ANALISIS KESTABILAN MODEL PENYEBARAN RUMOR DENGAN MEMPERTIMBANGAKAN SIKAP *DEBUNKING* DALAM KEADAAN DARURAT

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna
Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Dalam Ilmu Matematika

Diajukan Oleh:

ARYNDIAH

NIM. 1708046024

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO SEMARANG

2021

ANALISIS KESTABILAN MODEL PENYEBARAN RUMOR DENGAN

MEMPERTIMBANGAKAN SIKAP *DEBUNKING*

DALAM KEADAAN DARURAT

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna
Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Dalam Ilmu Matematika

Diajukan Oleh:

ARYNDIAH

NIM. 1708046024

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO SEMARANG

2021

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertandatangan dibawah ini:

Nama : Aryndiah

NIM : 1708046024

Jurusan : Matematika

Menyatakan bahwa skripsi yang berjudul

ANALISIS KESTABILAN MODEL PENYEBARAN RUMOR DENGAN MEMPERTIMBANGAKAN SIKAP *DEBUNKING* DALAM KEADAAN DARURAT

Secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri kecuali bagian tertentu yang dirujuk dari sumbernya.

Semarang, 10 Desember 2021

Yang Menyatakan,

Aryndiah

NIM. 1708046024

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka Ngaliyan, Semarang 50185
Telp. 024-7601295, Fax. 024-7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini:

Judul	:	**Analisis Kestabilan Model Penyebaran Rumor dengan Mempertimbangkan Sikap *Debunking* dalam Keadaan Darurat**
Penulis	:	Aryndiah
NIM	:	1708046024
Jurusan	:	Matematika

Telah diujikan dalam sidang tugas akhir oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 29 Desember 2021

DEWAN PENGUJI

Ketua Sidang,

Siti Maslihah, M.Si.

NIP. 19770611 201101 2 004

Sekretaris Sidang,

Yulia Romadiastri, M.Sc.

NIP. 19810715 200501 2 008

Penguji Utama I,

Nur Khasanah, M.Si.

NIP. 19911121 200912 2 017

Penguji Utama II,

Minhayati Shaleh, M.Sc.

NIP. 19760426 200604 2 001

Pembimbing I,

Siti Maslihah, M.Si.

NIP. 19770611 201101 2 004

Pembimbing II,

Zulaikha, M.Si.

NIP. 19920409 201903 2 027

NOTA DINAS

Semarang, 10 Desember 2021

Yth. Ketua Program Studi Matematika

Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum wr. wb.

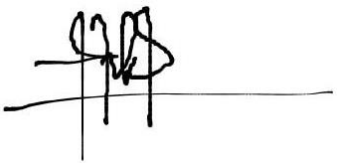
Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan, dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	Analisis Kestabilan Model Penyebaran Rumor dengan Mempertimbangkan Sikap *Debunking* dalam Keadaan Darurat
Penulis	:	Aryndiah
NIM	:	1708046024
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diajukan dalam sidang Munaqosyah.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Pembimbing I,



Siti Maslihah, M.Si.

NIP. 19770611 201101 2 004

NOTA DINAS

Semarang, 10 Desember 2021

Yth. Ketua Program Studi Matematika

Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum wr. wb.

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan, dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	Analisis Kestabilan Model Penyebaran Rumor dengan Mempertimbangkan Sikap *Debunking* dalam Keadaan Darurat
Penulis	:	Aryndiah
NIM	:	1708046024
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diajukan dalam sidang Munaqosyah.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Pembimbing II,

Zulaikha, S.Si., M.Si.

NIP. 19920409 201903 2 027

KATA PENGANTAR

Puji syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan kesehatan jasmani dan rohani, rahmat, hidayah serta inayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini, sebagai sebagian syarat yang wajib dipenuhi guna memperoleh gelar sarjana Strata Satu (S1). Shalawat serta salam penulis curahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membawa risalah-Nya, sehingga dapat menjadi bekal hidup di dunia dan di akhirat kelak.

Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada semua pihak yang telah memberikan bimbingan, arahan, saran, dan motivasi sehingga skripsi ini dapat penulis selesaikan dengan baik. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. H. Ismail, M.Ag., selaku ketua Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang
2. Ibu Emy Siswanah, M.Sc., selaku ketua jurusan Matematika UIN Walisongo Semarang
3. Bapak Aunur, M.Pd., selaku sekretaris jurusan Matematika UIN Walisongo Semarang
4. Ibu Aini Fitriyah, S.Pd. M.Sc., selaku wali dosen penulis
5. Ibu Siti Maslihah, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan waktu dan bimbingannya sehingga skripsi ini dapat selesai.
6. Ibu Zulaikha, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan waktu dan bimbingannya sehingga skripsi ini dapat selesai.
7. Segenap dosen, pegawai, dan seluruh civitas akademika lingkungan UIN Walisongo Semarang khususnya para dosen jurusan Matematika.
8. Orang tua, adik dan keluarga besar yang selalu memberikan cinta kasih, motivasi, semangat, dukungan, serta doa kepada penulis.
9. Teman-teman Matematika 2017 atas kebersamaan selama menjalani proses perkuliahan.
10. Seluruh pihak yang turut membantu penyelesaian skripsi yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan untuk perbaikan di masa yang akan datang. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan dan menjadi sumber informasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Semarang, 10 Desember 2021

Penulis

ABSTRAK

Penelitian ini membahas analisis kestabilan model penyebaran rumor dengan mempertimbangkan sikap *debunking* dalam keadaan darurat. Model yang digunakan diambil dari jurnal karya Yong Tian dan Xuejun Ding yang berjudul *"Rumor spreading model with considering debunking behavior in emergencies"*. Seluruh populasi dikelompokkan menjadi lima kelas, yaitu *ignorant* (I), *latents* (L), *rumor spreader* (R), *debunkers* (D), dan *stiflers* (S). Dimana, (I) adalah individu yang tidak mengetahui rumor, (L) adalah individu yang telah terpapar rumor, (R) adalah individu yang menyebarkan rumor, (D) adalah individu yang menyanggah rumor, dan (S) adalah individu yang tidak lagi meyebarkan rumor. Tujuan dari penelitian ini untuk memberikan gambaran dari mekanisme penyebaran rumor sehingga dapat dilakukan upaya pengendalian sekaligus memberikan pemahaman tentang proses penyebaran rumor dalam keadaan darurat.

Pada model yang digunakan akan dilakukan tahapan analisis dinamik berupa penentuan titik kesetimbangan rumor dan analisis kestabilan titik kesetimbangan rumor, serta untuk mendukung hasil analitik akan dilakukan simulasi numerik. Metode yang digunakan dalam menentukan analisis kestabilan adalah studi pustaka. Hasil analisa menunjukkan bahwa model memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas rumor $\mathrm{E}^0 = \left(\frac{\varepsilon}{\rho}, 0,0,0,0\right)$ dan titik kesetimbangan penyebaran rumor

$$\mathrm{E}^* = \left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)}{\mu\alpha(\theta+\rho)+k\beta(\delta+\xi+\rho)+k\xi\alpha}, \frac{\varepsilon-\rho \mathrm{I}}{\alpha+\beta+\gamma+\rho}, \frac{\alpha \mathrm{L}}{\delta+\xi+\rho}, \frac{\beta(\delta+\xi+\rho)+\xi\alpha}{(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} \cdot \mathrm{L}, \frac{\delta \mathrm{R}+\theta \mathrm{D}+\gamma \mathrm{L}}{\rho}\right).$$

Titik kesetimbangan yang diperoleh akan digunakan untuk mencari angka reproduksi dasar (R_0). Analisis kestabilan pada keadaan bebas rumor akan stabil asimtotik lokal ketika $R_0 < 1$, artinya tidak ada rumor yang menyebar dalam populasi. Sedangkan, pada keadaan penyebaran rumor sistem akan stabil asimtotik lokal ketika $R_0 > 1$, artinya terdapat rumor yang menyebar dalam populasi. Selanjutnya, untuk mendukung hasil analisis dinamik dilakukan simulasi numerik pada model tersebut menggunakan software Matlab R2011a.

Kata Kunci: Model epidemik ILRDS, titik kesetimbangan, analisis kestabilan.

TRANSLITERASI ARAB-LATIN

Penulisan transliterasi huruf-huruf Arab Latin dalam skripsi berpedoman pada (SKB) Menteri Agama dan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia, tanggal 22 Januari 1988 Nomor: 158 Tahun 1987 dan Nomor: 0543b/U/1987, sebagaimana yang tertera dalam buku Pedoman Transliterasi Bahasa Arab (*A Guide to Arabic Transliteration*).

Daftar huruf bahasa Arab dan tranliterasinya ke dalam huruf Latin dapat dilihat pada tabel berikut:

Huruf Arab	Nama	Huruf Latin
ا	Alif	A
ب	Ba	B
ت	Ta	T
ث	Tsa	Ts
ج	Ja	J
ح	Ha	H
خ	Kha	Kh
د	Da	D
ذ	Dzal	Dz
ر	Ra	R
ز	Za	Z
س	Sin	S
ش	Syin	Sy
ص	Shad	Sh
ض	Dlad	Dl
ط	Tha	Th
ظ	Zha	Zh
ع	Ain	‘

غ	Ghain	Gh
ف	Fa	F
ق	Qof	Q
ك	Kaf	K
ل	Lam	L
م	Mim	M
ن	Nun	N
و	Wau	W
ه	Ha	H
ء	Hamzah	‘
ي	Ya	Y

MOTTO

اِنَّ اللّٰهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتّٰى يُغَيِّرُوْا مَا بِاَنْفُسِهِمْۗ وَاِذَآ اَرَادَ اللّٰهُ بِقَوْمٍ سُوْۤءًا فَلَا مَرَدَّ لَهٗۚ وَمَا لَهُمْ مِّنْ دُوْنِهٖ مِنْ وَّالٍ

"Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah keadaan suatu kaum sebelum mereka mengubah keadaan diri mereka sendiri. Dan apabila Allah menghendaki keburukan terhadap suatu kaum, maka tak ada yang dapat menolaknya dan tidak ada pelindung bagi mereka selain Dia".

(QS. Ar-Ra'd: 11)

Bangkitnya manusia tergantung pada pemikirannya tentang manusia, hidup, dan alam semesta, serta hubungan ketiganya dengan sesuatu yang ada sebelum kehidupan dunia dan yang ada sesudahnya.

(*Nizhamul Islam*)

DAFTAR PUSTAKA

ANALISIS KESTABILAN MODEL PENYEBARAN RUMOR DENGAN i
PERNYATAAN KEASLIAN iv
PENGESAHAN iv
NOTA DINAS v
NOTA DINAS vii
KATA PENGANTAR viii
ABSTRAK ix
TRANSLITERASI ARAB-LATIN x
MOTTO xii
DAFTAR TABEL xv
DAFTAR GAMBAR xvi
DAFTAR LAMPIRAN xvii
BAB 1 PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 4
1.3 Batasan Masalah 4
1.4 Tujuan 4
1.5 Manfaat 4
Teoritis 4
Praktis 5
BAB 2 LANDASAN TEORI 6
2.1 Persamaan Diferensial 6
2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa 6
2.1.2 Persamaan Diferensial Parsial 6
2.2 Sistem Persamaan Diferensial 6
2.2.1 Sistem Persamaan Diferensial Linear 7
2.2.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear 7

2.3 Linearisasi 8
2.3.1 Matriks Jacobian 8
2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen 8
2.5 Titik Kesetimbangan 10
2.6 Kestabilan Titik Kesetimbangan 10
2.7 Kriteria Routh Hurwitz 11
2.8 Angka Reproduksi Dasar 12
2.9 Kajian Pustaka 13
BAB 3 METODE PENELITIAN 16
BAB 4 PEMBAHASAN 17
4.1 Model Matematika Penyebaran Rumor dengan Mempertimbangkan Sikap *Debunking* dalam Keadaan Darurat 17
4.2 Titik Kesetimbangan Model Penyebaran Rumor 21
4.3 Angka Reproduksi Dasar $\boldsymbol{R0}$ 25
4.4 Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan 27
4.4.1 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Rumor 28
4.4.2 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Penyebaran Rumor 31
4.5 Simulasi Numerik 37
4.5.1 Simulasi Numerik dalam Keadaan Bebas Rumor 37
4.5.2 Simulasi Numerik dalam Keadaan Penyebaran Rumor 42
BAB 5 KESIMPULAN 48
5.1 Kesimpulan 48
5.2 Saran 48
DAFTAR PUSTAKA 49
LAMPIRAN 51
Lampiran 1: Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Penyebaran Rumor 51
Lampiran 2: Program Simulasi Numerik Model Penyebaran Rumor 56
DAFTAR RIWAYAT HIDUP 61

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul	Halaman
Tabel 2.1	Jenis-jenis kestabilan titik kesetimbangan	11
Tabel 4.1	Deskripsi variabel model matematika penyebaran rumor dengan mempertimbangakan sikap *debunking* dalam keadaan darurat	18
Tabel 4.2	Deskripsi parameter model matematika penyebaran rumor dengan mempertimbangakan sikap *debunking* dalam keadaan darurat	18
Tabel 4.3	Nilai-nilai Parameter untuk simulasi model saat $R_0 < 1$	37
Tabel 4.4	Nilai-nilai Parameter untuk simulasi model saat $R_0 > 1$	42

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
Gambar 4.1	Diagaram Transmisi Model Matematika Penyebaran Rumor dengan Mempertimbangkan Sikap *Debunking* dalam Keadaan Darurat	19
Gambar 4.2	Grafik Penyebaran Rumor saat $R_0 < 1$	38
Gambar 4.3	Grafik solusi $I(t)$ ketika $R_0 < 1$	39
Gambar 4.4	Grafik solusi $L(t)$ ketika $R_0 < 1$	40
Gambar 4.5	Grafik solusi $R(t)$ ketika $R_0 < 1$	40
Gambar 4.6	Grafik solusi $D(t)$ ketika $R_0 < 1$	41
Gambar 4.7	Grafik solusi $S(t)$ ketika $R_0 < 1$	41
Gambar 4.8	Grafik Penyebaran Rumor saat $R_0 > 1$	43
Gambar 4.9	Grafik solusi $I(t)$ ketika $R_0 > 1$	44
Gambar 4.10	Grafik solusi $L(t)$ ketika $R_0 > 1$	45
Gambar 4.11	Grafik solusi $R(t)$ ketika $R_0 > 1$	45
Gambar 4.12	Grafik solusi $D(t)$ ketika $R_0 > 1$	46
Gambar 4.13	Grafik solusi $S(t)$ ketika $R_0 > 1$	46

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

Lampiran 1.	Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Penyebaran Rumor	51
Lampiran 2	Program Simulasi Numerik Model Penyebaran Rumor	56

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan teknologi dan informasi telah berkembang pesat, salah satu bentuknya adalah media sosial. Saat ini, media sosial dijadikan sebagai alat untuk bertukar informasi, karena informasi dapat tersebar secara luas, cepat, dan dalam waktu yang singkat. Informasi yang tersebar di media sosial sangat beraneka ragam, salah satunya adalah rumor. Rumor adalah cerita atau pernyataan yang tersebar luas tanpa adanya konfirmasi atau kepastian suatu fakta (J. Kimmel, 2003). Menurut Donovan, penyebaran rumor terjadi melalui percakapan antar individu, baik dengan meneruskan kepada orang lain atau secara kelompok (Donovan, 2015). Terkadang beberapa masyarakat mengarang dan menyebarkan rumor untuk meningkatkan kesadaran publik, memfitnah orang lain, mengalihkan perhatian publik, memicu kepanikan publik dan sebaginya.

Penyebaran rumor di media sosial dapat menimbulkan dampak negatif. Masyarakat yang tidak teliti dapat membuat keputusan menyimpang akibat percaya terhadap rumor yang tersebar. Selain itu, rumor juga dapat menyebabkan terganggunya sistem ekonomi, stabilitas sosial, dan politik (Ram *et al.*, 2020). Misalnya, saat ini dunia sedang dilanda wabah COVID-19. Suatu studi melaporkan, beberapa masyarakat Amerika Serikat dan United Kingdom percaya pada kesalahpahaman dan kebohongan yang beredar di media sosial tentang COVID-19. Sekitar 200 penduduk Iran meninggal dan lebih dari 1000 orang keracunan alkohol, karena mereka percaya rumor di media sosial bahwa meminum alkohol dapat menyembuhkan COVID-19 (Lin *et al.*, 2020).

Islam memerintahkan untuk menjauhi berita bohong dan tidak menyebarkannya, karena membuat berita bohong dan menyebarkannya adalah dosa besar yang termasuk tindakan kriminal dalam pandangan Islam. Allah SWT berfirman dalam QS. an-Nur ayat 14-15:

وَلَوْلَا فَضْلُ اللّٰهِ عَلَيْكُمْ وَرَحْمَتُهٗ فِى الدُّنْيَا وَالْاٰخِرَةِ لَمَسَّكُمْ فِيْ مَآ اَفَضْتُمْ فِيْهِ عَذَابٌ عَظِيْمٌ ۙاِذْ تَلَقَّوْنَهٗ بِاَلْسِنَتِكُمْ وَتَقُوْلُوْنَ بِاَفْوَاهِكُمْ مَّا لَيْسَ لَكُمْ بِهٖ عِلْمٌ وَّتَحْسَبُوْنَهٗ هَيِّنًاۖ وَّهُوَ عِنْدَ اللّٰهِ عَظِيْمٌ ۚ

"Dan seandainya bukan karena karunia Allah dan rahmat-Nya kepadamu di dunia dan di akhirat, niscaya kamu ditimpa azab yang besar, disebabkan oleh pembicaraan kamu tentang hal itu (berita bohong itu). (Ingatlah) ketika kamu menerima (berita bohong) itu dari mulut ke mulut dan kamu katakan dengan mulutmu apa yang tidak kamu ketahui sedikit pun, dan kamu menganggapnya remeh, padahal dalam pandangan Allah itu soal besar".

Ayat di atas menjelaskan bahwa Allah SWT tidak akan memberikan karunia dan rahmat kepada orang-orang yang ikut andil dalam penyebaran berita bohong. Jika mereka tidak segera bertaubat dan mengakui kesalahannya, maka Allah SWT akan memberikan azab yang besar kepada orang tersebut. Hal ini menunjukkan bahwa penyebaran berita bohong merupakan perkara yang besar, karena dapat merugikan berbagai pihak.

Islam menganjurkan untuk mencari kebenaran terlebih dahulu saat menerima berita. Allah SWT berfirman dalam QS. Hujarat ayat 6:

يٰٓاَيُّهَا الَّذِيْنَ اٰمَنُوْٓا اِنْ جَاۤءَكُمْ فَاسِقٌۢ بِنَبَاٍ فَتَبَيَّنُوْٓا اَنْ تُصِيْبُوْا قَوْمًاۢ بِجَهَالَةٍ فَتُصْبِحُوْا عَلٰى مَا فَعَلْتُمْ نٰدِمِيْنَ

"Wahai orang-orang beriman! Jika seseorang yang fasik datang kepadamu membawa suatu berita, maka telitilah kebenarannya agar kamu tidak mencelakakan suatu kaum karena kebodohan (kecerobohan), yang akhirnya kamu menyesali perbuatanmu itu".

Ayat di atas menunjukkan pentingnya melakukan klarifikasi kebenaran berita sebelum menyebarkannya dan berhati-hati ketika datangnya berita dari orang-orang fasik (yang biasa berbuat kerusakan). Hal ini dilakukan sebagai upaya mengantisipasi datangnya berita bohong yang akan menyebabkan pertikaan, permusuhan, dan penyesalan (Norman, Aikins dan Binka, 2017).

Proses penyebaran rumor dan penyebaran epidemi sering dibandingkan oleh para peneliti. Dalam epidemilogi, model matematika penyebaran penyakit dikembangkan dengan mengasumsikan individu terbagi dalam beberapa kondisi yaitu, individu yang sehat (*Suspectible*), individu terinfeksi yang dapat menginfeksi orang lain (*Infectious*), dan individu yang sembuh (*Recovered*). Dalam penyebaran rumor, populasi dikelompokkan menjadi tiga kelas: orang yang tidak mendengar rumor (*Ignorant)*, orang yang menyebarkan rumor (*Rumor spreader*), dan orang yang tidak lagi menyebarkan rumor (*Stifler*). Model klasik penyebaran rumor tersebut adalah model D-K yang diusulkan oleh Daley dan Kendall pada tahun 1965 (Daley dan Kendall, 1964), karena model penyebaran rumor memiliki kemiripan dengan model penyebaran penyakit, maka sebagian besar model penyebaran rumor telah dikembangkan dari model epidemi, seperti *SI*, *SIS*, dan *SIR* (Ahsan dan Kumari, 2019). Berdasarkan model D-K, Maki dan Thomson mengusulkan model M-K yang mengasumsikan bahwa penyebar rumor dapat berubah menjadi orang yang berhenti menyebarkan rumor (Gani, 2000). Berdasarkan kedua model itu, para peneliti telah mengusulkan berbagai model penyebaran rumor dengan mengembangkan model epidemi.

Saat ini, beberapa penelitian fokus pada pengungkapan penyebaran rumor di media sosial. Dalam mempertimbangkan karakteristik dari dinamika jalur kompleks, (Liu, Li dan Tian, 2018) membahas model SEIR penyebaran rumor di jaringan sosial yang kompleks dengan mekanisme keraguan, hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa daya tarik

yang lebih tinggi terhadap rumor dan ketidakjelasan rumor berkontribusi pada proses penyebaran rumor. Penelitian yang dilakukan oleh (Liu, Zeng dan Luo, 2019) membahas analisis titik kestabilan dari model SECIR penyebaran rumor di jalur kompleks dengan mempertimbangkan tingkat pendidikan dan mekanisme serangan balik (*counterattack*), hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa tingkat pendidikan yang tinggi dan upaya peningkatan serangan balik rumor (*counterattack*) dapat efektif mengurangi resiko penyebaran rumor. Penelitian yang dilakukan (Chen, 2019) membahas pengendalian penyebaran rumor dalam keadaan darurat, hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa meningkatkan kapasitas publik dalam mengidentifikasi rumor, meningkatkan kredibilitas media, menyiapkan sistem respon cepat untuk membantah rumor, dan menumbuhkan rasa tanggungjawab publik merupakan langkah penegendalian rumor yang efektif. Penelitian yang dilakukan oleh Dea Angelia Kamil pada tahun 2019 yang diterbitkan oleh Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga membahas analisis kestabilan medel matematika penyebaran rumor dengan adanya *treatment*., hasil penelitian tersebut menunjukkan adanya *treatment* dapat memberikan pengaruh terhadap orang yang percaya rumor dan penyebaran rumor. Kemudian, penelitan yang dilakukan oleh Atikah Lamis pada tahun 2019 yang diterbitkan oleh Fakultas Sains dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Brawijaya membahas analisis dinamik model penyebaran rumor dengan kontrol optimal pada penayangan berita di media, hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa pemberian kontrol pada penayangan media dapat meminimalisir individu terinfeksi rumor pada kelas terinfeksi dengan biaya yang minimum.

