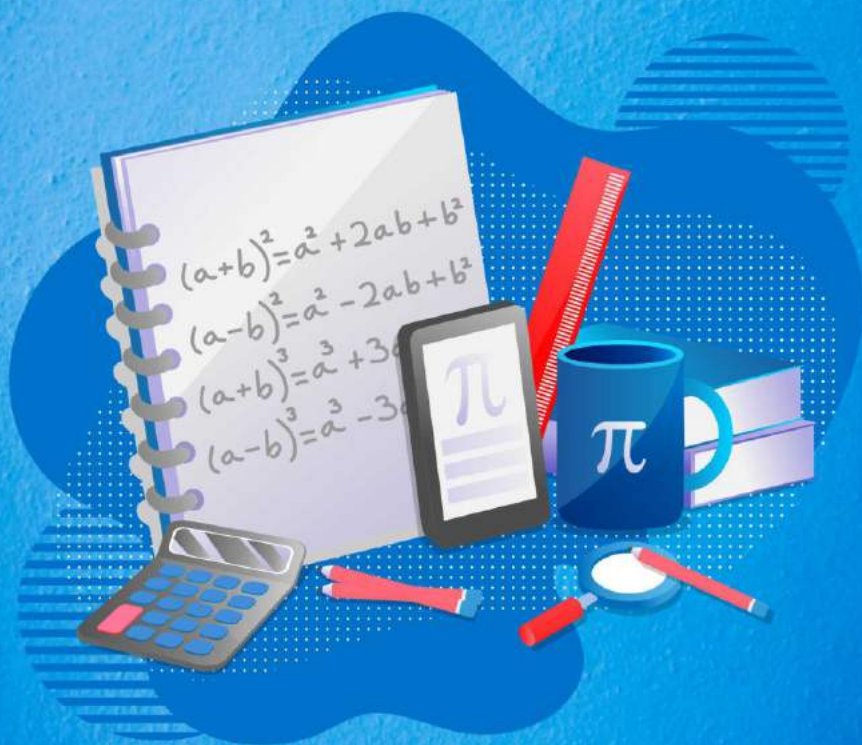


FAST FOURIER TRANSFORM (FFT)

Pada Opsi Amerika



Emy Siswanah, M.Sc

**FAST FOURIER TRANSFORM
(FFT)
PADA OPSI AMERIKA**



Emy Siswanah, M.Sc

**FAST FOURIER TRANSFORM
(FFT)
PADA OPSI AMERIKA**


SOUTHEAST ASIAN PUBLISHING


SOUTHEAST ASIAN PUBLISHING

Fast Fourier Transform (FFT) Pada Opsi Amerika
Emy Siswanah, M.Sc

©SeAP (Southeast Asian Publishing), 2020

Penyunting: Sarafina
Penata Aksara: Emy
Perancang Sampul: SeAP Studio

ISBN 978-623-95437-8-5

Cetakan Pertama, Januari 2020

x + 109 hlm.; 23 cm.



Penerbit:
SeAP (Southeast Asian Publishing)
Jl. Purwoyoso Selatan B-21, Semarang, Indonesia
contact@seapublication.com
www.seapublication.com

© 2020

Hak cipta dilindungi undang-undang.
Dilarang mengutip atau memperbanyak sebagian atau
keseluruhan buku ini tanpa izin tertulis dari penerbit.

ABSTRAK

Opsi amerika merupakan opsi yang dapat dijalankan mulai dari tanggal kontrak sampai waktu jatuh tempo. Opsi Amerika termasuk dalam opsi yang mempunyai fitur *early exercise*, artinya adalah opsi ini dapat dijalankan sebelum waktu jatuh tempo. Opsi yang memiliki fitur *early exercise* tidak memiliki solusi analitis dalam menentukan harga opsi sehingga harus diselesaikan secara numeris. Salah satu metode numeris yang dapat digunakan dalam menentukan harga opsi amerika adalah metode *fast fourier transform* (FFT). Metode FFT sangat tepat diterapkan dalam penentuan harga opsi yang mempunyai fitur *early exercise* dan membutuhkan langkah/partisi yang tidak sedikit, tetapi dengan perhitungan yang cepat. Terdapat dua metode dalam menentukan harga opsi amerika menggunakan FFT, yaitu metode Lord dan metode Lord-FRFT. Pada penerapan metode Lord dan metode Lord-FRFT akan muncul error ketika proses diskritisasi. Error muncul karena adanya pemotongan integral tak hingga dan penerapan aturan trapesium untuk menentukan integral berhingga. Error pada aturan trapesium dapat diminimalisir dengan menerapkan formula ekstrapolasi Richardson.

Kata Kunci : opsi amerika, *fast fourier transform*.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan atas kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan buku penelitian yang berjudul “*Fast Fourier Transform* (FFT) pada Opsi Amerika”. Shalawat dan salam penulis sampaikan kepada Nabi Agung Muhammad SAW yang selalu diteladani dan diharapkan syafa’atnya.

Besar harapan apa yang telah disusun ini dapat bermanfaat bagi perkembangan ilmu pengetahuan. Penulis menyadari apa yang disusun ini masih banyak kelemahan dan kekurangan. Untuk itu tim penulis mengharap saran dan kritik yang membangun guna perbaikan selanjutnya.

Pada kesempatan ini pula perkenalkan penulis untuk mengucapkan terima kasih kepada banyak pihak sehingga buku ini bisa diselesaikan dengan baik. Demikian prakata dari penulis, bila ada kesalahan dan kekurangan hanya dapat memohon maaf yang sebesar-besarnya.

Semarang, Januari 2020

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK.....	v
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI.....	vii
DAFTAR GAMBAR.....	ix
DAFTAR TABEL.....	x
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 LATAR BELAKANG.....	1
1.2 RUMUSAN PERMASALAHAN	5
1.3 PEMBATAAN MASALAH	5
1.4 TUJUAN PENELITIAN	5
1.5 MANFAAT PENELITIAN	5
BAB II OPSI.....	7
2.1 OPSI (OPTION)	7
2.2 VOLATILITAS SAHAM	29
2.3 NILAI BATAS PADA OPSI AMERIKA.....	30
2.4 DERET FOURIER	34
2.5 PENENTUAN HARGA OPSI DENGAN METODE BLACK-SCHOLES	39
2.6 KAJIAN RESEARCH SEBELUMNYA	46
2.7 METODOLOGI PENELITIAN	48
BAB III <i>FAST FOURIER TRANSFORM</i> (FFT) PADA OPSI AMERIKA	51
3.1 TRANSFORMASI FOURIER	51
3.2 FUNGSI PENTING DAN HUBUNGANNYA	53
3.3 METODE TRANSFORMASI DASAR.....	56
3.4 METODE QUAD-FFT.....	60
3.5 ALGORITMA BERVOETS	66

3.6	METODE LORD.....	69
3.7	METODE FRFT	73
BAB IV IMPLEMENTASI METODE <i>FAST FOURIER</i>		
<i>TRANSFORM</i> (FFT) DALAM MENENTUKAN		
	HARGA OPSI.....	81
4.1	IMPLEMENTASI METODE LORD.....	81
4.2	IMPLEMENTASI METODE LORD-FRFT	91
4.3	EKSTRAPOLASI RICHARDSON.....	95
BAB V PENUTUP		103
5.1	KESIMPULAN	103
5.2	SARAN.....	104
DAFTAR PUSTAKA		105



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1 Profit dari Bull Spread	17
Gambar 2. 2 Profit Bull Spread	18
Gambar 2. 3 Profit dri Bear Spread	19
Gambar 2. 4 Profi lain dari Bear Spread.....	21
Gambar 2. 5 Profit dari butterfly spread	23
Gambar 2. 6 Profit dari calendar spread	25
Gambar 2. 7 Profit straddle.....	26
Gambar 2. 8 Profit dari strips dan straps	28
Gambar 2. 9 Profit Strangles.....	29
Gambar 3. 1 Hubungan antara F_s, f_s dan $\phi(v)$	55
Gambar 3. 2 Mode Kisi untuk Perhitungan Harga Opsi Bermuda dan Amerika	62
Gambar 3. 3 Mode Kisi metode QUAD-FFT.	65
Gambar 3. 4 Langkah-Langkah Dasar Metode Bervoets	69
Gambar 3. 5 Switching Domain dalam Metode Lord.....	72
Gambar 3. 6 Algoritma metode Lord.....	73
Gambar 3. 7 Algoritma FRFT.....	77
Gambar 4. 1 Aturan Trapesium	83
Gambar 4. 2 Algoritma sub-program yang menghitung (4.12)	90
Gambar 4. 3 Nyata dan Imajiner dari ϕ pada Contoh 1	93
Gambar 4. 4 Algoritma dari Sub-program FRFT	95
Gambar 4. 5 Algoritma dari Metode FRFT-Lord	95
Gambar 4. 6 Aproksimasi nilai opsi Amerika dengan 4 Opsi Bermuda.....	101

DAFTAR TABEL

Tabel 2. 1 Tabel Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Harga Opsi	9
Tabel 2. 2 Nilai portofolio A dan C pada waktu T	14
Tabel 2. 3 Nilai portofolio A dan C pada saat ini	15
Tabel 2. 4 Payoff dari Bull Spread	16
Tabel 2. 5 Contoh Payoff Bull Spread	17
Tabel 2. 6 Payoff dari Bear Spread	19
Tabel 2. 7 Contoh Payoff dari Bear Spread	20
Tabel 2. 8 Payoff dari Box Spread	21
Tabel 2. 9 Payoff dari butterfly spread :	22
Tabel 2. 10 Contoh Payoff dari butterfly spread :	24
Tabel 2. 11 Payoff dari Straddle	25
Tabel 2. 12 Contoh payoff Straddle	27
Tabel 2. 13 Payoff dari Strangles	28

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Pada saat ini perkembangan dunia investasi semakin pesat. Perkembangan dunia investasi dapat dilihat dari beberapa hal, yaitu semakin banyaknya investor yang menanamkan modalnya, semakin banyaknya jumlah uang yang diinvestasikan, dan semakin banyaknya alternatif-alternatif instrumen investasi yang dapat dijadikan pilihan investor dalam berinvestasi. Investor dapat berinvestasi pada real asset maupun pada finansial asset. Investasi pada real asset mempunyai resiko yang lebih rendah tetapi dengan harapan *return* yang lebih kecil. Sementara itu, finansial asset merupakan investasi yang mempunyai resiko yang lebih besar tetapi juga dengan harapan *return* yang besar.

Investor yang mengharapkan *return* yang lebih besar akan berinvestasi pada finansial asset. Investasi pada finansial asset dapat dilakukan oleh investor melalui kepemilikan sekuritas seperti saham, obligasi, reksadana, instrumen derivatif atau

turunan dan lain-lain. Instrumen derivatif merupakan jabaran dari sekuritas lain yang terkait. Dengan kata lain, instrumen derivatif merupakan instrumen finansial yang nilainya tergantung dari nilai aset yang lain, artinya tergantung dari nilai aset yang mendasarinya. Nilai instrumen derivatif tergantung dari harga sekuritas yang menjadi dasar atau induk dari instrumen tersebut.

Instrumen derivatif semakin diminati oleh investor. Instrumen derivatif merupakan solusi bagi investor yang mempunyai modal kecil tetapi ingin berinvestasi pada finansial asset. Melalui instrumen derivatif, investor tidak hanya memperoleh keuntungan tetapi juga memberikan nilai lindung terhadap sekuritas yang menjadi induknya. Ada beberapa jenis instrumen derivatif, diantaranya adalah opsi, waran, dan *futures contract*.

Salah satu jenis instrumen derivatif yang telah banyak dikenal dan diperdagangkan oleh masyarakat adalah opsi (*option*). Opsi merupakan suatu tipe kontrak antara dua pihak, yang satu memberikan hak kepada yang lain untuk membeli atau menjual suatu aktiva pada harga tertentu dan juga waktu tertentu. Perdagangan opsi telah berkembang dengan pesat. Hal ini dapat dilihat dari banyaknya opsi yang diperdagangkan baik di bursa besar seperti *European Option Exchange* di Amsterdam maupun bursa di Sydney yang lebih kecil.

Ada berbagai macam tipe opsi. Ada opsi call ada pula opsi put. Opsi *call* yaitu opsi yang memberikan hak untuk membeli dan opsi *put* yaitu opsi yang memberikan hak untuk menjual merupakan dua tipe opsi yang umum dikenal berdasarkan haknya. Berdasarkan waktu pelaksanaan opsi, opsi dibagi menjadi opsi tipe Eropa, opsi tipe Amerika dan opsi tipe Bermuda. Opsi

tipe Eropa hanya dapat dilaksanakan pada saat jatuh tempo, sedangkan opsi tipe Amerika dapat dilaksanakan kapan saja sampai jatuh tempo. Opsi Bermuda merupakan kombinasi antara opsi tipe Eropa dan tipe Amerika yang dapat dilaksanakan pada waktu-waktu tertentu dari mulai tanggal penerbitan sampai tanggal jatuh tempo opsi.

Opsi yang banyak beredar di pasaran umumnya adalah opsi bertipe Amerika (Hull, 2006). Alasannya adalah fleksibilitas pelaksanaannya yang dapat dilakukan sebelum masa berlaku opsi habis atau dikenal dengan fitur *early exercise*. Fitur tersebut memungkinkan investor memperoleh keuntungan yang lebih besar. Tipe opsi lainnya yang memperbolehkan *early exercise* adalah opsi Bermuda. Opsi Bermuda adalah opsi tipe non standar Amerika yang diperbolehkan untuk melakukan *early exercise*, sebagaimana yang telah tertera dalam kontrak. Sedikit berbeda dengan opsi Amerika, pada opsi Bermuda fitur *early exercise* dapat dijalankan hanya pada sejumlah waktu diskrit yang telah ditentukan sepanjang umur opsi.

Opsi Amerika diperdagangkan secara luas pada pasar bursa dan secara *private* pada pasar *over-the-counter* (OTC). Opsi Bermuda hanya diperdagangkan secara *over-the-counter* market (OTC), artinya opsi Bermuda diperdagangkan secara *private* dan didasarkan pada kontrak yang dibuat secara langsung antara dua pihak sehingga hanya pihak terkait yang mengetahui detail kontrak tersebut. Berdasarkan beberapa data opsi Bermuda pada salah satu penyedia jasa data finansial, perusahaan-perusahaan yang menerbitkan opsi bermuda didominasi oleh negara-negara di Asia, seperti Thailand, Srilanka, dan Indonesia.

Penentuan harga opsi merupakan hal yang menarik dalam dunia finansial. Penentuan harga opsi selalu berkembang mengikuti perkembangan ilmu pengetahuan. Secara umum, penentuan harga opsi dibagi menjadi dua, yaitu metode analitik (eksak) dan metode numerik. Pada saat harga opsi yang dihitung secara eksak tidak dapat dicari, maka dapat digunakan pendekatan numerik. Ada banyak metode numerik yang dapat digunakan dalam menentukan harga opsi, diantaranya metode Lattice, metode beda hingga (*finite difference method*), dan metode Monte Carlo. Metode Lattice terdiri atas dua tipe. Tipe pertama adalah tipe dimensi waktu dengan langkah/partisi waktu yang kecil, seperti metode binomial. Tipe kedua adalah tipe dimensi waktu hanya pada waktu *early exercise*, sehingga langkah/partisi waktu belum tentu kecil, seperti metode *fast fourier transform (FFT)*.

Penilaian opsi Amerika berhubungan dengan masalah diskrit yang mana secara umum diakui tidak ada solusi lengkap dan harus diselesaikan secara numerik. Penentuan harga yang tepat untuk opsi Amerika dapat diperoleh dengan cepat, akurat, dan tanpa masalah stabilitas menggunakan metode FFT. FFT adalah teknik transformasi Fourier dengan akurasi tinggi dan lebih efisien dengan menggunakan fungsi karakteristik daripada fungsi kerapatan itu sendiri. FFT merupakan metode baru dalam menyelesaikan formula penentuan *risk-neutral*. Dalam prakteknya, kalibrasi parameter dari perhitungan opsi perlu dilakukan dengan cepat, dan FFT ternyata lebih cepat daripada metode PDE (*Partial Differential Equation*) Black-Scholes, dan tidak memiliki masalah stabilitas seperti pada metode binomial. Metode FFT sangat tepat diterapkan dalam penentuan harga opsi yang mempunyai fitur *early exercise* dan membutuhkan

langkah/partisi yang tidak sedikit, tetapi dengan perhitungan yang cepat.

1.2 RUMUSAN PERMASALAHAN

Rumusan masalah yang diajukan dalam penelitian ini adalah bagaimana penentuan harga opsi amerika menggunakan metode *fast fourier transform* (FFT)?

1.3 PEMBATAHAN MASALAH

Pada penelitian ini permasalahan dibatasi pada :

1. Perhitungan harga opsi tanpa pembayaran dividen.
2. Perhitungan harga opsi hanya dilakukan dengan menggunakan metode *fast fourier Transform (FFT)*.

1.4 TUJUAN PENELITIAN

Tujuan penelitian ini adalah mengetahui penentuan harga opsi amerika menggunakan metode *fast fourier transform* (FFT)

1.5 MANFAAT PENELITIAN

Manfaat penelitian ini adalah :

1. Dapat memberikan pengetahuan tentang perhitungan harga opsi amerika menggunakan metode *fast fourier transform* (FFT)
2. Dapat mengetahui harga yang wajar (*fair price*) dari opsi amerika



BAB II

OPSI



2.1 OPSI (OPTION)

Opsi adalah suatu kontrak antara pembeli opsi dan penjual opsi, dimana pembeli opsi memperoleh hak untuk membeli atau menjual aset tertentu pada waktu dan harga yang telah ditetapkan. Ada berbagai macam jenis opsi, yaitu opsi saham, opsi mata uang, dan lain sebagainya.

Berdasarkan jenis hak yang diberikan kepada pembeli opsi, opsi dibedakan menjadi dua jenis, yaitu opsi call dan opsi put. Opsi call adalah opsi yang memberikan hak kepada pemegangnya (pembeli opsi) untuk membeli sejumlah aset dengan harga tertentu dan pada waktu tertentu. Sementara opsi put adalah opsi yang memberikan hak kepada pemegangnya

(pembeli opsi) untuk menjual sejumlah aset dengan harga tertentu dan pada waktu tertentu.

Berdasarkan waktu jatuh tempo, opsi dibagi menjadi dua, yaitu opsi Eropa dan Opsi Amerika. Opsi Eropa adalah opsi yang dapat dijalankan hanya pada saat jatuh tempo. Opsi Amerika lebih fleksibel, dimana opsi tersebut dapat dijalankan mulai dari tanggal kontrak sampai waktu jatuh tempo. Pemberian nama Eropa dan Amerika tidak menunjukkan tempat transaksi opsi. Penamaan tersebut hanya untuk membedakan opsi yang dapat dijalanannya saat jatuh tempo saja dan opsi yang fleksibel.

Seiring berjalannya waktu, berkembang pula jenis opsi yang lainnya. Salah satunya adalah opsi bermuda. Opsi bermuda adalah opsi gabungan antara opsi Eropa dan opsi Amerika. Opsi bermuda merupakan suatu kontrak opsi yang dapat dilaksanakan pada saat jatuh tempo ataupun sebelum jatuh tempo, tetapi hanya pada tanggal-tanggal tertentu saja yang telah disepakati antara penjual dan pembeli.

