PENENTUAN PREMI TAHUNAN PADA ASURANSI JOINT LIFE DENGAN HUKUM MORTALITA DE MOIVRE DAN GOMPERTZ

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Sebagian Syarat
Guna Memperoleh Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika

Oleh:

AFIFAH DINA AYU NINGTYAS
NIM. 1708046027

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO SEMARANG

2021

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertandatangan dibawah ini:

Nama	: Afifah Dina Ayu Ningtyas
NIM	: 1708046027
Jurusan	: Matematika

Menyatakan bahwa skripsi yang berjudul:

PENENTUAN PREMI TAHUNAN PADA ASURANSI JOINT LIFE DENGAN HUKUM MORTALITA DE MOIVRE DAN GOMPERTZ

Secara keseluruhan adalah hasil penelitian/ karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 20 Desember 2021

Pembuat Pernyataan,

Afifah Dina Ayu Ningtyas
NIM: 1708046027

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini:

Judul : **Penentuan Premi Tahunan Pada Asuransi Joint Life dengan Hukum Mortalita De Moivre dan Gompertz**

Penulis : Afifah Dina Ayu Ningtyas

NIM : 1708046027

Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang tugas akhir oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 20 Desember 2021

DEWAN PENGUJI

Ketua Sidang,	Sekretaris Sidang,
Seftina Diyah Miasary, M.Sc.	Minhayati Shaleh, M.Sc.
NIP. 19870921 201903 2 010	NIP. 19760426 200604 2 001
Penguji Utama I,	Penguji Utama II,
Ahmad Aunur Rohman, M.Pd.	Budi Cahyono, S.Pd., M.Si.
NIDN. 2015128401	NIP. 19801215 200912 1 003
Pembimbing I,	Pembimbing II,
Emy Siswanah, M.Sc.	Seftina Diyah Miasary, M.Sc.
NIP. 19870202 201101 2 014	NIP. 19870921 201903 2 010

KEMENTERIAN AGAMA FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI UIN WALISONGO SEMARANG REPUBLIK INDONESIA

NOTA DINAS

Semarang, 20 Desember 2021

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum. wr. wb.

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	: PENENTUAN PREMI TAHUNAN PADA ASURANSI JOINT LIFE DENGAN HUKUM MORTALITA DE MOIVRE DAN GOMPERTZ
Nama	: Afifah Dina Ayu Ningtyas
NIM	: 1708046027
Jurusan	: Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.
Wassalamu'alaikum. wr. wb.

Pembimbing I,

Emy Siswanah, M.Sc
NIP. 198702022011012014

NOTA DINAS

Semarang, 20 Desember 2021

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu‘alaikum. wr. wb.

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	: PENENTUAN PREMI TAHUNAN PADA ASURANSI JOINT LIFE DENGAN HUKUM MORTALITA DE MOIVRE DAN GOMPERTZ
Nama	: Afifah Dina Ayu Ningtyas
NIM	: 1708046027
Jurusan	: Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.
Wassalamu‘alaikum. wr. wb.

Pembimbing II,

Seftina Diyah Miasary, M.Sc
NIP. 1987092120190320

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur kehadirat Allah SWT yang sudah memberikan limpahan hidayah, rahmat, serta karunia-Nya dan sholawat penulis haturkan kepada Rasululllah Nabi Muhammad SAW sehingga penulis dapat mengerjakan skripsi hingga selesai guna memenuhi persyaratan mendapatkan gelar Sarjana Matematika.

Penyelesaian skripsi ini menjumpai banyak hambatan dan memerlukan proses panjang, namun berkat adanya bimbingan, bantuan, do'a, dan peran banyak pihak akhirnya skripsi ini terselesaikan. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Imam Taufiq, M.Ag., selaku Rektor UIN Walisongo Semarang.
2. Dr. H. Ismail, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi.
3. Emy Siswanah, M.Sc., selaku Ketua Jurusan Matematika sekaligus Pembimbing I yang sudah membimbing, arahan serta memberi izin penelitian di penyusunan skripsi.
4. Aini Fitriyah, M.Sc., selaku wali dosen penulis.
5. Seftina Diyah Miasary, M.Sc., selaku Pembimbing II yang

sudah bersedia meluangkan tenaga, waktu, pikiran dan memberi arahan serta bimbingan dengan ketekunan, kesederhanaan, dan kesabaran selama skripsi ini disusun.

6. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang yang telah mengarahkan dan membantu penyusunan skripsi.
7. Ayahanda Tuhri dan ibunda Purliatun selaku kedua orang tua penulis atas do'a, cinta, kasih sayang, semangat, bimbingan, dan pengorbanan yang tidak dapat tergantikan oleh apapun.
8. Kakakku Lailatul Istianah, S.Pd dan Ahmad Musabbikhin yang selalu memberikan arahan, masukan dan kritikan sehingga skripsi ini terselesaikan.
9. Saudara-saudaraku kos Pak Slamet terkhusus Ika Rila Yulianti, S.Sos., Ainun Na'imah, S.Sos., Siti Arifah, Atilah Tala yang telah memberikan semangat, motivasi dan do'a sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
10. Sahabat-sahabat terbaik keluarga besar Matematika angkatan 2017 terkhusus Winang Dwi Afitasari dan Dita Aulia Wijayanti yang telah menjadi teman belajar, memberikan kenangan terindah, memberikan semangat dan pengalaman berharga.
11. Sahabat-sahabat terbaik Keluarga Mahasiswa Batang

UIN Walisongo Semarang angkatan 2017 terkhusus Laily Qodriyati, Nurul Istikomah, Kafita Sari, S.Sos., Anisatul Hidayah, Amirul Balad, Azhar Fuadi, Zaenal Mustofa, Uqiyatul Lutfi Ali, S.Pd., dan Shaiful Bahri yang telah memberikan semangat dan motivasi.

12. Sahabat-sahabat terbaik Forum Komunikasi Mahasiswa Batang Indonesia terkhusus Muhammad Muntaha, S.P. dan Meri One I Gusti Al Atho yang telah memberikan pengalaman berharga sehingga tercipta semangat dan motivasi.
13. Tim KKN MIT DR - XI Posko 61.
14. Roissatul Ulum, S.Sos. selaku saudara yang telah menemani, memberikan semangat dan motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
15. Hardian Eka Sukmawati selaku sahabat yang telah memberikan motivasi dalam proses penyusunan skripsi ini.
16. Khaedar Lafid Daeni yang dengan sabar memberi semangat dan selalu mendukung penulis dalam penyelesaian skripsi ini.
17. Seluruh pihak yang sudah memberikan semangat, do’a, dan bantuan sehingga skripsi ini bisa selesai.

Penulis sadar jika skripsi ini jauh dari kesempurnaan dan masih banyak kekurangan. Saran serta kritik yang membangun sangat diharapkan agar skripsi ini menjadi semakin baik. Semoga skripsi ini bisa bermanfaat dan memperoleh ridho-Nya.

Amin Yarabbal 'Aalamin.

Semarang, 20 Desember 2021

Penulis

ABSTRAK

Judul : Penentuan Premi Tahunan Pada Asuransi *Joint Life* dengan Hukum Mortalita De Moivre dan Gompertz
Nama : Afifah Dina Ayu Ningtyas
NIM : 1708046027

Pada penelitian ini dibahas mengenai bagaimana cara menentukan premi tahunan untuk status *joint life*. Salah satu faktor yang dapat dianalisa dalam menentukan premi adalah laju tingkat kematian (mortalita). Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kuantitatif dengan mengestimasi parameter-parameter dari hukum Mortalita De Moivre dan Gompertz pada data sekunder berupa Tabel Mortalita Indonesia (TMI III) tahun 2011 untuk laki-laki dan perempuan.

Perhitungan ini menghasilkan suatu rumus untuk menghitung premi tahunan asuransi *joint life* berdasarkan hukum mortalita De Moivre dan Gompertz. Dimulai dengan mengestimasi parameter-parameter dari hukum mortalita Gompertz untuk Tabel Mortalita Indonesia (TMI III) tahun 2011 menggunakan metode *maximum likelihood estimation*, kemudian menghitung peluang hidup gabungan, *APV* manfaat kematian, *APV* anuitas jiwa kontinu dilanjutkan dengan menghitung premi tahunan asuransi *joint life.* Nilai premi tahunan pada asuransi *joint life* dengan hukum mortalita De Moivre dan Gompertz untuk simulasi asuransi jiwa berjangka n = 10 tahun dengan usia x (suami) 28 tahun dan y (istri) 25 tahun, besar manfaat kematian (R) Rp. 50.000.000, tingkat

suku bunga 3,50% dengan Tabel Mortalita Indonesia (III) tahun 2011. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa nilai premi tahunan asuransi *joint life* berdasarkan hukum mortalita Gompertz lebih besar daripada nilai premi tahunan asuransi *joint life* berdasarkan hukum mortalita De Moivre.

Kata Kunci: Asuransi Jiwa, Joint Life, Hukum Mortalita, Metode Maximum Likelihood Estimation, Premi Tahunan.

TRANSLITERASI

Penulisan transliterasi huruf-huruf Arab-Latin dalam skripsi ini berpedoman pada (SKB) Menteri Pendidikan dan Kebudayaan dan Mentri Agama Republik Indonesia, No. 0543b/U/1987 dan No. 158 Tahun 1987, seperti yang ada di buku Pedoman Transliterasi Bahasa Arab (*A Guide to Arabic Tranliterastion).*

Daftar transliterasi huruf latin dan huruf bahasa arab danhalaman berikut:

Huruf Arab	Nama	Huruf Latin
ا	Alif	A
ب	Ba	B

ت	Ta	T
ث	Tsa	Ts
ج	Jim	J
ح	Ha	H
خ	Kha	Kh
د	Dal	D
ذ	Dzal	Dz
ر	Ra	R
ز	Za	Z
س	Sin	S

ش	Syin	Sy
ص	Shad	Sh
ض	Dlad	Dl
ط	Tha	Th
ظ	Zha	Zh
ع	‘Ain	‘
غ	Ghain	Gh
ف	Fa	F
ق	Qof	Q
ك	Kaf	K

ل	Lam	L
م	Mim	M
ن	Nun	N
و	Wau	W
ـه	Ha	H
ء	Hamzah	ʻ
ي	Ya	Y

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Menurut Bowers, dkk. (1997), asuransi merupakan suatu perjanjian dan pertanggungan antara dua belah pihak yang mempunyai kewajiban masing-masing. Pihak pertama mempunyai kewajiban membayar premi dan pihak kedua mempunyai kewajiban menjamin sepenuhnya kepada pembayar premi jika terjadi suatu hal yang menimpa pihak pertama ataupun benda miliknya sesuai dengan sebuah perjanjian yang telah disetujui. Asuransi jiwa merupakan salah satu jenis asuransi yang mempunyai tujuan menanggung seseorang dari kerugian finansial tanpa terduga karena kematian atau hidup yang terlalu lama, jaminan berupa manfaat akan diberikan kepada ahli waris jika terjadi kematian pada pihak tertanggung.

Dalam Islam tidak terdapat ayat Al-Qur’an yang secara tegas menjelaskan tentang praktek asuransi. Walau demikian, terdapat ayat-ayat Al-Qur’an yang di dalamnya terkandung nilai dasar praktek asuransi, seperti membuat perencanaan untuk menghadapi masa depan. Islam mengakui bahwa segala bentuk rezeki dan musibah berasal dari Allah SWT. Hal tersebut tidak dapat ditolak, namun Allah SWT memerintahkan umatnya untuk membuat perencanaan dalam menghadapi kemungkinan terburuk pada masa yang akan datang. Allah berfirman dalam surat Al-Hasyr ayat 18:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ ٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ وَلْتَنظُرْ نَفْسٌ مَّا قَدَّمَتْ لِغَدٍ ۖ

وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ خَبِيرٌۢ بِمَا تَعْمَلُونَ

Artinya: *"Hai orang-orang yang beriman bertaqwalah kepada Allah dan hendaklah setiap diri memperhatikan apa yang telah diperbuat untuk hari esok (masa depan) dan bertaqwalah kamu kepada Allah. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui apa yang engkau kerjakan".*

Andiraja (2015), menyebutkan di Indonesia terdapat dua jenis asuransi jiwa, yaitu asuransi jiwa gabungan *(multiple life)* dan asuransi jiwa perorangan *(single life)*. Pada jenis asuransi *single life*, perusahaan asuransi memberi perlindungan ke seseorang tertanggung. Pada asuransi *multiple life*, perusahaan asuransi memberikan perlindungan atas lebih dari satu pihak tertanggung. Jenis asuransi *multiple life* salah satu jenisnya yaitu asuransi *joint life* berjangka, merupakan asuransi jiwa gabungan dengan jangka waktu perlindungan hingga n tahun dan santunan/ uang manfaat diberikan apabila terdapat seseorang tertanggung meninggal di masa perlindungan.

Usaha perasuransian merupakan lembaga keuangan nonbank yang memiliki peranan penting di masyarakat, salah satunya sebagai lembaga penghimpun dana yang bersumber dari penerimaan premi asuransi dan menyalurkannya dengan klaim. Premi diartikan sebagai sejumlah uang yang harus dibayarkan di tiap bulan oleh tertanggung karena ikut dalam asuransi. Besar kecilnya premi yang wajib dibayarkan sudah ditentukan oleh perusahaan asuransi dengan menyesuaikan kondisi dari tertanggung. Menurut Achdijat (1993), pembayaran premi dilakukan bulanan, triwulanan, kwartalan, semesteran atau tahunan. Premi tahunan dibayarkan di tiap awal tahun, jumlahnya bisa berubah-ubah atau sama di tiap tahun. Pada penentuan premi tahunan membutuhkan perhitungan dari *Actuarial Present Value* (*APV*) nilai manfaat kematian serta *APV* anuitas jiwa yang dipengaruhi oleh tingkat suku bunga, peluang hidup, dan peluang kematian pada periode tertentu.

Penentuan harga premi dalam asuransi merupakan sesuatu yang rawan dan harus sesuai dengan operasional perusahaan dan pasaran. Oleh karena itu, diperlukan analisa pada beberapa faktor di dalamnya. Faktor yang dapat dianalisa dalam penentuan harga premi adalah laju tingkat kematian (mortalita), tingkat suku bunga, pajak, uang santunan/ manfaat. Laju tingkat kematian (mortalita) suatu populasi yang digambarkan dalam bentuk hukum mortalita. Laju tingkat kematian juga dapat ditentukan peluang hidup serta peluang kematian melalui fungsi distribusinya.