Dalam studi dinamika rumor, sebagian besar penelitian sebelumnya menyederhanakan penyebaran rumor ke dalam proses penyebaran informasi tunggal, sehingga mengabaikan perilaku individu yang menyanggah rumor. Selain itu, sebagian besar penelitan sebelumnya berasumsi bahwa rumor menyebar pada sistem yang tertutup dan ukuran populasi pada media sosial konstan. Sedangkan, media sosial adalah platform terbuka dengan ukuran populasi yang variasi dan faktor dinamika populasi seperti tingkat imigrasi dan emigrasi harus diperhitungkan dalam memodelkan proses penyebaran rumor untuk waktu penyebaran informasi yang relatif lama.

Berdasarkan artikel penelitian (Tian dan Ding, 2019) mengusulkan model ILRDS penyebaran rumor di media sosial dalam keadaan darurat. Model ini mempertimbangkan kemungkinan adanya rumor dan rumor kontra yang tersebar di media sosial. Ketika, terdapat rumor yang tersebar di media sosial, pemerintah atau para ahli yang terkait akan meyanggah rumor dan menyampaikan kebenaran. Model penyebaran rumor ILRDS ini terbagi dalam 5 subpopulasi populasi manusia pada waktu t terbagi dalam 5 subpopulasi, yaitu *Ignorants* (mengabaikan/tidak tahu rumor), *Latents* (terpapar rumor), *Rumor-*

spreader (penyebar rumor), *Debunkers* (menyanggah rumor), dan *Stiflers* (tidak menyebarkan rumor atau rumor kontra).

Berdasarkan uraian diatas penulis tertarik untuk membahas dan mengkaji Analisis Kestabilan Penyebaran rumor dengan Mempertimbangkan Sikap *Debunking* dalam Keadaan Darurat. Analisis dinamik yang digunakan meliputi penentuan titik kesetimbangan, penentuan angka reproduksi dasar, analisis kestabilan, dan yang terakhir akan dilakukan simulasi numerik untuk mendukung hasil analisis dinamik.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yeng telah diuraikan di atas, maka rumusan masalah yang akan dibahas sebgai berikut:

1. Bagaimana analisis kestabilan lokal model matematika penyebaran rumor dengan mempertimbangkan sikap *debunking* dalam keadaan darurat?
2. Bagaimana menentukan simulasi numerik penyebaran rumor dengan mempertimbangkan sikap *debunking* dalam keadaan darurat?

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, diberikan batasan masalah sebagai berikut:

1. Model matematika yang digunakan adalah model matematika yang dirujuk dari jurnal karya Tian dan Ding (2019).
2. Madel matematika penyebaran rumor dalam keadaan darurat dibagi menjadi lima subpopulasi, yaitu *Ignorant* (I), *Latent* (L), *Rumor spreader* (R), *Debunker* (D), dan *Stifler* (S).
3. Rumor menyebar pada sistem yang tertutup dan ukuran populasi pengguna media sosial adalah konstan.

1.4 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah pada penelitian ini, maka tujuan penelitian ini yaitu:

1. Mengetahui kestabilan titik kesetimbangan model penyebaran rumor dengan mempertimbangkan sikap *debunking* dalam keadaan darurat.
2. Mengetahui simulasi numerik kestabilan titik kesetimbangan model penyebaran rumor dengan mempertimbangkan sikap *debunking* dalam keadaan darurat.

1.5 Manfaat

Teoritis

1. Menanbah Pengetahuan dalam bidang matematika khususnya pada model matematika penyebaran rumor dengan mempertimbangkan sikap *debunking* dalam keadaan darurat.

2. Sebagai bahan penelitian untuk penelitian selanjutnya, khususnya pada model matematika penyebaran rumor dengan mempertimbangkan sikap *debunking* dalam keadaan darurat.

Praktis

1. Bagi mahasiswa matematika, membantu dalam perkuliahan terutama bidang persamaan diferensial dan pemodelan matematika, serta mengetahui aplikasinya.
2. Sebagai bahan pertimbangan oleh pemerintah atau para pemegang kekuasaan mengenai penyebaran rumor sehingga pencegahan dapat dilakukan dengan maksimal.

BAB 2
LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas (Ross, 1984). Berikut contoh persamaan diferensial,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{2.2}$$

Persamaan diferensial dapat diklasifikasikan menjadi dua macam, yaitu persamaan diferensial biasa (*Ordinary differential equations*) dan persamaan diferensial parsial (*Partial differential equations*).

2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan Diferensial Biasa (*Ordinary differential equations*) adalah suatu persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu variabel bebas. Persamaan (2.1) adalah contoh persamaan diferensial biasa, karena variabel x adalah satu variabel bebas dan y adalah variabel terikat.

2.1.2 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan Diferensial Parsial (*Partial differential equations*) adalah suatu persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap dua atau lebih variabel bebas. Persamaan (2.2) adalah contoh persamaan diferensial parsial, karena terdapat tiga variabel bebas yaitu, x, y, dan z, dimana u adalah variabel terikat.

2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah kumpulan beberapa persamaan diferensial. Diberikan vektor $x \in K$, dimana $K \subseteq \mathbb{R}^n$ dengan $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$ dan $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Fungsi $f: K \to \mathbb{R}^n$ dengan $f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)^T, f \in C^1(K)$ dimana $C^1(K)$ merupakan himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan pertama yang kontinu di K. Jika $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ untuk menyatkan turunan pertama x terhadap t, maka

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \qquad (2.3) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

Sistem pada persamaan dapat dituliskan sebagai:

$\dot{x} = a_n(x)y_n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y$

$\dot{x} = f(x)$ (2.4)

Berdasarkan keliniearannya, sistem persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua macam, yaitu sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial nonlinear.

2.2.1 Sistem Persamaan Diferensial Linear

Sistem persamaan diferensial diferensial linear adalah persamaan yang terdiri lebih dari satu persamaan yang saling terkait. Sedangkan koefisiennya dapat berupa konstanta atau fungsi. Sistem persamaan diferensial linear orde satu dengan *n* fungsi yang tak diketahui berbentuk:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \qquad (2.5) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{2n}(t)x_2 + \cdots + a_{mn}(t)x_n + f_n(t)
\end{aligned}$$

Bentuk persamaan (2.5) dapat ditulis secara singkat sebagai

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_i + f_i(t), \qquad i = 1,2, \dots, n,$$

atau dalam bentuk matriks sebagai

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t),$$

dengan $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, dan $\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$.

2.2.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

Sistem persamaan diferensial nonlinear adalah kumpulan dari beberapapersamaan nonlinear dengan fungsi tujuannya saja atau bersama dengan fungsi kendala berbentuk nonlinear, yaitu pangkat dari variabenya lebih dari satu.

Sistem dari dua persamaan diferensial nonlinear dengan dua fungsi yang tidak diketahui berbentuk:

$$\dot{x} = ax + by + F(x, y)$$
$$\dot{y} = cx + dy + G(x, y)$$

Dengan $ad - bc \neq 0$ (Finizio dan Ladas, 1982).

2.3 Linearisasi

Metode linearisasi pada sistem persamaan diferensial merupakan metode untuk mengatasi kesulitan dalam mencari solusi persamaan diferensial nonlinear. Mencari hasil dari pelinearan sistem persamaan diferensial nonlinear dengan menggunakan matriks Jacobian. Matriks Jacobian akan mengubah bentuk sisitem persamaan difrensial nonlinear menjadi sistem persamaan diferensial linear, sehingga dapat memudahkan mencari solusi dari sistem persamaan diferensial tersebut. Namun, solusi yang didapatkan dari linearisasi sistem persamaan difernsial nonlinear merupakan gambaran perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan tersebut. Maka, kestabilan yang diperoleh dari hasil linearisasi dinamakan kestabilan lokal. Sedangkan, kestabilan yang didapatkan menggunakan titik kesetimbangannya dinamakan kstabilan global (Paragay, 2009). Linearisasi pada sistem persamaan diferensial nonlinear dimaksudkan untuk memperoleh aprosimaksi yang baik.

2.3.1 Matriks Jacobian

Matriks Jacobian yang dinotasikan dengan J merupakan matriks yang dibangun untuk melakukan linearisasi sistem persamaan diferensial non lineer.

Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Matriks Jacobian dari sistem (2.6) adalah

$$J\big(f(x)\big) = \begin{bmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}
\end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Matriks Jacobian dari persamaan diferensial berdimensi n adalah matriks $n \times n$ dimana entri pada baris i dan kolom j adalah dari fungsi ke$-i$ terhadap variabel ke$-j$ (Ledder, 2013).

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x di dalam $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A (atau operator matriks T_A) jika Ax adalah perkalian skalar dari x yaitu,

$$Ax = \lambda x \tag{2.8}$$

dengan λ adalah suatu skalar ($\lambda \in \mathbb{R}$). Skalar λ dinamakan nila eigen (*eigenvalue*) dari A dan x dikatakan vektor eigen (*eigenvector*) yang bersesuaian dengan λ.

Mencari nilai eigen dari A dari persamaan (2.8) dapat ditulis sebagai

$$(\lambda I - A)x = 0 \qquad (2.9)$$

dengan I adalah matriks identitas.

Jika A adalah matriks $n \times n$, kemudian λ adalah nilai eigen dari A jika dan hanya jika memenuhi persamaan

$$\det(\lambda I - A) = 0 \qquad (2.10)$$

Persamaan (2.10) merupakan persamaan karakteristik matriks A.

Ketika determinan pada persamaan (2.10) diperluas, persamaan karakteristik dari A berbentuk

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

dimana sisi kiri persamaan tersebut adalah polinomial derajat n dengan koefisien dari n adalah 1. Polinomial $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$, disebut polinomial karakteristik dari A (Anton dan Rorres, 2013).

Contoh

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$. Tentukan nilai eigen dari matriks A.

Penyelesaian:

$|A - \lambda I| = 0$

$$\left|\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$

Diperoleh nilai eigen matriks A adalah $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = -1$.

2.5 Titik Kesetimbangan

Diberikan sebuah sistem persamaan (2.4) dengan $x \in \mathbb{R}^n$. $\overline{x}$dengan $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan dari sistem (2.4) jika $f(\overline{x}) = 0$ (Perko, 2000).

2.6 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Kestabilan titik kesetimbangan dari suatu sistem persamaan diferensial didefinisikan sebagai berikut. Menurut (Olsder dan Woude, 1998), Diberikan persamaan diferensial orde pertama $\dot{x} = f(x)$ dan $x(t, x_0)$ merupakan solusi persamaan diferensial pada saat t dengan kondisi awal $x(0) = x_0$.

1. Titik kesetimbangan $\bar{x}$ disebut stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\|x_0 - \overline{x}\| < \delta$, kemudian $\|x(t, x_0) - \overline{x}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$.
2. Titik kesetimbangan $\bar{x}$ disebut stabil asimtotik jika titik-titik kesetimbangannya stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0) - \overline{x}\| = 0$, asalkan $\|x_0 - \overline{x}\| < \delta_1$.
3. Titik kesetimbangan $\bar{x}$ disebut tidak stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\|x_0 - \overline{x}\| < \delta$, kemudian $\|x(t, x_0) - \overline{x}\| \geq \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$.

Kestabilan sistem persamaan (2.4) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen matriks Jacobian $J\big(f(x)\big)$. Menurut (Wiggins, 1990), diberikan suatu sistem yaitu $\dot{x} = J\big(f(\bar{x})\big)x$, dengan J adalah matriks Jacobian berukuran $n \times n$.

1. Titik kesetimbangan $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik jika dan hanya jika bagian real dari semua nilai eigen bernilai negatif.
2. Titik kesetimbangan $\bar{x} = 0$ stabil jika dan hanya jika bagian real dari semua nilai eigen bernilai negatif atau sama dengan nol.
3. Titik kesetimbangan $\bar{x} = 0$ tidak stabil jika dan hanya jika terdapat bagian real dari nilai eigen bernilai positif.

Menurut (Boyce dan DiPrima, 2009), terdapat beberapa kemungkinan dari nilai akar-akar persamaan karakteristik. Berdasarkan nilai akar-akar persamaan karakteristik tersebut dapat ditentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan. Berikut adalah jenis-jenis kestabilan dari titik kesetimbangan yang dapat digolongkan seperti pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Jenis-jenis kestabilan dari titik kesetimbangan

Nilai Akar-akar Persamaan Karakteristik	Bentuk	Kestabilan
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Simpul	Tidak Stabil
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Simpul	Stabil asimtotik
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Titik pelana	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Simpul atau spiral	Tidak Stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Simpul atau spiral	Stabil asimtotik
$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\mu, \alpha > 0$	Spiral	Tidak Stabil
$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\mu, \alpha < 0$	Spiral	Stabil Asimtotik
$\lambda_1, \lambda_2 = \pm i\mu,$	Titik pusat atau spiral	Tidak dapat ditentukan

2.7 Kriteria Routh Hurwitz

Pada beberapa permasalahan tertentu, menentukan akar-akar persamaan karekteristik sulit dilakukan. Oleh karena itu, dibutuhkan metode yang dapat digunakan untuk menentukan tanda bagian real dari akar-akar persamaan karakteristik tanpa mencari akar-akar persamaan karakteristik terebih dahulu. Salah satu metode yang dapat digunakan adalah kriteria Routh-Hurwitz.

Diberikan suatu persamaan karakteristik dalam bentuk polinomial sebagai berikut:

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \qquad (2.11)$$

Dengan koefisien a_i adalah bilangan real dan $i = 0,1,2,3, \dots, n$. Jika persamaan (2.11) mempunyai bagian real negatif maka

$$\frac{a_1}{a_0} > 0, \frac{a_2}{a_0} > 0, \dots, \frac{a_n}{a_0} > 0 \qquad (2.12)$$

Dari persamaan (2.11) dibentuk matriks H_n, dimana H_n adalah matriks Hurwitz yang berisi koefisien a_i sebagai berikut:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix} \qquad (2.12)$$

Determinan Hurwitz tingkat ke-k, dinotasikan $\mathrm{H}_k; k = 1,2, \dots, n$ yang dibentuk dari matriks Hurwitz (2.12), didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathrm{H}_1 = |a_1|, \mathrm{H}_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \mathrm{H}_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots,$$

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

(Hahn, 1967)

Teorema 2.1 (Merkin, 1997), akar-akar dari persamaan karakteristik (2.11) bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika semua determinan dari matriks Hurwitz bernilai positif atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\det(H_k) > 0, k = 1,2, \dots, n.$$

Berikut ini diberikan contoh kriteria Routh-Hurwitz dengan derajat $n = 2$, bentuk persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \qquad (2.13)$$

Dari persamaan (2.13) dibentuk matriks Hurwitz sebagai berikut:

$$\mathrm{H}_1 = a_1, \qquad \mathrm{H}_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, akar-akar persamaan (2.13) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika

$$\det(\mathrm{H}_1) > 0, \det(\mathrm{H}_2) > 0$$

Dengan demikian didapatkan kondisi sebagai berikut:

i. $\det(\mathrm{H}_1) = |a_1| > 0$ didapatkan $a_1 > 0$.

ii. $\det(\mathrm{H}_2) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$ didapatkan $a_1 a_2 > 0$. Karena $a_1 > 0$, maka $a_2 > 0$.

Akibatnya akar-akar dari persamaan karakteristik (2.13) bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika

$$a_1 > 0 \text{ dan } a_2 > 0.$$

2.8 Angka Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar adalah salah satu konsep penting di bidang epidemiologi penyakit menular yang didefinisikan sebagai rata-rata banyaknya kasus individu rentan yang terinfeksi oleh individu lain yang telah terinfeksi dan masuk ke dalam populasi yang seluruhnya masih rentan (Hartemink, 2009).

Suatu model biasanya mempunyai parameter *threshold* yang dikenal sebagai bilangan reproduksi dasar, dinotasikan R_0, sedemikian sehingga jika

i. $R_0 < 1$ maka tidak ada penyakit yang menyebar di dalam populasi.

ii. $R_0 > 1$ maka penyakit sangat mungkin menyebar di dalam populasi.

Misalkan terdapat n kelas terinfeksi dan m kelas tidak terinfeksi. Dimisalkan x menyatakan subpopulasi kelas terinfeksi dan y menyatakan subpopulasi kelas tidak terinfeksi dan $x \in \mathbb{R}^n$ dan $y \in \mathbb{R}^m$, untuk $m, n \in \mathbb{N}$, sehingga

$\dot{x} = \varphi_i(x, y) - \psi_i(x, y)$ dengan $i = 1,2, \dots, n$

$\dot{y} = \eta_j(x, y)$ dengan $j = 1,2, \dots, m$

Notasi φ_i adalah laju infeksi sekunder yang menambah kelas terinfeksi dan ψ_i adalah laju perkembangan penyakit, kematian atau kesembuhan yang mengakibatkan berkurangnya jumlah populasi kelas terinfeksi.

Perhitungan bilangan reproduksi dasar R_0 berdasarkan linearisasi dari sistem persamaan diferensial yang didekati pada titik kesetimbangan bebas penyakit. Persamaan kompartemen terinfeksi yang telah dilinearisasi dapat dituliskan:

$$\dot{x} = (F - V)x$$

Dimana F dan V adalah matriks berukuran $n \times n$ dan $F = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(0, y_0)$ dan $V = \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(0, y_0)$.

Selanjutnya didefinisikan matriks K sebagai berikut:

$$K = FV^{-1}$$

Dengan K disebut matriks *next generation*. Sehingga diperoleh bilangan reproduksi dasar (R_0),

$$R_0 = \rho(FV^{-1})$$

Nilai dari infeksi sekunder pada populasi rentan adalah radius spektral (nilai eigen dominan) dari matriks K (Driessche dan Watmough, 2002).

2.9 Kajian Pustaka

Karya ilmiah terdahulu akan memberikan gambaran umum tentang sasaran yang penulis sajikan dalam skripsi ini, tujuannya untuk mengindari kesamaan dengan karya ilmiah sebelumnya. Dalam penulisan skripsi ini, penulis terlebih dahulu mengkaji karya ilmiah terdahulu yang berkaitan dengan apa yang akan dibahas pada skripsi ini. Penulis telah mengkaji beberapa karya ilmiah yang hampir sama dengan skripsi ini, antara lain:

1. Penelitian yang berjudul "*Steady-State Analysis od SECIR Rumor Spreading Model in Complex Networks*" pada tahun 2019 oleh Liu Yujiang, Zeng Chunmei, dan Luo Youquan. Penelitian ini diterbitkan oleh Scientific Research Publishing. Penelitian ini membahas model penyebaran rumor SECIR dengan mempertimbangkan tingkat pendidikan dan mekanisme serangan balik (menyangkal rumor). Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa meningkatkan tingkat pendidikan dan menambah rasio individu penyangkal rumor dapat efektif mengurangi resiko penyebaran rumor dan meningkatkan perlawanan terhadap rumor yang tersebar. Adapun hasil penelitian

ini didapatkan beberapa kondisi kestabilan titik kesetimbangan bebas rumor dan kestabilan titik kesetimbangan penyebaran rumor.

2. Penelitian yang berjudul "*ILSCR Rumor Spreading Model to Discuss the Control of Rumor Spreading Emergency*" pada tahun 2019 oleh Guanghua Chen. Penelitian ini diterbitkan oleh Elvisier B.V. Penelitian ini membahas pengendalian penyebaran rumor dalam keadaan darurat. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa peningkatan kapasitas publik dengan mengidentifikasi rumor, meningkatkan kredibilitas arus media utama, menyapakan sistem respon cepat untuk menyangkal informasi yang salah dan menumbuhkan rasa tanggung jawab sosial publik dapat efektif mengendalikan penyebaran rumor. Adapun hasil penelitian ini didapatkan beberapa kondisi kestabilan titik kesetimbangan bebas rumor dan kestabilan titik kesetimbangan penyebaran rumor.

3. Penelitian yang berjudul "*Rumor Spreading of a SEIR Model in Complex Social Networks with Hesitating Mechanism*" pada tahun 2018 oleh Xiaoding Liu, Tao Li, dan Mi Tian. Penelitian ini diterbitkan oleh Springer. Penelitian ini membahas penyebaran rumor di jaringan sosial yang kompleks dengan mekanisme keraguan. Adapun hasil penelitian ini didapatkan beberapa kondisi kestabilan titik kesetimbangan bebas rumor dan kestabilan titik kesetimbangan penyebaran rumor.

4. Penelitian yang berjudul "Analisis Kestabilan Model Matematika Penyebaran Rumor dengan Adanya *Treatment*" oleh Dea Angelia Kamil pada tahun 2019. Penelitian ini membahas model penyebaran rumor dengan membagi populasi dalam empat kondisi, yaitu *Suspectible, Hesitate, Affected, Recovered.* Selanjutnya dilakukan modifikasi dengan menambahkan variabel *Treatment* yang merupakan populasi yang sudah tidak percaya rumor akibat memperoleh suatu perlakuan berupa klarifikasi pembenaran terhadap rumor. Hasil penelitian ini adalah model matematika penyebaran rumor dengan adanya *treatment* memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas rumor dan titik kesetimbangan penyebaran rumor. Diperoleh bilangan reproduksi dasar $R_0 = \frac{\alpha B(\eta\varphi_1\theta_1+\theta_2(\eta+\mu))}{(\eta+\mu)(\varepsilon+\mu+\delta)\mu}$, maka titik kesetimbangan bebas rumor stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan titik kesetimbangan penyebaran rumor bersifat stabil asimtotik jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz.

5. Penelitian yang berjudul "Analisis Dinamik Model Penyebaran rumor dengan Kontrol Optimal pada Penayangan Berita di Media" oleh Atikah Lamis pada tahun 2019. Penelitian ini membahas model matematika penyebaran rumor dengan adanya penayangan berita di media. Hasil penelitian ini adalah model membahas model matematika penyebaran rumor dengan adanya penayangan berita di media memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas rumor dan titik kesetimbangan penyebaran rumor. Diperoleh bilangan reproduksi dasar $R_0 = \frac{\beta A}{\mu \xi}$, maka titik kesetimbangan bebas rumor stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan titik kesetimbangan penyebaran rumor bersifat stabil asimtotik jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz. Adanya pemberian kontrol penayangan media (u) mampu meminimumkan individu pada kelas terinfeksi dengan biaya minimum.

Beberapa penelitian terdahulu yang menjadi kajian pustaka, yakni sama-sama membahas analisis model matematika penyebaran rumor, akan tetapi model matematika dari setiap penelitian berbeda. Kajian pustaka yang pertama dan ketiga, model matematika penyebaran rumor tidak terjadi dalam keadaan darurat. Kajian pustaka kedua, model matematika penyebaran rumor dalam keadaan darurat tidak memperhatikan adanya *debunkers* (orang yang menyenggah rumor). Sedangkan kajian pustaka keempat dan kelima dilakukan modifikasi dan penambahan variabel kontrol pada model matematika penyebaran rumor.

