ORTOGONALITAS MATRIKS NORMAL-(0,-1) DALAM ALJABAR MAX-PLUS

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika

Oleh : **AYU NUR HAYATI**
NIM : 1908046029

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG

2023

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	Ayu Nur Hayati
NIM	:	1908046029
Jurusan/Program Studi	:	Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

ORTOGONALITAS MATRIKS NORMAL-(0,-1) DALAM ALJABAR MAX-PLUS

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 15 Mei 2023
Pembuat pernyataan,

Ayu Nur Hayati
NIM : 1908046029

KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul	:	**ORTOGONALITAS MATRIKS NORMAL-(0,-1) DALAM ALJABAR MAX-PLUS**
Penulis	:	Ayu Nur Hayati
NIM	:	1908046029
Jurusan	:	Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 25 Mei 2023

DEWAN PENGUJI

Penguji I,	Penguji II,
Ayus Riana Isnawati, M.Sc	**Any Muanalifah, M.Si., P.hD**
NIP : 19851019 201903 2 014	NIP : 19820113 201101 2 009
Penguji III,	Penguji IV,
Dinni Rahma Oktaviani, M.Si	**Prihadi Kurniawan, M.Sc**
NIP : 19941009 201903 2 017	NIP : 19901226 201903 1 012
Pembimbing I,	Pembimbing II,
Any Muanalifah, M.Si., P.hD	**Dinni Rahma Oktaviani, M.Si**
NIP : 19820113 201101 2 009	NIP : 19941009 201903 2 017

NOTA DINAS

Semarang, 10 Mei 2023

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	ORTOGONALITAS MATRIKS NORMAL-{0,-1} DALAM ALJABAR MAX-PLUS
Nama	:	Ayu Nur Hayati
NIM	:	1908046029
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,

Any Muanalifah, M.Si, P.hD
NIP : 19820113 201101 2 009

NOTA DINAS

Semarang, 10 Mei 2023

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	ORTOGONALITAS MATRIKS NORMAL-{0,-1} DALAM ALJABAR MAX-PLUS
Nama	:	Ayu Nur Hayati
NIM	:	1908046029
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing II,

Dinni Rahma Oktaviani, M.Si
NIP : 19941009 201903 2 017

ABSTRAK

Ortogonalitas matriks dalam aljabar max-plus sangat sulit ditemukan karena invers matriks dalam aljabar max-plus itu sendiri hanya ada pada matriks diagonal dan permutasi. Dalam hal ini, Bakhadly dkk (2020) menunjukkan dalam penelitiannya bahwa ortogonalitas matriks juga dapat ditemukan pada matriks normal dalam aljabar max-plus. Aljabar max-plus di sini merupakan himpunan $\mathbb{K} = \{0, -1\}$ dengan dua operasi biner $(\oplus)$ dan $(\otimes)$ yang setiap $a, b \in \mathbb{K}$ berlaku $a \oplus b = \max(a, b)$ dan $a \otimes b = a + b$. Secara khusus didefinisikan juga $(-1) \otimes (-1) = (-1)+(-1) = -1$. Dengan kata lain $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten dengan 0 elemen identitas terhadap operasi $\otimes$ dan -1 elemen identitas terhadap operasi $\oplus$.

Penelitian ini memperkenalkan syarat cukup untuk dua matriks normal dikatakan saling ortogonal dalam aljabar max-plus. Metode yang digunakan adalah studi kepustakaan. Kemudian teori-teori yang ada ditelaah lebih detail untuk mendapatkan kriteria sebagai berikut. Misalnya matriks $A, B \in M_n^N$ dan $p, q \in [n]$ dengan $A \in V(p; q)$ dan $B \in V(q; p)$ sehingga memenuhi persamaan $A \otimes B = Z_n = B \otimes A$ maka matriks A dan B dikatakan saling ortogonal dalam aljabar max-plus.

Kata kunci : Aljabar Max-Plus, Matriks Normal, Ortogonalitas Matriks

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT. Atas segala limpahan rahmat serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul " **ORTOGONALITAS MATRIKS NORMAL-(0,-1) DALAM ALJABAR MAX-PLUS**". Penulisan skripsi ini diharapkan mampu memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaiakan studi Strata 1 (S1) di UIN Walisongo semarang.

Penyusunan dan penyelesaian skripsi ini, tidak lepas dari doa, bantuan, bimbingan, motivasi dan peran dari banyak pihak. Penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Prof. Dr. H. Imam Taufiq, M.Ag., selaku Rektor UIN Walisongo Semarang,
2. Dr. H. Ismail, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang,
3. Emy Siswanah, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang,
4. Any Muanalifah, M.Si., Ph.D., selaku dosen pembimbing I dan Dinni Rahma Oktaviani, M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah memeberikan banyak bimbingan dan arahan dalam penyelesain skripsi ini,
5. Seluruh Dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang, yang telah memberikan banyak ilmu selama penulis berkuliah di Jurusan Pendidikan Matematika,

6. Teman-teman seperjuangan Matematika angkatan 2019,
7. Teman-teman seperjuangan mahasiswa angkatan 2019,
8. Abah, Mama, Mbak dan Adik-adik penulis yang tidak pernah bosan dalam mencurahkan perhatian, semangat, do'a, dan dukungan untuk menyelesaiakan skripsi ini, dan
9. Semua Pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah memberikan kontribusi hingga selesainya skripsi ini.

Semoga kebaikan semuanya menjadi amal ibadah yang diterima dan mendapat pahala yang berlimpah dari Allah SWT. Atas segala kekurangan dan kelemahan dalam skripsi ini penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun. Semoga karya tulis yang sederhana ini dapat menjadi bacaan yang bermanfaat dan dapat dikembangkan bagi peneliti-peneliti selanjutnya.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Matematika adalah ilmu yang menjadi landasan atau dasar dari segala ilmu pengetahuan. Hal ini menarik perhatian para matematikawan dan menjadikan matematika sebagai bidang penelitian yang berperan penting dalam sejarah peradaban. Dengan mengetahui sejarah matematika, kita dapat mengetahui dan memahami hakikat matematika dalam kehidupan sehari-hari. Selain itu, kita dapat menemukan penyebab munculnya hipotesis dan kegunaan konsep dalam matematika. Sebagaimana yang tertuang dalam QS. Al-An'am ayat 96 sebagai berikut:

فَالِقُ ٱلْإِصْبَاحِ وَجَعَلَ ٱلَّيْلَ سَكَنًا وَٱلشَّمْسَ وَٱلْقَمَرَ حُسْبَانًا ذَٰلِكَ تَقْدِيرُ ٱلْعَزِيزِ ٱلْعَلِيمِ

Artinya : " *Dia menyisingkan pagi dan menjadikan malam untuk beristirahat, dan (menjadikan) matahari dan bulan untuk perhitungan. Itulah ketetapan Allah Yang Maha Perkasa, Maha Mengetahui.*"

Penjelasan firman Allah yang tertuang pada ayat diatas mengenai benda-benda langit yang dapat digunakan sebagai alat perhitungan, yaitu matahari dan bulan. Perhitungan yang ada saat ini tidak dilakukan oleh manusia itu sendiri tetapi telah disediakan. Tugas manusia hanya menemukan dan melambangkannya dalam bahasa matematika. Salah satu konsep matematika yang sedang berkembang saat ini adalah aljabar max-plus.