Dari pembahasan diatas dapat kita pahami bahwa laju tingkat kematian suatu populasi dapat dianalisa dalam penentuan premi tahunan. Asuransi *joint life* banyak dipilih oleh suatu keluarga karena pada jenis asuransi ini pembayaran preminya hingga kematian pertama dari salah satu pihak dari dua pihak tertanggung serta di saat itu perusahaan asuransi membayarkan sejumlah uang manfaat. Premi tahunan di asuransi *joint life* dianalisa menggunakan hukum mortalita untuk memberikan gambaran terhadap laju tingkat kematian suatu populasi melalui tabel mortalita.

Hukum mortalita De Moivre dan Gompertz dapat digunakan untuk menggambarkan laju tingkat kematian di suatu populasi. Berdasarkan Bowers, dkk (1997), kegunaan hukum adalah memberikan gambaran terhadap laju tingkat kematian suatu populasi karena hasil pendekatannya berbentuk kontinu sehingga praktis penggunaannya sertadapat dikaji berbagai fenomena di suatu populasi. Hukum mortalita De Moivre adalah suatu model kelangsungan hidup yang diterapkan dalam ilmu aktuaria dan merupakan hukum kematian sederhana berdasarkan fungsi kelangsungan hidup linier. Sedangkan hukum mortalita Gompertz adalah suatu model kelangsungan hidup yang menyatakan bahwa angka kematian manusia adalah jumlah dari komponen yang bergantung pada usia.

Hukum mortalita De Moivre dan Gompertz memiliki kesamaan yaitu membahas tentang tingkat kematian suatu populasi, namun keduanya juga memiliki perbedaan. Pada hukum mortalita De Moivre bentuk peluang hidupnya linier sedangkan pada hukum mortalita Gompertz bentuk peluang hidupnya eksponensial. Oleh sebab itu, dalam penelitian ini akan membandingkan kedua hukum mortalita tersebut dalam penentuan besarnya premi asuransi *joint life*.

Penulis menemukan penelitian terdahulu yang dilakukan oleh Mukti (2019) yang berjudul "Penentuan Premi Tahunan Asuransi Joint Life Berjangka Berdasarkan Hukum Mortalita Gompertz dan Hukum Mortalita

Makeham". Hasil dari penelitian tersebut menyatakan pada kedua hukum mortalita, nilai premi tahunan menghasilkan nilai berbeda hal ini dikarenakan karakteristiknya memiliki perbedaan percepatan mortalita dari kedua hukum mortalita. Penelitian lainnya dilakukan oleh Lumbantoruan (2019) yang berjudul "Menentukan Premi Asuransi Joint Life Secara Diskrit dan Kontinu Berdasarkan Hukum Mortalitas De Moivre dan Tabel Mortalitas Indonesia 2011". Hasil dari penelitian tersebut menyatakan apabila di sebuah keluarga, dan lebih dari satu orang yang ingin diasuransikan maka nilai premi yang dibayarkan menjadi semakin kecil apabila menggunakan asuransi jiwa *joint life.*

Hal inilah yang mendorong penulis melakukan penelitian berjudul "Penentuan Premi Tahunan pada Asuransi Joint Life dengan Hukum Mortalita De Moivre dan Gompertz". Diharapkan hasil dari penelitian ini dapat dijadikan sebagai acuan pertimbangan perusahaan asuransi dalam penentuan besarnya premi.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana penentuan premi tahunan asuransi *joint life*

berjangka berdasarkan hukum mortalita De Moivre dengan manfaat dibayarkan segera setelah kematian (kontinu)?

2. Bagaimana penentuan premi tahunan asuransi *joint life* berjangka berdasarkan hukum mortalita Gompertz dengan manfaat dibayarkan segera setelah kematian (kontinu)?

C. Batasan Masalah

Pembahasan penentuan premi tahunan pada asuransi *joint life* dengan hukum mortalita De Moivre dan Gompertz tentunya memiliki banyak faktor yang mempengaruhi, oleh karena itu diberikan batasan pembahasan agar tidak melenceng dari rumusan masalah, batasan yang diberikan dalam masalah ini antara lain

1. Penentuan premi tahunan pada asuransi *joint life* berjangka dengan hukum mortalita De Moivre dan Gompertz.

2. Pada premi asuransi jiwa, faktor riwayat kesehatan dan pekerjaan diabaikan.

3. Usia pemegang polis (tertanggung) dan jangka waktu pembayaran.

4. Polis asuransi jiwa yang melibatkan dua tertanggung, dimana manfaat dibayarkan segera setelah kematian (kontinu).

5. Besar manfaat.

6. Besar tingkat suku bunga.

D. Tujuan Penelitian

1. Untuk mengetahui bagaimana penentuan premi tahunan asuransi *joint life* berjangka berdasarkan hukum mortalita De Moivre dengan manfaat dibayarkan segera setelah kematian (kontinu).

2. Untuk mengetahui bagaimana penentuan premi tahunan asuransi *joint life* berjangka berdasarkan hukum mortalita Gompertz dengan manfaat dibayarkan segera setelah kematian (kontinu).

E. Manfaat Penelitian

1. Bagi Penulis

   Diharapkan penelitian ini dapat menambah pengetahuan tentang penentuan premi tahunan asuransi *joint life* dengan hukum mortalita De Moivre dan Gompertz.

2. Bagi Lembaga

Diharapkan penelitian ini dapat dijadikan kepustakaan.

3. Bagi Peneliti Selanjutnya

   Diharapkan penelitian ini bisa dijadikan referensi.

BAB II

LANDASAN TEORI

A. Kajian Pustaka

Dalam penulisan penelitian ini, penulis telah menelaah dan mengkaji jurnal-jurnal, skripsi terdahulu dan karya ilmiah lainnya untuk mendukung penelitian tugas akhir ini. Karya ilmiah yang telah ada akan memberi gambaran mengenai teori-teori serta objek yang digunakan oleh penulis dalam penelitian ini. Tujuan dari pengkajian ini adalah terhindar dari kesamaan karya ilmiah lainnya. Contoh-contoh penelitian yang telah dilakukan sebelumnya adalah sebagai berikut:

1. Aprijon, Rahmawati, Irma Suryani, Endang Lily dalam Seminar Nasional Teknologi Informasi Komunikasi dan Industri (SNTIKI-10) dengan judul “Premi Tahunan

Asuransi Jiwa Seumur Hidup dengan Hukum De Moivre". Tujuan penelitian yaitu menghitung besar kecilnya premi tahunan asuransi jiwa seumur hidup memakai hukum De Moivre. Hasil yang didapatkan dari penelitian ini adalah besarnya premi tahunan peserta asuransi jiwa seumur hidup dengan hukum De Moivre lebih kecil dibandingkan dengan besarnya premi tahunan pada data. Penyebab hal ini karena perusahaan asuransi memutuskan besar keclnya premi yang wajib dibayarkan tertanggung perusahaan dengan mempertimbangkan riwayat kesehatan, tingkat gaji, serta pekerjaan, tetapi hukum De Moivre tidak memandang atau tidak memperdulikan hal tersebut.

2. Ihsan Kamal, Dodi Devianto, dan Ferra Yanuar dalam Jurnal Matematika UNAND dengan judul "Penentuan Premi Tahunan Pada Asuransi *Joint Life* Dengan Menggunakan Anuitas *Reversionary*". Tujuan penelitian ini adalah menghitung besar premi tahunan asuransi jiwa *joint life* menggunakan anuitas *reversionary*. Hasil dari penelitian ini adalah pembayaran premi pada kontrak asuransi *joint life* akan dilanjutkan oleh salah satu pihak tertanggung ketika pihak pertama atau kedua meninggal dunia, dengan bergantung pada usia, besar

uang pertanggungan dan suku bunga.

3. Rado Yendra dan Elsa Tria Noviadi dalam Jurnal Sains Matematika dan Statistika dengan judul "Perbandingan Estimasi Parameter Pada Distribusi Eksponensial dengan Menggunakan Metode *Maximum Likelihood* dan Metode *Bayesian*". Tujuan penelitian ini adalah membandingkan perhitungan estimasi parameter pada distribusi eksponensial dengan metode *maximum likelihood* dan metode *bayesian.* Hasil dari penelitian ini adalah metode *maximum likelihood* merupakan metode yang terbaik untuk mengestimasikan parameter distribusi eksponensial.

Pada penelitian ini penulis menggunakan asuransi *joint life* berjangka karena jenis asuransi ini dianggap lebih banyak dipilih oleh suatu keluarga. Kemudian digunakan hukum mortalita De Moivre dan Gompertz karena keduanya memiliki kesamaan yaitu membahas tentang tingkat kematian suatu populasi, juga memiliki perbedaan yaitu pada hukum mortalita De Moivre bentuk peluang hidupnya linier sedangkan pada hukum mortalita Gompertz bentuk peluang hidupnya eksponensial. Kedua hukum mortalita tersebut dapat digunakan dalam penentuan dan perbandingan besarnya premi tahunan asuransi *joint life*.

Kemudian digunakan metode *maximum likelihood estimation* untuk menentukan nilai parameter pada hukum mortalita dalam menentukan nilai premi yang didekati berdasarkan hukum mortalita De Moivre dan Gompertz.

Perbedaan penelitian ini dengan jurnal pertama adalah jenis asuransinya, kemudian sama-sama menggunakan hukum De Moivre. Perbedaan penelitian ini dengan jurnal kedua adalah metode yang digunakan, kemudian sama-sama menghitung premi tahunan asuransi *joint life*. Perbedaan penelitian ini dengan jurnal ketiga adalah objek yang dihitung, kemudian sama-sama menggunakan metode *maximum likelihood estimation*.

B. Kajian Teori

A. Peluang Hidup

Bowers, dkk (1997), memisalkan X adalah peubah acak kontinu yang menyatakan usia seseorang dari lahir sampai meninggal. Apabila $F_x(x)$ merupakan fungsi distribusi dari X maka

$$F_x(x) = P_r(X \leq x), x \geq 0 \qquad (2.1)$$

yang berarti peluang bahwa seseorang akan meninggal sebelum mencapai usia x. Kemudian didefinisikan s(x) sebagai peluang yang menyatakan seseorang akan bertahan hidup mencapai usia x, yaitu

$$s(x) = P_r(X>x)\ , x \geq 0 \qquad (2.2)$$

atau dapat juga ditulis

$$s(x) = 1 - F_x(x)\ , x \geq 0 \qquad (2.3)$$

Menurut Effendie (2012), jarang sekali ditemukan bayi yang baru lahir langsung diikutsertakan dalam asuransi jiwa, biasanya orang berusia (x > 0) lah yang mengikuti program asuransi tersebut. Kemudian peluang seseorang berusia x tahun akan meninggal pada usia antara x dan z, dimana z > x dapat dituliskan

$$P_r(x<X\leq z|X>x) \qquad (2.4)$$

dengan

$$P_r(x<X\leq z) = F_x(z) - F_x(x) = s(x) - s(z)$$

Pada status *joint life*, peubah acak T(xy) menyatakan usia lahir sampai salah satu dari (x) dan (y) meninggal. Menurut Sertdemir (2013), waktu sisa hidup untuk status *joint life* dinotasikan dengan

$$T(xy) = \min\{T(x), T(y)\}$$

Fungsi distribusi dari T(xy) dapat dinyatakan dengan $F_{T(xy)}$ dan didefinisikan dengan

$F_{T(xy)} = P(T(xy) \leq t), t \geq 0$ (2.5)

Peluang hidup untuk status *joint life* dapat dinyatakan dengan

$S_{T(xy)}(t) = 1 - F_{T(xy)}$

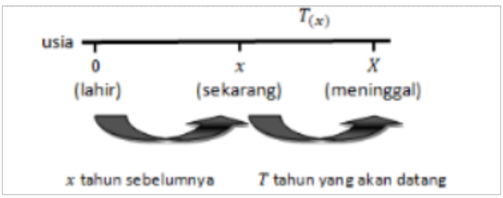
$= P(T(xy) > t), t > 0$ (2.6)

$S_{T(xy)}(t)$ menyatakan peluang seseorang berusia x dan y akan hidup hingga x + t dan y + t tahun.

B. Fungsi Waktu Sisa Hidup

Fungsi waktu sisa hidup dilambangkan dengan peubah acak kontinu T(x), dengan (x) melambangkan usia seseorang hidup dan X melambangkan usia seseorang meninggal pada saat mengikuti produk asuransi jiwa, dinyatakan sebagai

$T(x) = X - x$ (2.7)



Gambar 2.1 Grafik Waktu Sisa Hidup T(x)

Dengan notasi peluangnya

${}_tq_x = P(T(x) \leq t), t \geq 0$ (2.8)

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = P(T(x)>t),\ t \geq 0 \qquad (2.9)$$

Maka fungsi distribusi dari T(x) yaitu

$$\begin{aligned}
F_{T(x)}(x) &= P(T(x)\leq t|X>x) \\
&= P(X - x \leq t|X > x) \\
&= P(x<X<x+t|X>x) \\
&= \frac{P(X\leq x+t)-P(X\leq x)}{P(X\leq x)} \\
&= \frac{F_x(x+t)-F_x(x)}{1-F_x(x)} \\
&= \frac{(1-s(x+t))-(1-s(x))}{s(x)} \\
&= \frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)} \\
&= 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}
\end{aligned}$$

$$F_{T(x)}(x) = {}_tq_x \qquad (2.10)$$

maka,

$$\begin{aligned}
P(T(x)>t) &= 1 - P(T(x)\leq t) \\
&= 1 - \left(1-\frac{s(x+t)}{s(x)}\right) \\
&= \frac{s(x+t)}{s(x)} \\
&= {}_tp_x \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Dalam ilmu aktuaria, ${}_tq_x$ menyatakan peluang seseorang berusia x tahun akan meninggal sebelum mencapai $x + t$ tahun. Sedangkan ${}_tp_x$ menyatakan peluang seseorang berusia x tahun akan hidup sampai $x + t$ tahun.