Beberapa penelitian terdahulu hampir sama dengan yang penulis teliti dalam penelitian ini, namun model yang penulis gunakan berbeda dengan model matematika dalam penelitian terdahulu yang penulis gunakan dalam kajian pustaka. Pada penelitian ini penulis akan menganalisis kestabilan model matematikanya, adapun model matematika yang digunakan adalah model yang ditulis oleh Tian Yong dan Ding Xuejun.

BAB 3
METODE PENELITIAN

Bab ini akan membahas motode yang digunakan dalam penulisan skripsi. Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi pustaka. Menurut (Nazir, 2013), studi pustaka adalah teknik pengumpulan data dengan mengadakan studi penelaahan terhadap buku-buku, literatur-literatur, catatan-catatan, dan laporan-laporan yang berhubungan dengan masalah yang dipecahkan. Penyelesaian masalah analisis kestabilan model penyebaran rumor dengan mempertimbangkan sikap *debunking* dalam keadaan darurat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Menentukan titik kesetimbangan model
    a. Titik kesetimbangan bebas rumor ketika $\mathrm{I} = 0$
    b. Titik kesetimbangan penyebaran rumor ketika $\mathrm{I} \neq 0$
2. Menentukan R_0 (angka reproduksi dasar) penyebaran rumor dengan menggunakan metode NGM (*Next Generation Matrix*).
3. Menganalisis dan menentukan kestabilan titik kesetimbangan pada penyebaran rumor dengan mempertimbangkan sikap *debunking* dalam keadaan darurat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.
    a. Melakukan linearisasi pada sistem persamaan diferensial nonlinear dari model dengan menggunakan matriks Jacobian.
    b. Membentuk persamaan karakteristik dari matriks jacobian dari sistem di sekitar titik kesetimbangan.
    c. Menentukan nilai-nilai eigen menggunakan definisi persamaan karakteristik. Salah satu alternatif menentukan nilai eigen dari persamaan karakteristik adalah dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.
    d. Menentukan sifat kestabilan berdasarkan nilai eigen matriks Jacobian untuk kestabilan lokal titik kesetimbangan.
4. Membuat simulasi numerik pada titik kesetimbangan model matematika penyebaran rumor dengan mempertimbangkan sikap *debunking* dalam keadaan darurat dengan software Matlab R2011a.
5. Menginterpretasikan hasil simulasi model pada langkah 4.
6. Menarik kesimpulan dari hasil penelitian yang diperoleh.

BAB 4
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas analisis kestabilan model penyebaran rumor dengan mempertimbangkan sikap *debunking* dalam keadaan darurat. Analisis model meliputi penentuan titik kesetimbangan, analisis kestabilan dari titik kesetimbangan tersebut, dan menghitung angka reproduksi dasar (R_0). Simulasi numerik juga diberikan untuk mendukung hasil analitik dan akan dijelaskan pula interpretasinya.

4.1 Model Matematika Penyebaran Rumor dengan Mempertimbangkan Sikap *Debunking* dalam Keadaan Darurat

Pada model matematika penyebaran rumor yang dikembangkan (Tian dan Ding, 2019) terdapat dua macam rumor yang menyebar di media sosial online dalam keadaan darurat. Dalam model matematika ini populasi dibagi menjadi lima sub populasi, yaitu *Ignorants* (mengabaikan/tidak tahu rumor), *Latents* (terpapar rumor), *Rumor-spreader* (penyebar rumor), *Debunkers* (menyanggah rumor), dan *Stiflers* (tidak menyebarkan rumor atau rumor kontra).

Berikut ini merupakan asumsi-asumsi yang digunakan dalam model matematika penyebaran rumor:

1. Keadaan darurat dapat memicu memicu rumor *r* dan rumor kontra *cr* menyebar di media sosial online.
2. Individu *ignorant* dapat menjadi individu *latent* ketika menerima informasi terkait rumor atau rumor kontra.
3. Individu *latent* dapat menjadi pihak yang menyebar rumor atau menyanggah rumor.
4. Kemungkinan penyebar rumor dapat menjadi orang yang menyanggah rumor setelah ia mengetahui kebenaran.
5. Rumor menyebar di sistem dengan tingkat populasi imigrasi dan emigrasi konstan.

Berikut ini pendefinisian variabel dan parameter yang digunakan dalam membangun model matematika penyebaran rumor dengan mempertimbangkan sikap *debunking* dalam keadaan darurat dapat dilihat pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2 berikut.

Tabel 4.1 Pendefinisian Variabel Model Matematika Penyebaran Rumor dengan Mempertimbangkan Sikap *Debunking* pada Keadaan Darurat

Variabel	Keterangan	Syarat
$I(t)$	Individu yang belum pernah mendengar rumor atau rumor kontra pada saat t	$I(t) \geq 0$
$L(t)$	Individu yang telah terpapar rumor atau rumor kontra pada saat t	$L(t) \geq 0$
$R(t)$	Individu yang percaya rumor dan aktif menyebarkannya pada saat t	$R(t) \geq 0$
$D(t)$	Individu yang percaya rumor kontra dan menyebarkannya untuk menghilangkan rumor pada saat t	$D(t) \geq 0$
$S(t)$	Individu yang berhenti menyebarkan rumor atau rumor kontra pada saat t	$S(t) \geq 0$

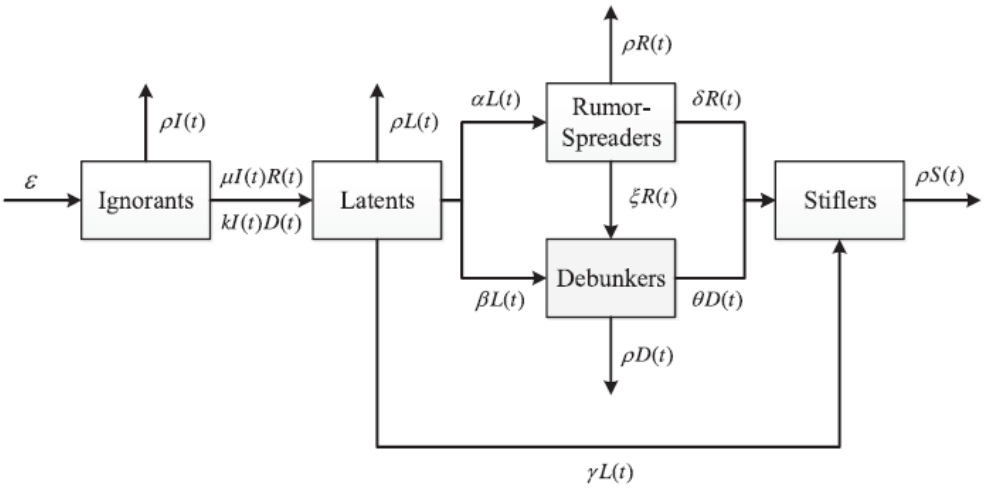
Tabel 4.2 Pendefinisian Parameter Model Matematika Penyebaran Rumor dengan Mempertimbangkan Sikap *Debunking* pada Keadaan Darurat

Parameter	Keterangan	Syarat
ε	Laju penambahan pengguna akun baru	$\varepsilon \geq 0$
ρ	Laju pengurangan pengguna akun	$\rho \geq 0$
μ	Laju transisi dari individu I menjadi individu L karena adanya kontak dengan penyebar rumor	$\mu \geq 0$
k	Laju transisi dari individu I menjadi individu L karena adanya kontak dengan penyanggah rumor	$k \geq 0$
α	Laju transisi dari individu L menjadi individu R	$\alpha \geq 0$
β	Laju transisi dari individu L menjadi individu D	$\beta \geq 0$
γ	Laju transisi dari individu L menjadi individu S	$\gamma \geq 0$
δ	Laju transisi dari individu R menjadi individu S	$\delta \geq 0$
θ	Laju transisi dari individu D menjadi	$\theta \geq 0$

	individu S	
ξ	Laju transisi dari individu R menjadi individu D	$\xi \geq 0$

Selanjutnya untuk mempermudah penulisan maka notasi *I(t), L(t), R(t), D(t),* dan *S(t)* berturut- turut dituliskan *I, L, R, D,* dan *S*. Diasumsikan $I, L, R, D, S \geq 0$ dan seluruh parameter yang menyatakan laju perubahan populasi selalu bernilai positif, dimana $\varepsilon, \rho, \mu, k, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \xi \geq 0$. Jika N menyatakan jumlah populasi, maka $N = I + L + R + D + S$.

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut, maka dibentuk diagram dari model matematika penyebaran rumor dengan mempertimbangkan sikap *debunking* dalam keadaan darurat sebagai berikut:



Gambar 4.1 Diagaram Transmisi Model Matematika Penyebaran Rumor dengan Mempertimbangkan Sikap *Debunking* dalam Keadaan Darurat

Berdasarkan Gambar 4.1, model matematika penyebaran rumor dengan mempertimbangkan sikap *debunking* dalam keadaan darurat dijelaskan sebagai berikut:

Laju perubahan sub populasi *ignorant* per satuan waktu. Individu *ignorant* bertambah karena adanya pengguna baru yang membuat akun baru di situs media sosial sebesar ε. Jumlah individu *ignorant* dapat berkurang karena berinteraksi dengan *rumor spreader* sebesar μ dan jumlah individu *ignorant* dapat berkurang karena berinteraksi dengan *debunker* sebesar k. Selain itu, individu *ignorant* juga akan berkurang karena adanya laju kematian ρ yang menyebabkan individu *ignorant* keluar dari sistem atau situs media sosial.

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon - \mu IR - kID - \rho I \,. \qquad (4.1)$$

Laju perubahan sub populasi *latent* per satuan waktu. Individu *latent* bertambah karena adanya interaksi antara individu *ignorant* dengan individu *rumor spreader* sebesar μ dan adanya interaksi antara individu *ignorant* dengan individu *debunker* sebesar k. Kemudian individu *latent* berkurang ketika beberapa individu *latent* yang mempercayai rumor dan menyebarkannya di sistem sebesar α maka, individu *latent* berubah menjadi *rumor spreader*. Beberapa individu *latent* yang mempercayai rumor kontra dan menyebarkannnya untuk menyanggah rumor sebesar β maka, individu *latent* berubah menjadi *debunker*. Beberapa individu *latent* yang tidak tertarik pada informasi yang diterimanya atau ragu untuk meneruskan informasi tersebut membuat mereka tetap diam dan tidak menyebarkannya, maka individu *latent* berubah menjadi individu *stifler* sebesar γ. Selan itu, individu *latent* juga akan berkurang karena adanya laju kematian ρ.

$$\frac{dL}{dt} = \mu IR + kID - (\alpha + \beta + \gamma + \rho)L\,. \qquad (4.2)$$

Laju perubahan sub populasi *rumor spreader* per satuan waktu. Individu *rumor spreader* bertambah ketika individu *latent* yang mempercayai rumor dan menyebarkannya di sistem sebesar α. Mempertimbangkan keadaan darurat, maka seiring berjalannya waktu individu *rumor spreader* atau *debunker* secara spontan mereka tidak tertarik lagi terhadap rumor yang tersebar di keadaan darurat atau melupakan informasi yang berkaitan dengannya. Oleh karena itu, individu *rumor spreader* akan berkurang ketika berubah menjadi individu *stifler* sebesar δ. Kemudian individu *rumor spreader* akan berubah menjadi individu *debunker* sebesar ξ, ketika mereka menyadari bahwa informasi yang disebarkan adalah informasi palsu, setelah menerima kebenaran dari *debunker*, para ahli, pemerintah, atau media, maka mereka berusaha untuk menyampaikan kebenaran. Selan itu, individu *rumor spreader* juga akan berkurang karena adanya laju kematian ρ.

$$\frac{dR}{dt} = \alpha L - (\delta + \xi + \rho)R\,. \qquad (4.3)$$

Laju perubahan sub populasi individu *debunker* per satuan waktu. Individu *debunker* bertambah ketika individu *latent* yang mempercayai rumor kontra dan menyebarkannnya untuk menyanggah rumor sebesar β dan saat individu *rumor spreader* telah mengetahui kebenaran, maka mereka berubah menjadi individu *debunker* sebesar ξ. Individu *debunker* berkurang ketika mereka berubah menjadi individu *stifler* sebesar θ. Kemudian, individu *debunker* akan berkurang karena adanya laju kematian ρ.

$$\frac{dD}{dt} = \beta L + \xi R - (\theta + \rho)D\,. \qquad (4.4)$$

Laju perubahan sub populasi individu *stifler* per satuan waktu. Individu *stifler* bertambah ketika individu *rumor spreader* berubah menjadi individu *stifler* sebesar δ, individu *debunker* berubah menjadi individu *stifler* sebesar θ, dan individu *latent* berubah menjadi individu *stifler* sebesar γ. Kemudian, individu *stifler* akan berkurang karena adanya laju kematian ρ.

$$\frac{dS}{dt} = \delta R + \theta D + \gamma L - \rho S\,. \tag{4.5}$$

Berdasarkan penjelasan di atas, diperoleh sistem persamaan diferensial model matematika penyebaran rumor dalam keadaan darurat dengan mempertimbangkan sikap *debunking* sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} = \varepsilon - \mu IR - kID - \rho I \\ \dfrac{dL}{dt} = \mu IR + kID - (\alpha + \beta + \gamma + \rho)L \\ \dfrac{dR}{dt} = \alpha L - (\delta + \xi + \rho)R \\ \dfrac{dD}{dt} = \beta L + \xi R - (\theta + \rho)D \\ \dfrac{dS}{dt} = \delta R + \theta D + \gamma L - \rho S \end{cases} \tag{4.6}$$

4.2 Titik Kesetimbangan Model Penyebaran Rumor

Keadaan titik kesetimbangan merupakan suatu kondisi ketika perubahan populasi tertentu sepanjang waktu adalah nol. Dalam model ini, hal tersebut terpenuhi jika $\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0$, sehingga sistem persamaan (4.6) dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon - \mu IR - kID - \rho I = 0 \tag{4.7}$$

$$\frac{dL}{dt} = \mu IR + kID - (\alpha + \beta + \gamma + \rho)L = 0 \tag{4.8}$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha L - (\delta + \xi + \rho)R = 0 \tag{4.9}$$

$$\frac{dD}{dt} = \beta L + \xi R - (\theta + \rho)D = 0 \tag{4.10}$$

$$\frac{dS}{dt} = \delta R + \theta D + \gamma L - \rho S = 0 \tag{4.11}$$

Dari sistem persamaan (4.6) diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas rumor dan titik kesetimbangan penyebaran rumor.

Titik kesetimbangan bebas rumor adalah suatu keadaan tidak terjadi penyebaran rumor dalam suatu populasi. Titik kesetimbangan bebas rumor dapat diketahui dari persamaan (4.7), diperoleh

$$\varepsilon - \mu IR - kID - \rho I = 0$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon - \rho I = \mu IR + kID$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon - \rho I = \left(\frac{\mu\alpha}{\delta+\xi+\rho} + \frac{k\beta(\delta+\xi+\rho)+k\xi\alpha}{(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)}\right) LI \qquad (4.12)$$

Substitusi persamaan (4.14) ke persamaan (4.12)

$$\Leftrightarrow \varepsilon - \rho I = \left(\frac{\mu\alpha}{\delta+\xi+\rho} + \frac{k\beta(\delta+\xi+\rho)+k\xi\alpha}{(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)}\right) 0.I$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon - \rho I = 0$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{\varepsilon}{\rho} \qquad (4.13)$$

Diketahui persamaan (4.8) adalah

$$\mu IR + kID - (\alpha + \beta + \gamma + \rho)L = 0$$

Subsitusi persamaan R dan D ke persamaan (4.8)

$$\Leftrightarrow \mu I\left(\frac{\alpha L}{\delta+\xi+\rho}\right) + kI\left(\frac{\beta(\delta+\xi+\rho)+\xi\alpha}{(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} \cdot L \right) - (\alpha + \beta + \gamma + \rho)L = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\mu I\alpha(\theta+\rho)+(kI\beta(\delta+\xi+\rho)+kI\xi\alpha)-(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)}{(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)}\right) L = 0$$

$$\Leftrightarrow L = 0 \qquad (4.14)$$

Diketahui persamaan (4.9) adalah

$$\alpha L - (\delta + \xi + \rho)R = 0$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{\alpha L}{(\delta+\xi+\rho)} \qquad (4.15)$$

Substitusi persamaan (4.14) ke persamaan (4.15)

$$\Leftrightarrow R = \frac{\alpha.0}{(\delta+\xi+\rho)}$$

$$\Leftrightarrow R = 0 \qquad (4.16)$$

Diketahui persamaan (4.10) adalah

$$\beta L + \xi R - (\theta + \rho)D = 0$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{\beta L+\xi R}{(\theta+\rho)} \qquad (4.17)$$

Substitusi persamaan (4.14) dan (4.16) ke persamaan (4.17)

$\Leftrightarrow D = \frac{\beta.0+\xi.0}{(\theta+\rho)}$

$\Leftrightarrow D = 0$ (4.18)

Diketahui persamaan (4.11) adalah

$\delta R + \theta D + \gamma L - \rho S = 0$

$\Leftrightarrow S = \frac{\delta R+\theta D+\gamma L}{\rho}$ (4.19)

Substitusi persamaan (4.14), (4.16), dan (4.18) ke persamaan (4.19)

$\Leftrightarrow S = \frac{\delta.0+\theta.0+\gamma.0}{\rho}$

$\Leftrightarrow S = 0$ (4.20)

Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan bebas rumor $E^0 = (I^0, L^0, R^0, D^0, S^0) = \left(\frac{\varepsilon}{\rho}, 0,0,0,0\right)$. (4.21)

Selanjutnya menentukan titik kesetimbangan penyebaran rumor. **Titik kesetimbangan penyebaran rumor** mengindikasikan adanya penyebaran rumor dengan mempertimbangkan sikap *debunking* dalam keadaan darurat. Kondisi tersebut terjadi saat populasi individu *ignorant, latent, rumor spreader, debunker,* dan *stifler* tidak sama dengan nol. Berdasarkan sistem persamaan (4.6) dapat ditentukan titik kesetimbangan e penyebaran rumor sebagai berikut:

Diketahui persamaan (4.7) adalah

$\varepsilon - \mu IR - kID - \rho I = 0$

$\Leftrightarrow \varepsilon - \rho I = \mu IR + kID$ (4.22)

Substitusi persamaan (4.27) dan (4.29) ke persamaan (4.22)

$\Leftrightarrow \varepsilon - \rho I = \left(\mu\left(\frac{\alpha L}{\delta+\xi+\rho}\right) + k\left(\frac{\beta(\delta+\xi+\rho)+\xi\alpha}{(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} \cdot L\right)\right) I$

$\Leftrightarrow \varepsilon - \rho I = \left(\left(\frac{\mu\alpha}{\delta+\xi+\rho}\right) + \left(\frac{k\beta(\delta+\xi+\rho)+k\xi\alpha}{(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)}\right)\right) LI$ (4.23)

Substitusi persamaan (4.25) ke persamaan (4.23)

$\Leftrightarrow \varepsilon - \rho I = \left(\frac{\mu\alpha}{\delta+\xi+\rho} + \frac{k\beta(\delta+\xi+\rho)+k\xi\alpha}{(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)}\right)\left(\frac{\varepsilon-\rho I}{\alpha+\beta+\gamma+\rho}\right) I$

$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma + \rho = \left(\frac{\mu\alpha}{\delta+\xi+\rho} + \frac{k\beta(\delta+\xi+\rho)+k\xi\alpha}{(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)}\right) I$

$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma + \rho = \left(\frac{\mu\alpha(\theta+\rho)+k\beta(\delta+\xi+\rho)+k\xi\alpha}{(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)}\right) I$

$\Leftrightarrow I^* = \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)}{\mu\alpha(\theta+\rho)+k\beta(\delta+\xi+\rho)+k\xi\alpha}$ (4.24)

Diketahui persamaan (4.8) adalah

$$\mu IR + kID - (\alpha + \beta + \gamma + \rho)L = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu IR + kID = (\alpha + \beta + \gamma + \rho)L \quad (4.25)$$

Substitusi persamaan (4.22) ke persamaan (4.25)

$$\Leftrightarrow \varepsilon - \rho I = (\alpha + \beta + \gamma + \rho)L$$

$$\Leftrightarrow L^* = \frac{\varepsilon - \rho I^*}{\alpha + \beta + \gamma + \rho} \quad (4.26)$$

Diketahui persamaan (4.9) adalah

$$\alpha L - (\delta + \xi + \rho)R = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha L = (\delta + \xi + \rho)R$$

$$\Leftrightarrow R^* = \frac{\alpha L^*}{\delta + \xi + \rho} \quad (4.27)$$

Diketahui persamaan (4.10) adalah

$$\beta L + \xi R - (\theta + \rho)D = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta L + \xi R = (\theta + \rho)D \quad (4.28)$$

Substitusi persamaan (4.27) ke persamaan (2.28)

$$\Leftrightarrow \beta L + \xi \left(\frac{\alpha L}{\delta + \xi + \rho}\right) = (\theta + \rho)D$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta L(\delta + \xi + \rho) + \xi \alpha L}{\delta + \xi + \rho} = (\theta + \rho)D$$

$$\Leftrightarrow D^* = \frac{\beta(\delta + \xi + \rho) + \xi\alpha}{(\delta + \xi + \rho)(\theta + \rho)} \cdot L^* \quad (4.29)$$

Diketahui persamaan (4.10) adalah

$$\delta R + \theta D + \gamma L - \rho S = 0$$

$$\delta R + \theta D + \gamma L = \rho S$$

$$\Leftrightarrow S^* = \frac{\delta R^* + \theta D^* + \gamma L^*}{\rho} \quad (4.30)$$

Sehingga diperolah titik kesetimbangan penyebaran rumor $E^* = (I^*, L^*, R^*, D^*, S^*)$ dengan

$$I^* = \frac{(\alpha + \beta + \gamma + \rho)(\delta + \xi + \rho)(\theta + \rho)}{\mu\alpha(\theta + \rho) + k\beta(\delta + \xi + \rho) + k\xi\alpha}$$

$$L^* = \frac{\varepsilon - \rho I^*}{\alpha + \beta + \gamma + \rho}$$

$$R^* = \frac{\alpha L^*}{\delta + \xi + \rho} \quad (4.31)$$

$$D^* = \frac{\beta(\delta + \xi + \rho) + \xi\alpha}{(\delta + \xi + \rho)(\theta + \rho)} \cdot L^*$$

$$S^* = \frac{\delta R^* + \theta D^* + \gamma L^*}{\rho}$$

Karena suatu populasi harus bernilai positif untuk menandakan keberadaan populasi tersebut, maka terdapat syarat eksistensi yang harus dipenuhi untuk menjamin $L^* > 0$, yaitu:

$\varepsilon - \rho I^* > 0$

$\Leftrightarrow \varepsilon > \rho I^*$

$\Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{\rho I^*} > 1.$

4.3 Angka Reproduksi Dasar (R_0)

Pada penulisan ini, model yang dibahas merupakan model penyebaran rumor. Sehingga, angka reproduksi dasar (R_0) menyatakan rata-rata banyaknya individu yang menyebarkan rumor akibat satu individu menyebarkan rumor dalam suatu populasi yang belum mengetahui rumor.

