) + (\sin 2x)(-\sin x)$$

$$= 2\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$$

10. $f(x) = \dfrac{\sin 5x}{x^2}$

Penyelesaian:

Misalkan $f(x) = \dfrac{\sin 5x}{x^2} = \dfrac{u}{v}$. Maka:

$u = \sin 5x \Rightarrow u' = 5\cos 5x$ dan $v = x^2 \Rightarrow v' = 2x$

Diperoleh: $f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$= \frac{(5\cos 5x)(x^2) - (\sin 5x)(2x)}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{5x^2 \cos 5x - 2x \sin 5x}{x^4} = \frac{5x\cos 5x - 2\sin 5x}{x^3}$$

Latihan 2: Turunan Fungsi Trigonometri Komposisi

1. $y = \cos(2x + x^3)$

Penyelesaian:

Misalkan $u = 2x + x^3$ dan $y = \cos u$. Maka:

a. Untuk $u = 2x + x^3 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2 + 3x^2$

b. Untuk $y = \cos u \Rightarrow \dfrac{dy}{du} = -\sin u = -\sin(2x + x^3)$

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= \left[-\sin\left(2x + x^3\right)\right]\left[2 + 3x^2\right]$$
$$= \left(-2 - 3x^2\right)\sin\left(2x + x^3\right)$$

2. $y = \sin^2\left(x^2 + 2x\right)$

Penyelesaian:

Misalkan $u = x^2 + 2x$, $v = \sin u$, dan $y = v^2$. Maka:

a. Untuk $u = x^2 + 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 2$

b. Untuk $v = \sin u \Rightarrow \frac{dv}{du} = \cos u = \cos\left(x^2 + 2x\right)$

c. Untuk $y = v^2 \Rightarrow \frac{dy}{dv} = 2v = 2\sin u = 2\sin\left(x^2 + 2x\right)$

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= \left[2\sin\left(x^2 + 2x\right)\right]\left[\cos\left(x^2 + 2x\right)\right]\left[2x + 2\right]$$
$$= \left(4x + 4\right)\sin\left(x^2 + 2x\right)\cos\left(x^2 + 2x\right)$$

3. $y = \sqrt{\sec x^2}$

Penyelesaian:

Misalkan $u = x^2$, $v = \sec u$, dan $y = \sqrt{v} = v^{\frac{1}{2}}$. Maka:

a. Untuk $u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$

b. Untuk $v = \sec u \Rightarrow \frac{dv}{du} = \sec u \tan u = \sec x^2 \tan x^2$

c. Untuk $y = v^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dv} = \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{v}} = \frac{1}{2\sqrt{\sec u}} = \frac{1}{2\sqrt{\sec x^2}}$

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{\sec x^2}} \right) \left(\sec x^2 \tan x^2 \right) (2x)$$

$$= \frac{x \sec x^2 \tan x^2}{\sqrt{\sec x^2}}$$

4. $y = \sin^3 2x$

Penyelesaian:

Misalkan $u = 2x$, $v = \sin u$, dan $y = v^3$. Maka:

a. Untuk $u = 2x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2$

b. Untuk $v = \sin u \Rightarrow \dfrac{dv}{du} = \cos u = \cos(2x)$

c. Untuk $y = v^3 \Rightarrow \dfrac{dy}{dv} = 3v^2 = 3\sin^2 u = 3\sin^2(2x)$

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \left(3\sin^2 2x\right)(\cos 2x)2$$

$$= 6\cos 2x \sin^2 2x$$

5. $y = -\cos\left(x^2 - 4x + 1\right)$

Penyelesaian:

Misalkan $u = x^2 - 4x + 1$ dan $y = -\cos u$. Maka:

a. Untuk $u = x^2 - 4x + 1 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2x - 4$

b. Untuk $y = -\cos u \Rightarrow \dfrac{dy}{du} = \sin u = \sin\left(x^2 - 4x + 1\right)$

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= \left[\sin\left(x^2 - 4x + 1\right)\right]\left[2x - 4\right]$$
$$= (2x - 4)\sin\left(x^2 - 4x + 1\right)$$

6. $y = \sin^3 x$

Penyelesaian:

Misalkan $u = \sin x$ dan $y = u^3$. Maka:

a. Untuk $u = \sin x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \cos x$

b. Untuk $y = u^3 \Rightarrow \dfrac{dy}{du} = 3u^2 = 3\sin^2 x$

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3\sin^2 x \cos x$$

7. $y = \tan^2 x$

Penyelesaian:

Misalkan $u = \tan x$ dan $y = u^2$. Maka:

a. Untuk $u = \tan x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \sec^2 x$

b. Untuk $y = u^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{du} = 2u = 2\tan x$

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2\tan x \sec^2 x$$

8. $y = \sin\left(3x^2\right)$

Penyelesaian:

Misalkan $u = 3x^2$ dan $y = \sin u$. Maka:

a. Untuk $u = 3x^2 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 6x$

b. Untuk $y = \sin u \Rightarrow \dfrac{dy}{du} = \cos u = \cos\left(3x^2\right)$

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left[\cos\left(3x^2\right)\right]\left(6x\right) = 6x\cos\left(3x^2\right)$$

9. $y = \csc\left(8x^5 + 3x^2 - x\right)$

Penyelesaian:

Misalkan $u = 8x^5 + 3x^2 - x$ dan $y = \csc u$. Maka:

a. Untuk $u = 8x^5 + 3x^2 - x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 40x^4 + 6x - 1$

b. Untuk $y = \csc u \Rightarrow \dfrac{dy}{du} = -\csc u \cot u$

$$= -\csc\left(8x^5 + 3x^2 - x\right)\cot\left(8x^5 + 3x^2 - x\right)$$

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \left[-\csc\left(8x^5 + 3x^2 - x\right)\cot\left(8x^5 + 3x^2 - x\right)\right]\left[40x^4 + 6x - 1\right] \\ &= \left(-40x^4 - 6x + 1\right)\csc\left(8x^5 + 3x^2 - x\right)\cot\left(8x^5 + 3x^2 - x\right) \end{aligned}$$

10. $y = \cot^3\left(x^2 + 3x - 1\right)$

Penyelesaian:

Misalkan $u = x^2 + 3x - 1$, $v = \cot u$, dan $y = v^3$. Maka:

a. Untuk $u = x^2 + 3x - 1 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2x + 3$

b. Untuk $v = \cot u \Rightarrow \dfrac{dv}{du} = -\csc^2 u = -\csc^2\left(x^2 + 3x - 1\right)$

c. Untuk $y = v^3 \Rightarrow \dfrac{dy}{dv} = 3v^2 = 3\cot^2 u = 3\cot^2\left(x^2 + 3x - 1\right)$

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$
\begin{aligned}
y' = \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
&= \left[3\cot^2\left(x^2+3x-1\right)\right]\left[-\csc^2\left(x^2+3x-1\right)\right]\left[2x+3\right] \\
&= \left(-6x-9\right)\cot^2\left(x^2+3x-1\right)\csc^2\left(x^2+3x-1\right)
\end{aligned}
$$

Latihan 3: Turunan Lanjutan Fungsi Trigonometri

Diketahui fungsi $f\left(x\right) = \cos 4x$. Tentukan:

No.	Fungsi Awal	$f\left(x\right) = \cos 4x$
1	Fungsi turunan pertama	$f'\left(x\right) = -4\sin 4x$
2	Fungsi turunan kedua	$f''\left(x\right) = -4\left(4\cos 4x\right) = -16\cos 4x$
3	Fungsi turunan ketiga	$f'''\left(x\right) = -16\left(-4\sin 4x\right) = 64\sin 4x$
4	Fungsi turunan keempat	$f^{(4)}\left(x\right) = 64\left(4\cos 4x\right) = 256\cos 4x$
5	Fungsi turunan kelima	$f^{(5)}\left(x\right) = 256\left(-4\sin 4x\right) = -1024\sin 4x$

Uji Kompetensi Bab I Turunan Fungsi Trigonometri

A. Pilihan Ganda

1. Jika $f(x) = -2\cos x$, maka $f'(x) = \dots$

   $f(x) = -2\cos x \Rightarrow f'(x) = -2(-\sin x) = 2\sin x$

   Jawab: A. $2\sin x$

2. Turunan pertama dari $f(x) = 4\sin x + 5\cos x$ adalah ...

   $$f(x) = 4\sin x + 5\cos x \Rightarrow f'(x) = 4\cos x + 5(-\sin x)$$
   $$= 4\cos x - 5\sin x$$

   Jawab: D. $f'(x) = 4\cos x - 5\sin x$

3. Jika $y = x^2 \sin 3x$, maka $\dfrac{dy}{dx} = \dots$

   Misalkan $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$ dan $v = \sin 3x \Rightarrow v' = 3\cos 3x$. Maka:

   $$\frac{dy}{dx} = u'v + uv' = (2x)(\sin 3x) + (x^2)(3\cos 3x)$$
   $$= 2x\sin 3x + 3x^2\cos 3x$$

   Jawab: B. $2x\sin 3x + 3x^2\cos 3x$

4. Jika $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x}$, dengan $\sin x \neq 0$ dan $f'(x)$ adalah turunan pertama dari fungsi $f(x)$, maka $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dots$

   Misalkan:
   - $u = \sin x + \cos x \Rightarrow u' = \cos x - \sin x$, dan
   - $v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$

   Maka:

$$f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$
$$=\frac{(\cos x-\sin x)(\sin x)-(\sin x+\cos x)(\cos x)}{(\sin x)^2}$$
$$=\frac{\sin x\cos x-\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x}{\sin^2 x}$$
$$=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$=-\csc^2 x$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\csc^2(90°)=-1$$

Jawab: B. -1

5. Turunan pertama fungsi $y=\cos\left(2x^3-x^2\right)$ adalah $y'=\ldots$

   Misalkan $u=2x^3-x^2$ dan $y=\cos\left(2x^3-x^2\right)=\cos u$. Maka:

   - Untuk $u=2x^3-x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=6x^2-2x$
   - Untuk $y=\cos u \Rightarrow \frac{dy}{du}=-\sin u$

   Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:
   $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(-\sin u)\left(6x^2-2x\right)$$
   $$=-\left(6x^2-2x\right)\sin\left(2x^3-x^2\right)$$

   Jawab: E. $-\left(6x^2-2x\right)\sin\left(2x^3-x^2\right)$

6. Turunan pertama dari fungsi $f(x)=(3x-2)\sin(2x+1)$ adalah $f'(x)=\ldots$

   Misalkan:
   $u=3x-2 \Rightarrow u'=3$ dan $v=\sin(2x+1) \Rightarrow v'=2\cos(2x+1)$.

Maka: $f'(x) = u'v + uv' = 3\sin(2x+1) + (3x-2)2\cos(2x+1)$

$$= 3\sin(2x+1) + (6x-4)\cos(2x+1)$$

Jawab: A. $3\sin(2x+1) + (6x-4)\cos(2x+1)$

7. Diketahui fungsi $f(x) = \sin^2(2x+3)$. Turunan pertama dari fungsi $f(x)$ adalah $f'(x) = \ldots$

   Misalkan $u = 2x+3$, $v = \sin(2x+3) = \sin u$, dan $y = \sin^2 u = v^2$.

   Maka:

   - Untuk $u = 2x+3 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2$
   - Untuk $v = \sin u \Rightarrow \dfrac{dv}{du} = \cos u$
   - Untuk $y = v^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{dv} = 2v$

   Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2v)(\cos u)(2)$$

   $$= 4\sin u \cos u = 4\sin(2x+3)\cos(2x+3)$$

   Jawab: A. $4\sin(2x+3)\cos(2x+3)$

8. Diketahui fungsi $f(x) = \sin^3(3-2x)$. Turunan pertama dari fungsi $f(x)$ adalah $f'(x) = \ldots$

   Misalkan $u = 3-2x$, $v = \sin(3-2x) = \sin u$, dan $y = \sin^3 u = v^3$.

   Maka:

   - Untuk $u = 3-2x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = -2$
   - Untuk $v = \sin u \Rightarrow \dfrac{dv}{du} = \cos u$

- Untuk $y = v^3 \Rightarrow \dfrac{dy}{dv} = 3v^2$

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left(3v^2\right)\left(\cos u\right)\left(-2\right)$$
$$= -6\sin^2 u \cos u = -3\sin u\left(2\sin u \cos u\right)$$
$$= -3\sin u \sin 2u = -3\sin\left(3-2x\right)\sin 2\left(3-2x\right)$$
$$= -3\sin\left(3-2x\right)\sin\left(6-4x\right)$$

Jawab: E. $-3\sin\left(3-2x\right)\sin\left(6-4x\right)$

9. Turunan pertama dari fungsi $f\left(x\right) = \cos^3\left(3-2x\right)$ adalah $f'\left(x\right) = \ldots$

   Misalkan $u = 3-2x$, $v = \cos\left(3-2x\right) = \cos u$, dan $y = \cos^3 u = v^3$.

   Maka:

   - Untuk $u = 3-2x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = -2$
   - Untuk $v = \cos u \Rightarrow \dfrac{dv}{du} = -\sin u$
   - Untuk $y = v^3 \Rightarrow \dfrac{dy}{dv} = 3v^2$

   Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left(3v^2\right)\left(-\sin u\right)\left(-2\right)$$
$$= 6\cos^2 u \sin u = 3\cos u\left(2\sin u \cos u\right)$$
$$= 3\cos u \sin 2u = 3\cos\left(3-2x\right)\sin 2\left(3-2x\right)$$
$$= 3\cos\left(3-2x\right)\sin\left(6-4x\right)$$

   Jawab: E. $3\cos\left(3-2x\right)\sin\left(6-4x\right)$

10. Turunan ketiga dari fungsi $f\left(x\right) = 5\sin 2x$ adalah $f'''\left(x\right) = \ldots$

Fungsi Awal	$f(x)=5\sin 2x$
Fungsi turunan pertama	$f'(x)=2(5\cos 2x)=10\cos 2x$
Fungsi turunan kedua	$f''(x)=2(-10\sin 2x)=-20\sin 2x$
Fungsi turunan ketiga	$f'''(x)=2(-20\cos 2x)=-40\cos 2x$

Jawab: D. $-40\cos 2x$

B. Uraian

1. Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)=(5x-2)\cos(3x+1)$.

Penyelesaian:

Diketahui fungsi $f(x)=(5x-2)\cos(3x+1)$. Misalkan:

$u=5x-2 \Rightarrow u'=5$ dan $v=\cos(3x+1) \Rightarrow v'=-3\sin(3x+1)$.

Maka: $f'(x)=u'v+uv'$

$$\begin{aligned}&=(5)\cos(3x+1)+(5x-2)(-3)\sin(3x+1)\\&=5\cos(3x+1)-(15x-6)\sin(3x+1)\\&=5\cos(3x+1)+(-15x+6)\sin(3x+1)\end{aligned}$$

Jadi, turunan pertama dari fungsi $f(x)=(5x-2)\cos(3x+1)$ adalah: $f'(x)=5\cos(3x+1)+(-15x+6)\sin(3x+1)$.

2. Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)=\dfrac{\cos 3x}{x}$.

Penyelesaian:

Diketahui fungsi $f(x)=\dfrac{\cos 3x}{x}=\dfrac{u}{v}$. Misalkan:

$u=\cos 3x \Rightarrow u'=-3\sin 3x$ dan $v=x \Rightarrow v'=1$.

Maka: $f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=\dfrac{(-3\sin 3x)(x)-(\cos 3x)1}{x^2}$

$$=\frac{-3x\sin 3x-\cos 3x}{x^2}$$

Jadi, turunan pertama dari fungsi $f(x)=\dfrac{\cos 3x}{x}$ adalah $f'(x)=\dfrac{-3x\sin 3x-\cos 3x}{x^2}$.

3. Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)=7\cos(5-3x)$.

Penyelesaian:

Diketahui fungsi $f(x)=7\cos(5-3x)$. Misalkan $u=5-3x$ dan $y=7\cos(5-3x)=7\cos u$. Maka:

- Untuk $u=5-3x \Rightarrow \dfrac{du}{dx}=-3$
- Untuk $y=7\cos u \Rightarrow \dfrac{dy}{du}=-7\sin u$

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(-7\sin u)(-3)$$
$$=21\sin u=21\sin(5-3x)$$

Jadi, turunan pertama dari fungsi $f(x)=7\cos(5-3x)$ adalah $f'(x)=21\sin(5-3x)$.

4. Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)=\sin^3\left(x^2+2x\right)$.

Penyelesaian:

Diketahui fungsi $f(x)=\sin^3\left(x^2+2x\right)$. Misalkan $u=x^2+2x$, $v=\sin\left(x^2+2x\right)=\sin u$, dan $y=\sin^3 u=v^3$. Maka:

- Untuk $u = x^2 + 2x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2x + 2$
- Untuk $v = \sin u \Rightarrow \dfrac{dv}{du} = \cos u$
- Untuk $y = v^3 \Rightarrow \dfrac{dy}{dv} = 3v^2$

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left(3v^2\right)\left(\cos u\right)\left(2x+2\right)$$
$$= 3\left(2x+2\right)\sin^2 u \cos u$$
$$= \left(6x+6\right)\sin^2\left(x^2+2x\right)\cos\left(x^2+2x\right)$$

Jadi, turunan pertama dari fungsi $f(x) = \sin^3\left(x^2+2x\right)$ adalah $f'(x) = \left(6x+6\right)\sin^2\left(x^2+2x\right)\cos\left(x^2+2x\right)$.

5. Tentukan turunan kedua dari fungsi $f(x) = x^3 - 5\sin x$.

Penyelesaian:

Diketahui fungsi $f(x) = x^3 - 5\sin x$. Maka:

Fungsi awal	$f(x) = x^3 - 5\sin x$
Fungsi turunan pertama	$f'(x) = 3x^2 - 5\cos x$
Fungsi turunan kedua	$f''(x) = 6x - 5(-\sin x)$ $= 6x + 5\sin x$

Jadi, turunan kedua dari fungsi $f(x) = x^3 - 5\sin x$ adalah $f''(x) = 6x + 5\sin x$.

Bab II Penerapan Turunan Fungsi Trigonometri

Latihan 1: Kemiringan Garis Singgung Kurva Fungsi Trigonometri

1. Carilah kemiringan garis singgung pada kurva $y=2\tan x$ di titik dengan $x=0°$.

   Penyelesaian:

   $y=f\left(x\right)=2\tan x \Rightarrow y'=f'\left(x\right)=2\sec^2 x$

   Mencari gradien:

   $x=0° \Rightarrow m=f'\left(0°\right)=2\sec^2\left(0°\right)=2\left(1\right)^2=2$

   Jadi, kemiringan garis singgung kurva $y=2\tan x$ di titik dengan $x=0°$ adalah $m=2$.

2. Carilah kemiringan garis singgung pada kurva $y=\sin 2x-5$ di titik dengan $x=90°$.

   Penyelesaian:

   $y=f\left(x\right)=\sin 2x-5 \Rightarrow y'=f'\left(x\right)=2\cos 2x$

   Mencari gradien:

   $$\begin{aligned} x=90° \Rightarrow m=f'\left(90°\right)&=2\cos 2\left(90°\right)\\ &=2\cos\left(180°\right)=2\left(-1\right)=-2 \end{aligned}$$

   Jadi, kemiringan garis singgung kurva $y=\sin 2x+5$ di titik dengan $x=90°$ adalah $m=-2$:

3. Carilah kemiringan garis singgung pada kurva $y=\sec x$ di titik dengan $x=0°$.

   Penyelesaian:

   $y=f\left(x\right)=\sec x \Rightarrow y'=f'\left(x\right)=\sec x\tan x$

   Mencari gradien:

   $x=0° \Rightarrow m=f'\left(0°\right)=\sec\left(0°\right)\tan\left(0°\right)=\left(1\right)\left(0\right)=0$

Jadi, kemiringan garis singgung kurva $y = \sec x$ di titik dengan $x = 0°$ adalah $m = 0$.

4. Carilah kemiringan garis singgung pada kurva $y = \cos 2x$ di titik dengan $x = 90°$.

   Penyelesaian:

   $y = f(x) = \cos 2x \Rightarrow y' = f'(x) = -2\sin 2x$

   Mencari gradien:

   $$\begin{aligned} x = 90° \Rightarrow m = f'(90°) &= -2\sin 2(90°) \\ &= -2\sin(180°) = -2(0) = 0 \end{aligned}$$

   Jadi, kemiringan garis singgung kurva $y = \cos 2x$ di titik dengan $x = 90°$ adalah $m = 0$.

5. Carilah kemiringan garis singgung pada kurva $y = \sec x + \csc x$ di titik dengan $x = 45°$.

   Penyelesaian:

   $y = f(x) = \sec x + \csc x \Rightarrow y' = f'(x) = \sec x \tan x - \csc x \cot x$

   Mencari gradien:

   $$\begin{aligned} x = 45° \Rightarrow m = f'(45°) &= \sec(45°)\tan(45°) - \csc(45°)\cot(45°) \\ &= \sqrt{2}(1) - \sqrt{2}(1) = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

   Jadi, kemiringan garis singgung kurva $y = \sec x + \csc x$ di titik dengan $x = 45°$ adalah $m = 0$.

Latihan 2: Nilai Stasioner dan Titik Stasioner Fungsi Trigonometri

1. Tentukan titik-titik stasioner dari fungsi $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$.

   Penyelesaian:

   $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$

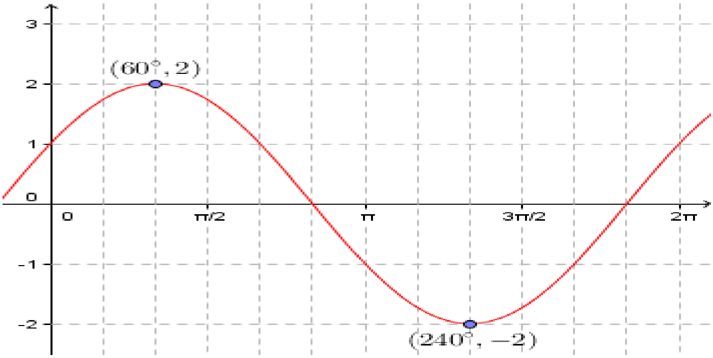
   Menentukan nilai x saat stasioner dengan syarat: $f'(x) = 0$

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x = \sin x$$
$$\sqrt{3} = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\sqrt{3} = \tan x$$
$$x = 60°, 240°$$

Menentukan nilai stasioner dengan mensubstitusikan $x = 60°$ dan $x = 240°$ ke dalam fungsi $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$.

Nilai x	Nilai $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$	Titik Stasioner
$x = 60°$	$f(60°) = \sqrt{3}\sin(60°) + \cos(60°)$ $= \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}$ $= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$	$(60°, 2)$
$x = 240°$	$f(240°) = \sqrt{3}\sin(240°) + \cos(240°)$ $= \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)$ $= -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$	$(240°, -2)$

Jadi, titik-titik stasioner dari fungsi $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$ adalah titik $(60°, 2)$ dan $(240°, -2)$.



Gambar 41 Titik-titik stasioner fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$

2. Tentukan titik-titik stasioner dari fungsi $f(x)=2\cos x-2\sin x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$.

Penyelesaian:

$f(x)=2\cos x-2\sin x \Rightarrow f'(x)=-2\sin x-2\cos x$

Menentukan nilai x saat stasioner dengan syarat: $f'(x)=0$

$-2\sin x-2\cos x=0 \Leftrightarrow -2\sin x=2\cos x$

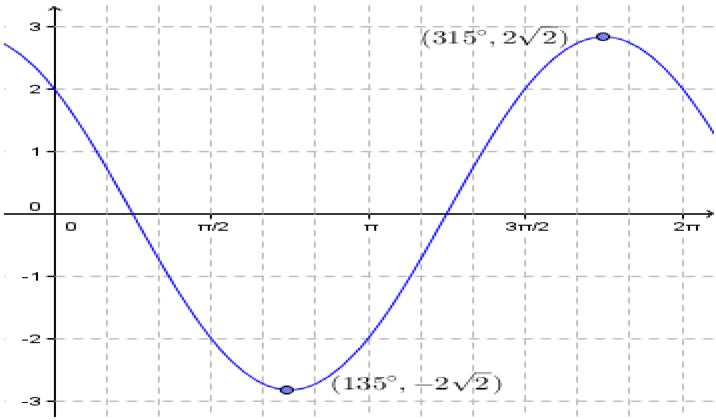
$$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2}{-2}$$
$$\tan x=-1$$
$$x=135°, 315°$$

Menentukan nilai stasioner dengan mensubstitusikan $x=135°$ dan $x=315°$ ke dalam fungsi $f(x)=2\cos x-2\sin x$:

Nilai x	Nilai $f(x)=2\cos x-2\sin x$	Titik Stasioner
$x=135°$	$f(135°)=2\cos(135°)-2\sin(135°)$ $=2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)-2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ $=-\sqrt{2}-\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$	$(135°,-2\sqrt{2})$

Nilai x	Nilai $f(x)=2\cos x-2\sin x$	Titik Stasioner
$x=315°$	$f(315°)=2\cos(315°)-2\sin(315°)$ $=2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)-2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ $=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$	$\left(315°,2\sqrt{2}\right)$

Jadi, titik-titik stasioner fungsi $f(x)=2\cos x-2\sin x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$ adalah titik $\left(135°,-2\sqrt{2}\right)$ dan $\left(315°,2\sqrt{2}\right)$.



Gambar 42 Titik-titik stasioner fungsi $f(x)=2\cos x-2\sin x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$

3. Tentukan titik-titik stasioner dari fungsi $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$.

   Penyelesaian:

   $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x \Rightarrow f'(x)=2\cos 2x-2\sqrt{3}\sin 2x$

   Menentukan nilai x saat stasioner dengan syarat: $f'(x)=0$

$$2\cos 2x - 2\sqrt{3}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x = 2\sqrt{3}\sin 2x$$

$$\frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \tan 2x$$

$$2x = 30°, 210°, 390°, 570°$$

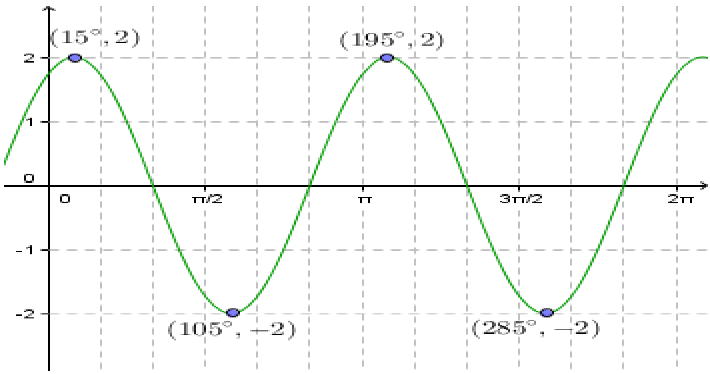
$$x = 15°, 105°, 195°, 285°$$

Menentukan nilai stasioner dengan mensubstitusikan $x = 15°$, $x = 105°$, $x = 195°$ dan $x = 285°$ ke dalam fungsi $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$:

Nilai x	Nilai $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$	Titik stasioner
$x = 15°$	$f(15°) = \sin 2(15°) + \sqrt{3}\cos 2(15°)$ $= \sin(30°) + \sqrt{3}\cos(30°)$ $= \frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$	$(15°, 2)$
$x = 105°$	$f(105°) = \sin 2(105°) + \sqrt{3}\cos 2(105°)$ $= \sin(210°) + \sqrt{3}\cos(210°)$ $= -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ $= -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} = -2$	$(105°, -2)$
$x = 195°$	$f(195°) = \sin 2(195°) + \sqrt{3}\cos 2(195°)$ $= \sin(390°) + \sqrt{3}\cos(390°)$ $= \sin(30°) + \sqrt{3}\cos(30°)$ $= \frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$	$(195°, 2)$

Nilai x	Nilai $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$	Titik stasioner
$x=285°$	$f(285°)=\sin 2(285°)+\sqrt{3}\cos 2(285°)$ $=\sin(570°)+\sqrt{3}\cos(570°)$ $=\sin(210°)+\sqrt{3}\cos(210°)$ $=-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}$ $=-2$	$(285°,-2)$

Jadi, titik-titik stasioner fungsi $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$ adalah titik $(15°,2)$, $(105°,-2)$, $(195°,2)$, dan $(285°,-2)$.



Gambar 43 Titik-titik stasioner fungsi $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$

4. Tentukan titik-titik stasioner dari fungsi $f(x)=\sqrt{3}\cos x+3\sin x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$.

Penyelesaian:

$f(x)=\sqrt{3}\cos x+3\sin x \Rightarrow f'(x)=-\sqrt{3}\sin x+3\cos x$

Menentukan nilai x saat stasioner dengan syarat: $f'(x)=0$

$$-\sqrt{3}\sin x+3\cos x=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x=3\cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{3}{\sqrt{3}}$$

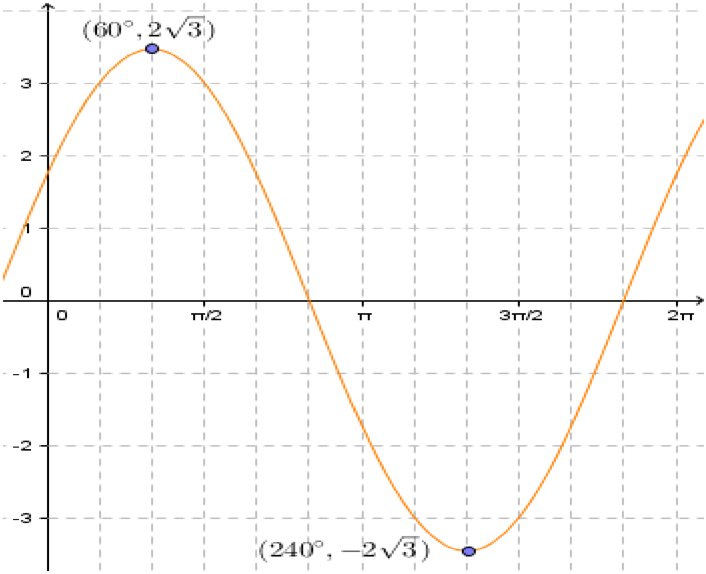
$$\tan x=\sqrt{3}$$

$$x=60°,240°$$

Menentukan nilai stasioner dengan mensubstitusikan $x=60°$ dan $x=240°$ ke dalam fungsi $f(x)=\sqrt{3}\cos x+3\sin x$:

Nilai x	Nilai $f(x)=\sqrt{3}\cos x+3\sin x$	Titik stasioner
$x=60°$	$f(60°)=\sqrt{3}\cos(60°)+3\sin(60°)$ $=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ $=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$	$\left(60°,2\sqrt{3}\right)$
$x=240°$	$f(210°)=\sqrt{3}\cos(240°)+3\sin(240°)$ $=\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right)+3\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ $=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}=-\frac{4\sqrt{3}}{2}$ $=-2\sqrt{3}$	$\left(240°,-2\sqrt{3}\right)$

Jadi, titik-titik stasioner fungsi $f(x)=\sqrt{3}\cos x+3\sin x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$ adalah titik $\left(60°,2\sqrt{3}\right)$ dan $\left(240°,-2\sqrt{3}\right)$.