Menurut Sertdemir (2013), fungsi distribusi T(xy) menyatakan peluang berakhirnya status *joint life* yaitu saat terjadi kematian dari salah satu pihak atau keduanya kemudian dinotasikan dengan ${}_tq_{xy}$. Peubah acak dari waktu sisa hidup *joint life* $\{T(xy)\leq t\}$ adalah gabungan dari $\{T(x)\leq t\}$ dan $\{T(y)\leq t\}$ yang merupakan dua kejadian tak saling terpisah.

$$\{T(xy)\leq t\} = \{T(x)\leq t\} \cup \{T(y)\leq t\}$$

Sehingga fungsi distribusi T(xy) adalah:

$$\begin{aligned} F_{T(xy)}(t) &= P(T(xy)\leq t) \\ &= P(\min\{T(x),T(y)\}\leq t) \\ &= P(T(x)\leq t \text{ atau } T(y)\leq t) \\ &= P(T(x)\leq t) + P(T(y)\leq t) \\ &\quad -P(T(x)\leq t \text{ dan } T(y)\leq t) \end{aligned} \qquad (2.12)$$

Dari cara yang sama pada (2.8) dan (2.9) diperoleh

$$ {}_tq_{xy} = {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_x . {}_tq_y \qquad (2.13)$$

Kelangsungan hidup *joint life* memerlukan semua komponen kehidupan pada t tahun $\{T(xy)>t\}$, dan berpotongan atas dua kejadian saling bebas $\{T(x)>t\}$ dan $\{T(y)>t\}$.

$$\{T(xy)>t\} = \{T(x)>t\} \cap \{T(y)>t\}$$

Kemudian T(xy) yang merupakan fungsi kelangsungan hidup untuk status *joint life* dan dinotasikan ${}_tp_{xy}$ diperoleh dengan

$$\begin{aligned}
S_{T(xy)}(t) &= P(T(xy)>t) \\
&= P(\{T(x)>t\} \text{ dan } \{T(y)>t\}|X>x, Y>y) \\
&= P(T(x)>t|X>x)P(T(y)>t|Y>y) \\
&= \frac{P(\{X>x+t\}\cap\{X>x\})P(\{Y>y+t\}\cap\{Y>y\})}{P(X>x)P(Y>y)} \\
&= \frac{P(X>x+t)}{P(X>x)} \cdot \frac{P(Y>y+t)}{P(Y>y)} \\
&= \frac{S_x(x+t)}{S_x(x)} \cdot \frac{S_y(y+t)}{S_y(y)} \\
&= {}_tp_x \cdot {}_tp_y \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

C. Percepatan Kematian (*Force of Mortality*)

Menurut Bowers, dkk (1997), peluang bersyarat bayi yang baru lahir akan meninggal antara usia x dan z (mengingat kelangsungan hidup sampai usia x) adalah

$$\begin{aligned}
P_r(x<X\leq z|X>x) &= \frac{F_x(z)-F_x(x)}{1-F_x(x)} \\
&= \frac{s(x)-s(z)}{s(x)} \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Kemudian Effendie (2012), memisalkan $z = x + \Delta x$ maka akan diperoleh

$P_r(x<X\leq z=x+\Delta x|X>x)$

$$= \frac{F_x(x+\Delta x)-F_x(x)}{1-F_x(x)} \qquad (2.16)$$

Sesuai dengan definisi limit diketahui bahwa

$$f_x(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_x(x+\Delta x)-F_x(x)}{\Delta x} \qquad (2.17)$$

Maka dengan persamaan (2.17) diperoleh

$$P_r(x<X\leq z=x+\Delta x|X>x) = \frac{f_x(x)}{1-F_x(x)}\Delta x$$

$$= \frac{f_x(x)}{s(x)}\Delta (2.18a)$$

Bagian dari persamaan (2.18a) yang kemudian dikenal sebagai percepatan kematian (*force of mortality*) dinotasikan dengan

$$\mu(x) = \frac{f_x(x)}{s(x)} \qquad (2.18b)$$

Sebelumnya telah diketahui bahwa

$$f_x(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}(1-s(x)) = -s^{'}(x)$$

Sehingga persamaan (2.18b) dapat dituliskan

$$\mu(x) = \frac{-s^{'}(x)}{s(x)} \qquad (2.19)$$

Dimana $\mu(x) \geq 0$ karena F(x) dan s(x) adalah peluang yang tidak mungkin bernilai negatif. Kemudian dengan pendifferensialan persamaan (2.19) dapat dituliskan dengan

$$-\mu(x) = d \log (s(x)) \tag{2.20}$$

Oleh karena

$$F_x(x) = \int_0^x f_x(y)dy$$

Sehingga apabila persamaan (2.20) diintegralkan

$$-\int \mu(x) = \int d \log (s(x))$$

$$-\int_0^x \mu(y)dy = \int_0^x d \log (s(y))$$

$$s(x) = e^{-\int_0^x \mu(y)dy} \tag{2.21}$$

Kemudian persamaan (2.20) disubstitusikan ke persamaan (2.21) maka

$${}_np_x = \frac{s(x+n)}{s(x)} = \frac{e^{-\int_0^{x+n} \mu(y)dy}}{e^{-\int_0^{x} \mu(y)dy}}$$

$$= e^{-\int_0^{x+n} \mu(y)dy}$$

Dimana saat x = 0 akan mengakibatkan

$${}_np_x = e^{-\int_0^n \mu(x+s)ds} \tag{2.22}$$

Berdasarkan persamaan (2.1) dan (2.8)

$$f_{T(x)}(x) = P(T(x) \leq t) = {}_tq_x$$

Sehingga

$$f_{T(x)}(t) = \frac{d}{dt}{}_tq_x$$

$$= \frac{d}{dt}\left[1-e^{-\int_0^t \mu(x+s)ds}\right]$$

$$= e^{-\int_0^t \mu(x+s)ds}\mu(x+s)$$

Dengan demikian didapatkan

$$f_{T(x)}(t) = {}_tp_x \,.\ \mu(x+t),\ t \geq 0 \qquad (2.23)$$

Sedangkan fungsi densitas T(xy) untuk *joint life* adalah

$$f_{T(xy)}(t) = \frac{d}{dt}F_{T(xy)}(t)$$

$$= -\frac{d}{dt}S_{T(xy)}(t)$$

$$= -\frac{d}{dt}{}_tp_{xy}$$

$$= -\frac{d}{dt}{}_tp_x . -\frac{d}{dt}{}_tp_y$$

$$= \left(\frac{d}{dt}{}_tp_x\right){}_tp_y + \left(\frac{d}{dt}{}_tp_y\right){}_tp_x$$

$$= -\left(-{}_tp_x\mu(x+t)\right){}_tp_y$$
$$+\left(-{}_tp_y\mu(y+t)\right){}_tp_x$$

$$= {}_tp_x\mu(x+t){}_tp_y + {}_tp_y\mu(y+t){}_tp_x$$

$$= {}_tp_x{}_tp_y\left(\mu(x+t)+\mu(y+t)\right)$$

$$= {}_tp_{xy}\left(\mu(x+t)+\mu(y+t)\right)$$

$$= \underbrace{{}_tp_{xy}}_{\textit{survival function}}\ \underbrace{\left(\mu(x+t)+\mu(y+t)\right)}_{\textit{force function}} \qquad (2.24)$$

Force of mortality dari T(xy) dinotasikan sebagai $\mu_{T(xy)}(t)$ atau $\mu_{xt}(t)$ dan dapat diturunkan dengan cara yang sama pada *force of mortality* untuk hidup tunggal.

$$\mu_{T(xy)}(t) = \mu_{xt}(t) = \frac{f_{T(x)}(t)}{1-F_{T(x)}(t)} = \frac{f_{T(x)}(t)}{S_{T(x)}(t)}$$
$$= \frac{{}^{t}p_{xy}(\mu(x+t)+\mu(y+t))}{{}^{t}p_{xy}}$$
$$= \mu(x + t) + \mu(y + t) \qquad (2.25)$$

Sehingga, *force of mortality* untuk status *joint life* dengan asumsi saling bebas $\mu_{x+t:y+t} = \mu(x + t) + \mu(y + t)$.

3. **Tabel Mortalita**

Effendie (2012), memisalkan ada sejumlah bayi baru lahir yang umurnya 0 tahun. Bayi tersebut selanjutnya dinyatakan l_0, bayi yang sudah berusia 1 tahun kemudian dinyatakan l_1 sehingga didapatkan

$d_0=l_0-l_1$

d_0 adalah bayi berusia 0 tahun yang meninggal dibawah usia 1 tahun. Bayi berusia 1 tahun hingga berusia 2 tahun dinyatakan l_2, kemudian bayi yang meninggal sebelum berusia 2 tahun dinyatakan d_1 yang mana

$$d_1 = l_1 - l_2$$

Proses ini bisa dilanjutkan sampai seluruh orang di kelompok tersebut meninggal, maka didapatkan

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

d_x menyatakan jumlah orang berusia x tahun yang meninggal sebelum mencapai usia (x + 1) tahun, kemudian l_x menyatakan jumlah orang yang berusia x tahun. Data-data ini terdapat di tabel mortalita.

4. Hukum Mortalita

Untuk mendalilkan bentuk analitik mortalita atau peluang hidup, digunakan pendekatan hukum mortalita karena berisi formula sederhana yang bisa menerangkan suatu fenomena dengan praktis, efisien, serta lebih mudah mengestimasi parameter fungsi dari data mortalita.

Tabel 2.1 Beberapa contoh hukum mortalita dan penemunya

Penemu	μ_x	s(x)	Batasan
De Moivre (1729)	$(\omega-x)^{-1}$	$1-\frac{x}{\omega}$	$0 \leq x < \omega$
Gompertz (1825)	Bc^x	$\exp\left[-\frac{B}{\log c}.(c^x-1)\right]$	$B > 0$, $c > 1$, $x \geq 0$
Makeham	$A + Bc^x$	$\exp\left[-A_x-\frac{B}{\log c}(c^x-1\right.$	$B > 0$, $A \geq -B$, $c > 1$,

(1860)			$x \geq 0$
Weibull (1939)	kx^n	$\exp\left[-\frac{kx^{n+1}}{n+1}\right]$	$k > 0$, $n > 0$, $x \geq 0$

Effendie (2012).

Berdasarkan hukum mortalita tersebut, hukum mortalita De Moivre dan Gompertz yang akan digunakan.

5. Hukum Mortalita De Moivre

Hukum De Moivre berasal dari fungsi kepadatan peluang, yang didapatkan dari distribusi seragam (uniform). Menurut Finan (2011), hukum De Moivre pada awalnya ditemukan pada tahun 1724 oleh ilmuwan bernama Abraham De Moivre. Distribusi seragam memiliki fungsi kepadatan peluang interval [a,b] yaitu:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \; a \leq x \leq b$$

Jika X adalah variabel acak usia saat kematian, misalkan $a = 0$ dan $b = \omega$ dimana ω adalah usia maksimum seseorang, kemudian PDF nya adalah

$$f(x) = \frac{1}{\omega}, \; 0 \leq x \leq \omega$$

Dari bentuk tersebut dapat diperoleh

$$F(x) = \int_0^x f(s)\, ds = \frac{x}{\omega}$$

$$s(x) = 1 - F(x) = \frac{\omega - x}{\omega} = 1 - \frac{x}{\omega} \qquad (2.26)$$

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{1}{\omega - x} = (\omega - x)^{-1} \qquad (2.27)$$

Menurut Bowers, dkk (1997), persamaan (2.26) merupakan peluang hidup distribusi De Moivre.

Kemudian dari bentuk PDF diatas juga dapat diperoleh peluang hidup seseorang yang berusia x tahun hingga t tahun yaitu

$${}_tp_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu(x)dx\right)$$

$$= \exp\left(-\int_x^{x+t} (\omega - x)^{-1} dx\right)$$

$$= \exp(-\ln(\omega - x))\Big|_x^{x+t}$$

$$= \exp(\ln(\omega - x - t) - \ln(\omega - x))$$

$$= \exp\left(\ln\left(\frac{\omega - x - t}{\omega - x}\right)\right)$$

$${}_tp_x = \frac{\omega - x - t}{\omega - x} \qquad (2.28)$$

Maka peluang meninggalnya seseorang berusia $x + t$ tahun akan meninggal setelah 1 tahun yaitu

$$q_{x+t} = \frac{1}{\omega-x-t} \tag{2.29}$$

6. Hukum Mortalita Gompertz

Menurut Mukti (2019), dalam penelitian Bejamin Gompertz (1825) menyebutkan jika kebalikan kerentanan pria untuk kematiannya dengan $\frac{1}{\mu_x}$.

Kemudian Futami (1993), mengasumsikan

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu(x)}\right) = -h\frac{1}{\mu(x)}$$

dengan h adalah konstanta proporsionalitas.

dapat diperoleh bentuk

$$\log\left(\frac{1}{\mu(x)}\right) = -hx - \log B$$

Didefinisikan –logB adalah konstanta. Kemudian

$$\frac{1}{\mu(x)} = e^{-hx}.e^{-\log B}$$

dimana

$$e^{-\log B} = e^{\log B^{-1}}$$

$= B^{-1}$

$= \frac{1}{B}$

Maka

$$\frac{1}{\mu(x)} = e^{-hx} . \frac{1}{B}$$

$$\mu(x) = \frac{B}{e^{-hx}}$$

$$\mu(x) = B.e^{hx}$$

$$\mu(x) = Bc^{x} \qquad (2.30)$$

Dimana $c = e^{h}$ konstanta dan $B > 0$, $c > 1$, $x \geq 0$

B dan c merupakan konstanta Gompertz, nilai B dan c dicari memakai distribusi Gompertz $G(x|\mu, \sigma)$ dengan standar deviasi σ dan rerata μ yang didefinisikan dengan

$$G(x|\mu, \sigma) = W\left(\frac{x-a}{b}\right) \qquad (2.31)$$

dengan $W(x) = 1 - e^{-e^{x}}$ dan konstanta a dan b memenuhi

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6}} b \qquad (2.32)$$

dan

$$\mu = a - b\gamma \qquad (2.33)$$

Selanjutnya $G(x|\mu, \sigma)$ disebut distribusi Gompertz dengan

$$g = e^{-e^{-\frac{a}{b}}} \qquad (2.34)$$

dan

$$c = e^{\frac{1}{b}} \qquad (2.35)$$

Kemudian peluang hidup distribusi Gompertz didefinisikan

$$s(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu(x)dx\right)$$

$$= \exp\left(-\int_0^x Bc^x dx\right)$$

$$= \exp\text{-}B\left(\frac{1}{\log c}c^x\right)\Big|_0^x$$

$$s(x) = \exp\left(-\frac{B}{\log c}(c^x-1)\right) \qquad (2.36)$$

Dari peluang hidupnya, bisa ditentukan fungsi distribusi kumulatif berikut

$$F(x) = 1 - s(x)$$

$$= \left(1-\exp\left(-\frac{B}{\log c}(c^x-1)\right)\right) \qquad (2.37)$$

Selanjutnya, fungsi densitas dari distribusi Gompertz yaitu

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}\left(1-\exp\left(-\frac{B}{\log c}(c^x-1)\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(-\frac{B}{\log c}(c^x-1)\right)\left(1-\exp\left(-\frac{B}{\log c}(c^x-1)\right)\right)$$

$$= \left(-\frac{B}{\log c}(\log c.c^x)\right)\left(-\exp\left(-\frac{B}{\log c}(c^x-1)\right)\right)$$

$$f(x) = (Bc^x)\left(\exp\left(-\frac{B}{\log c}(c^x-1)\right)\right) \qquad (2.38)$$

Selain itu, bisa ditentukan fungsi peluang ${}_tp_x$ yaitu

$${}_tp_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu(x)dx\right)$$

$$= \exp\left(-\int_x^{x+t} Bc^x dx\right)$$

$$= \exp\left(-B.\frac{1}{\log c}c^x\right)\Big|_x^{x+t}$$

$$= \exp\left(-\frac{B}{\log c}(c^{x+t}-c^x)\right)$$

$${}_tp_x = \exp\left(-\frac{Bc^x}{\log c}(c^t-1)\right) \qquad (2.39)$$

7. Metode *Maximum Likelihood Estimation*

Menurut Kurniasari (2017), terdapat beberapa cara menghitung nilai parameter nilai premi yang didekati menurut hukum mortalita, salah satunya metode *maximum likelihood estimation*.

Diberikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yang merupakan sampel acak berukuran n dan berasal dari suatu distribusi dengan fungsi kepadatan peluang $f(x;\theta)$, karena $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan sampel acak maka dapat dinyatakan dengan

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n;\theta) = f(x_1;\theta), f(x_2;\theta), \ldots, f(x_n;\theta) \quad (2.40)$$

Persamaan 2.40 dapat ditulis dalam bentuk

$$L(\theta) = f(x_1;\theta), f(x_2;\theta), \ldots, f(x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

$L(\theta)$ disebut sebagai fungsi *likelihood.*

Nilai $\theta = u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ yang memaksimumkan fungsi *likelihood*disebut sebagai taksiran maksimum *likelihood* dari θ dan dinotasikan dengan $\hat{\theta}$. Untuk memudahkan dalam mencari taksiran θ maka fungsi $L(\theta)$ dapat dimodifikasi ke dalam bentuk logaritma natural (ln). Karena nilai θ yang memaksimumkan $L(\theta)$ akan sama dengan nilai θ yang memaksimumkan $\ln(L(\theta))$. Nilai θ yang dapat memaksimumkan $\ln(L(\theta))$ adalah turunan pertama terhadap θ yang kemudian disamakan dengan nol.

8. Bunga

Bunga adalah suatu pembayaran sebagai pemakaian uang yang sudah dipinjam atau balas jasa. Menurut Futami (1993), terdapat jaminan besarnya bunga yang akan ditambahkan pada pembayaran oleh pengguna modal kepada pemilik modal. Besarnya kecilnya bunga dipengaruhi oleh jangka waktu investasi, besar pokok, serta tingkat suku bunga.

a. Bunga Sederhana

Bunga dihitung berdasarkan jangka investasinya dan perbandingan pokok disebut bunga tunggal atau disebut bunga sederhana. Contohnya i adalah tingkat bunga tunggal, P adalah besar pokok, dan jangka investasi n tahun maka bunganya sebesar:

$$I = Pni \tag{2.41}$$

Kemudian total pokok dan bunga setelah beberapa waktu menjadi

$$S = P + I = P(1 + ni) \qquad (2.42)$$

b. **Bunga Majemuk**

Bunga majemuk adalah besar pokok sebelumnya dan ditambah besar bunga yang diperoleh. Contoh P adalah besar pokok, n adalah jangka investasi (tahun), i adalah tingkat bunga tunggal, maka total pokok dan bunganya yaitu:

$$S = P(1+i)^n \qquad (2.43)$$

Didefinisikan suatu fungsi v yaitu

$$v = \frac{1}{1+i} \qquad (2.44)$$

vmerupakan nilai sekarang pembayaran sebanyak 1 yang dilaksanakan 1 tahun kedepan. Pembayaran jika dilaksanakan 1 tahun lebih cepat, maka bunga yang hilang yaitu $d = 1 - v$ atau disebut tingkat diskonto.

9. Laju Tingkat Suku Bunga *(Force of Interest)*

Tingkat diskon efektif (d) merupakan rasio dari besar diskonto yang didapatkan sepanjang suatu periode terhadap besar nilai akumulasi di akhir periode. Tingkat bunga efektif (i) adalah rasio bunga yang didapatkan saat suatu periode terhadap besar nilai pokok di awal periode. d dinyatakan dengan:

$$d = \frac{i}{1+i} \tag{2.45}$$

Investasi sebanyak 1 yang akan diakumulasi menjadi 1 + idi akhir periode ke 1 disebut faktor diskonto atau nilai saat ini, yang dinotasikan v serta dinyatakan dengan:

$$v = \frac{i}{1+i} \tag{2.46}$$

Karena v adalah nilai sekarang *(present value)* untuk pembayaran sebesar 1 satuan pada 1 tahun kemudian, jika pembayaran dilakukan 1 tahun lebih cepat, maka besarnya bunga yang hilang adalah d = 1 - v.

Laju tingkat suku bunga (*force of interest*) yang disimbolkan dengan δ adalah tingkat suku bunga atas h periode yang dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \delta &= \lim_{h \to 0} \frac{a(t+h)-a(t)}{a(t).h} \\ &= \frac{1}{a(t)} \lim_{h \to 0} \frac{a(t+h)-a(t)}{h} \\ &= \frac{1}{a(t)} \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \end{aligned} \tag{2.47}$$

dengan a(t) adalah fungsi akumulasi. Fungsi akumulasi dengan bunga majemuk dapat dinyatakan sebagai $a(t) = (1+i)^t$.

Dari persamaan (2.47) dapat dinyatakan kedalam bentuk

$$\delta = \frac{1}{(1+i)^t}\left(\frac{d}{dt}(1+i)^t\right)$$

$$= \frac{1}{(1+i)^t}\left(\frac{d}{dt}\ln e^{\ln(1+i)^t}\right)$$

$$= \frac{1}{(1+i)^t}\left(\frac{d}{dt}e^{t.\ln(1+i)}\right)$$

$$= \frac{1}{(1+i)^t}\left(\ln(1+i)\ .\ e^{t.\ln(1+i)}\right)$$

$$= \frac{1}{(1+i)^t}\left(\ln(1+i)\ .\ (1+i)^t\right)$$

$$= \ln(1+i) \qquad (2.48)$$

Sehingga $\delta = \ln(1+i)$ adalah laju tingkat suku bunga (*force of interest*) untuk bunga majemuk. Kemudian

$$e^{-\delta t} = (1+i)^{-t} = v^t \qquad (2.49)$$

10. Asuransi Jiwa

Menurut Effedie (2012), pengertian asuransi jiwa adalah janji yang berasak dari pihak penanggung atau perusahaan asuransi kepada tertanggung jika pihak tertanggungmengalami kematian, maka pihak penanggung akan memberikan manfaat kematian sejumlah tertentu ke ahli warisnya.

a. Asuransi Jiwa Gabungan

Menurut Sertdemir (2013), kombinasi dari dua atau lebih kehidupan individu disebut sebagai model multi kehidupan atau dalam ilmu aktuaria dikenal sebagai *multiple life* status. Dua jenis status kehidupan ganda yang terkenal adalah *last survivor* status dan *joint life* status. Dalam aplikasi asuransi jiwa, masa depan seumur hidup dua kehidupan dianggap independen kecuali dinyatakan lain.

1) Asuransi Joint Life

Menurut Bowers, dkk (1997), asuransi *joint life* merupakan asuransi yang berlangsung saat semua anggota pihak tertanggung dikatakan gagal dan bertahan sesudah kematian pertama. Santunan atau manfaat kematian diberikan kepada orang yang pertama meninggal dalam sekelompok orang.

Untuk m kehidupan,

$$T(x_1, x_2, \dots, x_m)$$
$$= \min[(T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_m))]$$

dimana $T(x_i)$ merupakan saat kematian individu i.

Kasus dua kehidupan (x) dan (y) berlaku

$$T(xy) = \min[T(x), T(y)]$$

Diberikan T(x) dan T(y) saling bebas, dua bentuk dari fungsi distribusi dari T bisa berbentuk fungsi kehidupan tunggal seperti:

$$F_T(t) = \Pr[\min[T(x), T(y)] \le t]$$
$$= 1 - s_{T(x),\,T(y)}(t,t)$$
$$= 1 - {}_tp_x\,{}_tp_y \qquad (2.50)$$

Dan

$$F_T(t) = {}_tq_x + {}_tq_y - s_{T(x),\,T(y)}(t,t)$$
$$= {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_x\,{}_tq_y \qquad (2.51)$$

b. Asuransi Yang Dibayarkan Seketika Pada Saat Kematian (Kontinu)

Menurut Bowers, dkk (1997), waktu dan jumlah pembayaran manfaat asuransi jiwa bergantung lamanya jeda dari penerbitan asuransi hingga kematian tertanggung. Asuransi jiwa terdiri dari fungsi diskon yang didefinisikan dengan v_t dan fungsi manfaat yang didefinisikan dengan b_t. Dalam hal ini, t adalah lamanya interval dari penerbitan sampai kematian. Sehingga definisi fungsi nilai Z_t yaitu:

$$Z_t = b_t v_t$$

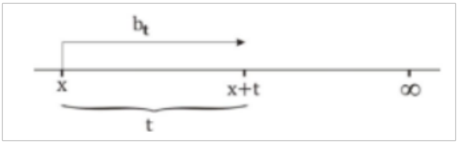
Dengan Z_t adalah nilai sekarang pada kebijakan pembayaran manfaat. Waktu penandatanganan polis hingga waktu kematian pihak tertanggung merupakan waktu sisa hidup dengan perubah acak T = T(x). Maka definisi dari fungsi nilai Z yaitu:

$$Z = b_T v_T$$

Dengan Z adalah *actuarial present value (*fungsi peubah acak nilai sekarang) dari pembayaran atau klaim manfaat kematian ketika polis asuransi diterbitkan.

1) **Asuransi Jiwa Berjangka**

   Menurut Effendie (2012), asuransi jiwa dengan jangka n-tahun dilakukannya pembayaran manfaat kematian, apabila nasabah meninggal dalam n-tahun waktu menjadi peserta mulai dari mendaftar peserta asuransi. Contohnya diusia penandatanganan kontrak x, apabila meninggalnya pihak tertanggung sebelum berusia x + t maka pewarisnya akan dibayar manfaat/benefit yang sudah disepakati. Apabila orang tersebut hidup hingga berusia x + t, maka ia tidak memperoleh pembayaran manfaat.



Gambar 2.2 Pembayaran benefit asuransi jiwa berjangka

Jika besarnya manfaat kematian dimisalkan 1 unit dan selanjutnya dibayarkan setelah (x) mengalami kematian maka

$$b_t = \begin{cases} 1 & t \leq n \\ 0 & t > n \end{cases}$$

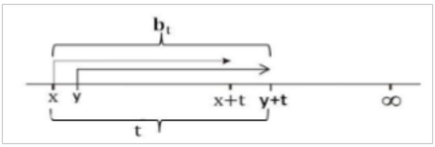
$$v_t = v^t, \; t \geq 0$$

$$Z = \begin{cases} v^T & T \leq n \\ 0 & T > n \end{cases}$$

Didefinisikan b_t fungsi manfaat dan v_t fungsi diskon membentuk peubah acak Z_t (nilai premi atau tunai saat polis dikeluarkan).

Kematian pertama di asuransi *joint life,* terjadi dari (x) dan (y) di n tahun, pembayarannya sebanyak 1 satuan dibayarkan setelah kematian.

$$Z_{xy} = \begin{cases} v^t T \leq n \\ 0 T > n \end{cases}$$



Gambar 2.3 Pembayaran benefit asuransi *joint life* berjangka

11. Premi Asuransi Jiwa

Menurut Effendie (2012), ditentukannya premi asuransi berprinsip premi *(premium principle)* yang terdiri tiga prinsip berdasarkan nilai sekarang kerugian perusahaan asuransi yang dinotasikan dengan L. Prinsip pertama yaitu premi presentil, kedua adalah prinsip ekuivalensi dan ketiga adalah premi eksponensial.

Prinsip ekuivalensi merupakan prinsip yang paling banyak diterapkan dalam berbagai jenis asuransi. Pada prinsip ini berlaku $E[L] = 0$ yang berarti kewajiban perusahaan asuransi bernilai sama dengan hak yang nasabah terima. Prinsip inilah yang lebih banyak digunakan dalam berbagai aplikasi asuransi.