Angka reproduksi dasar (R_0) diperoleh dengan menggunakan matriks generasi selanjutnya (*Next Generation Matrix*) dari sistem persamaan (4.6). pada model ini, kelas terinfeksi adalah *latent* (L), *rumor spreader* (R), dan *debunking* (D)., sehingga persamaan diferensial yang digunakan sebagai berikut:

$$\frac{dL}{dt} = \mu IR + kID - (\alpha + \beta + \gamma + \rho)L$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha L - (\delta + \xi + \rho)R \qquad (4.32)$$

$$\frac{dD}{dt} = \beta L + \xi R - (\theta + \rho)D$$

Misalkan $x = (L, R, D)^T$, sehingga persamaan dapat ditulis menjadi

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \varphi - \psi$$

dengan

$$\varphi = \begin{pmatrix} \mu IR + kID \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \psi = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta + \gamma + \rho)L \\ -\alpha L + (\delta + \xi + \rho)R \\ -\beta L - \xi R + (\theta + \rho)D \end{pmatrix}$$

Matriks Jacobian φ dan ψ diperoleh dengan mencari turunan parsial dari entri-entri φ dan ψ terhadap L, R dan D pada titik kesetimbangan bebas rumor $\mathrm{E}^0 = (\mathrm{I}^0, \mathrm{L}^0, \mathrm{R}^0, \mathrm{D}^0, \mathrm{S}^0) = \left(\frac{\varepsilon}{\rho}, 0,0,0,0\right)$, yaitu

$$J(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & \mu I & kI \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } J(\psi) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \gamma + \rho & 0 & 0 \\ -\alpha & \delta + \xi + \rho & 0 \\ -\beta & -\xi & \theta + \rho \end{pmatrix}$$

diperoleh

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \mu I^0 & kI^0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } V = \begin{pmatrix} \alpha+\beta+\gamma+\rho & 0 & 0 \\ -\alpha & \delta+\xi+\rho & 0 \\ -\beta & -\xi & \theta+\rho \end{pmatrix}$$

Selanjutnya tentukan invers matriks V, yaitu

$$V^{-1} = \frac{1}{\det(V)} \cdot adj(V)$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)}{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha(\theta+\rho)}{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} & \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\theta+\rho)}{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} & 0 \\ \frac{\alpha\xi+\delta\beta+\xi\beta+\rho\beta}{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} & \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)\xi}{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} & \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)}{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} \end{pmatrix}$$

Matriks generasi selanjutnya, dapat diperoleh dengan

$$\mathrm{K} = \mathrm{F}\mathrm{V}^{-1}$$

$$\mathrm{K} = \begin{pmatrix} \frac{\mu \mathrm{I}^0\alpha(\theta+\rho)+\mathrm{k}\mathrm{I}^0(\alpha\xi+\delta\beta+\xi\beta+\rho\beta)}{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} & \frac{\mu \mathrm{I}^0(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\theta+\rho)+\mathrm{k}\mathrm{I}^0(\alpha+\beta+\gamma+\rho)\xi}{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} & \frac{\mathrm{k}\mathrm{I}^0(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)}{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Angka reproduksi dasar (R_0) diperoleh dari

$$\rho(K) = det[K - \lambda i] = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \frac{\mu \mathrm{I}^0\alpha(\theta+\rho)+\mathrm{k}\mathrm{I}^0(\alpha\xi+\delta\beta+\xi\beta+\rho\beta)}{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} & \frac{\mu \mathrm{I}^0(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\theta+\rho)+\mathrm{k}\mathrm{I}^0(\alpha+\beta+\gamma+\rho)\xi}{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} & \frac{\mathrm{k}\mathrm{I}^0(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)}{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \frac{\mu \mathrm{I}^0\alpha(\theta+\rho)+\mathrm{k}\mathrm{I}^0(\alpha\xi+\delta\beta+\xi\beta+\rho\beta)}{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} - \lambda & \frac{\mu \mathrm{I}^0(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\theta+\rho)+\mathrm{k}\mathrm{I}^0(\alpha+\beta+\gamma+\rho)\xi}{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} & \frac{\mathrm{k}\mathrm{I}^0(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)}{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$0$$

$$\left(\frac{\mu \mathrm{I}^0\alpha(\theta+\rho)+\mathrm{k}\mathrm{I}^0(\alpha\xi+\delta\beta+\xi\beta+\rho\beta)}{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} - \lambda\right)(-\lambda)(-\lambda) = 0$$

$$\left(\frac{\mu \mathrm{I}^0\alpha(\theta+\rho)+\mathrm{k}\mathrm{I}^0(\alpha\xi+\delta\beta+\xi\beta+\rho\beta)}{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} - \lambda\right)\lambda^2 = 0$$

Sehingga diperoleh

$\lambda^2 = 0$ dan

$$\lambda = \frac{\mu \mathrm{I}^0\alpha(\theta+\rho)+\mathrm{k}\mathrm{I}^0(\alpha\xi+\delta\beta+\xi\beta+\rho\beta)}{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} \qquad (4.33)$$

dimana, $\mathrm{I}^0 = \frac{\varepsilon}{\rho}$.

Substitusikan $\mathrm{I}^0 = \frac{\varepsilon}{\rho}$ ke persamaan (4.33), dengan demikian diperoleh angka reproduksi dasar

$$R_0 = \rho(K) = \frac{\varepsilon\mu\alpha(\theta+\rho)+\varepsilon k\alpha\xi+\varepsilon k\beta(\delta+\xi+\rho)}{\rho(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} \quad (4.34)$$

4.4 Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan

Dalam menentukan kestabilan titik kesetimbangan dilakukan linearisasi pada sistem persamaan (4.6) dengan menentukan matriks Jacobian di titik kesetimbangan. Selanjutnya ditentukan nilai eigen dari matriks dengan menggunakan definisi polinomial karakteristik, kemudian menentukan sifat kestabilannya. Matriks Jacobian dari sistem persamaan (4.6) adalah sebagai berikut.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial\left(\frac{dI}{dt}\right)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dI}{dt}\right)}{\partial(L(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dI}{dt}\right)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dI}{dt}\right)}{\partial(D(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dI}{dt}\right)}{\partial(S(t))} \\ \frac{\partial\left(\frac{dL}{dt}\right)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dL}{dt}\right)}{\partial(L(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dL}{dt}\right)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dL}{dt}\right)}{\partial(D(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dL}{dt}\right)}{\partial(S(t))} \\ \frac{\partial\left(\frac{dR}{dt}\right)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dR}{dt}\right)}{\partial(L(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dR}{dt}\right)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dR}{dt}\right)}{\partial(D(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dR}{dt}\right)}{\partial(S(t))} \\ \frac{\partial\left(\frac{dD}{dt}\right)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dD}{dt}\right)}{\partial(L(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dD}{dt}\right)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dD}{dt}\right)}{\partial(D(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dD}{dt}\right)}{\partial(S(t))} \\ \frac{\partial\left(\frac{dS}{dt}\right)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dS}{dt}\right)}{\partial(L(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dS}{dt}\right)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dS}{dt}\right)}{\partial(D(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dS}{dt}\right)}{\partial(S(t))} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\varepsilon-\mu IR-kID-\rho I\ )}{\partial(I(t))} & \frac{\partial(\varepsilon-\mu IR-kID-\rho I\ )}{\partial(L(t))} & \frac{\partial(\varepsilon-\mu IR-kID-\rho I\ )}{\partial(R(t))} & \frac{\partial(\varepsilon-\mu IR-kID-\rho I\ )}{\partial(D(t))} & \frac{\partial(\varepsilon-\mu IR-kID-\rho I\ )}{\partial(S(t))} \\ \frac{\partial(\mu IR+kID-(\alpha+\beta+\gamma+\rho)L\ )}{\partial(I(t))} & \frac{\partial(\mu IR+kID-(\alpha+\beta+\gamma+\rho)L\ )}{\partial(L(t))} & \frac{\partial(\mu IR+kID-(\alpha+\beta+\gamma+\rho)L\ )}{\partial(R(t))} & \frac{\partial(\mu IR+kID-(\alpha+\beta+\gamma+\rho)L\ )}{\partial(D(t))} & \frac{\partial(\mu IR+kID-(\alpha+\beta+\gamma+\rho)L\ )}{\partial(S(t))} \\ \frac{\partial(\alpha L-(\delta+\xi+\rho)R\ )}{\partial(I(t))} & \frac{\partial(\alpha L-(\delta+\xi+\rho)R\ )}{\partial(L(t))} & \frac{\partial(\alpha L-(\delta+\xi+\rho)R\ )}{\partial(R(t))} & \frac{\partial(\alpha L-(\delta+\xi+\rho)R\ )}{\partial(D(t))} & \frac{\partial(\alpha L-(\delta+\xi+\rho)R\ )}{\partial(S(t))} \\ \frac{\partial(\beta L+\xi R-(\theta+\rho)D)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial(\beta L+\xi R-(\theta+\rho)D)}{\partial(L(t))} & \frac{\partial(\beta L+\xi R-(\theta+\rho)D)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial(\beta L+\xi R-(\theta+\rho)D)}{\partial(D(t))} & \frac{\partial(\beta L+\xi R-(\theta+\rho)D)}{\partial(S(t))} \\ \frac{\partial(\delta R+\theta D+\gamma L-\rho S)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial(\delta R+\theta D+\gamma L-\rho S)}{\partial(L(t))} & \frac{\partial(\delta R+\theta D+\gamma L-\rho S)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial(\delta R+\theta D+\gamma L-\rho S)}{\partial(D(t))} & \frac{\partial(\delta R+\theta D+\gamma L-\rho S)}{\partial(S(t))} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -\mu R - kD - \rho & 0 & -\mu I & -kI & 0 \\ \mu R + kD & -(\alpha+\beta+\gamma+\rho) & \mu I & kI & 0 \\ 0 & \alpha & -(\delta+\xi+\rho) & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \xi & -(\theta+\rho) & 0 \\ 0 & \gamma & \delta & \theta & -\rho \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

4.4.1 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Rumor

Mencari kestabilan titik kesetimbangan bebas rumor dengan mensubstitusikan $\mathrm{E}^0 = (\mathrm{I}^0, \mathrm{L}^0, \mathrm{R}^0, \mathrm{D}^0, \mathrm{S}^0) = \left(\frac{\varepsilon}{\rho}, 0,0,0,0\right)$ kedalam persamaan (4.35) sebagai berikut.

$$J(\mathrm{E}^0) = \begin{bmatrix} -\rho & 0 & \frac{-\mu\varepsilon}{\rho} & \frac{-k\varepsilon}{\rho} & 0 \\ 0 & -(\alpha+\beta+\gamma+\rho) & \frac{\mu\varepsilon}{\rho} & \frac{k\varepsilon}{\rho} & 0 \\ 0 & \alpha & -(\delta+\xi+\rho) & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \xi & -(\theta+\rho) & 0 \\ 0 & \gamma & \delta & \theta & -\rho \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian di atas adalah

$\mathrm{Det}\,(\lambda i - J(\mathrm{E}^0)) = 0$

$$Det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\rho & 0 & \frac{-\mu\varepsilon}{\rho} & \frac{-k\varepsilon}{\rho} & 0 \\ 0 & -(\alpha+\beta+\gamma+\rho) & \frac{\mu\varepsilon}{\rho} & \frac{k\varepsilon}{\rho} & 0 \\ 0 & \alpha & -(\delta+\xi+\rho) & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \xi & -(\theta+\rho) & 0 \\ 0 & \gamma & \delta & \theta & -\rho \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} \lambda+\rho & 0 & \frac{\mu\varepsilon}{\rho} & \frac{k\varepsilon}{\rho} & 0 \\ 0 & \lambda+(\alpha+\beta+\gamma+\rho) & \frac{-\mu\varepsilon}{\rho} & \frac{-k\varepsilon}{\rho} & 0 \\ 0 & -\alpha & \lambda+(\delta+\xi+\rho) & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & -\xi & \lambda+(\theta+\rho) & 0 \\ 0 & -\gamma & -\delta & -\theta & \lambda+\rho \end{bmatrix} = 0$$

dapat disederhanakan menjadi

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} \lambda+\rho & 0 & \mu I^0 & kI^0 & 0 \\ 0 & \lambda+a_1 & -\mu I^0 & -kI^0 & 0 \\ 0 & -\alpha & \lambda+a_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & -\xi & \lambda+a_3 & 0 \\ 0 & -\gamma & -\delta & -\theta & \lambda+\rho \end{bmatrix} = 0$$

dengan

$a_1 = \alpha+\beta+\gamma+\rho,$

$a_2 = \delta+\xi+\rho,$

$a_3 = \theta+\rho,$

$I^0 = \frac{\varepsilon}{\rho}.$

Menentukan determinan matriks $J(\mathrm{E}^0)$ menggunakan kofaktor

$$\lambda+\rho\begin{bmatrix}\lambda+a_1 & -\mu I^0 & -kI^0 & 0\\ -\alpha & \lambda+a_2 & 0 & 0\\ -\beta & -\xi & \lambda+a_3 & 0\\ -\gamma & -\delta & -\theta & \lambda+\rho\end{bmatrix}-0\begin{bmatrix}0 & \mu I^0 & kI^0 & 0\\ -\alpha & \lambda+a_2 & 0 & 0\\ -\beta & -\xi & \lambda+a_3 & 0\\ -\gamma & -\delta & -\theta & \lambda+\rho\end{bmatrix}+$$

$$0\begin{bmatrix}0 & \mu I^0 & kI^0 & 0\\ \lambda+a_1 & -\mu I^0 & -kI^0 & 0\\ -\beta & -\xi & \lambda+a_3 & 0\\ -\gamma & -\delta & -\theta & \lambda+\rho\end{bmatrix}-0\begin{bmatrix}0 & \mu I^0 & kI^0 & 0\\ \lambda+a_1 & -\mu I^0 & -kI^0 & 0\\ -\alpha & \lambda+a_2 & 0 & 0\\ -\gamma & -\delta & -\theta & \lambda+\rho\end{bmatrix}+$$

$$0\begin{bmatrix}0 & \mu I^0 & kI^0 & 0\\ \lambda+a_1 & -\mu I^0 & -kI^0 & 0\\ -\alpha & \lambda+a_2 & 0 & 0\\ -\beta & -\xi & \lambda+a_2 & 0\end{bmatrix}=0$$

$$\lambda+\rho\begin{bmatrix}\lambda+a_1 & -\mu I^0 & -kI^0 & 0\\ -\alpha & \lambda+a_2 & 0 & 0\\ -\beta & -\xi & \lambda+a_3 & 0\\ -\gamma & -\delta & -\theta & \lambda+\rho\end{bmatrix}-0+0+0+0=0$$

$$\lambda+\rho\left(-0\begin{bmatrix}-\alpha & \lambda+a_3 & 0\\ -\beta & -\xi & \lambda+a_5\\ -\gamma & -\delta & -\theta\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}\lambda+a_1 & -a_2 & -a_4\\ -\beta & -\xi & \lambda+a_5\\ -\gamma & -\delta & -\theta\end{bmatrix}-0\begin{bmatrix}\lambda+a_1 & -a_2 & -a_4\\ -\alpha & \lambda+a_3 & 0\\ -\gamma & -\delta & -\theta\end{bmatrix}+\right.$$

$$\left.(\lambda+\rho)\begin{bmatrix}\lambda+a_1 & -\mu I^0 & -kI^0\\ -\alpha & \lambda+a_2 & 0\\ -\beta & -\xi & \lambda+a_3\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\lambda+\rho\left((\lambda+\rho)\begin{bmatrix}\lambda+a_1 & -\mu I^0 & -kI^0\\ -\alpha & \lambda+a_2 & 0\\ -\beta & -\xi & \lambda+a_3\end{bmatrix}\right)=0$$

$\Leftrightarrow(\lambda+\rho)(\lambda+\rho)[(\lambda+a_1)(\lambda+a_2)(\lambda+a_3)-\alpha\xi kI^0-\alpha\mu I^0(\lambda+a_3)-\beta kI^0(\lambda+a_2)]=0$

$\Leftrightarrow(\lambda+\rho)(\lambda+\rho)(\lambda^3+a_3\lambda^2+a_2\lambda^2+a_1\lambda^2+a_2a_3\lambda+a_1a_3\lambda+a_1a_2\lambda+a_1a_2a_3-\alpha\xi kI^0-\alpha\mu I^0\lambda-\alpha\mu I^0a_3-\beta kI^0\lambda-\beta kI^0a_2)$

$\Leftrightarrow(\lambda+\rho)(\lambda+\rho)\big(\lambda^3+(a_1+a_2+a_3)\lambda^2+(a_2a_3+a_1a_3+a_1a_2-\alpha\mu I^0-\beta kI^0)\lambda+(a_1a_2a_3-\alpha\xi kI^0-\alpha\mu I^0a_3-\beta kI^0a_2)\big)=0$ (4.36)

Dari persamaan karakteristik (4.36), diperoleh dua nilai eigen dari matriks $J(\mathrm{E}^0)$, yaitu $\lambda_1=\lambda_2=-\rho$ dan nilai eigen yang lain merupakan akar-akar persamaan karakteristik adalah sebagai berikut

$\lambda^3+(a_1+a_2+a_3)\lambda^2+(a_2a_3+a_1a_3+a_1a_2-\alpha\mu I^0-\beta kI^0)\lambda+(a_1a_2a_3-\alpha\xi kI^0-\alpha\mu I^0a_3-\beta kI^0a_2)$=0

Persamaan di atas dapat disederhankan menjadi

$\lambda^3+b_1\lambda^2+b_2\lambda+b_3=0$ (4.37)

Dengan

$b_1=a_1+a_2+a_3$ (4.38)

$$b_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - \mu I^0\alpha - kI^0\beta \quad (4.39)$$

$$b_3 = a_1a_2a_3 - a_3\mu I^0\alpha - a_2kI^0\beta - kI^0\alpha\xi \quad (4.40)$$

Titik kesetimbangan bebas rumor stabil asimtotis lokal jika dan hanya jika nilai eigen dari persamaan karakteristik (4.36) mempunyai bagian akar-akar real negatif. Dari uraian sebelumnya terlihat bahwa nilai eigen akan bernila negatif karena semua parameter bernilai positif. Selanjutnya, ditentukan syarat pada persamaan (4.36) agar memeiliki akar-akar negatif dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, persamaan (4.36) akan memiliki akar-akar negatif jika memenuhi syarat berikut $b_1, b_2, b_3 > 0$ dan $b_1b_2 - b_3 > 0$

i. Berdasarkan persamaan (4.38), jelas bahwa $b_1 = a_1 + a_2 + a_3 > 0$.
Dimana $a_1 = \alpha + \beta + \gamma + \rho,\ a_2 = \delta + \xi + \rho,\ a_3 = \theta + \rho$ dan $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \delta, \xi, \theta \geq 0$.

ii. Berdasarkan persamaan (4.36), b_2 akan bernilai lebih dari nol jika memenuhi syarat berikut.
$a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - \mu I^0\alpha - kI^0\beta > 0$
$\Leftrightarrow a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 > \mu I^0\alpha + kI^0\beta$
$\Leftrightarrow \frac{a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3}{\frac{\varepsilon}{\rho}(\mu\alpha+k\beta)} > 1.$ (4.41)
Subsitusikan $I^0 = \frac{\varepsilon}{\rho}$ ke persamaan (4.41)
$\Leftrightarrow \frac{a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3}{\frac{\varepsilon}{\rho}(\mu\alpha+k\beta)} > 1.$

iii. Berdasarkan persamaan (4.37), b_3 akan bernilai lebih dari nol jika memenuhi syarat berikut.
$a_1a_2a_3 - a_3\mu I^0\alpha - a_2kI^0\beta - kI^0\alpha\xi > 0$
$\Leftrightarrow a_1a_2a_3 > a_3\mu I^0\alpha + a_2kI^0\beta + kI^0\alpha\xi$ (4.42)
Substitusi $a_1 = (\alpha + \beta + \gamma + \rho), a_2 = (\delta + \xi + \rho), a_3 = (\theta + \rho)$ dan $I^0 = \frac{\varepsilon}{\rho}$ ke persamaan (4.42)
$\Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma + \rho)(\delta + \xi + \rho)(\theta + \rho) > \frac{\mu\varepsilon\alpha(\theta+\rho)}{\rho} + \frac{k\varepsilon\beta(\delta+\xi+\rho)}{\rho} + \frac{k\varepsilon\alpha\xi}{\rho}$
$\frac{\mu\varepsilon\alpha(\theta+\rho)}{\rho} + \frac{k\varepsilon\beta(\delta+\xi+\rho)}{\rho} + \frac{k\varepsilon\alpha\xi}{\rho} = R_0(\alpha + \beta + \gamma + \rho)(\delta + \xi + \rho)(\theta + \rho)$
dimana, $R_0 = \frac{\varepsilon\mu\alpha(\theta+\rho)+\varepsilon k\alpha\xi+\varepsilon k\beta(\delta+\xi+\rho)}{\rho(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)}$
sehingga,
$\Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma + \rho)(\delta + \xi + \rho)(\theta + \rho) > R_0(\alpha + \beta + \gamma + \rho)(\delta + \xi + \rho)(\theta + \rho)$
$\Leftrightarrow 1 > R_0$
$\Leftrightarrow R_0 < 1.$

iv. Berdasarkan persamaan (4.38), (4.39), dan (4.40), $b_1b_2 - b_3$ akan bernilai lebih dari nol jika memenuhi syarat berikut.