2.1.1 Faktor – faktor yang Mempengaruhi Nilai Opsi

Faktor-faktor yang mempengaruhi harga opsi :

1. Harga Saham saat ini, S_0 .
2. Harga kontrak/ Harga pelaksanaan K .
3. Waktu jatuh tempo, T .
4. Volatilitas harga saham, σ .
5. Suku bunga bebas resiko, r .
6. Deviden yang diharapkan selama umur opsi

Tabel 2. 1 Tabel Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Harga Opsi

Variabel	Opsi Call Eropa	Opsi Put Eropa	Opsi Call Amerika	Opsi Put Amerika
Harga saham saat ini	+	-	+	-
Harga kontrak	-	+	-	+
Waktu jatuh tempo	?	?	+	+
Volatilitas	+	+	+	+
Suku bunga bebas resiko	+	-	+	-
Deviden	-	+	-	+

+ mengindikasikan bahwa peningkatan variabel menyebabkan peningkatan harga opsi

- Mengindikasikan bahwa peningkatan variabel menyebabkan penurunan harga opsi

? Mengindikasikan bahwa hubungan yang tidak pasti

Asumsi :

1. Tidak ada biaya transaksi
2. Semua keuntungan perdagangan (keuntungan bersih dari kerugian perdagangan) dikenakan tarif pajak yang sama.
3. Meminjam dan meminjamkan dimungkinkan dengan tingkat bunga bebas risiko.

Notasi :

S_0 = harga saham saat ini

K = harga kontrak

T = waktu jatuh tempo

S_T = harga saham saat jatuh tempo

r = suku bunga bebas resiko (majemuk kontinu)

C = nilai opsi call Amerika untuk membeli saham

P = nilai opsi put Amerika untuk menjual saham

c = nilai opsi call Eropa untuk membeli saham

p = nilai opsi put Eropa untuk menjual saham

2.1.2 Sifat-Sifat Opsi Saham

Jika harga opsi di atas batas atas atau di bawah batas bawah maka ada peluang keuntungan untuk arbitrase

Batas atas dan batas bawah harga opsi

Opsi call Amerika atau Eropa memberikan hak bagi pemegangnya untuk membeli saham dengan harga tertentu. Apapun yang terjadi, harga opsi tidak pernah melebihi harga saham. Oleh karena itu, harga saham merupakan batas atas bagi harga opsi

$$c \leq S_0 \text{ dan } C \leq S_0.$$

Jika hubungan di atas tidak benar, arbitrase dapat dengan mudah membuat keuntungan tanpa resiko dengan membeli saham dan menjual opsi call.

Opsi put Amerika memberikan hak kepada pemegangnya untuk menjual saham dengan harga tertentu, K . Apapun yang terjadi, harga opsi tidak akan melebihi harga kontrak, K .

$$P \leq K.$$

Untuk opsi put Eropa, pada saat jatuh tempo, opsi tidak boleh bernilai lebih dari K . Karena itu, tidak dapat bernilai lebih dari nilai sekarang K hari ini:

$$p \leq Ke^{-rT}.$$

Jika ini tidak benar, maka seorang arbitrase dapat membuat keuntungan tanpa risiko dengan membuat kontrak opsi dan menginvestasikan hasil penjualan opsi dengan suku bunga bebas resiko.



Batas bawah opsi call dari saham yang tidak membayarkan deviden

Batas bawah untuk harga opsi call Eropa dari saham yang tidak membayarkan deviden :

$$S_0 - Ke^{-rT}.$$

Perhatikan pembentukan 2 portofolio di bawah ini :

Portofolio A : satu opsi call Eropa ditambah obligasi yang tidak memberikan kupon yang menghasilkan payoff K pada waktu T .

Portofolio B : satu bagian saham

Pada portofolio A, obligasi tanpa kupon akan bernilai K pada waktu T . Jika $S_T > K$, maka opsi akan dijalankan pada waktu jatuh tempo dan berarti bahwa portofolio A akan bernilai $(S_T - K) + K = S_T$. Jika $S_T < K$ maka opsi call tidak akan dijalankan dan

portofolio A akan bernilai K . Oleh karena itu, pada waktu T , portofolio A akan bernilai

$$\text{Maks}(S_T, K)$$

Portofolio B bernilai S_T pada saat T . Oleh karena itu, portofolio A selalu bernilai sama atau dapat melebihi portofolio B pada saat opsi jatuh tempo.

Pada saat ini, Obligasi tanpa kupon akan bernilai

$$Ke^{-rT}.$$

Karena portofolio A selalu bernilai sama atau dapat melebihi portofolio B pada saat opsi jatuh tempo maka pada saat ini portofolio A juga selalu bernilai sama atau dapat melebihi portofolio B

$$c + Ke^{-rT} \geq S_0$$

$$c \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

Karena hal terburuk yang terjadi pada opsi call adalah tidak dijalankannya opsi maka nilainya tidak mungkin negatif. Artinya bahwa $c \geq 0$ sehingga

$$c \geq \text{maks}(S_0 - Ke^{-rT}, 0)$$

Batas bawah opsi Put dari saham yang tidak membayarkan deviden

Untuk opsi Put Eropa dari saham yang tidak membayarkan deviden maka batas bawah dari harga opsi adalah

$$Ke^{-rT} - S_0.$$

Perhatikan pembentukan 2 portofolio di bawah ini :

Portofolio C : satu opsi put Eropa ditambah satu bagian saham.

Portofolio D : obligasi tanpa kupon yang memberikan payoff K pada waktu T .

Portofolio C pada waktu T saham akan bernilai S_T . Jika $S_T < K$, maka opsi akan dijalankan pada waktu jatuh tempo dan portofolio C akan bernilai $(K - S_T) + S_T = K$. Jika $S_T > K$ maka opsi put tidak akan dijalankan dan portofolio C akan bernilai S_T . Oleh karena itu, pada waktu T , portofolio C akan bernilai

$$\text{Maks}(S_T, K)$$

Portofolio D akan bernilai K pada waktu T . Oleh karena itu, portofolio C selalu bernilai sama atau dapat melebihi portofolio D pada waktu T .

Pada saat ini, Obligasi tanpa kupon akan bernilai

$$Ke^{-rT}.$$

Karena portofolio C selalu bernilai sama atau dapat melebihi portofolio D pada waktu T , maka pada saat ini portofolio C juga selalu bernilai sama atau dapat melebihi portofolio D

$$\begin{aligned} p + S_0 &\geq Ke^{-rT} \\ p &\geq Ke^{-rT} - S_0 \end{aligned}$$

Karena hal terburuk yang terjadi pada opsi put adalah tidak dijalkannya opsi maka nilainya tidak mungkin negatif. Artinya bahwa $p \geq 0$ sehingga

$$p \geq \text{maks}(Ke^{-rT} - S_0, 0)$$

Put call parity

Hubungan antara harga opsi call dan opsi Put Eropa yang mempunyai harga kontrak dan waktu jatuh tempo yang sama.

Sebagai ilustrasi, perhatikan pembentukan dua portofolio di bawah ini :

Portofolio A : satu opsi call Eropa ditambah obligasi tanpa kupon yang memberikan payoff K pada waktu T .

Portofolio C :satu opsi put Eropa ditambah satu bagian saham

Pada portofolio A, obligasi tanpa kupon akan memberikan nilai K pada waktu T . Jika $S_T > K$ maka opsi call akan dijalankan. Ini berarti bahwa portofolio A akan bernilai $(S_T - K) + K = S_T$. Jika $S_T < K$ maka opsi call tidak akan dijalankan. Ini berarti bahwa portofolio A akan bernilai K .

Portofolio C pada waktu T saham akan bernilai S_T . Jika $S_T < K$ maka opsi put akan dijalankan sehingga portofolio C akan bernilai $(K - S_T) + S_T = K$ pada waktu T . Jika $S_T > K$ maka opsi tidak akan dijalankan dan portofolio C akan bernilai S_T pada waktu T .

Tabel 2. 2 Nilai portofolio A dan C pada waktu T

		$S_T > K$	$S_T < K$
Portofolio A	Opsi Call	$S_T - K$	0
	Obligasi tanpa kupon	K	K
	Total	S_T	K
Portofolio C	Opsi Put	0	$K - S_T$
	Saham	S_T	S_T
	Total	S_T	K

Berdasarkan tabel di atas, Jika $S_T > K$ kedua portofolio bernilai S_T . Jika $S_T < K$, kedua portofolio bernilai K . Oleh karena itu, kedua portofolio akan bernilai

$$\text{Maks}(S_T, K)$$

Karena kedua portofolio mempunyai nilai yang identik pada waktu T , maka kedua portofolio juga mempunyai nilai yang identik pada saat ini.

Tabel 2. 3 Nilai portofolio A dan C pada saat ini

		Nilai saat ini
Portofolio A	Opsi Call	c
	Obligasi tanpa kupon	Ke^{-rT}
	Total	$c + Ke^{-rT}$
Portofolio C	Opsi Put	p
	Saham	S_0
	Total	$p + S_0$

Sehingga diperoleh hubungan

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0$$

yang disebut dengan put call parity Opsi Eropa

Put call parity opsi Amerika dari saham yang tidak memberikan deviden

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}.$$

Put call parity dari opsi saham tipe Eropa yang memberikan deviden :

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0$$

Put call parity dari opsi saham tipe Amerika yang memberikan deviden :

$$S_0 - D - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}.$$

2.1.3 Strategi Perdagangan Opsi

Ada dua strategi perdagangan opsi yang dapat dilakukan oleh investor yaitu spread dan kombinasi (Tandelin, 2010).

1. *Spread*

Strategi perdagangan menyebar dilakukan dengan mengambil posisi dalam dua atau lebih opsi yang mempunyai tipe yang sama (dua atau lebih opsi call, atau dua atau lebih opsi put).

BULL SPREAD

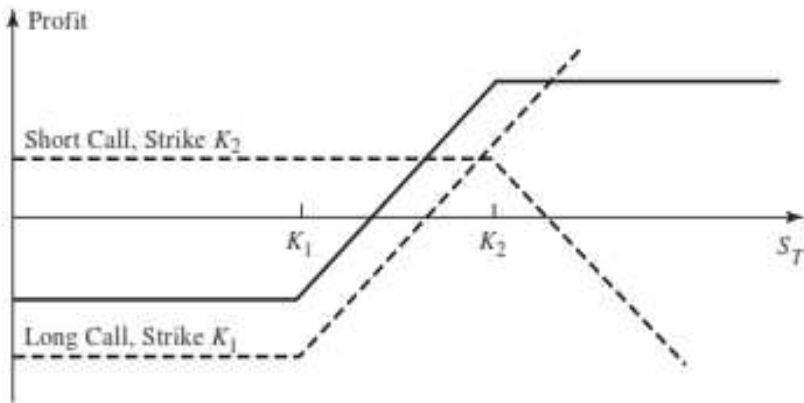
Salah satu tipe spread yang paling populer adalah bull spread. Strategi bull spread dilakukan dengan membeli opsi call Eropa suatu saham dengan harga kontrak tertentu dan menjual opsi call Eropa dari saham yang sama dengan harga kontrak yang lebih tinggi. Kedua opsi mempunyai waktu jatuh tempo yang sama. Karena harga opsi call selalu menurun saat harga kontrak meningkat maka nilai opsi call yang dijual selalu lebih rendah dari nilai opsi call yang dibeli.

Misal K_1 adalah harga kontrak untuk opsi call yang dibeli, K_2 adalah harga kontrak untuk opsi call yang dijual, dan S_T adalah harga saham saat opsi jatuh tempo. c_1 adalah harga opsi call yang dibeli dan c_2 adalah harga opsi call yang dijual. Payoff dari Bull Spread seperti pada tabel di bawah ini.

Tabel 2. 4 Payoff dari Bull Spread

Range harga saham	Payoff long call option	Payoff short call option	Total Payoff	Profit
$S_T \geq K_2$	$S_T - K_1$	$K_2 - S_T$	$K_2 - K_1$	$(K_2 - K_1) - (c_1 - c_2)$
$K_1 < S_T < K_2$	$S_T - K_1$	0	$S_T - K_1$	$(S_T - K_1) - (c_1 - c_2)$

$S_T \leq K_1$	0	0	0	$-(c_1 - c_2)$
----------------	---	---	---	----------------



Gambar 2. 1 Profit dari Bull Spread

Contoh :

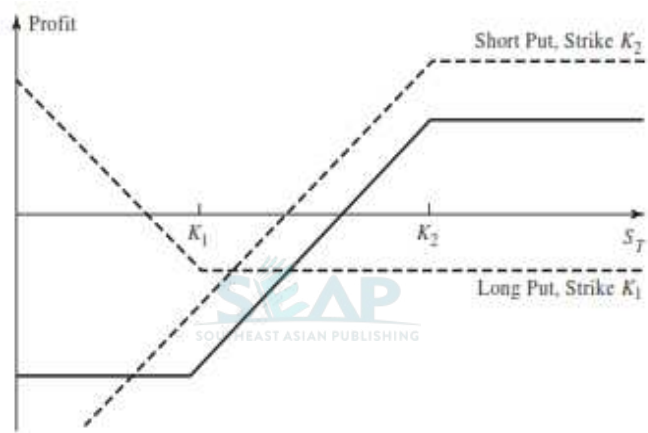
Investor membeli opsi call Eropa seharga \$3 dengan harga kontrak \$30 dan menjual opsi call seharga \$1 dengan harga kontrak \$35.

Tabel 2. 5 Contoh Payoff Bull Spread

Range harga saham	Payoff long call option	Payoff short call option	Total Payoff	Profit
$S_T \geq 35$	$S_T - 30$	$35 - S_T$	$35 - 30 = 5$	$5 - (3 - 1) = 3$
$30 < S_T < 35$	$S_T - 30$	0	$S_T - 30$	$(S_T - 30) - (3 - 1) = S_T - 32$

$S_T \leq 30$	0	0	0	$-(3 - 1) = -2$
---------------	---	---	---	-----------------

Bull spread juga dapat dilakukan dengan membeli opsi put Eropa dengan harga kontrak yang lebih rendah dan menjual opsi put dengan harga kontrak yang lebih tinggi. Profitnya dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 2. 2 Profit Bull Spread

BEAR SPREAD

Investor yang melakukan bear spread berharap harga saham akan menurun. Bear spread dapat dilakukan dengan membeli opsi put Eropa dengan suatu harga kontrak dan menjual opsi put Eropa dengan harga kontrak yang lain. Harga kontrak opsi put yang dibeli lebih tinggi dari opsi put yang dijual.

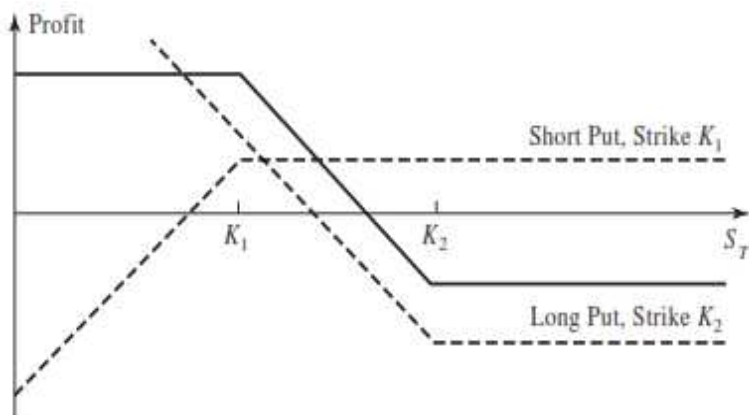
Diasumsikan bahwa K_2 adalah harga kontrak dari opsi put yang dibeli sedangkan K_1 adalah harga kontrak dari opsi put yang dijual, dimana $K_1 < K_2$.

c_2 adalah harga opsi put yang dibeli

c_1 adalah harga opsi put yang dijual

Tabel 2. 6 Payoff dari Bear Spread

Range harga saham	Payoff long put option	Payoff short put option	Total Payoff	Profit
$S_T \geq K_2$	0	0	0	$-(c_2 - c_1)$
$K_1 < S_T < K_2$	$K_2 - S_T$	0	$K_2 - S_T$	$(K_2 - S_T) - (c_2 - c_1)$
$S_T \leq K_1$	$K_2 - S_T$	$S_T - K_1$	$K_2 - K_1$	$(K_2 - K_1) - (c_2 - c_1)$



Gambar 2. 3 Profit dari Bear Spread

Contoh dari Bear Spread :

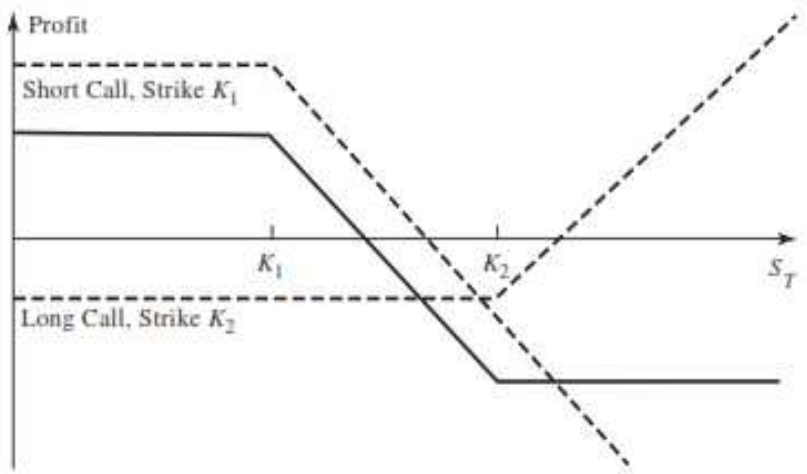
Investor membeli opsi put Eropa 3 bulan seharga \$3 dengan harga kontrak \$35 dan menjual opsi put Eropa 3 bulan seharga \$1 dengan harga kontrak \$30.

Tabel 2. 7 Contoh Payoff dari Bear Spread

Range harga saham	Payoff long put option	Payoff short put option	Total Payoff	Profit
$S_T \geq 35$	0	0	0	$-(3 - 1) = -2$
$30 < S_T < 35$	$35 - S_T$	0	$35 - S_T$	$(35 - S_T) - (3 - 1) = 33 - S_T$
$S_T \leq 30$	$35 - S_T$	$S_T - 30$	$35 - 30 = 5$	$5 - 2 = 3$

Bear spread juga dapat dilakukan dengan membeli opsi call Eropa dengan harga kontrak yang lebih tinggi dan menjual opsi call Eropa dengan harga kontrak yang lebih rendah.

Profitnya dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 2. 4 Profi lain dari Bear Spread

BOX SPREAD

Box spread adalah kombinasi dari opsi call bull spread dengan harga kontrak K_1 dan K_2 dan opsi put bear spread dengan harga kontrak yang sama.