12. *Actuarial Present Value (APV)* **Nilai Manfaat Kematian**

Menurut Bowers, dkk (1997), *APV* asuransi jiwa berjangka n-tahun dengan manfaat kematian dibayarkan sesaat sesudah kematian pihak tertanggung yaitu:

$$\bar{A}_{x:\overline{n|}} = E[Z_t] = E[v^t] = \int_0^n v^t f(t)dt$$

Berdasarkan (2.23) maka

$$\bar{A}_{x:\overline{n|}} = E[Z_t] = E[v^t]$$

$$= \int_0^n v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t)dt \qquad (2.52)$$

Jika *APV* nilai manfaat kematian dihubungkan hukum mortalita, yang dinyatakan seperti berikut ini:

a. *APV* nilai manfaat kematian dari asuransi jiwa berjangka menurut hukum mortalita De Moivre

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = E[Z_t] = E[v^t] = \int_0^n v^t f(t)dt$$

$$= \int_0^n v^t {}_tp_x\ \mu(x+t)dt$$

Berdasarkan (2.27), (2.28) dan (2.49)

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = E[Z_t] = E[v^t]$$

$$= \int_0^n e^{-\delta t}\left(\frac{\omega-x-t}{\omega-x}\right)\left(\frac{1}{\omega-x-t}\right)dt \qquad (2.53)$$

b. *APV* nilai manfaat kematian dari asuransi jiwa seumur hidup berdasarkan hukum mortalita Gompertz

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = E[Z_t] = E[v^t] = \int_0^n v^t f(t)dt$$

$$= \int_0^n v^t {}_tp_x\ \mu(x+t)dt$$

Berdasarkan (2.30), (2.39) dan (2.49), maka

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = E[Z_t] = E[v^t]$$

$$= \int_0^n e^{-\delta t}.\ e^{\left(-\frac{Bc^x}{\log c}(c^t-1)\right)}(Bc^{x+t})dt (2.54)$$

13. Anuitas Jiwa

Anuitas jiwa dengan pembayaran terus-menerus dikatakan dengan anuitas jiwa kontinu. Menurut Bowers, dkk (1997), anuitas jiwa diartikan sebagai serangkaian pembayaran pada interval sama (contohnya seperti kuartal, bulan, tahun) atau secara terus menerus sepanjang seseorang tersebut hidup. $Y = \bar{a}_{\overline{T|}}$ untuk setiap $T \geq 0$ dimana T menyatakan waktu sisa hidup (x). Fungsi distribusi dari Y untuk T adalah

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr\left(\bar{a}_{\overline{T|}} \leq y\right)$$

$$= \Pr\ (1 - v^T \leq \delta y)$$

$$= \Pr\left(v^T \geq 1 - \delta y\right)$$

$$= \Pr\left[T \leq \frac{\log(1-\delta y)}{\delta}\right]$$

$$= F_T\left(\frac{-\log(1-\delta y)}{\delta}\right),\ 0 < y < \frac{1}{\delta} \qquad (2.55)$$

Maka didapatkan fungsi densitas peluang untuk Y adalah

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_T\left(\frac{-\log(1-\delta y)}{\delta}\right)$$

$$= \frac{f_T\left(\frac{-\log(1-\delta y)}{\delta}\right)}{1-\delta y}, 0 < y < \frac{1}{\delta} \qquad (2.56)$$

APV dari anuitas jiwa kontinu yaitu

$$\bar{a}_x = E[Y] = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t|}}\,{}_tp_x\mu_{(x+t)}dt \qquad (2.57)$$

Selanjutnya digunakan integral parsial dengan

$$f(t) = \bar{a}_{\overline{t|}} \quad dg(t) = {}_tp_x\,\mu(x+t)dt$$

$$df(t) = v^t dt \qquad g(t) = -{}_tp_x$$

Diperoleh *APV* dari anuitas jiwa kontinu berjangka yaitu

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n v^t\,{}_tp_x\,dt = \int_0^n {}_tE_x\,dt \qquad (2.58)$$

Jika dikaitkan dengan hukum mortalita, berdasarkan (2.28) dan (2.49) *APV* anuitas berjangka dari hukum mortalita De Moivre adalah

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n e^{-\delta t}.\left(\frac{\omega-x-t}{\omega-x}\right)dt \qquad (2.59)$$

Kemudian berdasarkan (2.39) dan (2.49) *APV* anuitas seumur hidup dari hukum mortalita Gompertz adalah

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}.e^{\left(-\frac{Bc^x}{\log c}(c^t-1)\right)}\,dt \qquad (2.60)$$

14. Premi Tahunan Asuransi Jiwa

Menurut Effendie (2012), $\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)$ merupakan lambang premi tahunan kontinu yang dapat ditentukan menggunakan prinsip ekuivalensi. Apabila didefinisikan peubah acak fungsi kerugian

$$L = l_T = v^T - \bar{P}\,\bar{a}_{\overline{t}|}$$

Maka dengan prinsip ekuivalensi akan berlaku

$$E[L] = 0$$

diperoleh

$$0 = e = E[L] = E\left[1-v^T - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right).\bar{a}_{\overline{t}|}\right]$$

$$= E\left[v^T\right] - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right).E\left[\bar{a}_{\overline{t}|}\right]$$

$$= \bar{A}_x - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\bar{a}_x$$

$$\bar{P}\left(\bar{A}_x\right) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$$

Persamaan tersebut merupakan premi tahunan asuransi jiwa seumur hidup.

Premi tahunan asuransi jiwa berjangka adalah:

$$\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Selanjutnya apabila dihubungkan dengan hukum mortalita, premi tahunan berjangka menurut hukum mortalita De Moivre yaitu:

$$\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Berdasarkan (2.53) dan (2.59) maka

$$\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{\left(\int_0^n e^{-\delta t}.\left(\frac{\omega-x-t}{\omega-x}\right)\left(\frac{1}{\omega-x-t}\right)dt\right)}{\left(\int_0^n e^{-\delta t}.\left(\frac{\omega-x-t}{\omega-x}\right)dt\right)} \qquad (2.61)$$

Sedangkan premi tahunan seumur hidup berdasarkan hukum mortalita Gompertz berbentuk:

$$\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Berdasarkan (2.59) dan (2.60) maka

$$\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{\left(\int_0^n e^{-\delta t}.\ e^{\left(-\frac{Bc^x}{\log c}(c^t-1)\right)}\left(Bc^{x+t}\right)dt\right)}{\left(\int_0^n e^{-\delta t}.e^{\left(-\frac{Bc^x}{\log c}(c^t-1)\right)}\ dt\right)} \quad (2.62)$$

15. **Premi Tahunan Asuransi *Joint Life***

Menurut Mukti (2019), premi tahunan asuransi *joint life* dengan manfaat kematian dibayarkan segera sesudah kematian, *APV* nilai manfaat kematian gabungan dan *APV* anuitas hidup gabungan, yaitu *APV* nilai manfaat kematian dan *APV* anuitas hidup bagi dua orang tertanggung yang berumur y dan x tahun di perhitungannya digunakan peluang hidup untuk status gabungan.

Berdasarkan (2.23), (2.24), (2.25), dan (2.49) bentuk *APV* nilai manfaat kematian dari asuransi *joint life* berjangka dari seseorang yang berusia x dan y tahun adalah

$$\bar{A}_{xy:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}\,{}_tp_{xy}\left(\mu(x+t)+\mu(y+t)\right)dt \quad (2.63)$$

Sedangkan *APV* dari anuitas gabungan berjangka seseorang berumur y dan x tahun yaitu:

$$\bar{a}_{xy:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}\,{}_tp_{xy}\ dt \quad (2.64)$$

Maka premi tahunan asuransi jiwa gabungan berjangka dari seseorang berumur y dan x tahun yaitu:

$$\bar{P}\left(\bar{A}_{xy:\overline{n}|}\right) = \frac{\bar{A}_{xy:\overline{n}|}}{\bar{a}_{xy:\overline{n}|}}.R \tag{2.65}$$

BAB III

METODE PENELITIAN

A. Jenis dan Data Penelitian

Dalam penelitian ini digunakan penelitian kuantitatif dengan data sekunder berupa Tabel Mortalita Indonesia tahun 2011 bagi anak laki-laki dan perempuan. Peneliti berupaya menghitung penentuan premi tahunan asuransi *joint life* seumur hidup berdasar pada hukum mortalita De Moivre dan Gompertz dengan manfaat dibayarkan segera setelah kematian, kemudian menghitung perbandingan besar kecilnya premi tahunan asuransi *joint life* seumur hidup berdasarkan hukum mortalita De Moivre dan Gompertz.

B. Waktu Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di semester ganjil tahun ajaran 2021/2022.

C. Metode Pengumpulan Data

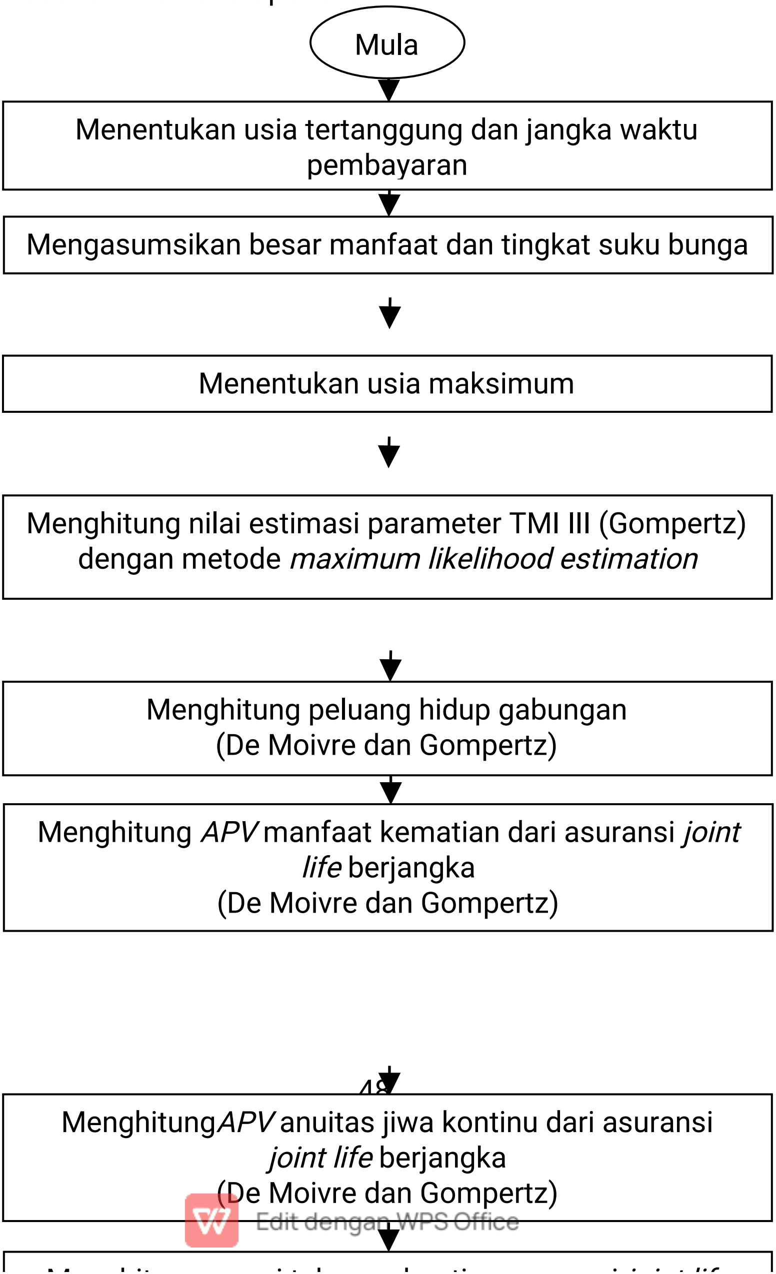
Data dikumpulkan dengan metode dokumentasi dari data yang diambil di TMI III Tahun 2011 untuk perempuan dan laki-laki. Data tersebut adalah resmi yang diperoleh peneliti dari Asosiasi Asuransi Jiwa Indonesia dan sekaligus menjadi data sekunder.

Selanjutnya digunakan metode literatur dengan cara mencari serta memilih beberapa sumber bacaan atau referensi yang ada hubungannya dengan masalah penelitian. Peneliti mengolah berbagai sumber bacaan dari jurnal, buku, serta artikel yang ada hubungannya dengan judul penelitian ini di TMI III tahun 2011 untuk perempuan dan laki-laki.

D. Metode Analisis Data

Penelitian ini membahas tentang penentuan premi tahunan asuransi *joint life* dengan menggunakan hukum mortalita De Moivre dan Gompertz. Penelitian menggunakan ilustrasi kasus polis asuransi jiwa dengan melibatkan dua tertanggung, yang mana manfaat segera dibayarkan setelah kematian (kontinu). Langkah–langkah penelitian sebagai berikut:

Tabel 3.1 Flowchart penelitian



1. Menentukan usia pemegang polis (tertanggung) dan jangka waktu pembayaran.
2. Mengasumsikan besar manfaat kematian dan tingkat suku bunga.
3. Menentukan usia maksimum.
4. Menghitung nilai estimasi parameter dari hukum mortalita Gompertz untuk TMI III Tahun 2011 untuk perempuan dan laki-laki menggunakan metode *maximum likelihood estimation*.
5. Menghitung peluang hidup gabungan hukum mortalita De Moivre dan Gompertz.

6. Menghitung *APV* manfaat kematian dari asuransi *joint life* berjangka.

7. Menghitung *APV* anuitas jiwa kontinu dari asuransi *joint life* berjangka.

8. Menghitung premi tahunan kontinu asuransi *joint life* berjangka.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Hasil Penelitian

Penyelesaian masalah penentuan premi tahunan asuransi *joint life* dengan hukum mortalita De moivre dan Gompertz pada penelitian ini, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan Jangka Waktu Pembayaran Serta Usia Pemegang Polis

Sebagai simulasi, asuransi yang dihitung ialah asuransi jiwa dengan jangka n = 10 tahun, usia penandatanganan kontrak saat y (istri) = 25 tahun dan x (suami) = 28 tahun.

2. Mengasumsikan Besar Manfaat Kematian dan Tingkat Suku Bunga

   Sebagai simulasi, besar manfaat (R) diasumsikan Rp.50.000.000,- dan tabel mortalita yang digunakan sebagai acuan penghitungan premi yaitu TMI III tahun 2011 untuk perempuan dan laki-laki, dimana TMI III 2011 ini digunakan untuk penentuan harga premi dalam industri asuransi jiwa di Indonesia.

   Kemudian, besar tingkat suku bunga (i) diasumsikan 3,50%, maka menurut persamaan (2.48) *force of interest rate* (δ) sebesar

$$\delta = \ln(1+i)$$

$$= \ln(1+0{,}035)$$

$$= \ln(1{,}035)$$

$$= 0{,}0344014267173$$

3. Menentukan Usia Maksimum

Menurut tabel 4.1 dan tabel 4.2, usia maksimum seseorang yang mengikuti asuransi (dilambangkan dengan ω) adalah 111.

4. Menghitung Nilai Estimasi Parameter Dari Hukum Mortalita Gompertz Untuk TMI III Tahun 2011 Perempuan dan laki-laki menggunakan Metode *Maximum Likelihood Estimation*.

Berikut TMI III Tahun 2011 perempuan dan laki-laki, tabel ini secara lengkap ada di lampiran 1 dan 2.