Aljabar max-plus merupakan bagian dari pengetahuan dasar matematika khususnya pada bidang aljabar. Aljabar max-plus memiliki peran besar dalam memecahkan masalah di kehidupan sehari-hari. Ada banyak hal yang bisa dipelajari dalam aljabar max-plus terutama yang berkaitan dengan model matematika dalam sistem dinamis. Beberapa penelitian yang berkaitan dengan masalah sehari-hari yang dapat dimodelkan dengan aljabar max-plus antara lain: sistem jaringan kereta api (Afif, 2015), sistem produksi sederhana (Rafflesia, 2011), penjadwalan dalam jaringan kerja (Oktafianto, 2013) dan jaringan antrian (Permatasari, 2021).

Operasi yang digunakan dalam aljabar max-plus memiliki kesamaan dengan operasi dasar dalam aljabar biasa. Hanya saja dalam aljabar max-plus operasi penjumlahan menjadi operasi maksimum dan operasi perkalian menjadi operasi penjumlahan untuk bilangan real $\mathbb{R}$ dengan elemen tambahan $\varepsilon = -\infty$. Berdasarkan sifat operasi dalam aljabar max-plus, diperoleh ε sebagai elemen identitas terhadap operasi penjumlahan dan $e = 0$ sebagai elemen identitas terhadap operasi perkalian.

Dalam aljabar linier sendiri sebuah matriks A dengan ukuran $n \times n$ dikatakan ortogonal jika memenuhi sifat bahwa invers matriks A sama dengan transpose matriks A. Berbeda dengan aljabar linier, invers matriks dalam aljabar max-plus sangat sulit ditemukan dan hanya dapat ditemukan pada matriks diagonal dan permutasi. Hal ini dikarenakan untuk menentukan invers matriks dalam aljabar max-plus memerlukan operasi penjumlahan dan perkalian dalam aljabar max-plus. Operasi penjumlahan dalam aljabar max-plus bersifat idempoten dimana $\forall a \in \mathbb{R}_\varepsilon$ berlaku $a \oplus a = \max(a, a) = a$. Hal ini mengakibatkan $\forall a \in \mathbb{R}_\varepsilon$ tidak ada invers pada operasi penjumlahan dalam aljabar max-plus.

Pada konsep dasar hasil kali dalam di $M(\mathbb{R})$ didefinisikan untuk $U, V \in M(\mathbb{R})$ berlaku $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + ... + u_nv_n$. Dalam hal ini didefinisikan juga dua vektor u dan v dikatakan ortogonal jika $\langle u, v\rangle = 0$. Konsep ini tidak berlaku dalam aljabar max-plus karena hasil kali dalam tidak terdefinisi. Oleh karena itu, konsep ortogonalitas matriks dalam aljabar max-plus didefinisikan dengan operasi perkalian dalam aljabar max-plus.

Alasan tersebut menjadi latar belakang dari penelitian Bakhadly dkk (2020) tentang *Orthogonality for (0, -1) tropical normal matrices* yang membahas mengenai ortogonalitas matriks dan pasangan matriks yang saling ortogonal dalam aljabar max-plus dengan menggunakan matriks normal. Berkaitan dengan masalah ortogonalitas matriks dalam aljabar max-plus, Bakhadly dkk (2020) mendefinisikan sendiri aljabar max-plus dalam penelitiannya dengan harapan dapat memudahkan penentuan ortogonalitas matriks dalam aljabar max-plus.

Aljabar max-plus yang didefinisikan oleh Bakhadly dkk (2020) sebagai himpunan tak kosong $\mathbb{K}$ dengan elemennya 0 dan -1 yang didefinisikan dengan $(-1) \otimes a = -1 = a \otimes (-1)$ dan $0 \otimes a = a = a \otimes 0$, untuk setiap a elemen dari $\mathbb{K}$. Secara khusus didefinisikan juga $(-1) \otimes (-1) = (-1) + (-1) = -1$. Menurut definisi yang ada sehingga diperoleh 0 sebagai elemen identitas dari operasi perkalian dan -1 sebagai elemen identitas dari operasi penjumlahan dalam aljabar max-plus.

Sehubungan dengan pembahasan di atas maka peneliti tertarik untuk membahas lebih lanjut tentang "Ortogonalitas Matriks Normal-(0,-1) dalam Aljabar Max-Plus", yang secara khusus mengacu pada jurnal *"Orthogonality for (0, -1) tropical normal matrices"* oleh Bakhadly dkk (2020). Penelitian ini membahas tentang syarat cukup matriks atau pasangan matriks dikatakan saling ortogonal dalam aljabar max-plus dimana matriks yang digunakan adalah matriks normal, contoh dan teorema yang berkaitan.

1.2. Rumusan Masalah

Sesuai dengan latar belakang yang telah dijelaskan, masalah yang dapat diidentifikasi dalam penelitian ini adalah apakah matriks normal-(0,-1) saling ortogonal dalam aljabar max-plus?

1.3. Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah pada 1.2., maka dapat diketahui tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui matriks normal-(0,-1) yang saling ortogonal dalam aljabar max-plus.

1.4. Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah bahwa matriks yang digunakan adalah matriks normal dalam aljabar max-plus berukuran 2×2 dengan menggunakan dua elemen yaitu 0 dan -1.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Penulis

   Meningkatkan pemahaman dan pengetahuan terkait matriks normal-(0,-1) yang saling ortogonal dalam aljabar max-plus.

2. Lembaga

   Menambahkan bahan pustaka untuk referensi penelitian dan bahan kuliah, terutama yang berkaitan dengan materi aljabar max-plus khususnya matriks normal-(0,-1) yang saling ortogonal dalam aljabar max-plus.

3. Pembaca

   Sebagai bahan pengajaran dan pengetahuan mengenai aljabar max-plus, khususnya untuk memperluas kajian tentang matriks normal-(0,-1) yang saling ortogonal dalam aljabar max-plus dan mungkin bisa menjadi referensi untuk penelitian selanjutnya.

1.6. Metodologi Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian studi literatur atau kajian pustaka, dimana penelitian dilakukan untuk memperoleh data dan informasi serta objek yang digunakan untuk membahas suatu masalah. Studi literatur adalah penyajian argumentasi ilmiah untuk menjelaskan hasil pemikiran tentang masalah dan tinjauan pustaka yang dibahas dalam penelitian ini.

Berikut adalah langkah-langkah yang digunakan peneliti saat merangkai penelitian ini:

1. Mencari jurnal utama yang digunakan sebagai rujukan dalam penelitian ini. Jurnal utama dari penelitian ini

berjudul *Orthogonality for (0,-1) tropical normal matrices* oleh Bakhadly dkk (2020).

2. Mengumpulkan berbagai literatur tentang topik yang dibahas dari buku, artikel, jurnal nasional, dan jurnal internasional.

3. Memahami dan mempelajari konsep dasar aljabar max-plus, matriks dalam aljabar max-plus, operasi matriks dalam aljabar max-plus dan ortogonalitas matriks dalam aljabar linier.

4. Pembahasan diawali dengan mendefinisikan suatu himpunan $\mathbb{K} = \{0, -1\}$ yang dilengkapi dengan dua operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$ atau dapat ditulis $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ memenuhi sifat semiring idempoten. Kemudian mendefinisikan matriks normal dalam aljabar max-plus, notasi dan memberikan contoh matriks normal dalam aljabar max-plus.

