

**PEMODELAN MATEMATIKA PENYEBARAN COVID-19
DENGAN ADANYA VAKSINASI DOSIS PERTAMA,
KEDUA, DAN KETIGA DI KOTA SEMARANG**

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat
Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Dalam Ilmu Matematika



Diajukan oleh:

MAHARDIKA KARUNIA DEWI PURNAMASARI

NIM : 1908046040

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO SEMARANG
2023**

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertandatangan dibawah ini:

Nama : Mahardika Karunia Dewi P.
NIM : 1908046040
Jurusan : Matematika

Menyatakan bahwa skripsi yang berjudul:

PEMODELAN MATEMATIKA PENYEBARAN COVID-19 DENGAN ADANYA VAKSINASI DOSIS PERTAMA, KEDUA, DAN KETIGA DI KOTA SEMARANG

Secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, Juni 2023

Penulis,



Mahardika Karunia Dewi P.
NIM : 1908046040



KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka Ngaliyan Semarang
Telp.024-7601295 Fax.7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini:

Judul : **Pemodelan Matematika Penyebaran Covid-19 dengan Adanya Vaksinasi Dosis Pertama, Kedua, dan Ketiga di Kota Semarang**

Penulis : **Mahardika Karunia Dewl Purnamasari**

NIM : 1908046040

Jurusan : Matematika

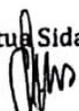
Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 21 Juni 2023

DEWAN PENGUJI

Ketua Sidang,

Sekretaris Sidang,


Emy Siswanah, M.Sc


Aini Fitriyah, M.Sc

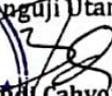
NIP: 198702022011012014

NIP: 198909292019032021

Penguji Utama I,

Penguji Utama II,


Seftina Diah Miasary, M.Sc


Dr. Budi Cahyono, M.Si

NIP: 198709212019032018

NIP: 198012152009121003

Pembimbing I,

Pembimbing II,


Aini Fitriyah, M.Sc


Zulaikha, M.Si

NIP: 198909292019032021

NIP: 199204092019032027

NOTA DINAS

Semarang, Juni 2023

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum. wr. wb.

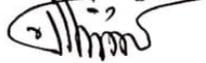
Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:
Judul : **Pemodelan Matematika Penyebaran Covid-19 dengan Adanya Vaksinasi Dosis Pertama, Kedua, dan Ketiga di Kota Semarang**

Nama : **Mahardika Karunia Dewi Purnamasari**
NIM : 1908046040
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diujikan dalam Sidang Munaqsyah.

Wassalamu'alaikum. wr. wb.

Pembimbing I,



Aini Fitriyah, M.Sc

NIP : 198909292019032021

NOTA DINAS

Semarang, Juni 2023

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum. wr. wb.

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : **Pemodelan Matematika Penyebaran Covid-19 dengan Adanya Vaksinasi Dosis Pertama, Kedua, dan Ketiga di Kota Semarang**

Nama : **Mahardika Karunia Dewi Purnamasari**

NIM : 1908046040

Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diujikan dalam Sidang Munaqsyah.

Wassalamu'alaikum. wr. wb.

Pembimbing II,



Zulaikha, M.Si

NIP : 199204092019032027

ABSTRAK

Penelitian ini memodelkan penyebaran Covid-19 dengan mengembangkan model $SV_1V_2V_3EIR$. Pada model ini terdapat tujuh kompartemen, yaitu subpopulasi rentan (S), subpopulasi yang telah menerima vaksin dosis pertama (V_1), subpopulasi yang telah menerima vaksin dosis kedua (V_2), subpopulasi yang telah menerima vaksin dosis ketiga (V_3), subpopulasi yang terpapar (E), subpopulasi yang terinfeksi (I), dan subpopulasi yang pulih (R). Dari model yang telah terbentuk, dilakukan pencarian titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik, selanjutnya mencari bilangan reproduksi dasar (R_0) sebagai patokan ada atau tidaknya penyebaran Covid-19 dalam suatu populasi, kemudian mensimulasikan secara numerik menggunakan software Matlab R2017a. Hasil dari simulasi numerik ini sesuai dengan analisis dinamik yang dilakukan yaitu apabila keadaan $R_0 < 1$ maka Covid-19 tidak dapat menyebar, sedangkan apabila keadaan $R_0 > 1$ maka Covid-19 dapat menyebar di suatu daerah tertentu. Selain itu, penyakit tidak dapat menyebar dengan cepat apabila proporsi yang melakukan vaksinasi (δ) ditingkatkan, sehingga penggunaan vaksin dapat digunakan sebagai upaya pencegahan penyebaran Covid-19.

Kata Kunci: Covid-19, Model $SV_1V_2V_3EIR$, Vaksinasi, Titik Kesetimbangan, Bilangan Reproduksi Dasar

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dengan penuh rasa syukur kepada Allah SWT atas segala rahmat dan petunjuk-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi dengan judul ***“Pemodelan Matematika Penyebaran Covid-19 dengan Adanya Vaksinasi Dosis Pertama, Kedua, dan Ketiga di Kota Semarang”***.

Skripsi ini disusun sebagai persyaratan untuk meraih gelar Sarjana Matematika (S.Mat) di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang. Penyelesaian skripsi ini dapat terwujud berkat kolaborasi dan dukungan dari berbagai pihak yang berperan. Oleh karena itu, penulis ingin mengungkapkan rasa terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. H. Ismail, M.Ag., selaku Ketua Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
2. Ibu Emy Siswanah, M.Sc., selaku Ketua Jurusan Matematika dan Bapak Aunur, M.Pd., selaku Sekretaris Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.

3. Bapak Agus Wayan Yulianto, M.Sc., selaku wali dosen dari penulis yang telah berperan dalam memberikan motivasi kepada penulis dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Ibu Aini Fitriyah, M.Sc., selaku dosen pembimbing I dan Ibu Zulaikha, M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktu dan memberikan bimbingan sehingga skripsi dapat diselesaikan.
5. Seluruh dosen program studi Matematika yang telah berbagi pengetahuan dan pengalaman berharga kepada penulis.
6. Bapak Purnama dan Ibu Sri Widati, selaku kedua orang tua dari penulis, serta Maharani Widya Purnamasari, selaku kakak dari penulis yang telah memberikan dukungan, kasih sayang, motivasi, dan doa yang tiada hentinya kepada penulis agar skripsi ini dapat diselesaikan.
7. Teman satu bimbingan yaitu Latifatul Ahfa, Emammatul, dan Nur Indah Rahayu yang senantiasa menemani penulis dan menjadi teman diskusi.
8. Ayu Nur Hayati, Erlin Pujiwati Ningsih, Khoirunnisa Al Muthmainah, dan Regita Nurul Fitriani yang senantiasa memberikan motivasi dan semangat selama proses penyusunan skripsi.