Tabel 4.1 Mortalita Indonesia untuk Laki-laki

x	q_x	p_x	l_x
0	0,00802	0,9919 8	100000
1	0,00079	0,9992 1	99198
.	...	...	...
.	...	...	...
60	0,01417	0,9858 3	85813,2 8
.	...	...	...
.	...	...	...
110	0,71016	0,2898 4	0,05806 8
111	1	0	0,01683

Tabel 4.2 Mortalita Indonesia untuk Perempuan

x	q_x	p_x	l_x

0	0,0037	0,9963	100000
1	0,00056	0,9994 4	99630
.	...	...	...
.	...	...	...
60	0,00877	0,9912 3	90712,8359 7
.	...	...	...
.	...	...	...
110	0,70366	0,2963 4	1,85967388 7
111	1	0	0,55109576

Keterangan:

x = usia seseorang

q_x = peluang seseorang akan meninggal saat usia x tahun

p_x = peluang seseorang akan bertahan hidup saat usia x tahun

l_x = banyaknya seseorang yang berusia x tahun

a. Pendugaan Parameter Tabel Mortalita Indonesia Tahun 2011 menurut Hukum Mortalita Gompertz dengan Metode *Maximum Likelihood Estimation*

Pada hukum mortalita Gompertz terdapat dua parameter yang harus diestimasi, yaitu parameter B dan c. Parameter-parameter tersebut dapat diestimasikan menggunakan *Maximum Likelihood Estimation (MLE).* Persamaan *likelihood* yang terbentuk dari fungsi kepadatan peluang adalah sebagai berikut:

$$L\ (B, c) = \prod_{i=0}^{n} Bc^{x_i}.\exp\left[\frac{-B}{\ln c}\left(c^{x_i}-1\right)\right] \qquad (4.1)$$

Parameter B dan c dapat diestimasi dengan memaksimumkan fungsi L (B, c). Memaksimumkan fungsi ln(L (B, c)) akan berakibat fungsi L (B, c) maksimum. Persamaan (4.1) menjadi

$$\ln(L\ (B, c)) = \sum_{i=0}^{n} \ln\left(Bc^{x_i}.\exp\left[\frac{-B}{\ln c}\left(c^{x_i}-1\right)\right]\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \ln B + \sum_{i=0}^{n} \ln c^{x_i} +$$

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{-B}{\ln c}\left(c^{x_i}-1\right)\right)$$

$$\ln(L\ (B, c)) = n\ .\ln B + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\ln c - \frac{B}{\ln c}\sum_{i=0}^{n}\left(c^{x_i}-1\right)$$

(4.2)

Cara memperoleh estimasi parameter B dan c, turunan pertama persamaan (4.2) sama dengan nol. Dapat juga dengan menyelesaikan persamaan berikut

$$\frac{\partial \ln (L (B, c))}{\partial B} = 0$$

$$\frac{\partial \ln (L (B, c))}{\partial c} = 0$$

Turunan pertama dari persamaan (4.2) adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial \ln (L (B, c))}{\partial B} = \frac{n}{B} - \frac{1}{\ln c}\sum_{i=0}^{n}\left(c^{x_i}-1\right) \qquad (4.3)$$

$$\frac{\partial \ln (L (B, c))}{\partial c} = \frac{1}{c}\sum_{i=0}^{n} x_i + \frac{B}{c\ln c^2}\sum_{i=0}^{n}\left(c^{x_i}-1\right) - \frac{B}{c\ln c^2}\sum_{i=0}^{n} x_i c^{x_i} \qquad (4.4)$$

Berdasarkan persamaan (4.3) dan (4.4) terlihat bahwa persamaan-persamaan tersebut masih saling bergantung, hal ini membuat solusi sulit untuk diperoleh menggunakan metode Newton-Rhapson.

Parameter B dan c dapat dihitung dengan cara iteratif menggunakan rumus berikut

$$\begin{pmatrix} B_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_k \\ c_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial B^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial B\, \partial c} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial c\, \partial B} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial c^2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \ln L}{\partial B} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial c} \end{pmatrix}$$

dengan k = 0,1,2, …, n

dimana

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial B^2} = -\frac{n}{B^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial c\, \partial B} = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial B\, \partial c} = \frac{1}{c \ln c^2} \sum_{i=0}^{n} \left(c^{x_i} - 1\right) - \frac{1}{c \ln c^2} \sum_{i=0}^{n} x_i c^{x_i}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial c^2} = \frac{-1}{c^2} \sum_{i=0}^{n} x_i - \frac{B}{c^2 \ln c} \sum_{i=0}^{n} x_i^2 c^{x_i}$$

Estimasi parameter c dari hukum mortalita Gompertz mendekati 1,09. Dengan menggunakan nilai toleransi $\varepsilon = 10^{-4}$. Iterasi metode Newton-Raphson akan terus berlanjut hingga memenuhi nilai toleransi atau syarat $B > 0$ dan $c > 1$ tidak terpenuhi. Persamaan toleransi adalah sebagai berikut:

$$\sqrt{\left(B_{k+1} - B_k\right)^2 + \left(c_{k+1} - c_k\right)^2} \leq \varepsilon$$

Tabel 4.3 Nilai awal dan hasil estimasi parameter Gompertz menggunakan metode Newton-Raphson

No	Nilai Awal		Hasil Estimasi	
	B_0	c_0	B	c
1	0,00001	1,1	0,005749774	1,024738
2	0,0001	1,1	0,005749182	1,024739
3	0,0001	1,11	0,005749804	1,024738
4	0,001	1,2	0,005749563	1,024739
5	0,0001	1,09	0,005749804	1,024738
6	0,001	1,09	0,005749765	1,024738
7	0,001	1,11	NaN	NaN
8	0,0001	1,12	0,005749763	1,024738
9	0,001	1,12	NaN	NaN
10	0,00001	1,09	0,005749804	1,024738
11	0,01	1,5	0,005749804	1,024738
12	0,001	1,5	0,00574971	1,024738
13	0,001	1,4	0,005749803	1,024738
14	0,0001	1,08	0,00574974	1,024738
15	0,001	1,08	0,005749802	1,024738
16	0,01	1,08	NaN	NaN
17	0,000001	1,13	0,005749789	1,024738
18	0,0001	1,13	NaN	NaN
19	0,0001	1,07	0,005749801	1,024738
20	0,001	1,07	0,005749803	1,024738

Dari tabel 4.3 dapat dilihat bahwa sebagian besar nilai estimasi parameter B konvergen ke 0,005749 dan nilai estimasi parameter c konvergen ke 1,024738. Sehingga diambil nilai estimasi parameter B = 0,005749 dan c = 1,024738.

5. Menghitung Peluang Hidup Gabungan Berdasarkan Hukum Mortalita De Moivre dan Gompertz.

a. Peluang Hidup Gabungan Berdasarkan Hukum Mortalita De Moivre

Dari persamaan (2.14) diperoleh bentuk peluang hidup gabungan untuk hukum mortalita De Moivre yaitu hasil dari peluang hidup seseorang yang berumur x tahun akan hidup sampai dengan x + t tahun dan dikalikan peluang hidup seseorang berumur y tahun akan hidup sampai dengan y + t tahun.

Dalam penelitian ini, x menyatakan usia suami, y menyatakan usia istri, t menyatakan jangka waktu pembayaran, dan ω menyatakan usia maksimum seseorang meninggal. Maka, perhitungan peluang hidup gabungan berdasarkan hukum mortalita De Moivre untuk $x = 28$, $y = 25$, $t = 10$ dan $\omega = 111$ sebagai berikut:

$$S_{T(xy)}(t) = \frac{\omega\text{-}x\text{-}t}{\omega\text{-}x} \cdot \frac{\omega\text{-}y\text{-}t}{\omega\text{-}y}$$

$$= \frac{111\text{-}28\text{-}10}{111\text{-}28} \cdot \frac{111\text{-}25\text{-}10}{111\text{-}25}$$

$$= \frac{73}{83} \cdot \frac{76}{86}$$

$$= \frac{5.548}{7.138}$$

$$= 0{,}7772485289997$$

b. Peluang Hidup Gabungan Berdasarkan Hukum Mortalita Gompertz

Dari persamaan (2.14) diperoleh bentuk peluang hidup gabungan untuk hukum mortalita De Moivre yaitu hasil dari peluang hidup seseorang yang berumur x tahun akan hidup sampai dengan x + t tahun dan dikalikan peluang hidup seseorang berumur y tahun akan hidup sampai dengan y + t tahun.

Dalam penelitian ini x menyatakan usia suami, y menyatakan usia istri, t menyatakan jangka waktu pembayaran, B dan c menyatakan konstanta Gompertz.

Maka, perhitungan peluang hidup gabungan berdasarkan hukum mortalita Gompertz untuk x = 28, y = 25, t = 10, B = 0,005749, dan c = 1,024738 sebagai berikut:

$$S_{T(xy)}(t) = e^{\left(-\frac{Bc^x}{\log c}(c^t-1)\right)} . e^{\left(-\frac{Bc^y}{\log c}(c^t-1)\right)}$$

$$= e^{\left(-\frac{(0{,}005749)(1{,}024738)^{28}}{\log (1{,}024738)}((1{,}024738)^{10}-1)\right)} .$$

$$e^{\left(-\frac{(0{,}005749)(1{,}024738)^{25}}{\log (1{,}024738)}((1{,}024738)^{10}-1)\right)}$$

$$= e^{\left(-\frac{(0{,}005749)(1{,}9822551564822)}{0{,}0106128412951}(1{,}2768162842730-1)\right)} .$$

$$e^{\left(-\frac{(0{,}005749)(1{,}8421332112205)}{0{,}0106128412951}(1{,}2768162842730-1)\right)}$$

$$= e^{\left(-\frac{0{,}0113959848946}{0{,}0106128412951}(0{,}2768162842730)\right)} .$$

$$e^{\left(-\frac{0{,}0105904238301}{0{,}0106128412951}(0{,}2768162842730)\right)}$$

$$= e^{(-1{,}0737920767609\ (0{,}2768162842730))} .$$

$$e^{(-0{,}9978877040197\ (0{,}2768162842730))}$$

$$= e^{(-0{,}2972431327707)} . e^{(-0{,}2762315663484)}$$

$$= 0{,}7428633759726 \ . \ 0{,}7586372355650$$

$$= 0{,}5635638177228$$

6. Menghitung *APV* Manfaat Kematian dari Asuransi *Joint Life* Berjangka Berdasarkan Hukum Mortalita De Moivre

dan Gompertz.

a. *APV* Manfaat Kematian dari Asuransi *Joint Life* Berjangka Berdasarkan Hukum Mortalita De Moivre

Dari persamaan (2.70) diperoleh bentuk *APV* manfaat kematian dari asuransi *joint life* berjangka untuk hukum mortalita De Moivre yaitu hasil dari integral fungsi diskon dikalikan peluang hidup seseorang yang berusia x dan y tahun akan bertahan hidup mencapai usia x + t dan y + t tahun dikalikan percepatan kematian untuk status *joint life* dengan asumsi saling bebas.

Dalam penelitian ini x menyatakan usia suami, y menyatakan usia istri, n menyatakan jangka waktu pembayaran, δ menyatakan *force of interest rate* dan ω menyatakan usia maksimum seseorang. Maka, perhitungan *APV* manfaat kematian dari asuransi *joint life* berjangka berdasarkan hukum mortalita De Moivre untuk n = 10, x = 28, y = 25, δ = 0,0344014267173, dan ω = 111 sebagai berikut:

$$\bar{A}_{xy:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}\left(\frac{\omega-x-t}{\omega-x}\right)\left(\frac{\omega-y-t}{\omega-y}\right).$$

$$\left(\left(\frac{1}{\omega\text{-}x\text{-}t}\right)+\left(\frac{1}{\omega\text{-}y\text{-}t}\right)\right)dt$$

$$= \int_0^{10} e^{-0,0344014267173t}(0,7772485289997).$$

$$\left(\left(\frac{1}{111\text{-}28\text{-}t}\right)+\left(\frac{1}{111\text{-}25\text{-}t}\right)\right)dt$$

$$= \Big[e^{-0,0344014267173t}(0,7772485289997).$$

$$\left(\left(\frac{1}{111\text{-}28\text{-}t}\right)+\left(\frac{1}{111\text{-}25\text{-}t}\right)\right)\Big]_0^{10}$$

$$= 0,0147981091682$$

b. *APV* Manfaat Kematian dari Asuransi *Joint Life* Berjangka Berdasarkan Hukum Mortalita Gompertz

Dari persamaan (2.70) diperoleh bentuk *APV* manfaat kematian dari asuransi *joint life* berjangka untuk hukum mortalita Gompertz yaitu hasil dari integral fungsi diskon dikalikan peluang hidup seseorang yang berusia x dan y tahun akan bertahan hidup mencapai usia x + t dan y + t tahun dikalikan percepatan kematian untuk status *joint life* dengan asumsi saling bebas.

Dalam penelitian ini x menyatakan usia suami, y menyatakan usia istri, n menyatakan jangka waktu pembayaran, δ menyatakan *force of interest rate,* B dan c menyatakan konstanta Gompertz.

Maka, perhitungan *APV* manfaat kematian dari asuransi *joint life* berjangka berdasarkan hukum mortalita Gompertz untuk n = 10, x = 28, y = 25, δ = 0,0344014267173, B = 0,005749, dan c = 1,024738 sebagai berikut:

$$\bar{A}_{xy:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} e^{\left(-\frac{Bc^x}{\log c}(c^t-1)\right)} e^{\left(-\frac{Bc^y}{\log c}(c^t-1)\right)} .$$

$$\left(\left(Bc^{x+t}\right)+\left(Bc^{y+t}\right)\right) dt$$

$$= \int_0^{10} e^{-0,0344014267173t} .$$

$$e^{\left(-\frac{(0,005749)(1,024738)^{28}}{\log 1,024738}((1,024738)^t-1)\right)} .$$

$$e^{\left(-\frac{(0,005749)(1,024738)^{25}}{\log 1,024738}((1,024738)^t-1)\right)} .$$

$$(((0,005749)(1,024738)^{28+t})+$$

$$((0,005749)(1,024738)^{25+t}))dt$$

$$= \Big[e^{-0,0344014267173t} \cdot$$

$$e^{\left(-\frac{(0,005749)(1,024738)^{28}}{\log 1,024738}((1,024738)^{t}-1)\right)} \cdot$$

$$e^{\left(-\frac{(0,005749)(1,024738)^{25}}{\log 1,024738}((1,024738)^{t}-1)\right)} \cdot$$

$$(((0,005749)(1,024738)^{28+t})+$$

$$((0,005749)(1,024738)^{25+t})\Big]\Big|_{0}^{10}$$

$$= 0,0112155949105$$

7. Menghitung *APV* Anuitas Jiwa Kontinu dari Asuransi *Joint Life* Berjangka Berdasarkan Hukum Mortalita De Moivre dan Gompertz.

   a. *APV* Anuitas Jiwa Kontinu dari Asuransi *Joint Life* Berjangka Berdasarkan Hukum Mortalita De Moivre

      Dari persamaan (2.71) diperoleh bentuk *APV* anuitas jiwa kontinu dari asuransi *joint life* berjangka untuk hukum mortalita De Moivre yaitu hasil dari integral fungsi diskon dikalikan peluang hidup seseorang yang berusia x dan y tahun akan bertahan hidup mencapai usia x + t dan y + t tahun.