5. Himpunan $\mathbb{K}$ yang ada kemudian direpresentasikan dalam suatu matriks normal atau pasangan matriks normal berukuran $n \times n$ atau dapat dilambangkan M_n^N dan menentukan syarat cukup untuk pasangan matriks yang saling ortogonal dalam aljabar max-plus.

6. Kemudian dari matriks normal atau pasangan matriks normal yang diperoleh terbukti memenuhi syarat cukup untuk pasangan matriks saling ortogonal dalam aljabar max-plus.

7. Dengan demikian pasangan matriks normal dapat dikatakan saling ortogonal dalam aljabar max-plus.

1.7. Sistematika Penelitian

Dalam penulisan laporan penelitian ini, perlu dilakukan langkah-langkah yang sistematis untuk memudahkan pemahaman terhadap pemaparan setiap bab. Pada penulisan penelitian ini terbagi menjadi empat bab.

1. **BAB I PENDAHULUAN**

   Pada bab ini membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metodologi penelitian dan sistematika penelitian.

2. **BAB II LANDASAN TEORI**

   Pada bab ini menjelaskan tentang teori-teori yang mendasari penelitian ini atau disebut dengan landasan teori. Dalam hal ini mencakup teori-teori berikut, antara lain: aljabar max-plus, matriks dalam aljabar max-plus, operasi matriks dalam aljabar max-plus, dan ortogonalitas matriks dalam aljabar klasik.

3. **BAB III PEMBAHASAN**

   Pada bab ini menjelaskan mengenai himpunan $\mathbb{K} = \{0, -1\}$ yang diikuti dengan operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$ dalam aljabar max-plus, matriks normal dalam aljabar max-plus dan syarat cukup matriks atau pasangan matriks dikatakan saling ortogonal dalam aljabar max-plus.

4. **BAB IV PENUTUP**

   Pada bab ini memberikan kesimpulan dari materi yang telah dibahas pada bab sebelumnya dan berisi saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

Pada bab 2 ini akan dijelaskan mengenai konsep-konsep dasar yang dibutuhkan untuk memberikan landasan teori untuk membahas mengenai ortogonalitas matriks normal-(0,-1) dalam aljabar max-plus. Beberapa teori yang dibahas adalah aljabar max-plus, matriks dalam aljabar max-plus, operasi matriks dalam aljabar max-plus, dan ortogonalitas matriks dalam aljabar linier. Bab ini ditulis dalam bentuk teori dan dilengkapi dengan contoh-contoh dari teori yang dibahas.

2.1. Aljabar Max-Plus

Pada bagian ini kami membahas konsep-konsep dasar dalam aljabar max-plus meliputi: pengertian aljabar max-plus, operasi dasar dalam aljabar max-plus, sifat-sifat yang berlaku dalam aljabar max-plus, dan contoh operasi aritmetika dalam aljabar max-plus.

Definisi 2.1.1 *(Aljabar Max-Plus, (Subiono, 2013))*
Misal $\mathbb{R}_\varepsilon$ merupakan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan elemen tambahan $\varepsilon := -\infty$. Jadi $\mathbb{R}_\varepsilon$ yang diikuti oleh dua operasi biner $(\oplus)$ dan $(\otimes)$ didefinisikan sebagai berikut

$$a \oplus b = \max(a, b),$$

dan

$$a \otimes b = a + b,$$

untuk semua $a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$. *Dalam hal ini struktur aljabar* $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ *disebut aljabar max-plus.*

Perhatikan sifat-sifat berikut yang berlaku untuk operasi dalam aljabar max-plus:

i $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus)$ memiliki sifat :

 a Komutatif, yaitu $\forall a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon : a \oplus b = b \oplus a$

 b Asosiatif, yaitu $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_\varepsilon : (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

 c Terdapat elemen identitas ε, yaitu $\forall a \in \mathbb{R}_\varepsilon : \varepsilon \oplus a = a \oplus \varepsilon = a$

 d Idempoten, yaitu $\forall a \in \mathbb{R}_\varepsilon : a \oplus a = a$

ii $(\mathbb{R}_\varepsilon, \otimes)$ memiliki sifat :

 a Komutatif, yaitu $\forall a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon : a \otimes b = b \otimes a$

 b Asosiatif, yaitu $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_\varepsilon : (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (a \otimes c)$

 c Terdapat elemen identitas $e = 0$, yaitu $\forall a \in \mathbb{R}_\varepsilon : e \otimes a = a \otimes e = a$

 d Invers, yaitu $\forall a \in \mathbb{R}_\varepsilon : a \neq \varepsilon$ terdapat $b \in \mathbb{R}_\varepsilon$ sehingga $a \otimes b = e$

 e Elemen netral bersifat menyerap, yaitu $\forall a \in \mathbb{R}_\varepsilon : a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$

iii $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ memiliki sifat :

 a Distributif kanan, yaitu $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_\varepsilon : (a \otimes b) \oplus c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$

 b Distributif kiri, yaitu $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_\varepsilon : a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

Selanjutnya dalam skripsi ini notasi $\mathbb{R}_{\max}$ akan digunakan untuk aljabar max-plus dengan operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$.

Contoh 2.1.2 Berikut diberikan beberapa contoh operasi sederhana dalam aljabar max-plus.

1. $4 \oplus 7 = \max(4, 7) = 7$
2. $\varepsilon \oplus 3 = \max(-\infty, 3) = 3$
3. $3 \otimes 2 = 3 + 2 = 5$

Pada urutan pengoperasian dalam aljabar max-plus jika tanpa dilengkapi dengan tanda kurung maka operasi $\otimes$ lebih diutamakan daripada $\oplus$ (Rudhito, 2016).

Contoh 2.1.3

1. $3 \oplus -1 \otimes 2 = \max(3, (-1 + 2)) = 3$
2. $3 \otimes (5 \oplus 0) = \max((3 + 5), (3 + 0)) = 8$
3. $(2 \otimes 1) \oplus (-1 \otimes 3) = \max((2 + 1), (-1 + 3)) = 3$

Definisi 2.1.4 *(Pangkat dalam Aljabar Max-Plus, (Rudhito 2016))* *Diberikan $a \in \mathbb{R}_\varepsilon$ pangkat k yang dilambangkan dengan $a^{\otimes k}$ didefinisikan sebagai berikut:*

$$a^{\otimes k} = 0, \text{ untuk } k = 0,$$

dan

$$a^{\otimes k} = \underbrace{a \otimes a \otimes \cdots \otimes a}_{k} = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{k} = ka, \text{ untuk } k = 1, 2, 3, ...$$

dengan operasi perkalian pada bilangan real.

Contoh 2.1.5

Perhatikan contoh pengoperasian pangkat dalam aljabar max-plus.

1. $2^{\otimes 2} = 2 \times 2 = 4$

2. $5^{\otimes 0} = 0 \times 5 = 0$

3. $e^{\otimes 2} = 2 \times e = 2 \times 0 = 0$

Pada urutan pengoperasian dalam aljabar max-plus, pangkat lebih diutamakan dari pada operasi $\oplus$ dan $\otimes$ (Rudhito, 2016).

