SIFAT-SIFAT SEGITIGA SACCHERI PADA GEOMETRI BOLA

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat

Guna Memperoleh Gelar Sarjana Matematika

dalam Ilmu Matematika

Oleh:

Eva Lutfi Hamidah

NIM : 1708046030

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO

SEMARANG

2021

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Eva Lutfi Hamidah

NIM : 1708046030

Jurusan : Matematika

Menyatakan bahwa skripsi yang berjudul:

SIFAT-SIFAT SEGITIGA SACCHERI PADA GEOMETRI BOLA

Secara keseluruhan adalah hasil penelitian/ karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 15 Desember 2021

Pembuat Pernyataan

Eva Lufi Hamidah

NIM : 1708046030

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka Ngaliyan, Semarang 50185
Telp. 024-7601295, Fax. 024-7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini:

Judul	:	**Sifat-Sifat Segitiga Saccheri pada Geometri Bola**
Penulis	:	Eva Lutfi Hamidah
NIM	:	1708046030
Jurusan	:	Matematika

Telah diujikan dalam sidang tugas akhir oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Pendidikan Matematika.

Semarang, 29 Desember 2021

DEWAN PENGUJI

Ketua Sidang,

Yulia Romadiastri, M.Sc.
NIP. 19810715 200501 2 008

Sekretaris Sidang,

Minhayati Shaleh, M.Sc.
NIP. 19760426 200604 2 001

Penguji Utama I,

Siti Maslihah, M.Si.
NIP. 19770611 201101 2 004

Penguji Utama II,

Nur Khasanah, M.Si.
NIP. 19911121 200912 2 017

Pembimbing I,

Yulia Romadiastri, M.Sc.
NIP. 19810715 200501 2 008

Pembimbing II,

Juanda Kelana Putra, M.Sc.
NIP. 19880214 201903 1 011

NOTA DINAS

Semarang, 17 Desember 2021

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum. wr. wb.

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : Sifat-sifat Segitiga Saccheri pada Geometri Bola
Nama : **Eva Lutfi Hamidah**
NIM : 1708046030
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum. wr. wb.

Pembimbing I,

Yulia Romadiastri, S.Si, M.Si
NIP. 19810715 200501 2 008

NOTA DINAS

Semarang, 25 Juli 2021

Kepada
Yth.Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum. wr. wb.

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : Sifat-sifat Segitiga Saccheri Pada Geometri Bola

Nama : **Eva Lutfi Hamidah**

NIM : 1708046030

Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum. wr. wb.

Pembimbing II,

Juanda Kelana Putra, M.Sc

NIP. 19880214 201903 1 011

ABSTRAK

Geometri merupakan suatu cabang dari ilmu matematika yang menjelaskan mengenai sifat-sifat garis, sudut, bidang, ruang, ukuran dan hubungannya. Pada umumnya, geometri dibagi menjadi dua jenis yaitu geometri Euclid dan geometri non Euclid. Geometri non Euclid terbagi menjadi dua yaitu geometri hiperbolik dan geometri eliptik. Geometri yaitu salah satu jenis dari geometri eliptik. Salah satu bangun datar yang terdapat pada geometri bola adalah segitiga. Skripsi ini membahas mengenai sifat segitiga saccheri pada geometri bola. Segitiga yang akan dibahas pada skripsi ini yaitu segitiga sebarang, segitiga sama kaki, segitiga sama sisi dan segitiga siku-siku. Metode pengumpulan data yang digunakan adalah studi pustaka atau kepustakaan. Hasil penelitian dari skripsi ini yaitu segitiga bola sebarang memiliki jumlah panjang dua sisi > panjang sisi ketiga, jumlah panjang ketiga sisi: $0 < p < 2\pi$, besar ketiga sudut: π radian < besar ketiga sudut < 3π radian. Segitiga sama kaki memiliki dua sudut sama besar dan satu sumbu simetri, segitiga sama sisi memiliki tiga sudut sama besar dan tiga sumbu simetri. Torema phytagoras pada segitiga bola siku-siku yaitu $\cos\left({}^{c}/_{R}\right) = \cos\left({}^{a}/_{R}\right)\cos\left({}^{b}/_{R}\right)$

Kata kunci : geometri eliptik, geometri bola, segitiga saccheri, sifat segitiga bola.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirsbbil 'alamiin puji syukur bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga saya bisa menyekesaikan skripsi saya berjudul "SIFAT-SIFAT SEGITIGA SACCHERI PADA GEOMETRI BOLA" tepat pada waktunya.

Penyusunan skripsi ini dilakukan setelah menyelesaikan penelitian di UIN Walisongo Semarang. Skripsi ini diajukan sebagai salah satu persyaratan untuk mendapatkan gelar Strata Satu Program Studi Matematika UIN Walisongo Semarang. Skripsi ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu penulis mengharap kritik dan saran.

Terselesaikannya skripsi berkat bantuan dari banyak pihak, sehingga pada kesempatan ini dengan penuh rasa hormat penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak dan Ibu yang selalu memberikan doa yang tidak pernah terhenti dan dukungan yang selalu menguatkan guna terselesaikannya skripsi ini.
2. Ibu Emy Siswanah, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika yang selalu memberikan masukan guna terselesaikannya penulisan skripsi ini.

3. Bapak Aunur Rohman, M.Pd., selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.
4. Ibu Yulia Romadiastri, S.Si, M.Si., selaku ketua Program Studi Pendidikan Matematika dan juga selaku pembimbing I yang senantiasa memberikan saran dan masukan serta dorongan dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Ibu Aini Fitriyah, M. Sc., selaku wali dosen yang senantiasa member masukan dan saran guna terselesaikannya skripsi ini.
6. Bapak Juanda Kelana Putra, M.Sc., selaku pembimbing II yang senantiasa memberikan doa, dukungan dan saran dalam menyelesaikan skripsi ini.
7. Bapak/ibu dosen dan staff di lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang terkhusus Fakultas Sains dan Teknologi.
8. Mas Maulana Anas Hanafi yang selalu memberikan semangat, dukungan, doa dan motivasi sampai terselesaikannya skripsi ini.
9. Teman-teman matematika 2017 yang telah menemani perjuangan kuliah dan tidak hentinya saling mendoakan guna terselesaikannya skripsi.

Dengan segala harapan dan doa, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pembaca pada umumnya. Aamiin Yaa Rabbal'alamiin.

Wassalamualaikum Wr.Wb.

Semarang, 15 Desember 2021

Pembuat Pernyataan

Eva Lufi Hamidah

NIM : 1708046030

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Salah satu cabang dari ilmu matematika adalah geometri. Geometri memuat dua kata yaitu *geometria*, *geo* yaitu tanah dan *metria* yaitu pengukuran. Geometri ada sebelum Masehi. Pada kamus Bahasa Indonesia, geometri artinya Ilmu Ukur (Moeharti, 1996: 1.2). Geometri sebagai suatu ilmu matematika yang menjelaskan mengenai sifat-sifat garis, sudut, bidang, ruang, ukuran-ukurannya dan hubungannya.

Geometri yang muncul pertama kali sebagai sistem deduktif adalah Geometri yang berasal dari Euclides. Ditemukan 300 tahun sebelum Masehi, Euclides menulis buku berjudul “The Elements” atau “Euclid’s Elements” yang berisi unsur-unsur geometri dengan menggunakan definisi, aksioma, dan postulat. Dalam bukunya, Euclides menuliskan lima buah postulat. Empat buah postulat Euclides dapat diterima oleh para ahli matematika sedangkan postulat kelimanya menjadi perdebatan dikalangan ahli matematika. Empat buah postulat Euclides tersebut yaitu (Jairo Eduardo Marquez Diaz, 2018):

Postulat I : Untuk sebarang titik P dan Q yang berlainan, terdapat garis l yang melewati P dan Q. Secara umum dapat didefinisikan sebagai untuk sebarang titik dapat ditarik garis dari sebarang titik ke sebarang titik yang lain.

Postulat II : Suatu ruas garis dapat diperpanjang tanpa batas menjadi garis lurus.

Postulat III : Lingkaran dapat dibuat dari sebarang titik pusat dan sebarang jarak.

Postulat IV : Semua sudut siku-siku adalah sama.

Postulat kelima Euclides yang terkenal berbunyi:

Postulat V : Jika suatu garis lurus memotong dua garis lurus dan membuat sudut-sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku, kedua garis itu jika diperpanjang tak terbatas, akan bertemu di pihak tempat kedua sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku.

Postulat kelima Euclides menimbulkan perbedaan pendapat di kalangan ahli matematika. Beberapa ahli matematika menganggap bahwa postulat kelima Euclides bukanlah sebuah postulat melainkan sebuah teorema. Usaha untuk membuktikan postulat kelima Euclides tidak pernah membuahkan hasil dan para ahli matematika hanya dapat mengganti postulat kelima Euclides dengan yang lebih sederhana dan ekuivalen, seperti postulat yang dikemukakan oleh John Playfair pada tahun 1795. Postulat John Playfair tersebut berbunyi "Untuk setiap garis ℓ dan untuk setiap titik P yang tidak terletak pada ℓ ada paling banyak satu buah garis m yang melalui titik P dan sejajar dengan garis ℓ" (Marvin J. Greenberg, 1994: 19).

Pada Geometri Euclid disimpulkan bahwa terdapat geometri yang berlainan pada logikanya, pengertian pangkal serta aksioma yaitu Geometri Absolut atau Geometri Netral. Geometri Absolut ditemukan oleh Y. Bolyai (1802-1860). Menurut Prenowitz dan Jordan (1965), geometri netral mempunyai sistem aksioma keantaraan, sistem aksioma urutan, dan sistem aksioma kekongruenan tentang ruas garis, sudut, dan segitiga. Geometri netral hanya berlandaskan empat postulat awal Euclid. Usaha para ahli matematika untuk membuktikan postulat kelima Euclides memang tidak membuahkan hasil, namun dalam usahanya tersebut muncul geometri Non-Euclides berdasarkan empat postulat pertama Euclides dan berbeda pada postulat kelimanya saja. Dua jenis geometri Non-Euclides, salah satunya yaitu geometri yang ditemukan oleh seorang matematikawan bernama G.F.B. Bernhard Riemann pada tahun 1854. Postulat kesejajaran Riemann berbunyi "Tidak ada garis-garis yang sejajar dengan garis lain" (Moeharti, 1996: 5.17). Teori Riemann ini menjadi dasar Geometri Riemann atau Geometri Eliptik.