9. Teman – teman program studi Matematika angkatan 2019 yang senantiasa memberikan semangat dan bantuan kepada penulis dalam proses penyelesaian skripsi ini.
10. Teman-teman KKN MIT 15 Posko 14 Desa Margosari yang senantiasa memberikan dukungan dan doanya.
11. Seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang memberikan bantuan dan motivasi dalam proses penyelesaian skripsi ini. Penulis berharap semoga jasa-jasa yang telah diberikan, mendapat balasan yang setimpal dari Allah SWT.

Penulis mengetahui bahwa skripsi ini masih memiliki banyak kekurangan dan belum dapat dikatakan sebagai skripsi yang sempurna. Namun, penulis berharap agar skripsi ini dapat menambah wawasan dan memberikan manfaat kepada penulis maupun pembaca.

Semarang, Juni 2023

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iii
NOTA DINAS	iv
NOTA DINAS	v
ABSTRAK	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xvi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah.....	1
1.2. Rumusan Masalah	7
1.3. Tujuan Penelitian	7
1.4. Manfaat Penelitian	8
1.5. Batasan Masalah	9
BAB II LANDASAN TEORI	10
2.1. Covid-19	10
2.2. Persamaan Diferensial	12
2.3. Sistem Persamaan Diferensial	15
2.4. Pemodelan Matematika Pada Penyebaran Penyakit	18
2.5. Titik Keseimbangan	34

2.6. Linearisasi	36
2.7. Nilai Eigen	40
2.8. Bilangan Reproduksi Dasar	41
2.9. Aturan Tanda Descartes	43
2.10. Metode Runge-Kutta Orde Empat	44
2.11. Kajian Pustaka	46
BAB III METODE PENELITIAN	54
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	58
4.1. Model Matematika Penyebaran Covid-19 dengan Adanya Vaksinasi Dosis Pertama, Kedua, dan Ketiga	58
4.2. Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran Covid-19 dengan Adanya Vaksinasi Dosis Pertama, Kedua, dan Ketiga.....	84
4.3. Simulasi Numerik Model Matematika Penyebaran Covid-19 dengan Adanya Vaksinasi Dosis Pertama, Kedua, dan Ketiga.....	104
BAB V PENUTUP	137
DAFTAR PUSTAKA	141
LAMPIRAN.....	146

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul	Halaman
Tabel 2.1	Variabel Model <i>SIR</i>	20
Tabel 2.2	Parameter Model <i>SIR</i>	21
Tabel 2.3	Variabel Model <i>SEIR</i>	23
Tabel 2.4	Parameter Model <i>SEIR</i>	23
Tabel 2.5	Variabel Model $SV_1V_2EII_vR$	26
Tabel 2.6	Parameter Model $SV_1V_2EII_vR$	27
Tabel 2.7	Perbedaan dan Persamaan Penelitian dengan Penelitian Sebelumnya	46
Tabel 4.1	Variabel Model Matematika Penyebaran Covid-19 dengan Adanya Vaksinasi Dosis Pertama, Kedua, dan Ketiga	61
Tabel 4.2	Parameter Model Matematika Penyebaran Covid-19 dengan Adanya Vaksinasi Dosis Pertama, Kedua, dan Ketiga	62
Tabel 4.3	Kemungkinan Tanda Koefisien $B, C,$ dan D	103
Tabel 4.4	Seluruh Kemungkinan Tanda Koefisien dari persamaan (4.49)	103
Tabel 4.5	Nilai Parameter ketika $R_0 < 1$	106
Tabel 4.6	Nilai Parameter δ untuk $R_0 =$	114

	0,14; $R_0 = 0,201$; dan $R_0 = 0,22$	
Tabel 4.7	Nilai Parameter ketika $R_0 > 1$	117
Tabel 4.8	Nilai Parameter δ untuk $R_0 =$ 14,37; $R_0 = 15,098$; dan $R_0 = 16,28$	129
Tabel 4.9	Keberhasilan Penggunaan Vaksin	132

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
Gambar 2.1	Diagram Kompartemen Model <i>SIR</i>	20
Gambar 2.2	Diagram Kompartemen Model <i>SEIR</i>	22
Gambar 2.3	Diagram Kompartemen Model <i>SV₁V₂EII_vR</i>	26
Gambar 3.1	Diagram Alur Penelitian	54
Gambar 4.1	Diagram Kompartemen Model <i>SV₁V₂V₃EIR</i>	65
Gambar 4.2	Simulasi Variabel \hat{s}	110
Gambar 4.3	Simulasi Variabel \hat{v}_1	110
Gambar 4.4	Simulasi Variabel \hat{v}_2	111
Gambar 4.5	Simulasi Variabel \hat{v}_3	111
Gambar 4.6	Simulasi Variabel \hat{e}	112
Gambar 4.7	Simulasi Variabel \hat{i}	112
Gambar 4.8	Simulasi ketika $R_0 = 0,14$	115
Gambar 4.9	Simulasi ketika $R_0 = 0,201$	115
Gambar 4.10	Simulasi ketika $R_0 = 0,22$	116
Gambar 4.11	Simulasi Variabel s^*	125
Gambar 4.12	Simulasi Variabel v_1^*	125
Gambar 4.13	Simulasi Variabel v_2^*	126
Gambar 4.14	Simulasi Variabel v_3^*	126
Gambar 4.15	Simulasi Variabel e^*	127

Gambar 4.16	Simulasi Variabel i^*	127
Gambar 4.17	Simulasi ketika $R_0 = 14,37$	130
Gambar 4.18	Simulasi ketika $R_0 = 15,098$	130
Gambar 4.19	Simulasi ketika $R_0 = 16,28$	131
Gambar 4.20	Simulasi Variabel \hat{i} Ketika $\delta = 0,9$	133
Gambar 4.21	Simulasi Variabel i Ketika $\delta = 0,8$	134
Gambar 4.22	Simulasi Variabel i Ketika $\delta = 0,5$	134
Gambar 4.23	Simulasi variabel i ketika $\delta = 0,3$	135

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Judul	Halaman
Lampiran 1	Penentuan Banyaknya Akar Real Positif dengan Aturan Tanda Descartes	146
Lampiran 2	Simulasi Titik Keseimbangan Ketika $R_0 < 1$	156
Lampiran 3	Simulasi Titik Keseimbangan Ketika $R_0 > 1$	159
Lampiran 4	Perhitungan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit Ketika $R_0 = 0,201$ dan $R_0 = 0,22$	162
Lampiran 5	Perhitungan Titik Keseimbangan Endemik Ketika $R_0 = 15,098$ dan $R_0 = 16,28$	167
Lampiran 6	Perhitungan Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) untuk Mengetahui Keberhasilan Penggunaan Vaksinasi	177