Contoh 2.1.6

1. $3^{\otimes 2} \oplus 5 = (2 \times 3) \oplus 5 = \max(6, 5) = 6$

2. $-3 \oplus 2^{\otimes 2} = -3 \oplus (2 \times 2) = \max(-3, 4) = 4$

3. $5^{\otimes 0} \otimes 2 = (0 \times 5) \oplus 2 = \max(0, 2) = 2$

2.2. Matriks dalam Aljabar Max-Plus

Dalam aljabar max-plus, matriks berukuran $n \times m$ dengan $n, m \in \mathbb{N}$ dapat dilambangkan sebagai $\mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$. Dalam hal ini, n menunjukkan ukuran baris dan m menunjukkan ukuran kolom. Berikut adalah definisi dan contoh beberapa matriks dalam aljabar max-plus yang diperlukan dalam penelitian ini.

Definisi 2.2.1 *(Matriks Persegi)*

Matriks persegi adalah matriks yang memiliki ukuran baris dan kolom yang sama atau $n \times n$ dengan $n \in \mathbb{N}$.

Contoh 2.2.2

Perhatikan Matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dimana $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\max}$, matriks A disebut matriks persegi dengan ukuran 3×3.

Definisi 2.2.3 *(Matriks Diagonal)*

Matriks $D = [d_{ij}]$ adalah matriks dengan ukuran $n \times n$ dimana $i, j \in [n]$ dan $[n] = \{1, 2, 3, ..., n\}$ didefinisikan sebagai berikut :

$$D = \begin{cases} k, & i = j \\ \varepsilon, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Dengan $k \in \mathbb{R}$ dan matriks D disebut sebagai matriks diagonal.

Contoh 2.2.4

Perhatikan matriks $D \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ sebagai berikut!

$$D = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks D dapat dikatakan sebagai matriks diagonal.

Definisi 2.2.5 *(Matriks Nol)*

Matriks nol adalah matriks yang setiap entrinya memiliki nilai $-\infty$ dan dapat dilambangkan dengan ε.

Contoh 2.2.6

Seperti contoh matriks dibawah ini :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix}$$

Maka matriks ε disebut matriks nol berukuran 3×3.

Definisi 2.2.7 *(Matriks Permutasi)*

Matriks P adalah matriks dengan ukuran $n \times n$ yang memuat tepat satu elemen nol untuk setiap baris ke-i dan kolom ke-j dan ε di tempat lain.

Contoh 2.2.8

Perhatikan matriks $P \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ sebagai berikut!

$$P = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Matriks P dapat dikatakan sebagai matriks permutasi.

Definisi 2.2.9 *(Matriks Identitas)*

Misal matriks $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan $i, j \in [n]$ didefinisikan sebagai berikut:

$$A = \begin{cases} 0, & i = j \\ \varepsilon, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Matriks A disebut matriks identitas dalam aljabar max-plus yang dilambangkan dengan I_n.

Matriks identitas adalah identitas terhadap operasi $\otimes$ hal ini dikarenakan untuk setiap $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ berlaku $A \otimes I_n = A$ dan untuk setiap $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times m}$ berlaku $I_n \otimes A = A$.

Contoh 2.2.10

Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ dan I_n merupakan matriks identitas berukuran 2×2.

Perhatikan bahwa,

$$A \otimes I_n = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$(A \otimes I_n)_{11} = \max(3+0, 0+(-\infty)) = \max(3, (-\infty)) = 3$

$(A \otimes I_n)_{12} = \max(3+(-\infty), 0+0) = \max((-\infty), 0) = 0$

$(A \otimes I_n)_{21} = \max((-1)+0, 1+(-\infty)) = \max((-1), (-\infty)) = -1$

$(A \otimes I_n)_{22} = \max((-1)+(-\infty), 1+0) = \max((-\infty), 1) = 1$

Dalam hal ini terbukti I_n sebagai matriks identitas pada matriks A terhadap operasi $\otimes$.

Definisi 2.2.11 *(Matriks Normal, (, J.Linde, M.J.de la Puente, 2015))*
Misal matriks $A = [a_{ij}]$ adalah matriks persegi dengan ukuran $n \times n$ dan $i, j \in \mathbb{N}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$A = \begin{cases} 0, & i = j \\ a_{ij}, & \textit{lainnya} \end{cases}$$

Dimana a_{ij} adalah sebarang bilangan real tak positif dengan elemen tambahan ε. Matriks A disebut matriks normal dan dapat dilambangkan dengan M_n^N.

Contoh 2.2.12

Perhatikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n\times n}$ sebagai berikut!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\infty & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian matriks A disebut matriks normal.

2.3. Operasi Matriks dalam Aljabar Max-Plus

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai pengoperasian matriks yang terdapat dalam aljabar max-plus. Seperti yang telah diketahui dalam aljabar max-plus terdapat dua operasi biner, yaitu $\oplus$ dan $\otimes$ yang didefinisikan sebagai maksimum dan penjumlahan.

Definisi 2.3.1 *(Penjumlahan pada matriks, (Nurwan, 2015))*
Misal dua matriks, yaitu matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times m}$ dan matriks $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times m}$. Operasi penjumlahan dalam aljabar max-plus dapat ditentukan dengan aturan berikut:

$$(A \oplus B)_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij})$$

dengan $i = 1, 2, 3, .., n$ dan $j = 1, 2, 3, .., m$.

Contoh 2.3.2

Berikut diberikan dua buah matriks $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{2\times 2}$ dengan entri di $\mathbb{R}_{\varepsilon}$ akan ditunjukkan $A \oplus B$ dan $B \oplus A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & \varepsilon \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ e & -1 \end{bmatrix}$$

Diperhatikan bahwa,

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ e & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ e & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A \oplus B)_{11} = \max(1, -3) = 1$$
$$(A \oplus B)_{12} = \max(3, 2) = 3$$
$$(A \oplus B)_{21} = \max(-2, e) = e$$
$$(A \oplus B)_{22} = \max(\varepsilon, -1) = -1$$

dan

$$B \oplus A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ e & -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ e & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A \oplus B)_{11} = \max(-3, 1) = 1$$
$$(A \oplus B)_{12} = \max(2, 3) = 3$$
$$(A \oplus B)_{21} = \max(e, -2) = e$$
$$(A \oplus B)_{22} = \max(-1, \varepsilon) = -1$$

Dalam hal ini sama dengan penjumlahan matriks dalam aljabar linier. Dalam aljabar max-plus juga untuk menjumlahkan dua atau lebih matriks dapat dilakukan jika matriks-matriksnya memiliki ordo yang sama.

Definisi 2.3.3 *(Perkalian pada matriks, (Nurwan, 2015))*
Jika matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$ *dan matriks* $B \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times p}$*, maka operasi perkalian dalam aljabar max-plus diberikan dengan aturan berikut:*

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{m} (a_{ik} \otimes b_{kj}) = \max_{k \in m}(a_{ik} + b_{kj})$$

dengan $i = 1, 2, 3, .., n$ *dan* $j = 1, 2, 3, .., p$*.*

Contoh 2.3.4

Berikut diberikan dua buah matriks $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{2\times 2}$ dengan entri di $\mathbb{R}_\varepsilon$ akan ditunjukkan $A \otimes B$ dan $B \otimes A$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ e & 1 \end{bmatrix}$$

Diperhatikan bahwa,

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ e & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(A \otimes B)_{11} &= (-1+3) \oplus (3+e) = \max(2,3) = 3 \\
(A \otimes B)_{12} &= (-1+2) \oplus (3+1) = \max(1,4) = 4 \\
(A \otimes B)_{21} &= (2+3) \oplus (\varepsilon+e) = \max(5,\varepsilon) = 5 \\
(A \otimes B)_{22} &= (2+2) \oplus (\varepsilon+1) = \max(4,\varepsilon) = 4
\end{aligned}$$

dan

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ e & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(A \otimes B)_{11} &= (3+(-1)) \oplus (2+2) = \max(2,4) = 4 \\
(A \otimes B)_{12} &= (3+3) \oplus (2+\varepsilon) = \max(6,\varepsilon) = 6 \\
(A \otimes B)_{21} &= (e+(-1)) \oplus (1+2) = \max(-1,3) = 3 \\
(A \otimes B)_{22} &= (e+3) \oplus (1+\varepsilon) = \max(3,\varepsilon) = 3
\end{aligned}$$

Operasi perkalian matriks A dan B dalam aljabar max-plus dapat dilakukan jika memenuhi aturan bahwa ukuran kolom A sama dengan ukuran baris B. Dari hasil perhitungan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times m}$ dikalikan dengan matriks $B \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times p}$ menghasilkan matriks $C \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times p}$ (Baccelli, 2001).