Geometri Eliptik dibagi menjadi dua yaitu Geometri Eliptik tunggal atau geometri setengah bola dan Geometri Eliptik Ganda atau geometri bola. Geometri bola adalah geometri dua dimensi dari permukaan bola. Sifat dari geometri bola yaitu dua garis tepat berpotongan pada dua titik dan garis memisahkan bidang menjadikan dua setengah bidang. Pada geometri bola, terdapat teorema yang menarik untuk diteliti yaitu teorema Saccheri Legendre. Teorema Saccheri Legendre dikemukakan oleh dua orang matematikawan yang bernama Giovanni Girolamo Saccheri dan Adrien Marie Legendre. Teorema ini menyatakan jumlah besar sudut suatu segitiga sebarang yaitu 180° yang kemudian segitiga ini dikenal dengan nama segitiga Saccheri. Menurut Greenberg, segitiga Saccheri yaitu segitiga dengan sepasang sisi sama panjang serta tegak lurus terhadap sisi alasnya. Segitiga Saccheri dalam geometri bola ini memiliki sudut puncak yang kongruen dan tumpul.

Jika selama ini seseorang belajar di sekolah dan diajarkan mengenai jumlah besar sudut suatu segitiga sebarang yaitu 180°, akan berbanding terbalik dengan teorema Saccheri Legendre yaitu jumlah besar sudut dalam suatu segitiga sebarang melebihi 180°.

Hal inilah yang menginspirasi peneliti untuk meneliti sifat-sifat segitiga saccheri pada geometri bola. Oleh karena itu, diharapkan dari penelitian ini dapat berguna untuk menambah pengetahuan mengenai sifat-sifat segitiga Saccheri pada Geometri Bola. Berdasarkan latar belakang tersebut peneliti mengambil judul **"Sifat-sifat Segitiga Saccheri pada Geometri Bola"**.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah tersebut, dapat diambil rumusan masalah yaitu:

1. Bagaimana sifat segitiga bola sebarang?
2. Bagaimana sifat segitiga sama kaki dan segitiga sama sisi pada Geometri Bola?
3. Bagaimana sifat segitiga siku-siku pada Geometri Bola?

C. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu

1. Untuk mengetahui sifat segitiga bola sebarang
2. Untuk mengetahui sifat segitiga sama kaki dan segitiga sama sisi pada Geometri Bola.
3. Untuk mengetahui sifat segitiga siku-siku pada Geometri Bola.

D. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini yaitu :

1. Bagi Mahasiswa

   Untuk mengetahui lebih jelas mengenai segitiga Saccheri dan sifat-sifatnya pada geometri bola.
2. Bagi Perpustakaan

   Menambah referensi mengenai segitiga Saccheri pada geometri.
3. Bagi Peneliti Selanjutnya

   Penelitian ini dapat dijadikan suatu referensi penelitian selanjutnya, terkhusus yang berkaitan pada sifat-sifat segitiga Saccheri pada geometri bola.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

A. Kajian Teori

1. Sejarah Geometri Bola

Euclides menulis buku berjudul *The Elements* atau *Euclid's Elements* yang berisi unsur-unsur geometri dengan menggunakan definisi, aksioma, dan postulat. Dalam bukunya, Euclides menuliskan lima buah postulat. Empat buah postulat Euclides dapat diterima oleh para ahli matematika sedangkan postulat kelimanya menjadi perdebatan dikalangan ahli matematika. Empat buah postulat Euclides tersebut yaitu (Jairo Eduardo Marquez Diaz, 2018):

Postulat I: Untuk sebarang titik dapat ditarik garis dari sebarang titik ke sebarang titik yang lain.

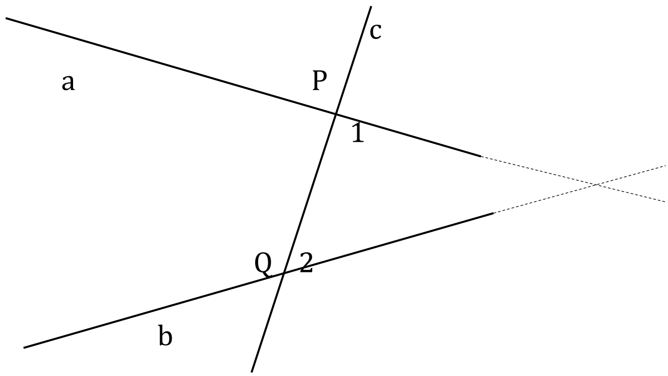
Postulat II: Suatu ruas garis dapat diperpanjang tanpa batas menjadi garis lurus.

Postulat III: Lingkaran dapat dibuat dari sebarang titik pusat dan sebarang jarak.

Postulat IV: Semua sudut siku-siku yaitu sama.

Postulat kelima Euclides yang tekenal berbunyi (Moeharti, 1996: 1.12):

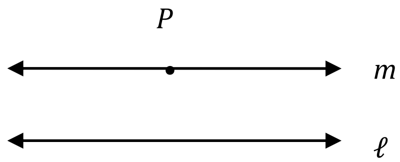
Postulat V: Jika suatu garis lurus memotong dua garis lurus dan membuat sudut-sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku, kedua garis itu jika diperpanjang tak terbatas, akan bertemu di pihak tempat kedua sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku.



Gambar 2.1 Postulat Kelima Euclides

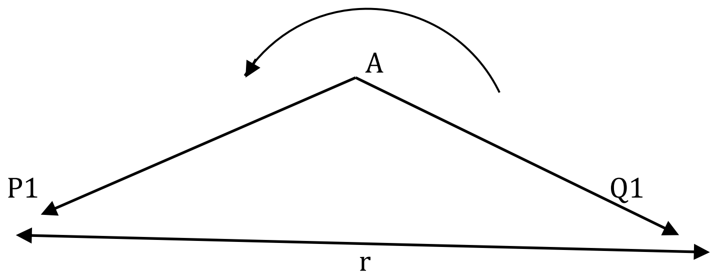
Postulat kelima Euclides menimbulkan perbedaan pendapat di kalangan ahli matematika. Beberapa ahli matematika menganggap bahwa postulat kelima Euclides bukan sebuah postulat tapi sebuah teorema yang bisa dibuktikan. Usaha untuk membuktikan postulat kelima Euclides tidak pernah membuahkan hasil dan para ahli matematika hanya dapat mengganti postulat kelima Euclides dengan yang lebih sederhana dan ekuivalen, seperti postulat yang dikemukakan oleh

John Playfair pada tahun 1795. Postulat John Playfair tersebut berbunyi “Untuk setiap garis ℓ dan untuk setiap titik P yang tidak terletak pada ℓ ada paling banyak satu buah garis m yang melalui titik P dan sejajar dengan garis ℓ” (Marvin J. Greenberg, 1994: 19).



Gambar 2.2 Ilustrasi Postulat Playfair

Sekitar tahun 1820, seorang matematikawan bernama Nicolai Ivanovitch Lobachevsky dengan Gauss dan Bolyai memperkenalkan Geometri Non Euclid. Geometri Non Euclid dibagi menjadi dua yaitu Geometri Hiperbolik dan Geometri Eliptik. Geometri Hiperbolik termasuk salah satu dari Geometri Netral, yang dalam hal ini, setiap segitiga memiliki jumlah sudut yang kurang dari 180°. Geometri netral didasarkan pada empat postulat pertama Euclides akan tetapi tidak terikat pada postulat kesejajaran geometri Euclides maupun geometri hiperbolik. Geometri netral merupakan geometri yang memenuhi empat postulat Euclides, geometri netral juga merupakan geometri tanpa postulat kesejajaran. Geometri hiperbolik didasarkan pada empat postulat geometri netral dan postulat kesejajaran hiperbolik. Postulat kesejajaran hiperbolik berbunyi “ada paling sedikit dua garis lurus yang sejajar dengan suatu garis tertentu, dimana kedua garis tersebut melalui sebuah titik diluar garis tertentu tersebut” (Amin, 2017: 24).



Gambar 2.3 Ilustrasi Postulat Kesejajaran Hiperbolik

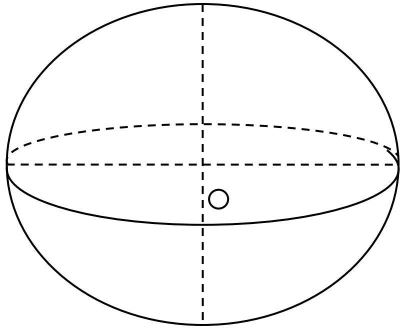
Lobachevsky, Gauss dan Bolyai mengemukakan bahwa P1 adalah sinar pertama yang tidak memotong r pada arah kanan sedangkan Q1 adalah sinar terakhir yang tidak memotong r pada arah kiri. Sinar P1 dan Q1 yaitu sinar-sinar yang sejajar dengan r. Jadi, dua garis disebut sejajar jika garis-garis tersebut hampir berpotongan (Amin, 2017:

24). Sejumlah matematikawan menganggap bahwa geometri hiperbolik masih belum mampu menjawab pertanyaan di bidang astronomi. Oleh karena itu, Benhard Riemann postulat yang berbeda dengan postulat kejajaran euclides untuk digunakan dalam bidang astronomi yang berbunyi: "Tidak ada garis-garis yang sejajar dengan garis lain"(Moeharti, 1996: 5.17). Postulat ini menjadi dasar munculnya geometri eliptik. Geometri eliptik dibagi menjadi dua jenis yaitu geometri eliptik tunggal yang direpresentasikan dengan setengah bola dan geometri eliptik rangkap yang direpresentikasikan dengan bola yang utuh. Geometri bola merupakan bagian dari geometri eliptik

2. Konsep Dasar Geometri Bola

Definisi 2.1 (Wentworth, 1899: 381)

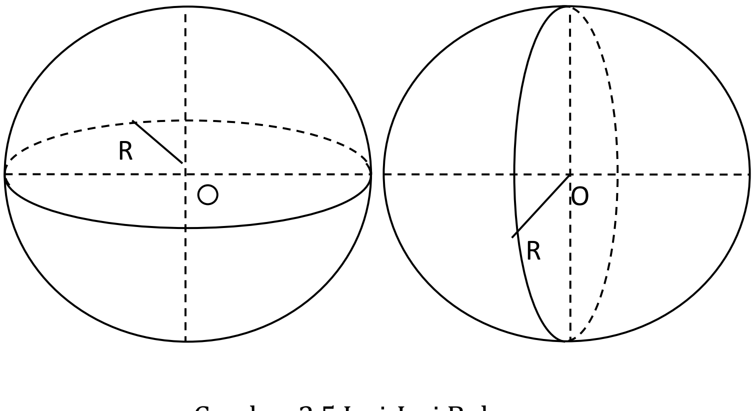
Bola adalah permukaan yang dimana setiap titik pada permukaan tersebut memiliki jarak sama dari sebuah titik yang dinamakan pusat.