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Ilmu matematika memiliki peran penting dalam menganalisis dan memodelkan berbagai fenomena. Salah satu fenomena yang dapat dimodelkan kedalam bentuk matematika adalah penyebaran penyakit menular. Model yang dapat digunakan dalam memodelkan fenomena tersebut diantaranya model *SIR* (*Susceptible, Infected, Recovered*) dan model *SEIR* (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered*). Pada model *SIR* terdapat 3 kompartemen yaitu *S* (*Susceptible*) atau subpopulasi rentan, *I* (*Infected*) atau subpopulasi terinfeksi, dan *R* (*Recovered*) atau subpopulasi sembuh (Wang dkk, 2022). Sedangkan, model *SEIR* terdapat 4 kompartemen yaitu *S* (*Susceptible*) atau subpopulasi rentan, *E* (*Exposed*) atau subpopulasi laten, *I* (*Infected*) atau subpopulasi terinfeksi, dan *R* (*Recovered*) atau subpopulasi sembuh (Annas dkk, 2020). Dengan adanya model tersebut, dinamika penyebaran penyakit menular yang terjadi di berbagai wilayah dunia secara sederhana dapat direpresentasikan (Nurfadilah, Hikmah dan Fardinah, 2021). Selain itu, model yang terbentuk tersebut dapat memberikan prediksi dinamika penyebaran penyakit menular pada waktu mendatang sehingga dapat dilakukan suatu usaha dalam mengontrol penyebarannya

dengan menekan laju penyebaran virus agar tidak meningkat secara signifikan (Setyowati, Kharis dan Asih, 2020).

Penyebaran penyakit menular yang dikaji dalam penelitian ini adalah Covid-19. Penyakit tersebut merupakan penyakit yang ditransmisikan dari hewan ke manusia atau *zoonosis* (Keputusan Menteri Kesehatan Republik Indonesia, 2020). Berdasarkan laporan dari *World Health Organization* (WHO), penyakit tersebut secara resmi dinyatakan sebagai pandemi global pada bulan Maret 2020. Virus tersebut telah menyebar dengan cepat ke setidaknya 214 negara/wilayah hingga tahun 2022, dengan total 640.276.821 infeksi global dan 6.627.655 kasus meninggal (*Our World in Data*, 2022).

Dengan adanya penyebaran yang cepat dari Covid-19, maka diperlukan suatu usaha dalam mencegah penyakit tersebut. Sesuai dengan sabda Rasulullah SAW yang berbunyi:

عَنْ أُسَامَةَ بْنِ زَيْدٍ أَنَّ النَّبِيَّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ ذَكَرَ الطَّاعُونَ فَقَالَ بَقِيَّةُ رَجْزٍ أَوْ عَذَابٍ أُرْسِلَ عَلَى طَائِفَةٍ مِنْ بَنِي إِسْرَائِيلَ فَإِذَا وَقَعَ بِأَرْضٍ وَأَنْتُمْ بِهَا فَلَا تَخْرُجُوا مِنْهَا وَإِذَا وَقَعَ بِأَرْضٍ وَأَنْتُمْ بِهَا فَلَا تَهْبِطُوا عَلَيْهَا

Artinya: “Dari Usamah bin Zaid, Nabi Muhammad shallallahu 'alaihi wasallam menjelaskan tentang *tha'un*. Beliau mengatakan bahwa *tha'un* adalah sisa-sisa kekejian yang dikirimkan kepada sekelompok orang dari Bani Isra'il. Jika kamu berada di suatu tempat di mana wabah (*tha'un*) menyebar, maka janganlah kamu meninggalkannya. Namun,

jika wabah terjadi di suatu daerah di mana kamu tidak berada di dalamnya, maka janganlah kamu masuk ke dalamnya.

Hadis tersebut menunjukkan bahwa adanya larangan untuk memasuki wilayah yang sedang terkena wabah penyakit. Seperti halnya saat menghadapi wabah Covid-19 ini, kita perlu menghindari penyebaran virus tersebut dengan tetap berada di dalam rumah, menghindari kontak secara langsung dengan orang yang sedang terinfeksi Covid-19, dan selalu mematuhi protokol kesehatan. Selain itu, kita juga dapat mencegah penularan penyakit tersebut dengan vaksinasi (Telaumbanua, 2020). Vaksin mampu membantu tubuh dalam meningkatkan kekebalan dengan tujuan menghindari terinfeksi Covid-19 dan mencegah terjadinya gejala berat, atau meminimalisasi dampak dari gejala yang timbul (Larasati dan Sulistianingsih, 2021).

Di Indonesia, vaksinasi telah dilakukan pada awal Oktober 2021 dengan total vaksin sebanyak dua dosis, kemudian akibat munculnya varian baru dari Covid-19. Pada awal Januari 2022, pemerintah menambah dosis vaksin menjadi tiga dosis dengan tujuan agar kekebalan tubuh bertambah seiring dengan berkurangnya efektivitas dari vaksin dosis kedua (Sinaga dkk, 2022).

Beberapa penelitian sebelumnya sudah banyak yang membahas mengenai pemodelan penyakit menular,

diantaranya penelitian dari Zulaikha dkk (2017) yang membahas mengenai penyakit HFMD (*Hand, Foot, and Mouth Disease*) yang menyerang pada anak-anak di China dengan mengembangkan model *SEIQR* (*Susceptible, Exposed, Infected, Quarantine, Recovered*). Selain itu, penyakit menular lainnya yang telah banyak dikaji dengan menggunakan model matematika adalah Covid-19, diantaranya penelitian dari Alam dan Abadi (2021). Dalam penelitiannya, mengembangkan model SV_1V_2IR (*Susceptible, Vaccinated 1, Vaccinated 2, Infected, Recovered*) dengan V_1 (*Vaccinated 1*) dan V_2 (*Vaccinated 2*) adalah subpopulasi yang telah menerima vaksin dosis pertama dan kedua.

As Med dan A'yun (2022) juga meneliti mengenai pengembangan model penyakit menular yaitu model SV_1V_2EIR (*Susceptible, Vaccinated, Not Vaccinated, Infected, Recovered*), dengan V_1 adalah subpopulasi yang telah vaksin dan V_2 adalah subpopulasi yang belum vaksin. Selain itu, penelitian penyebaran Covid-19 lainnya telah dilakukan oleh Liu, Lv dan Ding (2022) yang membahas mengenai model *SAIM* (*Susceptible, Antibodies, Infected, Media*), dengan kompartemen A merupakan subpopulasi yang memiliki antibodi dan M merupakan subpopulasi yang tidak

berkeinginan untuk vaksin, tetapi setelah dipengaruhi oleh media, subpopulasi tersebut berkenan untuk divaksin.