Gambar 44 Titik-titik stasioner fungsi $f(x)=\sqrt{3}\cos x+3\sin x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$

5. Tentukan titik-titik stasioner dan jenisnya dari fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$.

   Penyelesaian:

   $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x \Rightarrow f'(x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x$

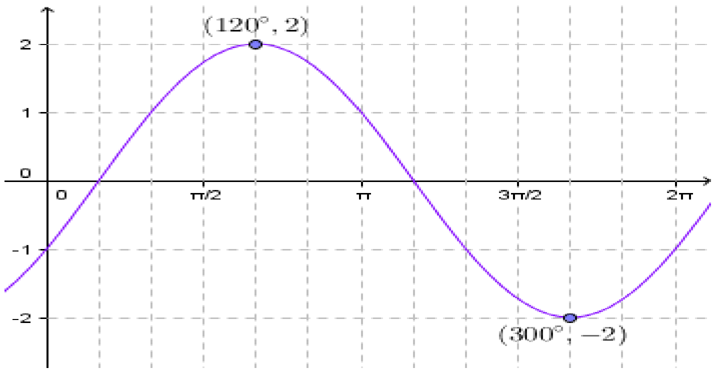
   Menentukan nilai x saat stasioner dengan syarat: $f'(x)=0$

   $$\sqrt{3}\cos x+\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x=-\sqrt{3}\cos x$$
   $$\frac{\sin x}{\cos x}=-\sqrt{3}$$
   $$\tan x=-\sqrt{3}$$
   $$x=120°, 300°$$

   Menentukan nilai stasioner dengan mensubstitusikan $x=120°$ dan $x=300°$ ke dalam fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$:

Nilai x	Nilai $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$	Titik stasioner
$x=120°$	$f(120°)=\sqrt{3}\sin(120°)-\cos(120°)$ $=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$ $=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$	$(120°,2)$
$x=300°$	$f(300°)=\sqrt{3}\sin(300°)-\cos(300°)$ $=\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)$ $=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2$	$(300°,-2)$

Jadi, titik-titik stasioner fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$ adalah $(120°,2)$ dan $(300°,-2)$.



Gambar 45 Titik-titik stasioner fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$

Latihan 3: Kemonotonan Fungsi Trigonometri

1. Tentukan semua interval saat fungsi $f(x)=\sin x-\cos x$ naik atau turun, dengan $0°\le x\le 360°$.

Penyelesaian:

$f(x) = \sin x - \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x + \sin x$

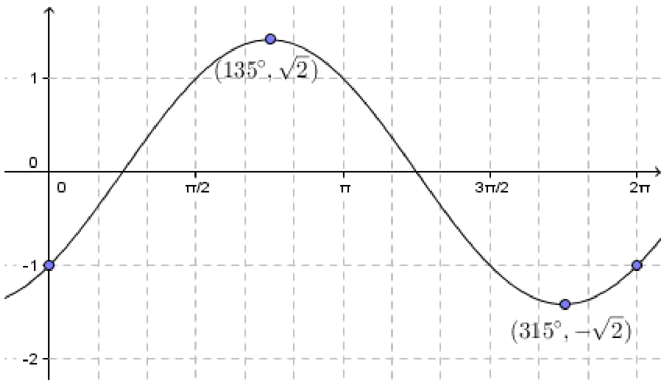
Mencari titik x pembuat $f'(x) = 0$, yaitu:

$$\begin{aligned}
\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x &= -\cos x \\
\frac{\sin x}{\cos x} &= -1 \\
\tan x &= -1 \\
x &= 135° \text{ atau } 315°
\end{aligned}$$

Substitusikan nilai-nilai x dalam interval yang dibatasi oleh $x = 135°$ dan $x = 315°$ ke dalam fungsi $f'(x) = \cos x + \sin x$:

Interval	Nilai $f'(x) = \cos x + \sin x$	Sifat fungsi
$0° \le x < 135°$	positif	naik
$135° < x < 315°$	negatif	turun
$315° < x \le 360°$	positif	naik

Jadi, fungsi $f(x) = \sin x - \cos x$ akan naik pada interval $0° \le x < 135°$ atau $315° < x \le 360°$.



Gambar 46 Kurva fungsi $f(x) = \sin x - \cos x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$

2. Tentukan semua interval saat fungsi $f(x) = 3 + 2\sin x$ naik atau turun, dengan $0° \le x \le 360°$.

Penyelesaian:

$f(x) = 3 + 2\sin x \Rightarrow f'(x) = 2\cos x$

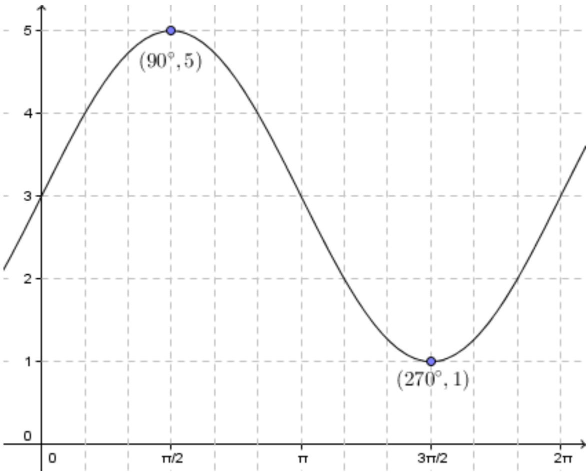
Mencari titik x pembuat $f'(x) = 0$, yaitu:

$$2\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$$
$$x = 90° \text{ atau } 270°$$

Substitusikan nilai-nilai x dalam interval yang dibatasi oleh $x = 90°$ dan $x = 270°$ ke dalam fungsi $f'(x) = 2\cos x$:

Interval	Nilai $f'(x) = 2\cos x$	Sifat fungsi
$0° \leq x < 90°$	positif	naik
$90° < x < 270°$	negatif	turun
$270° < x \leq 360°$	positif	naik

Jadi, fungsi $f(x) = 3 + 2\sin x$ akan turun pada interval $90° < x < 270°$.



Gambar 47 Kurva fungsi $f(x) = 3 + 2\sin x$ dalam interval $0° \leq x \leq 360°$

3. Tentukan semua interval saat fungsi $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ naik atau turun, dengan $0° \leq x \leq 360°$.

Penyelesaian:

$f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$

Mencari titik x pembuat $f'(x)=0$, yaitu:

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x=\sin x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{3}$$

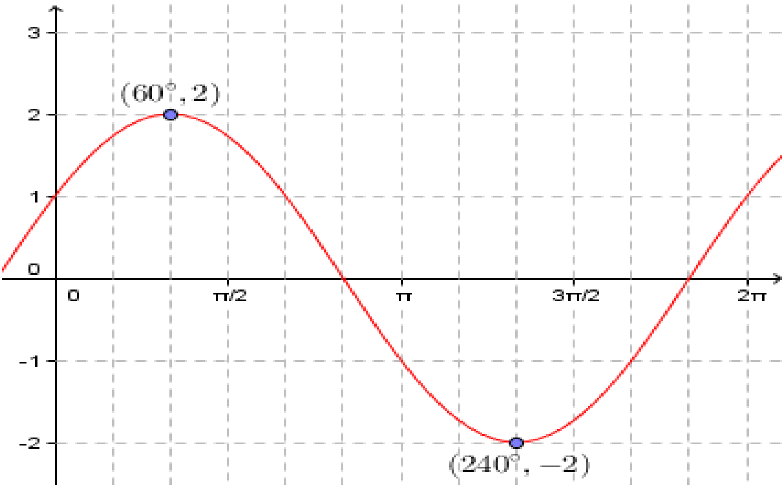
$$\tan x=\sqrt{3}$$

$$x=60°, 240°$$

Substitusikan nilai-nilai x dalam interval yang dibatasi oleh $x=60°$ dan $x=240°$ ke dalam fungsi $f'(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$:

Interval	Nilai $f'(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$	Sifat fungsi
$0° \le x < 60°$	positif	naik
$60° < x < 240°$	negatif	turun
$240° < x \le 360°$	positif	naik

Jadi, fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ akan naik pada interval $0° \le x < 60°$ atau $240° < x \le 360°$ dan turun pada interval $60° < x < 240°$.



Gambar 48 Kurva fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$

4. Tentukan semua interval saat fungsi $f(x) = 2\cos x - 2\sin x$ naik atau turun, dengan $0° \le x \le 360°$.

Penyelesaian:

$f(x) = 2\cos x - 2\sin x \Rightarrow f'(x) = -2\sin x - 2\cos x$

Mencari titik pembuat $f'(x) = 0$, yaitu:

$-2\sin x - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow -2\sin x = 2\cos x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2}{-2}$$

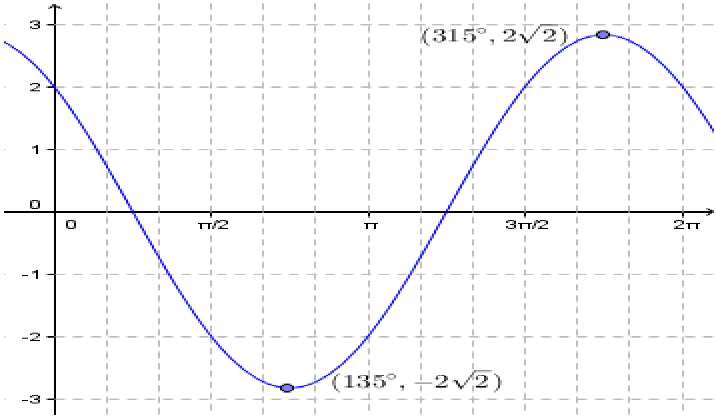
$$\tan x = -1$$

$$x = 135°, 315°$$

Subtitusikan nilai-nilai x dalam interval yang dibatasi oleh $x = 135°$ dan $x = 315°$ ke dalam fungsi $f'(x) = -2\sin x - 2\cos x$:

Interval	Nilai $f'(x) = -2\sin x - 2\cos x$	Sifat fungsi
$0° \le x < 135°$	negatif	turun
$135° < x < 315°$	positif	naik
$315° < x \le 360°$	negatif	turun

Jadi, fungsi $f(x) = 2\cos x - 2\sin x$ akan naik pada interval $135° < x < 315°$ dan turun pada interval $0° \le x < 135°$ atau $315° < x \le 360°$.



Gambar 49 Kurva fungsi $f(x) = 2\cos x - 2\sin x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$

5. Tentukan semua interval saat fungsi $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ naik atau turun, dengan $0° \le x \le 360°$.

Penyelesaian:

$f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x \Rightarrow f'(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$

Mencari titik x pembuat $f'(x) = 0$, yaitu:

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\sqrt{3}\cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -\sqrt{3}$$

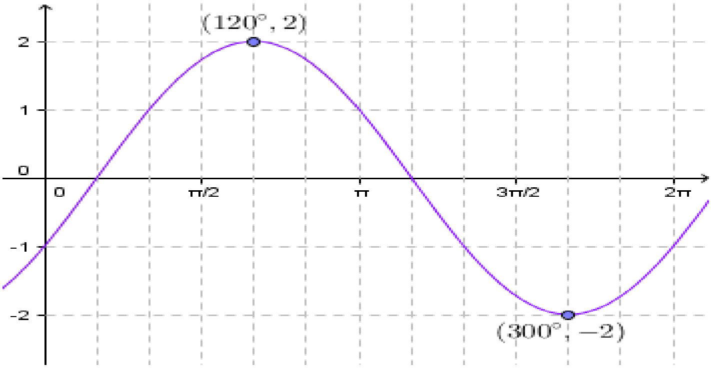
$$\tan x = -\sqrt{3}$$

$$x = 120° \text{ atau } 300°$$

Substitusikan nilai-nilai x dalam interval yang dibatasi oleh $x = 120°$ dan $x = 300°$ ke dalam fungsi $f'(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$:

Interval	Nilai $f'(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$	Sifat fungsi
$0° \le x < 120°$	positif	naik
$120° < x < 300°$	negatif	turun
$300° < x \le 360°$	positif	naik

Jadi, fungsi $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ akan naik pada interval $0° \le x < 120°$ atau $300° < x \le 360°$ dan turun pada interval $120° < x < 300°$.



Gambar 50 Kurva fungsi $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$

Latihan 4: Nilai Maksimum dan Nilai Minimum Fungsi Trigonometri

1. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x) = \sqrt{3}\cos x + 3\sin x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$.

   Penyelesaian:

   $f(x) = \sqrt{3}\cos x + 3\sin x \Rightarrow f'(x) = -\sqrt{3}\sin x + 3\cos x$

   Menentukan nilai x saat stasioner dengan syarat: $f'(x) = 0$

   $$-\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x = 3\cos x$$

   $$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

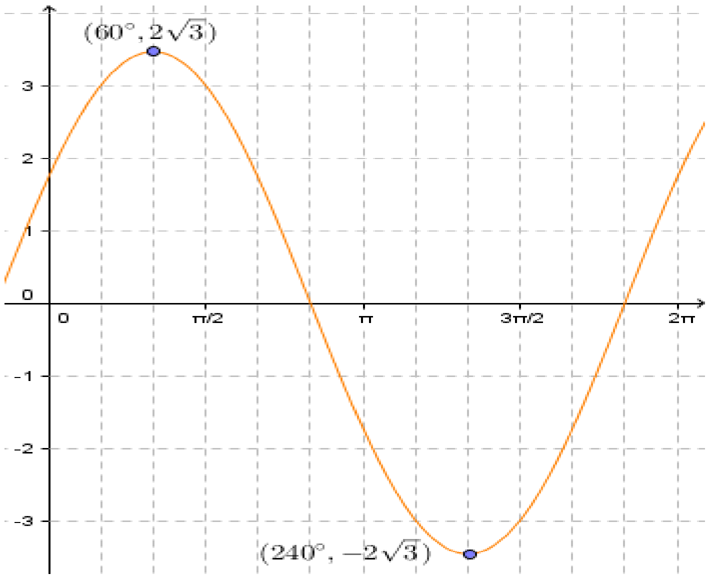
   $$\tan x = \sqrt{3}$$

   $$x = 60°, 240°$$

Menentukan nilai fungsi saat stasioner dan di ujung interval dengan mensubstitusikan $x=0°$, $x=60°$, $x=240°$, dan $x=360°$ ke dalam fungsi $f(x)=\sqrt{3}\cos x+3\sin x$.

Nilai x	$f(x)=\sqrt{3}\cos x+3\sin x$	Ket
$x=0°$	$f(0°)=\sqrt{3}\cos(0°)+3\sin(0°)$ $=\sqrt{3}(1)+3(0)$ $=\sqrt{3}+0$ $=\sqrt{3}$	-
$x=60°$	$f(60°)=\sqrt{3}\cos(60°)+3\sin(60°)$ $=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ $=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{2}$ $=2\sqrt{3}$	Nilai maksimum
$x=240°$	$f(240°)=\sqrt{3}\cos(240°)+3\sin(240°)$ $=\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right)+3\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ $=\frac{-\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{2}=-\frac{4\sqrt{3}}{2}$ $=-2\sqrt{3}$	Nilai minimum
$x=360°$	$f(360°)=\sqrt{3}\cos(360°)+3\sin(360°)$ $=\sqrt{3}(1)+3(0)$ $=\sqrt{3}+0=\sqrt{3}$	-

Jadi, fungsi $f(x)=\sqrt{3}\cos x+3\sin x$ mempunyai nilai maksimum $2\sqrt{3}$ saat $x=60°$ dan nilai minimum $-2\sqrt{3}$ saat $x=240°$.