Definisi 2.3.5 *(Perkalian kostanta dengan matriks)*
Misal untuk matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times m}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$ operasi perkalian konstanta dengan matriks dalam aljabar max-plus diperoleh dengan aturan berikut:

$$\alpha \otimes (A)_{ij} = \alpha \otimes a_{ij} = \alpha + a_{ij}$$

Dengan $i = 1, 2, 3, .., n$ dan $j = 1, 2, 3, .., m$.

Definisi 2.3.6 *(Pangkat pada matriks)*
Misal matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ pangkat k yang dilambangkan dengan $A^{\otimes k}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$A^{\otimes k} = I_n, \text{ untuk } k = 0,$$

dan

$$A^{\otimes k} = \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}_{k}, \text{ untuk } k \in \mathbb{N}$$

Dengan $\mathbb{N}$ adalah himpunan semua bilangan asli.

2.4. Ortogonalitas Matriks dalam Aljabar linier

Sebelum kita mempelajari lebih lanjut tentang ortogonalitas matriks dalam aljabar max-plus mari kita mengingat kembali ortogonalitas matriks dalam aljabar klasik. Berikut adalah definisi dan contoh matriks yang digunakan untuk menyelesaikan masalah ortogonalitas matriks dalam aljabar klasik.

Definisi 2.4.1 *(Matriks Identitas)*
Misal matriks $A = [a_{ij}]$ adalah matriks persegi berukuran $n \times n$ dan $i, j \in \mathbb{N}$, didefinisikan sebagai berikut :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{i = j} \\ 0, & \textit{lainnya} \end{cases}$$

Matriks A disebut matriks identitas yang dapat dilambangkan dengan I_n.

Contoh 2.4.2

Perhatikan matriks $I \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ sebagai berikut!

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka matriks I dikatakan sebagai matriks identitas dengan ukurannya 3×3.

Definisi 2.4.3 *(Invers Matriks)*

Suatu matriks A dengan ukuran $n \times n$ dikatakan memiliki invers jika terdapat matriks B sehingga memenuhi,

$$AB = BA = I_n$$

Maka matriks B merupakan invers dari matriks A dan dapat ditulis sebagai $B = A^{-1}$.

Contoh 2.4.4

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ merupakan invers dari matriks A.

Karena,

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = l_n$$

dan

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = l_n$$

Hal ini membuktikan bahwa matriks B adalah invers matriks A.

Definisi 2.4.5 *(Transpose Matriks)*
Misal matriks A berukuran $n \times m$ dan transpose dari matriks A dilambangkan dengan A^T. Matriks A^T berukuran $m \times n$ adalah hasil perpindahan baris-baris atau kolom-kolom pada matriks A menjadi kolom-kolom atau baris-baris pada matriks A^T.

Contoh 2.4.6
Tentukan transpose matriks pada matriks A dan B berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka transpose dari matriks tersebut adalah sebagai berikut :

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.4.7 *(Matriks Ortogonal, (Adib Abdul Majid dkk, 2019))*
Misal dimiliki matriks A dengan ukuran $n \times n$ memenuhi sifat berikut,

$$A^{-1} = A^T$$

Dengan kata lain

$$AA^T = A^T A = I_n$$

Maka matriks A dapat disebut sebagai matriks ortogonal.

Contoh 2.4.8

Perhatikan matriks A berikut!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks A merupakan matriks ortogonal. Akan dibuktikan dengan menghitung $AA^T = A^T A = I_n$.

$$AA^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

dan

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

Dari hasil perhitungan diatas diperoleh $AA^T = A^T A = I_n$ sehingga terbukti A adalah matriks ortogonal.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab 3 ini terbagi dalam tiga bagian utama. Bagian pertama mendefinisikan himpunan $\mathbb{K} = \{0, -1\}$ yang diikuti dengan dua operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$ memenuhi aksioma semiring idempoten. Bagian kedua mendefinisikan kembali matriks normal dalam aljabar max-plus dan memberikan contoh dengan entri di $\mathbb{K}$. Bagian ketiga membahas mengenai matriks normal dengan entri di $\mathbb{K}$ yang saling ortogonal dalam aljabar max-plus.

3.1. Aljabar Max-Plus dan Sifat-sifatnya

Pada bagian ini akan membahas mengenai suatu himpunan $\mathbb{K}$ yang dikemukakan oleh Bakhadly dkk (2020) serta menunjukkan bahwa himpunan $\mathbb{K}$ yang diberikan memenuhi sifat-sifat operasi dalam aljabar max-plus dan memberikan contoh untuk setiap sifat-sifatnya.

Definisi 1

Misalkan himpunan $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ dimana $\mathbb{K} = \{0, -1\} \subseteq \mathbb{R}_\varepsilon$ dan didefinisikan $\mathbb{K}$ dengan dua operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$ sebagai berikut.

$\oplus$	0	-1
0	0	0
-1	0	-1

Tabel 3.1. Operasi $\oplus$ terhadap $\mathbb{K}$

$\otimes$	0	-1
0	0	-1
-1	-1	-1

Tabel 3.2. Operasi $\otimes$ terhadap $\mathbb{K}$

Maka akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ memenuhi aksioma dari semiring idempoten.

a. $(\mathbb{K}, \oplus)$ merupakan monoid komutatif idempoten.

(i) Memenuhi sifat asosiatif.
Berdasarkan Tabel 3.1. jelas bahwa untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{K}$ berlaku

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

Jadi, terbukti bahwa $(\mathbb{K}, \oplus)$ bersifat asosiatif.

(ii) Memenuhi sifat komutatif.
Berdasarkan Tabel 3.1., jelas bahwa untuk setiap $a, b \in \mathbb{K}$ berlaku

$$a \oplus b = b \oplus a$$

Jadi, terbukti bahwa $(\mathbb{K}, \oplus)$ bersifat komutatif.

(iii) Mempunyai elemen identitas.
Ambil sembarang $a \in \mathbb{K}$.
Berdasarkan Tabel 3.1, dapat ditunjukkan bahwa

(a) untuk $a = 0$ maka $0 \oplus (-1) = (-1) \oplus 0 = 0$

(b) untuk $a = -1$ maka $(-1) \oplus (-1) = -1$

Sehingga $\forall a \in \mathbb{K}$ memenuhi $x \oplus (-1) = (-1) \oplus x = x$.

Jadi, terbukti bahwa $(\mathbb{K}, \oplus)$ memiliki elemen identitas, yaitu -1.