Tabel 2. 8 Payoff dari Box Spread

Range harga saham	Payoff dari bull call spread	Payoff dari bear put spread	Total Payoff
$S_T \leq K_1$	0	$K_2 - K_1$	$K_2 - K_1$
$K_1 < S_T < K_2$	$S_T - K_1$	$K_2 - S_T$	$K_2 - K_1$
$S_T \geq K_2$	$K_2 - K_1$	0	$K_2 - K_1$

BUTTERFLY SPREAD

Butterfly spread dilakukan pada opsi dengan 3 harga kontrak yang berbeda. Caranya adalah membeli opsi call Eropa dengan harga kontrak yang lebih rendah K_1 , membeli opsi call Eropa dengan harga kontrak yang lebih tinggi K_3 , dan menjual dua opsi call Eropa dengan harga kontrak K_2 yang berada di tengah-tengah K_1 dan K_3 . Secara umum, K_2 mendekati harga saham saat ini.

c_1 adalah harga opsi call yang dibeli dg harga kontrak K_1

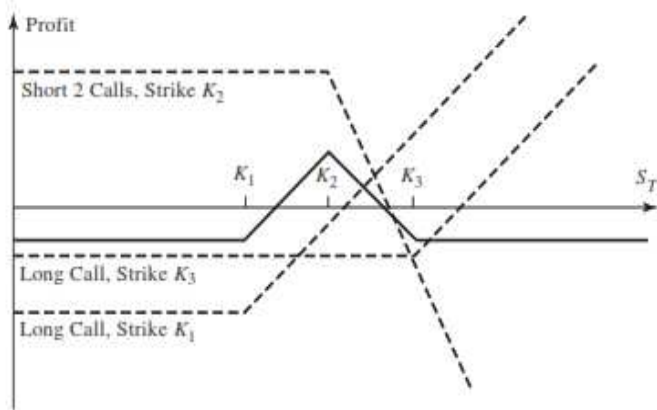
c_3 adalah harga opsi call yang dibeli dg harga kontrak K_3

c_2 adalah harga opsi call yang dijual.

Tabel 2. 9 Payoff dari butterfly spread :

Range harga saham	Payoff dari long call pertama	Payoff dari long call kedua	Payoff dari short call	Total payoff	Profit
$S_T \leq K_1$	0	0	0	0	$-(c_1 + c_3 - 2c_2)$
$K_1 < S_T < K_2$	$S_T - K_1$	0	0	$S_T - K_1$	$(S_T - K_1) - (c_1 + c_3 - 2c_2)$
$K_2 < S_T < K_3$	$S_T - K_1$	0	$-2(S_T - K_2)$	$K_3 - S_T$	$(K_3 - S_T) - (c_1 + c_3 - 2c_2)$
$S_T \geq K_3$	$S_T - K_1$	$S_T - K_3$	$-2(S_T - K_2)$	$S_T - K_1 + S_T - K_3 - 2S_T + 2K_2 = 0$	$-(c_1 + c_3 - 2c_2)$

Diasumsikan bahwa $K_2 = 0.5 (K_1 + K_3)$



Gambar 2. 5 Profit dari butterfly spread

Contoh dari butterfly spread :

Diketahui harga saham saat ini adalah \$61. Seorang investor melakukan butterfly spread dengan daftar harga opsi call untuk waktu jatuh tempo 6 bulan seperti di bawah ini :

Harga Kontrak	Harga Opsi Call
55	10
60	7
65	5

Tabel 2. 10 Contoh Payoff dari butterfly spread :

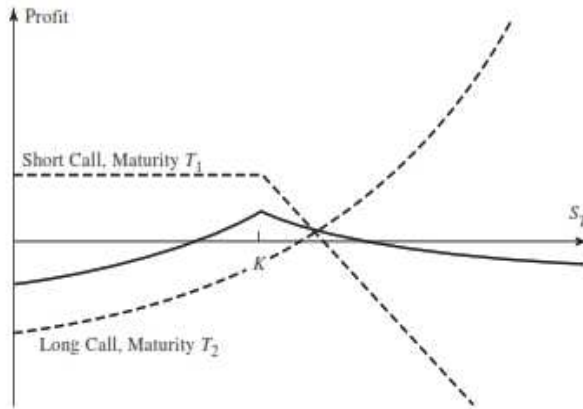
Range harga saham	Payoff dari long call pertama	Payoff dari long call kedua	Payoff dari short call	Total payoff	Profit
$S_T \leq 55$	0	0	0	0	$-(10 + 5 - 2 \times 7) = -\1
$55 < S_T < 60$	$S_T - 55$	0	0	$S_T - 55$	$(S_T - 55) - (1) = S_T - 56$
$60 < S_T < 65$	$S_T - 55$	0	$-2(S_T - 60)$	$65 - S_T$	$(65 - S_T) - 1 = 64 - S_T$
$S_T \geq 65$	$S_T - 55$	$S_T - 65$	$-2(S_T - 60)$	$S_T - K_1 + S_T - K_3 - 2S_T + 2K_2 = 0$	- 1

CALENDAR SPREAD

Calendar spread dilakukan terhadap opsi yang mempunyai harga kontrak yang sama tetapi waktu jatuh tempo yang berbeda.

Calendar spread dapat dilakukan dengan menjual opsi call Eropa dengan harga kontrak tertentu dan membeli opsi call Eropa dengan harga kontrak yang sama tetapi waktu jatuh tempo yang lebih lama. Opsi yang mempunyai waktu jatuh

tempo yang lama biasanya mempunyai harga opsi yang lebih mahal.



Gambar 2. 6 Profit dari calendar spread



2. Kombinasi

Kombinasi adalah strategi perdagangan opsi yang dilakukan dengan mengambil opsi call dan opsi put dari saham yang sama. Contoh kombinasi adalah straddle, strips, straps, dan strangles.

STRADDLE

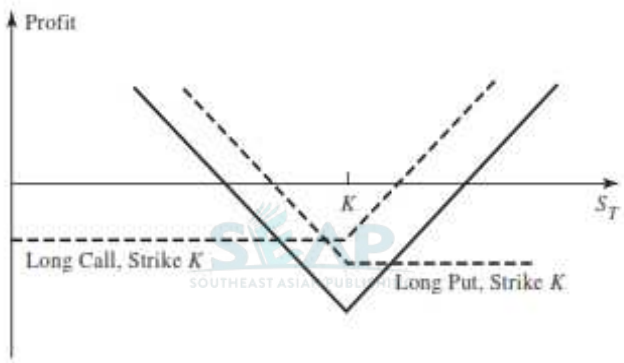
Salah satu kombinasi yang populer adalah straddle. Straddle dilakukan dengan membeli opsi call Eropa dan opsi put Eropa dengan harga kontrak dan waktu jatuh tempo yang sama.

Tabel 2. 11 Payoff dari Straddle

Range harga saham	Payoff from call	Payoff from put	Total Payoff	Profit

$S_T \leq K$	0	$K - S_T$	$K - S_T$	$(K - S_T) - (c_1 + c_2)$
$S_T > K$	$S_T - K$	0	$S_T - K$	$(S_T - K) - (c_1 + c_2)$

c_1 adalah harga opsi call
 c_2 adalah harga opsi put



Gambar 2. 7 Profit straddle

Contoh :

Seorang investor, merasa harga saham tertentu akan bergerak signifikan dalam 3 bulan yang akan datang. Harga saham itu saat ini adalah \$69. Investor melaksanakan straddle dengan membeli opsi call dan opsi put dengan harga kontrak \$70 dan waktu jatuh tempo 3 bulan. Harga opsi call adalah \$4 dan harga opsi put adalah \$3.

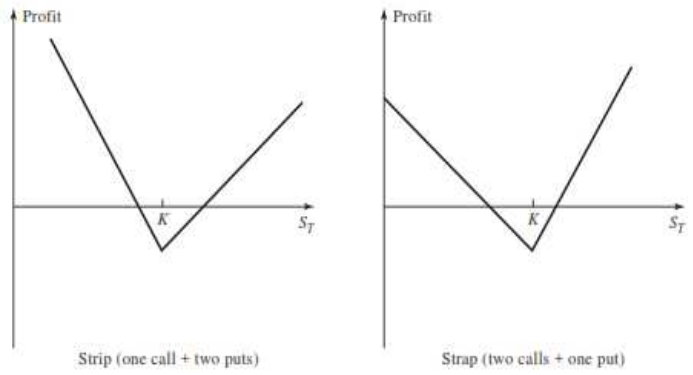
Tabel 2. 12 Contoh payoff Straddle

Harga saham	Payoff from call	Payoff from put	Total Payoff	Profit
55	0	15	15	$15 - (4 + 3) = 8$
60	0	10	10	$10 - 7 = 3$
65	0	5	5	$5 - 7 = -2$
69	0	1	1	$1 - 7 = -6$
70	0	0	0	$0 - 7 = -7$
75	5	0	5	$5 - 7 = -2$
80	10	0	10	$10 - 7 = 3$
90	20	0	20	$20 - 7 = 13$

3. Strips and Straps

Strips adalah membeli satu opsi call Eropa dan dua opsi put Eropa dengan harga kontrak dan waktu jatuh tempo yang sama. Straps adalah membeli dua opsi call Eropa dan satu opsi put Eropa dengan harga kontrak dan waktu jatuh tempo yang sama.

Dalam strategi strips, investor menduga bahwa penurunan harga saham lebih mungkin terjadi dibandingkan peningkatan harga saham. Dalam strategi straps, investor menduga bahwa peningkatan harga saham lebih mungkin terjadi daripada penurunan harga saham.



Gambar 2. 8 Profit dari strips dan straps

4. Strangles

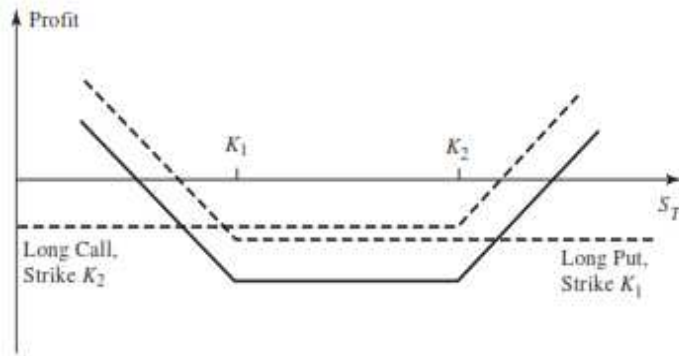
Dalam strategi strangles atau disebut kombinasi vertikal bawah, investor membeli opsi put Eropa dan opsi call Eropa dengan waktu jatuh tempo yang sama tetapi harga kontrak yang berbeda. Harga kontrak dari opsi call adalah K_2 yang lebih tinggi dari harga kontrak dari opsi put yaitu K_1 .

Tabel 2. 13 Payoff dari Strangles

Range harga saham	Payoff from call	Payoff from put	Total Payoff	Profit
$S_T \leq K_1$	0	$K_1 - S_T$	$K_1 - S_T$	$(K_1 - S_T) - (c_1 + c_2)$
$K_1 < S_T < K_2$	0	0	0	$-(c_1 + c_2)$
$S_T \geq K_2$	$S_T - K_2$	0	$S_T - K_2$	$(S_T - K_2) - (c_1 + c_2)$

c_1 adalah harga opsi put

c_2 adalah harga opsi call



Gambar 2. 9 Profit Strangles

2.2 VOLATILITAS SAHAM

Volatilitas menggambarkan dinamika harga saham pada periode waktu tertentu. Nilai volatilitas yang kecil mendekati nol menunjukkan bahwa harga saham cenderung konstan atau perubahan harga sahamnya sangat kecil. Nilai volatilitas yang besar menunjukkan bahwa perubahan harga saham mempunyai range yang lebar.

Nilai volatilitas dapat dicari dengan dua cara yaitu menggunakan data historis atau *historical volatility* dan menggunakan informasi volatilitas pasar hari ini atau *implied volatility*. Pada penelitian ini nilai volatilitas ditentukan dengan menggunakan *historical volatility*.

Volatilitas historis adalah volatilitas yang dihitung berdasarkan pada harga-harga saham masa lalu. Dari $n+1$ harga saham dihitung n return (tingkat keuntungan yang diperoleh dari akibat melakukan investasi) yang dimajemukkan secara kontinu sebagai berikut:

$$R_t = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \quad (2.1)$$

dimana S_t dan S_{t-1} menotasikan harga pasar saham pada waktu ke t dan $t-1$. Selanjutnya dihitung rata-rata *return* saham:

$$\bar{R}_t = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n R_t \quad (2.2)$$

dan variansi :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (R_t - \bar{R}_t)^2 \quad (2.3)$$

Volatilitas dihitung dengan rumus sebagai berikut:

$$\sigma = \sqrt{\text{jumlah hari perdagangan} \times \frac{\sum_{t=1}^n (R_t - \bar{R}_t)^2}{n-1}} \quad (2.4)$$

2.3 NILAI BATAS PADA OPSI AMERIKA

Opsi yang dapat dijalankan kapan saja selama umur opsi disebut opsi Amerika, yang merupakan mayoritas opsi yang diperdagangkan di bursa. Karena investor memiliki kebebasan untuk menggunakan opsi Amerika kapan saja selama masa kontrak. Opsi Amerika lebih bernilai daripada opsi Eropa yang hanya dapat digunakan pada saat jatuh tempo.

Opsi Bermudan adalah opsi beli atau jual yang dapat dijalankan pada beberapa hari tertentu selama umur opsi. Dengan kata lain, opsi Bermuda adalah campuran opsi Eropa, yang hanya

dapat dijalankan pada tanggal kedaluwarsa opsi, dan opsi Amerika, yang dapat dijalankan kapan saja selama masa opsi masih berlaku. Akibatnya, dalam kondisi yang sama, nilai opsi Bermuda lebih besar dari (atau sama dengan) opsi Eropa tetapi kurang dari (atau sama dengan) opsi Amerika.

Pada dasarnya ada dua cara untuk memecahkan masalah penetapan harga opsi. Salah satunya adalah dengan menyelesaikan Persamaan Diferensial Parsial Black-Scholes dengan kondisi batas yang tepat.

Opsi Amerika memiliki fitur tambahan yaitu dapat dijalankan kapan saja selama masa opsi masih berlaku. Karena fitur tambahan ini, opsi Amerika berpotensi memiliki nilai lebih tinggi daripada opsi Eropa. Ambil opsi put sebagai contoh. Konsep arbitrase memberlakukan kendala

$$V(S, t) \geq \max(S - E, 0)$$

Karena jika tidak maka akan terjadi keuntungan arbitrase bebas resiko yaitu $S - E - V$.

Lebih lanjut, mungkin ada beberapa nilai opsional $S(t)$ dimana pemegangnya akan menggunakan atau menjalankan opsi Amerika lebih awal. Jika tidak demikian, maka nilai opsinya akan sama dengan nilai opsi Eropa, karena persamaan Black-Scholes juga akan berlaku untuk semua S .

Dengan demikian, penentuan opsi Amerika tidak hanya tentang menentukan nilai opsi, tetapi juga tentang menentukan nilai S dimana seseorang harus menggunakan atau menjalankan opsi tersebut. Jenis masalah ini termasuk dalam masalah batas bebas:

- Nilai opsi harus lebih besar dari atau sama dengan fungsi payoff. Ini menunjukkan bahwa keuntungan arbitrase yang

diperoleh dari pelaksanaan awal harus sama dengan nol. Untuk setiap waktu t , sumbu S harus dibagi menjadi dua daerah berbeda yaitu $0 \leq S \leq S_f(t)$, dan $S_f(t) \leq S \leq \infty$.

Untuk opsi put Amerika, nilai P , memenuhi $P = E - S$ ketika S berada dalam interval antara nol dan harga pelaksanaan optimal, tetapi $P > E - S$ saat S naik hingga interval terakhir antara harga pelaksanaan optimal dan tak hingga.

- Persamaan Black-Scholes diganti dengan pertidaksamaan, bukan persamaan; Kami dapat menyiapkan portofolio delta-hedged seperti sebelumnya, dengan pilihan delta yang persis sama. Argumen arbitrase untuk opsi Eropa tidak lagi mengarah pada nilai unik untuk pengembalian portofolio, hanya pada ketidaksetaraan. Dan pengembalian dari portofolio tidak bisa lebih besar dari pengembalian dari deposito bank.

Untuk opsi put Amerika

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP \leq 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0 \text{ jika } 0 \leq S \leq S_f(t)$$

dan

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0 \text{ jika } S_f(t) \leq S \leq \infty$$

- Nilai opsi harus merupakan fungsi kontinu dari S .

Ini mengikuti dari konsep arbitrase sederhana. Jika ada diskontinuitas dalam nilai opsi, dan jika diskontinuitas ini bertahan selama lebih dari waktu yang sangat kecil, portofolio opsi hanya akan menghasilkan keuntungan bebas risiko dengan probabilitas 1 jika harga aset pernah mencapai nilai di mana diskontinuitas terjadi. Kurva harga opsi Amerika versus

harga aset harus bersinggungan dengan garis pembayaran opsi Eropa terkait pada titik harga pelaksanaan optimal.

Untuk opsi put Amerika

$$\frac{\partial P}{\partial S}(S_f(t), t) = -1$$

karena jika tidak, nilai opsi untuk harga di samping harga pelaksanaan optimal akan bertentangan dengan batasan pertama $P > \max(S - E, 0)$ ketika harga pelaksanaan optimal opsi $P = \max(S - E, 0)$ pada $S_f(t)$.

- Delta opsi (kemiringan) harus kontinu.

Cara lain untuk menentukan nilai opsi Amerika adalah menggunakan pendekatan opsi bermuda dengan sejumlah N waktu pelaksanaan yang besar. Semakin banyak waktu pelaksanaan yang dimiliki opsi Bermuda maka nilai opsi Bermuda semakin dekat nilainya dengan opsi Amerika.

Di antara dua waktu pelaksanaan awal yang berdekatan, opsi Bermuda akan mendekati opsi Eropa, yang mana titik waktu awal dan waktu jatuh tempo masing-masing adalah dua waktu yang sedang dibahas. Dengan demikian teori penilaian risiko netral dapat diterapkan. Penentuan harga opsi Bermudan atau opsi Amerika dengan rumus penilaian risiko netral dan mode kisi adalah sebagai berikut :

1. Atur kisi harga aset yang mendasari dengan mengukur dimensi waktu;
2. Formula penilaian risk-neutral diterapkan di antara dua kisi yang berdekatan. Nilai yang diperoleh dengan formula penilaian netral risiko disebut nilai lanjutan dan perlu dibandingkan dengan payoff saat ini untuk mengeliminasi peluang arbitrase yang mungkin terjadi. Dengan demikian,

nilai akhir dari opsi pada kisi itu adalah nilai maksimum dari nilai lanjutan dan hasil saat ini.

3. Prosedur penilaian dimulai antara kisi pada saat jatuh tempo dan kisi sebelum jatuh tempo, dan bergerak mundur hingga waktu awal tercapai.

Ada dua jenis mode kisi yang umum. Yang pertama adalah dimensi waktu dengan langkah waktu yang sangat kecil, seperti metode binomial dan yang kedua adalah mengukur dimensi waktu hanya pada tanggal pelaksanaan awal, sehingga langkah waktu tidak selalu kecil, seperti metode Transformasi. Bentuk kisi yang digunakan oleh berbagai metode Transformasi juga berbeda satu sama lain, cara membuat kisi sangat erat kaitannya dengan metode penetapan harga tertentu yang digunakan.