Penelitian juga telah dilakukan oleh Zeb dkk (2020) yang mengkaji mengenai model *SEIQR* (*Susceptible, Exposed, Infected, Quarantined, Recovered*), dengan kompartemen *Q* (*Quarantined*) merupakan subpopulasi yang melakukan isolasi. Penelitian selanjutnya yaitu Algarni dkk (2022) yang mengkaji mengenai model *SVIAR* (*Susceptible, Vaccinated, Infected, Asymptotic, Recovered*) dengan *V* (*Vaccinated*) merupakan subpopulasi yang telah memperoleh vaksin dan *A* (*Asymptotic*) merupakan subpopulasi yang terkena penyakit namun tidak bergejala.

Penelitian lain mengenai analisis model matematika Covid-19 juga telah dilakukan oleh Fitriyah (2022). Penelitian ini mengkaji tentang model $SV_1V_2EII_vR$ dengan V_1 merupakan subpopulasi yang telah memperoleh vaksin dosis pertama, V_2 merupakan subpopulasi yang telah memperoleh vaksin dosis kedua, I merupakan subpopulasi terinfeksi yang belum melakukan vaksinasi dosis pertama dan kedua, dan I_v merupakan subpopulasi terinfeksi yang telah melakukan vaksinasi dosis pertama dan kedua. Modu dan Maiduguri (2021) juga melakukan penelitian yang membahas mengenai perhitungan bilangan reproduksi dasar dari model *SEIQR* (*Susceptible, Exposed, Infected, Quarantined, Recovered*) pada

Covid-19 dengan menambahkan variabel Q (*Quarantined*) dengan Q merupakan yang diisolasi.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, penulis tertarik melakukan pengembangan dengan menambahkan subpopulasi yang telah memperoleh vaksin hingga dosis ketiga (*booster*), sehingga dalam penelitian ini dapat dilakukan pengembangan model evaluasi matematis Covid-19 menggunakan vaksinasi dosis pertama hingga ketiga dengan model $SV_1V_2V_3EIR$ (*Susceptible, Vaccinated 1, Vaccinated 2, Vaccinated 3, Exposed, Infected, Recovered*). Model ini membagi kompartemen *Vaccinated* (V) menjadi tiga yaitu subpopulasi yang telah memperoleh vaksin pertama (V_1), subpopulasi yang telah memperoleh vaksin kedua (V_2), dan subpopulasi yang telah memperoleh vaksin ketiga (V_3). Dalam penelitian ini difokuskan pada pembahasan mengenai bilangan reproduksi dasar (R_0) atau ambang batas dalam menentukan keadaan virus penyakit pada suatu daerah tertentu. Hal tersebut dikarenakan dalam penelitian ini variabel yang digunakan berdimensi besar.

1.2. Rumusan Masalah

Permasalahan yang dirumuskan dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana pemodelan matematika dengan adanya vaksinasi dosis pertama, kedua, dan ketiga terhadap penyebaran Covid-19?
2. Bagaimana penentuan titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik pada model matematika dengan adanya vaksinasi dosis pertama, kedua, dan ketiga terhadap penyebaran Covid-19?
3. Bagaimana penentuan bilangan reproduksi dasar (R_0) pada model penyebaran Covid-19 dengan adanya vaksinasi dosis pertama, kedua, dan ketiga?
4. Bagaimana simulasi numerik model matematika dengan adanya vaksinasi dosis pertama, kedua, dan ketiga pada penyebaran Covid-19 di Kota Semarang ?

1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin penulis capai dari penelitian ini adalah:

1. Mengetahui pemodelan matematika dengan adanya vaksinasi dosis pertama, kedua, dan ketiga terhadap penyebaran Covid-19.
2. Menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik pada model matematika dengan adanya

vaksinasi dosis pertama, kedua, dan ketiga terhadap penyebaran Covid-19.

3. Menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) pada model penyebaran Covid-19 dengan adanya vaksinasi dosis pertama, kedua, dan ketiga.
4. Mensimulasikan secara numerik model matematika dengan adanya vaksinasi dosis pertama, kedua, dan ketiga pada penyebaran Covid-19 di Kota Semarang.

1.4. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah

1. Manfaat Teoritis

Diharapkan penelitian ini dapat memperluas pemahaman mengenai model *SEIR* (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered*) yang dapat dikembangkan kedalam model lain dan diterapkan dalam menganalisa akhir dari penyebaran penyakit menular sehingga dapat memunculkan penelitian yang lebih berkembang dan modern.

2. Manfaat Praktis

Diharapkan penelitian ini dapat membantu pihak paramedis maupun pihak lain yang berkepentingan dalam mengendalikan penyebaran Covid-19 pada waktu mendatang dengan menekan variabel-variabel

yang memberikan pengaruh signifikan terhadap penyebaran penyakit tersebut.

1.5. Batasan Masalah

Batasan permasalahan dari penelitian ini adalah:

1. Model yang dipakai adalah model *SEIR* (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered*) dengan menambahkan kompartemen *V* (*Vaccinated*) dan membaginya menjadi tiga yaitu subpopulasi yang telah menerima vaksin dosis pertama (V_1), kedua (V_2), dan ketiga (V_3).
2. Penyakit menular yang diteliti adalah penyakit Covid-19.
3. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data tahun 2022 di Kota Semarang yang diperoleh dari <https://semarangkota.bps.go.id/> dan Dinas Kesehatan Kota Semarang. Apabila data yang dibutuhkan sulit diperoleh, maka dapat dilakukan asumsi pada parameter yang digunakan.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bagian ini membahas mengenai teori-teori yang dibutuhkan dalam pengembangan model matematika penyebaran penyakit menular. Teori tersebut diantaranya adalah Covid-19, persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial, pemodelan matematika pada penyebaran penyakit, titik kesetimbangan, linearisasi, nilai eigen, bilangan reproduksi dasar, metode Runge-Kutta orde empat, dan aturan tanda Descartes. Selain itu, pada bagian ini juga diuraikan mengenai kajian pustaka yang memuat penelitian sebelumnya yang sesuai dengan penelitian ini.