(iv) Memenuhi sifat idempoten.
Berdasarkan Tabel 3.1., jelas bahwa untuk setiap $a \in \mathbb{K}$ berlaku

$$a \oplus a = a$$

Jadi, terbukti bahwa $(\mathbb{K}, \oplus)$ bersifat idempoten.

Berdasarkan (i),(ii),(iii), dan (iv) maka terbukti bahwa $(\mathbb{K}, \oplus)$ merupakan monoid komutatif idempoten.

b. $(\mathbb{K}, \otimes)$ merupakan semigrup.

(i) Memenuhi sifat asosiatif.
Berdasarkan Tabel 3.1. jelas bahwa untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{K}$ berlaku

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$$

Jadi, terbukti bahwa $(\mathbb{K}, \otimes)$ bersifat asosiatif.

(ii) Memenuhi sifat komutatif.
Berdasarkan Tabel 3.1., jelas bahwa untuk setiap $a, b \in \mathbb{K}$ berlaku

$$a \otimes b = b \otimes a$$

Jadi, terbukti bahwa $(\mathbb{K}, \otimes)$ bersifat komutatif.

(iii) Mempunyai elemen identitas.
Ambil sembarang $a \in \mathbb{K}$.
Berdasarkan Tabel 3.2., dapat ditunjukkan bahwa

(a) untuk $a = 0$ maka $0 \otimes 0 = 0$

(b) untuk $a = -1$ maka $(-1) \otimes 0 = 0 \otimes (-1) = -1$

Sehingga $\forall a \in \mathbb{K}$ memenuhi $a \otimes 0 = 0 \otimes a = a$.
Jadi, terbukti bahwa $(\mathbb{K}, \otimes)$ memiliki elemen identitas, yaitu 0.

(iv) Mempunyai elemen netral.
Ambil sembarang $a \in \mathbb{K}$.
Berdasarkan Tabel 3.2., dapat ditunjukkan bahwa

(a) untuk $a = 0$ maka $0 \otimes (-1) = (-1) \otimes 0 = -1$

(b) untuk $a = -1$ maka $(-1) \otimes (-1) = -1$

Sehingga $\forall a \in \mathbb{K}$ memenuhi $a \otimes -1 = -1 \otimes a = -1$.
Jadi, terbukti bahwa $(\mathbb{K}, \otimes)$ memiliki elemen netral -1.

Berdasarkan (i),(ii),(iii), dan (iv) maka terbukti bahwa $(\mathbb{K}, \otimes)$ merupakan semigrup.

c. $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ memiliki sifat distributif.

a Memenuhi sifat distributif kanan
Ambil sembarang $a, b, c \in \mathbb{K}$.
Misal $a = 0, b = -1, c = -1 \in \mathbb{K}$, maka
$(0 \oplus (-1)) \otimes (-1) = 0 \otimes -1 = -1$
$(0 \otimes (-1)) \oplus (-1 \otimes (-1)) = -1 \oplus -1 = -1$
Jadi, $(0 \oplus (-1)) \otimes (-1) = (0 \otimes (-1)) \oplus (-1 \otimes (-1)) = -1$
Dengan cara yang sama, $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : (a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \oplus c)$.

b Memenuhi sifat distributif kiri
Ambil sembarang $a, b, c \in \mathbb{K}$.
Misal $a = 0, b = -1, c = -1 \in \mathbb{K}$, maka
$0 \otimes ((-1) \oplus (-1)) = 0 \otimes -1 = -1$
$(0 \otimes (-1)) \oplus (0 \otimes (-1)) = -1 \oplus -1 = -1$

Jadi, $0 \otimes ((-1) \oplus (-1)) = (0 \otimes (-1)) \oplus (0 \otimes (-1)) = -1$
Dengan cara yang sama, $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \oplus c)$

Berdasarkan sifat-sifat di atas maka $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ disebut semiring idempoten, karena $(\mathbb{K}, \oplus)$ membentuk monoid komutatif idempoten dengan -1 sebagai elemen identitas. $(\mathbb{K}, \otimes)$ membentuk semigrup dengan 0 sebagai elemen identitas dan -1 sebagai elemen netral yang bersifat menyerap. Kemudian $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ membentuk sifat distributif.

Seperti yang telah diketahui bahwa dalam aljabar max-plus operasi $\oplus$ dan $\otimes$ dapat diperluas pada operasi matriks. Berikut ini adalah contoh penggunaan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ dalam aljabar max-plus yang diterapkan pada matriks dengan entri di $\mathbb{K}$.

Contoh 3.1.1

Diberikan dua buah matriks $A, B \in M_2(\mathbb{K})$ maka $A \oplus B$ dan $A \otimes B$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(-1, -1) & \max(-1, 0) \\ \max(0, -1) & \max(0, 0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(-1,-1) & \max(-1,-1) \\ \max(-1,-1) & \max(0,0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.2. Matriks Normal dalam Aljabar Max-Plus

Pada bagian ini membahas tentang matriks normal dalam aljabar max-plus. Setelah kita mengetahui definisi dari himpunan $\mathbb{K}$ yang dilengkapi dengan dua operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$ dalam aljabar max-plus yang dikemukakan oleh Bakhad et.al selanjutnya merepresentasikan himpunan $\mathbb{K}$ pada salah satu jenis matriks. Dalam hal ini matriks yang akan digunakan adalah matriks normal dalam aljabar max-plus.

Pada bab 2 telah dijelaskan definisi dari matriks normal itu sendiri yaitu matriks persegi A disebut normal dimana entri diagonalnya sama dengan nol dan selain entri diagonalnya kurang dari atau sama dengan nol. Himpunan matriks normal berukuran n dapat dilambangkan dengan M_n^N . Matriks normal A dikatakan sangat normal dimana entri diagonalnya sama dengan nol dan selain entri diagonalnya kurang dari nol. Himpunan matriks sangat normal berukuran n dapat dilambangkan dengan M_n^{SN}.

Contoh 3.2.1

Perhatikan dua buah matriks A dan B dengan entri di $\mathbb{K}$ sebagai berikut!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka matriks A disebut sebagai matriks normal dan B disebut matriks sangat normal dengan ukuran 3×3.

Notasi 3.2.2 *(Matriks Nol dan Matriks Identitas). Untuk $n \in \mathbb{N}$, pertimbangkan matriks $n \times n$ berikut:*

1. *Z_n adalah matriks yang semua entrinya sama dengan nol,*
2. *I_n adalah matriks identitas dengan entri-entri pada diagonal utama bernilai 0 dan selain entri-entri lainnya bernilai -1.*

Perhatikan bahwa kedua matriks adalah normal.

Remark 3.2.3

Perhatikan bahwa matriks Z_n bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$, yaitu

$$A \otimes Z_n = Z_n = Z_n \otimes A.$$

Selain itu, I merupakan matriks identitas terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dalam aljabar max-plus, yaitu

$$A \oplus I_n = A = I_n \oplus A$$

dan

$$A \otimes I_n = A = I_n \otimes A.$$

Dimana matriks $A \in M_n^N$ dengan entri-entrinya di $\mathbb{K}$.

3.3. Ortogonalitas Matriks Normal-(0,-1) dalam Aljabar Max-Plus

Pada bagian ini membahas mengenai ortogonalitas matriks normal dalam aljabar max-plus, syarat cukup dua matriks normal dikatakan saling ortogonal dalam aljabar max-plus, contoh dan teorema terkait.