2.4 DERET FOURIER

Suatu fungsi periodik yang dapat diuraikan menjadi komponen-komponen sinus disebut dengan deret Fourier (Sudirham, 2013). Deret Fourier $f(t)$ yang memenuhi persyaratan Dirichlet, dapat dinyatakan sebagai deret Fourier :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (2.5)$$

yang dapat dituliskan sebagai

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{a_n^2 + b_n^2} (\cos(n\omega_0 t - \theta_n)) \right] \quad (2.6)$$

Koefisien fourier a_0 , a_n , dan b_n ditentukan dengan hubungan berikut :

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt \\a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt ; \quad n > 0 \\b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt ; \quad n > 0\end{aligned}\tag{2.7}$$

Hubungan (2.7) dapat diperoleh dari (2.5).

Deret fourier dalam bentuk (2.5) sering disebut sebagai bentuk sinus-cosinus. Bentuk (2.5) dapat diubah ke dalam bentuk (2.6). Bentuk (2.6) dapat diubah ke dalam bentuk eksponensial dengan memanfaatkan hubungan

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

Dengan menggunakan relasi ini maka (2.6) dapat diubah menjadi

$$\begin{aligned}f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{a_n^2 + b_n^2} (\cos(n\omega_0 t - \theta_n)) \right] \\f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{(a_n^2 + b_n^2)} \frac{e^{j(n\omega_0 t - \theta_n)} + e^{-j(n\omega_0 t - \theta_n)}}{2} \right] \\f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}} e^{j(n\omega_0 t - \theta_n)} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}} e^{-j(n\omega_0 t - \theta_n)} \right]\end{aligned}\tag{2.8}$$

Pada persamaan (2.8), $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}} e^{-j(n\omega_0 t - \theta_n)} \right]$ atau suku ketiga merupakan penjumlahan dari 1 sampai dengan ∞ .

Jika pada suku ketiga, penjumlahannya diganti menjadi $n = -1$ sampai $n = -\infty$, a_n menjadi a_{-n} , b_n menjadi b_{-n} , dan θ_n menjadi θ_{-n} , maka berdasarkan persamaan (2.7) hasilnya berubah menjadi :

$$\begin{aligned} a_{-n} &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos(-n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = a_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{-n} &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \\ &= -\frac{2}{T_0} \int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt = -b_n \end{aligned}$$

$$\tan \theta_{-n} = \frac{b_{-n}}{a_{-n}} = \frac{-b_n}{a_n}$$

$$\theta_{-n} = -\theta_n \quad (2.9)$$

Dengan persamaan (2.9) maka persamaan (2.8) menjadi

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}} e^{j(n\omega_0 t - \theta_n)} \right] + \sum_{n=-1}^{-\infty} \left[\sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}} e^{j(n\omega_0 t - \theta_n)} \right] \quad (2.10)$$

Persamaan (2.10) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}} e^{-j\theta_n} \right) e^{j(n\omega_0 t)} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j(n\omega_0 t)} \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Persamaan (2.11) merupakan bentuk eksponensial deret fourier dengan c_n adalah koefisien fourier yang mungkin berupa bilangan kompleks.

$$c_n = \sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}} e^{-j\theta_n} = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad (2.12)$$

$$|c_n| = \sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}} \quad \text{dan} \quad \angle c_n = \theta_n$$

Dengan

$$\begin{aligned}
 \theta_n &= \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right) \quad \text{jika } a_n < 0 \\
 \theta_n &= \tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \quad \text{jika } a_n > 0
 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Jika a_n dan b_n pada (2.7) dimasukkan ke (2.12) maka

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2.14)$$

Dengan persamaan (2.14) maka persamaan (2.11) menjadi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j(n\omega_0 t)}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) e^{j(n\omega_0 t)} \quad (2.15)$$

Perhatikan bahwa $\omega_0 = 2\pi/T_0$, oleh karena itu persamaan (2.15) dapat diubah menjadi

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) e^{j(n\omega_0 t)} \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) \omega_0 e^{j(n\omega_0 t)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Jika T_0 semakin besar menuju ∞ maka $\Delta\omega$ dan $n\omega_0$ akan menjadi kontinu. Hal ini berakibat pada penjumlahan pada persamaan (2.16) berubah menjadi integral, $\Delta\omega$ menjadi $d\omega$ dan $n\omega_0$ menjadi ω . Persamaan (2.16) berubah menjadi

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (2.17)$$

dengan $\mathcal{F}(\omega)$ merupakan sebuah fungsi frekuensi yang baru, sedemikian rupa sehingga

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.18)$$

dan $\mathcal{F}(\omega)$ inilah transformasi Fourier dari $f(t)$, yang ditulis dengan notasi

$$F[f(t)] = \mathcal{F}(\omega)$$

Proses transformasi balik dapat kita lakukan melalui persamaan (2.17).

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\omega)$$

2.5 PENENTUAN HARGA OPSI DENGAN METODE BLACK-SCHOLES

Perhitungan harga opsi pertama kali dicetuskan oleh Fischer Black dan Myron Scholes pada tahun 1973, perhitungan harga opsi yang dikenal dengan nama model Black-Scholes ini merupakan perhitungan yang terkenal dan menjadi dasar pada pengembangan perhitungan harga opsi yang lainnya. Model Black-Scholes membawa perubahan yang besar pada perhitungan harga opsi.

2.5.1 Opsi *Call* (Opsi beli) dengan Model Black-Scholes

Harga opsi Black-Scholes dipengaruhi oleh lima variabel, yaitu harga saham (S_0), harga kontrak (K), waktu jatuh tempo (T), tingkat suku bunga (r), dan volatilitas *return* saham (σ). Formula harga opsi beli tipe Eropa berdasarkan model Black-Scholes adalah :

$$C_0 = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (2.19)$$

dengan :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + T\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.20)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + T\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.21)$$

Keterangan : C_0 adalah harga opsi beli, S_0 merupakan harga saham pada waktu $t = 0$, K adalah harga kontrak, T adalah waktu jatuh tempo, r adalah tingkat suku bunga bank sentral, $N(x)$ merupakan nilai kumulatif distribusi normal standar, dan σ merupakan volatilitas *return* saham (Black dan Scholes, 1973).

Formula harga opsi pada persamaan (2.19) dengan d_1 dan d_2 seperti pada persamaan (2.20) dan (2.21) diperoleh dari penjelasan di bawah ini :

Secara umum harga opsi beli dapat dituliskan dalam bentuk :

$$C_0 = e^{-rT} E(\max(S_T - K, 0)) \quad (2.22)$$

dimana S_T adalah harga saham pada waktu T dan $E(\max(S_T - K, 0))$ menunjukkan nilai harapan fungsi keuntungan opsi beli, e^{-rT} merupakan nilai diskonto dengan r adalah suku bunga bank sentral serta T adalah waktu jatuh tempo.

Pada model Black-Scholes harga saham diasumsikan berdistribusi lognormal sehingga $S_T \sim \log N(\mu_l, \sigma_l^2)$.

S_T berdistribusi lognormal dan $\ln(S_T)$ berdistribusi normal sehingga $\mu_l = E(\ln S_T) = \ln(S_0) + T\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)$ dan $\sigma_l = \sqrt{\text{var}(\ln S_T)} = \sigma\sqrt{T}$.

Fungsi densitas dari S_T adalah :

$$g(S_T) = \begin{cases} \frac{1}{S_T \sigma_l \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(S_T) - \mu_l}{\sigma_l}\right)^2\right), & S_T > 0 \\ 0, & S_T \leq 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Ekspektasi fungsi keuntungan opsi dapat dijabarkan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} E(\max(S_T - K, 0)) &= \int_0^\infty [\max(S_T - K, 0)] g(S_T) dS_T \\ &= \int_K^\infty (S_T - K) g(S_T) dS_T \\ &\quad + \int_0^K 0 \cdot g(S_T) dS_T \\ &= \int_K^\infty S_T g(S_T) dS_T - K \int_K^\infty g(S_T) dS_T \\ E(\max(S_T - K, 0)) &= C_A - C_B \end{aligned} \quad (2.24)$$

dengan :

$$\begin{aligned} C_A &= \int_K^\infty S_T g(S_T) dS_T \\ C_B &= K \int_K^\infty g(S_T) dS_T \end{aligned}$$

Sehingga harga opsi beli dapat dituliskan dalam bentuk berikut ini :

$$C_0 = e^{-rT} \left[\int_K^{\infty} S_T g(S_T) dS_T - K \int_K^{\infty} g(S_T) dS_T \right] \quad (2.25)$$

C_A dapat dijabarkan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} C_A &= \int_K^{\infty} S_T g(S_T) dS_T \\ &= \int_K^{\infty} S_T \frac{1}{S_T \sigma_l \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(S_T) - \mu_l}{\sigma_l} \right)^2 \right) dS_T \\ &= \int_K^{\infty} \frac{1}{\sigma_l \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(S_T) - \mu_l}{\sigma_l} \right)^2 \right) dS_T \end{aligned}$$

Misal : $z = \ln(S_T)$

$e^z = S_T$ diperoleh $e^z dz = dS_T$

$$C_A = \int_{\ln(K)}^{\infty} \frac{1}{\sigma_l \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z - \mu_l}{\sigma_l} \right)^2 \right) e^z dz$$

$$C_A = \int_{\ln(K)}^{\infty} \frac{1}{\sigma_l \sqrt{2\pi}} \exp \left(z - \frac{1}{2} \left(\frac{z - \mu_l}{\sigma_l} \right)^2 \right) dz$$

Pangkat dari e dapat dimanipulasi dalam bentuk :

$$\begin{aligned} z - \frac{1}{2} \left(\frac{z - \mu_l}{\sigma_l} \right)^2 &= -\frac{1}{2} \frac{(z - (\mu_l + \sigma_l^2))^2}{\sigma_l^2} + \mu_l + \frac{\sigma_l^2}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{z - (\mu_l + \sigma_l^2)}{\sigma_l} \right)^2 + \mu_l + \frac{1}{2} \sigma_l^2 \end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh :

$$C_A = \int_{\ln(K)}^{\infty} \frac{1}{\sigma_l \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z - (\mu_l + \sigma_l^2)}{\sigma_l} \right)^2 + \mu_l + \frac{1}{2} \sigma_l^2 \right) dz$$

$$= \exp \left(\mu_l + \frac{1}{2} \sigma_l^2 \right) \int_{\ln(K)}^{\infty} \frac{1}{\sigma_l \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z - (\mu_l + \sigma_l^2)}{\sigma_l} \right)^2 \right) dz$$

$$\text{Misal : } q = \frac{z - (\mu_l + \sigma_l^2)}{\sigma_l}$$

$$dz = \sigma_l dq$$

$$C_A = \exp \left(\mu_l + \frac{1}{2} \sigma_l^2 \right) \int_{\frac{\ln(K) - (\mu_l + \sigma_l^2)}{\sigma_l}}^{\infty} \frac{1}{\sigma_l \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} q^2 \right) \sigma_l dq$$

$$= \exp \left(\mu_l + \frac{1}{2} \sigma_l^2 \right) \int_{\frac{\ln(K) - (\mu_l + \sigma_l^2)}{\sigma_l}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} q^2 \right) dq$$

$$= \exp \left(\mu_l + \frac{1}{2} \sigma_l^2 \right) \int_{-\infty}^{\frac{(\mu_l + \sigma_l^2) - \ln(K)}{\sigma_l}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} q^2 \right) dq$$

$$= \exp \left(\mu_l + \frac{1}{2} \sigma_l^2 \right) N \left(\frac{(\mu_l + \sigma_l^2) - \ln(K)}{\sigma_l} \right)$$

$$= \exp \left(\ln(S_0) + T \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 T \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \times N \left(\frac{\ln(S_0) + T \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \sigma^2 T - \ln(K)}{\sigma \sqrt{T}} \right) \\
 & = S_0 e^{rT} N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + T \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right)}{\sigma \sqrt{T}} \right) \\
 C_A & = S_0 e^{rT} N(d_1) \tag{2.26}
 \end{aligned}$$

dengan : $d_1 = \frac{\ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + T \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right)}{\sigma \sqrt{T}}$

Penjabaran untuk C_B adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 C_B & = K \int_K^\infty g(S_T) dS_T \\
 & = K \int_K^\infty \frac{1}{S_T \sigma_l \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(S_T) - \mu_l}{\sigma_l} \right)^2 \right) dS_T
 \end{aligned}$$

Misal : $z = \frac{\ln(S_T) - \mu_l}{\sigma_l}$

$$S_T = e^{\mu_l + \sigma_l z}$$

Sehingga diperoleh $dS_T = e^{\mu_l + \sigma_l z} \sigma_l dz$

$$C_B = K \int_{\frac{\ln(K) - \mu_l}{\sigma_l}}^\infty \frac{1}{e^{\mu_l + \sigma_l z} \sigma_l \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} z^2 \right) e^{\mu_l + \sigma_l z} \sigma_l dz$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mu_l - \ln(K)}{\sigma_l} \\
 &= K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \\
 &= K N\left(\frac{\mu_l - \ln(K)}{\sigma_l}\right) \\
 &= K N\left(\frac{\ln(S_0) + T\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) - \ln(K)}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
 &= K N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + T\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
 C_B &= K N(d_2)
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

dengan $d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + T\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

Setelah diperoleh C_A pada persamaan (2.26) dan C_B pada persamaan (2.27) maka rumus harga opsi beli model Black-Scholes adalah :

$$C_0 = e^{-rT} [C_A - C_B]$$

$$C_0 = e^{-rT} [S_0 e^{rT} N(d_1) - K N(d_2)]$$

$$C_0 = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad \blacksquare$$

2.5.2 Opsi Put dengan Model Black-Scholes

Untuk opsi tipe Eropa terdapat hubungan formula yang cukup sederhana antara harga opsi beli dan opsi jual. Hubungan tersebut diperoleh dari memperhatikan kombinasi antara opsi beli, opsi jual dan pinjaman bebas resiko.

Formula put call parity adalah sebagai berikut :

$$C - P + dK = S_0,$$

dimana d adalah discount faktor.

Teorema (Put-Call Parity). *Dapat dibuktikan hubungan antara harga opsi beli dan opsi jual mengikuti formula berikut ini $C - P = S_0 - Ke^{-rT}$.*

Teorema di atas dapat digunakan untuk menghitung harga opsi jual (put) dengan memanfaatkan terlebih dulu harga opsi beli. Harga opsi jual dapat dihitung langsung secara matematika seperti berikut :

$$\begin{aligned} P &= e^{-rT} E[\max(K - S_T, 0)] = e^{-rT} \int_{-\infty}^K (K - S_T) g(S_T) dS_T \\ &= Ke^{-rT} \int_{-\infty}^K g(S_T) dS_T - e^{-rT} \int_{-\infty}^K S_T g(S_T) dS_T \\ &= Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.6 KAJIAN RESEARCH SEBELUMNYA

No	Nama	Tahun	Penelitian
1	Liming Feng dan Xiong	2011	<i>Pricing Bermudan Option in Levy Models.</i> (Penentuan Harga Opsi Bermudan)

	Lin		dalam Model Levy) Penelitian ini membahas metode transformasi Hilbert untuk penentuan harga kontrak opsi tipe Bermudan dalam model proses Levy. Metode ini melibatkan evaluasi sekuensial transformasi Hilbert dan integral Fourie invers yang dapat diperkirakan sangat efisien.
2	Jessica Radeschnig, Hossein Nohrouzian, Amir Kazempour Esmati	2012	<i>Bermudan Option Pricing using Binomial Models</i> (Penentuan Harga Opsi Bermudan Menggunakan Model Binomial) Model binomial memberikan metode numerik yang dapat digeneralisasi untuk menilai harga opsi. Model ini didasarkan pada beberapa asumsi umum sehingga dapat dengan mudah digunakan dalam penentuan harga opsi. Harga opsi Bermudan terletak diantara harga opsi Eropa dan Amerika. Semakin banyak

			pilihan hari untuk menjalankan kontrak opsi maka semakin tinggi harga opsinya.
3	Irma Palupi	2012	Penentuan Harga Opsi Bermuda Melalui Metode <i>Discrete Morse Flow</i> Opsi Bermuda dihitung dengan mengadaptasi persamaan diferensial parsial Black-Scholes kemudian melalui metode numerik DMF (<i>Discrete Morse Flow</i>) akan dicari solusinya. DMF merupakan salah satu metode variasi, yang dilakukan dengan mendiskritisasi waktu untuk kemudian menentukan barisan solusi yang meminimumkan fungsional di setiap time step. Pada masalah ini, barisan solusi tersebut digunakan untuk menghampiri nilai opsi.

2.7 METODOLOGI PENELITIAN

Metode penelitian yang dilaksanakan pada proses penelitian ini adalah studi literatur, analisis masalah dan simulasi

terhadap hasil persamaan akhir yang diperoleh, serta penarikan kesimpulan.

a) Studi Literatur

Pada tahap studi literatur dilakukan identifikasi permasalahan dan mempelajari teori-teori pendukung yang berhubungan dengan opsi amerika, dan metode *fast fourier transform*.

b) Analisis Masalah

Tahap ini dilakukan dengan menganalisis literatur yang ada untuk dapat memformulasikan penentuan harga opsi amerika.

c) Penarikan Kesimpulan

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan pada tahap sebelumnya.



BAB III

FAST FOURIER TRANSFORM (FFT)

PADA OPSI AMERIKA



3.1 TRANSFORMASI FOURIER

Definisi transformasi fourier yang digunakan dalam penelitian ini adalah :

Transformasi Fourier Kontinu (CFT):

$$\mathcal{F}\{F(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} F(x) dx \triangleq \hat{F}(\omega); \quad (3.1)$$

di mana tanda ‘-’ di depan unit imajiner i adalah konvensi

Invers Transformasi Fourier Kontinu:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{F}(\omega)\} = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} F(x) dx; \quad (3.2)$$

Transformasi Fourier Diskrit (DFT):

$$D_k\{F_n\} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} F_n, \quad (3.3)$$

Invers DFT:

$$D_k^{-1}\{F_n\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}nk} F_n, \quad (3.4)$$

Transformasi Fraksional Fourier (FRFT):

$$G_k(\vec{x}, \gamma) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i n k \gamma}. \quad (3.5)$$

Sebelum menerapkan Transformasi Fourier untuk menilai opsi, penting untuk memperhatikan kondisi keberadaan Transformasi Fourier. Jika kondisi ini tidak dipenuhi, maka dibutuhkan pra-multiply beberapa fungsi redaman dengan fungsi asli untuk memastikan keberadaan.

➤ Eksistensi CFT

Kondisi untuk keberadaan Transformasi Fourier kontinu rumit untuk dinyatakan secara umum (Champeney, 1987), tetapi itu cukup untuk $x(t)$ yang dapat diintegrasikan, yaitu,

$$\|x\|_n \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (3.6)$$

Persyaratan ini dapat dinyatakan sebagai $x \in L^1$, yang berarti bahwa x berada pada himpunan semua fungsi yang memiliki

batas L^1 norm ($\|x\|_1 < \infty$). Ini sama artinya dengan $x(t)$ terintegrasi kuadrat, yaitu,

$$\|x\|_2^2 \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty. \quad (3.7)$$

atau, $x \in L^2$. Secara umum, perlu ditunjukkan bahwa $x \in L^p$ untuk $1 \leq p \leq 2$.