Gambar 51 Nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $f(x)=\sqrt{3}\cos x+3\sin x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$

2. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$.

Penyelesaian:

$f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x \Rightarrow f'(x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x$

Menentukan nilai x saat stasioner dengan syarat: $f'(x)=0$

$$\sqrt{3}\cos x+\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x=-\sqrt{3}\cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x}=-\sqrt{3}$$

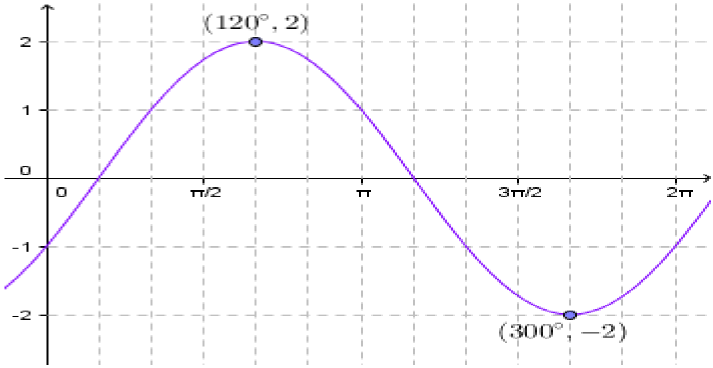
$$\tan x=-\sqrt{3}$$

$$x=120°,300°$$

Menentukan nilai fungsi saat stasioner dan di ujung interval dengan mensubstitusikan $x=0°$, $x=120°$, $x=300°$, dan $x=360°$ ke dalam fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$.

Nilai x	$f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$	Ket
$x=0°$	$f(0°)=\sqrt{3}\sin(0°)-\cos(0°)$ $=\sqrt{3}(0)-(1)=-1$	-
$x=120°$	$f(120°)=\sqrt{3}\sin(120°)-\cos(120°)$ $=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$ $=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$	Nilai maksimum
$x=300°$	$f(300°)=\sqrt{3}\sin(300°)-\cos(300°)$ $=\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)$ $=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2$	Nilai minimum
$x=360°$	$f(360°)=\sqrt{3}\sin(360°)-\cos(360°)$ $=\sqrt{3}(0)-(1)=-1$	-

Jadi, fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ mempunyai nilai maksimum 2 saat $x=120°$ dan nilai minimum -2 saat $x=300°$.



Gambar 52 Nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$

3. Sebuah perusahaan farmasi menghasilkan produknya selama 1 tahun (dalam satuan ratusan ribu unit) sebagai $H(t) = 5,5 + 2\sin(t.45°)$ dengan $t =$ waktu (bulan) dan $1 \le t \le 15$. Jika $t = 1$ menunjukkan produk farmasi pada bulan Januari 2018, tentukan pada bulan apa saja produk yang dihasilkan adalah minimal dan banyak produk saat minimal tersebut.

   Penyelesaian:

   Jumlah produk saat t: $H(t) = 5,5 + 2\sin(t.45°)$, $1 \le t \le 15$

   Turunan pertama: $H'(t) = 0 + (45°)2\cos(t.45°)$

   $$H'(t) = 90°\cos(t.45°)$$

   Syarat stasioner: $H'(t) = 0$

   $90°\cos(t.45°) = 0 \Leftrightarrow \cos(t.45°) = 0$

   Mencari nilai t saat fungsi stasioner:

$$\cos(t.45°) = 0$$

$$t.45° = 90°, 270°, 450°, 630°, 810°, \ldots$$

$$t = \frac{90°}{45°}, \frac{270°}{45°}, \frac{450°}{45°}, \frac{630°}{45°}, \frac{810°}{45°}, \ldots$$

$$t = 2, 6, 10, 14, 18, \ldots$$

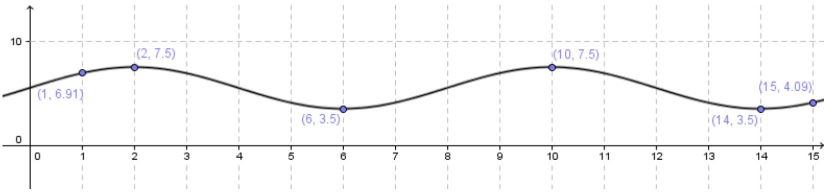
Menentukan hasil produksi minimal (jumlah produksi terkecil) dengan mensubstitusikan nilai t saat stasioner dan nilai t di ujung interval, yaitu $t = 1, 2, 6, 10, 14, 15$ ke dalam fungsi $H(t) = 5,5 + 2\sin(t.45°)$:

Nilai t	$H(t) = 5,5 + 2\sin(t.45°)$
$t = 1$	$H(1) = 5,5 + 2\sin(1.45°) = 5,5 + 2\sin(45°)$ $= 5,5 + 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 5,5 + \sqrt{2}$
$t = 2$	$H(2) = 5,5 + 2\sin(2.45°) = 5,5 + 2\sin(90°)$ $= 5,5 + 2(1) = 5,5 + 2 = 7,5$
$t = 6$	$H(6) = 5,5 + 2\sin(6.45°) = 5,5 + 2\sin(270°)$ $= 5,5 + 2(-1) = 5,5 - 2 = 3,5$ Produksi minimal
$t = 10$	$H(10) = 5,5 + 2\sin(10.45°) = 5,5 + 2\sin(450°)$ $= 5,5 + 2\sin(360° + 90°) = 5,5 + 2(1)$ $= 5,5 + 2 = 7,5$
$t = 14$	$H(14) = 5,5 + 2\sin(14.45°) = 5,5 + 2\sin(630°)$ $= 5,5 + 2\sin(360° + 270°) = 5,5 + 2(-1)$ $= 5,5 - 2 = 3,5$ Produksi minimal

Nilai t	$H(t)=5{,}5+2\sin(t.45^\circ)$
$t=15$	$H(15)=5{,}5+2\sin(15.45^\circ)=5{,}5+2\sin(675^\circ)$ $=5{,}5+2\sin(360^\circ+315^\circ)=5{,}5+2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ $=5{,}5-\sqrt{2}$

Produksi minimal: $3{,}5$ (dalam ratusan ribu)

Jadi, jumlah produksi terkecil perusahaan farmasi tersebut terjadi pada bulan ke-6 dan ke-14 (bulan Juni 2018 dan Februari 2019) dengan jumlah produksi sebesar 350.000 unit.



Gambar 53 Jumlah produksi sebuah perusahaan farmasi yang dimodelkan dalam fungsi $H(t)=5{,}5+2\sin(t.45^\circ)$ (dalam satuan ratusan ribu unit) dengan $t=$ waktu (bulan) dan $1\le t\le 15$

4. Sepanjang hari, ketinggian air laut pada suatu dermaga bervariasi karena mengalami pasang surut. Ketinggian air tersebut dapat dimodelkan oleh fungsi $D(t)=3{,}5+1{,}5\cos(t.30^\circ)$ (dalam satuan meter) dan $0\le t\le 24$ (dengan $t=0$ mewakili tengah malam).
   d. Tentukan $D'(t)$
   e. Tentukan waktu ketika ketinggian air mencapai maksimum dan minimum.
   f. Berapakah ketinggian maksimum air tersebut?

Penyelesaian:

Ketinggian air: $D(t)=3{,}5+1{,}5\cos(t.30^\circ)$, $0\le t\le 24$

Turunan pertama: $D'(t) = 0 - (30°)1,5\sin(t.30°)$

$$D'(t) = -45°\sin(t.30°)$$

Syarat stasioner: $D'(t) = 0$

$-45°\sin(t.30°) = 0 \Leftrightarrow \sin(t.30°) = 0$

Mencari nilai t saat fungsi stasioner:

$\sin(t.30°) = 0$

$$t.30° = 0°, 180°, 360°, 540°, 720°, 900°, 1080°, \ldots$$

$$t = \frac{0°}{30°}, \frac{180°}{30°}, \frac{360°}{30°}, \frac{540°}{30°}, \frac{720°}{30°}, \frac{900°}{30°}, \frac{1080°}{30°}, \ldots$$

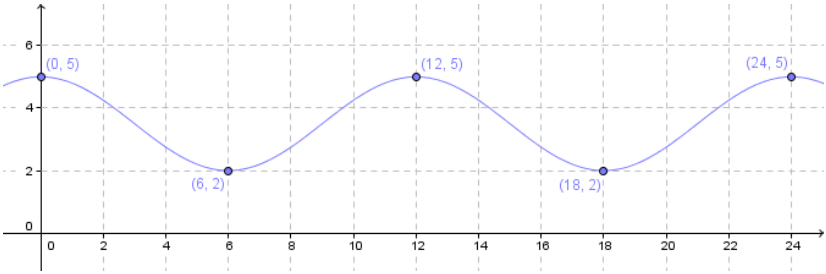
$$t = 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, \ldots$$

Menentukan waktu ketika ketinggian air mencapai maksimum dengan mensubstitusikan nilai t saat stasioner dan nilai t di ujung interval, yaitu $t = 0, 6, 12, 18, 24$ ke dalam fungsi $D(t) = 3,5 + 1,5\cos(t.30°)$.

Nilai t	$D(t) = 3,5 + 1,5\cos(t.30°)$
$t = 0$	$D(0) = 3,5 + 1,5\cos(0.30°) = 3,5 + 1,5\cos(0°)$ $= 3,5 + 1,5(1) = 3,5 + 1,5 = 5$
$t = 6$	$D(6) = 3,5 + 1,5\cos(6.30°) = 3,5 + 1,5\cos(180°)$ $= 3,5 + 1,5(-1) = 3,5 - 1,5 = 2$
$t = 12$	$D(12) = 3,5 + 1,5\cos(12.30°) = 3,5 + 1,5\cos(360°)$ $= 3,5 + 1,5(1) = 3,5 + 1,5 = 5$
$t = 18$	$D(18) = 3,5 + 1,5\cos(18.30°) = 3,5 + 1,5\cos(540°)$ $= 3,5 + 1,5\cos(360° + 180°)$ $= 3,5 + 1,5(-1) = 3,5 - 1,5 = 2$

Nilai t	$D(t)=3,5+1,5\cos(t.30^\circ)$
$t=24$	$D(24)=3,5+1,5\cos(24.30^\circ)$ $=3,5+1,5\cos(720^\circ)$ $=3,5+1,5\cos(360^\circ+360^\circ)$ $=3,5+1,5(1)=3,5+1,5=5$

Ketinggian maksimum air laut tersebut adalah 5 meter saat $t=0$, $t=12$ atau $t=24$, yaitu saat pukul 12 malam dan pukul 12 siang.



Gambar 54 Ketinggian air laut yang dimodelkan oleh fungsi $D(t)=3,5+1,5\cos(t.30^\circ)$ (dalam satuan meter) dan $0 \le t \le 24$ (dengan $t=0$ mewakili tengah malam)

5. Suhu suatu ruangan dapat dimodelkan oleh $T(t)=98,1+0,6\cos(t.30^\circ)$ (dalam derajat Fahrenheit) dengan $t=\text{waktu}$ (dalam jam) dan $0 \le t \le 24$. Kapan ruangan tersebut akan bersuhu maksimum dan bersuhu minimum? Berapakah besar suhu saat maksimum dan minimum?

Penyelesaian:

Suhu ruangan: $T(t)=98,1+0,6\cos(t.30^\circ)$

Turunan pertama: $T'(t)=0-(30^\circ)0,6\sin(t.30^\circ)$

$$T'(t)=-48^\circ\sin(t.30^\circ)$$

Syarat stasioner: $T'(t)=0$

$-48^\circ\sin(t.30^\circ)=0 \Leftrightarrow \sin(t.30^\circ)=0$

Menentukan nilai t saat stasioner:

$$\sin(t.30^\circ)=0 \Leftrightarrow t.30^\circ = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 480^\circ, 720^\circ, \ldots$$

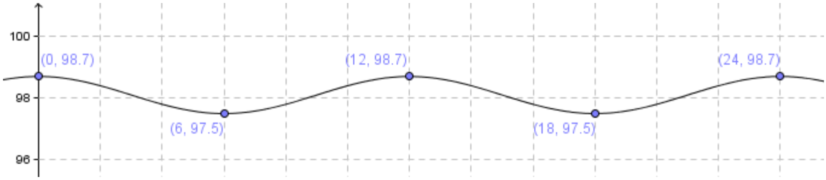
$$t = \frac{0^\circ}{30^\circ}, \frac{180^\circ}{30^\circ}, \frac{360^\circ}{30^\circ}, \frac{480^\circ}{30^\circ}, \frac{720^\circ}{30^\circ}, \ldots$$

$$t = 0, 6, 12, 18, 24, \ldots$$

Menentukan suhu maksimum dan suhu minimum dengan mensubstitusikan nilai t saat stasioner dan nilai t di ujung interval, yaitu $t = 0, 6, 12, 18, 24$ ke dalam fungsi $T(t) = 98{,}1 + 0{,}6\cos(t.30^\circ)$.

Nilai t	$T(t) = 98{,}1 + 0{,}6\cos(t.30^\circ)$
$t = 0$	$T(0) = 98{,}1 + 0{,}6\cos(0.30^\circ) = 98{,}1 + 0{,}6\cos(0^\circ)$ $= 98{,}1 + 0{,}6(1) = 98{,}1 + 0{,}6 = 98{,}7$
$t = 6$	$T(6) = 98{,}1 + 0{,}6\cos(6.30^\circ) = 98{,}1 + 0{,}6\cos(180^\circ)$ $= 98{,}1 + 0{,}6(-1) = 98{,}1 - 0{,}6 = 97{,}5$
$t = 12$	$T(12) = 98{,}1 + 0{,}6\cos(12.30^\circ) = 98{,}1 + 0{,}6\cos(360^\circ)$ $= 98{,}1 + 0{,}6(1) = 98{,}1 + 0{,}6 = 98{,}7$
$t = 18$	$T(18) = 98{,}1 + 0{,}6\cos(18.30^\circ) = 98{,}1 + 0{,}6\cos(540^\circ)$ $= 98{,}1 + 0{,}6\cos(360^\circ + 180^\circ)$ $= 98{,}1 + 0{,}6(-1) = 98{,}1 - 0{,}6 = 97{,}5$
$t = 24$	$T(24) = 98{,}1 + 0{,}6\cos(24.30^\circ) = 98{,}1 + 0{,}6\cos(720^\circ)$ $= 98{,}1 + 0{,}6\cos(360^\circ + 360^\circ)$ $= 98{,}1 + 0{,}6(1) = 98{,}1 + 0{,}6 = 98{,}7$

Suhu maksimum ruangan adalah $98{,}7^\circ F$ saat $t = 0$, $t = 12$, dan $t = 24$ (tengah malam dan tengah hari) dan suhu minimum ruangan tersebut adalah $97{,}5^\circ F$ saat $t = 6$ dan $t = 18$ (pukul 6 pagi dan 6 sore).



Gambar 55 Suhu suatu ruangan yang dimodelkan oleh $T(t) = 98{,}1 + 0{,}6\cos(t.30°)$ (dalam derajat Fahrenheit) dengan $t =$ waktu (dalam jam) dan $0 \le t \le 24$

Latihan 5: Jenis Titik Stasioner Fungsi Trigonometri

1. Tentukan jenis titik-titik stasioner dari fungsi $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$.

   c. Menggunakan uji turunan pertama

   d. Menggunakan uji turunan kedua

   Penyelesaian:

   $$f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x \Rightarrow \; f'(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$$

   $$f''(x) = -\sqrt{3}\sin x - \cos x$$

   Menentukan nilai x dari syarat stasioner: $f'(x) = 0$

   $$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x = \sin x$$

   $$\sqrt{3} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

   $$\sqrt{3} = \tan x$$

   $$x = 60°, 240°$$

   Menentukan nilai stasioner dengan mensubstitusikan $x = 60°$ dan $x = 240°$ ke dalam fungsi $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$.