$b_1b_2 - b_3 > 0$

$\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + a_3)(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - \mu I^0\alpha - kI^0\beta\ ) - (a_1a_2a_3 - a_3\mu I^0\alpha - a_2kI^0\beta - kI^0\alpha\xi) > 0$

$\Leftrightarrow {a_1}^2a_2 + {a_1}^2a_3 + {a_2}^2a_1 + {a_2}^2a_3 + {a_3}^2a_1 + {a_3}^2a_1 + 2a_1a_2a_3 + kI^0\alpha\xi - (a_1\alpha\mu I^0 + a_2\alpha\mu I^0 + a_1kI^0\beta + a_3\beta kI^0) > 0$

$\Leftrightarrow {a_1}^2a_2 + {a_1}^2a_3 + {a_2}^2a_1 + {a_2}^2a_3 + {a_3}^2a_1 + {a_3}^2a_1 + 2a_1a_2a_3 + kI^0\alpha\xi > a_1\alpha\mu I^0 + a_2\alpha\mu I^0 + a_1kI^0\beta + a_3\beta kI^0$

$\Leftrightarrow \frac{{a_1}^2a_2+{a_1}^2a_3+{a_2}^2a_1+{a_2}^2a_3+{a_3}^2a_1+{a_3}^2a_1+2a_1a_2a_3+kI^0\alpha\xi}{a_1\alpha\mu I^0+a_2\alpha\mu I^0+a_1kI^0\beta+a_3\beta kI^0} > 1$ (4.43)

Substitusi $I^0 = \frac{\varepsilon}{\rho}$ ke persamaan (4.43)

$\Leftrightarrow \frac{{a_1}^2a_2+{a_1}^2a_3+{a_2}^2a_1+{a_2}^2a_3+{a_3}^2a_1+{a_3}^2a_1+2a_1a_2a_3+\frac{\varepsilon}{\rho}k\alpha\xi}{\frac{\varepsilon}{\rho}(a_1\alpha\mu+a_2\alpha\mu+a_1k\beta+a_3\beta k)} > 1.$

Berdasarkan uraian di atas, maka titik kesetimbangan bebas rumor $E^0 = (\frac{\varepsilon}{\rho}, 0,0,0,0)$ akan stabil asimtotik lokal ketika $R_0 < 1$.

4.4.2 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Penyebaran Rumor

Pada sistem persamaan diferensial (4.6) dilakukan penskalaan, yaitu membentuk sistem kedalam bentuk proporsi antara banyak individu dalam satu populasi dengan total populasi. Sistem persamaan diferensial (4.6) disederhanakan dengan memisalkan notasi:

$$i = \frac{I}{N}; \qquad l = \frac{L}{N}; \qquad r = \frac{R}{N}; \qquad d = \frac{D}{N}; \qquad s = \frac{S}{N}; \tag{4.44}$$

Sistem persamaan diferensial (4.6) dapat disederhanakan dengan melakukan penurunan menggunakan aturan rantai serta substitusi persamaan (4.44) sebagai berikut

$$\frac{di}{dt} = \frac{di}{dI}\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dI}\left(\frac{I}{N}\right)(\varepsilon - \mu IR - kID - \rho I\ )$$
$$= \frac{1}{N}(\varepsilon - \mu IR - kID - \rho I\ )$$
$$= \frac{\varepsilon}{N} - \frac{\mu IR}{N} - \frac{kID}{N} - \frac{\rho I}{N}$$
$$= \frac{\varepsilon}{N} - \frac{\mu IR}{N} - \frac{kID}{N} - \rho i; \qquad \text{(Tidak memuat variabel S)} \tag{4.45}$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dl}{dL}\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dL}\left(\frac{L}{N}\right)\mu IR + kID - (\alpha + \beta + \gamma + \rho)L$$
$$= \frac{1}{N}(\mu IR + kID - (\alpha + \beta + \gamma + \rho)L\ )$$
$$= \frac{\mu IR}{N} + \frac{kID}{N} - \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)L}{N}$$
$$= \frac{\mu IR}{N} + \frac{kID}{N} - (\alpha + \beta + \gamma + \rho)l; \qquad \text{(Tidak memuat variabel S)} \tag{4.46}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dR}\frac{dR}{dt} = \frac{d}{dR}\left(\frac{R}{N}\right)(\alpha L - (\delta + \xi + \rho)R)$$
$$= \frac{1}{N}(\alpha L - (\delta + \xi + \rho)R\ )$$
$$= \frac{\alpha L}{N} - \frac{(\delta+\xi+\rho)R}{N}$$
$$= \alpha l - (\delta + \xi + \rho)r; \qquad \text{(Tidak memuat variabel S)} \qquad (4.47)$$

$$\frac{dd}{dt} = \frac{dd}{dD}\frac{dD}{dt} = \frac{d}{dD}\left(\frac{D}{N}\right)(\beta L + \xi R - (\theta + \rho)D\ )$$
$$= \frac{1}{N}(\beta L + \xi R - (\theta + \rho)D\ \ )$$
$$= \frac{\beta L}{N} + \frac{\xi R}{N} - \frac{(\theta+\rho)D}{N}$$
$$= \beta l + \xi r - (\theta + \rho)d; \qquad \text{(Tidak memuat variabel s)} \qquad (4.48)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dS}\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dS}\left(\frac{S}{N}\right)(\delta R + \theta D + \gamma L - \rho S)$$
$$= \frac{1}{N}(\delta R + \theta D + \gamma L - \rho S\ )$$
$$= \frac{\delta R}{N} + \frac{\theta D}{N} + \frac{\gamma L}{N} - \frac{\rho S}{N}$$
$$= \delta r + \theta d + \gamma l - \rho s. \qquad (4.49)$$

Dari persamaan (4.45) sampai persamaan (4.48), S tidak berpengaruh secara langsung pada sistem persamaan diferensial (4.6), sehingga nilai S dapat diabaikan. Kemudian lima persamaan tersebut dapat direduksi menjadi empat persamaan yaitu sebagai berikut

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon - \mu IR - kID - \rho I$$

$$\frac{dL}{dt} = \mu IR + kID - (\alpha + \beta + \gamma + \rho)L \qquad (4.50)$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha L - (\delta + \xi + \rho)R$$

$$\frac{dD}{dt} = \beta L + \xi R - (\theta + \rho)D.$$

Matriks Jacobian dari persamaan (4.50) adalah sebagai berikut

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial\left(\frac{dI}{dt}\right)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dI}{dt}\right)}{\partial(L(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dI}{dt}\right)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dI}{dt}\right)}{\partial(D(t))} \\ \frac{\partial\left(\frac{dL}{dt}\right)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dL}{dt}\right)}{\partial(L(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dL}{dt}\right)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dL}{dt}\right)}{\partial(D(t))} \\ \frac{\partial\left(\frac{dR}{dt}\right)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dR}{dt}\right)}{\partial(L(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dR}{dt}\right)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dR}{dt}\right)}{\partial(D(t))} \\ \frac{\partial\left(\frac{dD}{dt}\right)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dD}{dt}\right)}{\partial(L(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dD}{dt}\right)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dD}{dt}\right)}{\partial(D(t))} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\varepsilon-\mu IR-kID-\rho I\ )}{\partial(I(t))} & \frac{\partial(\varepsilon-\mu IR-kID-\rho I\ )}{\partial(L(t))} & \frac{\partial(\varepsilon-\mu IR-kID-\rho I\ )}{\partial(R(t))} & \frac{\partial(\varepsilon-\mu IR-kID-\rho I\ )}{\partial(D(t))} \\ \frac{\partial(\mu IR+kID-(\alpha+\beta+\gamma+\rho)L)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial(\mu IR+kID-(\alpha+\beta+\gamma+\rho)L)}{\partial(L(t))} & \frac{\partial(\mu IR+kID-(\alpha+\beta+\gamma+\rho)L)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial(\mu IR+kID-(\alpha+\beta+\gamma+\rho)L)}{\partial(D(t))} \\ \frac{\partial(\alpha L-(\delta+\xi+\rho)R)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial(\alpha L-(\delta+\xi+\rho)R)}{\partial(L(t))} & \frac{\partial(\alpha L-(\delta+\xi+\rho)R)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial(\alpha L-(\delta+\xi+\rho)R)}{\partial(D(t))} \\ \frac{\partial(\beta L+\xi R-(\theta+\rho)D)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial(\beta L+\xi R-(\theta+\rho)D\ )}{\partial(L(t))} & \frac{\partial(\beta L+\xi R-(\theta+\rho)D)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial(\beta L+\xi R-(\theta+\rho)D)}{\partial(D(t))} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -\mu R - kD - \rho & 0 & -\mu I & -kI \\ \mu R + kD & -(\alpha+\beta+\gamma+\rho) & \mu I & kI \\ 0 & \alpha & -(\delta+\xi+\rho) & 0 \\ 0 & \beta & \xi & -(\theta+\rho) \end{bmatrix} \qquad (4.51)$$

Menentukan kestabilan titik kesetimbangan penyebaran rumor dengan substitusikan $E^* = (I^*, L^*, R^*, D^*)$ ke dalam persamaan (4.51).

Diketahui,

$$R_0 = \frac{\varepsilon\mu\alpha(\theta+\rho)+\varepsilon k\alpha\xi+\varepsilon k\beta(\delta+\xi+\rho)}{\rho(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)}$$

Kemudian, nilai R_0 dapat disederhanakan menjadi

$$R_0 = \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot \frac{1}{I^*}.$$

$$I^* = \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)}{\mu\alpha(\theta+\rho)+k\beta(\delta+\xi+\rho)+k\xi\alpha}$$

Kemudian, nilai I^* dapat disederhanakan menjadi

$$I^* = \frac{\varepsilon}{\rho R_0}$$

$$L^* = \frac{\varepsilon-\rho I^*}{\alpha+\beta+\gamma+\rho}$$

$$R^* = \frac{\alpha L^*}{\delta+\xi+\rho}$$

$$D^* = \frac{\beta(\delta+\xi+\rho)+\xi\alpha}{(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} \cdot L^*$$

Sehingga diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut.

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\mu \mathrm{R}^* - k\mathrm{D}^* - \rho & 0 & -\mu I^* & -kI^* \\ \mu R^* + kD^* & -(\alpha+\beta+\gamma+\rho) & \mu I^* & kI^* \\ 0 & \alpha & -(\delta+\xi+\rho) & 0 \\ 0 & \beta & \xi & -(\theta+\rho) \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Det}\,(\lambda i - J(\mathrm{E}^*)) = 0$

$$\mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mu \mathrm{R}^* - k\mathrm{D}^* - \rho & 0 & -\mu I^* & -kI^* \\ \mu R^* + kD^* & -(\alpha+\beta+\gamma+\rho) & \mu I^* & kI^* \\ 0 & \alpha & -(\delta+\xi+\rho) & 0 \\ 0 & \beta & \xi & -(\theta+\rho) \end{bmatrix}\right) =$$

0

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} \lambda + (\mu \mathrm{R}^* + k\mathrm{D}^* + \rho) & 0 & \mu I^* & kI^* \\ -(\mu R^* + kD^*) & \lambda + (\alpha+\beta+\gamma+\rho) & -\mu I^* & -kI^* \\ 0 & -\alpha & \lambda + (\delta+\xi+\rho) & 0 \\ 0 & -\beta & -\xi & \lambda + (\theta+\rho) \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} \lambda + a_1 & 0 & \mu I^* & kI^* \\ -a_2 & \lambda + a_3 & -\mu I^* & -kI^* \\ 0 & -\alpha & \lambda + a_4 & 0 \\ 0 & -\beta & -\xi & \lambda + a_5 \end{bmatrix} = 0$$

dengan

$a_1 = (\mu \mathrm{R}^* + k\mathrm{D}^* + \rho)$

$a_2 = (\mu \mathrm{R}^* + k\mathrm{D}^*)$

$a_3 = (\alpha + \beta + \gamma + \rho)$

$a_4 = (\delta + \xi + \rho)$

$a_5 = (\theta + \rho)$

$$\lambda + a_1\begin{bmatrix} \lambda + a_3 & -\mu I^* & -kI^* \\ -\alpha & \lambda + a_4 & 0 \\ -\beta & -\xi & \lambda + a_5 \end{bmatrix} - (-a_2)\begin{bmatrix} 0 & \mu I^* & kI^* \\ -\alpha & \lambda + a_4 & 0 \\ -\beta & -\xi & \lambda + a_5 \end{bmatrix} + 0 - 0 = 0$$

$\lambda + a_1[(\lambda + a_3)(\lambda + a_4)(\lambda + a_5) - k\alpha\beta I^* - \mu\alpha I^*(\lambda + a_5) - k\beta I^*(\lambda + a_4)] + a_2[k\alpha\xi I^* + \mu\alpha I^*(\lambda + a_5) + k\beta I^*(\lambda + a_4)] = 0$

$\lambda^4 + a_5\lambda^3 + a_4\lambda^3 + a_3\lambda^3 + a_1\lambda^3 + a_4a_5\lambda^2 + a_3a_5\lambda^2 + a_3a_4\lambda^2 + a_1a_5\lambda^2 + a_1a_4\lambda^2 + a_1a_3\lambda^2 + a_3a_4a_5\lambda + a_1a_4a_5\lambda + a_1a_3a_5\lambda + a_1a_3a_4\lambda + a_1a_3a_4a_5 - k\alpha\beta I^*\lambda - k\alpha\beta I^*a_1 - \mu\alpha I^*\lambda^2 - \mu\alpha I^*a_1\lambda - \mu\alpha I^*a_5\lambda - \mu\alpha I^*a_1a_5 - k\beta I^*\lambda^2 - k\beta I^*a_1\lambda - k\beta I^*a_4\lambda - k\beta I^*a_1a_4 + k\alpha\xi I^*a_2 + \mu\alpha I^*a_2\lambda + \mu\alpha I^*a_2a_5 + k\beta I^*a_2\lambda + k\beta I^*a_2a_4 = 0$

$\lambda^4 + (a_1 + a_3 + a_4 + a_5)\lambda^3 + (a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_5 - k\beta I^* - \mu\alpha I^*)\lambda^2 + (a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_4a_5 + a_3a_4a_5 + \mu\alpha I^* a_2 + k\beta I^* a_2 - k\alpha\beta I^* - \mu\alpha I^* a_1 - \mu\alpha I^* a_5 - k\beta I^* a_1 - k\beta I^* a_4)\lambda + (a_1a_3a_4a_5 + k\alpha\xi I^* a_2 + k\beta I^* a_2a_4 + \mu\alpha I^* a_2a_5 - k\alpha\beta I^* a_1 - \mu\alpha I^* a_1a_5 - k\beta I^* a_1a_4) = 0$

Persamaan karakteristik di atas dapat disederhanakan menjadi

$$\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4 = 0 \qquad (4.52)$$

dengan

$b_1 = (a_1 + a_3 + a_4 + a_5)$

$b_2 = (a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_5 - k\beta I^* - \mu\alpha I^*)$

$b_3 = (a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_4a_5 + a_3a_4a_5 + \mu\alpha I^* a_2 + k\beta I^* a_2 - k\alpha\beta I^* - \mu\alpha I^* a_1 - \mu\alpha I^* a_5 - k\beta I^* a_1 - k\beta I^* a_4)$

$b_4 = (a_1a_3a_4a_5 + k\alpha\xi I^* a_2 + k\beta I^* a_2a_4 + \mu\alpha I^* a_2a_5 - k\alpha\beta I^* a_1 - \mu\alpha I^* a_1a_5 - k\beta I^* a_1a_4)$

Titik kesetimbangan penyebaran rumor bersifat stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika persamaan karakteristik (4.52) mempunyai akar-akar negatif. Selanjutnya, syarat agar persamaan (4.52) memiliki akar-akar negatif dengan menggunakan kriteria Routh Hurwitz. Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz memiliki akar-akar negatif jika memenuhi $b_1, b_2, b_3, b_4 > 0$, $b_1b_2 - b_3 > 0$, dan $b_1b_2b_3 - {b_3}^2 - b_1b_4 > 0$.

i. Jelas bahwa $b_1 = a_1 + a_3 + a_4 + a_5 > 0$.

   Dimana, $a_1 = (\mu \mathrm{R}^* + k\mathrm{D}^* + \rho), a_2 = (\mu \mathrm{R}^* + k\mathrm{D}^*), a_3 = (\alpha + \beta + \gamma + \rho), a_4 = (\delta + \xi + \rho), a_5 = (\theta + \rho)$ dan $R^*, D^*, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho, \xi, \mu, k, \theta > 0$.

ii. Selanjutnya, $b_2 = (a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_5 - k\beta I^* - \mu\alpha I^*)$.
   b_2 akan bernilai positif jika memenuhi syarat

$$\frac{\rho R_0(a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_5)}{\varepsilon(\mu\alpha + k\beta)} > 1.$$

iii. Selanjutnya $b_3 = (a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_4a_5 + a_3a_4a_5 + \mu\alpha I^* a_2 + k\beta I^* a_2 - k\alpha\beta I^* - \mu\alpha I^* a_1 - \mu\alpha I^* a_5 - k\beta I^* a_1 - k\beta I^* a_4)$.
   b_3 akan bernilai positif jika memenuhi syarat

$$\frac{\rho R_0(a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_4a_5 + a_3a_4a_5) + \varepsilon(\mu\alpha a_1 + k\beta)}{\varepsilon(k\alpha\beta + k\beta a_1 + k\beta a_4 + \mu\alpha a_1 + \mu\alpha a_5)} > 1.$$

iv. Selanjutnya, $b_4 = (a_1a_3a_4a_5 + k\alpha\xi I^* a_2 + k\beta I^* a_2a_4 + \mu\alpha I^* a_2a_5 - k\alpha\beta I^* a_1 - \mu\alpha I^* a_1a_5 - k\beta I^* a_1a_4)$.

b_4 akan bernilai positif jika memenuhi syarat

$$\frac{\rho R_0(a_1a_3a_4a_5) + \varepsilon(k\alpha\xi a_2 + k\beta a_2a_4 + \mu\alpha a_2a_5)}{\varepsilon(k\alpha\beta a_1 + k\beta a_1a_4 + \mu\alpha a_1a_5)} > 1.$$

v. Selanjutnya, $b_1b_2 - b_3 = (a_1 + a_3 + a_4 + a_5)(a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_5 - k\beta I^* - \mu\alpha I^*) - (a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_4a_5 + a_3a_4a_5 + \mu\alpha I^* a_2 + k\beta I^* a_2 - k\alpha\beta I^* - \mu\alpha I^* a_1 - \mu\alpha I^* a_5 - k\beta I^* a_1 - k\beta I^* a_4)$.

Agar $b_1b_2 - b_3$ bernilai positif maka diperoleh syarat

$$\frac{\rho R_0\big(c + 2(a_1a_3a_5 + a_1a_3a_4 + a_1a_4a_5 + a_3a_4a_5)\big) + \varepsilon k\alpha\beta}{\varepsilon(\mu\alpha a_2 + \mu\alpha a_3 + \mu\alpha a_4 + k\beta a_2 + k\beta a_3 + k\beta a_4)} > 1$$

vi. Selanjutnya, $b_1b_2b_3 - {b_3}^2 - {b_1}^2b_4 = (a_1 + a_3 + a_4 + a_5)(a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_5 - k\beta I^* - \mu\alpha I^*)(a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_4a_5 + a_3a_4a_5 + \mu\alpha I^* a_2 + k\beta I^* a_2 - k\alpha\beta I^* - \mu\alpha I^* a_1 - \mu\alpha I^* a_5 - k\beta I^* a_1 - k\beta I^* a_4) - (a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_4a_5 + a_3a_4a_5 + \mu\alpha I^* a_2 + k\beta I^* a_2 - k\alpha\beta I^* - \mu\alpha I^* a_1 - \mu\alpha I^* a_5 - k\beta I^* a_1 - k\beta I^* a_4)^2 - (a_1 + a_3 + a_4 + a_5)^2(a_1a_3a_4a_5 + k\alpha\xi I^* a_2 + k\beta I^* a_2a_4 + \mu\alpha I^* a_2a_5 - k\alpha\beta I^* a_1 - \mu\alpha I^* a_1a_5 - k\beta I^* a_1a_4)$.

Agar $b_1b_2b_3 - {b_3}^2 - {b_1}^2b_4$ bernilai positif maka diperoleh syarat

$$\frac{\rho R_0 m_1m_2m_3 + \varepsilon(m_1n_1 + 2m_3n_2 + {m_1}^2n_3)}{\rho R_0({m_3}^2 + {m_1}^2m_4) + \varepsilon(m_1m_2n_2 + m_1m_3(\mu\alpha + k\beta) + 2n_4 + n_5)} > 1$$

Dimana,

$m_1 = (a_1 + a_3 + a_4 + a_5)$

$m_2 = (a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_5)$

$m_3 = (a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_4a_5 + a_3a_4a_5 + \mu\alpha I^* a_2 + k\beta I^* a_2)$

$m_4 = (a_1a_3a_4a_5 + k\alpha\xi I^* a_2 + k\beta I^* a_2a_4 + \mu\alpha I^* a_2a_5)$

$n_1 = I^*(\mu\alpha k\beta a_1 + \mu\alpha k\beta a_4 + \mu\alpha k\beta a_5 + \mu^2\alpha^2 a_5 + \mu\alpha^2 a_1 + \mu\alpha^2 k\beta + k^2\beta^2\alpha + k^2\beta^2 a_1 + k^2\beta^2 a_4 + k\alpha\beta\mu a_1)$

$n_2 = \mu\alpha a_1 + \mu\alpha a_5 + k\alpha\beta + k\beta a_1 + k\beta a_4$

$n_3 = \mu a_1a_5 + k\alpha\beta a_1a_4$

$n_4 = I^*(\mu\alpha k\beta a_1a_4 + \mu\alpha k\beta a_1a_5 + \mu\alpha k\beta a_4a_5 + \mu\alpha\beta {a_1}^2 + \mu k\beta a_5\alpha^2 + \mu^2\alpha^2 a_1a_5 + k\beta a_1\alpha^2 + k^2\beta^2\alpha a_1 + k^2\beta^2\alpha a_4 + k^2\beta^2 a_1a_4)$

$$n_5 = I^*(\mu\alpha a_1 + \mu\alpha a_5 + k\alpha\beta + k\beta a_1 + k\beta a_4)\,.$$

Berdasarkan penjelasan di atas diketahui bahwa $b_1, b_2, b_3, b_4 > 0, b_1 b_2 - b_3 > 0,$ dan $b_1 b_2 b_3 - {b_3}^2 - b_1 b_4 > 0$ memenuhi kriteria Routh Hurwitz, sehingga titik kesetimbangan penyebaran rumor $E^* = (I^*, L^*, R^*, D^*)$ stabil asimtotik lokal ketika $R_0 > 1$.

4.5 Simulasi Numerik

Simulasi model dilakukan menggunakan software Matlab R2011a. Pada bagian ini dilakukan simulasi pada titik kesetimbangan bebas rumor dan titik kesetimbangan penyebaran rumor. Adapun proses simulasi ini dilakukan guna memberikan gambaran geometris serta mengetahui ilai kesetimbangan tiap kelas populasi dengan nilai awal tertentu.

4.5.1 Simulasi Numerik dalam Keadaan Bebas Rumor

Berdasarkan asumsi yang digunakan dalam jurnal (Tian dan Ding, 2019), simulasi numerik dalam keadaan bebas rumor dilakukan dengan mengasumsikan total populasi adalah 10.000 pada saat t_0, dengan nilai awal populasi *ignorant* I(0)=9999, populasi *latent* L(0)=0, populasi *rumor spreader* R(0)=1, populasi *debunking* D(0)=0, dan populasi *stifler* S(0)=0. Kemudian, nilai-nilai parameter yang diberikan untuk membuat simulasi dari model penyebaran rumor disajikan dalam tabel 4.3.