➤ Eksistensi DFT

DFT beroperasi pada suatu sampel, atau diskrit, nilai fungsi dalam domain waktu, dan dihasilkan dari spektrum sampel, atau diskrit, dalam domain frekuensi. Spektrum yang dihasilkan itu adalah pendekatan dari Fourier Series. Jika sampling rate cukup tinggi untuk memastikan representasi yang wajar dari bentuk nilai fungsi, DFT menghasilkan spektrum yang sangat dekat dengan spektrum yang benar secara teoritis. Spektrum ini juga diskrit.

3.2 FUNGSI PENTING DAN HUBUNGANNYA

Ada tiga fungsi penting yang ada dalam metode transformasi. Fungsi-fungsi tersebut adalah fungsi densitas peluang dari *risk-neutral*, fungsi distribusi kumulatif, dan fungsi karakteristik dari variabel random.

Hubungan dari tiga unsur ini memainkan peranan penting dalam menurunkan variasi formula perhitungan harga opsi yang berasal dari persamaan valuasi netral risiko.

- Misal opsi pada waktu t dengan harga pelaksanaan/harga kontrak (*strike price*) E dan waktu jatuh tempo T ; S menotasikan harga saham pada waktu t ($t \in [0, T]$); S_T menotasikan harga saham pada waktu T .
- Definisikan harga yang ditransformasi sebagai:

$$s = \log(S_T), k = \log(E). \quad (3.8)$$

- $f(s)$ adalah sebagai fungsi densitas netral risiko dari transformasi harga saham s .
- $\phi(v)$ adalah transformasi Fourier, atau dengan kata lain, fungsi karakteristik dari transformasi harga saham s :

$$\phi(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivs} \cdot f(s) ds. \quad (3.9)$$

- $F(s)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari s . Fungsi distribusi kumulatif adalah integral dari fungsi densitas:

$$F(s) = \int_{-\infty}^s f(t) dt, \quad (3.10)$$

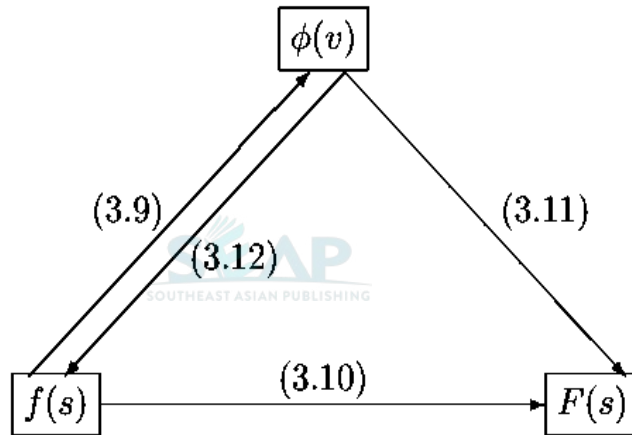
- Hubungan antara fungsi distribusi kumulatif $F(s)$ dan fungsi karakteristik $\phi(v)$ dari Inversi Gil-Palaez (Gil-Palaez, 1951):

$$F(s) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left(\phi(v) \frac{e^{-ivs}}{iv} \right) dv. \quad (3.11)$$

- Hubungan antara fungsi densitas $f(s)$ dan fungsi karakteristik $\phi(v)$ dapat diperoleh dengan mensubstitusikan $F(s)$ dengan $f(s)$ yaitu substitusi persamaan (3.10) ke (3.11), dengan mengambil turunan pertama terhadap v (Carr dan Madan, 1999) diperoleh :

$$\begin{aligned}
 f(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re} (\phi(v)e^{-ivs}) dv \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re} (\phi(v)e^{-ivs}) dv.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Hubungan antara ketiga fungsi penting $F(s)$, $f(s)$ dan $\phi(v)$ diperlihatkan pada gambar di bawah ini :



Gambar 3. 1 Hubungan antara $F(s)$, $f(s)$ dan $\phi(v)$

Berdasarkan ketiga fungsi karakteristik dari variabel stokastik, kemudian didefinisikan z.

- Jika $z = x + y$, maka $\phi_{\approx}(v) = \phi_x(v)\phi_y(v)$
- Jika $z = x/n$, maka $\phi_{\approx}(v) = \phi_x(v/n)$
- Jika $z = (x - \mu)/\sigma$, maka $\phi_{\approx}(v) = e^{-iv\mu/\sigma} \phi_x(v/\sigma)$

3.3 METODE TRANSFORMASI DASAR

Penerapan metode transformasi fourier dalam perhitungan harga opsi *call* Eropa. Harga opsi *call* Eropa adalah diskonto dari nilai opsi pada waktu jatuh tempo.

$$C(t) = e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[\max(S_T - E, 0)],$$
$$C(t) = e^{-r(T-t)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \max(e^s - e^k, 0) \cdot f(s) ds, \quad (3.13)$$

di mana $\mathbb{Q}$ sebagai ukuran netral risiko.

$f(s)$ hanya diketahui sebagai proses harga saham yang jumlahnya terbatas, termasuk gerakan geometrik Brownian, gerakan aritmatik Brownian dan proses Ornstein-Uhlenback (O'Sullivan 2004).

Karena itu, ide dasar dari metode transformasi awal adalah:

- Mulai dari menilai netral risiko dan substitusi $f(s)$ dalam integral dengan penjabar $\phi(v)$;
- Kemudian, lakukan aturan integral numerik untuk menghitung integral
- Cari bentuk DFT dalam formula yang terdiskrit, kemudian selesaikan dengan menerapkan algoritma FFT.

3.3.1 Inversi Gil-Palaez

Ide metode transformasi berbasis inversi Gil-Palaez adalah untuk menggantikan fungsi distribusi kumulatif $F(s)$ dalam solusi

analitik dari Black-Scholes PDE untuk Opsi *Call* Eropa oleh $\phi(v)$ melalui inversi Gil-Palaez.

Mari ulangi solusi analitis opsi panggilan Eropa dengan bentuk secara lebih umum:

$$C(S, t) = \Delta \cdot S - E e^{-r(T-t)} \cdot P(S_T > E), \quad (3.14)$$

di mana $P(S_T > E)$ adalah probabilitas risiko netral *in-the-money*, dan delta Δ adalah $\partial C / \partial S$

Melalui inversi Gil-Palaez pada persamaan (3.11), $P(S_T > E)$ dapat ditentukan sebagai:

$$\begin{aligned} P(S_T > E) &= 1 - F(k) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-ivk} \phi(v)}{iv} \right) dv. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Demikian pula, delta opsi juga dapat diperoleh sebagai:

$$\Delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-ivk} \phi(v-i)}{iv \phi(-i)} \right) dv \quad (3.16)$$

Jadi secara total, nilai opsi *call* Eropa adalah:

$$\begin{aligned} C(t) &= S \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty e^{-ivk} \Pi_1(v) dv \right) \right] \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty e^{-ivk} \Pi_2(v) dv \right) \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

dengan

$$\Pi_1(v) = \frac{1}{iv} \frac{\phi(v-i)}{\phi(-i)}, \quad \Pi_2(v) = \frac{1}{iv} \phi(v). \quad (3.18)$$

Dalam aplikasi praktis, fungsi karakteristik dari logaritma harga saham adalah biasanya tersedia, yang berarti bahwa $\Pi_1(v)$ dan $\Pi_2(v)$ tersedia. Oleh karena itu, masalah perhitungan harga opsi *call* Eropa adalah integral pada persamaan (3.17).

Agar dapat menghitung integral, aturan quadratur dilibatkan untuk diskretisasi integral. Salah satu aturan yang dapat digunakan adalah aturan trapesium. Namun, penerapan aturan ini terbatas karena keberadaan transformasi Fourier tidak dijamin.

3.3.2 Inversi Carr-Madan

Carr dan Madan (1999) memasukkan faktor peredaman eksponensial dalam penerapan Analisis Fourier untuk memastikan keberadaan Transformasi Fourier dari perhitungan harga opsi Eropa.

Definisi yang disebut nilai opsi teredam sebagai

$$c(t) = e^{\alpha k} C(t), \quad \alpha > 0 \quad (3.19)$$

dimana kondisi $\alpha > 0$ memastikan keberadaan transformasi Fourier dari harga modifikasi $c(t)$.

Misal $\hat{c}(v)$ menunjukkan transformasi Fourier dari harga teredam $c(t)$, maka inversi Carr-Madan berdasarkan metode transformasi didefinisikan oleh

$$\hat{c}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk} c(t) dk$$

$$\begin{aligned}
 \hat{c}(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk} e^{\alpha k}(t) dk \\
 \hat{c}(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha+iv)k} \left[e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \max(e^s - e^k, 0) f(s) ds \right] dk \\
 \hat{c}(v) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \int_{-\infty}^{\infty} (e^{s+\alpha k} - e^{(1+\alpha)k}) e^{ivk} dk ds \\
 \hat{c}(v) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left[\frac{e^{(\alpha+1+iv)s}}{\alpha + iv} - \frac{e^{(\alpha+1+iv)s}}{\alpha + 1 + iv} \right] ds \\
 \hat{c}(v) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left[\frac{e^{(\alpha+1+iv)s}}{\alpha + iv} - \frac{e^{(\alpha+1+iv)s}}{\alpha + 1 + iv} \right] ds \\
 \hat{c}(v) &= \frac{e^{-r(T-t)}}{(\alpha + iv)(1 + \alpha + iv)} \phi(v - (\alpha + 1)i), \quad (3.20)
 \end{aligned}$$



yang menunjukkan hubungan linear antara fungsi karakteristik $\phi(v)$ dan transformasi Fourier transformasi nilai opsi teredam $\hat{c}(v)$.

Dengan inversi Carr-Madan, Transformasi Fourier dari harga opsi teredam mudah diperoleh sebagai fungsi karakteristik dari logaritma harga saham. Selanjutnya, dengan invers transformasi Fourier diperoleh harga opsi:

$$C(t) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivk} \hat{c}(v) dv, \quad (3.21)$$

Penyelesaian persamaan (3.21) dapat dilakukan dengan cepat menggunakan algoritma FFT yang ada, asalkan integralnya terdiskrit.

Metode transformasi awal mampu menangani proses stokastik umum untuk asset harga dan bisa juga diterapkan untuk menilai opsi eksotis seperti opsi barrier, opsi digital dll. Namun, metode transformasi sebelumnya tidak dapat diterapkan pada opsi fitur *early exercise*.

3.4 METODE QUAD-FFT

3.4.1 Metode QUAD

Andricopoulos dkk (2003) mempresentasikan model rekursif, yang ia beri nama “metode QUAD”. Ia menunjukkan bahwa opsi dapat dihitung secara akurat menggunakan integraldiskonto dari nilai payoff, dimana payoff disegmentasikan sehingga integral hanya dibawa pada segmen kontinu. Integral pada setiap segmen diperkirakan dengan menerapkan aturan kuadratur numerik.

Dengan segmentasi, dijamin bahwa aturan kuadratur hanya diterapkan pada fungsi kontinu dan memiliki turunan tingkat tinggi yang kontinu dengan demikian akurasi dapat dijaga. Jika ada lebih dari satu langkah waktu yang diperlukan untuk menentukan harga opsi, sebuah kisi harga asset diatur dan harga pada setiap titik dalam kisi pada waktu t dihitung secara rekursif dari harga pada saat $t + 1$ menggunakan quadrature rutin.

Misal opsi Bermudan sebagai contoh: terdapat barisan $\{t_i\}$; $t_i \in [0, t]$; $i = (1, 2, \dots, N)$ menunjukkan barisan dari semua kemungkinan tanggal pelaksanaan kontrak opsi; S_i menunjukkan harga saham pada waktu t_i .

Definisi dari harga transformasi adalah

$$x = \log(S_i/E), \quad y = \log(S_{i+1}/E) \quad (3.22)$$

Diasumsikan bahwa proses harga saham mengikuti gerak geometris Brownian. Kemudian oleh lemma Ito, y berdistribusi normal. Fungsi densitas peluang bersyarat risiko-netral dari y yang diberikan x adalah

$$f(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} e^{-\frac{(y-x-(r-D_0-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t)^2}{2\sigma^2\Delta t}}, \quad (3.23)$$

dimana, r menunjukkan suku bunga netral risiko, D_0 dividen kontinu, σ volatilitas proses harga saham, dan $\Delta t = t_{i+1} - t_i$

Penilaian netral risiko dari opsi memberikan hubungan antara harga opsi di t_i dan t_{i+1} dalam bentuk rekursif berikut:

$$V(x, t) = e^{-r\Delta t} \mathbb{E}_{t_i}^Q[V(y, t_{i+1})], \quad (3.24)$$

$$V(x, t) = e^{-r\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} V(y, t_{i+1}) f(y|x) dy. \quad (3.25)$$

Substitusi (3.23) ke (3.25) memberikan rumus rekursif untuk harga opsi:

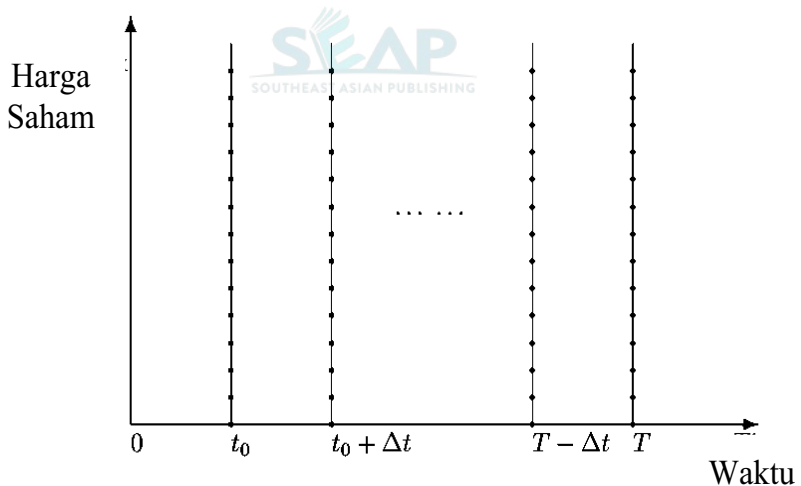
$$V(x, t) = \frac{e^{-r\Delta t}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} V(y, t + \Delta t) e^{-\frac{(y-x-(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t)^2}{2\sigma^2\Delta t}} dy, \quad (3.26)$$

yang dapat dipecahkan menggunakan salah satu aturan integral numerik.

Untuk opsi Eropa, hanya satu langkah mundur dalam yang diperlukan untuk mendapatkan solusi. Untuk observasi yang

banyak seperti opsi Amerika atau opsi Bermuda, formula yang sama yang dapat diaplikasikan untuk periode waktu dari kemungkinan terakhir *early exercise* hingga waktu jatuh tempo opsi. Pada setiap waktu pengamatan t_i opsi diberi harga untuk semua nilai- x . Nilai-nilai x ini kemudian menjadi nilai y yang digunakan dalam integral untuk menemukan nilai- x pada langkah waktu sebelumnya, t_{i+1} , sampai opsi dinilai sepenuhnya.

Mode kisi yang digunakan dalam metode QUAD ditunjukkan pada Gambar. (3.2). Kisi-kisi hanya terletak pada tanggal *exercise*. Dan pada setiap kisi, ruang harga saham juga dikuantisasi menjadi grid.



Gambar 3. 2 Mode Kisi untuk Perhitungan Harga Opsi Bermuda dan Amerika

Metode QUAD dapat diterapkan untuk menilai berbagai macam opsi. Namun demikian, ada asumsi penting dalam metode QUAD. Fungsi kepadatan dari variabel keadaan diasumsikan diketahui, seperti contohnya, untuk gerak Brown geometris. Penerapannya demikian terbatas karena fakta bahwa kepadatan probabilitas hanya diketahui untuk kelas yang membatasi proses yang mendasari.

Selain itu, kompleksitas keseluruhan dari algoritma ini adalah $O(M N^2)$, dengan M jumlah total langkah waktu dan N ukuran grid dalam dimensi harga.

3.4.2 Metode QUAD-FFT

Terinspirasi oleh metode transformasi Fourier yang dijelaskan sebelumnya, O'Sullivan (2004) memperoleh representasi sederhana dari fungsi densitas peluang, $f(x)$, variabel keadaan, x , melalui fungsi karakteristik $\phi(v)$, dengan bantuan turunan pertama dari inversi Gil-Palaez:

$$\begin{aligned} f(y|x) &= \frac{dF(y|x)}{dy} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\phi(v|x) \frac{e^{-ivy}}{iv} \right) dv \right)' \\ f(y|x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} (e^{-ivy} \phi(v|x) dv). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Fungsi redaman tidak digunakan, karena fungsi densitas yang diperoleh dengan cara ini berada di L^1 dengan demikian tidak perlu diredam. Variabel y dan v didiskritkan sebagai

$$v_m = \left(m - \frac{N}{2}\right) \Delta v, \quad y_n = \left(n - \frac{N}{2}\right) \Delta y,$$

dengan $n; m = 0, 1, \dots, N$.

Menarik aturan titik tengah, densitas dapat didekati oleh

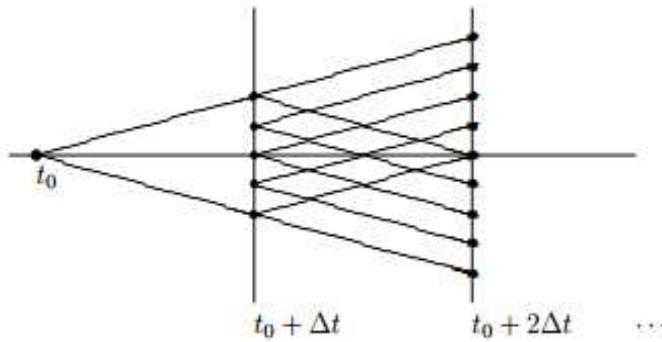
$$f(y_n|x) \approx \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{m=0}^N \left(e^{-iv_m y_n} \phi(v_m|x) \Delta v \right). \quad (3.28)$$

Ambil $\Delta v \Delta y = \frac{2\pi}{N}$, densitas kemudian dapat diselesaikan dengan cepat oleh algoritma FFT:

$$f(y_n|x) \approx \frac{1}{\pi} (-1)^n \operatorname{Re} \sum_{m=0}^N \left(e^{-i2\pi Nmn} \underbrace{(-1)^m \phi(v_m|x)}_{z(m)} \Delta v \right) \quad (3.29)$$

$$f(y_n|x) = \frac{1}{\pi} (-1)^n \operatorname{Re} [\operatorname{DFT}(\vec{z})]. \quad (3.30)$$

Setelah densitas pulih, itu masukkan kembali ke rumus penilaian netral risiko, dan nilai opsi pada titik waktu sebelumnya dapat diperoleh dengan menyelesaikan integral secara numerik.



Gambar 3. 3 Mode Kisi metode QUAD-FFT.

Dalam menentukan harga opsi yang memiliki fitur *early exercise*, kisi-kisi diatur pada setiap tanggal yang dapat dieksekusi, prosedur di atas diulangi secara mundur pada setiap kisi, sampai nilai opsi pada titik waktu awal diperoleh.