Nilai x	$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$	Titik stasioner
$x=60°$	$f(60°)=\sqrt{3}\sin(60°)+\cos(60°)$ $=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$	$(60°,2)$
$x=240°$	$f(240°)=\sqrt{3}\sin(240°)+\cos(240°)$ $=\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$ $=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{4}{2}=-2$	$(240°,-2)$

a. Menentukan jenis titik stasioner menggunakan uji turunan pertama $f'(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$

Nilai x	Tanda $f'(x)$	Sifat Fungsi	Jenis Stasioner
$0°\le x<60°$	positif	naik	-
$x=60°$	0	stasioner	Titik balik maksimum
$60°<x<240°$	negatif	turun	-
$x=240°$	0	stasioner	Titik balik minimum
$240°<x\le 360°$	positif	naik	-

b. Menentukan jenis titik stasioner menggunakan uji turunan kedua $f''(x)=-\sqrt{3}\sin x-\cos x$

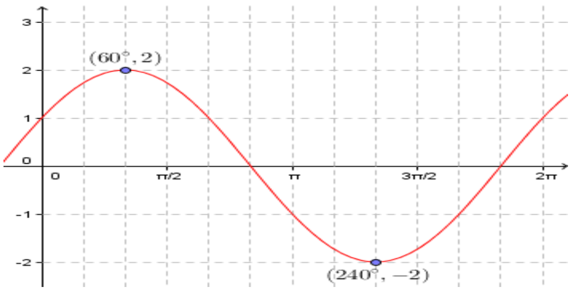
Nilai x	$f''(x)=-\sqrt{3}\sin x-\cos x$	Jenis Stasioner
$x=60°$	$f''(60°)=-\sqrt{3}\sin(60°)-\cos(60°)$ $=-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)$ $=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2$	Titik balik maksimum

Nilai x	$f''(x) = -\sqrt{3}\sin x - \cos x$	Jenis Stasioner
	Jadi, $f''(60°)$ bertanda negatif	
$x = 240°$	$f''(240°) = -\sqrt{3}\sin(240°) - \cos(240°)$ $= -\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)$ $= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ Jadi, $f''(240°)$ bertanda positif	Titik balik minimum

Jadi, fungsi $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$ mempunyai titik-titik stasioner:

a. $(60°, 2)$: titik balik maksimum

b. $(240°, -2)$: titik balik minimum



Gambar 56 Titik-titik stasioner fungsi $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$

2. Tentukan jenis titik-titik stasioner dari fungsi $f(x) = 2\cos x - 2\sin x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$.

   c. Menggunakan uji turunan pertama

   d. Menggunakan uji turunan kedua

Penyelesaian:

$$f(x) = 2\cos x - 2\sin x \Rightarrow f'(x) = -2\sin x - 2\cos x$$

$$f''(x) = -2\cos x + 2\sin x$$

Menentukan nilai x dengan syarat stasioner: $f'(x) = 0$

$-2\sin x - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow -2\sin x = 2\cos x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2}{-2}$$

$$\tan x = -1$$

$$x = 135°, 315°$$

Menentukan nilai stasioner dengan substitusi $x = 135°$ dan $x = 315°$ ke dalam fungsi $f(x) = 2\cos x - 2\sin x$:

Nilai x	$f(x) = 2\cos x - 2\sin x$	Titik stasioner
$x = 135°$	$f(135°) = 2\cos(135°) - 2\sin(135°)$ $= 2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ $= -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}$	$\left(135°, -2\sqrt{2}\right)$
$x = 315°$	$f(315°) = 2\cos(315°) - 2\sin(315°)$ $= 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - 2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ $= \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$	$\left(315°, 2\sqrt{2}\right)$

a. Menentukan jenis titik stasioner menggunakan uji turunan pertama $f'(x) = -2\sin x - 2\cos x$:

Nilai x	Tanda $f'(x)$	Sifat Fungsi	Jenis Stasioner
$0° \le x < 135°$	negatif	turun	-
$x = 135°$	0	stasioner	Titik balik minimum
$135° < x < 315°$	positif	naik	-
$x = 315°$	0	stasioner	Titik balik maksimum
$315° < x \le 360°$	negatif	turun	-

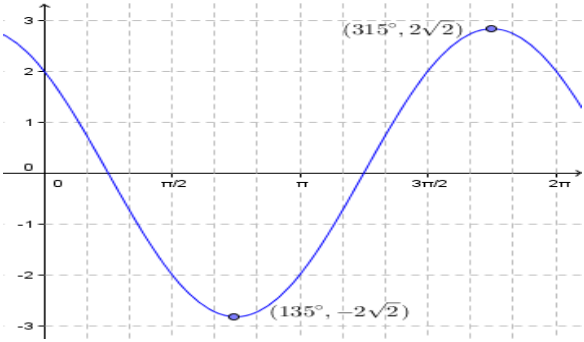
b. Menentukan jenis titik stasioner menggunakan uji turunan kedua $f''(x) = -2\cos x + 2\sin x$:

Nilai x	$f''(x) = -2\cos x + 2\sin x$	Jenis Stasioner
$x = 135°$	$f''(135°) = -2\cos(135°) + 2\sin(135°)$ $= -2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ $= \sqrt{2} + \sqrt{2}$ $= 2\sqrt{2}$ Jadi, $f''(30°)$ bertanda positif	Titik balik minimum
$x = 315°$	$f''(315°) = -2\cos(315°) + 2\sin(315°)$ $= -2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ $= -\sqrt{2} - \sqrt{2}$ $= -2\sqrt{2}$ Jadi, $f''(210°)$ bertanda negatif	Titik balik maksimum

Jadi, fungsi $f(x) = 2\cos x - 2\sin x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$ mempunyai titik-titik stasioner:

a. $\left(135°, -2\sqrt{2}\right)$: titik balik minimum

b. $\left(315°, 2\sqrt{2}\right)$: titik balik maksimum



Gambar 57 Titik-titik stasioner fungsi $f(x) = 2\cos x - 2\sin x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$

3. Tentukan jenis titik-titik stasioner dan jenisnya dari fungsi $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$.

   c. Menggunakan uji turunan pertama

   d. Menggunakan uji turunan kedua

   Penyelesaian:

$$f(x) = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x \Rightarrow f'(x) = 2\cos 2x - 2\sqrt{3}\sin 2x$$
$$f''(x) = -4\sin 2x - 4\sqrt{3}\cos 2x$$

Menentukan nilai x saat stasioner dengan syarat stasioner: $f'(x) = 0$

$$2\cos 2x - 2\sqrt{3}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x = 2\sqrt{3}\sin 2x$$
$$\frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$
$$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \tan 2x$$
$$2x = 30°, 210°, 390°, 570°$$
$$x = 15°, 105°, 195°, 285°$$

Menentukan nilai stasioner dengan mensubstitusikan $x = 15°, 105°, 195°, 285°$ ke dalam fungsi $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$:

Nilai x	$f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$	Titik stasioner
$x=15°$	$f(15°)=\sin 2(15°)+\sqrt{3}\cos 2(15°)$ $=\sin(30°)+\sqrt{3}\cos(30°)$ $=\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$	$(15°,2)$
$x=105°$	$f(105°)=\sin 2(105°)+\sqrt{3}\cos 2(105°)$ $=\sin(210°)+\sqrt{3}\cos(210°)$ $=-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ $=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{4}{2}=-2$	$(105°,-2)$
$x=195°$	$f(195°)=\sin 2(195°)+\sqrt{3}\cos 2(195°)$ $=\sin(390°)+\sqrt{3}\cos(390°)$ $=\sin(30°)+\sqrt{3}\cos(30°)$ $=\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$ $=\frac{4}{2}=2$	$(195°,2)$
$x=285°$	$f(285°)=\sin 2(285°)+\sqrt{3}\cos 2(285°)$ $=\sin(570°)+\sqrt{3}\cos(570°)$ $=\sin(210°)+\sqrt{3}\cos(210°)$ $=-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}$ $=-\frac{4}{2}=-2$	$(285°,-2)$

a. Menentukan jenis titik stasioner menggunakan uji turunan pertama $f'(x) = 2\cos 2x - 2\sqrt{3}\sin 2x$:

Nilai x	Tanda $f'(x)$	Sifat Fungsi	Jenis Stasioner
$0° \leq x < 15°$	positif	naik	-
$x = 15°$	0	stasioner	Titik balik maksimum
$15° < x < 105°$	negatif	turun	-
$x = 105°$	0	stasioner	Titik balik minimum
$105° < x < 195°$	positif	naik	-
$x = 195°$	0	stasioner	Titik balik maksimum
$195° < x < 285°$	negatif	turun	-
$x = 285°$	0	stasioner	Titik balik minimum
$285° < x \leq 360°$	positif	naik	-

b. Menentukan jenis titik stasioner menggunakan uji turunan kedua $f''(x) = -4\sin 2x - 4\sqrt{3}\cos 2x$:

Nilai x	$f''(x) = -4\sin 2x - 4\sqrt{3}\cos 2x$	Jenis Stasioner
$x = 15°$	$f''(15°) = -4\sin 2(15°) - 4\sqrt{3}\cos 2(15°)$ $= -4\sin(30°) - 4\sqrt{3}\cos(30°)$ $= -4\left(\frac{1}{2}\right) - 4\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ $= -\frac{4}{2} - \frac{12}{2} = -8$ Jadi, $f''(15°)$ bertanda negatif	Titik balik maksimum

Nilai x	$f''(x)=-4\sin 2x-4\sqrt{3}\cos 2x$	Jenis Stasioner
$x=105°$	$f''(105°)=-4\sin 2(105°)-4\sqrt{3}\cos 2(105°)$ $=-4\sin(210°)-4\sqrt{3}\cos(210°)$ $=-4\left(-\frac{1}{2}\right)-4\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ $=\frac{4}{2}+\frac{12}{2}=8$ Jadi, $f''(105°)$ bertanda positif	Titik balik minimum
$x=195°$	$f''(195°)=-4\sin 2(195°)-4\sqrt{3}\cos 2(195°)$ $=-4\sin(390°)-4\sqrt{3}\cos(390°)$ $=-4\sin(30°)-4\sqrt{3}\cos(30°)$ $=-4\left(\frac{1}{2}\right)-4\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ $=-\frac{4}{2}-\frac{12}{2}=-8$ Jadi, $f''(195°)$ bertanda negatif	Titik balik maksimum
$x=285°$	$f''(285°)=-4\sin 2(285°)-4\sqrt{3}\cos 2(285°)$ $=-4\sin(570°)-4\sqrt{3}\cos(570°)$ $=-4\sin(210°)-4\sqrt{3}\cos(210°)$ $=-4\left(-\frac{1}{2}\right)-4\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ $=\frac{4}{2}+\frac{12}{2}=8$ Jadi, $f''(285°)$ bertanda positif	Titik balik minimum

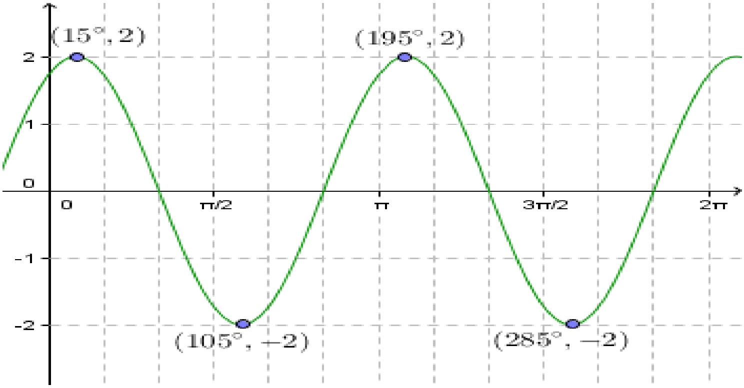
Jadi, fungsi $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$ mempunyai titik-titik stasioner:

a. $(15°,2)$: titik balik maksimum

b. $(105°,-2)$: titik balik minimum

c. $(195°,2)$: titik balik maksimum

d. $(285°,-2)$: titik balik minimum



Gambar 58 Titik-titik stasioner fungsi $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$

4. Tentukan jenis titik-titik stasioner dan jenisnya dari fungsi $f(x)=\sqrt{3}\cos x+3\sin x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$.

   c. Menggunakan uji turunan pertama

   d. Menggunakan uji turunan kedua

   Penyelesaian:

   $$f(x)=\sqrt{3}\cos x+3\sin x \Rightarrow f'(x)=-\sqrt{3}\sin x+3\cos x$$

   $$f''(x)=-\sqrt{3}\cos x-3\sin x$$

   Menentukan nilai x dengan syarat stasioner: $f'(x)=0$

   $$-\sqrt{3}\sin x+3\cos x=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x=3\cos x$$

   $$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{3}{\sqrt{3}}$$

   $$\tan x=\sqrt{3}$$

   $$x=60°,240°$$

Menentukan nilai stasioner dengan mensubstitusikan $x=60°, 240°$ ke dalam fungsi $f(x)=\sqrt{3}\cos x+3\sin x$:

Nilai x	$f(x)=\sqrt{3}\cos x+3\sin x$	Titik stasioner
$x=60°$	$f(60°)=\sqrt{3}\cos(60°)+3\sin(60°)$ $=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ $=\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$	$(60°, 2\sqrt{3})$
$x=240°$	$f(240°)=\sqrt{3}\cos(240°)+3\sin(240°)$ $=\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right)+3\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ $=\frac{-\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}$	$(240°, -2\sqrt{3})$

a. Menentukan jenis stasioner menggunakan uji turunan pertama $f'(x)=-\sqrt{3}\sin x+3\cos x$:

Nilai x	Tanda $f'(x)$	Sifat Fungsi	Jenis Stasioner
$0° \le x < 60°$	positif	naik	-
$x=60°$	0	stasioner	Titik balik maksimum
$60° < x < 240°$	negatif	turun	-
$x=240°$	0	stasioner	Titik balik minimum
$240° < x \le 360°$	positif	naik	-

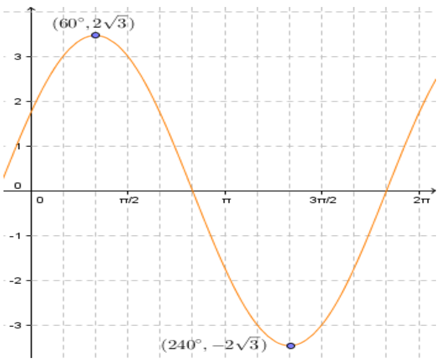
b. Menentukan jenis titik stasioner menggunakan uji turunan kedua $f''(x)=-\sqrt{3}\cos x-3\sin x$:

Nilai x	$f''(x) = -\sqrt{3}\cos x - 3\sin x$	Jenis Stasioner
$x = 30°$	$f''(30°) = -\sqrt{3}\cos(30°) - 3\sin(30°)$ $= -\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right)$ $= -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -3$ Jadi, $f''(30°)$ bertanda negatif	Titik balik maksimum
$x = 210°$	$f''(210°) = -\sqrt{3}\cos(210°) - 3\sin(210°)$ $= -\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right)$ $= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$ Jadi, $f''(210°)$ bertanda positif	Titik balik minimum

Jadi, fungsi $f(x) = \sqrt{3}\cos x + 3\sin x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$ mempunyai titik-titik stasioner:

a. $\left(60°, 2\sqrt{3}\right)$: titik balik maksimum

b. $\left(240°, -2\sqrt{3}\right)$: titik balik minimum



Gambar 59 Titik-titik stasioner fungsi $f(x) = \sqrt{3}\cos x + 3\sin x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$