Gambar 2.4 Bola dengan Titik Pusat O

Definisi 2.2 (Greenberg, 1994: 444)

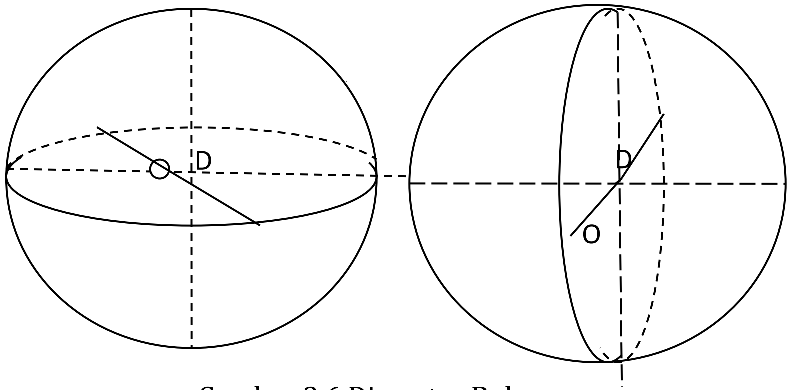
Jari-jari bola yaitu ruas garis yang titik pangkalnya merupakan titik pusat dan titik ujungnya merupakan titik pada permukaan bola.



Gambar 2.5 Jari-Jari Bola

Definisi 2.3 (Greenberg, 1994: 444)

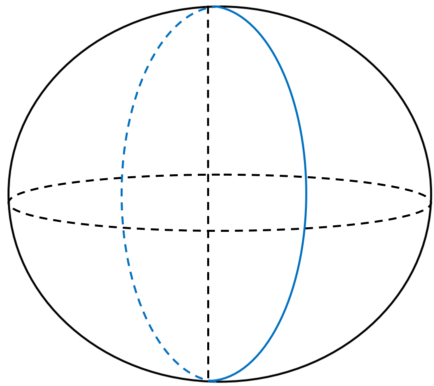
Segmen garis lurus yang melewati pusat bola dan berhenti di dua titik pada permukaan bola dinamakan diameter.



Gambar 2.6 Diameter Bola

Definisi 2.4 (C.A. Hart, 1912: 418)

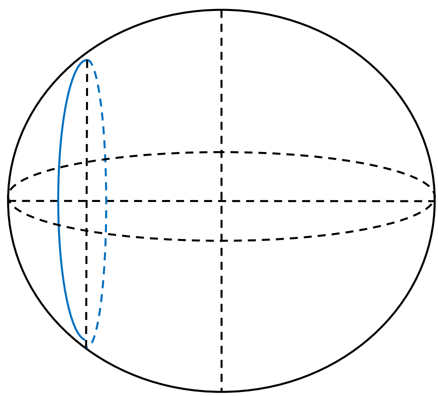
Lingkaran besar pada bola adalah bagian yang dibuat oleh sebuah bidang datar yang melewati titik pusat bola.



Gambar 2.7 Lingkaran Besar

Definisi 2.5 (C. A. Hart, 1912: 418)

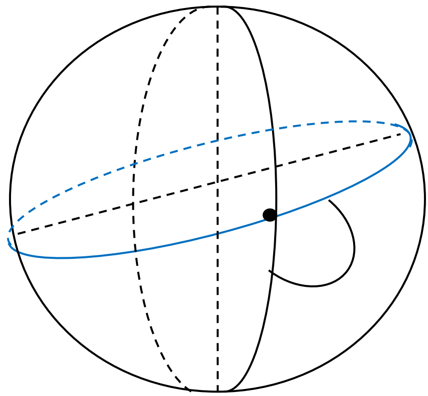
Lingkaran kecil pada bola adalah bagian yang dibuat oleh sebuah bidang datar yang tidak melewati titik pusat bola.



Gambar 2.8 Lingkaran kecil

Definisi 2.6 (Cresswell, 1816: 27)

Sudut pada bola yaitu hasil perpotongan dua busur lingkaran besar berbeda yang bertemu pada suatU titik.



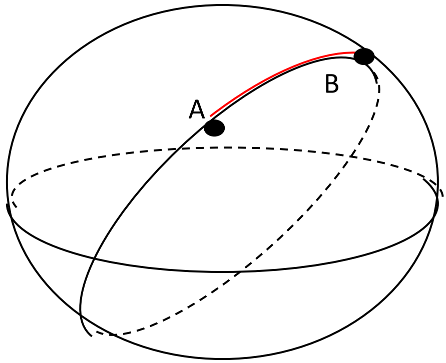
Gambar 2.9 Sudut Pada Bola

Definisi 2.7 (Greenberg, 1994: 444)

Sudut pusat bola adalah sudut yang dibentuk oleh dua jari-jari bola.

Definisi 2.8 (Moeharti, 1996: 5.19)

Setiap busur pada bola yaitu busur lingkaran besar. Busur pada bola dilambangkan dengan $\widehat{AB}$.



Gambar 2.10 Busur Pada Bola

Definisi 2.9 (Moeharti, 1996: 5.20)

Panjang busur pada bola merupakan panjang busur pada lingkaran besar. Panjang busur pada bola merupakan besar sudut pusat bola yang menghadap busur dikalikan dengan jari-jari pada bola.

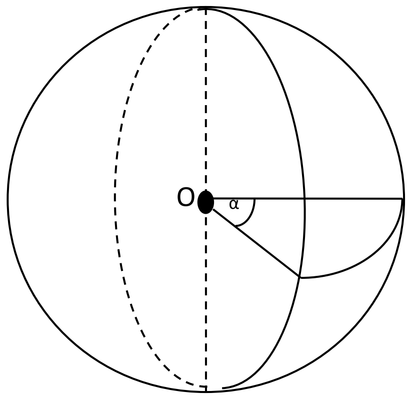
Definisi 2.10 (C. A. Hart, 1912: 419)

Jarak antara dua titik pada bola adalah panjang dari busur pendek pada lingkaran besar yang melalui kedua titik tersebut.

Definisi 2.11 (Moeharti, 1996: 5.20)

Sudut pada bola merupakan hasil perpotongan dua buah busur pada lingkaran besar.

Besar sudut pada bola didefinisikan sebagai besar sudut antara dua bidang yang memuat dua segmen garis.



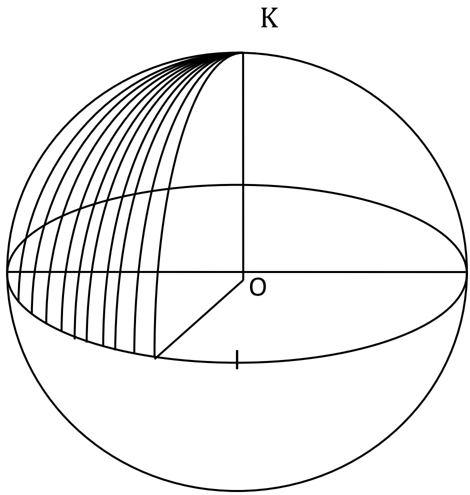
Gambar 2.11 Sudut Pada Bola

Definisi 2.12 (Moeharti, 1996: 5.20)

Misalkan l sebuah garis. Maka terdapat suatu titik K yang dinamakan kutub dari l sedemikian sehingga:

a. Setiap segmen yang menghubungkan K pada suatu titik pada l tegak lurus pada l.
b. K berjarak sama dari setiap titik pada l

Jarak K sampai sebarang titik pada l dinamakan jarak polar. Jarak polar suatu kutub sampai garisnya adalah konstan, demikian juga panjang suatu garis.

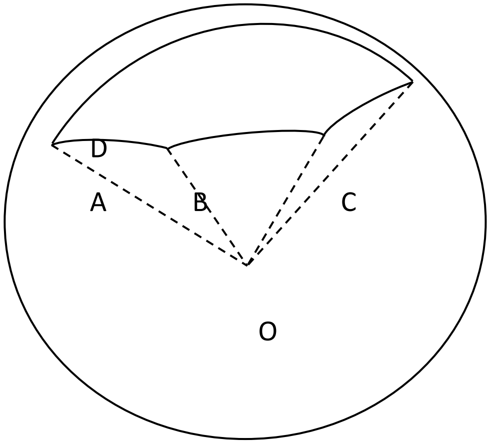


Gambar 2.12. Kutub pada Bola

Definisi 2.13 (Greenberg, 1994: 446)

Poligon bola adalah bidang pada permukaan bola yang batasnya terdiri atas tiga atau lebih busur lingkaran besar, seperti ABCD.

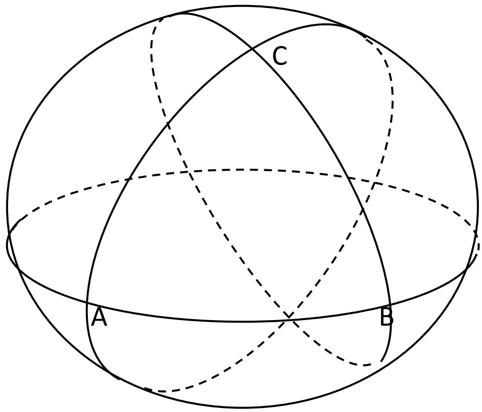
Busur pembatas disebut sisi poligon, titik perpotongan dari busur disebut simpul dari poligon, dan sudut bola yang dibentuk oleh sisi-sisinya disebut sudut poligon



Gambar 2.13 Poligon Bola

Definisi 2.14 (Moeharti: 1996: 5.28)

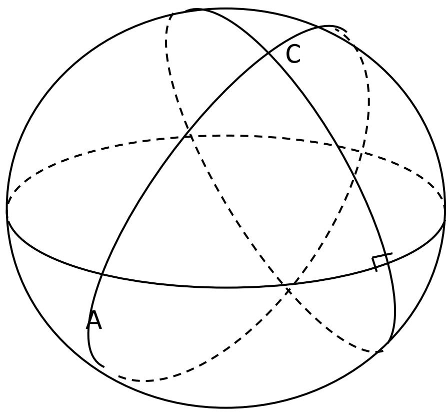
Segitiga bola yaitu polygon bola yang memiliki tiga buah busur. Sisi segitiga bola adalah busur yang membentuk segitiga bola dan titik sudut segitiga bola merupakan titik perpotongan sisi-sisi tersebut.