Mode kisi dalam metode O'Sullivan ditunjukkan seperti pada Gambar. (3.3). Jumlah titik grid pada setiap kisi meningkat dari 1 pada titik waktu awal ke N pada tanggal pelaksanaan pertama, menjadi $2N - 1$ pada tanggal pelaksanaan kedua, dll. Kisi-kisi diatur berpusat pada harga saham awal pada masing-masing kisi.

Misalnya ada dua langkah waktu yang diperlukan untuk menentukan harga opsi. Biarkan x_0 adalah transformasi awal harga pada waktu t , $\vec{y}_1$ menjadi transformasi vektor harga pada waktu $t + \Delta t$ dan $\vec{y}_2$ menjadi transformasi vektor harga yang

berubah pada waktu $t + 2\Delta t$. Kemudian $\vec{y}_1$ dan $\vec{y}_2$ didefinisikan sebagai berikut

$$\vec{y}_1 = \{x_0 - q^*, x_0 - q^* + \Delta y, \dots, x_0 + q^* - \Delta y, x_0 + q^*\},$$

$$\vec{y}_2 = \{x_0 - 2q^*, x_0 - 2q^* + \Delta y, \dots, x_0 + 2q^* - \Delta y, x_0 + 2q^*\}$$

Keuntungan dari jenis mode kisi ini adalah bahwa, daripada menghitung $f(y_{2j}|y_{1i})$ untuk masing-masing $y_{2j} \in \vec{y}_2$ yang diberikan $y_{1i} \in \vec{y}_1$. Cara ini dapat dengan mudah menggunakan fungsi densitas yang diperkirakan untuk $\vec{y}_1$ diberikan x_0 dan mengubah lokasi fungsi densitas ini sehingga dipusatkan pada setiap $y_{1i} \in \vec{y}_1$ dengan kisaran L standar deviasi kedua sisi y_{1i} . Hal ini hanya dapat dilakukan jika langkah waktu antara kisi berturut-turut adalah sama.

Karena kompleksitas $O(N \log N)$ dari algoritma FFT, di mana N menunjukkan jumlah titik grid dalam dimensi harga, kecepatan komputasi dalam menyelesaikan fungsi densitas juga dari $O(N \log N)$. Namun, kompleksitas perhitungan pada langkah kedua memasukkan kembali densitas yang dipulihkan ke rumus valuasi netral risiko adalah $O(N^2)$. Dengan demikian keseluruhan kompleksitas metode QUAD-FFT adalah $O(N^2)$ untuk opsi Eropa, dan $O(MN^2)$ untuk M-waktu opsi Bermuda.

3.5 ALGORITMA BEROETS

Bervoets (2005) menemukan cara untuk menggunakan FFT baik dalam langkah pemulihan fungsi densitas dan langkah pendekatan integral. Oleh karena itu, keseluruhan kompleksitas O

($M \log N$) untuk opsi Eropa, dan $O(M N \log(N))$ kompleksitas untuk M-waktu opsi yang mempunyai fitur *early exercise*.

Ketika mendiskritkan integral seperti dalam persamaan (3.31),

$$V(x_n, t_i) = e^{-r\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} V(y, t_{i+1}) f(y|x_n) dy \quad (3.31)$$

dengan $n = 1, 2, \dots, N$

oleh aturan kuadratur, misalnya, aturan Trapezium maka persamaan (3.31) menjadi

$$\begin{aligned} & V(x_n, t_i) \\ & \approx e^{-r\Delta t} \Delta y \left(\sum_{i=0}^N V(y_k, t_{i+1}) f(y|x_n) \right. \\ & \quad - \frac{1}{2} (V(y_0, t_{i+1}) f(y_0|x_n) \\ & \quad \left. + V(y_N, t_{i+1}) f(y_N|x_n)) \right), \end{aligned} \quad (3.32)$$

dimungkinkan untuk menulis ulang persamaan dalam bentuk matriks-vektor:

$$\vec{v}_i \approx e^{-r\Delta t} \Delta y \left(\mathbf{F} \vec{v}_{i+1} - \frac{1}{2} (V(y_0, t_{i+1}) \vec{f}_1 + V(y_N, t_{i+1}) \vec{f}_N) \right), \quad (3.33)$$

dengan

$$\vec{v}_i = \begin{pmatrix} V(y_0, t_i) \\ V(y_1, t_i) \\ \vdots \\ V(y_{N-1}, t_i) \\ V(y_N, t_i) \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} f(y_0|y_0) \\ f(y_0|y_1) \\ \vdots \\ f(y_0|y_{N-1}) \\ f(y_0|y_N) \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_N = \begin{pmatrix} f(y_N|y_0) \\ f(y_N|y_1) \\ \vdots \\ f(y_N|y_{N-1}) \\ f(y_N|y_N) \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

dan

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f(y_0|y_0) & f(y_1|y_0) & \dots & \dots & f(y_N|y_0) \\ f(y_0|y_1) & f(y_1|y_1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & f(y_{N-1}|y_{N-1}) & f(y_N|y_{N-1}) \\ f(y_0|y_N) & \dots & \dots & f(y_{N-1}|y_N) & f(y_N|y_N) \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Matriks $\mathbf{F}$ adalah matriks Toeplitz jika proses $y(k)$ adalah proses Levy, atau proses gerak Brownian.

$$\mathbf{F}_{j,k} = \mathbf{F}_{j+1,k+1}. \quad (3.37)$$

Karena matriks Toeplitz dapat dengan mudah direpresentasikan sebagai matriks sirkular, produk matriks Toeplitz dan vektor dapat secara efisien diterapkan algoritma FFT.

Dalam langkah menghitung densitas error muncul karena

- Pemotongan integral tak terhingga dalam persamaan densitas (3.27);

- Diskritisasi dari (pemotongan) integral berhingga menggunakan aturan kuadratur;
- Interpolasi ketika harga saham tidak berada di grid.

Ada tiga langkah utama untuk algoritma Metode Bervoets seperti

LANGKAH 1: Gunakan algoritma FFT untuk menyelesaikan fungsi densitas; kompleksitas untuk langkah ini adalah $O(N \log(N))$.

LANGKAH 2: Gunakan algoritma FFT lagi untuk menyelesaikan matriks-vektor produk; kompleksitas untuk langkah ini adalah $O(N \log(N))$.

LANGKAH 3: Jika ada langkah M kali, ulangi dua langkah sebelumnya untuk memecahkan masalah secara rekursif waktu mundur, sampai titik waktu awal tercapai.

dijelaskan pada Gambar 3.4.

Gambar 3. 4 Langkah-Langkah Dasar Metode Bervoets

3.6 METODE LORD

Dalam metode Lord (2006), fungsi densitas tidak diselesaikan secara eksplisit.

Dan itu didasarkan pada asumsi berikut:

$$f(y|x) = f(y - x), \quad (3.38)$$

untuk variabel keadaan y pada titik waktu T diberikan x pada titik waktu t ; $t < T$.

Sebagai contoh opsi Eropa, rumus penilaian netral risiko adalah

$$V(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{t, S_t}^{\mathbb{Q}}[V(T, y)], \quad (3.39)$$

x dan y adalah variabel keadaan pada saat t dan T ($T > t$).

Berdasarkan definisi nilai ekspektasi diperoleh

$$V(t, x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} V(T, y) \cdot f(y|x) dy, \quad (3.40)$$

Dengan asumsi (3.38), dan dengan aturan perubahan variabel, diperoleh

$$e^{-r(T-t)} V(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} V(T, x+z) \cdot f(z) dz \quad (3.41)$$

di mana z adalah variabel keadaan baru yang sama ($y - x$).

Persamaan (3.41) adalah dalam bentuk "korelasi silang". Jadi dapat digunakan *Fast Fourier Transform* (FFT) untuk mendapatkan resolusi $V(t)$ yang cepat.

Transformasi Fourier diterapkan pada $V(t, x)$, setelah redaman oleh $e^{\beta x}$ (untuk memastikan eksistensi Transformasi Fourier maka nilai β dipilih dengan benar).

$$e^{r(T-t)} \mathcal{F}\{e^{\beta x} V(t, x)\} \quad (3.44)$$

$$= e^{r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} e^{\beta x} V(t, x) dx \quad (3.45)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x} V(T, x+z) f(z) dz \right] dx,$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x + \beta x} V(T, x+z) f(z) dz dx, \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega + i\beta)x} V(T, x+z) dx \right] f(z) dz, \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega + i\beta)(y-z)} V(T, y) dy \right] f(z) dz, \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega + i\beta)y} V(T, y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-\omega + i\beta)z} f(z) dz, \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

$$= \hat{V}_T(\omega - i\beta) \phi(-\omega + i\beta), \quad (3.47)$$

dimana, $\phi(v)$ adalah fungsi karakteristik dari fungsi densitas $f(x)$:

$$\phi(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivx} f(x) dx \quad (3.48)$$

Korelasi silang dua fungsi kompleks $f(t)$ dan $g(t)$ dari t variabel real, dilambangkan $f * g$ adalah

$$f \star g \triangleq \bar{f}(-t) * g(t) \quad (3.42)$$

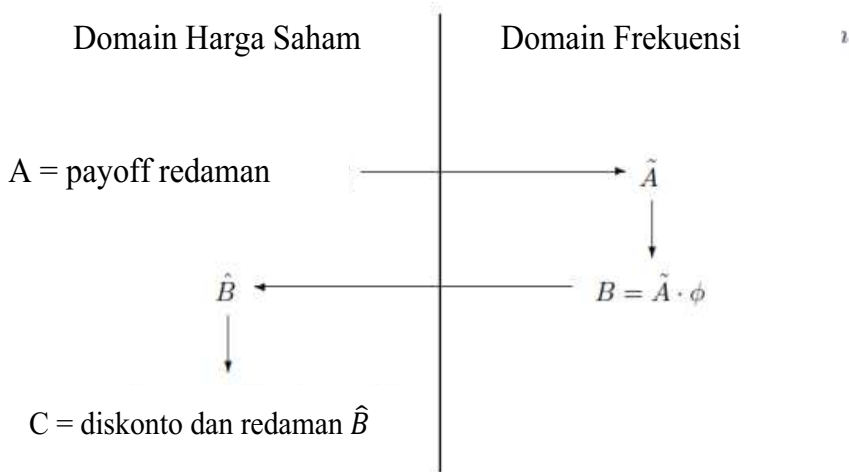
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\tau) g(t + \tau) d\tau, \quad (3.43)$$

di mana ‘*’ menunjukkan operator konvolusi.

Selanjutnya, harga opsi dapat dipulihkan oleh invers Fourier transformasi sebagai:

$$e^{r(T-t)} V(t, x) = e^{-\beta x} \mathcal{F}^{-1} \{ \hat{V}_T(\omega - i\beta) \phi(-\omega + i\beta) \}. \quad (3.49)$$

Algoritma metode Lord seperti digambarkan pada Gambar. (3.5).



Gambar 3. 5 Switching Domain dalam Metode Lord

Untuk mewujudkan prosedur dalam komputer digital, diperlukan pemotongan integral tak berhingga dalam Transformasi Fourier di (3.49), kemudian mendiskritisasi integral berhingga dengan aturan kuadratur. Selanjutnya menggunakan algoritma FFT untuk menyelesaikan bagian penjumlahan dalam formula didiskritisasi.

Algoritma metode Lord diberikan oleh Gambar 3.6.

Langkah 1 : Turunkan fungsi karakteristik $\Phi(z)$
Langkah 2: Terapkan Transformasi Fourier pada nilai opsi yang teredam
Langkah 3: Cari invers Transformasi Fourier pada produk hasil dari langkah 1 dan 2
Langkah 4 : Jika ada M langkah waktu, ulangi langkah 1 hingga 3 secara rekursif dan mundur dalam waktu. (Nilai opsi adalah maksimum nilai kontinu yang kembali pada LANGKAH 3 dan *payoff* saat ini.)

Gambar 3. 6 Algoritma metode Lord

Metode ini merupakan metode yang paling cepat. Kerumitannya adalah $O(M N \log N)$, jika ada M adalah waktu pelaksanaan selama masa hidup opsi.

Sumber kesalahan pada metode Lord adalah :

- Pemotongan integral tak berhingga;
- Diskritisasi dari (pemotongan) integral berhingga menggunakan aturan kuadratur;
- Error interpolasi jika harga saham pada waktu awal tidak berada di grid.

3.7 METODE FRFT

Pada metode-metode sebelumnya terdapat kendala pada ukuran mesh dalam dimensi harga opsi dan dimensi frekuensi, ketika integral didiskritisasi oleh aturan kuadratur, yaitu,

$$\Delta v = \frac{2\pi}{N\Delta x}, \quad (3.50)$$

Karena ketergantungan Δv pada Δy , ukuran mesh dalam domain frekuensi Δv adalah diperbaiki setelah rentang pemotongan di domain log-saham diperbaiki, dan tidak ada yang harus dilakukan dengan jumlah poin grid.

Jadi grid yang lebih bagus dalam domain frekuensi tidak mungkin dengan metode Lord. Salah satu solusi yang mungkin adalah dengan menggunakan algoritma Fractional Fourier Transform (FRFT). Metode ini dikembangkan oleh Fang (2006).



3.7.1 Algoritma FRFT

FRFT adalah generalisasi dari DFT. Definisinya pada barisan kompleks N -panjang adalah :

$$G_k(\vec{x}, \gamma) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i n k \gamma}. \quad (3.51)$$

Parameter γ tidak terbatas untuk bilangan rasional dan beberapa bilangan kompleks. Meskipun transformasi ini didefinisikan untuk semua bilangan bulat k , dihitung N pertama nilai non-negatif, yaitu untuk $0 \leq k \leq N$. Evaluasi langsung nilai-nilai N ini menggunakan (3.51) membutuhkan operasi floating point $8N^2$, asalkan faktor eksponensial telah terjadi *precomputed*.

DFT biasa dan inversnya adalah kasus khusus FRFT, di mana $\gamma = 1/N$ dan $\gamma = -1/N$, masing-masing:

$$D_k(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i n k / N}, \quad (3.52)$$

$$= G_k(\vec{x}, 1/N) \quad 0 \leq k \leq N, \quad (3.53)$$

dan,

$$D_k^{-1}(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i n k / N}, \quad (3.54)$$

$$= \frac{1}{N} G_k(\vec{x}, -1/N) \quad 0 \leq k \leq N, \quad (3.55)$$



Bailey dan Swartztrauber (1995) memperkenalkan versi cepat dari algoritma FRFT. Algoritma tersebut dilakukan dengan mengganti $2nk$ dengan $n^2 + k^2 - (k - n)^2$. Ekspresi untuk FRFT kemudian menjadi

$$\begin{aligned} G_k(\vec{x}, \gamma) &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\pi i [n^2 + k^2 - (k-n)^2] \gamma} \\ &= e^{-\pi i k^2 \gamma} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\pi i n^2 \gamma} e^{\pi i (k-n)^2 \gamma} \\ &= e^{-\pi i k^2 \gamma} \sum_{n=0}^{N-1} y_n z_{k-n} \end{aligned} \quad (3.56)$$

di mana barisan N -panjang $\vec{y}$ dan $\vec{z}$ ditentukan oleh

$$y_n = x_n e^{-\pi i n^2 \gamma}, \quad z_n = e^{\pi i n^2 \gamma} \quad (3.57)$$

Penjumlahan (3.56) adalah bentuk konvolusi diskrit, yang dapat dievaluasi oleh prosedur berbasis DFT. Metode DFT biasa mengevaluasi konvolusi sirkular dengan $z_{k-n} = z_{k-n+N}$. Kondisi ini tidak terpenuhi di sini, tetapi sebaliknya $z_{k-n} = z_{n-k}$ saat $k - n < 0$. Oleh karena itu ada cara untuk mengubah penjumlahan menjadi bentuk konvolusi sirkular.

Pertama pilih bilangan bulat $p > N - 1$, dan perlebar barisan $\vec{y}$ dan $\vec{z}$ hingga panjangnya $2p$ dengan

$$y_n = 0 \quad N \leq n < 2p \quad (3.58)$$

$$z_n = 0 \quad N \leq n < 2p - N \quad (3.59)$$

$$z_n = e^{\pi i (n-2p)^2 \gamma} \quad 2p - N \leq n < 2p \quad (3.60)$$

Nilai N pertama dari $G_k(\vec{x}, \gamma)$ memenuhi

$$G_k(\vec{x}, \gamma) = e^{-\pi i k^2 \gamma} \sum_{n=0}^{2p-1} y_n z_{k-n} \quad 0 \leq k < N, \quad (3.61)$$

dan juga bahwa barisan $\vec{z}$ memenuhi sifat-sifat yang diperlukan untuk konvolusi sirkular untuk $2p$ -titik.

DFT $2p$ -point dapat digunakan untuk mengevaluasi (3.61).

$$G_k(\vec{x}, \gamma) = e^{-\pi i k^2 \gamma} D_k^{-1}(\overrightarrow{w}) \quad 0 \leq k < N, \quad (3.62)$$

$$(\vec{w}) = D_k(\vec{y}) \quad D_k(\vec{z}) \quad 0 \leq k < 2p \quad (3.63)$$

$\vec{x}$, $\vec{y}$ dan $\vec{z}$ dalam (3.62) dan (3.63) adalah barisan $2p$ -panjang, tetapi setelah invers DFT hanya hasil N pertama yang disimpan, sedangkan $2p - N$ hasilnya sisanya dibuang.

Untuk menghitung segmen N -panjang yang berbeda $G_{k+s}(\vec{x}, \gamma)$, $0 \leq k < N$, modifikasi prosedur konvolusi di atas diperlukan. Dalam hal ini, $\vec{z}$ didefinisikan sebagai

$$z_n = e^{\pi i (n+s)^2 \gamma} \quad 0 \leq n < N, \quad (3.64)$$

$$z_n = 0 \quad N \leq n < 2p - N, \quad (3.65)$$

$$z_n = e^{\pi i (n+s-2o)^2 \gamma} \quad 2p - N \leq n < 2p; \quad (3.66)$$

$$\cdot \quad (3.67)$$



LANGKAH 1: Perluas vektor dari sampel fungsi input ke dalam satu ukuran ganda dengan nol;

LANGKAH 2: Bangun dua vector $\vec{y}$ dan $\vec{z}$ dengan menggunakan Persamaan (3.58) ~ (3,60);

LANGKAH 3: Gunakan FFT untuk kedua vektor yang dihasilkan pada langkah 2;

LANGKAH 4: Gunakan IFFT untuk produk dari dua output langkah 3, dan kalikan dengan koefisien *pre-computed*;

Gambar 3. 7 Algoritma FRFT

Persamaan (3.61), (3.62) dan (3.63) menjadi

$$G_{k+s}(\vec{x}, \gamma) = e^{\pi i (n+s)^2 \gamma} \sum_{n=0}^{2p-1} y_n z_{k-n} \quad 0 \leq k < N, \quad (3.68)$$

$$G_{k+s}(\vec{x}, \gamma) = e^{\pi i (n+s)^2 \gamma} D_k^{-1}(\vec{w}) \quad 0 \leq k < N, \quad (3.69)$$

$$(\vec{w}) = D_k(\vec{y}) \quad D_k(\vec{z}) \quad 0 \leq k < 2p; \quad (3.70)$$

Kesimpulan:

- DFT biasa dan inversinya adalah kasus khusus dari FRFT.
- Ini benar-benar menggunakan FFT dalam langkah penting sehingga dapat menyimpan perhitungan yang cepat.
- Faktor eksponensial dalam (3.60) dapat bisa di pra-komputasi. DFT dari barisan z juga bisa di pra-komputasi. Dengan demikian biaya dari FRFT N -titik adalah sekitar empat kali biaya FFT N -titik.