Dalam penelitian ini x menyatakan usia suami, y menyatakan usia istri, n menyatakan jangka waktu pembayaran, δ menyatakan *force of interest rate* dan ω menyatakan usia maksimum seseorang meninggal. Maka, perhitungan *APV* anuitas jiwa kontinu dari asuransi *joint life* berjangka berdasarkan hukum mortalita De Moivre untuk n = 10, x = 28, y = 25, δ = 0,0344014267173, dan ω = 111 sebagai berikut:

$$\bar{a}_{xy:\overline{n|}} = \int_0^n e^{-\delta t}\left(\frac{\omega-x-t}{\omega-x}\right)\left(\frac{\omega-y-t}{\omega-y}\right) dt$$

$$= \int_0^{10} e^{-0,0344014267173t}(0,7772485289997)dt$$

$$= \left[e^{-0,0344014267173t}(0,7772485289997)\right]_0^{10}$$

$$= 0,5510061051363$$

b. *APV* Anuitas Jiwa Kontinu dari Asuransi *Joint Life* Berjangka Berdasarkan Hukum Mortalita Gompertz

Dari persamaan (2.71) diperoleh bentuk *APV* anuitas jiwa kontinu dari asuransi *joint life* berjangka untuk hukum mortalita Gompertz yaitu hasil dari integral fungsi diskon dikalikan peluang hidup seseorang yang berusia x dan y tahun akan bertahan hidup mencapai usia x + t dan y + t tahun.

Dalam penelitian ini x menyatakan usia suami, y menyatakan usia istri, n menyatakan jangka waktu pembayaran, δ menyatakan *force of interest rate,* B dan c menyatakan konstanta Gompertz.

Maka, perhitungan *APV* anuitas jiwa kontinu dari asuransi *joint life* berjangka berdasarkan hukum mortalita Gompertz untuk n = 10, x = 28, y = 25, δ = 0,0344014267173, B = 0,005749, dan c = 1,024738 sebagai berikut:

$$\bar{a}_{xy:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} . e^{\left(-\frac{Bc^x}{\log c}(c^t-1)\right)} e^{\left(-\frac{Bc^y}{\log c}(c^t-1)\right)} dt$$

$$= \int_0^{10} e^{-0,0344014267173t} .$$

$$e^{\left(-\frac{(0,005749)(1,024738)^{28}}{\log 1,024738}((1,024738)^t-1)\right) . i}$$

$$e^{\left(-\frac{(0,005749)(1,024738)^{25}}{\log 1,024738}((1,024738)^t-1)\right)} dt$$

$$= [e^{-0,0344014267173t} .$$

$$e^{\left(-\frac{(0,005749)(1,024738)^{28}}{\log 1,024738}((1,024738)^{t}-1)\right)} \cdot$$

$$e^{\left(-\frac{(0,005749)(1,024738)^{25}}{\log 1,024738}((1,024738)^{t}-1)\right)}\Bigg|_{0}^{10}$$

$= 0,3995209932563$

8. Menghitung Premi Tahunan Kontinu Asuransi *Joint Life* Berjangka Berdasarkan Hukum Mortalita De Moivre dan Gompertz.

   a. Premi Tahunan Kontinu Asuransi *Joint Life* Berjangka Berdasarkan Hukum Mortalita De Moivre

      Dari persamaan (2.72) diperoleh bentuk premi tahunan kontinu asuransi *joint life* berjangka untuk hukum mortalita De Moivre yaitu hasil dari *APV* manfaat kematian dari asuransi *joint life* berjangka seseorang yang berusia x dan y tahun dibagi *APV* anuitas gabungan berjangka dari seseorang yang berusia x dan y tahun, kemudian dikalikan manfaat kematian.

      Maka, perhitungan premi tahunan kontinu asuransi *joint life* berjangka untuk hukum mortalita De Moivre sebagai berikut:

$$\bar{P}\left(\bar{A}_{xy:\overline{n}|}\right) = \frac{0{,}0147981091682}{0{,}5510061051363}.50.000.000$$

$$= 1.342.826{,}2436892$$

b. Premi Tahunan Kontinu Asuransi *Joint Life* Berjangka Berdasarkan Hukum Mortalita Gompertz

Dari persamaan (2.72) diperoleh bentuk premi tahunan kontinu asuransi *joint life* berjangka untuk hukum mortalita Gompertz yaitu hasil dari *APV* manfaat kematian dari asuransi *joint life* berjangka seseorang yang berusia x dan y tahun dibagi *APV* anuitas gabungan berjangka dari seseorang yang berusia x dan y tahun, kemudian dikalikan manfaat kematian.

Maka, perhitungan premi tahunan kontinu asuransi *joint life* berjangka untuk hukum mortalita Gompertz sebagai berikut:

$$\bar{P}\left(\bar{A}_{xy:\overline{n}|}\right) = \frac{0{,}0112155949105}{0{,}3995209932563}.50.000.000$$

$$= 1.403.630{,}2346731$$

Tabel *APV* manfaat kematian, *APV* anuitas gabungan berjangka, dan premi tahunan asuransi *joint* *life* berjangka berdasarkan hukum mortalita De Moivre dan Gompertz secara lengkap di lampiran 3.

B. Pembahasan

Berdasarkan contoh perhitungan serta hasil penelitian, bisa dijelaskan jika penentuan premi tahunan pada asuransi *joint life* berjangka dengan hukum mortalita De Moivre dan Gompertz diketahui terlebih dahulu jangka waktu pembayaran, usia pemegang polis (tertanggung), besar manfaat kematian, besar tingkat suku bunga dan usia maksimum. Usia tertanggung suami 28 tahun dan istri 25 tahun karena usia ideal menikah adalah antara 20-30 tahun, dalam jangka waktu pembayaran selama 10 tahun. Dalam asuransi jiwa berjangka n tahun biasanya menawarkan kontrak untuk 5, 10, atau 20 tahun. Untuk n = 10 dinilai lebih sesuai dengan kehidupan masyarakat karena jangka waktunya tidak terlalu pendek ataupun panjang. Manfaat kematian diasumsikan sebesar Rp.50.000.000,- karena pada Peraturan Menteri Keuangan Nomor-15/PMK.010/2017 rata-rata besaran manfaat kematian adalah Rp.50.000.000,-. Kemudian tingkat suku bunga diasumsikan sebesar 3,50% dengan *force of interest* (δ) sebesar 0,0344014267173, tingkat suku bunga yang digunakan beracuan pada tingkat suku bunga dunia tingkat yang mencakup bunga saat ini yang berasal dari 23 negara yang berbeda termasuk juga kurs sebelumnya yang terakhir tanggal 16 Desember 2021 sebesar 3,50% diubah oleh Bank Sentral.

Sumber:https://www.bi.go.id/id/default.aspx

Dalam mendapatkan nilai estimasi parameter dari hukum mortalita De Moivre dan Gompertz untuk TMI III Tahun 2011 perempuan dan laki-laki dengan metode *maximum likelihood estimation*, maka terlebih dahulu memaksimumkan fungsi persamaan (4.1). Kemudian dilakukan penurunan pertama persamaan (4.2) terhadap 0 maka diperoleh persamaan (4.3) dan (4.4). Kedua persamaan tersebut terlihat masih saling bergantung, hal ini membuat solusi sulit untuk diperoleh. Metode yang bisa digunakan, salah satunya yaitu metode Newton-Rhapson. Parameter B dan c dapat dihitung dengan cara iteratif, kemudian diperoleh nilai estimasi parameter B = 0,005749 dan c = 1,024738.

Setelah perhitungan nilai parameter dari hukum Gompertz, diperoleh bentuk peluang hidup gabungan untuk hukum mortalita De Moivre dan Gompertz sesuai dengan persamaan (2.14) diperoleh bentuk peluang hidup gabungan untuk hukum mortalita De Moivre yaitu hasil dari peluang hidup seseorang yang berumur x tahun akan hidup sampai dengan x + t tahun dan dikalikan peluang hidup seseorang berumue y tahun akan hidup sampai dengan y + t tahun. Hasil perhitungan peluang hidup gabungan untuk hukum mortalita De Moivre adalah 0,7772485289997 dan untuk hukum mortalita Gompertz 0,5635638177228.

Selanjutnya dapat ditentukan bentuk *APV* manfaat kematian dari asuransi *joint life* berjangka sesuai dengan persamaan (2.70) yaitu hasil dari integral fungsi diskon dikalikan peluang hidup seseorang yang berusia x dan y tahun akan bertahan hidup mencapai usia x + t dan y + t tahun dikalikan percepatan kematian untuk status *joint life* dengan asumsi saling bebas. Hasil perhitungan *APV* manfaat kematian dari asuransi *joint life* berjangka untuk hukum mortalita De Moivre adalah 0,0147981091682 dan untuk hukum mortalita Gompertz 0,0112155949105.

Selanjutnya diperoleh bentuk *APV* anuitas jiwa dari asuransi *joint life* berjangka sesuai dengan persamaan (2.71) yaitu hasil dari integral fungsi diskon dikalikan peluang hidup seseorang yang berusia x dan y tahun akan bertahan hidup mencapai usia x + t dan y + t tahun. Hasil perhitungan *APV* anuitas jiwa dari asuransi *joint life* berjangka untuk hukum mortalita De Moivre adalah

0,5510061051363 dan untuk hukum mortalita Gompertz 0,3995209932563.

Setelah diperoleh *APV* manfaat kematian dari asuransi *joint life* berjangka dan *APV* anuitas jiwa dari asuransi *joint life* berjangka, maka dapat dihitung nilai premi tahunan kontinu asuransi *joint life* berjangka. Sesuai persamaan (2.72), premi tahunan kontinu asuransi *joint life* berjangka adalah hasil dari *APV* manfaat kematian dari asuransi *joint life* berjangka seseorang yang berusia x dan y tahun dibagi *APV* anuitas gabungan berjangka dari seseorang yang berusia x dan y tahun, kemudian dikalikan manfaat kematian. Hasil perhitungan premi tahunan kontinu asuransi *joint life* berjangka untuk hukum mortalita De Moivre adalah 1.342.826,2436892 dan untuk hukum mortalita Gompertz 1.403.630,2346731.

BAB V
PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan perumusan yang ada, maka dapat disimpulkan bahwa:

A. Dalam penentuan besar premi tahunan asuransi *joint life* berjangkadengan berdasar pada hukum mortalita De Moivre dilakukan dengan menghitung peluang hidup gabungan, menghitung *APV* manfaat kematian dari asuransi *joint life* berjangka berdasarkan hukum mortalita De Moivre, menghitung *APV* anuitas jiwa kontinu dari asuransi *joint life* berjangka berdasarkan hukum mortalita De Moivre, kemudian menghitung premi tahunan kontinu asuransi *joint life* berjangka berdasarkan hukum mortalita De Moivre.

Dari penelitian ini diperoleh premi tahunan pada asuransi *joint life* berjangka berdasarkan hukum mortalita De Moivre menghasilkan nilai premi sebesar 1.342.826,2436892 .

B. Dalam penentuan besar premi tahunan asuransi *joint life* berjangka berdasarkan hukum mortalita Gompertz dilakukan dengan menghitung nilai estimasi parameter TMI III berdasarkan hukum mortalita Gompertz dengan metode *maximum likelihood estimation*, menghitung peluang hidup gabungan berdasarkan hukum mortalita Gompertz, menghitung *APV* manfaat kematian dari asuransi *joint life* berjangka berdasarkan hukum mortalita Gompertz, menghitung *APV* anuitas jiwa kontinu dari asuransi *joint life* berjangka berdasarkan hukum mortalita Gompertz, kemudian menghitung premi tahunan kontinu asuransi *joint life* berjangka berdasarkan hukum mortalita Gompertz.

   Dari penelitian ini diperoleh premi tahunan pada asuransi *joint life* berjangka berdasarkan hukum mortalita Gompertz menghasilkan nilai premi sebesar 1.403.630,2346731.

B. Saran

Penelitian berikutnya bisa menggunakan asumsi hukum mortalita lainnya seperti hukum mortalita Makeham dan Weibull. Penelitian selanjutnya juga dapat menggunakan selain asuransi jiwa berjangka dan selain tabel mortalita di penulisan ini.

DAFTAR PUSTAKA

Achdijat, Didi. *Teknik Pengelolaan Asuransi Jiwa.* Gunadarma, Jakarta, 1993 [2] Batten, R. W.. *Life contingencies, A Guide for Actuarial Student, Second Edition.* ACTEX publication, Inc. United State of America, 2009.

Aprijon, dkk. 2018. Premi Tahunan Asuransi Jiwa Seumur Hidup dengan Hukum De Moivre*. Seminar Nasional Teknologi Informasi Komunikasi dan Industri (SNTIKI-10)*. Jurusan Matematika, UIN Sultan Syarif Kasim Riau.

Bhuana, Tri Yana, Dkk. 2015. *Menentukan Premi Tahunan Untuk Tiga Orang Pada Asuransi Jiwa Hidup Gabungan. E-Jurnal Matematika*. 4 (4):195-200.

Bowers, N.L., *et al*. 1997. *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries, United States.

Bowers, N. L., Hickamn, J. C.,Gerber, H. U., Jones, A., and

Nesbitt, J. 1997. *Actuarial Mathematics*. Schaumburg The Society of Actuaries.

Effendie, A. R., 2012. *Pengantar Matematika Aktuaria I.* Diktat Kuliah. Jurusan Matematika FMIPA UGM, Yogyakarta.

Finan, M. B. 2011. *A Reading of the Theory of Life Contigency Models: A Preparation for Exam MLC/3L.* Arkansas Tech University, Arkansas.

Futami, T. 1993. *Matematika Asuransi Jiwa Bagian I.* Oriental Life Insurance Cultural Development Center, Inc., Tokyo.

Futami, T. 1994. *Matematika Asuransi Jiwa Bagian II.* Oriental Life Insurance Cultural Development Center, Inc., Tokyo.

Hidayatullah Syarif. 2015. *Cara Mudah Menguasai Statistik Deskriptif*. Jakarta: Salemba Teknika.

Jordan, Jr.C.W. 1991. *Life Contingencies*. The Society of Actuaries,Chicago.