Gambar 2.14 Segitiga Bola

Definisi 2.15 (Moeharti: 1996: 5.22)

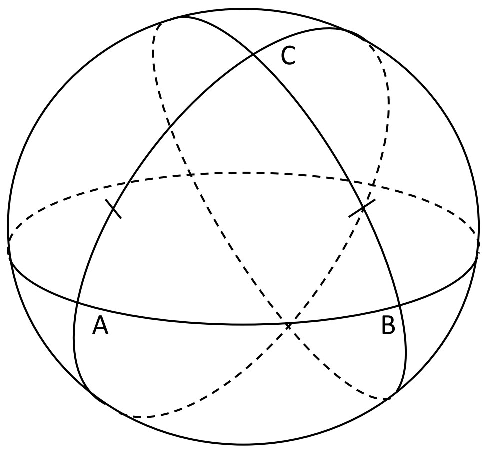
Segitiga siku-siku pada geometri bola yaitu segitiga yang memiliki paling tidak satu sudut siku-siku.



Gambar 2.15 Segitiga Bola Siku-siku

Definisi 2.16 (Nikita, 2018: 76)

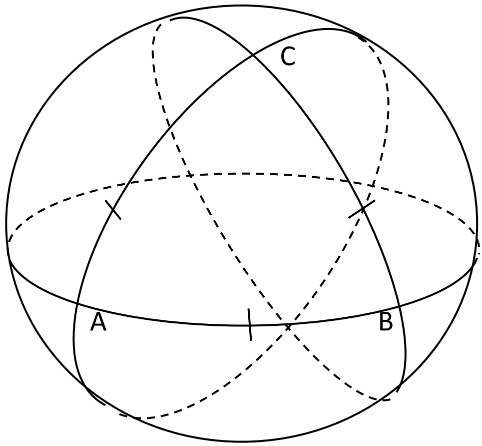
Segitiga sama kaki pada geometri bola merupakan segitiga bola yang kedua sisinya memiliki panjang yang sama.



Gambar 2.16 Segitiga Bola Sama Kaki

Definisi 2.17 (Nikita, 2018: 76)

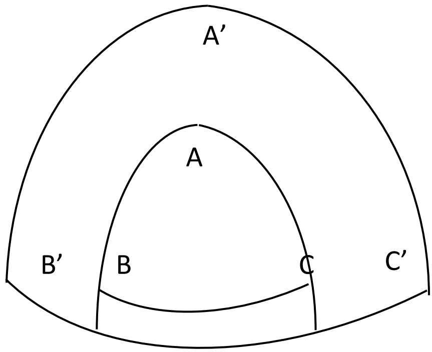
Segitiga sama sisi pada geometri bola yaitu segitiga bola dimana ketiga sisinya memiliki panjang yang sama.



Gambar 2.17 Segitiga Bola Sama Sisi

Definisi 2.18 (Nikita, 2018: 76)

Jika A, B, dan C merupakan segitiga bola dan A’ B’ C’ merupakan segitiga bola sedemikian sehingga A’ kutub dari busur $\widehat{BC}$, dan B’ kutub dari $\widehat{AC}$, serta C’ kutub dari busur $\widehat{AB}$, maka segitiga bola A’B’C’ merupakan segitiga polar dari segitiga bola ABC.



Gambar 2.18 Segitiga Bola Polar

Definisi 2.19 (Moeharti: 1996: 5.20)

Titik yang terletak pada bola yang jaraknya $\pi/2$ dari semua titik pada suatu busur lingkaran besar merupakan kutub dari busur.

Definisi 2.20 (Moeharti: 1996: 5.28)

Dua polygon disebut kongruen jika memenuhi dua syarat:

a. Sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang
b. Sudut-sudut yang bersesuaian sama besar.

Definisi 2.21 (Angkatan Laut Akademi, 2011: 3)

Dua sudut suatu polygon bola dinamakan kongruen jika dan hanya jika besar sudut bola kedua sudut itu sama.

Definisi 2.22 (Moeharti: 1996: 5.30)

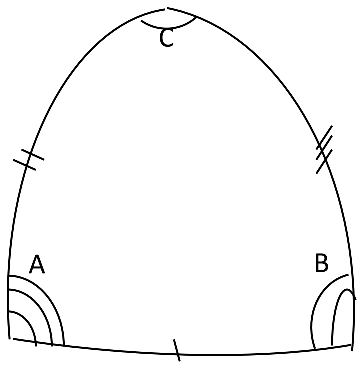
Dua segitiga bola disebut kongruen jika dan hanya jika ada korespondensi satu satu antara titik-titik sudut kedua segitiga bola sedemikian hingga semua sisinya bersesuaian kongruen dan semua sudutnya bersesuaian kongruen.

Misalnya segitiga bola ABC kongruen dengan segitiga bola DEF maka dinotasikan $\hat{\Delta}ABC \cong \hat{\Delta}DEF$.

$\hat{\Delta}ABC \cong \hat{\Delta}DEF$ jika dan hanya jika $\widehat{AB} \cong \widehat{DE}$,

$\widehat{AC} \cong \widehat{DF}$, $\widehat{BC} \cong \widehat{EF}$ dan $\angle BAC \cong \angle EDF$,

$\angle ABC \cong \angle DEF$, $\angle ACB \cong \angle DFE$



Gambar 2.19 Segitiga Bola Kongruen

Definisi 2.23 (C. A. Hart, 1912: 421)

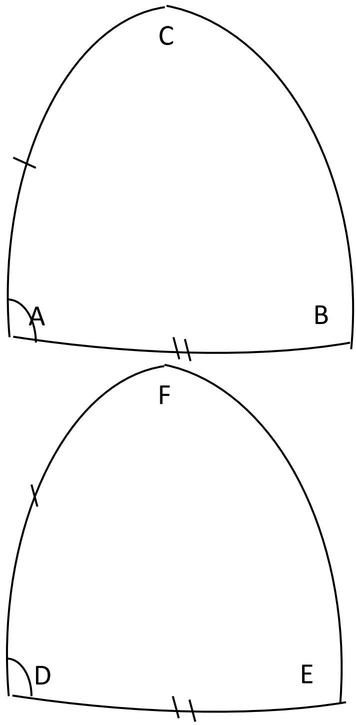
Sudut Polihedral adalah bangun yang terbentuk dari tiga atau lebih bidang yang berpotongan di suatu titik. Titik perpotongan bidang tersebut dinamankan titik puncak.

Sudut polihedral yang terbentuk dari tiga bidang yang berpotongan dinamakan trihedral dan sudut polyhedral yang terbentuk dari empat bidang yang berpotongan dinamakan tetrahedral.

Apabila S merupakan titik puncak maka trihedral dinotasikan dengan S-ABC sedangkan tetrahedral dinotasikan dengan S-ABCD.

Teorema 2.1 (Angkatan Laut Akademi, 2011: 16)

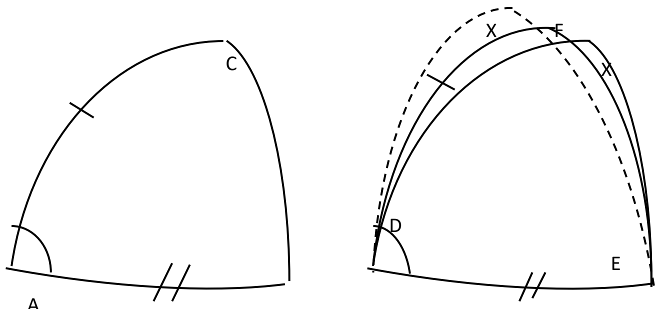
Dua segitiga bola kongruen jika dan hanya jika dua sisi yang bersesuaian kongruen dan sudut yang dibentuk oleh sisi juga kongruen.



Gambar 2.20 Segitiga Bola Kongruen Sisi Sudut Sisi

Bukti:

Diberikan $\hat{\Delta}ABC \cong \hat{\Delta}DEF$, maka menurut Definisi 2.20, $\widehat{AB} \cong \widehat{DE}$, $\widehat{AC} \cong \widehat{DF}$, $\widehat{BC} \cong \widehat{EF}$ dan $\hat{\Delta}BAC \cong \hat{\Delta}EDF$, $\hat{\Delta}ABC \cong \hat{\Delta}DEF$, $\hat{\Delta}ACB \cong \hat{\Delta}DFE$. Maka syarat Sisi-Sudut-Sisi terpenuhi yaitu $\widehat{AB} \cong \widehat{DE}$, $\hat{\Delta}BAC \cong \hat{\Delta}EDF$, $\widehat{AC} \cong \widehat{DF}$. Diberikan dua segitiga bola $\hat{\Delta}ABC$ dan $\hat{\Delta}DEF$ dengan $\widehat{AB} \cong \widehat{DE}$, $\hat{\Delta}BAC \cong \hat{\Delta}EDF$, $\widehat{AC} \cong \widehat{DF}$. Korespondensi titik sudut A dengan titik sudut D, titik sudut B dengan titik sudut E, dan titik sudut C dengan titik sudut F. Maka menurut Definisi 2.20, $\hat{\Delta}ABC \cong \hat{\Delta}DEF$ jika $\widehat{BC} \cong \widehat{EF}$.

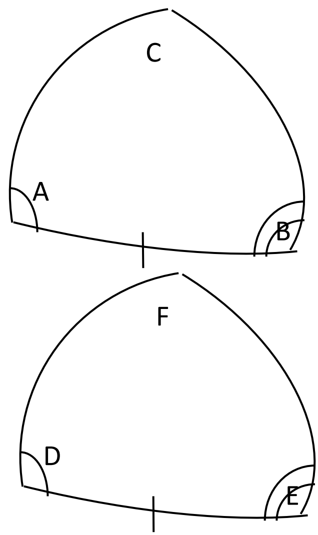


Gambar 2.21 Pembuktian Segitiga Bola Sisi-Sudut-Sisi

Andaikan $\widehat{BC} \ncong \widehat{EF}$. Kontruksikan titik X sedemikian hingga $\widehat{DF} \cong \widehat{DX}$, dan $\widehat{BC} \cong \widehat{EX}$, maka menurut Definisi 2.20, $\hat{\Delta}ABC \cong \hat{\Delta}DEF$. Oleh Karena itu, $\hat{\Delta}BAC \cong \hat{\Delta}EDX$. Karena $\hat{\Delta}BAC \cong \hat{\Delta}EDF$ dan $\hat{\Delta}BAC \cong \hat{\Delta}EDX$, maka $\hat{\Delta}EDF \cong \hat{\Delta}EDX$. Yang berarti titik X dan F berhimpit. Oleh karena itu, $\widehat{BC} \cong \widehat{EF}$. Hal ini terjadi kontradiksi dengan pengandaian, sehingga $\widehat{BC} \cong \widehat{EF}$ dan $\hat{\Delta}ABC \cong \hat{\Delta}DEF$.