2.1. Covid-19

Covid-19 merupakan penyakit yang menyerang pernapasan akibat dari virus SARS-COV-2 (Keputusan Menteri Kesehatan Republik Indonesia, 2020). Rata-rata masa inkubasi virus tersebut adalah 1 sampai 14 hari. Seseorang yang terinfeksi dapat secara langsung mentransmisikan hingga 48 jam sebelum gejala muncul dan 14 hari setelah gejala muncul. Pada periode presimptomatik (kasus sebelum bergejala), virus tersebut menyebar melalui air liur (*droplet*) atau sentuhan terhadap benda yang terkontaminasi. Selain itu, terdapat periode lain yaitu asimptomatik (kasus tanpa

gejala). Pada periode tersebut, efek penularannya sangat rendah, tetapi ada peluang kecil seseorang tertular penyakit. Gejala yang ditimbulkan akibat dari Covid-19 diantaranya demam, batuk tak berdahak, flu, *fatigue*, peningkatan sputum (dahak), gangguan saluran pernapasan, ruam kulit dan diare (Keputusan Menteri Kesehatan Republik Indonesia, 2020).

Covid-19 hampir menyebar ke seluruh dunia. Penyebaran penyakit tersebut mengakibatkan Indonesia menjadi salah satu negara yang terkonfirmasi adanya virus tersebut. Berdasarkan data dari Kementerian Kesehatan, hingga bulan Oktober 2022 telah dilaporkan sebanyak 6.435.719 kasus terinfeksi dan 158.143 kasus meninggal dunia yang terpencar di 34 provinsi (*Our World in Data*, 2022). Salah satu daerah yang terkena dampak Covid-19 adalah Kota Semarang. Pada awal kemunculan penyakit tersebut hingga 28 Juni 2021, total kasus terkonfirmasi di daerah tersebut telah mencapai 243.676 orang. Seiring berjalannya waktu jumlah penyebarannya semakin naik, tetapi pada tahun 2022 kasus virus ini mengalami fluktuasi hingga per bulan Desember 2022 kasus tersebut menurun dengan total 27.741 orang terkonfirmasi (Dinas Kesehatan Kota Semarang, 2022).

Dengan adanya kasus terkonfirmasi Covid-19 yang naik turun, maka pemerintah melakukan usaha dalam menangani hal tersebut yaitu dengan vaksinasi. Berdasarkan data dari

Dinas Kesehatan Kota Semarang, per bulan Desember 2022 telah ada 236.408 orang yang memperoleh vaksin pertama, 168.919 orang yang memperoleh vaksin kedua, dan 108.709 orang yang memperoleh vaksin ketiga (Dinas Kesehatan Kota Semarang, 2022). Menurut Tim Peneliti Survei Efektivitas Vaksin Kemenkes, efektivitas dari masing-masing dosis adalah sebesar 53 persen untuk vaksin pertama, 96 persen untuk vaksin kedua (Tribunews, 2021), dan 97,9 persen untuk vaksin ketiga (Mediaindonesia, 2022).

2.2. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial didefinisikan sebagai persamaan yang memuat turunan dari sebuah fungsi. Persamaan tersebut muncul dikarenakan adanya ketertarikan seseorang mengenai fenomena perubahan di dunia nyata. Ditinjau dari banyaknya variabel bebas yang termuat, maka persamaan diferensial dibagi menjadi dua bentuk, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa merupakan persamaan yang didalamnya hanya memuat satu peubah bebas (Kartono, 2012). Persamaan diferensial biasa didasarkan dalam bentuk

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, y^{(n)}\right) = 0 \quad (2.1)$$

Persamaan (2.1) memiliki variabel bebas t sehingga persamaan tersebut bergantung oleh waktu.

Contoh 2.1

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 7\frac{dy}{dt} - 4y = 0$$

Pada contoh 2.1, variabel bebas yang termuat adalah t dan variabel tak bebas yang termuat adalah y artinya bahwa variabel t tidak tergantung oleh variabel y . Ditinjau dari linearitasnya, persamaan diferensial biasa dibagi menjadi dua, diantaranya:

2.2.1. Persamaan Diferensial Linear

Persamaan diferensial linear adalah persamaan yang tidak ada perkalian antara variabel tak bebas dengan turunannya dan keduanya bukan merupakan fungsi transenden, yaitu fungsi yang meliputi fungsi eksponensial, logaritma, trigonometri, dan hiperbolik. Bentuk persamaannya yaitu:

$$b_0(t)y^{(n)} + b_1(t)y^{(n-1)} + \dots + b_n(t)y = h(t) \quad (2.2)$$

dengan b_0, b_1, \dots, b_n merupakan koefisien dari variabel y dimana $b_0(t) \neq 0$ dan h merupakan fungsi dari t .

Contoh 2.2

$$\frac{d^4 y}{dt^4} + 4 \frac{d^3 y}{dt^3} - 5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 10 \frac{dy}{dt} - 2y = 0$$

Contoh 2.2 merupakan bentuk dari persamaan diferensial linear.

2.2.2. Persamaan Diferensial Non Linear

Persamaan diferensial non linear adalah persamaan yang memuat perkalian antara variabel tak bebas dengan turunannya.

Contoh 2.3

$$\frac{d^4 y}{dt^4} + 4y \frac{d^3 y}{dt^3} - 5y \frac{d^2 y}{dt^2} + 10 \frac{dy}{dt} - 2y = 0$$

Contoh 2.3 merupakan bentuk dari persamaan diferensial non linear.

Sedangkan, persamaan diferensial parsial merupakan persamaan yang memuat lebih dari satu peubah bebas (Kartono, 2012). Bentuk persamaan diferensial parsial, yaitu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = g(v, t) \quad (2.3)$$

2.3. Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah gabungan dari dua atau lebih persamaan diferensial yang didalamnya terdapat dua atau lebih fungsi yang tidak diketahui (Boyce dan DiPrima, 2009). Bentuk dari sistem persamaan diferensial secara umum yaitu:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
 \frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
 &\vdots \\
 \frac{dy_n}{dt} &= f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n)
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

dengan y_1, y_2, \dots, y_n adalah variabel bergantung dan t adalah variabel bebas (Braun, 1993). Sistem persamaan diferensial dibagi menjadi dua kelompok, yaitu:

2.3.1. Sistem Persamaan Diferensial Linear

Sistem persamaan diferensial linear merupakan sistem linear dari fungsi f_1, f_2, \dots, f_n pada persamaan (2.4) dengan variabel bergantung y_1, y_2, \dots, y_n dan variabel bebas t (Braun, 1993). Bentuk persamaan dari sistem persamaan diferensial linear berorde satu adalah