5. Tentukan jenis titik-titik stasioner dan jenisnya dari fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$.

   c. Menggunakan uji turunan pertama

   d. Menggunakan uji turunan kedua

   Penyelesaian:

$$f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x \Rightarrow f'(x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x$$
$$f''(x)=-\sqrt{3}\sin x+\cos x$$

Menentukan nilai x saat stasioner dengan syarat stasioner:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{3}\cos x+\sin x=0$$
$$\sin x=-\sqrt{3}\cos x$$
$$\frac{\sin x}{\cos x}=-\sqrt{3}$$
$$\tan x=-\sqrt{3}$$
$$x=120°,300°$$

Menentukan nilai stasioner dengan mensubstitusikan $x=120°,300°$ ke dalam fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$:

Nilai x	$f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$	Titik stasioner
$x=120°$	$f(120°)=\sqrt{3}\sin(120°)-\cos(120°)$ $=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$ $=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$	$(120°,2)$
$x=300°$	$f(300°)=\sqrt{3}\sin(300°)-\cos(300°)$ $=\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)$ $=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2$	$(300°,-2)$

a. Menentukan jenis stasioner menggunakan uji turunan pertama $f'(x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x$:

Nilai x	Tanda $f'(x)$	Sifat Fungsi	Jenis Stasioner
$0°\le x<120°$	positif	naik	-
$x=120°$	0	stasioner	Titik balik maksimum
$120°<x<300°$	negatif	turun	-
$x=300°$	0	stasioner	Titik balik minimum
$300°<x\le 360°$	positif	naik	-

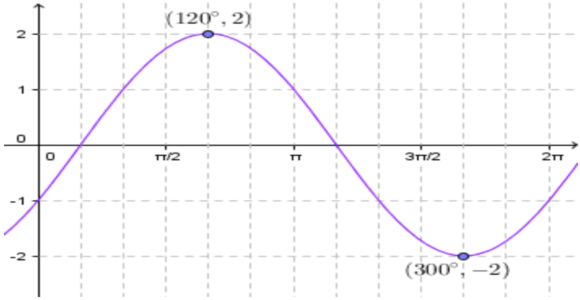
b. Menentukan jenis stasioner menggunakan uji turunan kedua $f''(x)=-\sqrt{3}\sin x+\cos x$:

Nilai x	$f''(x)=-\sqrt{3}\sin x+\cos x$	Jenis Stasioner
$x=120°$	$f''(120°)=-\sqrt{3}\sin(120°)+\cos(120°)$ $=-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$ $=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-1$ Jadi, $f''(120°)$ bertanda negatif	Titik balik maksimum
$x=300°$	$f''(300°)=-\sqrt{3}\sin(300°)+\cos(300°)$ $=-\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)$ $=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$ Jadi, $f''(300°)$ bertanda positif	Titik balik minimum

Jadi, fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$ mempunyai titik-titik stasioner:

a. $(120°,2)$: titik balik maksimum (naik-stasioner-turun)

b. $(300°,-2)$: titik balik minimum (turun-stasioner-naik)



Gambar 60 Titik-titik stasioner fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$

Latihan 6: Titik Belok Kurva Fungsi Trigonometri

1. Tentukan titik belok dari fungsi $f(x)=-\sin x+\cos x$.

Penyelesaian:

$$f(x)=-\sin x+\cos x\Rightarrow\ f'(x)=-\cos x-\sin x$$
$$f''(x)=\sin x-\cos x$$

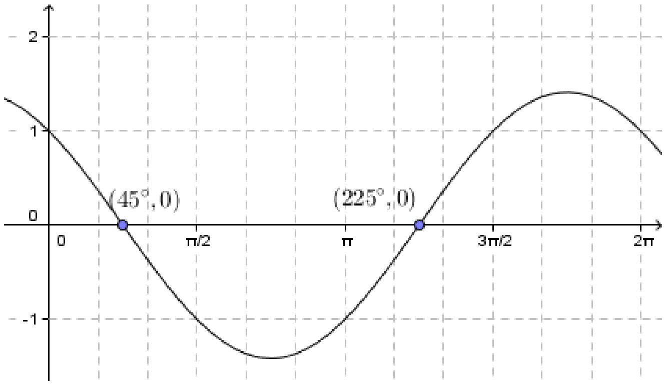
Syarat titik belok: $f''(x)=0$

$$f''(x)=0\Rightarrow \sin x-\cos x=0$$
$$\sin x=\cos x$$
$$\frac{\sin x}{\cos x}=1$$
$$\tan x=1$$
$$x=45°,225°$$

Mencari titik belok dengan mensubstitusikan $x=45°$ dan $x=225°$ ke dalam fungsi $f(x)=-\sin x+\cos x$:

Nilai x	$f(x) = -\sin x + \cos x$	Titik Belok
$x = 45°$	$f(45°) = -\sin(45°) + \cos(45°)$ $= -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $= 0$	$(45°, 0)$
$x = 225°$	$f(225°) = -\sin(225°) + \cos(225°)$ $= -\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ $= \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$	$(225°, 0)$

Jadi, fungsi $f(x) = -\sin x + \cos x$ dalam interval $0° \leq x \leq 360°$ mempunyai titik belok $(45°, 0)$ dan $(225°, 0)$.



Gambar 61 Titik belok kurva fungsi $f(x) = -\sin x + \cos x$ dalam interval $0° \leq x \leq 360°$

2. Tentukan titik belok dari fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$.

Penyelesaian:

$$f(x) = \sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - \sin x$$
$$f''(x) = -\sin x - \cos x$$

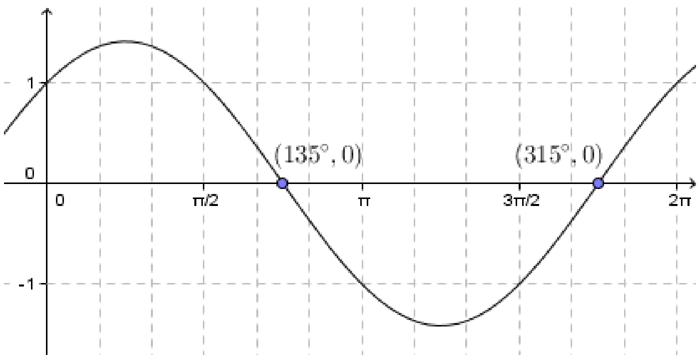
Syarat titik belok: $f''(x) = 0$

$$f''(x)=0 \Rightarrow -\sin x-\cos x=0$$
$$\sin x=-\cos x$$
$$\frac{\sin x}{\cos x}=-1$$
$$\tan x=-1$$
$$x=135°,315°$$

Mencari titik belok dengan mensubstitusikan $x=135°$ dan $x=315°$ ke dalam fungsi $f(x)=\sin x+\cos x$:

Nilai x	$f(x)=\sin x+\cos x$	Titik Belok
$x=135°$	$f(135°)=\sin(135°)+\cos(135°)$ $=\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}=0$	$(135°,0)$
$x=315°$	$f(315°)=\sin(315°)+\cos(315°)$ $=-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}=0$	$(315°,0)$

Jadi, fungsi $f(x)=\sin x+\cos x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$ mempunyai titik belok $(135°,0)$ dan $(315°,0)$.



Gambar 62 Titik belok kurva fungsi $f(x)=\sin x+\cos x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$

3. Tentukan titik belok dari fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$.

Penyelesaian:

$$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x \Rightarrow \quad f'(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$$
$$f''(x)=-\sqrt{3}\sin x-\cos x$$

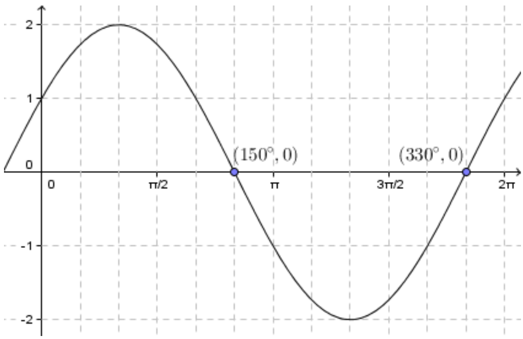
Syarat titik belok: $f''(x)=0$

$$f''(x)=0 \Rightarrow -\sqrt{3}\sin x-\cos x=0$$
$$\sqrt{3}\sin x=-\cos x$$
$$\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\tan x=-\frac{1}{3}\sqrt{3}$$
$$x=150^\circ,330^\circ$$

Mencari titik belok dengan mensubstitusikan $x=150^\circ$ dan $x=330^\circ$ ke dalam fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$:

Nilai x	$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$	Titik Belok
$x=150^\circ$	$f(150^\circ)=\sqrt{3}\sin(150^\circ)+\cos(150^\circ)$ $=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}=0$	$(150^\circ,0)$
$x=330^\circ$	$f(330^\circ)=\sqrt{3}\sin(330^\circ)+\cos(330^\circ)$ $=-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{3}=0$	$(330^\circ,0)$

Jadi, fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ dalam interval $0^\circ\le x\le 360^\circ$ mempunyai titik belok $(150^\circ,0)$ dan $(330^\circ,0)$.



Gambar 63 Titik belok kurva fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$

4. Tentukan titik belok dari fungsi $f(x)=3+2\sin x$.

Penyelesaian:

$$f(x)=3+2\sin x \Rightarrow f'(x)=2\cos x$$
$$f''(x)=-2\sin x$$

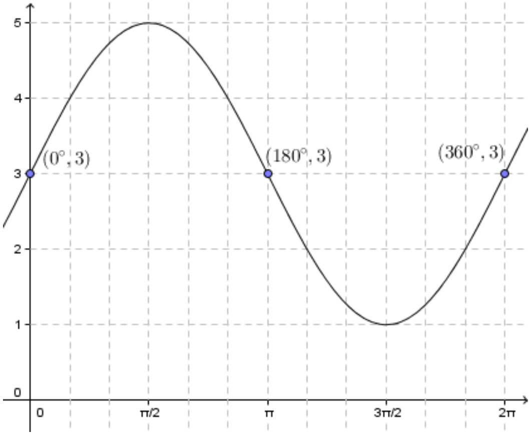
Syarat titik belok: $f''(x)=0$

$$f''(x)=0 \Rightarrow -2\sin x=0$$
$$\sin x=0$$
$$x=0°,180°,360°$$

Mencari titik belok dengan mensubstitusikan $x=0°$, $x=180°$ dan $x=360°$ ke dalam fungsi $f(x)=3+2\sin x$:

Nilai x	$f(x)=3+2\sin x$	Titik Belok
$x=0°$	$f(0°)=3+2\sin(0°)$ $=3+2.0=3+0=3$	$(0°,3)$
$x=180°$	$f(180°)=3+2\sin(180°)$ $=3+2.0=3+0=3$	$(180°,3)$
$x=360°$	$f(360°)=3+2\sin(360°)$ $=3+2.0=3+0=3$	$(360°,3)$

Jadi, fungsi $f(x)=3+2\sin x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$ mempunyai titik belok $(0°,3)$, $(180°,3)$ dan $(360°,3)$.



Gambar 64 Titik belok kurva fungsi $f(x)=3+2\sin x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$

5. Tentukan titik belok dari fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$.

Penyelesaian:

$$f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x \Rightarrow \quad f'(x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x$$

$$f''(x)=-\sqrt{3}\sin x+\cos x$$

Syarat titik belok: $f''(x)=0$

$$f''(x)=0 \Rightarrow -\sqrt{3}\sin x+\cos x=0$$

$$\sqrt{3}\sin x=\cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

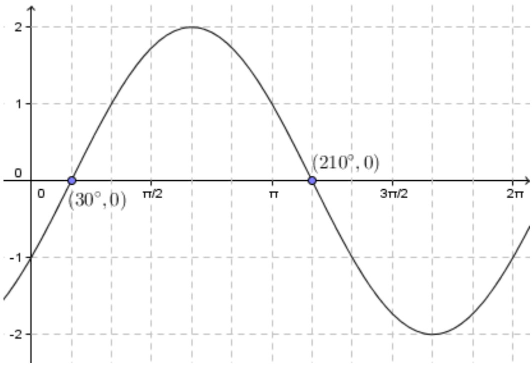
$$\tan x=\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$x=30°, 210°$$

Mencari titik belok dengan mensubstitusikan $x=30°$ dan $x=210°$ ke dalam fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$:

Nilai x	$f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$	Titik Belok
$x=30°$	$f(30°)=\sqrt{3}\sin(30°)-\cos(30°)$ $=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}=0$	$(30°,0)$
$x=210°$	$f(210°)=\sqrt{3}\sin(210°)-\cos(210°)$ $=-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)=0$	$(210°,0)$

Jadi, fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$ mempunyai titik belok $(30°,0)$ dan $(210°,0)$.



Gambar 65 Titik belok kurva fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$

Latihan 7: Kecekungan Kurva Fungsi Trigonometri

1. Tentukan interval saat fungsi $f(x)=-\sin x+\cos x$ cekung ke atas maupun cekung ke bawah.

   Penyelesaian:

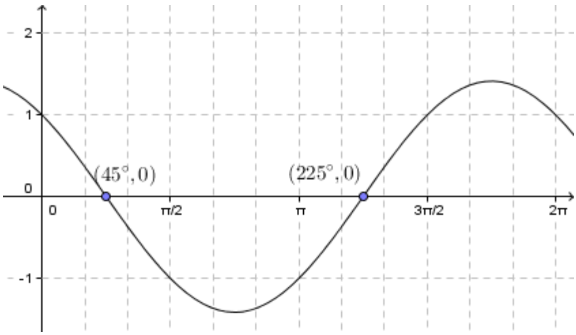
   $$f(x)=-\sin x+\cos x \Rightarrow f'(x)=-\cos x-\sin x$$
   $$f''(x)=\sin x-\cos x$$

   Syarat titik belok: $f''(x)=0$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \sin x-\cos x=0$$
$$\sin x=\cos x$$
$$\frac{\sin x}{\cos x}=1$$
$$\tan x=1$$
$$x=45^\circ, 225^\circ$$

Interval	Nilai $f''(x)=\sin x-\cos x$	Bentuk Kurva
$0^\circ \le x < 45^\circ$	negatif	Cekung ke bawah
$45^\circ < x < 225^\circ$	positif	Cekung ke atas
$225^\circ < x \le 360^\circ$	negatif	Cekung ke bawah

Jadi, fungsi $f(x)=-\sin x+\cos x$ akan berbentuk cekung ke atas pada interval $45^\circ < x < 225^\circ$ dan cekung ke bawah pada interval $0^\circ \le x < 45^\circ$ dan $225^\circ < x \le 360^\circ$.



Gambar 66 Titik belok dan kecekungan kurva fungsi $f(x)=-\sin x+\cos x$ dalam interval $0^\circ \le x \le 360^\circ$

2. Tentukan interval saat fungsi $f(x)=\sin x+\cos x$ cekung ke atas maupun cekung ke bawah.

Penyelesaian:

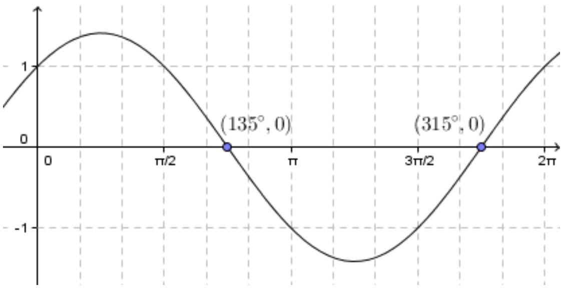
$$f(x)=\sin x+\cos x \Rightarrow f'(x)=\cos x-\sin x$$
$$f''(x)=-\sin x-\cos x$$

Syarat titik belok: $f''(x)=0$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -\sin x - \cos x = 0$$
$$\sin x = -\cos x$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} = -1$$
$$\tan x = -1$$
$$x = 135°, 315°$$

Interval	Nilai $f''(x) = -\sin x - \cos x$	Bentuk Kurva
$0° \le x < 135°$	negatif	Cekung ke bawah
$135° < x < 315°$	positif	Cekung ke atas
$315° < x \le 360°$	negatif	Cekung ke bawah

Jadi, fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$ akan berbentuk cekung ke atas pada interval $135° < x < 315°$ dan cekung ke bawah pada interval $0° \le x < 135°$ dan $315° < x \le 360°$.