Teorema 2.2 (Angkatan Laut Akademi, 2011: 17)

Dua segitiga bola disebut kongruen jika dan hanya jika dua sudut yang bersesuaian kongruen dan sisi yang menghubungkan sudut juga kongruen.



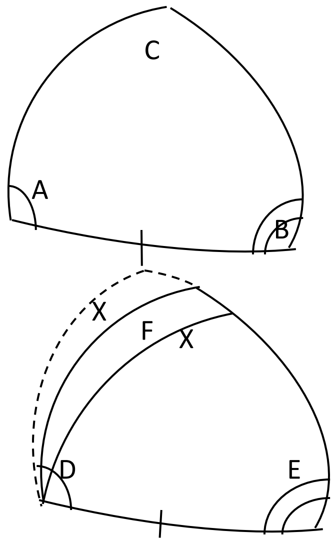
Gambar 2.22 Segitiga Bola Sudut-Sisi-Sudut

Bukti:

Diberikan $\hat{\Delta}ABC \cong \hat{\Delta}DEF$, maka menurut Definisi 2.20, $\widehat{AB} \cong \widehat{DE}$, $\widehat{AC} \cong \widehat{DF}$, $\widehat{BC} \cong \widehat{EF}$ dan $\hat{\Delta}BAC \cong \hat{\Delta}EDF$, $\hat{\Delta}ABC \cong \hat{\Delta}DEF$, $\hat{\Delta}ACB \cong \hat{\Delta}DFE$. Maka syarat Sudut-Sisi-Sudut terpenuhi yaitu: $\widehat{AB} \cong \widehat{DE}$, $\widehat{AC} \cong \widehat{DF}$, $\widehat{BC} \cong \widehat{EF}$, $\hat{\Delta}BAC \cong \hat{\Delta}EDF$, $\hat{\Delta}ACB \cong \hat{\Delta}DFE$, $\hat{\Delta}ABC \cong \hat{\Delta}DEF$, $\hat{\Delta}BAC \cong \hat{\Delta}EDF$.

Diberikan $\hat{\Delta}ABC \cong \hat{\Delta}DEF$ dengan $\hat{\Delta}BAC \cong \hat{\Delta}EDF$, $\widehat{AB} \cong \widehat{DE}$, dan $\hat{\Delta}ABC \cong \hat{\Delta}DEF$. Korespondensikan titik sudut A dengan titik sudut D, titik sudut B dengan titik sudut E, dan titik sudut C dengan titik sudut F.

Berdasarkan Teorema 2.1, $\hat{\Delta}ABC \cong \hat{\Delta}DEF$ jika $\widehat{BC} \cong \widehat{EF}$.

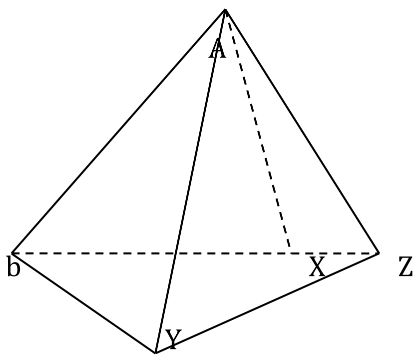


Gambar 2.23 Pembuktian Segitiga Bola Kongruen Sudut-Sisi-Sudut

Andaikan $\widehat{BC} \ncong \widehat{EF}$. Konstruksikan titik X pada $\widehat{EF}$ atau perpanjangan $\widehat{EF}$, sedemikian hingga $\widehat{EX} \cong \widehat{BC}$. Menurut Teorema 2.1, $\hat{\Delta}ABC \cong \hat{\Delta}DEX$. Oleh karena itu, $\hat{\Delta}BAC \cong \hat{\Delta}EDX$, sehingga $\hat{\Delta}EDF \cong \hat{\Delta}EDX$. Yang berarti $\widehat{DX}$ dan $\widehat{DF}$ adalah busur berhimpit sehingga titik sudut X dan F juga berhimpit, Oleh karena itu $\widehat{EX} \cong \widehat{EF} \cong \widehat{BC}$.. Hal ini kontradiksi dengan pengandaian, sehingga $\widehat{BC} \cong \widehat{EF}$ dan menurut Teorema 2.1, $\hat{\Delta}ABC \cong \hat{\Delta}DEF$.

Teorema 2.3 (Moeharti: 1996: 6.18)

Besar sudut muka ketiga trihedral lebih kecil daripada jumlah besar dua sudut muka trihedral.



Gambar 2.24 Sudut Muka Trihedral

Bukti :

Diberikan sebarang sudut trihedral A-XYZ dengan <XAZ lebih besar daripada <XAY dan <YAZ.

Akan dibuktikan <XAY+ <YAZ lebih besar dari <XAZ .

Pada bidang XAZ kontruksikan AB, sedemikian sehingga <XAB = <XAY dan AY=AB, karema XA

pada XAY = XA pada XAB, AY = AB dan <XAB = <XAY maka ΔXAY ≅ ΔXAB sehingga XY = XB.

Pada ΔXYZ, XY + YZ > XZ. Tetapi karena XY = XB maka

XB+YZ > XZ

YZ > XZ-XB

YZ>BZ

Pada ΔYAZ dan ΔBAZ, AZ pada ΔYAZ = AZ pada ΔBAZ, AY=AB akan tetapi YZ>BZ sedemikian sehingga <YAZ lebih besar dari <XAZ.

Karena <XAB = <XAY maka<XAY + <YAZ lebih besar dari <XAB + <BAZ sedemikian sehingga

<XAY + <YAZ lebih besar daripada <XAZ.

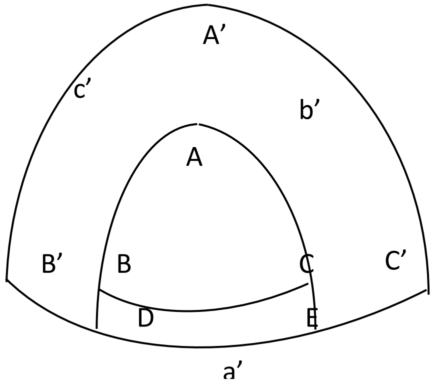
Maka terbukti bahwa Besar sudut muka ketiga trihedral (<XAZ) lebih kecil daripada jumlah besar dua sudut muka trihedral (<XAY + <YAZ).

Teorema 2.4 (Moeharti: 1996: 5.22)

Pada dua segitiga polar, masing-masing sudutnya saling berdampingan dengan sisi yang berlawanan.

Bukti:

Diberikan dua segitiga polar $\hat{\Delta}$ABC dan $\hat{\Delta}$A'B'C' dengan jari-jari bola satu satuan.



Gambar 2.25 Dua Segitiga Polar

Akan dibuktikan pada dua segitiga polar, masing-masing sudutnya saling berdampingan dengan sisi yang berlawanan.

Maka akan dibuktikan

m∠BAC + B'C' = π, m∠ABC + A'C' = π ,

m∠ACB + A'B' = π;

m∠B'A'C' + BC = π, m∠A'B'C' + AC = π,

m∠A'C'B' + AB = π,

Busur $\widehat{AB}$ dan $\widehat{AC}$ diperpanjang sehingga memotong busur $\widehat{B'C'}$ pada titik E dan D. Oleh karena itu, B' menjadi kutub dari busur $\widehat{AE}$ sehingga B'E = π/2 dan C' menjadi kutub dari busur AD maka C'D = π/2. Sedemikian sehingga C'D + B'E = π.

Karena B'E = B'D + DE maka B'D +DE + C'D = π.

Karena B'C = B'D + C'D maka DE + B'C' = π.

Tetapi DE = m∠ BAC, sehingga m∠ BAC + B'C' = π

B. Kajian Pustaka

Dalam penelitian ini, peneliti menggali informasi dari penelitian-penelitian sebelumnya dalam rangka mendapatkan teori yang berkaitan dengan judul yang digunakan.

1. IOSR Journal of Mathematics oleh Nikita S. Patel yang berjudul Comparison of Euclidean and Non-Euclidean Geometry pada 23 Februari 2018. Penelitian ini membandingkan antara geometri euclide (geometri parabolik) dan geometri non euclide (geometri eliptik dan geometri hiperbolik) serta sifat bangun ada geometri euclide dan geometri nn euclide. Perbedaan dari penelitian yang dilakukan oleh Nikita S. Patel dengan penelitian ini yaitu penelitian yang dilakukan oleh Nikita S. Patel membahas mengenai sifat bangun datar pada geometri

euclide dan geometri non Euclid secara singkat dan umum sedangkan penelitian ini membahas mengenai sifat-sifat segitiga saccheri secara khusus yaitu segitiga sebarang, segitiga sama sisi, segitiga sama kaki, dan segitiga siku-siku pada geometri bola dan tidak membahas pada geometri yang lain.

2. Jurnal EMASAINS oleh I Wayan Wardana yang berjudul Segiempat Saccheri (Kajian Teoretik pada Geometri Non Euclid) pada tahun 2013. Penelitian ini membahas mengenai sifat segiempat saccheri pada geometri hiperbolik dan geometri eliptik. Sifat-sifat segi empat Saccheri pada geometri eliptik yaitu sudut-sudut puncak kongruen dan sudutnya tumpul, panjang sisi puncaknya kurang dari panjang sisi alasnya, dan panjang ruas garis yang menghubungkan titik-titik tengah dari puncak dan alasanya lebih panjang daripada kaki-kaki segiempat Saccheri tersebut. Perbedaan penelitian yang dilakukan oleh I Wayan Wardana dengan penelitian ini yaitu prenelitian yaitu penelitian ini membahas mengenai sifat bangun datar berupa segitiga saccheri sedangkan penelitian yang dilakukan oleh I Wayan membahas mengenai sifat bangun

datar berupa segiempat saccheri. Geometri yang digunakan pada penelitian ini adalah geometri Eliptik yaitu geometri bola sedangkan penelitian yang dilakukan pada journal menggunakan Geometri hiperbolik dan geometri eliptik.

3. Journal of Scientific and Engineering Research oleh Marquez, Jairo Diaz pada tahun 2018 yang berjudul Fifth Postulate of Euclid and the non-Euclidean Geometries Implications with the spacetime. Penelitian yang dilakukan oleh Marquez membahas mengenai 5 postulat Geometri Euclide dengan Geometri Non Euclide serta sejarahnya sedangkan pada penelitian ini membahas mengenai sejarah geometri Euclides serta geometri Eliptik dan sifat-sifat bangun datar yaitu segitiga.