Tabel 4.3 Nilai-nilai Parameter untuk simulasi Model saat $R_0 < 1$

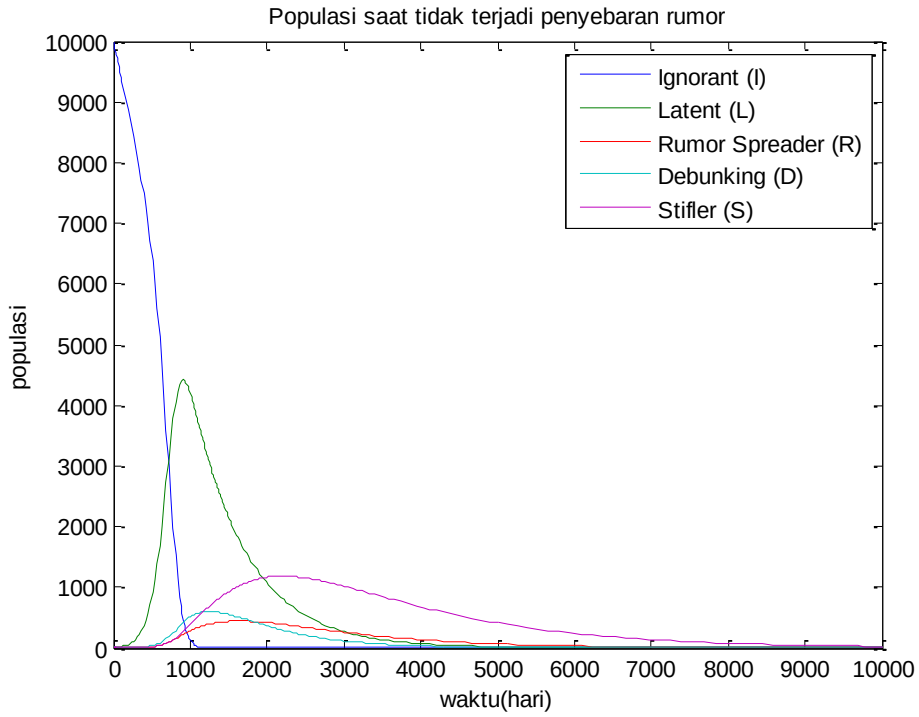
Parameter	Keterangan	Nilai
ε	Laju penambahan pengguna akun baru	0.01
ρ	Laju pengurangan pengguna akun	0.0006
μ	Laju transisi dari individu I menjadi individu L karena adanya kontak dengan penyebar rumor	0.00002
k	Laju transisi dari individu I menjadi individu L karena adanya kontak dengan penyanggah rumor	0.00002
α	Laju transisi dari individu L menjadi individu R	0.0002
β	Laju transisi dari individu L menjadi individu D	0.0005
γ	Laju transisi dari individu L menjadi individu S	0.0001
δ	Laju transisi dari individu R menjadi	0.0001

	individu S	
θ	Laju transisi dari individu D menjadi individu S	0.002
ξ	Laju transisi dari individu R menjadi individu D	0.0001

Berdasarkan nilai parameter yang telah disebutkan dalam tabel 4.3 diperoleh angka reproduksi dasar sebagai berikut.

$$R_0 = \frac{\varepsilon\mu\alpha(\theta+\rho)+\varepsilon k\alpha\xi+\varepsilon k\beta(\delta+\xi+\rho)}{\rho(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} = 0.1076 < 1$$

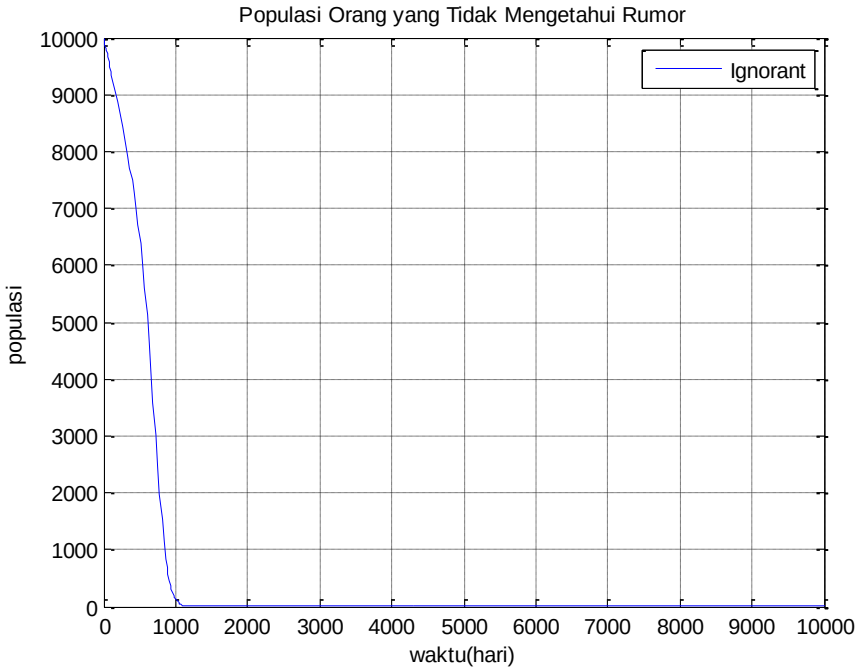
Simulasi dalam keadaan bebas rumor ditunjukkan menggunakan program matlab dalam Gambar 4.2 dengan interval waktu yang digunakan dari 0 sampai 10000.



Gambar 4.2 Grafik Penyebaran Rumor saat $R_0 < 1$

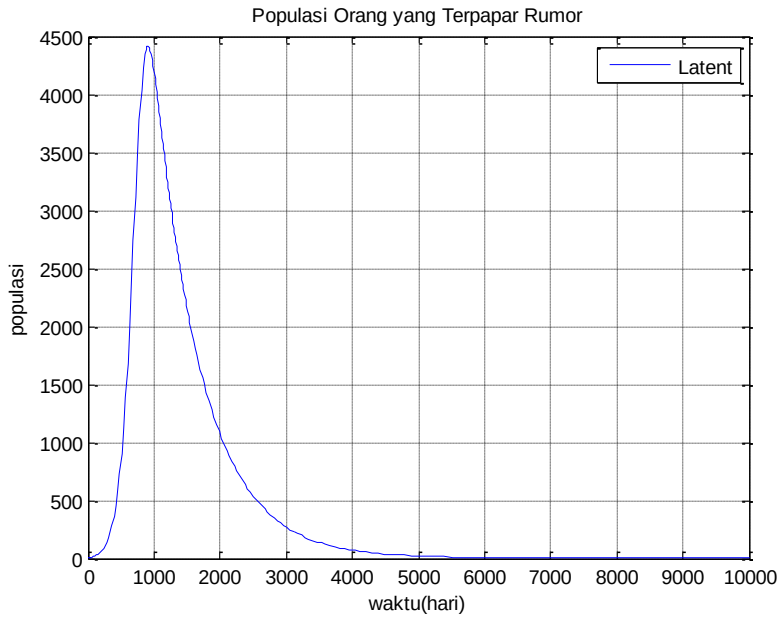
Berdasarkan Gambar 4.2 dapat diketahui bahwa laju pertumbuhan populasi *ignorant* terus mengalami penurunan. Hal tersebut dikarenakan populasi *ignorant* telah mengetahui adanya rumor sehingga mengubah individu dalam populasi *ignorant* menjadi individu dalam populasi *latent*. Sehingga laju pertumbuhan populasi *latent* mengalami kenaikan hingga mencapai titik tertentu, kemudian mengalami penurunan hingga nol, yang mana mengindikasikan bahwa rumor akan hilang ketika mencapai keadaan setimbang pada waktu t tertentu. Laju pertumbuhan populasi *rumor spreader* mengalami kenaikan hingga

mencapai titik tertentu, kemudian mengalami penurunan. Hal tersebut terjadi karena tidak adanya penambahan individu pada populasi *latent* yang berubah menjadi individu pada populasi *rumor spreader.* Selanjutnya, laju pertumbuhan populasi *debunker* mengalami kenaikan hingga mencapai titik tertentu, kemudian mengalami penurunan. Hal tersebut terjadi karena tidak adanya penambahan individu pada populasi *latent* yang berubah menjadi individu pada populasi *debunker.* Adapun laju pertumbuhan populasi *stifler* mengalami kenaikan hingga mencapai titik tertentu, kemudian mengalami penurunan. Hal tersebut terjadi karena tidak adanya penambahan individu pada populasi *latent* yang berubah menjadi individu pada populasi *stifler.*



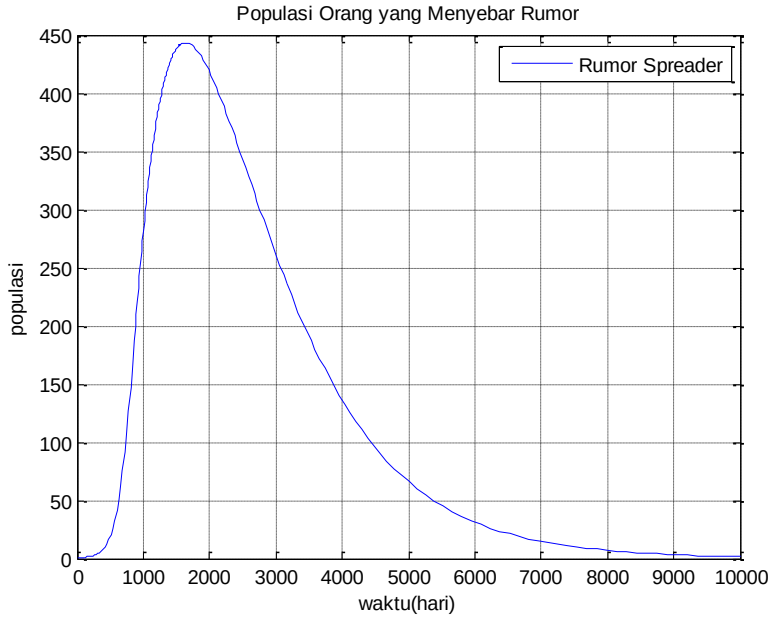
Gambar 4.3 Grafik solusi $I(t)$ ketika $R_0 < 1$

Pada Gambar 4.3 diketahui bahwa populasi awal sebanyak 10000 orang, kemudian mulai bergerak menurun hingga mencapai hari ke 1200 grafik solusi $I(t)$ mulai stabil di angka 0, yang menggambarkan bahwa titik kesetimbangan $I(t)$ ketika $R_0 < 1$ stabil di angka 0.



Gambar 4.4 Grafik solusi $L(t)$ ketika $R_0 < 1$

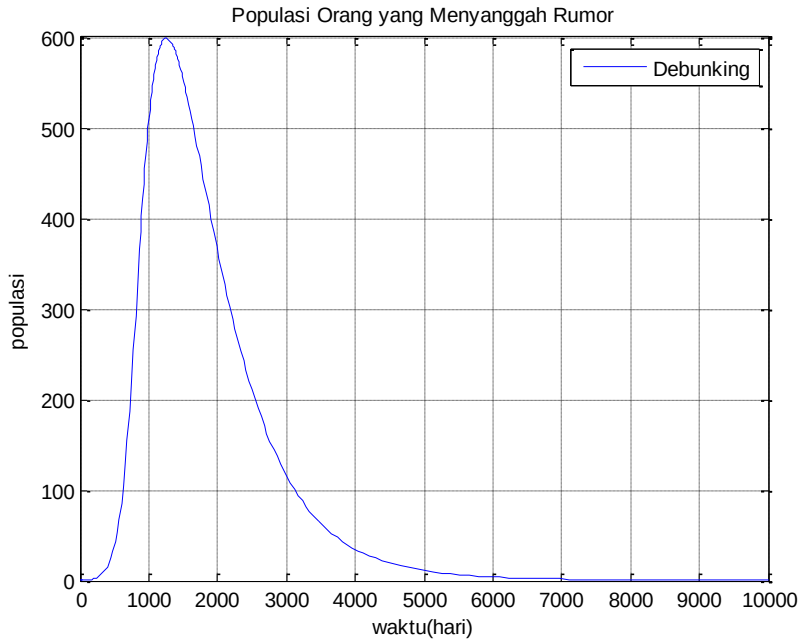
Pada Gambar 4.4 diketahui bahwa awalnya tidak ada populasi yang terpapar rumor hingga akhirnya terjadi peningkatan populasi yang terpapar rumor sebanyak 4415 orang. Kemudian populasi mengalami penurunan sampai pada hari ke 5000 grafik solusi $L(t)$ mulai stabil di angka 0.



Gambar 4.5 Grafik solusi $R(t)$ ketika $R_0 < 1$

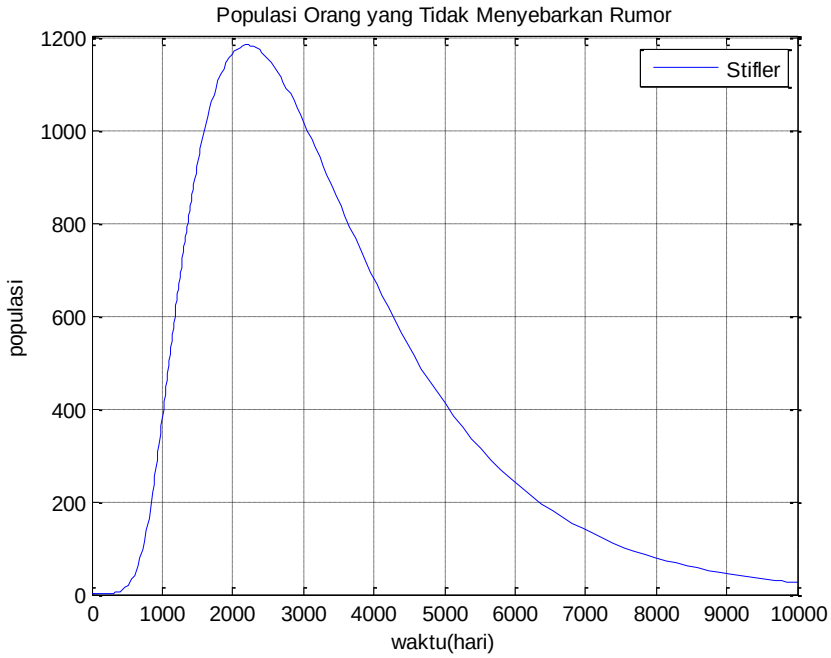
Pada Gambar 4.5 diketahui bahwa awalnya tidak ada populasi yang menyebarkan rumor hingga akhirnya terjadi peningkatan populasi yang menyebarkan rumor sebanyak

443 orang. Kemudian populasi mengalami penurunan sampai pada hari ke 9000 grafik solusi $R(t)$ mulai stabil di angka 0.



Gambar 4.6 Grafik solusi $D(t)$ ketika $R_0 < 1$

Pada Gambar 4.6 diketahui bahwa awalnya tidak ada populasi yang menyanggah rumor hingga akhirnya terjadi peningkatan populasi yang menyanggah rumor sebanyak 600 orang. Kemudian populasi mengalami penurunan sampai pada hari ke 6500 grafik solusi $D(t)$ mulai stabil di angka 0.



Gambar 4.7 Grafik solusi $S(t)$ ketika $R_0 < 1$

Pada Gambar 4.7 diketahui bahwa awalnya tidak ada populasi yang menyanggah rumor hingga akhirnya terjadi peningkatan populasi yang menyanggah rumor sebanyak 1183 orang. Kemudian populasi mengalami penurunan sampai pada hari ke 9000 grafik solusi $S(t)$ mulai stabil di angka 0.

Berdasarkan Gambar tersebut titik kesetimbangan bebas rumor $(E^0) = \left(\frac{\varepsilon}{\rho}, 0,0,0,0\right)$ bersifat stabil asimtotik lokal ketika $R_0 < 1$, artinya tidak ada rumor yang menyebar di dalam populasi.

4.5.2 Simulasi Numerik dalam Keadaan Penyebaran Rumor

Berdasarkan asumsi yang digunakan dalam jurnal (Tian dan Ding, 2019), simulasi numerik dalam keadaan penyebaran rumor dilakukan dengan mengasumsikan total populasi adalah 10.000 pada saat t_0. Sehingga nilai awal populasi *ignorant* I(0)=9999, populasi *latent* (0)=0, populasi *rumor spreader* R(0)=1, populasi *debunking* D(0)=0, dan populasi *stifler* S(0)=0. Kemudian, nilai-nilai parameter yang diberikan untuk membuat simulasi dari model penyebaran rumor disajikan dalam tabel 4.4.

Tabel 4.4 Nilai-nilai Parameter untuk simulasi Model saat $R_0 > 1$

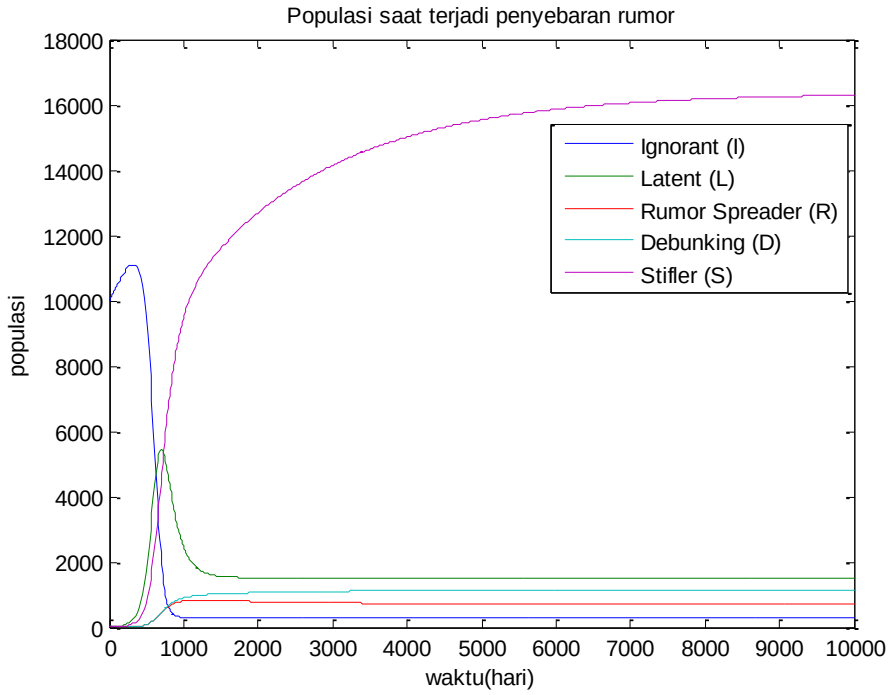
Parameter	Keterangan	Nilai
ε	Laju penambahan pengguna akun baru	10
ρ	Laju pengurangan pengguna akun	0.0005
μ	Laju transisi dari individu I menjadi individu L karena adanya kontak dengan penyebar rumor	0.00002
k	Laju transisi dari individu I menjadi individu L karena adanya kontak dengan penyanggah rumor	0.00002
α	Laju transisi dari individu L menjadi individu R	0.0005
β	Laju transisi dari individu L menjadi individu D	0.0005
γ	Laju transisi dari individu L menjadi individu S	0.005
δ	Laju transisi dari individu R menjadi individu S	0.0005
θ	Laju transisi dari individu D menjadi individu S	0.0002

ξ	Laju transisi dari individu R menjadi individu D	0.00005

Berdasarkan nilai parameter yang telah disebutkan dalam tabel 4.4 diperoleh angka reproduksi dasar sebagai berikut.

$$R_0 = \frac{\varepsilon\mu\alpha(\theta+\rho)+\varepsilon k\alpha\xi+\varepsilon k\beta(\delta+\xi+\rho)}{\rho(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} = 75.3532 > 1$$

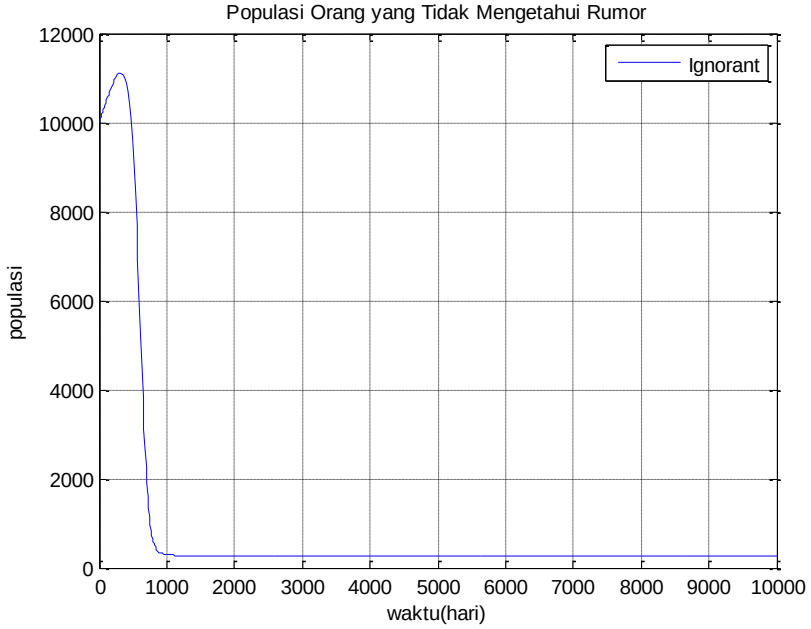
Simulasi dalam keadaan bebas rumor ditunjukkan menggunakan program matlab dalam gambar 4.3 dengan interval waktu yang digunakan dari 0 sampai 10000.