Gambar 67 Titik belok dan kecekungan kurva fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$

3. Tentukan interval saat fungsi $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ cekung ke atas maupun cekung ke bawah.

Penyelesaian:

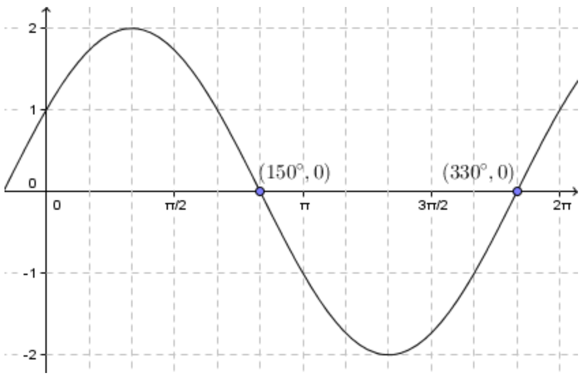
$$f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$$
$$f''(x) = -\sqrt{3}\sin x - \cos x$$

Syarat titik belok: $f''(x) = 0$

$$f''(x)=0 \Rightarrow -\sqrt{3}\sin x-\cos x=0$$
$$\sqrt{3}\sin x=-\cos x$$
$$\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\tan x=-\frac{1}{3}\sqrt{3}$$
$$x=150°,330°$$

Interval	Nilai $f''(x)=-\sqrt{3}\sin x-\cos x$	Bentuk Kurva
$0°\le x<150°$	negatif	Cekung ke bawah
$150°<x<330°$	positif	Cekung ke atas
$330°<x\le 360°$	negatif	Cekung ke bawah

Jadi, fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ akan berbentuk cekung ke atas pada interval $150°<x<330°$ dan cekung ke bawah pada interval $0°\le x<150°$ dan $330°<x\le 360°$.



Gambar 68 Titik belok dan kecekungan kurva fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ dalam interval $0°\le x\le 360°$

4. Tentukan interval saat fungsi $f(x)=3+2\sin x$ cekung ke atas maupun cekung ke bawah.

Penyelesaian:

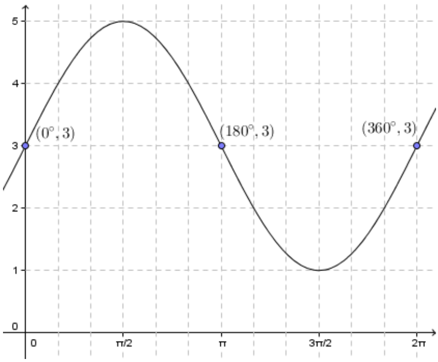
$$f(x) = 3 + 2\sin x \Rightarrow f'(x) = 2\cos x$$
$$f''(x) = -2\sin x$$

Syarat titik belok: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -2\sin x = 0$$
$$\sin x = 0$$
$$x = 0°, 180°, 360°$$

Interval	Nilai $f''(x) = -2\sin x$	Bentuk Kurva
$0° < x < 180°$	negatif	Cekung ke bawah
$180° < x < 360°$	positif	Cekung ke atas

Jadi, fungsi $f(x) = 3 + 2\sin x$ akan berbentuk cekung ke atas pada interval $180° < x < 360°$ dan cekung ke bawah pada interval $0° < x < 180°$.



Gambar 69 Titik belok dan kecekungan kurva fungsi $f(x) = 3 + 2\sin x$ dalam interval $0° \le x \le 360°$

5. Tentukan interval saat fungsi $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ cekung ke atas maupun cekung ke bawah.

Penyelesaian:

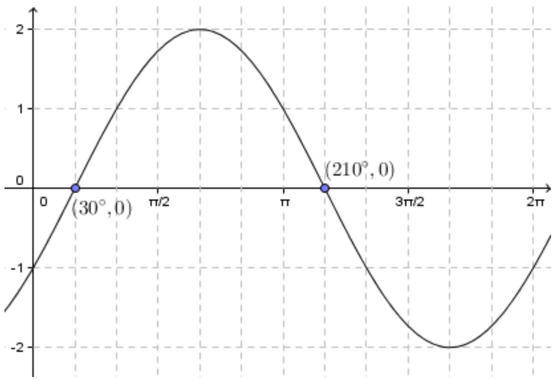
$$f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x \Rightarrow f'(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$$
$$f''(x) = -\sqrt{3}\sin x + \cos x$$

Syarat titik belok: $f''(x)=0$

$$f''(x)=0 \Rightarrow -\sqrt{3}\sin x+\cos x=0$$
$$\sqrt{3}\sin x=\cos x$$
$$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\tan x=\frac{1}{3}\sqrt{3}$$
$$x=30^\circ, 210^\circ$$

Interval	Nilai $f''(x)=-\sqrt{3}\sin x+\cos x$	Bentuk Kurva
$0^\circ \le x < 30^\circ$	positif	Cekung ke atas
$30^\circ < x < 210^\circ$	negatif	Cekung ke bawah
$210^\circ < x \le 360^\circ$	positif	Cekung ke atas

Jadi, fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ akan berbentuk cekung ke atas pada interval $0^\circ \le x < 30^\circ$ dan $210^\circ < x \le 360^\circ$ dan cekung ke bawah pada interval $30^\circ < x < 210^\circ$.



Gambar 70 Titik belok dan kecekungan kurva fungsi $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ dalam interval $0^\circ \le x \le 360^\circ$

A. Pilihan Ganda

1. Turunan pertama suatu fungsi dapat digunakan untuk menentukan:
   a. Gradien garis singgung
   b. Laju perubahan
   c. Naik-turunnya fungsi
   d. Titik maksimum fungsi

   Jawab: D. Titik belok

2. Garis singgung yang menyinggung kurva $f(x)=\cot x$ di titik yang berabsis $x=60^\circ$ mempunyai gradien sebesar ...

   $$f(x)=\cot x \Rightarrow f'(x)=-\csc^2 x$$

   $$x=60^\circ \Rightarrow m=f'(60^\circ)=-\csc^2(60^\circ)=-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=-\frac{4}{3}$$

   Jawab: A. $-\frac{4}{3}$

3. Fungsi $f(x)=\sin x$ akan naik pada interval ...

   $$f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$$

   Syarat stasioner: $f'(x)=0 \Rightarrow \cos x=0$

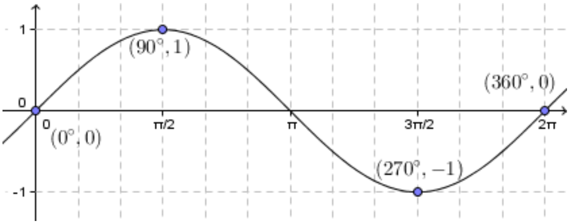
   $$\cos x=0$$

   $$x=90^\circ, 270^\circ$$

   Fungsi $f(x)=\sin x$ naik jika $f'(x)>0$

Interval	Nilai $f'(x)=\cos x$	Sifat Fungsi
$0^\circ \le x < 90^\circ$	positif	naik
$90^\circ < x < 270^\circ$	negatif	turun
$270^\circ < x \le 360^\circ$	positif	naik

Jawab: E. $0^\circ \le x < 90^\circ$ atau $270^\circ < x \le 360^\circ$



Gambar 71 Kurva fungsi $f(x) = \sin x$ pada interval $0° \le x \le 360°$

4. Fungsi $f(x) = \cos 2x$ akan turun pada interval ...

$f(x) = \cos 2x \Rightarrow f'(x) = -2\sin 2x$

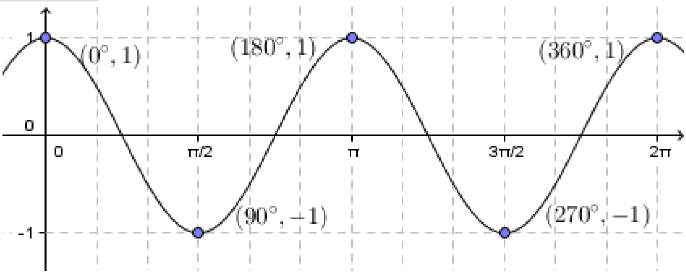
Syarat stasioner: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2\sin 2x = 0$$
$$\sin 2x = 0$$
$$2x = 0°, 180°, 360°, 540°, 720°, \ldots$$
$$x = 0°, 90°, 180°, 270°, 360°, \ldots$$

Fungsi $f(x) = \cos 2x$ turun saat $f'(x) < 0$

Interval	Nilai $f'(x) = -2\sin 2x$	Sifat Fungsi
$0° < x < 90°$	negatif	turun
$90° < x < 180°$	positif	naik
$180° < x < 270°$	negatif	turun
$270° < x < 360°$	positif	naik

Jawab: A. $0° < x < 90°$ atau $180° < x < 270°$



Gambar 72 Kurva fungsi $f(x) = \cos 2x$ pada interval $0° \le x \le 360°$

5. Titik stasioner fungsi $y = 2\sin x$ pada interval $0° \le x \le 360°$ adalah ...

$y = 2\sin x \Rightarrow y' = 2\cos x$

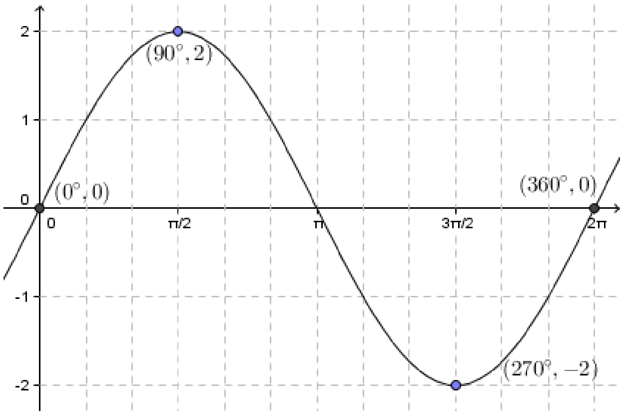
Syarat stasioner: $y' = 0$

$$y' = 0 \Rightarrow 2\cos x = 0$$
$$\cos x = 0$$
$$x = 90°, 270°$$

Menghitung nilai stasioner fungsi $y = 2\sin x$:

Nilai x	Nilai $y = 2\sin x$	Titik stasioner
$x = 90°$	$y = 2\sin(90°)$ $= 2(1) = 2$	$(90°, 2)$
$x = 270°$	$y = 2\sin(270°)$ $= 2(-1) = -2$	$(270°, -2)$

Jawab: C. $(90°, 2)$ dan $(270°, -2)$



Gambar 73 Kurva fungsi $y = 2\sin x$ pada interval $0° \le x \le 360°$

6. Nilai maksimum dari fungsi $f(x) = x + 2\cos x$ dalam interval $0° \le x \le 180°$ adalah ...

   $f(x) = x + 2\cos x \Rightarrow f'(x) = 1 - 2\sin x$

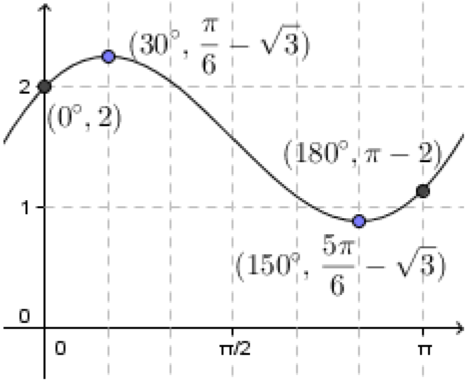
   Syarat stasioner: $f'(x) = 0$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 1-2\sin x=0$$
$$1=2\sin x$$
$$\frac{1}{2}=\sin x$$
$$x=30°,150°$$

Menghitung nilai stasioner dan nilai ujung interval dengan mensubstitusikan $x=0°,30°,150°,180°=0,\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\pi$ ke dalam fungsi $f(x)=x+2\cos x$.

Nilai x	Nilai $f(x)=x+2\cos x$	Keterangan
$x=0°=0$	$f(0°)=0°+2\cos(0°)$ $=0+2(1)=2$	
$x=30°=\frac{\pi}{6}$	$f(30°)=30°+2\cos(30°)$ $=\frac{\pi}{6}+2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ $=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$ $\approx 2,26$	Nilai maksimum
$x=150°=\frac{5\pi}{6}$	$f(150°)=150°+2\cos(150°)$ $=\frac{5\pi}{6}+2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ $=\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$ $\approx 0,89$	Nilai minimum
$x=180°=\pi$	$f(180°)=180°+2\cos(180°)$ $=\pi+2(-1)$ $=\pi-2$ $\approx 1,14$	

Jawab: C. $\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$



Gambar 74 Kurva fungsi $f(x)=x+2\cos x$ pada interval $0^\circ \le x \le 180^\circ$

7. Nilai minimum dari fungsi $f(x)=x+2\sin x$ dalam interval $0^\circ \le x \le 360^\circ$ adalah ...

$f(x)=x+2\sin x \Rightarrow f'(x)=1+2\cos x$

Syarat stasioner: $f'(x)=0$

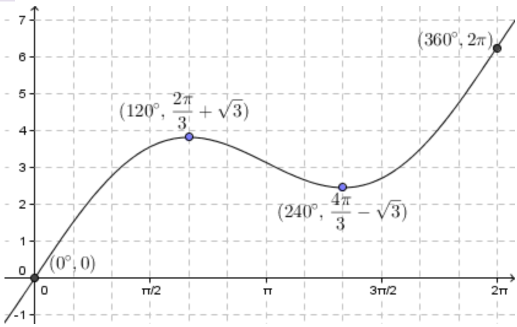
$$\begin{aligned} f'(x)=0 \Rightarrow 1+2\cos x &= 0 \\ 2\cos x &= -1 \\ \cos x &= -\frac{1}{2} \\ x &= 120^\circ, 240^\circ \end{aligned}$$

Menghitung nilai stasioner dan nilai ujung interval dengan mensubstitusikan $x=0^\circ,120^\circ,240^\circ,360^\circ=0,\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3},2\pi$ ke dalam fungsi $f(x)=x+2\sin x$.