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1(t) &= b_{11}(t)y_1(t) + b_{12}(t)y_2(t) + \cdots + b_{1n}(t)y_n(t) + f_1(t) \\
 \dot{y}_2(t) &= b_{21}(t)y_1(t) + b_{22}(t)y_2(t) + \cdots + b_{2n}(t)y_n(t) + f_2(t) \\
 &\quad \vdots \\
 \dot{y}_n(t) &= b_{n1}(t)y_1(t) + b_{n2}(t)y_2(t) + \cdots + b_{nm}(t)y_n(t) + f_n(t)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

dengan $\dot{y}(t)$ adalah turunan dari $y(t)$ terhadap t dan $b(t)$ adalah koefisien dari $y(t)$. Sistem persamaan (2.5) dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1n}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{nm}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Persamaan (2.6) dapat ditulis dalam bentuk

$$\dot{\mathbf{y}}(\mathbf{t}) = B(\mathbf{t})\mathbf{y}(\mathbf{t}) + \mathbf{f}(\mathbf{t}) \tag{2.7}$$

Misal $\mathbf{f}(\mathbf{t}) = 0$ maka persamaan (2.7) disebut homogen dan dapat ditulis dalam bentuk

$$\dot{\mathbf{y}}(\mathbf{t}) = B(\mathbf{t})\mathbf{y}(\mathbf{t}) \tag{2.8}$$

Contoh 2.4

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases} \quad (2.9)$$

Sistem persamaan (2.9) merupakan sistem persamaan linear yang homogen.

2.3.2. Sistem Persamaan Diferensial Non Linear

Sistem persamaan diferensial non linear merupakan fungsi tidak linear dari fungsi f_1, f_2, \dots, f_n pada persamaan (2.4) dengan variabel bergantung y_1, y_2, \dots, y_n dan variabel bebas t (Braun, 1993). Jika fungsi pada persamaan (2.4) tersebut tidak dinyatakan secara jelas, maka persamaan tersebut dinyatakan sebagai sistem otonomus. Secara matematis sistem otonomus yang memuat bentuk sistem persamaan diferensial non linear adalah

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= f_1(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dot{y}_2(t) &= f_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ \dot{y}_n(t) &= f_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Contoh 2.5

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 6xy \\ \frac{dy}{dt} = 7x^2 - 3y \end{cases} \quad (2.11)$$

Sistem persamaan (2.11) merupakan sistem persamaan diferensial non linear dengan variabel tak bebasnya adalah x dan y , kemudian variabel bebasnya adalah t . Dikatakan non linear karena pada persamaan pertama terdapat perkalian antar variabel tak bebas yaitu x dan y , kemudian pada persamaan kedua terdapat kuadrat dari variabel tak bebas x .

2.4. Pemodelan Matematika Pada Penyebaran Penyakit

Pemodelan matematika adalah sebuah model yang merepresentasikan dan mendeskripsikan masalah dari fenomena nyata ke bahasa matematika agar memudahkan dalam memahami masalah tersebut (Barnes dan Fulford, 2014). Secara umum, dalam memodelkan sebuah masalah diperlukan tahapan-tahapan agar dihasilkan sebuah model yang baik. Tahapan tersebut diantaranya:

1. Mengidentifikasi masalah dengan memahami suatu masalah yang dirumuskan dengan begitu masalah tersebut dapat diubah ke dalam bahasa matematika.

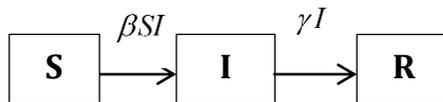
2. Membuat asumsi dengan menyederhanakan suatu masalah yang sulit agar dapat dipahami dan mudah untuk dicari penyelesaiannya.
3. Mengkonstruksikan model kedalam bentuk diagram atau persamaan matematika dengan bantuan *software* maupun secara analitik.
4. Mencari solusi dari suatu permasalahan dengan cara optimalisasi dan simulasi. Optimalisasi merujuk pada pertanyaan apa yang seharusnya terjadi, sedangkan simulasi merujuk pada pertanyaan apa yang terjadi kedepan.
5. Menginterpretasi model dengan tujuan agar diketahui kelogisan dari hasil yang diperoleh dengan grafik.
6. Validasi model dengan tujuan untuk mengetahui apakah model sesuai atau tidak. Jika sesuai, maka solusi dari model dapat diimplementasikan ke dunia nyata. Jika tidak, maka membuat asumsi kembali.

Salah satu masalah yang dapat dimodelkan ke dalam bentuk matematika adalah penyebaran penyakit menular. Model yang biasa digunakan pada penyebaran penyakit adalah model *SIR* dan *SEIR*. Selain itu, model lain yang dapat dikembangkan adalah model $SV_1V_2EII_vR$.

2.4.1. Model *SIR*

Model *SIR* (*Susceptible, Infected, Recovered*) merupakan model yang pertama kali ditemukan oleh W.O. Kermack dan Mc. Kendrick (Iswanto, 2012). Pada model tersebut, populasi dibagi menjadi tiga, diantaranya *Susceptible* (*S*) yaitu subpopulasi yang rentan, *Infected* (*I*) yaitu subpopulasi yang terinfeksi penyakit, dan *Recovered* (*R*) yaitu subpopulasi yang telah pulih dari penyakit.

Model tersebut diilustrasikan pada Gambar 2.1 (Murray, 2002).



Gambar 2.1. Diagram Kompartemen Model *SIR*

Variabel dan parameter yang digunakan pada Gambar 2.1 ditunjukkan pada Tabel 2.1 dan Tabel 2.2 sebagai berikut:

Tabel 2.1 Variabel Model *SIR*

Variabel	Definisi	Satuan
$S(t)$	Subpopulasi yang rentan	Individu
$I(t)$	Subpopulasi yang terinfeksi penyakit	Individu
$R(t)$	Subpopulasi yang telah pulih dari penyakit	Individu

Tabel 2.2 Parameter Model *SIR*

Parameter	Definisi	Satuan
β	Laju interaksi infeksiif antara individu rentan dengan terinfeksi	$\frac{1}{\text{hari}}$
γ	Laju pemulihan	$\frac{1}{\text{hari}}$

Berdasarkan Gambar 2.1, asumsi yang diberikan pada model ini diantaranya jumlah populasi konstan, penyakit tidak fatal, masa inkubasi singkat, semua subpopulasi memiliki proporsi yang sama untuk terinfeksi dengan subpopulasi yang terinfeksi penyakit dan subpopulasi yang pulih memiliki tingkat kekebalan tubuh yang baik sehingga tidak dapat menjadi subpopulasi rentan kembali. Sistem persamaan diferensial yang dapat dibentuk dari model ini adalah

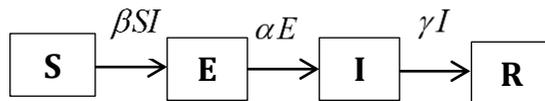
$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases} \quad (2.12)$$

Persamaan (2.12) mendeskripsikan bahwa subpopulasi rentan berkurang karena memperoleh infeksi melalui interaksi dengan individu yang terinfeksi dengan laju βSI . Hal tersebut mengakibatkan subpopulasi terkena infeksi meningkat dengan laju yang sama, selanjutnya subpopulasi terkena infeksi berkurang karena mengalami pemulihan dengan laju γI . Disisi lain, subpopulasi yang pulih dari penyakit bertambah dengan laju yang sama.