4. Nhio The College Mathematics Journal oleh Dickinson yang berjudul The Right Right Triangle on The Sphere pada tahun 2008. Penelitian yang dilakukan oleh Dickison membahas mengenai sifat segitiga bola siku-siku pada geometri bola. Penelitian yang dilakukan oleh Dickison berisi sifat-sifat segitiga bola siku-siku serta berbagai teorema pytagoras yang ada dalam segitiga bola siku-siku serta

membandingkannya dengan sifat segitiga siku-siku pada geometri Euclide. Perbedaan penelitian yang diteliti oleh Dickison dengan penelitian ini yaitu penelitian ini membahas mengenai sifat-sifat segitiga bola pada geometri bola secara berdasarkan jenis segitiga bola yaitu segitiga bola sama sisi, segitiga bola sama kaki, segitiga bola siku-siku dan segitiga bola sebarang serta membandingkannya dengan geometri Euclid sedangkan penelitian yang diteliti Dickison hanya membahas mengenai sifat-sifat segitiga siku-siku pada geometri bola dan membandingkannya dengan sifat segitiga siku-siku pada geometri Euclid.

BAB III
METODE PENELITIAN

Metode pengumpulan data yang digunakan adalah studi pustaka atau kepustakaan. Studi Pustaka adalah Cara pengumpulan data dengan tinjauan ke perpustakaan serta pengumpulan bahan tertulis serta referensi yang berkaitan. Metode ini dilakukan dengan menganalisis referensi seperti jurnal, buku dan paper yang berkaitan dengan segitiga Saccheri dan geometri bola.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah

1. Mengumpulkan data dari berbagai sumber referensi seperti buku, jurnal dan paper yang berkaitan dengan segitiga saccheri dan geometri bola.
2. Membuktikan dan menganalisis teorema-teorema yang ada dengan menggunakan definisi dan teorema yang telah dibuktikan.
3. Menyusun materi yang telah diperoleh secara sistematis agar mudah dipahami.

4. Menarik kesimpulan dari hasil yang telah dianalisis.

BAB IV

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

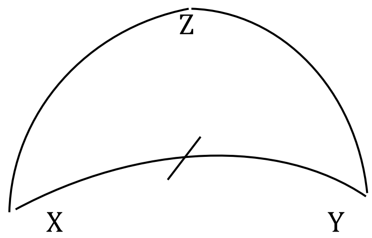
A. Sifat Segitiga Bola Secara Umum

Teorema 4.1 (Angkatan Laut Akademi, 2011: 15)

Jumlah panjang dua sisi segitiga bola lebih besar dari pada panjang sisi segitiga bola ketiga.

Bukti:

Diberikan $\hat{\Delta}XYZ$, dengan sisi XY adalah sisi terpanjang dari $\hat{\Delta}XYZ$.



Gambar 4.1 Segitiga Bola dengan Salah Satu Sisi Lebih Panjang

Akan dibuktikan $XY < YZ+XZ$.

Menurut Definisi 2.9, panjang busur pada bola merupakan besar sudut pusat bola yang menghadap busur dikalikan dengan jari-jari pada bola. Yang berarti $XY = \angle XOY$ (tanpa satuan).

Sehingga menurut Teorema 2.3 yaitu besar sudut muka ketiga trihedral (< XOY) lebih kecil daripada jumlah besar dua sudut muka trihedral yang berarti <XOY < (<YOZ + <XOZ)

Menurut Definisi 2.9 , <XOY < (<YOZ + <XOZ) dapat ditulis menjadi XY < YZ + XZ

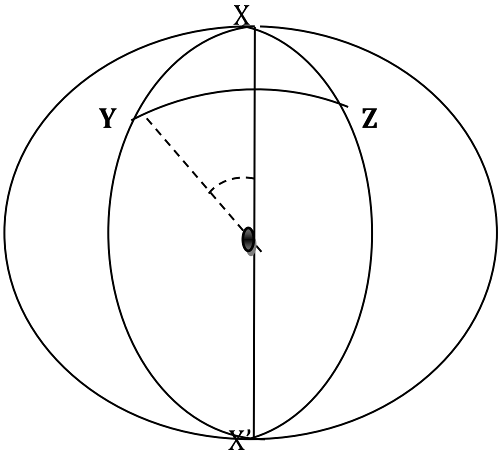
Sehingga terbukti bahwa jumlah panjang dua sisi segitiga bola (YZ + XZ.) lebih besar dari pada panjang sisi segitiga bola ketiga (XY).

Teorema 4.2 (Angkatan Laut Akademi, 2011: 6)

Jumlah panjang ketiga sisi segitiga bola dengan jari jari satu satuan kurang dari 2π

Bukti:

Diberikan $\hat{\Delta}XYZ$ dengan jari-jari bola satu satuan.



Gambar 4.2 Segitiga bola dengan jari-jari satu satuan

Menurut Teorema 4.1, Untuk $\hat{\Delta}XYZ$.

Maka $YZ < X'Y + X'Z$

Karena $X'Y = \pi - XY$, dan $X'Z = \pi - XZ$,

Maka $YZ < X'Y + X'Z \Leftrightarrow YZ < (\pi - XY) + (\pi - XZ)$

$$\Leftrightarrow YZ < \pi - XY + \pi - XZ$$

$$\Leftrightarrow YZ < 2\pi - XY - XZ$$

$$\Leftrightarrow YZ + XY + XZ < 2\pi$$

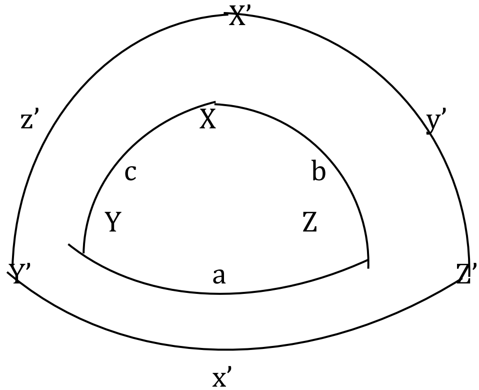
Oleh karena itu terbukti bahwa Jumlah panjang ketiga sisi segitiga bola dengan jari jari satu satuan kurang dari 2π.

Teorema 4.3 (Moeharti: 1996: 5.20)

Jumlah besar ketiga sudut segitiga bola lebih besar dari π radian dan kurang dari 3π radian.

Bukti:

Diberikan $\hat{\Delta}XYZ$ dengan jari-jari bola satu satuan dan $\hat{\Delta}X'Y'Z'$ sebagai segitiga polar dari $\hat{\Delta}XYZ$.



Gambar 4.3 Segitiga bola dan Segitiga Polar

$\hat{\Delta}XYZ$ dan $\hat{\Delta}X'Y'Z'$ merupakan dua segitiga polar, oleh karena itu menurut Teorema 2.4, jika terdapat dua segitiga polar $\hat{\Delta}ABC$ dan $\hat{\Delta}A'B'C'$ dengan jari-jari bola satu-satuan maka $m\angle BAC + B'C' = \pi$, $m\angle ABC + A'C' = \pi$, $m\angle ACB + A'B' = \pi$; $m\angle B'A'C' + BC = \pi$, $m\angle A'B'C' + AC = \pi$, $m\angle A'C'B' + AB = \pi$,

Oleh karena itu,

$m\angle YXZ + Y'Z' = \pi$

$m\angle XYZ + X'Z' = \pi$

$m\angle XZY + X'Y' = \pi$

Sehingga

$m\angle YXZ = \pi - Y'Z'$

$m\angle XYZ = \pi - X'Z'$

$m\angle XZY = \pi - X'Y'$

Oleh karena itu, $m\angle YXZ + m\angle XYZ + m\angle XZY = 3\pi - (Y'Z' + X'Z' + X'Y')$

Menurut Teorema 4.2, $0 < Y'Z' + X'Z' + X'Y' < 2\pi$

Maka $\pi < m\angle YXZ + m\angle XYZ + m\angle XZY < 3\pi$.

Sehingga Terbukti (Jumlah besar ketiga sudut segitiga bola lebih besar daripada π radian dan kurang dari 3π radian)

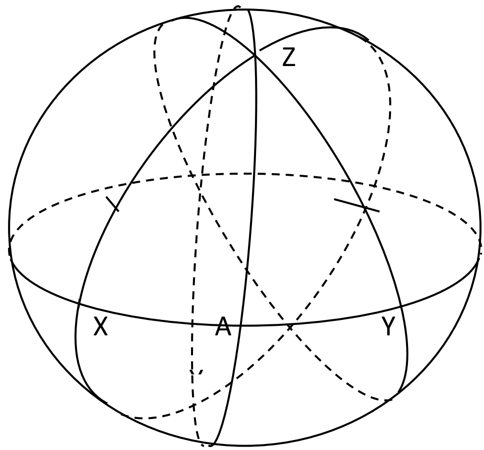
B. Sifat-sifat Segitiga Sama Kaki

Teorema 4.4 (Angkatan Laut Akademi, 2011: 18)

Segitiga bola dinamakan segitiga bola sama kaki jika dan hanya jika memiliki dua sudut yang sama besar.

Bukti:

Diberikan $\hat{\Delta}XYZ$ dengan XY = YZ



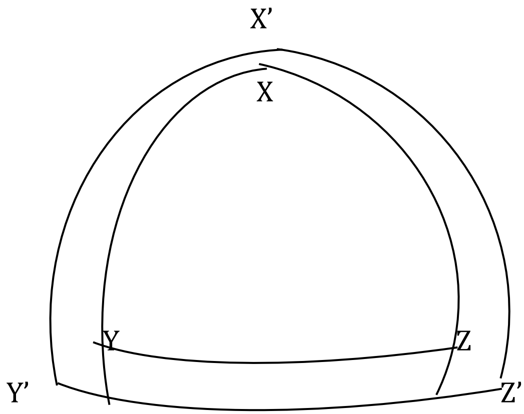
Gambar 4.4 Segitiga Bola Sama Kaki

Akan dibuktikan bahwa m∠XYZ = m∠ZYX

Konstruksikan busur ZA dari dari titik Z ke titik A dari lingkaran besar, sehingga XA = YA. Karena XZ = YZ dan AZ = AZ, maka menurut Definisi 2.21, dua sudut suatu polygon bola dikatakan kongruen jika dan hanya jika besar sudut bola kedua sudut sama maka $\hat{\Delta}ZAX \cong \hat{\Delta}AZY$, oleh karena itu, m∠ZXY ≅ m∠ZYX.

Diberikan $\hat{\Delta}XYZ$ dan m∠ZYX = m∠XZY.

Akan dibuktikan XZ = XY



Gambar 4.5 Segitiga bola Polar

Diberikan segitiga polar X'Y'Z'.