3.7.2 Penerapan dalam Opsi Harga

Bailey dan Swarztrauber (1993) menunjukkan bahwa teknik berbasis FRFT dapat menguntungkan diterapkan pada evaluasi numerik dari setiap transformasi integral karena

1. Nilai fungsi input dan nilai transformasi output ditempatkan dengan sama;

2. Fraksi besar dari fungsi input baik nol atau dalam toleransi mesin;
3. Hanya kisaran output terbatas yang diperlukan.

Dalam penentuan harga opsi, fungsi yang terlibat memenuhi tiga poin di atas, karena

- Fungsi *payoff* biasanya memiliki nilai nol dalam rentang kontinu nilai saham.
- Nilai fungsi karakteristik dari proses harga saham biasanya nol saat harga saham jauh dari harapannya.
- Nilai output (harga opsi) yang menarik adalah dalam kisaran harga saham yang terbatas.



Oleh karena itu, dimungkinkan untuk mendapatkan kinerja yang baik dengan menggunakan metode FRFT dalam menentukan harga opsi.



BAB IV

IMPLEMENTASI METODE *FAST* *FOURIER TRANSFORM* (FFT) DALAM MENENTUKAN HARGA OPSI



4.1 IMPLEMENTASI METODE LORD

Metode Lord (2006) dapat diwakili oleh bentuk ringkas berikut:

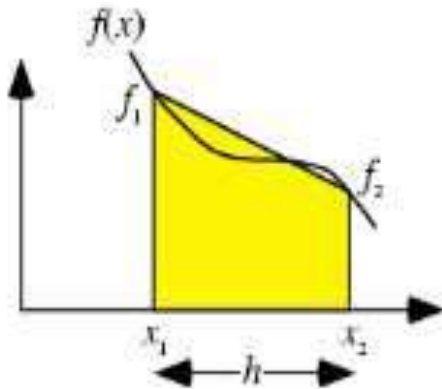
$$C(t, x) = e^{-r(T-t)} \cdot e^{-\beta x} \underbrace{\mathcal{F}^{-1} \left\{ \underbrace{\mathcal{F}\{e^{-\beta y} V(T, y)\}}_{\text{Langkah 1}} \cdot \phi(-\omega + i\beta) \right\}}_{\text{Langkah 2}} \quad (4.1)$$

di mana $t < T$, dan keduanya “langkah 1” dan “langkah 2” adalah transformasi Fourier waktu kontinu. Oleh karena itu tugas utama menerapkan metode Lord ternyata menyelesaikan kedua Transformasi Fourier secara numerik.

O'Sullivan (2004) mengusulkan cara yang tepat untuk menentukan rentang pemotongan integral tak berhingga. Total *range* pemotongan dalam domain harga log-saham dipilih menjadi $2L$ kali volatilitas (standar deviasi logaritma) dari harga saham dengan $L = 10$. Penjelasannya adalah, dalam jarak 10 kali standar deviasi dari asal, nilai fungsi densitas peluang akan lebih kecil dari mesin presisi. Standar deviasi adalah akar kuadrat dari varians, $\sqrt{var}$. Dan varians dapat dihitung untuk proses stokastik dimana fungsi karakteristik $\phi(v)$ diketahui dengan

$$var = \left(-\frac{\partial^2 \phi(v)}{\partial v^2} \right)_{v=0} \quad (4.2)$$

Jadi perlu diskritisasi integral dengan aturan kuadratur. Salah satu aturan kuadratur yang dapat digunakan adalah aturan trapesium (Gambar 4.1).



$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{1}{2} h(f_1 + f_2) - \frac{1}{12} h^3 f''(\xi),$$

Dimana $f_i = f(x_i)$, h adalah lebar mesh, dan ξ adalah angka kepuasan $x_1 \leq x_2$

Gambar 4. 1 Aturan Trapesium

Langkah 1 dan langkah 2 di (4.1) bersama-sama mengembalikan hasil konvolusi linier pada $V(T; y)$ dan fungsi densitas. Pada langkah selanjutnya menggunakan DFT untuk mengestimasi transformasi Fourier waktu kontinu, digunakan konvolusi sirkular untuk memperkirakan satu linear.



4.1.1 Konvolusi Linear

Konvolusi linear dari dua barisan A dan B,

$$A * B = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{A\} \cdot \mathcal{F}\{B\}\} \quad (4.3)$$

$A * B$ melalui konvolusi sirkular dengan menggunakan DFT,

$$A \odot B = DFT^{-1}(DFT(A) \cdot DFT(B)) \quad (4.4)$$

kesalahan artifisial akan terjadi. Contohnya sebagai berikut

$$A = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$$

dan

$$B = (5 \ 6 \ 7 \ 8),$$

perhitungan langsung memberikan output konvolusi linier sebagai berikut

$$A * B = (5 \ 16 \ 34 \ 60 \ 61 \ 52 \ 32)$$

Namun, konvolusi sirkular melalui DFT memberi hasil

$$DFT^{-1}(DFT(A) \cdot DFT(B)) = (66 \ 68 \ 66 \ 60)$$

Perbedaan antara dua output adalah karena hanya ada 4 digit yang tersedia dalam barisan output dari konvolusi sirkular sementara barisan 7-point diberikan oleh konvolusi linier, sehingga hasil konvolusi sirkular 'tumpang tindih' dengan konvolusi linier. Dalam contoh ini, poin no 5 tumpang tindih dengan poin no. 1, No. 6 tumpang tindih No. 2, dan No. 7 tumpang tindih No. 3:

$$(66 \ 68 \ 66 \ 60) = (5 \ 16 \ 34 \ 60) + (61 \ 52 \ 32 \ 0)$$

Untuk memperbaiki masalah ini adalah menambah pad nol ke salah satu atau kedua barisan input konvolusi sirkular sehingga memberikan ruang bagi output yang lebih panjang dari konvolusi linier. Sebagai contoh, bisa memasukkan tiga nol ke A dan B untuk membuat ruang bagi 7 digit hasil

$$A' = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$B' = (5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 0 \ 0 \ 0)$$

Kemudian gunakan DFT untuk menghitung konvolusi sirkular A' dan B' untuk mendapatkan

$$\begin{aligned} A' \otimes B' &= DFT^{-1}(DFT(A') \cdot DFT(B')) \\ &= (5 \ 16 \ 34 \ 60 \ 61 \ 52 \ 32) = A * B \end{aligned}$$

Nilai yang benar dari konvolusi linier dipulihkan dengan cara di atas.

Berdasarkan contoh di atas, panjang vektor output dari konvolusi linear pada dua vektor N -length adalah $2N - 1$, oleh karena itu $N - 1$ nol diperlukan ke dua vektor input.

Untuk menetapkan harga opsi menggunakan metode Lord, ini tidak bermasalah. *Padding* lebih sedikit atau bahkan tidak ada angka nol pada vektor input. Fungsi *payoff* dan fungsi densitas peluang :

- Fungsi pembayaran adalah separuh nol dan separuh bukan nol untuk opsi Eropa, sehingga *payoff* yang didiskritkan dapat diperlakukan sebagai memiliki nol untuk separuh bukan nol.

Fungsi *payoff* untuk opsi *call* Eropa adalah

$$C = (S - E)^+, \quad (4.5)$$

Fungsi *payoff* untuk opsi *put* Eropa adalah

$$P = (E - S)^+. \quad (4.6)$$

Baik *call* atau *put*, variabel keadaan $y = \log (S / E)$ akan menghasilkan nol. Jadi, tidak perlu ada angka nol tambahan yang perlu diisi.

- Fungsi densitas peluang mengandung fraksi nol yang besar di kedua sisi pusatnya. Oleh karena itu, ketika range pemotongan cukup besar, barisan yang didiskritkan dapat dilihat sebagai nol-padding untuk kedua ujung barisan non-nol.
- Untuk opsi yang memiliki fitur *early exercise*, tidak ada angka nol tambahan yang harus diisi sepanjang range pemotongan integral diambil.

Opsi yang memiliki fitur *early exercise* (opsi Bermuda dan opsi Amerika) dapat diperlakukan sebagai Opsi Eropa di antara dua tanggal pelaksanaan yang berdekatan. Oleh karena itu, harga opsi pada tanggal pelaksanaan lebih awal dapat diperoleh dari harga opsi pada tanggal terakhir, yang juga mengandung sebagian besar nol pada *out of the money*, ke dalam rumus metode Lord (4.1). Jadi jika akurasi tidak terpenuhi untuk menjadi sangat tinggi, seperti 10^{-7} , maka padding beberapa atau bahkan tidak ada tambahan nol akan mengembalikan hasil yang akurat tanpa memori tambahan alokasi atau waktu komputer.

4.1.2 Grid dan Kisi-Kisi

Distribusi probabilitas logaritma harga saham (*log-stock*) biasanya lebih mudah didapat distribusi densitas dari harga saham itu sendiri. Domain *log-stock* didefinisikan sebagai

$$y = \log(S/E) \quad (4.7)$$

dimana S menunjukkan harga saham dan E harga *exercise*.

Saat menyiapkan grid di domain *log-stock*, diperlukan non kontinu dan poin yang tidak halus. Saat menerapkan aturan trapesium untuk memperkirakan integral, ekstra (non-linearitas) error akan masuk jika poin non kontinu dan tidak halus tidak berada di grid. Ketidakhalsan dalam fungsi *payoff* dari opsi vanilla terjadi saat $S = E$. Oleh karena itu diatur kisi y yang berpusat pada nol untuk memastikan bahwa titik-titik itu selalu berada di grid:

$$y_p = (p - N/2)\Delta y, \quad p = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (4.8)$$

di mana Δy adalah lebar mesh, dan

$$\Delta y = (2L \cdot vol)/N, \quad L \geq 10. \quad (4.9)$$

Dalam domain frekuensi, grid dipusatkan di sekitar nol. Misal variabel frekuensi adalah v ,

$$v_n = (n - N/2)\Delta v, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (4.10)$$

di mana Δv harus memenuhi

$$\Delta v \Delta y = 2\pi/N, \quad (4.11)$$

Ada dua alasan untuk membangun grid dengan cara di atas.

1. Fungsi karakteristik Gerak Brownian Geometris memiliki bentuk seperti lonceng (yang memiliki ekor di kedua sisi) dengan pusat pada titik asal. Oleh karena itu, dengan memusatkan grid di sekitar nol semua nilai-nilai non-nol ditempatkan di tengah-tengah barisan dan nol di kedua ujungnya. Jika rentang pemotongan cukup besar, barisan data yang didiskritkan akan mengandung cukup nol untuk memiliki efek yang sama sebagai nol-padding dalam perhitungan konvolusi kemudian.
2. Metode ini yang mudah untuk diterapkan. Dengan (4.8) dan (4.10), diperoleh struktur yang simetris dalam log-stock dan grid frekuensi. Jadi, tidak perlu disebutkan arah transformasi Fourier, seperti 'log-stock ke frekuensi' atau 'frekuensi ke log persediaan'. Setelah pengkodean transformasi Fourier maka satu langkah telah selesai dan dapat digunakan untuk menghitung yang lain.

Untuk opsi Bermuda dan Amerika, kisi-kisi diperlukan, dan digunakan kisi yang sama seperti dalam metode QUAD (Gambar 3.2). Pada setiap tanggal melaksanakan, kisi-kisi untuk log-stock sudah diatur, dan jumlah titik grid pada semua kisi tetap sama.

4.1.3 Algoritma

Bagian utama dari penerapan metode Lord adalah membangun sub-program yang mengambil sampel fungsi input dan mengembalikan diskritisasi barisan data Transformasi Fourier waktu-kontinu dari fungsi input. Program utama yang dibangun terdiri dari sub-program disebut dua kali, sekali untuk mengembalikan transformasi Fourier dari *payoff* teredam dan sekali untuk invers transformasi Fourier produk dari fungsi karakteristik dan *payoff* yang ditransformasikan.

Transformasi Fourier waktu kontinu

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-ivy} f(v)}_{\triangleq F(v)} d(v), \quad (4.12)$$

kemudian memotong integral tak berhingga sehingga menjadi,

$$\hat{f}(y) \approx \int_{U_1}^{U_2} F(v) dv, \quad (4.13)$$

dengan menerapkan aturan trapesium diperoleh,

$$\hat{f}(y_p) = \sum_{n=0}^{N-1} F(v_n) \Delta v - \left[\underbrace{\frac{1}{2} \Delta v [F(v_0) + F(v_N - 1)]}_{\triangleq \text{Tail}} \right] + O(\Delta v)^2. \quad (4.14)$$

Mengatur ulang diperoleh

$$\hat{f}(y_p) \approx \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{(-i \cdot (n - \frac{N}{2}) \Delta v \cdot (p - \frac{N}{2}) \Delta y)} f(v_n) \right] \Delta v - \text{Tail} \quad (4.15)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{-i \cdot np \cdot \Delta v \cdot \Delta y} \cdot e^{-i \Delta v \Delta y \left[-(n+p) \frac{N}{2} \right]} e^{-i \Delta v \Delta y \frac{N^2}{4}} f(v_n) \right] \Delta v - \text{Tail} \quad (4.16)$$

Dengan memasukkan

$$\Delta v \Delta y = \frac{2\pi}{N}, \quad (4.17)$$

diperoleh

$$\hat{f}(y_p) = (-1)^p \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{-i \cdot np \cdot \frac{2\pi}{2}} f(v_n) \right] \Delta v - \text{Tail}, \quad (4.18)$$

di mana bagian penjumlahan dapat dihitung dengan cepat oleh algoritma FFT, seperti yang disediakan oleh Matlab.

Algoritma subprogram diringkas dalam Gambar 4.2.

Langkah 1: For $n = 0 : N - 1$

$$f[n] = (-1)^{(n + N/2)} * f[n];$$

End

Langkah 2: result = FFT(f) * dv;

Langkah 3: For $p = 0 : N - 1$

$$\text{result}[p] = (-1)^p * \text{result}[p] - \text{Tail};$$

End

Gambar 4. 2 Algoritma sub-program yang menghitung (4.12)

Integral



$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivy} f(v) dv, \quad (4.19)$$

memiliki tanda ‘+’ pada eksponen yang dapat dihitung dengan invers rutin DFT, secara analog. Terdapat hubungan berikut:

$$e^{ivy} = \overline{e^{-ivy}}. \quad (4.20)$$

Turunan sederhana

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{-ivy}} f(v) dv = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ivy} f(v) dv} = \overline{\hat{f}(y)} \quad (4.21)$$

untuk fungsi bernilai real $f(v)$.

Ketergantungan Δv pada Δy , ukuran mesh dalam domain frekuensi Δv adalah tetap karena rentang pemotongan pada domain log-stock adalah tetap, dan itu tidak ada hubungannya dengan jumlah poin grid:

$$\Delta v \cdot N = \frac{2\pi}{\Delta y}. \quad (4.22)$$

Jadi grid yang lebih baik dalam domain frekuensi tidak mungkin menggunakan metode Lord. Satu cara untuk mengatasi masalah ini adalah menggunakan FRFT.

Satu lagi keuntungan dari metode FRFT adalah bahwa zero-padding secara otomatis termasuk dalam algoritma FRFT. Akurasi yang diperoleh akan lebih tinggi dari metode sebelumnya.



4.2 IMPLEMENTASI METODE LORD-FRFT

Metode Lord-FRFT (Fang, 2006) adalah kependekan dari “metode pengganti FFT dengan FRFT dalam metode Lord”. Satu hal yang perlu dimodifikasi adalah subprogram yang mengkomputasi transformasi Fourier waktu kontinu.

Dalam membangun subprogram, kita perlu memodifikasi grid dalam domain frekuensi, yang mana ukuran mesh tidak tergantung lagi pada ukuran mesh dalam domain log-stock. Setting grid dalam domain log-stock tetap berlaku.

4.2.1 Grid and Kisi-Kisi

Grid dalam domain frekuensi yang berpusat pada nol:

$$v_n = (n - N/2)\Delta v, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1,$$

dengan ukuran mesh Δv yang diberikan oleh

$$\Delta v = \frac{v_{N-1} - v_0}{N}. \quad (4.23)$$

Grid pada domain log-stock dan domain frekuensi dapat diperoleh dengan meningkatkan jumlah titik grid.

Prosedur ‘penggantian domain’ dalam metode Lord yaitu domain frekuensi fungsi *payoff* yang ditransformasi dikalikan dengan fungsi karakteristik, lalu produk ditransformasi kembali ke domain log-stock. Rentang pemotongan pada domain frekuensi bergantung pada kombinasi bagian tak nol dari fungsi karakteristik dan bagian tak nol dari *payoff* yang ditransformasi.

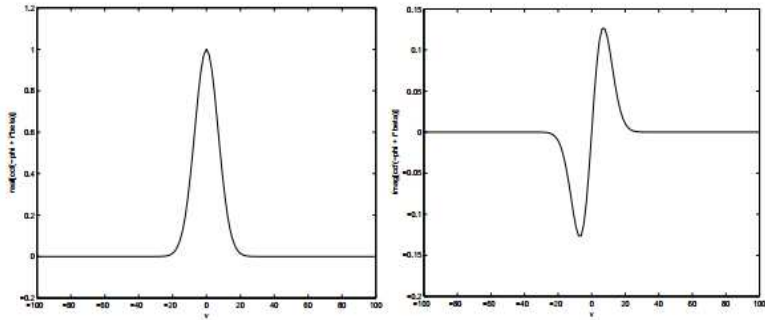


F

Contoh 1:

- $E = 100$ (USD)
- $\Delta t = 1.0$ (Tahun)
- $\sigma = 0.2$
- $r = 0.03$
- $D_0 = 0.07$
- $\beta = 0$
- $L = 10$
- Harga saham mengalami proses Brownian Motion dengan $vol = \sigma\sqrt{\Delta t}$
- Nomor grid poin $N = 1024$

Fungsi karakteristik dari contoh opsi memiliki bagian tak nol yang sangat sempit, dan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.3, di luar jangkauan $[-40, 40]$ nilai fungsi karakteristik adalah nol.



Gambar 4. 3 Nyata dan Imajiner dari ϕ pada Contoh 1

Rentang pemotongan di domain frekuensi $v \in [-40, 40]$ saat menggunakan algoritma FRFT:

Sebagai perbandingan, dengan $\Delta v = 2\pi/(N\Delta y)$ dalam metode Lord, range total yang terlibat dalam domain frekuensi adalah $v \in [-803.4816, 801.9123]$, saat menggunakan algoritma FRFT:

Ukuran mesh dalam contoh yang diberikan adalah $\Delta y = 2L.vol/N = 0.0039$, dan

- $\Delta v = 1.5693$ oleh metode Lord, tetapi
- $\Delta v = 0.07813$ dengan metode Lord-FRFT

Untuk Δt yang sangat kecil, seperti 0.1 tahun, bagian tidak nol dari fungsi karakteristik akan berkembang, dalam hal ini rentang pemotongan di domain frekuensi harus diatur ke minimum lebar

bagian tak nol dalam fungsi karakteristik dan lebar diperoleh dengan metode Lord.