2.4.2. Model *SEIR*

Model *SEIR* (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered*) merupakan hasil penurunan dari model *SIR* (*Susceptible, Infected, Recovered*) dengan variabel tambahan, yaitu *Exposed* (*E*) atau subpopulasi yang terpapar penyakit.

Model ini diilustrasikan pada Gambar 2.2 (Iswanto, 2012).



Gambar 2.2. Diagram Kompartemen Model *SEIR*

Variabel dan parameter yang digunakan pada Gambar 2.2 ditunjukkan pada Tabel 2.3 dan Tabel 2.4 sebagai berikut:

Tabel 2.3 Variabel Model *SEIR*

Variabel	Definisi	Satuan
$S(t)$	Subpopulasi yang rentan	Individu
$E(t)$	Subpopulasi yang terpapar penyakit	Individu
$I(t)$	Subpopulasi yang terinfeksi penyakit	Individu
$R(t)$	Subpopulasi yang telah pulih dari penyakit	Individu

Tabel 2.4 Parameter Model *SEIR*

Parameter	Definisi	Satuan
β	Laju interaksi infeksi antara individu rentan dengan terinfeksi	$\frac{1}{\text{hari}}$
α	Laju munculnya gejala klinis	$\frac{1}{\text{hari}}$
γ	Laju pemulihan	$\frac{1}{\text{hari}}$

Berdasarkan Gambar 2.2, asumsi yang diberikan pada model ini diantaranya jumlah populasi konstan, penyakit tidak fatal, semua subpopulasi memiliki proporsi yang sama untuk terinfeksi dengan subpopulasi yang terinfeksi

penyakit dan subpopulasi yang pulih memiliki tingkat kekebalan tubuh yang baik sehingga tidak dapat menjadi subpopulasi rentan kembali. Sistem persamaan diferensial yang dapat dibentuk dari model ini adalah

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI - \alpha E \\ \frac{dI}{dt} = \alpha E - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases} \quad (2.13)$$

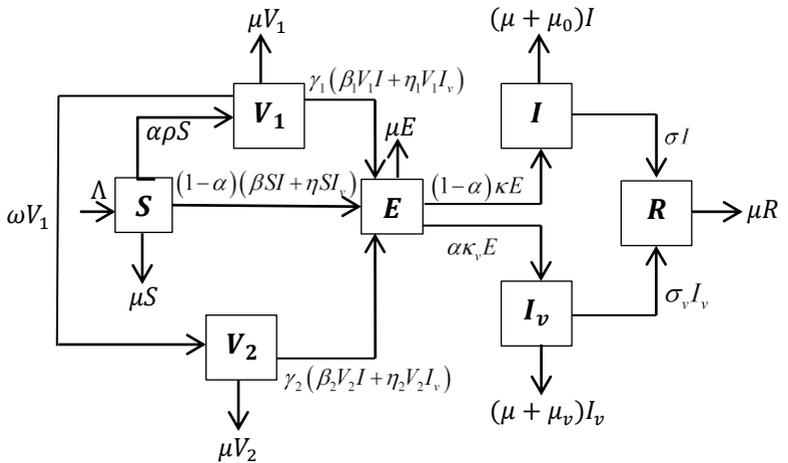
Persamaan (2.13) mendeskripsikan bahwa subpopulasi *Susceptible* (S) berubah menjadi subpopulasi *Exposed* (E) karena melakukan interaksi dengan individu yang terinfeksi sebesar βSI . Hal tersebut mengakibatkan subpopulasi *Susceptible* (S) berkurang dan subpopulasi *Exposed* (E) bertambah. Subpopulasi *Exposed* (E) berkurang dan berubah menjadi subpopulasi *Infected* (I) sebesar αE , selanjutnya subpopulasi *Infected* (I) berkurang karena mengalami pemulihan dan

berubah menjadi subpopulasi *Recovered* (R) dengan laju γI .

2.4.3. Model $SV_1V_2EII_vR$

Model matematika lain yang dapat dikembangkan adalah $SV_1V_2EII_vR$ (*Susceptible, Vaccinated 1, Vaccinated 2, Exposed, Infected 1, Infected 2, Recovered*). Model tersebut merupakan hasil penurunan dari model $SEIR$ (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered*) dengan variabel tambahan, yaitu *Vaccinated 1* (V_1) atau subpopulasi yang telah menerima vaksin dosis pertama, *Vaccinated 2* (V_2) atau subpopulasi yang telah menerima vaksin dosis kedua, serta membagi I (*Infected*) menjadi dua, yaitu subpopulasi yang terinfeksi penyakit dan belum divaksin (I) dan subpopulasi yang terinfeksi penyakit dan sudah divaksin (I_v).

Model ini diilustrasikan pada Gambar 2.3 (Fitriyah, 2022)



Gambar 2.3. Diagram Kompartemen Model

$$SV_1V_2EII_vR$$

Variabel dan parameter yang digunakan pada Gambar 2.3 ditunjukkan pada Tabel 2.5 dan Tabel 2.6 sebagai berikut:

Tabel 2.5 Variabel Model $SV_1V_2EII_vR$

Variabel	Definisi	Satuan
$S(t)$	Subpopulasi yang rentan	Individu
$V_1(t)$	Subpopulasi yang telah melakukan vaksin dosis pertama	Individu
$V_2(t)$	Subpopulasi yang telah melakukan vaksin dosis kedua	Individu
$E(t)$	Subpopulasi yang terpapar penyakit	Individu

$I(t)$	Subpopulasi yang terinfeksi penyakit	Individu
$I_v(t)$	Subpopulasi yang terinfeksi penyakit dan sudah melakukan vaksinasi	Individu
$R(t)$	Subpopulasi yang telah pulih dari penyakit	Individu