Kita telah mengetahui bahwa konsep dasar hasil kali dalam di $M(\mathbb{R})$ didefinisikan untuk $U, V \in M(\mathbb{R})$ berlaku $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$. Dalam penelitian ini ortogonalitas matriks yang didefinisikan sebagaimana ortogonalitas di dalam ruang hasilkali dalam dimana untuk dua vektor u dan v di dalam ruang hasilkali dalam dikatakan ortogonal jika $\langle u, v\rangle = 0$. Oleh karena itu bakhadly dkk (2020) dalam penelitiannya yang berjudul *Orthogonality for (0, -1) tropical normal matrices* mendefinisikan ortogonalitas matriks dalam aljabar max-plus sebagai berikut.

Definisi 2 (Relasi Ortogonal)
Misalkan dua matriks $A, B \in M_n^N$. Matriks A dan B dikatakan saling ortogonal dalam aljabar max-plus jika memenuhi sifat bahwa,

$$A \otimes B = Z_n = B \otimes A.$$

Matriks Z_n adalah matriks yang untuk setiap entrinya bernilai 0. Jika $A^2 = Z$ maka matriks A dikatakan self-ortogonal.

Berikut akan dijelaskan beberapa syarat cukup untuk dua matriks A dan B yang saling ortogonal dalam aljabar max-plus. Karena matriks yang digunakan dalam penelitian ini adalah matriks normal maka lema-lema berikut berlaku untuk setiap matriks $A, B \in M_n^N$.

Lema 3.3.1 (Ortogonalitas untuk $n = 1, 2$)
Misalkan matriks $A, B \in M_n^N$ maka berlaku aturan sebagai berikut.

1. *Jika $n = 1$ maka A dan B saling ortogonal jika dan hanya jika $A = B = 0$.*

2. *Jika $n = 2$ maka,*

   a. *$A \otimes B = A \oplus B = B \otimes A$,*

   b. *$A = A^2$, yaitu setiap matriks normal berukuran 2 adalah idempoten terhadap operasi perkalian,*

   c. *A dan B saling ortogonal jika dan hanya jika $A \oplus B = Z_2$.*

Bukti.

1. Karena pernyataan disini merupakan biimplikasi maka harus dibuktikan dengan dua arah sebagai berikut :
   ($\rightarrow$) Ambil sembarang $A, B \in M_n^N$. Disini kita mempunyai A dan B ortogonal. Akan ditunjukkan $A = B = 0$. Berdasarkan Definisi 2 dua matriks A dan B dikatakan saling ortogonal jika memenuhi

$$A \otimes B = B \otimes A = Z_n$$

   Karena $n = 1$ maka $A = a_{11}$ dan $B = b_{11}$. Menurut definisi matriks normal dimana entri diagonal utamanya bernilai 0 maka $a_{11} = b_{11} = 0$ sehingga $A = B = 0$ terpenuhi.

($\leftarrow$) Ambil sembarang $A, B \in M_n^N$. Disini kita mempunyai $A = B = 0$. Akan ditunjukkan A dan B saling ortogonal. Berdasarkan definisi matriks normal dalam aljabar max-plus untuk $n = 1$ maka $a_{11} = b_{11} = 0$. Perhatikan bahwa

$$A \otimes B = B \otimes A = Z_n$$
$$a_{11} \otimes b_{11} = b_{11} \otimes a_{11} = Z_1$$
$$[0] + [0] = [0] + [0] = [0]$$

Dengan demikian kita peroleh bahwa matriks A dan B saling ortogonal dalam aljabar max-plus.

2. a. Ambil sembarang $A, B \in M_n^N$.

(i) Misalkan dipunyai matriks A dan B sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) Akan dibuktikan $A \otimes B = B \otimes A = A \oplus B$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(0, a_1 + b_2) & \max(b_1, a_1) \\ \max(a_1, b_2) & \max(a_2 + b_1, 0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \max(b_1, a_1) \\ \max(a_2, b_2) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \otimes A &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(0, b_1 + a_2) & \max(a_1, b_1) \\ \max(b_1, a_2) & \max(b_2 + a_1, 0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \max(a_1, b_1) \\ \max(b_2, a_2) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Karena entri pada selain diagonalnya bernilai kurang dari sama dengan nol maka maximum sama dengan 0.

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(0, 0) & \max(a_1, b_1) \\ \max(a_2, b_2) & \max(0, 0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \max(a_1, b_1) \\ \max(a_2, b_2) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dari perhitungan diatas maka $A \otimes B = B \otimes A = A \oplus B$ dipenuhi.

b. Ambil sembarang $A, B \in M_n^N$. Disini kita mempunyai $A \otimes B = A \oplus B = B \otimes A$. Akan ditunjukkkan $A = A^2$. Perhatikan bahwa

$$A \otimes B = A \oplus B$$

Misal $A = B$ maka,

$$A \otimes A = A \oplus A$$
$$A \otimes A = \max(A, A)$$
$$A \otimes A = A$$

Dengan demikian kita peroleh bahwa $A = A^2$ dipenuhi.

c. Disini karena pernyataan berupa biimplikasi sehingga harus dibuktikan secara dua arah sebagai berikut:
($\rightarrow$) Ambil sembarang $A, B \in M_n^N$. Disini kita mempunyai informasi bahwa A dan B saling ortogonal. Akan ditunjukkan $A \oplus B = Z_2$. Berdasarkan Definisi 2 matriks A dan B dikatakan saling ortogonal jika memenuhi

$$A \otimes B = Z_2$$

Berdasarkan $2a$ maka,

$$A \otimes B = B \otimes A = Z_n$$

Jadi $A \otimes B = B \otimes A = Z_n$ dipenuhi.
($\leftarrow$) Ambil sembarang $A, B \in M_n^N$. Disini kita mempunyai informasi bahwa $A \oplus B = Z_2$. Akan ditunjukkan A dan B saling ortogonal.
Perhatikan bahwa,

$$A \oplus B = Z_2 \qquad (3.3..1)$$

$$A \otimes B = B \otimes A \qquad (3.3..2)$$

Berdasarkan hasil substitusi 3.3..1 dan 3.3..2 diperoleh $A \otimes B = Z_2$ sehingga matriks A dan B ortogonal.

$\blacksquare$

Definisi 3 (Matriks L dan R)
Untuk setiap $A, B \in M_n^N$ didefinisikan produk dua matriks sebagai berikut :

$$L := A \otimes B = [l_{ij}]$$

dan

$$R := B \otimes A = [r_{ij}].$$

Contoh 1
Misal matriks $A, B \in M_n^N$ dimana $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, maka :

a. $L := A \otimes B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

b. $R := B \otimes A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Remark 3.3.2 *(Syarat cukup dua matriks saling ortogonal)*
Misalkan ada $p, q \in [n]$ dengan $[n] = \{1, 2, 3, ..., n\}$, sedemikian sehingga baris ke-p dan kolom ke-q dari A dan kolom ke-p dan baris ke-q dari B adalah nol maka $A \otimes B = Zn = B \otimes A$.

Notasi 3.3.3 *($V(p; q)$)*
Kami mempertimbangkan himpunan bagian dari M_n^N sebagai berikut.

$$V(p;q) = \{A \in M_n^N : a_{pi} = 0 = a_{iq}, i \in [n]\}$$

Dalam hal ini $p, q \in [n]$ *dengan* $[n] = \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Selanjutnya kita nyatakan kembali remark 3.3.2 dan membuktikannya dalam lemma 3.3.4.