Nilai x	Nilai $f(x)=x+2\sin x$	Keterangan
$x=0^\circ$ $=0$	$f(0^\circ)=0^\circ+2\sin(0^\circ)$ $=0+2(0)=0$	Nilai minimum

Nilai x	Nilai $f(x)=x+2\sin x$	Keterangan
$x=120^\circ$ $=\dfrac{2\pi}{3}$	$f(120^\circ)=120^\circ+2\sin(120^\circ)$ $=\dfrac{2\pi}{3}+2\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)=\dfrac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$ $\approx 3{,}83$	
$x=240^\circ$ $=\dfrac{4\pi}{3}$	$f(240^\circ)=240^\circ+2\sin(240^\circ)$ $=\dfrac{4\pi}{3}+2\left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ $=\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$ $\approx 2{,}46$	
$x=360^\circ$ $=2\pi$	$f(360^\circ)=360^\circ+2\sin(360^\circ)$ $=2\pi+2(0)=2\pi$ $\approx 6{,}28$	Nilai maksimum

Jawab: A. 0



Gambar 75 Kurva fungsi $f(x)=x+2\sin x$ pada interval $0^\circ \le x \le 360^\circ$

8. Titik-titik belok dari fungsi $f(x)=1+2\sin x$ pada interval $0^\circ < x < 360^\circ$ adalah ...

$f(x)=1+2\sin x \Rightarrow f'(x)=2\cos x$

$f''(x)=-2\sin x$

Syarat titik belok: $f''(x)=0$

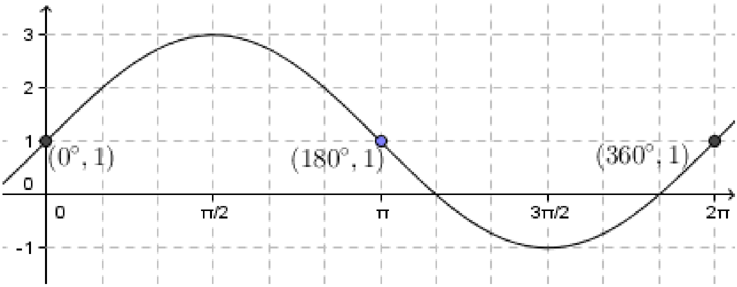
$$f''(x)=0 \Rightarrow -2\sin x=0$$
$$\sin x=0$$
$$x=0°,180°,360°$$

$x=0°$ dan $x=360°$ berada di luar interval $0°<x<360°$

Untuk $x=180° \Rightarrow f(180°)=1+2\sin(180°)=1+2(0)=1$

Diperoleh titik belok $(180°,1)$

Jawab: E. $(180°,1)$



Gambar 76 Kurva fungsi $f(x)=1+2\sin x$ pada interval $0°\le x\le 360°$

9. Kurva fungsi $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ berbentuk cekung ke atas pada interval ...

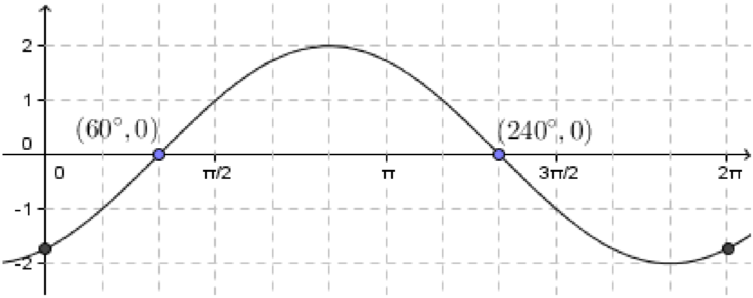
$$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x \Rightarrow f'(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x$$
$$f''(x)=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$$

Syarat titik belok: $f''(x)=0$

$$f''(x)=0 \Rightarrow -\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$$
$$\sin x=\sqrt{3}\cos x$$
$$\frac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{3}$$
$$\tan x=\sqrt{3}$$
$$x=60°,240°$$

Interval	Nilai $f''(x) = -\sin x + \sqrt{3}\cos x$	Bentuk Kurva
$0° \le x < 60°$	positif	Cekung ke atas
$60° < x < 240°$	negatif	Cekung ke bawah
$240° < x \le 360°$	positif	Cekung ke atas

Jawab: B. $0° \le x < 60°$ atau $240° < x \le 360°$



Gambar 77 Kurva fungsi $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ pada interval $0° \le x \le 360°$

10. Kurva fungsi $f(x) = \sqrt{3}\cos x + 3\sin x$ berbentuk cekung ke bawah pada interval ...

$$f(x) = \sqrt{3}\cos x + 3\sin x \Rightarrow f'(x) = -\sqrt{3}\sin x + 3\cos x$$

$$f''(x) = -\sqrt{3}\cos x - 3\sin x$$

Syarat titik belok: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -\sqrt{3}\cos x - 3\sin x = 0$$

$$3\sin x = -\sqrt{3}\cos x$$

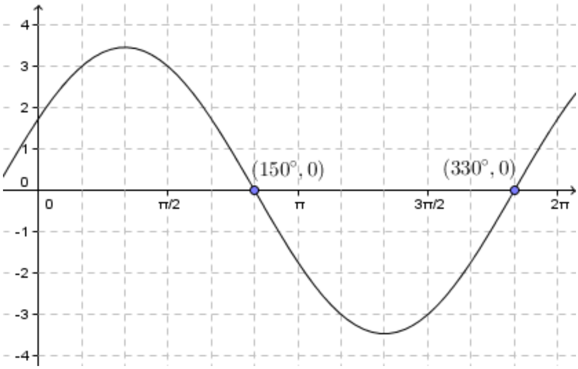
$$\frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$x = 150°, 330°$$

Interval	Nilai $f''(x) = -\sqrt{3}\cos x - 3\sin x$	Bentuk Kurva
$0° \leq x < 150°$	negatif	Cekung ke bawah
$150° < x < 330°$	positif	Cekung ke atas
$330° < x \leq 360°$	negatif	Cekung ke bawah

Jawab: B. $0° \leq x < 150°$ atau $330° < x \leq 360°$



Gambar 78 Kurva fungsi $f(x) = \sqrt{3}\cos x + 3\sin x$ pada interval $0° \leq x \leq 360°$

B. Uraian

1. Tentukan kemiringan garis singgung pada kurva $f(x) = 2\sin x - 1$ di titik yang berabsis $x = 30°$.

   Penyelesaian:

   $f(x) = 2\sin x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2\cos x$

   Kemiringan garis singgung saat $x = 30°$

   $$x = 30° \Rightarrow m = f'(30°) = 2\cos(30°)$$
   $$= 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$$

Jadi, kemiringan garis singgung pada kurva $f(x)=2\sin x-1$ di titik yang berabsis $x=30°$ adalah $m=\sqrt{3}$.

2. Tentukan semua interval saat fungsi $f(x)=2\cos x+1$ naik atau turun, dengan $0°\leq x\leq 360°$.

Penyelesaian:

$f(x)=2\cos x+1 \Rightarrow f'(x)=-2\sin x$

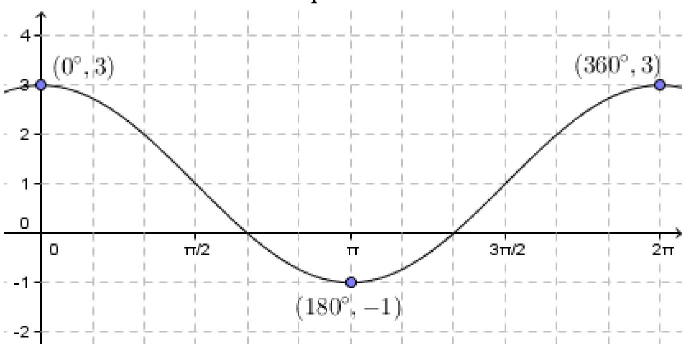
Menentukan nilai x saat stasioner dengan syarat: $f'(x)=0$

$$\begin{aligned} f'(x)=0 \Rightarrow -2\sin x &= 0 \\ \sin x &= 0 \\ x &= 0°, 180°, 360° \end{aligned}$$

Substitusikan nilai-nilai x dalam interval yang dibatasi oleh $x=0°$, $x=180°$ dan $x=360°$ ke dalam fungsi $f'(x)=-2\sin x$:

Interval	Nilai $f'(x)=-2\sin x$	Sifat Fungsi
$0°<x<180°$	negatif	turun
$180°<x<360°$	positif	naik

Jadi, fungsi $f(x)=2\cos x+1$ akan naik pada interval $180°<x<360°$ dan turun pada interval $0°<x<180°$.



Gambar 79 Kurva fungsi $f(x)=2\cos x+1$ pada interval $0°\leq x\leq 360°$

3. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $f(x)=\sqrt{3}\cos x-3\sin x$ pada interval $0°\le x\le 360°$.

Penyelesaian:

$f(x)=\sqrt{3}\cos x-3\sin x \Rightarrow f'(x)=-\sqrt{3}\sin x-3\cos x$

Menentukan nilai x saat stasioner dengan syarat: $f'(x)=0$

$$-\sqrt{3}\sin x-3\cos x=0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}\sin x=3\cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\tan x=-\sqrt{3}$$

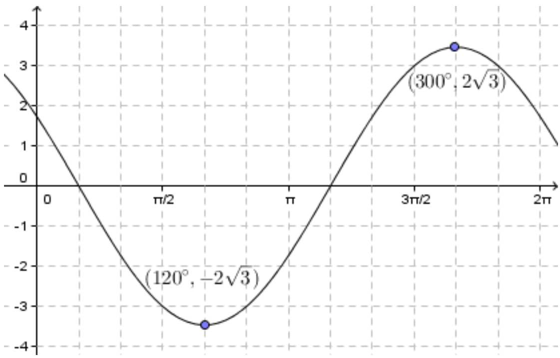
$$x=120°,300°$$

Menghitung nilai stasioner dan nilai ujung interval dengan mensubstitusikan $x=0°,120°,300°,360°$ ke dalam fungsi $f(x)=\sqrt{3}\cos x-3\sin x$:

Nilai x	Nilai $f(x)=\sqrt{3}\cos x-3\sin x$	Keterangan
$x=0°$	$f(0°)=\sqrt{3}\cos(0°)-3\sin(0°)$ $=\sqrt{3}(1)-3(0)=\sqrt{3}$	
$x=120°$	$f(120°)=\sqrt{3}\cos(120°)-3\sin(120°)$ $=\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right)-3\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ $=\frac{-\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{2}=-\frac{4\sqrt{3}}{2}$ $=-2\sqrt{3}$	Nilai minimum

Nilai x	Nilai $f(x)=\sqrt{3}\cos x-3\sin x$	Keterangan
$x=300^\circ$	$f(300^\circ)=\sqrt{3}\cos(300^\circ)-3\sin(300^\circ)$ $=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)-3\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ $=\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{2}$ $=2\sqrt{3}$	Nilai maksimum
$x=360^\circ$	$f(360^\circ)=\sqrt{3}\cos(360^\circ)-3\sin(360^\circ)$ $=\sqrt{3}(1)-3(0)=\sqrt{3}$	

Jadi, fungsi $f(x)=\sqrt{3}\cos x-3\sin x$ mempunyai nilai maksimum $f(300^\circ)=2\sqrt{3}$ saat $x=300^\circ$ dan nilai minimum $f(120^\circ)=-2\sqrt{3}$ saat $x=120^\circ$ dalam interval $0^\circ\le x\le 360^\circ$.



Gambar 80 Kurva fungsi $f(x)=\sqrt{3}\cos x-3\sin x$ pada interval $0^\circ\le x\le 360^\circ$

4. Tentukan titik belok dari fungsi $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ pada interval $0^\circ\le x\le 360^\circ$.

Penyelesaian:

$$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x \Rightarrow f'(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin x$$

$$f''(x)=-\sin x-\sqrt{3}\cos x$$

Menentukan nilai x saat belok dengan syarat: $f''(x)=0$

$$-\sin x-\sqrt{3}\cos x=0 \Leftrightarrow \sin x=-\sqrt{3}\cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x}=-\sqrt{3}$$

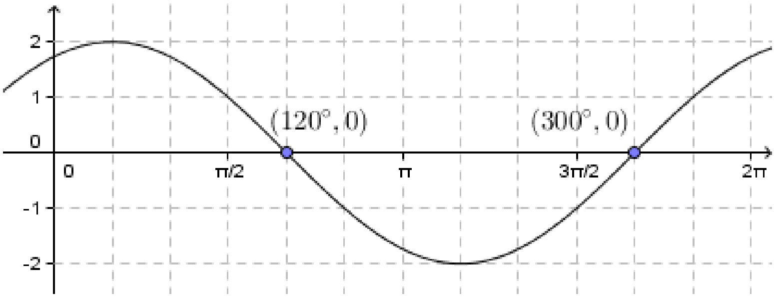
$$\tan x=-\sqrt{3}$$

$$x=120°,300°$$

Menentukan titik belok dengan mensubstitusikan $x=120°$ dan $x=300°$ ke dalam fungsi $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$:

Nilai x	Nilai $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$	Titik Belok
$x=120°$	$f(120°)=\sin(120°)+\sqrt{3}\cos(120°)$ $=\frac{1}{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right)=0$	$(120°,0)$
$x=300°$	$f(300°)=\sin(300°)+\sqrt{3}\cos(300°)$ $=-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)=0$	$(300°,0)$

Jadi, fungsi $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ dalam interval $0°\leq x\leq 360°$ mempunyai titik belok $(120°,0)$ dan $(300°,0)$.



Gambar 81 Kurva fungsi $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ pada interval $0°\leq x\leq 360°$

5. Tentukan interval saat fungsi $f(x)=-\sqrt{3}\sin x+3\cos x$ cekung ke atas maupun cekung ke bawah.

Penyelesaian:

$$f(x) = -\sqrt{3}\sin x + 3\cos x \Rightarrow \; f'(x) = -\sqrt{3}\cos x - 3\sin x$$

$$f''(x) = \sqrt{3}\sin x - 3\cos x$$

Menentukan nilai x saat belok dengan syarat: $f''(x) = 0$

$$\sqrt{3}\sin x - 3\cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x = 3\cos x$$

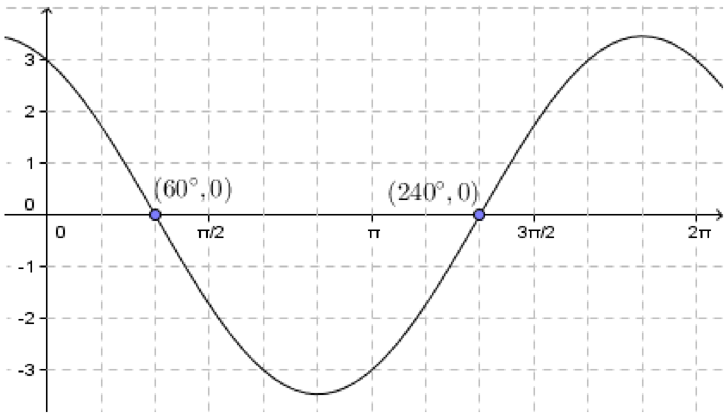
$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\tan x = \sqrt{3}$$

$$x = 60°, 240°$$

Interval	Nilai $f''(x) = \sqrt{3}\sin x - 3\cos x$	Bentuk Kurva
$0° \le x < 60°$	negatif	Cekung ke bawah
$60° < x < 240°$	positif	Cekung ke atas
$240° < x \le 360°$	negatif	Cekung ke bawah

Jadi, fungsi $f(x) = -\sqrt{3}\sin x + 3\cos x$ akan berbentuk cekung ke atas pada interval $60° < x < 240°$ dan cekung ke bawah pada interval $0° \le x < 60°$ dan $240° < x \le 360°$.



Gambar 82 Kurva fungsi $f(x) = -\sqrt{3}\sin x + 3\cos x$ pada interval $0° \le x \le 360°$

Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN) Walisongo
Semarang
2020

RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

1. Nama Lengkap : Afida Luthfiani
2. Tempat & Tgl. Lahir : Kendal, 24 Januari 1996
3. Alamat Rumah : Dusun Krajan Tengah RT 07 RW 02 Desa Meteseh, Kecamatan Boja, Kabupaten Kendal 51381
4. No. HP : 082314589912
5. Email : afidaluthfiani@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. Pendidikan Formal
   a. TK Tarbiyatul Athfal Boja
   b. SD Negeri 03 Boja
   c. MTs NU 05 Sunan Katong Kaliwungu Kendal
   d. MA Negeri Kendal
2. Pendidikan Non-Formal:

C. Prestasi Akademik

D. Karya Ilmiah

Semarang, 27 Desember 2020

Afida Luthfiani

NIM: 133511023