Karena m∠XYZ = m∠XZY. Maka menurut Teorema 2.4, jika terdapat dua segitiga polar $\hat{\Delta}$ABC dan $\hat{\Delta}$A'B'C' dengan jari-jari bola satu-satuan maka

m∠BAC + B'C' = π, m∠ABC + A'C' = π , m∠ACB + A'B' = π;

m∠B'A'C' + BC = π, m∠A'B'C' + AC = π, m∠A'C'B' + AB = π,

Oleh karena itu, X'Z' = X'Y'. Sehingga menurut pembuktian pertama dari teorema ini, m∠X'Y'Z' = m∠X'Z'Y' dan menurut Teorema 2.4, XZ = XY.

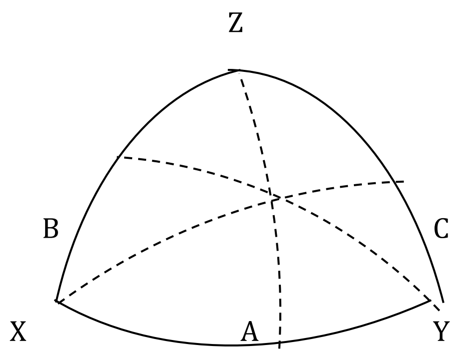
Sehingga terbukti bahwa Segitiga bola dinamakan segitiga bola sama kaki jika dan hanya jika memiliki dua sudut yang sama besar.

Teorema 4.5 (Moeharti, 1996: 5.23)

Segitiga bola sama kaki hanya memiliki satu sumbu simetri.

Bukti:

Diberikan $\hat{\Delta}XYZ$ yang merupakan segitiga bola sama kaki dengan $\widehat{XZ} \cong \widehat{YZ}$.



Gambar 4.6 Segitiga Bola Sama Kaki

Konstruksikan busur ZA sedemikian sehingga $\angle XZA \cong \angle YZA$.Oleh karena itu, menurut Teorema 2.1 $\widehat{ZA} \cong \widehat{ZA}$, dan $\widehat{XZ} \cong \widehat{YZ}$ menjadi $\hat{\Delta}$ XZA $\cong$ $\hat{\Delta}$ YZA. Oleh karena itu, ZA merupakan sumbu simetri segitiga bola sama kaki XYZ.

Kontstruksikan $\widehat{YB}$ sedemikian sehingga $\angle XYB \cong \angle ZYB$. Karena sisi yang kongruen ada $\hat{\Delta}$ XYZ adalah $\widehat{XZ}$ $\widehat{YZ}$, maka belum tentu $\widehat{XY} \cong \widehat{YZ}$ sehingga tidak memenuhi syarat sisi sudut sisi. Oleh karena itu, $\hat{\Delta}XYB \ncong \hat{\Delta}ZYB$. Oleh karena itu, $\widehat{YB}$ bukan merupakan segitiga bola sama kaki dari $\hat{\Delta}XYZ$.

Konstruksikan busur $\widehat{XC}$ sedemikian sehingga $\angle YXC \cong \angle ZXC$. Karena sisi yang bersesuaian pada $\hat{\Delta}$ XYZ adalah $\widehat{XZ}$ dan $\widehat{YZ}$ maka belum tentu $\widehat{XY} \cong \widehat{XZ}$ sehingga tidak memenuhi syarat SAS. Oleh karena itu, $\hat{\Delta}XYC \ncong \hat{\Delta}ZXC$. Jadi $\widehat{XC}$ bukan merupakan sumbu simetri segitiga bola sama kaki XYZ.

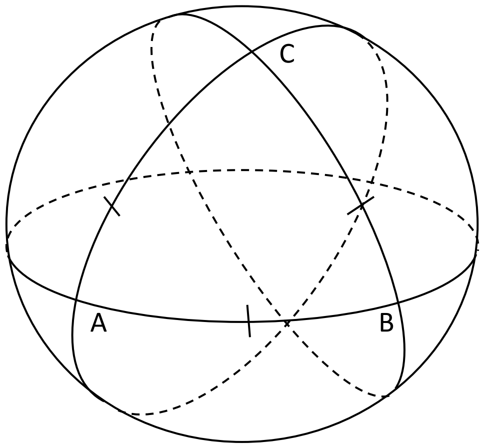
Jadi terbukti bahwa segitiga bola sama kaki hanya memiliki satu sumbu simetri.

C. Sifat-sifat Segitiga Bola Sama Sisi

Teorema 4.6 (Moeharti, 1996: 5.34)

Segitiga bola sama sisi jika dan hanya jika ketiga sudutnya sama besar.

Bukti:



Gambar 4.7 Segitiga Bola Sama Sisi

Diberikan $\hat{\Delta}ABC$ yang merupakan segitiga bola sama sisi degan AC=BC=AB.

Akan dibuktikan m∠CAB = m∠CBA = m∠BCA.

Pada bagian pertama pembuktian Teorema 4.4 telah dibuktikan, jika AC = BC maka m∠CAB = m∠CBA.

Demikian pula, karena AB = AC maka $m\angle CBA$ = $m\angle BCA$.

Jadi diperoleh $m\angle CAB = m\angle CBA = m\angle BCA$.

Diberikan sebarang $\hat{\Delta}$ ABC dan $m\angle CAB = m\angle CBA = m\angle BCA$.

Akan dibuktikan CA = CB = AB

Pada Teorema 4.4 bagian kedua telah dibuktikan, jika $m\angle ABC = m\angle ACB$ maka CA = AB

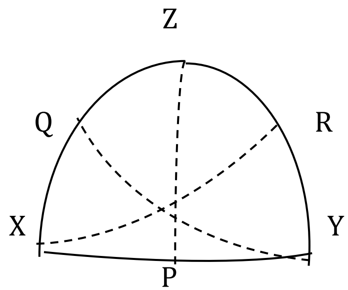
Oleh karena itu, $m\angle CAB = m\angle CBA$ maka CA = CB dan $m\angle CBA = m\angle BCA$ maka CA= AB

Sehingga diperoleh CA = CB = AB.

Maka terbukti bahwa segitiga bola sama sisi jika dan hanya jika ketiga sudutnya sama besar.

Teorema 4.7 ***(***Moeharti, 1996: 5.35)

Segitiga bola sama sisi memiliki tiga sumbu simetri.



Gambar 4.8 Segitiga Bola Sama Sisi dengan Tiga Sumbu Simetri

Diberkan $\hat{\Delta}$ XYZ yang merupakan segitiga bola sama sisi dengan $\widehat{XY} \cong \widehat{YZ} \cong \widehat{XZ}$.

Konstruksikan $\widehat{ZP}$ sedemikian sehingga $\hat{\Delta}XZP \cong \hat{\Delta}YZP$, karena $\widehat{YZ} \cong \widehat{XZ}$, maka menurut Teorema 2.1 ,

$\hat{\Delta}$ XZP $\cong$ $\hat{\Delta}$ YZP jika $\widehat{YZ} \cong \widehat{XZ}$ diperoleh $\hat{\Delta}XZP \cong \hat{\Delta}YZP$.

Jadi $\widehat{ZP}$ adalah sumbu simetri dari segitiga bola sama sisi XYZ.

Konstruksikan $\widehat{YQ}$ sedemikian sehingga $\hat{\Delta}XYQ \cong \hat{\Delta}ZYQ$, Karena $\widehat{XY} \cong \widehat{XZ}$, maka menurut Teorema 2.1,

$\hat{\Delta}XYQ \cong \hat{\Delta}ZYQ$ jika $\widehat{XY} \cong \widehat{XZ}$ diperoleh $\hat{\Delta}XYQ \cong \hat{\Delta}ZYQ$.

Jadi $\widehat{YQ}$ adalah sumbu simetri dari segitiga bola sama sisi XYZ.

Konstruksikan $\widehat{XR}$ sedemikian sehingga $\hat{\Delta}YXR \cong \hat{\Delta}ZXR$, Karena $\widehat{XY} \cong \widehat{XZ}$, maka menurut Teorema 2.1, $\hat{\Delta}$ YXR $\cong \hat{\Delta}$ ZXR jika $\widehat{XY} \cong \widehat{XZ}$ diperoleh $\hat{\Delta}$ YXR $\cong \hat{\Delta}$ ZXR. Jadi $\widehat{XR}$ adalah sumbu simetri dari segitiga bola sama sisi XYZ.

Jadi terbukti bahwa segitiga bola sama sisi memiliki tiga buah sumbu simetri.

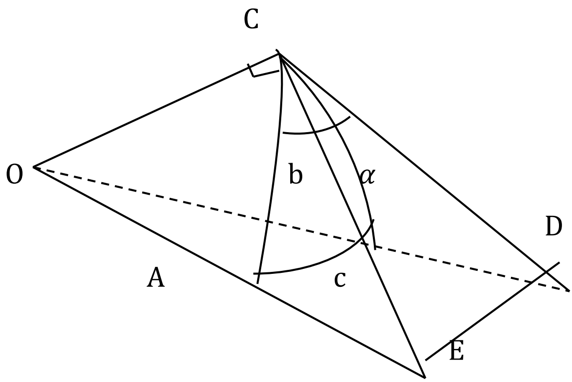
D. Segitiga Bola Siku-siku

Teorema 4.8 (Akademi Angkatan Laut, 2011: 22)

Jika diketahui $\hat{\Delta}$ ABC dengan c adalah panjang busur $\widehat{AB}$, α adalah panjag busur $\widehat{BC}$, b adalah panjang busur $\widehat{AC}$, γ adalah besar sudut dari busur $\widehat{AB}$ dan $\widehat{AC}$, dan R adalah panjang jari-jari bola, maka $\cos\left({}^{c}/_{R}\right) = \cos({}^{a}/_{R}) \cos\left({}^{b}/_{R}\right) + \sin\left({}^{b}/_{R}\right) \sin\left({}^{b}/_{R}\right) \cos\gamma$.

Bukti:

Diketahui $\hat{\Delta}$ ABC dengan O adalah titik pusat bola. $\hat{\Delta}$ ABC membentuk sudut trihedral O-ABC. Konstruksikan $\overline{CE}$ yang tegak lurus $\overline{OC}$ dengan titik E yang terleak pada perpanjangan OA. Konstruksikan $\overline{CD}$ yang tegak lurus $\overline{UC}$ dengan titik D yang terletak pada perpanjangan $\overline{UB}$.



Gambar 4.9 Segitiga Bola dengan pusat bola O.

Menurut Definisi 2.9, panjang busur pada bola adalah besar sudut pusar bola yang menghadap busur dikalika dengan jari-jari pada bola (R).