Gambar 4.8 Grafik Penyebaran Rumor saat $R_0 > 1$

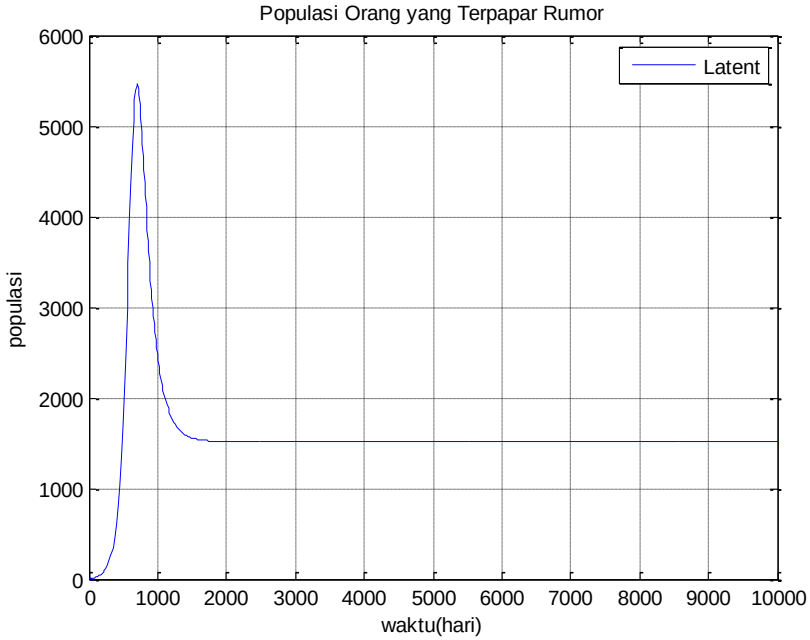
Pada Gambar 4.8 terlihat bahwa laju pertumbuhan individu pada populasi *ignorant* mengalami kenaikan, kemudian mengalami penurunan sampai laju pertumbuhan populasi *ignorant* tidak mengalami perubahan atau dalam keadan setimbang pada waktu t tertentu. Penurunan disebabkan individu pada populasi *ignorant* telah mengetahui atau mendengar rumor, sehingga berubah menjadi individu pada populasi *latent*. Selanjutnya laju pertumbuhan individu pada populasi *latent* mengalami kenaikan, kemudian mengalami penurunan sampai laju pertumbuhan populasi *latent* tidak mengalami perubahan atau dalam keadan setimbang pada waktu t tertentu. Penurunan disebabkan individu pada populasi *latent* dapat berubah menjadi individu pada populasi *rumor spreader*, *debunking*, atau *stifler.*

Laju pertumbuhan pada populasi *rumor spreader* akan mengalami kenaikan. Hal ini dikarenakan individu pada populasi *latent* yang telah mengetahui rumor berubah menjadi individu pada populasi *rumor spreader*. Keadaan laju pertumbuhan akan terus naik sampai laju pertumbuhan tersebut tidak mengalami perubahan atau dalam keadaan setimbang pada waktu t tertentu. Selanjutnya, Laju pertumbuhan pada populasi *debunker* akan mengalami kenaikan. Hal ini dikarenakan individu pada populasi *latent* yang telah mengetahui rumor kemudian berupaya untuk meng-*counter* rumor berubah menjadi individu pada populasi *debunker*. Keadaan laju pertumbuhan akan terus naik sampai laju pertumbuhan tersebut tidak mengalami perubahan atau dalam keadaan setimbang pada waktu t tertentu. Adapun laju pertumbuhan pada populasi stifler terus mengalami kenaikan hingga mencapai keadaan setimbang pada waktu t tertentu. Hal ini dikarenakan terjadinya penurunan jumlah individu pada populasi *latent, rumor spreader* dan *debunker.*



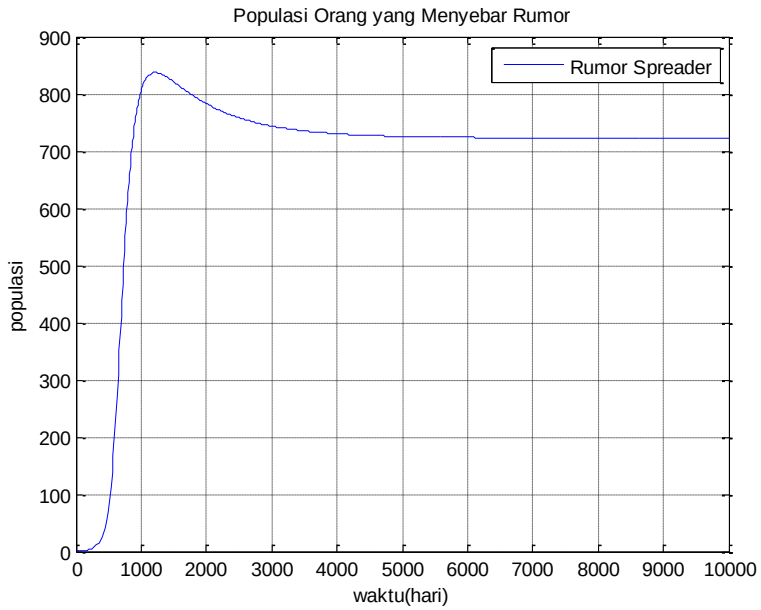
Gambar 4.9 Grafik solusi $I(t)$ ketika $R_0 > 1$

Pada Gambar 4.9 diketahui bahwa populasi awal yang tidak mengetahui rumor adalah 10000 orang, lalu mengalami kenaikan sebentar, kemudian mengalami penurunan drastis sampai hari ke 1100 dengan populasi sebanyak 267 orang dan stabil di angka 267 orang.



Gambar 4.10 Grafik solusi $L(t)$ ketika $R_0 > 1$

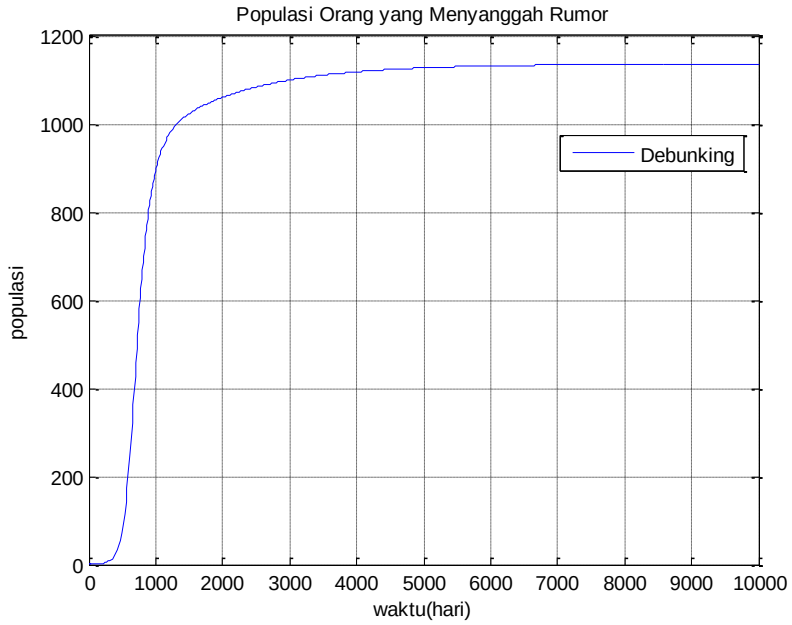
Pada Gambar 4.10 awalnya tidak ada populasi yang terpapar rumor, kemudian terjadi kenaikan drastis dengan populasi sebanyak 5458 orang. Lalu mengalami penurunan sampai hari ke 1800 dengan populasi sebanyak 1518 orang dan populasi yang terpapar rumor akan stabil di titik tersebut.



Gambar 4.11 Grafik solusi $R(t)$ ketika $R_0 > 1$

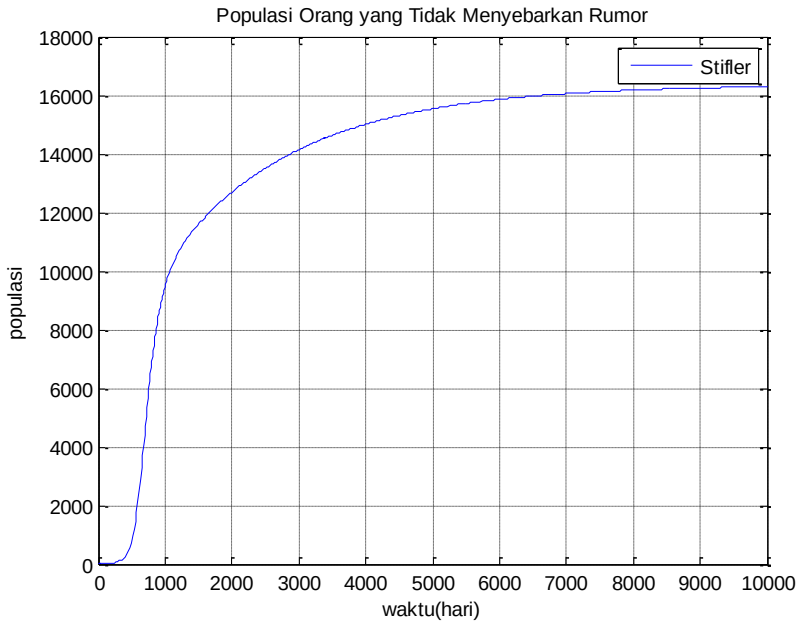
Pada Gambar 4.11, awalnya tidak ada populasi yang menyebarkan rumor, kemudian terjadi kenaikan dengan populasi sebanyak 873 orang. Lalu mengalami penurunan sedikit

hingga hari ke 5850 dengan populasi sebanyak 723 orang dan populasi yang menyebarkan rumor akan stabil di titik tersebut.



Gambar 4.12 Grafik solusi $D(t)$ ketika $R_0 > 1$

Pada Gambar 4.12, awalnya tidak ada populasi yang menyanggah rumor, kemudian terus mengalami kenaikan sampai hari ke 9150 dengan populasi sebanyak 1136 orang dan populasi orang yang menyanggah rumor akan stabil di titik 1136.



Gambar 4.13 Grafik solusi $S(t)$ ketika $R_0 > 1$

Pada Gambar 4.13, populasi orang yang tidak meyebarkan rumor terus mengalami kenaikan hingga menuju titik kesetimbangnnya pada hari ke 9370 dengan populasi sebanyak 16.270 orang dan populasi orang yang tidak menyebarkan rumor akan stabil di titik tersebut.

Berdasarkan grafik-grafik di atas dapat disimpulkan bahwa grafik I^* stabil di titik 267, grafik L^* stabil di titik 1518, grafik R^* stabil di titik 723, grafik D^* stabil di titik 1136, dan grafik S^* stabil di titik 16.270. Dari penjelasan tersebut, maka titik kesetimbangan $(E^*) = (I^*, L^*, R^*, D^*, S^*)$ eksis/ada dan juga asimtotik lokal ketika $R_0 > 1$, artinya terdapat rumor yang menyebar di dalam populasi.

BAB 5
KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang dilakukan pada bab 4, maka dapat disimpulkan bahwa model matematika penyebaran rumor dengan mempertimbangkan sikap *debunking* dalam keadaan darurat memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas rumor $(E^0) = (\frac{\varepsilon}{\rho}, 0,0,0,0)$ dan titik kesetimbangan penyebaran rumor $E^* = \left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)}{\mu\alpha(\theta+\rho)+k\beta(\delta+\xi+\rho)+k\xi\alpha}, \frac{\varepsilon-\rho I^*}{\alpha+\beta+\gamma+\rho}, \frac{\alpha L^*}{\delta+\xi+\rho}, \frac{\beta(\delta+\xi+\rho)+\xi\alpha}{(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} \cdot L^*, \frac{\delta R^*+\theta D^*+\gamma L^*}{\rho}\right)$. Berdasarkan persamaan (4.31), diperoleh angka reproduksi dasar $R_0 = \frac{\varepsilon\mu\alpha(\theta+\rho)+\varepsilon k\alpha\xi+\varepsilon k\beta(\delta+\xi+\rho)}{\rho(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)}$. Berdasarkan nilai R_0, titik kesetimbangan bebas rumor bersifat stabil asimtotik lokal ketika $R_0 < 1$ dan titik kesetimbangan penyebaran rumor bersifat stabil asimtotik lokal ketika $R_0 > 1$.

Berdasarkan hasil simulasi numerik model matematika penyebaran rumor dengan mempertimbangkan sikap *debunking* dalam keadaan darurat, ketika $R_0 < 1$ akan menyebabkan populasi individu *latent* akan mengalami kenaikan hingga mencapai titik kesetimbangan, kemudian mengalami penurunan drastis, dan populasi individu *ignorant*, *rumor spreader*, *debunker,* serta populasi individu *stifler* cenderung turun, karena tidak adanya rumor yang menyebar dalam populasi. Sedangkan, ketika $R_0 > 1$ populasi individu *ignorant* dan populasi individu *latent* pada awalnya mengalami kenaikan lalu mengalami penurunan, sedangkan populasi individu *rumor spreader*, *debunker*, dan populasi individu *stifler* mengalami kenaikan hingga mencapai keadaan stabil, karena ada rumor yang menyebar dalam populasi.

5.2 Saran

Penelitian ini membahas analisis kestabilan model matematika penyebaran rumor yang mengacu pada jurnal internasional. Sebaiknya dalam penelitian selanjutnya dapat dilakukan modifikasi pada model dan memberikan perlakukan tertentu pada penelitian yang telah ada, seperti menentukan kontrol optimal pada model yang dibahas dengan menambahkan variabel kontrolnya.

DAFTAR PUSTAKA

Ahsan, M. dan Kumari, M. (2019) "Rumors And Their Controlling Mechanisms In Online Social Networks : A Survey." Elsevier B.V., 14.

Anton, H. dan Rorres, C. (2013) *Elementary Linear Algebra: Applications Version*. 11th ed. Wiley.

Boyce, W. E. dan DiPrima, R. C. (2009) *Elementary Diferential Equations And Boundary Value Problems (Ninth ed.)*. United State of America: John Wiley & Sons, Inc.

Chen, G. (2019) "ILSCR Rumor Spreading Model to Discuss the Control of Rumor Spreading in Emergency," *Physica A*. Elsevier B.V., 522, hal. 88–97.

Daley, D. J. dan Kendall, D. G. (1964) "Epidemics And Rumours," *Nature*, 204(4963), hal. 1118–1118.

Donovan, P. (2015) *Rumors And Urban Legends*, *International Encyclopedia of Social & Behavioral Sciences*. Elsevier.

Driessche, P. Van Den dan Watmough, J. (2002) "Reproduction Numbers And Sub-threshold Endemic Equilibria For Compartmental Models Of Disease Transmission," *Mathematical Biosciences*, 180, hal. 29–48.

Finizio, N. dan Ladas, G. (1982) *An Introduction to Differential Equations*. California: Wadsworth, Inc.

Gani, J. (2000) "The Maki–Thompson Rumour Model: A Detailed Analysis," *Environmental Modelling & Software*, 15(8), hal. 721–725.

Hahn (1967) *Stability of Motion*. New York: Springer-Verlag.

Hartemink, N. (2009) *Vector-Borne Diseases : The Basic Reproduction Number R 0 And Risk Maps*.

J. Kimmel, A. (2003) *Rumors and Rumor Control: A Manager's Guide to Understanding and Combinatting Rumors*. New York, United State: Taylor & Francis Inc.

Kamil, Dea Angelia. 2019. *Analisis Kestabilan Model Matematika Penyebaran Rumor dengan Adanya Treatment*. Skripsi Universitas Airlangga.

Lamis, Atikah. 2019. Analisis Dinamik Model Penyebaran Rumor dengan Kontrol Optimal pada Penayangan Berita di Media. Skripsi Universitas Brawijaya.

Ledder, G. (2013) *Mathematics for the Life Sciences*. New York: Springer.

Lin, C. *et al.* (2020) "Investigating Mediated Effects of Fear of COVID-19 and COVID-19 Misunderstanding in the Association Between Problematic Social Media Use, Psychological Distress, and Insomnia," *Internet Interventions*. Elsevier, 21(March), hal. 100345.

Liu, X., Li, T. dan Tian, M. (2018) "Rumor Spreading of a SEIR Model in Complex Social Networks with Hesitating Mechanism," *Adv Differ Equ*.

Liu, Y., Zeng, C. dan Luo, Y. (2019) "Steady-State Analysis of SECIR Rumor Spreading Model in Complex Networks," hal. 75–86.

Merkin, D. R. (1997) *Introduction to the Theory of Stability*. New York: Springer.

Nazir, M. 2013. *Metode Penelitian*. Bogor: Penerbit Ghalia Indonesia.

Norman, D., Aikins, M. dan Binka, F. (2017) "KITAB SUCI DAN HOAX : PANDANGAN ALQURAN DALAM MENYIKAPI BERITA BOHONG," *Wawasan: Jurnal Ilmiah Agama dan Sosial Budaya*, 2(October), hal. 209–222.

Olsder, G. J. dan Woude, J. W. van der (1998) *Mathematical Systems Theory*. Delft University Press.

Perko, L. (2000) *Differential Equations and Dynamical Systems*. New York: Springer.

Ram, A. *et al.* (2020) "Analysis of Techniques for Rumor Detection in Social Media Analysis of Techniques for Rumor Detection in Social Media," *Procedia Computer Science*. Elsevier B.V., 167(2019), hal. 2286–2296.

Ross, S. L. (1984) "Differential Equations." Wiley India Pvt., hal. 816.

Tian, Y. dan Ding, X. (2019) "Rumor Spreading Model with Considering Debunking Behavior in Emergencies," *Applied Mathematics and Computation*. Elsevier Inc., 363, hal. 124599.

Wiggins, S. (1990) *Introduction To Applied Nonlinear Dynamical Systems And Chaos*. New York: Springer.

LAMPIRAN

Lampiran 1: Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Penyebaran Rumor

Matriks Jacobian dari persamaan (4.50) adalah sebagai berikut

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial\left(\frac{dI}{dt}\right)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dI}{dt}\right)}{\partial(L(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dI}{dt}\right)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dI}{dt}\right)}{\partial(D(t))} \\ \frac{\partial\left(\frac{dL}{dt}\right)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dL}{dt}\right)}{\partial(L(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dL}{dt}\right)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dL}{dt}\right)}{\partial(D(t))} \\ \frac{\partial\left(\frac{dR}{dt}\right)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dR}{dt}\right)}{\partial(L(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dR}{dt}\right)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dR}{dt}\right)}{\partial(D(t))} \\ \frac{\partial\left(\frac{dD}{dt}\right)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dD}{dt}\right)}{\partial(L(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dD}{dt}\right)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial\left(\frac{dD}{dt}\right)}{\partial(D(t))} \end{bmatrix}$$

$J =$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(\varepsilon-\mu IR-kID-\rho I\ )}{\partial(I(t))} & \frac{\partial(\varepsilon-\mu IR-kID-\rho I\ )}{\partial(L(t))} & \frac{\partial(\varepsilon-\mu IR-kID-\rho I\ )}{\partial(R(t))} & \frac{\partial(\varepsilon-\mu IR-kID-\rho I\ )}{\partial(D(t))} \\ \frac{\partial(\mu IR+kID-(\alpha+\beta+\gamma+\rho)L)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial(\mu IR+kID-(\alpha+\beta+\gamma+\rho)L)}{\partial(L(t))} & \frac{\partial(\mu IR+kID-(\alpha+\beta+\gamma+\rho)L)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial(\mu IR+kID-(\alpha+\beta+\gamma+\rho)L)}{\partial(D(t))} \\ \frac{\partial(\alpha L-(\delta+\xi+\rho)R)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial(\alpha L-(\delta+\xi+\rho)R)}{\partial(L(t))} & \frac{\partial(\alpha L-(\delta+\xi+\rho)R)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial(\alpha L-(\delta+\xi+\rho)R)}{\partial(D(t))} \\ \frac{\partial(\beta L+\xi R-(\theta+\rho)D)}{\partial(I(t))} & \frac{\partial(\beta L+\xi R-(\theta+\rho)D\ )}{\partial(L(t))} & \frac{\partial(\beta L+\xi R-(\theta+\rho)D)}{\partial(R(t))} & \frac{\partial(\beta L+\xi R-(\theta+\rho)D)}{\partial(D(t))} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -\mu R - kD - \rho & 0 & -\mu I & -kI \\ \mu IR + kID & -(\alpha+\beta+\gamma+\rho) & \mu I & kI \\ 0 & \alpha & -(\delta+\xi+\rho) & 0 \\ 0 & \beta & \xi & -(\theta+\rho) \end{bmatrix} \qquad (4.51)$$

Menentukan kestabilan titik kesetimbangan penyebaran rumor dengan substitusikan $E^* = (I^*, L^*, R^*, D^*)$ ke dalam persamaan (4.51).

Diketahui,

$$R_0 = \frac{\varepsilon\mu\alpha(\theta+\rho)+\varepsilon k\alpha\xi+\varepsilon k\beta(\delta+\xi+\rho)}{\rho(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)}$$

Kemudian, nilai R_0 dapat disederhanakan menjadi

$$R_0 = \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot \frac{1}{I^*}.$$

$$I^* = \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\rho)(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)}{\mu\alpha(\theta+\rho)+k\beta(\delta+\xi+\rho)+k\xi\alpha}$$

Kemudian, nilai I^* dapat disederhanakan menjadi

$$I^* = \frac{\varepsilon}{\rho R_0}$$

$$L^* = \frac{\varepsilon - \rho I^*}{\alpha+\beta+\gamma+\rho}$$

$$R^* = \frac{\alpha L^*}{\delta+\xi+\rho}$$

$$D^* = \frac{\beta(\delta+\xi+\rho)+\xi\alpha}{(\delta+\xi+\rho)(\theta+\rho)} \cdot L^*$$

Sehingga diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut.