Lema 3.3.4 *(Syarat cukup dua matriks saling ortogonal)*
Misalkan $A, B \in M_n^N$ *dan* $p, q \in [n]$. *Jika* $A \in V(p;q)$ *dan* $B \in V(q;p)$ *maka* $A \otimes B = Z_n = B \otimes A$.

Bukti.

Ambil sembarang $A, B \in M_n^N$ dan $p, q \in [n]$ dimana $A \in V(p;q)$ dan $B \in V(q;p)$. Berdasarkan definisi

$$V(p;q) = \{A \in M_n^N : a_{pi} = 0 = a_{iq}, i \in [n]\}$$

$$V(q;p) = \{B \in M_n^N : b_{qi} = 0 = b_{ip}, i \in [n]\}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \max_{t \in [n]}(a_{it} + b_{tj}) \geq \max_{t=q, t=i}(a_{it} + b_{tj}) \\ &= \max\{b_{ij}, b_{qj}\} = b_{ij} \oplus b_{qj} = l_{ij} \end{aligned} \tag{3.3..3}$$

$$\begin{aligned} B \otimes A &= \max_{t \in [n]}(b_{it} + a_{tj}) \geq \max_{t=q, t=i}(b_{it} + a_{tj}) \\ &= \max\{b_{ij}, b_{ip}\} = b_{ij} \oplus b_{ip} = r_{ij} \end{aligned} \tag{3.3..4}$$

Karena $B \in V(q;p)$ maka didapatkan $b_{qj} = b_{ip} = 0$ sehingga persamaan 3.3..3 dan 3.3..4 bernilai 0 terbukti bahwa $A \otimes B = Zn = B \otimes A$. ∎

Gambaran yang lebih jelas dapat kita lihat dengan memberikan pembuktian dua matriks normal berukuran 2×2 berikut ini: Perhatikan dua matriks $A, B \in M_n^N$ dengan entrinya di $\mathbb{K}$ sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka untuk membuktikan matriks A dan B saling ortogonal dalam aljabar max-plus dapat menggunakan beberapa kemungkinan. Berdasarkan lema 3.3.1 matriks $A, B \in M_n^N$ memenuhi kriteria sebagai berikut.

a. Memenuhi persamaan $A \otimes B = A \oplus B = B \otimes A$.

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(0,0) & \max(-1,0) \\ \max(-1,0) & \max(-1,0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \otimes A &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(0,-1) & \max(0,-1) \\ \max(0,-1) & \max(0,0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A \oplus B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(0,0) & \max(0,-1) \\ \max(-1,0) & \max(0,0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Dari perhitungan diperoleh bahwa matriks A dan B memenuhi persamaan $A \otimes B = A \oplus B = B \otimes A$.

b. Memenuhi persamaan $A = A^2$ yaitu setiap matriks normal berukuran 2 adalah idempoten terhadap operasi perkalian dalam aljabar max-plus.

$$
\begin{aligned}
A \otimes A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(0,-1) & \max(0,0) \\ \max(-1,-1) & \max(-1,0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B \otimes B &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(0,-1) & \max(-1,-1) \\ \max(0,0) & \max(-1,0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= B
\end{aligned}
$$

Jadi matriks A dan B memenuhi sifat idempoten terhadap operasi perkalian dalam aljabar max-plus.

c. Memenuhi persamaan $A \oplus B = Z_n$

$$
\begin{aligned}
A \oplus B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(0,0) & \max(0,-1) \\ \max(-1,0) & \max(0,0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= Z_2
\end{aligned}
$$

Maka matriks A dan B memenuhi persamaan $A \oplus B = Z_n$.

Dari dua matriks normal A dan B yang ada maka dapat dikatakan bahwa matriks normal A dan B saling ortogonal dalam aljabar max-plus.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Pada bagian ini ditarik kesimpulan dari hasil penelitian tentang ortogonalitas matriks dalam aljabar max-plus, yaitu pasangan matriks normal yang dapat dikatakan saling ortogonal dalam aljabar max-plus. Mengingat syarat cukup yang ada, dua matriks normal A dan B dimana $A \in V(p;q)$ dan $B \in V(q;p)$ dan $p, q \in [n]$ dengan entri-entrinya di $\mathbb{K}$. Dalam hal ini matriks normal A dan B memenuhi definisi ortogonalitas matriks dalam aljabar max-plus, yaitu $A \otimes B = Z_n = B \otimes A$. Jadi dapat dikatakan bahwa matriks normal A dan B saling ortogonal dalam aljabar max-plus.

4.2. Saran

Pada penelitian ini hanya fokus pada sebuah himpunan $\mathbb{K} = (0, -1)$. Selain itu peneliti hanya memberikan syarat cukup untuk pasangan matriks normal berukuran 2×2 yang saling ortogonal dalam aljabar max-plus. Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya disarankan dapat menentukan syarat cukup untuk pasangan matriks berukuran $n \times n$ yang saling ortogonal dalam aljabar max-plus dan menambahkan elemen lain pada himpunannya.

DAFTAR PUSTAKA

Afif, Ahmad. 2015. *Aplikasi Petri Net Dan Aljabar Max-Plus Pada Sistem Jaringan Kereta Api Di Jawa Timur*. Tesis. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Baccelli, Francois., dkk. 2013. *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*. Paris: INDRIA.

Bakhadly, Bakhad., Alexander Guterman., Maria Jesus de la Puente. 2020. *Orthogonality for (0,-1) tropical normal matrices*. DE GRUYTER. 8: 40-60

Bakhadly, Bakhad., Alexander Guterman., Maria Jesus de la Puente. 2023. *Normal Tropical (0,-1)-Matrices And Their Orthogonal Sets*.

Heidergott, Bernd. Geert Jan Olsder. Jacob van der Woude. 2016. *Modeling and Analysis of Synchronized Systems: A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications* . Princeton University Press.

J. Linde, M.J. de la Puente. 2015. *Matrices commuting with a given normal tropical matrix*. Linear Algebra and its Applications.

Majid, Adib Abdul., Yanita., Nova Noliza Bakar. 2019. *Sifat-Sifat Matriks Ortogonal dan Transformasi Ortogonal*. Padang: UNAND.

Nurwan, 2015. *Kajian Matriks dalam Aljabar Max-Plus*. Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UMS.

Oktafianto, Kresna. Subiono. Subchan. 2013. *Implementasi Aljabar Max-Plus Pada Pemodelan dan Penjadwalan Keberangkatan Bus Kota DAMRI (Studi Kasus di Surabaya)*. SEMNASTIKA UNESA.

Permatasari, Novika. 2021. *Model Sistem Antrian Pom Bensin Menggunakan Aljabar Maxplus*. Skripsi. Surabaya: Universitas Islam Negeri Sunan Ampel.

Rafflesia, Ulfasari. 2011. *Penerapan Aljabar Max-Plus Pada Sistem Produksi Meubel Rotan*. Jurnal Gradien Vol 8 No 1 Januari 2012: 775-779.

Rudhito, M. Andy. 2016. *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya*. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Schutter, B. De. 1996. *Max-Algebraic System Theory for Discrete Event System*. Leuven: Katholieke Universiteit Leuven.

Subiono. 2013. *Aljabar Maxplus dan Terapannya*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh November.

Susan Rialita Lisapaly, dkk. 2011. *Semiring*. Jurnal Barekeng. 5(2): 45- 47.