A = R · m∠COB = R · m∠COD sehingga m∠COD = $^{a}/_{R}$

b = R · m∠COA = R · m∠COE sehingga m∠COD = $^{b}/_{R}$

c = R · m∠AOB = R · m∠EOD sehingga m∠EOD = $^{c}/_{R}$

Menurut teorema Cosinus pada geometri Euclides, dalam Δ ODE dan Δ CDE,

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2 \cdot OD \cdot OE \,.\, \cos\left(^{c}/_{R}\right) \quad *)$$

$$DE^2 = CD^2 + CE^2 - 2 \cdot CD \cdot CE \,.\, \cos(m\angle EOD)$$

Karena $\overline{CE}$ pada bidang CO dan $\overline{CD}$ pada bidang COD tegak lurus dengan $\overline{OC}$, maka m∠ECD = m∠ACB = γ.

Oleh karena itu,

$$\mathrm{DE}^2 = \mathrm{CD}^2 + \mathrm{CE}^2 - 2 \cdot \mathrm{CD} \cdot \mathrm{CE} \cdot \cos\gamma \qquad **)$$

Karena Δ COE dan Δ COD adalah segitiga siku-siku, maka

$$\mathrm{OD}^2 = \mathrm{OC}^2 + \mathrm{CD}^2, \mathrm{OE}^2 = \mathrm{OC}^2 + \mathrm{CE}^2 \qquad ***)$$

Substitusikan persamaan ***) ke persamaan *), diperoleh $\mathrm{DE}^2 = \mathrm{OC}^2 + \mathrm{CD}^2 + \mathrm{OC}^2 + \mathrm{CE}^2 - 2 \cdot \mathrm{OD} \cdot \mathrm{OE} \cdot \cos(^c/_R)$

$$\mathrm{DE}^2 = 2\mathrm{OC}^2 + \mathrm{CD}^2 + \mathrm{CE}^2 - 2 \cdot \mathrm{OD} \cdot \mathrm{OE} \cdot \cos(^c/_R)$$

****)

Persamaan ****) dikurangi persamaan **)

$$\mathrm{DE}^2 = \mathrm{CD}^2 + \mathrm{CE}^2 - 2 \cdot \mathrm{CD} \cdot \mathrm{CE} \cdot \cos\gamma$$

$$DE^2 = CD^2 + CE^2 - 2.CD.CE.\cos\gamma \qquad -$$

$$0 = 20C^2 + 2.CD.CE.\cos\gamma - 2.OD.OE.\cos(^c/_R)$$

Sehingga

$$2 \cdot \mathrm{OD} \cdot \mathrm{OE} \cdot \cos(^c/_R) = 2\mathrm{OC}^2 + 2 \cdot \mathrm{CD} \cdot \mathrm{CE} \cdot \cos\gamma$$

$$\mathrm{Cos}\left({}^{c}/_{R}\right) = {}^{OC}/_{OD} \cdot {}^{OC}/_{OE} + {}^{CD}/_{OD} \cdot {}^{CE}/_{OE} \ \cos\gamma$$

$$\mathrm{Cos}\left({}^{c}/_{R}\right) = \cos(m\angle COD).\cos(m\angle COE).\sin(m\angle COD).$$

$$\sin(m\angle COD).\cos\gamma$$

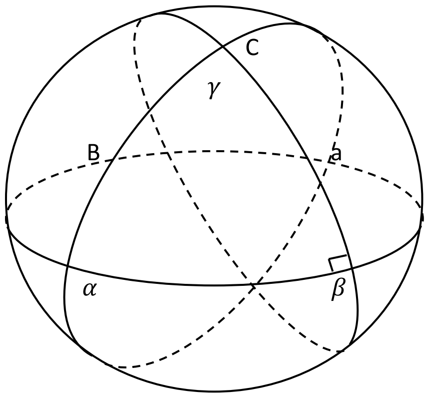
$$\mathrm{Cos}\left({}^{c}/_{R}\right) = \mathrm{Cos}\left({}^{a}/_{R}\right)\mathrm{Cos}\left({}^{b}/_{R}\right) + \sin\left({}^{a}/_{R}\right)\sin\left({}^{b}/_{R}\right)$$

$$\cos\gamma.$$

Teorema 4.9 (Akademi Angkatan Laut, 2011: 28)

Jika $\hat{\Delta}ABC$ adala segitiga bola siku-siku dengan $m\angle ACB = \gamma = 90^{\circ}$, $m\angle CAB = \alpha$, $m\angle ABC = \beta$, BC = a, AC = b, dan AB = c, serta jari-jari bola R, maka

$$\cos\left({}^{c}/_{R}\right) = \cos\left({}^{a}/_{R}\right)\cos\left({}^{b}/_{R}\right)$$



Gambar 4.10 Segitiga bola Siku-siku

Bukti:

Menurut Teorema Cosinus Bola, untuk sebarang $\hat{\Delta}$ABC dengan m∠ACB = γ, BC = a, AC = b, dan AB = c, dengan jari-jari bola R, maka $\cos\left({}^{c}/_{R}\right) = \cos\left({}^{a}/_{R}\right)\cos\left({}^{b}/_{R}\right) + \sin\left({}^{a}/_{R}\right)\sin\left({}^{b}/_{R}\right)\cos\gamma$. Oleh karena $\gamma = 90^\circ$, maka cos γ = 0, sedemikian sehingga $\cos\left({}^{c}/_{R}\right) = \cos\left({}^{a}/_{R}\right)\cos\left({}^{b}/_{R}\right)$.

Sehingga terbukti Jika $\hat{\Delta}$ ABC adala segitiga bola siku-siku dengan m∠ACB = γ = 90°, m∠CAB = α, m∠ABC = β, BC = a, AC = b, dan AB = c, serta jari-jari bola R, maka $\cos\left({}^{c}/_{R}\right) = \cos\left({}^{a}/_{R}\right)\cos\left({}^{b}/_{R}\right)$.

Berikut tabel yang menjelaskan perbedaan sifat segitiga pada geometri bola dan segitiga pada geometri Euclid

Tabel 4.1 Perbedaan Segitiga pada Geometri Bola dan Geometri Euclid

Jenis Segitiga	Sifat	Geometri Euclides	Geometri Bola
Segitiga Sebarang	Jumlah panjang dua sisi	Jumlah panjang dua sisi segitiga lebih besar daripada sisi ketiga	Jumlah panjang dua sisi segitiga lebih besar daripada sisi ketiga
	Jumlah panjang ketiga sisi (p)	$0<p<\pi$	$0<p<2\pi$
	Jumlah besar ketiga sudut	Π radian	Lebih dari π radian dan kurang dari 3π radian

Segitiga Sama Kaki	Jumlah sudut kongruen	Dua sudut	Dua sudut
	Jumlah sumbu simetri	Satu sumbu simetri	Satu sumbu simetri
Segitiga sama sisi	Jumlah sudut kongruen	Tiga sudut	Tiga sudut
	Jumlah sumbu simetri	Tiga sumbu simetri	Tiga sumbu simetri
Segitiga siku-siku	Teorema Pythagoras	$c^2 = a^2 + b^2$	cos $\left(^{c}/_{R}\right)$= cos $\left(^{a}/_{R}\right)$ cos $\left(^{b}/_{R}\right)$

BAB V
PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan, dapat disimpulkan bahwa:

1. Sifat segitiga bola sebarang yaitu jumlah panjang dua sisi segitiga bola lebih besar daripada panjang sisi ketiga, jumlah panjang ketiga sisi (p) yaitu $0 < p < 2\pi$, jumlah besar ketiga sudut lebih besar daripada π radian dan kurang dari 3π radian.

2. Sifat segitiga sama kaki pada geometri bola yaitu dua sudutnya mempunyai besar sama dan hanya mempunyai satu sumbu simetri sedangkan segitiga sama sisi pada geometri bola memiliki sifat tiga sudutnya sama besar dan mempunyai tiga sumbu simetri.

3. Segitiga siku-siku pada geometri bola memiliki teorema pytagoras yaitu $\cos\left({}^{c}/_{R}\right) = \cos\left({}^{a}/_{R}\right) \cos\left({}^{b}/_{R}\right)$.

B. Saran

Untuk penelitian selanjutnya dapat membahas mengenai bangun lain dalam geometri bola seperti segiempat bola dan dapat membandingkannya dengan geometri lain.

DAFTAR PUSTAKA

A, Hart C. 1912. *Plane and Solid Geometry*. London: American Book Company.

Brink, Raymond W. 1942. *Spherical Trigonometry*. New York: Appleton Century Croffis.

Dickinson, William. 2008. The Right Triangle on The Sphere. *Nhio The College Mathematics Journal*. 1(39) : 24-33.

Greenberg, Marvin Jay. 1994. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. United Story Of America: W. H. Freeman and Company.

Markas Besar Angkatan Laut Akademi. 2011. *Ilmu Segitiga Bola*. Bumimoro.

Marquez, Jairo Diaz. 2018. Fifth Postulate of Euclid and the non-Euclidean Geometries Implications with the spacetime. *Internasional Journal of Scientific and Engineering Research*. 9(3): 1-2.

Moeharti. 1996. *Sistem-Sistem Geometri*. Jakarta: Karunika Universitas Terbuka.

Patel, S. Nikita. 2018. Comparison of Euclidean and Non-Euclidean Geometry, IOSR Journal of Mathematics. 14(1): 73-77.

Rahmat, Mohamad. 2014. *Geometri*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Soewito. 1987. *Ilmu Ukur Segi Tiga Bola*, Surabaya: AAL

Suyitno, Amin. 2017. *Geometry Non Euclid*. Semarang: Kementrian Riset, Teknologi, dan Pendidikan Tinggi UNNES.

Todhunter. 1886. *Spherical Trigonometry*. Cambridge: University Press.

Wardana, I Wayan. 2013. Segiempat Saccheri (Kajian Teoretik pada Geometri Non Euclid. *Jurnal EMASAINS*. 2(3). 69-82.

Wenworth, George A. 1899. *Plane and Solid Geometry.* London: Amerika Book Company.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

Nama Lengkap : Eva Lutfi Hamidah

Tempat, Tgl Lahir : Pemalang, 10 Maret 1998

NIM : 1708046030

Jenis Kelamin : Perempuan

Agama : Islam

Pekerjaan : Mahasiswi UIN Walisongo

Alamat : Desa Pegundan RT 08/04
Petarukan Pemalang

Telepon : 081901000683

Email : hevalutfi@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

Pendidikan Formal

1. TK PERTIWI
2. SDN 2 PEGUNDAN
3. SMPN 2 PETARUKAN
4. SMAN 2 PEMALANG
5. UIN WALISONGO SEMARANG