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\mu R^* - kD^* - \rho & 0 & -\mu I^* & -kI^* \\ \mu I^* R^* + kI^* D^* & -(\alpha+\beta+\gamma+\rho) & \mu I^* & kI^* \\ 0 & \alpha & -(\delta+\xi+\rho) & 0 \\ 0 & \beta & \xi & -(\theta+\rho) \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}\,(\lambda i - J(E^*)) = 0$$

$$\text{Det}\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mu R^* - kD^* - \rho & 0 & -\mu I^* & -kI^* \\ \mu R^* + kD^* & -(\alpha+\beta+\gamma+\rho) & \mu I^* & kI^* \\ 0 & \alpha & -(\delta+\xi+\rho) & 0 \\ 0 & \beta & \xi & -(\theta+\rho) \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\text{Det}\begin{bmatrix} \lambda + (\mu R^* + kD^* + \rho) & 0 & \mu I^* & kI^* \\ -(\mu R^* + kD^*) & \lambda + (\alpha+\beta+\gamma+\rho) & -\mu I^* & -kI^* \\ 0 & -\alpha & \lambda + (\delta+\xi+\rho) & 0 \\ 0 & -\beta & -\xi & \lambda + (\theta+\rho) \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{Det}\begin{bmatrix} \lambda + a_1 & 0 & \mu I^* & kI^* \\ -a_2 & \lambda + a_3 & -\mu I^* & -kI^* \\ 0 & -\alpha & \lambda + a_4 & 0 \\ 0 & -\beta & -\xi & \lambda + a_5 \end{bmatrix} = 0$$

dengan

$a_1 = (\mu R^* + kD^* + \rho)$

$a_2 = (\mu R^* + kD^*)$

$a_3 = (\alpha + \beta + \gamma + \rho)$

$a_4 = (\delta + \xi + \rho)$

$a_5 = (\theta + \rho)$

$$\lambda + a_1 \begin{bmatrix} \lambda + a_3 & -\mu I^* & -kI^* \\ -\alpha & \lambda + a_4 & 0 \\ -\beta & -\xi & \lambda + a_5 \end{bmatrix} - (-a_2) \begin{bmatrix} 0 & \mu I^* & kI^* \\ -\alpha & \lambda + a_4 & 0 \\ -\beta & -\xi & \lambda + a_5 \end{bmatrix} + 0 - 0 = 0$$

$\lambda + a_1[(\lambda + a_3)(\lambda + a_4)(\lambda + a_5) - k\alpha\beta I^* - \mu\alpha I^*(\lambda + a_5) - k\beta I^*(\lambda + a_4)] + a_2[k\alpha\xi I^* + \mu\alpha I^*(\lambda + a_5) + k\beta I^*(\lambda + a_4)] = 0$

$\lambda^4 + a_5\lambda^3 + a_4\lambda^3 + a_3\lambda^3 + a_1\lambda^3 + a_4a_5\lambda^2 + a_3a_5\lambda^2 + a_3a_4\lambda^2 + a_1a_5\lambda^2 + a_1a_4\lambda^2 + a_1a_3\lambda^2 + a_3a_4a_5\lambda + a_1a_4a_5\lambda + a_1a_3a_5\lambda + a_1a_3a_4\lambda + a_1a_3a_4a_5 - k\alpha\beta I^*\lambda - k\alpha\beta I^*a_1 - \mu\alpha I^*\lambda^2 - \mu\alpha I^*a_1\lambda - \mu\alpha I^*a_5\lambda - \mu\alpha I^*a_1a_5 - k\beta I^*\lambda^2 - k\beta I^*a_1\lambda - k\beta I^*a_4\lambda - k\beta I^*a_1a_4 + k\alpha\xi I^*a_2 + \mu\alpha I^*a_2\lambda + \mu\alpha I^*a_2a_5 + k\beta I^*a_2\lambda + k\beta I^*a_2a_4 = 0$

$\lambda^4 + (a_1 + a_3 + a_4 + a_5)\lambda^3 + (a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_5 - k\beta I^* - \mu\alpha I^*)\lambda^2 + (a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_4a_5 + a_3a_4a_5 + \mu\alpha I^*a_2 + k\beta I^*a_2 - k\alpha\beta I^* - \mu\alpha I^*a_1 - \mu\alpha I^*a_5 - k\beta I^*a_1 - k\beta I^*a_4)\lambda + (a_1a_3a_4a_5 + k\alpha\xi I^*a_2 + k\beta I^*a_2a_4 + \mu\alpha I^*a_2a_5 - k\alpha\beta I^*a_1 - \mu\alpha I^*a_1a_5 - k\beta I^*a_1a_4) = 0$

Persamaan karakteristik di atas dapat disederhanakan menjadi

$\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4 = 0$ (4.52)

dengan

$b_1 = (a_1 + a_3 + a_4 + a_5)$

$b_2 = (a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_5 - k\beta I^* - \mu\alpha I^*)$

$b_3 = (a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_4a_5 + a_3a_4a_5 + \mu\alpha I^*a_2 + k\beta I^*a_2 - k\alpha\beta I^* - \mu\alpha I^*a_1 - \mu\alpha I^*a_5 - k\beta I^*a_1 - k\beta I^*a_4)$

$b_4 = (a_1a_3a_4a_5 + k\alpha\xi I^*a_2 + k\beta I^*a_2a_4 + \mu\alpha I^*a_2a_5 - k\alpha\beta I^*a_1 - \mu\alpha I^*a_1a_5 - k\beta I^*a_1a_4)$.

Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz, persamaan (4.52) akan memiliki akar-akar negatif jika memenuhi $b_1, b_2, b_3, b_4 > 0$, $b_1b_2 - b_3 > 0$, dan $b_1b_2b_3 - {b_3}^2 - b_1b_4 > 0$.

- $b_1 > 0$
  $\Leftrightarrow a_1 + a_3 + a_4 + a_5 > 0$ (4.53)
  Substitusi nilai a_1, a_3, a_4, a_5 ke persamaan (4.53)
  $\Leftrightarrow (\mu \mathrm{R}^* + k\mathrm{D}^* + \rho) + (\alpha + \beta + \gamma + \rho) + (\delta + \xi + \rho) + (\theta + \rho) > 0$
- $b_2 > 0$
  $\Leftrightarrow a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_5 - k\beta I^* - \mu\alpha I^* > 0$
  $\Leftrightarrow a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_5 > k\beta I^* + \mu\alpha I^*$ (4.54)
  Substitusi $I^* = \frac{\varepsilon}{\rho R_0}$ ke persamaan (4.55)
  $\Leftrightarrow a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_5 > \frac{\varepsilon}{\rho R_0}(\mu\alpha + k\beta) \Leftrightarrow$
  $\frac{\rho R_0(a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_5)}{\varepsilon(\mu\alpha + k\beta)} > 1$

- $b_3 > 0$

  $\Leftrightarrow a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_4a_5 + a_3a_4a_5 + \mu\alpha I^*a_2 + k\beta I^*a_2 - k\alpha\beta I^* - \mu\alpha I^*a_1 - \mu\alpha I^*a_5 - k\beta I^*a_1 - k\beta I^*a_4 > 0$

  $\Leftrightarrow a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_4a_5 + a_3a_4a_5 + \mu\alpha I^*a_2 + k\beta I^*a_2 > k\alpha\beta I^* + \mu\alpha I^*a_1 + \mu\alpha I^*a_5 + k\beta I^*a_1 + k\beta I^*a_4$ (4.56)

  Substitusi $I^* = \frac{\varepsilon}{\rho R_0}$ ke persamaan (4.56)

  $\Leftrightarrow a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_4a_5 + a_3a_4a_5 + \frac{\varepsilon}{\rho R_0}(\mu\alpha a_2 + k\beta a_2) > \frac{\varepsilon}{\rho R_0}(k\alpha\beta + \mu\alpha a_1 + \mu\alpha a_5 + k\beta a_1 + k\beta a_4)$

  $\Leftrightarrow \frac{\rho R_0(a_1a_3a_4+a_1a_3a_5+a_1a_4a_5+a_3a_4a_5)+\varepsilon(\mu\alpha a_2+k\beta a_2)}{\varepsilon(k\alpha\beta+\mu\alpha a_1+\mu\alpha a_5+k\beta a_1+k\beta a_4)} > 1$

- $b_4 > 0$

  $\Leftrightarrow a_1a_3a_4a_5 + k\alpha\xi I^*a_2 + k\beta I^*a_2a_4 + \mu\alpha I^*a_2a_5 - k\alpha\beta I^*a_1 - \mu\alpha I^*a_1a_5 - k\beta I^*a_1a_4 > 0 \Leftrightarrow a_1a_3a_4a_5 + k\alpha\xi I^*a_2 + k\beta I^*a_2a_4 + \mu\alpha I^*a_2a_5 > k\alpha\beta I^*a_1 + \mu\alpha I^*a_1a_5 + k\beta I^*a_1a_4$ (4.57)

  Substitusi $I^* = \frac{\varepsilon}{\rho R_0}$ ke persamaan (4.57)

  $\Leftrightarrow a_1a_3a_4a_5 + \frac{\varepsilon}{\rho R_0}(k\alpha\xi a_2 + k\beta a_2a_4 + \mu\alpha a_2a_5) > \frac{\varepsilon}{\rho R_0}(k\alpha\beta a_1 + \mu\alpha a_1a_5 + k\beta a_1a_4) \Leftrightarrow$

  $\frac{\rho R_0(a_1a_3a_4a_5)+\varepsilon(k\alpha\xi a_2+k\beta a_2a_4+\mu\alpha a_2a_5)}{\rho R_0} > \frac{\varepsilon}{\rho R_0}(k\alpha\beta a_1 + \mu\alpha a_1a_5 + k\beta a_1a_4) \Leftrightarrow$

  $\frac{\rho R_0(a_1a_3a_4a_5)+\varepsilon(k\alpha\xi a_2+k\beta a_2a_4+\mu\alpha a_2a_5)}{\varepsilon(k\alpha\beta a_1+\mu\alpha a_1a_5+k\beta a_1a_4)} > 1$

- $b_1b_2 - b_3 > 0$

  $\Leftrightarrow (a_1 + a_3 + a_4 + a_5)(a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_5 - k\beta I^* - \mu\alpha I^*) - (a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_4a_5 + a_3a_4a_5 + \mu\alpha I^*a_2 + k\beta I^*a_2 - k\alpha\beta I^* - \mu\alpha I^*a_1 - \mu\alpha I^*a_5 - k\beta I^*a_1 - k\beta I^*a_4) > 0$

  $\Leftrightarrow {a_1}^2a_3 + {a_1}^2a_4 + {a_1}^2a_5 + {a_3}^2a_1 + {a_3}^2a_4 + {a_3}^2a_5 + {a_4}^2a_1 + {a_4}^2a_3 + {a_4}^2a_5 + {a_5}^2a_1 + {a_5}^2a_3 + {a_5}^2a_4 + 2(a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_4a_5 + a_3a_4a_5) + k\alpha\beta I^* > \mu\alpha a_2I^* + \mu\alpha a_3I^* + \mu\alpha a_4I^* + k\beta a_2I^* + k\beta a_3I^* + k\beta a_4I^*$ (4.58)

  Substitusi $I^* = \frac{\varepsilon}{\rho R_0}$ ke persamaan (4.58)

  $\Leftrightarrow {a_1}^2a_3 + {a_1}^2a_4 + {a_1}^2a_5 + {a_3}^2a_1 + {a_3}^2a_4 + {a_3}^2a_5 + {a_4}^2a_1 + {a_4}^2a_3 + {a_4}^2a_5 + {a_5}^2a_1 + {a_5}^2a_3 + {a_5}^2a_4 + 2(a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_4a_5 + a_3a_4a_5) + \frac{\varepsilon}{\rho R_0}(k\alpha\beta) > \frac{\varepsilon}{\rho R_0}(\mu\alpha a_2 + \mu\alpha a_3 + \mu\alpha a_4 + k\beta a_2 + k\beta a_3 + k\beta a_4)$

  Misalkan, $c = {a_1}^2a_3 + {a_1}^2a_4 + {a_1}^2a_5 + {a_3}^2a_1 + {a_3}^2a_4 + {a_3}^2a_5 + {a_4}^2a_1 + {a_4}^2a_3 + {a_4}^2a_5 + {a_5}^2a_1 + {a_5}^2a_3 + {a_5}^2a_4$

  Sehingga,

  $\Leftrightarrow \frac{\rho R_0(c+2(a_1a_3a_4+a_1a_3a_5+a_1a_4a_5+a_3a_4a_5)+\varepsilon(k\alpha\beta)}{\rho R_0} > \frac{\varepsilon}{\rho R_0}(\mu\alpha a_2 + \mu\alpha a_3 + \mu\alpha a_4 + k\beta a_2 + k\beta a_3 + k\beta a_4)$

  $\Leftrightarrow \frac{\rho R_0(c+2(a_1a_3a_4+a_1a_3a_5+a_1a_4a_5+a_3a_4a_5)+\varepsilon(k\alpha\beta)}{\varepsilon(\mu\alpha a_2+\mu\alpha a_3+\mu\alpha a_4+k\beta a_2+k\beta a_3+k\beta a_4)} > 1$

- $b_1 b_2 b_3 - {b_3}^2 - b_1 b_4 > 0$

$\Leftrightarrow (a_1 + a_3 + a_4 + a_5)(a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_1 a_5 + a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_5 - k\beta I^* - \mu\alpha I^*)(a_1 a_3 a_4$
$+ a_1 a_3 a_5 + a_1 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_5 + \mu\alpha I^* a_2 + k\beta I^* a_2 - k\alpha\beta I^* - \mu\alpha I^* a_1$
$- \mu\alpha I^* a_5 - k\beta I^* a_1 - k\beta I^* a_4)$
$- (a_1 a_3 a_4 + a_1 a_3 a_5 + a_1 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_5 + \mu\alpha I^* a_2 + k\beta I^* a_2 - k\alpha\beta I^*$
$- \mu\alpha I^* a_1 - \mu\alpha I^* a_5 - k\beta I^* a_1 - k\beta I^* a_4)^2$
$- (a_1 + a_3 + a_4 + a_5)^2 (a_1 a_3 a_4 a_5 + k\alpha\xi I^* a_2 + k\beta I^* a_2 a_4 + \mu\alpha I^* a_2 a_5$
$- k\alpha\beta I^* a_1 - \mu\alpha I^* a_1 a_5 - k\beta I^* a_1 a_4) > 0$

Misalkan,

$m_1 = (a_1 + a_3 + a_4 + a_5) > 0$

$m_2 = (a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_1 a_5 + a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_5) > 0$

$m_3 = (a_1 a_3 a_4 + a_1 a_3 a_5 + a_1 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_5 + \mu\alpha I^* a_2 + k\beta I^* a_2) > 0$

$m_4 = (a_1 a_3 a_4 a_5 + k\alpha\xi I^* a_2 + k\beta I^* a_2 a_4 + \mu\alpha I^* a_2 a_5) > 0$

Sehingga,

$\Leftrightarrow m_1 (m_2 - k\beta I^* - \mu\alpha I^*)(m_3 - k\alpha\beta I^* - \mu\alpha I^* a_1 - \mu\alpha I^* a_5 - k\beta I^* a_1 - k\beta I^* a_4) -$
$(m_3 - k\alpha\beta I^* - \mu\alpha I^* a_1 - \mu\alpha I^* a_5 - k\beta I^* a_1 - k\beta I^* a_4)^2 - {m_1}^2 (m_4 - k\alpha\beta I^* a_1 - \mu\alpha I^* a_1 a_5 -$
$k\beta I^* a_1 a_4) > 0$

$\Leftrightarrow m_1 m_2 m_3 + I^* (m_1 n_1 + 2 m_3 n_2 + {m_1}^2 n_3) - I^* (m_1 m_2 n_2 + m_1 m_3 (\mu\alpha + k\beta) + 2n_4 + n_5) +$
${m_3}^2 + {m_1}^2 m_4 > 0$

$\Leftrightarrow m_1 m_2 m_3 + I^* (m_1 n_1 + 2 m_3 n_2 + {m_1}^2 n_3) > I^* (m_1 m_2 n_2 + m_1 m_3 (\mu\alpha + k\beta) + 2n_4 + n_5) +$
${m_3}^2 + {m_1}^2 m_4$ (4.59)

Substitusi $I^* = \frac{\varepsilon}{\rho R_0}$ ke persamaan (4.59)

$\Leftrightarrow m_1 m_2 m_3 + \frac{\varepsilon}{\rho R_0} (m_1 n_1 + 2 m_3 n_2 + {m_1}^2 n_3) > \frac{\varepsilon}{\rho R_0} (m_1 m_2 n_2 + m_1 m_3 (\mu\alpha + k\beta) + 2n_4 +$
$n_5) + {m_3}^2 + {m_1}^2 m_4 \Leftrightarrow \frac{\rho R_0 m_1 m_2 m_3 + \varepsilon (m_1 n_1 + 2 m_3 n_2 + {m_1}^2 n_3)}{\rho R_0} >$
$\frac{\varepsilon (m_1 m_2 n_2 + m_1 m_3 (\mu\alpha + k\beta) + 2n_4 + n_5) + \rho R_0 ({m_3}^2 + {m_1}^2 m_4)}{\rho R_0} \Leftrightarrow$
$\frac{\rho R_0 m_1 m_2 m_3 + \varepsilon (m_1 n_1 + 2 m_3 n_2 + {m_1}^2 n_3)}{\rho R_0 ({m_3}^2 + {m_1}^2 m_4) + \varepsilon (m_1 m_2 n_2 + m_1 m_3 (\mu\alpha + k\beta) + 2n_4 + n_5)} > 1$

Dimana,

$n_1 = I^* (\mu\alpha k\beta a_1 + \mu\alpha k\beta a_4 + \mu\alpha k\beta a_5 + \mu^2 \alpha^2 a_5 + \mu\alpha^2 a_1 + \mu\alpha^2 k\beta + k^2 \beta^2 \alpha + k^2 \beta^2 a_1 +$
$k^2 \beta^2 a_4 + k\alpha\beta\mu a_1)$

$n_2 = \mu\alpha a_1 + \mu\alpha a_5 + k\alpha\beta + k\beta a_1 + k\beta a_4$

$n_3 = \mu a_1 a_5 + k\alpha\beta a_1 a_4$

$$n_4 = I^*(\mu\alpha k\beta a_1 a_4 + \mu\alpha k\beta a_1 a_5 + \mu\alpha k\beta a_4 a_5 + \mu\alpha\beta {a_1}^2 + \mu k\beta a_5 \alpha^2 + \mu^2\alpha^2 a_1 a_5 + k\beta a_1 \alpha^2 + k^2\beta^2\alpha a_1 + k^2\beta^2\alpha a_4 + k^2\beta^2 a_1 a_4)$$

$$n_5 = I^*(\mu\alpha a_1 + \mu\alpha a_5 + k\alpha\beta + k\beta a_1 + k\beta a_4)\,.$$

Lampiran 2: Program Simulasi Numerik Model Penyebaran Rumor

1. Program simulasi numerik ketika tidak terjadi penyebaran rumor

Pendefinisian Model

```
function dx=mrumor(t,x)
global epsilon miu k rho alpha beta gamma delta xi teta;
dx=zeros(5,1);
dx(1)=epsilon-(miu*x(1)*x(3))-(k*x(1)*x(4))-(rho*x(1));
dx(2)=(miu*x(1)*x(3))+(k*x(1)*x(4))-
((alpha+beta+gamma+rho)*x(2));
dx(3)=(alpha*x(2))-((delta+xi+rho)*x(3));
dx(4)=(beta*x(2))+(xi*x(3))-((teta+rho)*x(4));
dx(5)=(delta*x(3))+(teta*x(4))+(gamma*x(2))-(rho*x(5));
```

Program Utama

```
clear;
clc;
%Nilai parameter
global epsilon miu k rho alpha beta gamma delta xi teta;
epsilon=0.01;
miu=0.00002;
k=0.00002;
rho=0.0006;
alpha=0.0002;
beta=0.0005;
gamma=0.0001;
delta=0.0001;
xi=0.0001;
teta=0.002;
[t,x]=ode45('mrumor',[0 10000],[9999 0 1 0 0]);

figure(1);
plot(t,x(:,1),'-');
xlabel('waktu(hari)');
```

```
ylabel('populasi');
legend('Ignorant');
title('Populasi Orang yang Tidak Mengetahui Rumor');
grid on

figure(2);
plot(t,x(:,2),'-');
xlabel('waktu(hari)');
ylabel('populasi');
legend('Latent');
title('Populasi Orang yang Terpapar Rumor');
grid on

figure(3);
plot(t,x(:,3),'-');
xlabel('waktu(hari)');
ylabel('populasi');
legend('Rumor Spreader');
title('Populasi Orang yang Menyebar Rumor');
grid on

figure(4);
plot(t,x(:,4),'-');
xlabel('waktu(hari)');
ylabel('populasi');
legend('Debunking');
title('Populasi Orang yang Menyanggah Rumor');
grid on

figure(5);
plot(t,x(:,5),'-');
xlabel('waktu(hari)');
ylabel('populasi');
legend('Stifler');
title('Populasi Orang yang Tidak Menyebarkan Rumor');
grid on

figure(6);
```

```
plot(t,x(:,1),'-',t,x(:,2),'-',t,x(:,3),'-',t,x(:,4),'-
',t,x(:,5),'-');
legend('Ignorant     (I)','Latent     (L)','Rumor     Spreader
(R)','Debunking (D)','Stifler (S)');
title('Populasi saat tidak terjadi penyebaran rumor');
xlabel('waktu(hari)');
ylabel('populasi');
```

2. Program simulasi numerik ketika terjadi penyebaran rumor

Pendefinisian Model

```
function dx=mrumor(t,x)
global epsilon miu k rho alpha beta gamma delta xi teta;
dx=zeros(5,1);
dx(1)=epsilon-(miu*x(1)*x(3))-(k*x(1)*x(4))-(rho*x(1));
dx(2)=(miu*x(1)*x(3))+(k*x(1)*x(4))-
((alpha+beta+gamma+rho)*x(2));
dx(3)=(alpha*x(2))-((delta+xi+rho)*x(3));
dx(4)=(beta*x(2))+(xi*x(3))-((teta+rho)*x(4));
dx(5)=(delta*x(3))+(teta*x(4))+(gamma*x(2))-(rho*x(5));
```

program utama

```
clear;
clc;
%Nilai parameter
global epsilon miu k rho alpha beta gamma delta xi teta;
epsilon=10;
miu=0.00002;
k=0.00002;
rho=0.0005;
alpha=0.0005;
beta=0.0005;
gamma=0.005;
delta=0.0005;
xi=0.00005;
teta=0.0002;
```

```
 [t,x]=ode45('mrumor',[0 10000],[9999 0 1 0 0]);

figure(1);
plot(t,x(:,1),'-');
xlabel('waktu(hari)');
ylabel('populasi');
legend('Ignorant');
title('Populasi Orang yang Tidak Mengetahui Rumor');
grid on

figure(2);
plot(t,x(:,2),'-');
xlabel('waktu(hari)');
ylabel('populasi');
legend('Latent');
title('Populasi Orang yang Terpapar Rumor');
grid on

figure(3);
plot(t,x(:,3),'-');
xlabel('waktu(hari)');
ylabel('populasi');
legend('Rumor Spreader');
title('Populasi Orang yang Menyebar Rumor');
grid on

figure(4);
plot(t,x(:,4),'-');
xlabel('waktu(hari)');
ylabel('populasi');
legend('Debunking');
title('Populasi Orang yang Menyanggah Rumor');
grid on

figure(5);
plot(t,x(:,5),'-');
xlabel('waktu(hari)');
ylabel('populasi');
```

```
legend('Stifler');
title('Populasi Orang yang Tidak Menyebarkan Rumor');
grid on

figure(6);
plot(t,x(:,1),'-',t,x(:,2),'-',t,x(:,3),'-',t,x(:,4),'-
',t,x(:,5),'-');
legend('Ignorant     (I)','Latent     (L)','Rumor     Spreader
(R)','Debunking (D)','Stifler (S)');
title('Populasi saat tidak terjadi penyebaran rumor');
xlabel('waktu(hari)');
ylabel('populasi');
```

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

Nama Lengkap	:	Aryndiah
Tempat Tanggal Lahir	:	1708046024
Alamat	:	Perum Binong Permai Blok J 1 No. 21 RT 05 RW 14, Kel. Binong, Kec. Curug, Kab. Tangerang, Banten.
Nomor HP	:	08973242183
Email	:	aryndiahryn@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

Pendidikan Formal

a) SD Negeri Binong 3 Kabupaten Tangerang lulus tahun 2010
b) SMP Negeri 1 Curug Kabupaten Tangerang lulus tahun 2014
c) SMA Negeri 3 Kabupaten Tangerang lulus tahun 2017
d) UIN Walisongo Semarang

Pendidikan Non Formal

- Tidak ada

Semarang, 10 Desember 2021

Aryndiah

NIM. 1708046024