Kamal, I., Devianto, D., Yanuar, F. 2014. Penentuan Premi Tahunan Pada Asuransi Joint Life Menggunakan Anuitas Reversionary. *Jurnal Matematika UNAND*. 3(4), 112 –

120.

Kasiram, Mohammad. 2008. *Metode Penelitian Kuantitatif-Kualitatif*. Malang: UIN Malang Pres.

Lumbantoruan, D. I, 2019. *Menentukan Premi Asuransi Joint Life Secara Diskrit dan Kontinu Berdasarkan Hukum Mortalitas De Moivre dan Tabel Mortalitas Indonesia 2011*. Skripsi. FMIPA Universitas Lampung, Bandar Lampung.

Manjaruni, V.A., Purnaba, I.G.P., 2021. Menentukan Premi Asuransi Jiwa Joint Life Untuk Tiga Orang Tertanggung. *Jurnal Statistika dan Matematika*. Unpam.

Mukti, Rizhardi Amargie. 2019. *Penentuan Premi Tahunan Asuransi Joint Life Berjangka Berdasarkan Hukum Mortalita Gompertz dan Hukum Mortalita Makeham*. Skripsi. FMIPA Universitas Lampung, Bandar Lampung.

Sertdemir, B. H., 2013. *Multiple Life Insurance*. Dokuz Eylul University.

Yendra, R., Noviadi, E.T., 2015. Perbandingan Estimasi Parameter Pada Distribusi Eksponensial Menggunakan Metode Bayesian dan Metode Maximum Likelihood. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*. Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Sultan Syarif Kasim Riau, Riau.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Tabel Mortalita Indonesia untuk Laki-laki

x	q_x	p_x	l_x
0	0,00802	0,9919 8	100000

1	0,00079	0,99921	99198
2	0,00063	0,99937	99119,63
3	0,00051	0,99949	99057,19
4	0,00043	0,99957	99006,67
5	0,00038	0,99962	98964,1
6	0,00034	0,99966	98926,49
7	0,00031	0,99969	98892,85
8	0,00029	0,99971	98862,2
9	0,00028	0,99972	98833,53
10	0,00027	0,99973	98805,85
11	0,00027	0,99973	98779,18
12	0,00026	0,99974	98752,51
13	0,00026	0,99974	98726,83
14	0,00027	0,99973	98701,16
15	0,00029	0,99971	98674,51
16	0,0003	0,9997	98645,9
17	0,00032	0,99968	98616,3
18	0,00036	0,99964	98584,75

19	0,00041	0,99959	98549,26
20	0,00049	0,99951	98508,85
21	0,00059	0,99941	98460,58
22	0,00069	0,99931	98402,49
23	0,00077	0,99923	98334,59
24	0,00083	0,99917	98258,87
25	0,00085	0,99915	98177,32
26	0,00083	0,99917	98093,87
27	0,00079	0,99921	98012,45
28	0,00075	0,99925	97935,02
29	0,00074	0,99926	97861,57
30	0,00076	0,99924	97789,15
31	0,0008	0,9992	97714,83
32	0,00083	0,99917	97636,66
33	0,00084	0,99916	97555,62
34	0,00086	0,99914	97473,68
35	0,00091	0,99909	97389,85
36	0,00099	0,9990	97301,2

		1	2
37	0,00109	0,99891	97204,89
38	0,0012	0,9988	97098,94
39	0,00135	0,99865	96982,42
40	0,00153	0,99847	96851,5
41	0,00175	0,99825	96703,31
42	0,00196	0,99804	96534,08
43	0,00219	0,99781	96344,88
44	0,00246	0,99754	96133,88
45	0,00279	0,99721	95897,39
46	0,00318	0,99682	95629,84
47	0,00363	0,99637	95325,73
48	0,00414	0,99586	94979,7
49	0,00471	0,99529	94586,49
50	0,00538	0,99462	94140,98
51	0,00615	0,99385	93634,51
52	0,00699	0,99301	93058,65
53	0,00784	0,99216	92408,17

54	0,00872	0,99128	91683,69
55	0,00961	0,99039	90884,21
56	0,01051	0,98949	90010,81
57	0,01142	0,98858	89064,8
58	0,01232	0,98768	88047,68
59	0,01322	0,98678	86962,93
60	0,01417	0,98583	85813,28
61	0,01521	0,98479	84597,31
62	0,01639	0,98361	83310,58
63	0,01773	0,98227	81945,12
64	0,01926	0,98074	80492,24
65	0,021	0,979	78941,96
66	0,02288	0,97712	77284,17
67	0,02486	0,97514	75515,91
68	0,02702	0,97298	73638,59
69	0,02921	0,97079	71648,87
70	0,03182	0,96818	69556,01
71	0,03473	0,9652	67342,7

		7	4
72	0,03861	0,96139	65003,92
73	0,04264	0,95736	62494,12
74	0,04687	0,95313	59829,37
75	0,05155	0,94845	57025,17
76	0,05664	0,94336	54085,52
77	0,06254	0,93746	51022,12
78	0,06942	0,93058	47831,2
79	0,07734	0,92266	44510,75
80	0,08597	0,91403	41068,29
81	0,09577	0,90423	37537,65
82	0,10593	0,89407	33942,67
83	0,11683	0,88317	30347,12
84	0,12888	0,87112	26801,67
85	0,14241	0,85759	23347,47
86	0,15738	0,84262	20022,56
87	0,17363	0,82637	16871,41
88	0,1911	0,8089	13942,02

89	0,20945	0,79055	11277,7
90	0,22853	0,77147	8915,588
91	0,24638	0,75362	6878,109
92	0,26496	0,73504	5183,48
93	0,2845	0,7155	3810,066
94	0,30511	0,69489	2726,102
95	0,32682	0,67318	1894,341
96	0,34662	0,65338	1275,232
97	0,3677	0,6323	833,2114
98	0,39016	0,60984	526,8395
99	0,41413	0,58587	321,2878
100	0,43974	0,56026	188,2329
101	0,45994	0,54006	105,4594
102	0,48143	0,51857	56,95438
103	0,50431	0,49569	29,53484
104	0,52864	0,47136	14,64012
105	0,5545	0,4455	6,900768
106	0,58198	0,4180	3,07429

		2	2
107	0,61119	0,38881	1,285116
108	0,64222	0,35778	0,499666
109	0,67518	0,32482	0,17877
110	0,71016	0,28984	0,058068
111	1	0	0,01683

Lampiran 2 Tabel Mortalita Indonesia untuk Perempuan

x	q_x	p_x	l_x
0	0,0037	0,9963	100000
1	0,00056	0,99944	99630
2	0,00042	0,99958	99574,2072
3	0,00033	0,99967	99532,38603
4	0,00028	0,99972	99499,54035
5	0,00027	0,99973	99471,68047
6	0,0003	0,9997	99444,82312
7	0,00031	0,99969	99414,98967
8	0,0003	0,9997	99384,17103
9	0,00028	0,99972	99354,35578

10	0,00025	0,99975	99326,53656
11	0,00024	0,99976	99301,70492
12	0,00026	0,99974	99277,87251
13	0,00028	0,99972	99252,06027
14	0,00029	0,99971	99224,26969
15	0,00028	0,99972	99195,49465
16	0,00025	0,99975	99167,71991
17	0,00024	0,99976	99142,92798
18	0,00023	0,99977	99119,13368
19	0,00024	0,99976	99096,33628
20	0,00026	0,99974	99072,55316
21	0,00029	0,99971	99046,79429
22	0,00033	0,99967	99018,07072
23	0,00037	0,99963	98985,39476
24	0,00039	0,99961	98948,77016
25	0,00042	0,99958	98910,18014
26	0,00044	0,99956	98868,63787
27	0,00046	0,9995	98825,1356

		4	7
28	0,00048	0,99952	98779,67611
29	0,00051	0,99949	98732,26186
30	0,00054	0,99946	98681,90841
31	0,00057	0,99943	98628,62018
32	0,0006	0,9994	98572,40186
33	0,00062	0,99938	98513,25842
34	0,00064	0,99936	98452,1802
35	0,00067	0,99933	98389,17081
36	0,00074	0,99926	98323,25006
37	0,00084	0,99916	98250,49086
38	0,00093	0,99907	98167,96044
39	0,00104	0,99896	98076,66424
40	0,00114	0,99886	97974,66451
41	0,00126	0,99874	97862,97339
42	0,00141	0,99859	97739,66605
43	0,00158	0,99842	97601,85312
44	0,00175	0,99825	97447,64219

45	0,00193	0,99807	97277,10882
46	0,00214	0,99786	97089,364
47	0,00239	0,99761	96881,59276
48	0,00268	0,99732	96650,04575
49	0,00299	0,99701	96391,02363
50	0,00334	0,99666	96102,81447
51	0,00374	0,99626	95781,83107
52	0,00422	0,99578	95423,60702
53	0,00479	0,99521	95020,9194
54	0,00542	0,99458	94565,76919
55	0,00607	0,99393	94053,22272
56	0,00669	0,99331	93482,31966
57	0,00725	0,99275	92856,92294
58	0,00776	0,99224	92183,71025
59	0,00826	0,99174	91468,36466
60	0,00877	0,99123	90712,83597
61	0,00936	0,99064	89917,2844
62	0,01004	0,9899	89075,6586

		6	1
63	0,01104	0,98896	88181,339
64	0,01214	0,98786	87207,81702
65	0,01334	0,98666	86149,11412
66	0,01466	0,98534	84999,88494
67	0,01612	0,98388	83753,78663
68	0,01771	0,98229	82403,67559
69	0,01947	0,98053	80944,30649
70	0,02121	0,97879	79368,32084
71	0,02319	0,97681	77684,91876
72	0,02539	0,97461	75883,40549
73	0,02778	0,97222	73956,72583
74	0,03042	0,96958	71902,20798
75	0,0333	0,9667	69714,94282
76	0,03646	0,96354	67393,43522
77	0,03991	0,96009	64936,27057
78	0,04372	0,95628	62344,66401
79	0,04789	0,95211	59618,9553

80	0,05247	0,94753	56763,80353
81	0,05877	0,94123	53785,40676
82	0,06579	0,93421	50624,43841
83	0,07284	0,92716	47293,8566
84	0,08061	0,91939	43848,97209
85	0,08925	0,91075	40314,30645
86	0,09713	0,90287	36716,2546
87	0,10893	0,89107	33150,00479
88	0,12131	0,87869	29538,97477
89	0,1345	0,8655	25955,60174
90	0,14645	0,85355	22464,5733
91	0,15243	0,84757	19174,63654
92	0,16454	0,83546	16251,8467
93	0,18235	0,81765	13577,76784
94	0,20488	0,79512	11101,86187
95	0,23305	0,76695	8827,312414
96	0,25962	0,74038	6770,107256
97	0,2872	0,7128	5012,45201

98	0,29173	0,70827	3572,875793
99	0,30759	0,69241	2530,560738
100	0,33241	0,66759	1752,18556
101	0,35918	0,64082	1169,741558
102	0,38871	0,61129	749,5937854
103	0,42124	0,57876	458,2191851
104	0,45705	0,54295	265,1989355
105	0,4958	0,5042	143,9897621
106	0,53553	0,46447	72,59963803
107	0,57626	0,42374	33,72035388
108	0,61725	0,38275	14,28866275
109	0,65996	0,34004	5,468985668
110	0,70366	0,29634	1,859673887
111	1	0	0,55109576

Lampiran 3 Tabel Nilai *APV* Manfaat Kematian, *APV* Anuitas Gabungan Berjangka dan Premi Tahunan Asuransi Joint Life Berjangka Berdasarkan Hukum Mortalita De Moivre dan Gompertz

t	$\bar{A}_{xy:\overline{n}\rceil}$		$\bar{a}_{xy:\overline{n}\rceil}$		$\bar{P}\left(\bar{A}_{xy:\overline{n}\rceil}\right)$	
	De Moivre	**Gompertz**	**De Moivre**	**Gompertz**	**De Moivre**	**Gompertz**
5	0.009378	0.007990181	0.372624437	0.32161634	1.258.309,60	1.242.191,36
10	0.014798	0.011215595	0.551006105	0.39952099	1.342.826,25	1.403.630,25
15	0.017435	0.011349526	0.60558726	0.35779214	1.439.519,47	1.586.050,15
20	0.018165	0.009762866	0.585505449	0.27237435	1.551.226,55	1.792.177,91
25	0.017636	0.007485542	0.524339468	0.18481956	1.681.741,09	2.025.094,68
30	0.016322	0.005204345	0.444424624	0.11371729	1.836.253,37	2.288.282,01
35	0.014562	0.003298225	0.360073095	0.06377882	2.022.058,83	2.585.673,92
40	0.012597	0.001903738	0.279959844	0.03257911	2.249.747,21	2.921.716,14
45	0.010591	0.000996211	0.208875587	0.01508757	2.535.301,67	3.301.430,35
50	0.008654	0.00046915	0.149002108	0.00628804	2.904.040,40	3.730.496,38
55	0.006854	0.000196911	0.100829272	0.00233566	3.398.617,51	4.215.317,09
60	0.005228	7.27872E-05	0.063805028	0.00076406	4.096.989,96	4.763.183,36
65	0.003796	2.33637E-05	0.036787975	0.00021705	5.158.730,16	5.382.108,21
70	0.002559	6.40631E-06	0.018355252	0.00005267	6.971.153,84	6.081.558,19

Keterangan:

t = Jangka Waktu (tahun)

$\bar{A}_{xy:\overline{n}\rceil}$ = *APV* Manfaat Kematian (satuan)

$\bar{a}_{xy:\overline{n}\rceil}$ = *APV* Anuitas Gabungan Berjangka (satuan)

$\bar{P}\left(\bar{A}_{xy:\overline{n|}}\right)$ = Premi Tahunan Asuransi *Joint Life* Berjangka (rupiah)

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

1. Nama Lengkap : Afifah Dina Ayu Ningtyas
2. Tempat Tanggal Lahir : Batang, 11 November1998
3. Alamat : ds Karangtengah 02/05
   Subah, Batang
4. Nomor HP : 085893057705
5. E-mail : afifahfah2@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. Pendidikan Formal
   a. SD Negeri Karangtengah 02 lulus tahun 2011
   b. SMP Negeri 1 Subah lulus tahun 2014
   c. SMA Negeri 1 Subah lulus tahun 2017
   d. UIN Walisongo Semarang

2. Pendidikan Non Formal
    a. Madrasah Diniyah Al-Falah Karangtengah Subah Batang
    b. Pesantren Mahasiswa Pemuda Islam Ngaliyan Semarang