4.2.2 Algoritma

Algoritma berbasis FRFT pada dasarnya diturunkan dengan cara yang sama seperti berbasis FFT. Mulai dari definisi transformasi Fourier waktu-kontinu di (4.12), pemotongan range integral dan menerapkan aturan trapesium pada (4.16). Didefinisikan

$$\gamma = \frac{\Delta v \Delta y}{2\pi} \quad (4.24)$$

Mengganti $(\Delta v \Delta y)$ oleh $(2\pi\gamma)$ di (4.16), diperoleh

$$\hat{f}(y_p) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{-i.n.p.2\pi\gamma} \cdot \underbrace{e^{-i2\pi\gamma \left[-(n+p)\frac{N}{2} + \frac{N^2}{4} \right]}}_{\triangleq \text{Coeff}} f(v_n) \right] \Delta v - \text{Tail} \quad (4.25)$$

$$\hat{f}(y_p) = G_k(\text{Coeff. } f, \gamma) \cdot \Delta v - \text{Tail}, \quad (4.26)$$

dimana

$$G_k(\vec{x}, \gamma) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i n k \gamma}$$

adalah Transformasi Fourier fraksional yang didefinisikan pada (3.51). Bersama dengan algoritma FRFT pada Gambar 3.7, algoritma dapat dibangun seperti pada Gambar 4.4:

LANGKAH 1: $f = \text{Coefi} * f$;
LANGKAH 2: $\gamma = dv * dy / 2\pi$;
LANGKAH 3: $\text{result} = \text{FRFT}(f, \gamma) * dv$;
LANGKAH 4: $\text{result} = \text{result} - \text{Tail}$;

Gambar 4. 4 Algoritma dari Sub-program FRFT

Algoritma metode Lord-FRFT dapat dibentuk seperti Gambar 4.5.

Langkah 1: $A = \text{payoff teredam}$
Langkah 2: $\tilde{A} = \text{konjugat subprogram } (A)$
Langkah 3 : $B = \tilde{A} \cdot \phi$
Langkah 4 : $\tilde{B} = \text{subprogram } (B)$
Langkah 5 : $\text{result} = \text{tak teredam dan diskonto pada } \tilde{B}$

Gambar 4. 5 Algoritma dari Metode FRFT-Lord

4.3 EKSTRAPOLASI RICHARDSON

Keakuratan hasil numerik dari metode Lord dan metode Lord-FRFT dapat lebih ditingkatkan dengan memasukkan teknik ekstrapolasi Richardson 2-titik dalam menilai opsi Eropa, atau dengan teknik ekstrapolasi Richardson berulang dalam menilai opsi Amerika dan bermuda.

4.3.1 Formula Ekstrapolasi Richardson

Ekstrapolasi Richardson adalah teknik yang efisien untuk memberikan hasil yang sangat akurat dengan menggunakan formula low-order, di mana orde error pemotongan diketahui

Untuk mengilustrasikan prosedur, diasumsikan terdapat pendekatan $N(h)$ ke beberapa kuantitas Q .

$$Q = N(h) + K_1 h + K_2 h^2 + K_3 h^3 \dots \quad (4.27)$$

di mana K_i adalah konstanta. $N(h)$ perkiraan ke Q ; untuk $O(h)$. asumsikan $h > 0$ dipilih secara arbitrase sedemikian rupa sehingga untuk $h \rightarrow 0$.

Jika ukuran langkah dibagi dua menjadi $h = 2$, maka

$$Q = N\left(\frac{h}{2}\right) + K_1 \frac{h}{2} + K_2 \frac{h^2}{4} + K_3 \frac{h^3}{8} \dots \quad (4.28)$$

Persamaan (4.28) dikalikan dengan 2 dan kurangi (4.27) sehingga diperoleh

$$Q = \left[N\left(\frac{h}{2}\right) + \left(N\left(\frac{h}{2}\right) - N(h) \right) + K_2 \left(\frac{h^2}{2} - h^2 \right) + K_3 \left(\frac{h^3}{4} - h^3 \right) + \dots \right]$$

Dengan cara ini bentuk $O(h)$ dieliminasi.

Misal

$$N_1(h) \triangleq N(h) \quad (4.29)$$

dan

$$N_2(h) \triangleq N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left[N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right]. \quad (4.30)$$

Untuk orde $O(h^2)$ diperoleh

$$Q = N_2(h) - \frac{K_2}{2} h^2 - \frac{3K_3}{4} h^3 \dots \quad (4.31)$$

Mengganti h dengan $h/2$, maka

$$Q = N_2\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{K_2}{8} h^2 - \frac{3K_3}{32} h^3 \dots \quad (4.32)$$

Mengurangkan (4.31) dari 4 kali (4.32) maka $O(h^2)$ akan dieliminasi

$$3Q = 4N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h) + \frac{3K_3}{4}\left(\frac{-h^3}{2} + h^3\right) + \dots \quad (4.33)$$

Aproksimasi $O(h^3)$:

$$N_3(h) \triangleq N_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_2(h/2) - N_2(h)}{3} \quad (4.34)$$

Proses ini dapat dilanjutkan dengan membangun aproksimasi $O(h^4)$:

$$N_4(h) = N_3\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_3(h/2) - N_3(h)}{7} \quad (4.35)$$

Maka aproksimasi $O(h^5)$ adalah

$$N_5(h) = N_4\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_4(h/2) - N_4(h)}{15} \dots \quad (4.36)$$

Dan seterusnya. Secara umum ekstrapolasi ulang Richardson

$$N_j(h) = N_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{j-1}(h/2) - N_{j-1}(h)}{2^{j-1} - 1} \quad (4.37)$$

4.3.2 Harga Opsi Eropa

Perhitungan harga opsi Eropa menggunakan metode Lord dan metode Lord-FRFT akan memunculkan error ketika proses diskretisasi:

1. Error pemotongan ketika memotong integral tak hingga. Itu bisa dikendalikan dengan mengambil rentang integrasi yang cukup besar.
2. Error kuantisasi karena aturan trapesium, yaitu orde $O(h^2)$ dan biasanya lebih besar dari error pada item 1.



Dengan demikian total error didominasi oleh aturan trapesium. Oleh karena itu error $O(h^2)$ dapat dihilangkan dengan menerapkan formula ekstrapolasi Richardson 2-point pada (4.37) dengan $j = 2$. Kemudian dibangun algoritma untuk metode 'Ekstrapolasi-Lord' dan metode 'Ekstrapolasi-Lord-FRFT', dengan mengeksekusi metode Lord atau metode Lord-FRFT dua kali, sekali dengan ukuran mesh h dan sekali dengan $h/2$, kemudian menerapkan persamaan (4.37) dengan $j = 2$ untuk mendapatkan hasil yang lebih akurat.

4.3.3 Harga Opsi Amerika

Nilai opsi amerika dapat dihitung dari opsi Bermuda dengan mengambil beberapa tanggal pelaksanaan atau dengan

membuat kisi-kisi dan menerapkan ekstrapolasi Richardson pada opsi Bermuda dengan peningkatan jumlah tanggal pelaksanaan.

Diantara dua tanggal *early exercise* yang berdekatan, opsi Bermuda dapat diperlakukan sebagai opsi Eropa, dimana 'titik awal waktu' dan 'waktu jatuh tempo' adalah dua tanggal yang dibahas. Gagasan tentang harga opsi Amerika dengan mode kisi:

1. Buat kisi-kisi dari harga yang mendasarinya dengan mengukur dimensi waktu;
2. Rumus harga opsi Eropa diterapkan di antara dua kisi yang berdekatan. Nilai yang diperoleh dengan rumus tersebut disebut nilai kontinu dan dibandingkan dengan *payoff* sekarang untuk menghilangkan peluang arbitrase. Nilai akhir opsi pada kisi adalah nilai maksimum dari nilai kontinu dan *payoff* opsi saat ini.
3. Prosedur penilaian dimulai antara kisi pada waktu jatuh tempo dengan kisi sebelum jatuh tempo, dan terus mundur dalam waktu, sampai diperoleh nilai opsi pada waktu awal.

Idea ini adalah kontribusi penting dari Geske dan Johnson (1984). Dalam riset orisinal mereka, Geske-Johnson menunjukkan bahwa Opsi Put Amerika dapat dihitung dengan tingkat akurasi tinggi menggunakan aproksimasi Richardson. Jika $P(n)$ sebagai harga opsi Bermuda dengan n sebagai tanggal exercise, kemudian, sebagai contoh, menggunakan $P(1)$, $P(2)$ and $P(3)$, harga American put dapat dihitung

$$V = P(3) + \frac{7}{2}(P(3) - P(2)) - \frac{1}{2}(P(2) - P(1)). \quad (4.38)$$

Omberg (1987) memberikan formulasi Geske-Johnson dengan modifikasi sebagai

$$V = P(4) + \frac{5}{3}(P(4) - P(2)) - \frac{1}{3}(P(2) - P(1)), \quad (4.39)$$

yang bertujuan untuk menangani situasi ketika $P(3) < P(2) > P(1)$ dan rumus Geske-Johnson asli (4.38) tidak berlaku.

Selain itu, beberapa peneliti lebih lanjut memodifikasi dua ekstrapolasi di atas untuk konvergensi halus dalam model binomial, seperti Omberg (1987), Breen (1991) dan Broadie dan Detemple (1996).

Selain itu, Chang, Chung, dan Stapleton (2001) mengusulkan untuk menggunakan pendekatan Richardson berulang untuk meningkatkan akurasi pendekatan ke harga opsi yang tidak diketahui. Algoritma mereka berangkat dari asumsi bahwa nilai opsi Amerika memiliki bentuk

$$V(t) = a_0 + a_1 t^\eta + a_2 t^{\eta^2} + \dots + a_k t^{\eta^k} + \dots, \quad (4.40)$$

dengan diketahui tetapi tidak diketahui $a_0, a_1, \dots, a_k \dots$. Mereka menggunakan ekstrapolasi Richardson berulang dan berakhir dengan algoritma berikut:

Untuk $j = 1, 2, 3, \dots$, seting $A_{j,0} = V(t_j)$, dan hitung untuk $m = 1, 2, 3, \dots, k - 1$:

$$A_{j,m} = A_{j+1,m-1} + \frac{A_{j+1,m-1} - A_{j,m-1}}{(t_i/t_{i+m})^\eta - 1} \quad (4.41)$$

Mengambil $\eta = 1$, $m = 3$ dan $k = 4$, dan $t_1 = T$, $t_2 = T/2$, $t_3 = T/4$, dan $t_4 = T/8$, di mana T menunjukkan batas waktu jatuh tempo opsi. Algoritma ini ditunjukkan pada Gambar 4.6

Fast Fourier Transform (FFT) Pada Opsi Amerika

$A_{1,0} = P(1)$	$A_{1,1} = 2A_{2,0} - A_{1,0}$	$A_{1,2} = \frac{4A_{2,1} - A_{1,1}}{3}$	$A_{1,3} = \frac{8A_{2,2} - A_{1,2}}{7}$
$A_{2,0} = P(2)$	$A_{2,1} = 2A_{3,0} - A_{2,0}$	$A_{2,2} = \frac{4A_{3,1} - A_{2,1}}{3}$	
$A_{3,0} = P(4)$	$A_{3,1} = 2A_{4,0} - A_{3,0}$		
$A_{4,0} = P(8)$			

Gambar 4. 6 Aproksimasi nilai opsi Amerika dengan 4 Opsi Bermuda.





BAB V

PENUTUP

5.1 KESIMPULAN



Kesimpulan pada penelitian ini adalah :

1. Perhitungan harga opsi amerika dengan menggunakan metode *fast fourier transform* (FFT) dapat dilakukan dengan menggunakan metode Lord dan metode Lord FRFT
2. Pada penerapan metode Lord dan Metode Lord FRFT akan muncul error ketika proses diskritisasi. Error muncul karena adanya pemotongan integral tak hingga dan penerapan aturan trapesium untuk menentukan integral berhingga. Untuk mendapatkan hasil yang lebih akurat dan meminimalisir error pada aturan trapesium maka diterapkan formula ekstrapolasi Richardson.

5.2 SARAN

Penelitian ini baru membahas formula penentuan harga opsi amerika menggunakan metode *fast fourier transform* (FFT). Pada penelitian ini belum membahas penerapan formula harga opsi menggunakan metode FFT pada beberapa contoh kasus opsi amerika. Penelitian selanjutnya dapat membandingkan hasil harga opsi amerika yang diperoleh menggunakan metode FFT dengan harga opsi amerika di pasar. Hal ini untuk mengetahui secara empirik apakah harga opsi yang diperoleh menggunakan metode FFT mendekati harga opsi amerika di pasar.



DAFTAR PUSTAKA

- Andricopoulos A.D. dkk. 2003. Universal Option Valuation Using Quadrature Methods. *Journal of Financial Economics*, 67 447-471.
- Bailey D.H, dan Swarztrauber P.N .1995. The Fractional Fourier Transform and Applications. *SIAM Review*, vol. 33 no.3(Sept. 1991), pg. 389-404.
- Bailey D.H, dan Swarztrauber P.N. 1993, A Fast Method for the Numerical Evaluation of Continuous Fourier and Laplace Transforms, *SIAM J. on Scientific Computing*, vol.15, no.5, pp. 1105-1110.
- Bervoets, F.2005, *Jump Diffusion Process, The pricing of European and American Options*, Internship thesis of Rabobank.
- Black, F. dan Scholes, M., 1973, The Pricing of Options Corporate Liabilities, *The Journal of Political Economy* 81, 637 – 654.

- Breen R. 1991, The Accelerated Binomial Option Pricing Model, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 26, No. 2, pp. 153-164.
- Broadie M. dan Detemple J. 1996. American option valuation: New bounds, approximations, and a comparison of existing methods, *The Review of Financial Studies* 9, 1211-1250
- Carr P., dan Madan DB. 1999. Option Valuation Using the Fast Fourier Transform. *Journal of Computational Finance*, 2, 4, 61-73.
- Champeney, D.C. A. 1987. *Handbook of Fourier Theorems*. http://ccrma.stanford.edu/~jos/mdft/Fourier_Theorems.htm
1, Cambridge University Press.
- Chang C., Chung S., dan Stapleton R.C. 2001), Richardson Extrapolation Techniques for Pricing American-style Options, *EFMA 2002 London Meetings*.
- Fang. 2006. *Pricing Bermudan and American Options Using the FFT Method*. Master Thesis Uni Erlangen-Nuernberg, Germany.
- Feng, Liming dan Lin, Xiong. 2011. Pricing Bermudan Options in Levy Models. *Proceedings of NSF Engineering Research and Innovation Conference Atlanta, Georgia*.
- Gil-Palaez J. 1951. Note on the Inversion Theorem. *Biometrika*, 38, pp. 481-482.
- Hull, J., C. 2006. *Options, Futures, and other Derivatives (5thed.)*. New Jersey: Prentice-Hall.

- Jessica Radeschnig, Hossein Nohrouzian, Amir Kazempour Esmati. 2012. Bermudan Option Pricing using Binomial Models. *Seminar in Analytical Finance I*.
- Lord R. 2006. *Fast Pricing of Bermudans within 1D Models*. Paper of Erasmus University Rotterdam and Rabobank International.
- Palupi, Irma. 2012. *Penentuan Harga Opsi Bermuda Melalui Metode Discrete Morse Flow*. Thesis. Bandung : ITB
- Omberg E. 1987. A Note on the Convergence of the Binomial Pricing and Compound Option Models, *Journal of Finance*, 42, June, 463-469.
- O'Sullivan C. 2004. Path Dependent Option Pricing Under Levy Process, Applied to Bermudan Options. *EFA 2005 Moscow Meetings Paper*.
- Sudirham, Sudaryatno. 2013. *Deret dan Transformasi Fourier*. [online].
https://sudaryn.files.wordpress.com/2013/11/iii_3-deret-dan-transformasi-fourier.pdf. Diakses tanggal 12 Juli 2018.
- Tandelin, Eduardus. 2010. *Portofolio dan Investasi*. Yogyakarta: Kansius.

BIODATA PENELITIAN

- Nama : Emy Siswanah, M.Sc
- Tempat/Tanggal Lahir : Margasakti/2 Februari 1987
- Pendidikan : S1 – Pendidikan Matematika (Universitas Bengkulu), Tahun Lulus : 2008
S2 – Matematika (Universitas Gadjah Mada), Tahun Lulus : 2010
- Pekerjaan : Dosen Tetap Jurusan Tadris Matematika Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan IAIN Walisongo Semarang
- Mata Kuliah yang Diampu : Trigonometri, Matematika Ekonomi, Statistik Matematika, Kalkulus 1
- Penelitian Sebelumnya : 1. Analisis Kesalahan Mahasiswa Tadris Matematika IAIN Walisongo Semarang dalam

- Menyelesaikan Soal
Pembuktian Identitas
Trigonometri (2012)
2. Penggunaan *Media Flash Flip Book* dalam Pembelajaran Trigonometri untuk Meningkatkan Hasil Belajar Mahasiswa Tadris Matematika (2013)
 3. Pengaruh Pembelajaran Berbasis Masalah Terstruktur terhadap Kemampuan Matematis dan Kemandirian Belajar Mahasiswa Tadris Matematika IAIN Walisongo Semarang (2014)
 4. Pengaruh Motivasi Kerja, Kepuasan Kerja, Persepsi Supervisi, dan Persepsi Imbalan terhadap Kinerja Dosen UIN Walisongo Semarang Dalam Melaksanakan Proses Belajar Mengajar (2015)
 5. Penentuan Harga Opsi Saham Tipe Amerika Menggunakan Metode Binomial (2017)

FAST FOURIER TRANSFORM (FFT) Pada Opsi Amerika



Opsi amerika merupakan opsi yang dapat dijalankan mulai dari tanggal kontrak sampai waktu jatuh tempo. Opsi Amerika termasuk dalam opsi yang mempunyai fitur *early exercise*, artinya adalah opsi ini dapat dijalankan sebelum waktu jatuh tempo. Opsi yang memiliki fitur *early exercise* tidak memiliki solusi analitis dalam menentukan harga opsi sehingga harus diselesaikan secara numeris.

Salah satu metode numeris yang dapat digunakan dalam menentukan harga opsi amerika adalah metode *fast fourier transform* (FFT). Metode FFT sangat tepat diterapkan dalam penentuan harga opsi yang mempunyai fitur *early exercise* dan membutuhkan langkah/partisi yang tidak sedikit, tetapi dengan perhitungan yang cepat. Terdapat dua metode dalam menentukan harga opsi amerika menggunakan FFT, yaitu metode Lord dan metode Lord-FRFT. Pada penerapan metode Lord dan metode Lord-FRFT akan muncul error ketika proses diskritisasi. Error muncul karena adanya pemotongan integral tak hingga dan penerapan aturan trapesium untuk menentukan integral berhingga. Error pada aturan trapesium dapat diminimalisir dengan menerapkan formula ekstrapolasi Richardson.



SeAP (Southeast Asian Publishing)
contact@seapublication.com
www.seapublication.com

ISBN 978-623-95437-8-5



MATEMATIKA