Tabel 2.6 Parameter Model $SV_1V_2EII_vR$

Parameter	Definisi	Satuan
Λ	Laju kelahiran	$\frac{1}{\text{hari}}$
β	Laju interaksi infeksi subpopulasi rentan dan subpopulasi yang terinfeksi dan belum melakukan vaksinasi	$\frac{1}{\text{hari}}$
β_1	Laju interaksi infeksi subpopulasi yang telah melakukan vaksin dosis pertama dan subpopulasi yang terinfeksi dan belum melakukan vaksinasi	$\frac{1}{\text{hari}}$
β_2	Laju interaksi infeksi subpopulasi yang telah melakukan	$\frac{1}{\text{hari}}$

	vaksin dosis kedua dan subpopulasi yang terinfeksi dan belum melakukan vaksinasi	
η	Laju interaksi infeksi subpopulasi rentan dan subpopulasi yang terinfeksi dan sudah melakukan vaksinasi	$\frac{1}{\text{hari}}$
η_1	Laju interaksi infeksi subpopulasi yang telah melakukan vaksin dosis pertama dan subpopulasi yang terinfeksi dan sudah melakukan vaksinasi	$\frac{1}{\text{hari}}$
η_2	Laju interaksi infeksi subpopulasi yang telah melakukan vaksin dosis kedua dan subpopulasi yang terinfeksi dan sudah melakukan vaksinasi	$\frac{1}{\text{hari}}$
ρ	Laju subpopulasi rentan melakukan	$\frac{1}{\text{hari}}$

	vaksinasi dosis pertama	
ω	Laju subpopulasi yang telah vaksinasi dosis pertama melakukan vaksinasi dosis kedua	$\frac{1}{\text{hari}}$
κ	Laju perkembangan virus menjadi subpopulasi yang terinfeksi dan belum melakukan vaksinasi	$\frac{1}{\text{hari}}$
κ_v	Laju perkembangan virus menjadi subpopulasi yang terinfeksi dan sudah melakukan vaksinasi	$\frac{1}{\text{hari}}$
σ	Laju pemulihan subpopulasi yang terinfeksi dan belum melakukan vaksinasi	$\frac{1}{\text{hari}}$
σ_v	Laju pemulihan subpopulasi yang terinfeksi dan sudah melakukan vaksinasi	$\frac{1}{\text{hari}}$
μ	Laju kematian alami	$\frac{1}{\text{hari}}$

μ_0	Laju kematian akibat penyakit pada subpopulasi yang terinfeksi dan belum melakukan vaksinasi	$\frac{1}{\text{hari}}$
μ_v	Laju kematian akibat penyakit pada subpopulasi yang terinfeksi dan sudah melakukan vaksinasi	$\frac{1}{\text{hari}}$
α	Proporsi subpopulasi rentan melakukan vaksinasi dosis pertama	—
γ_1	Persentase ketidakefektifan dari vaksinasi dosis pertama	Persen
γ_2	Persentase ketidakefektifan dari vaksinasi dosis kedua	Persen

Berdasarkan Gambar 2.3, asumsi yang diberikan pada model ini diantaranya penyakit yang berakibat fatal, laju kematian alami sama untuk setiap subpopulasi, subpopulasi yang pulih memiliki tingkat kekebalan tubuh yang baik sehingga tidak dapat menjadi subpopulasi rentan

kembali, periode inkubasi singkat, dan subpopulasi terinfeksi yang belum dan sudah melakukan vaksinasi memiliki laju pemulihan yang berbeda. Sistem persamaan diferensial yang dapat dibentuk dari model ini adalah

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{dS}{dt} = \Lambda - ((1-\alpha)(\beta I + \eta I_v) + \alpha\rho + \mu)S \\
 \frac{dV_1}{dt} = \alpha\rho S - (\gamma_1(\beta_1 I + \eta_1 I_v) + \omega + \mu)V_1 \\
 \frac{dV_2}{dt} = \omega V_1 - (\gamma_2(\beta_2 I + \eta_2 I_v) + \omega + \mu)V_2 \\
 \frac{dE}{dt} = (1-\alpha)(\beta I + \eta I_v)S + \gamma_1(\beta_1 I + \eta_1 I_v)V_1 \\
 \quad + \gamma_2(\beta_2 I + \eta_2 I_v)V_2 - ((1-\alpha)\kappa + \alpha\kappa_v + \mu)E \\
 \frac{dI}{dt} = (1-\alpha)\kappa E - (\sigma + \mu + \mu_0)I \\
 \frac{dI_v}{dt} = \alpha\kappa_v E - (\sigma_v + \mu + \mu_v)I_v \\
 \frac{dR}{dt} = \sigma I + \sigma_v I_v - \mu R
 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Persamaan (2.14) mendeskripsikan bahwa subpopulasi *Susceptible* bertambah karena adanya laju kelahiran (Λ) yang masuk kedalamnya, lalu subpopulasi tersebut menjadi subpopulasi *Exposed* (E) disebabkan karena subpopulasi rentan yang

belum vaksinasi berinteraksi dengan subpopulasi terinfeksi yang belum dan sudah melakukan vaksinasi diasumsikan sebagai $(1 - \alpha)(\beta SI + \eta SI_v)$. Hal tersebut mengakibatkan subpopulasi *Exposed* (E) bertambah dan subpopulasi *Susceptible* (S) berkurang. Disisi lain subpopulasi *Susceptible* (S) menjadi subpopulasi *Vaccinated 1* (V_1) disebabkan subpopulasi rentan melakukan vaksinasi dosis pertama, sehingga mengakibatkan subpopulasi *Vaccinated 1* (V_1) bertambah dan subpopulasi *Susceptible* (S) berkurang, selanjutnya subpopulasi *Susceptible* berkurang karena adanya laju kematian alami (μ).

Subpopulasi *Exposed* (E) berkurang karena terjadi kematian alami (μ) dan perkembangan virus pada subpopulasi terinfeksi yang belum vaksinasi sebesar $(1 - \alpha)\kappa$ dan pada subpopulasi terinfeksi yang sudah vaksinasi sebesar $\alpha\kappa_v$, sehingga subpopulasi tersebut berubah menjadi subpopulasi *Infected 1* (I) dan *Infected 2* (I_v).

Subpopulasi *Infected 1* (I) berkurang karena terjadi kematian alami (μ) dan kematian akibat penyakit (μ_0), lalu subpopulasi yang terinfeksi dan belum melakukan vaksinasi juga berkurang

disebabkan subpopulasi tersebut pulih dari penyakit, sehingga menjadi subpopulasi *Recovered* (R) sebesar σI .

Subpopulasi *Infected 2* (I_v) berkurang karena terjadi kematian alami (μ) dan kematian akibat penyakit (μ_v), lalu subpopulasi yang terinfeksi dan sudah melakukan vaksinasi juga berkurang disebabkan subpopulasi tersebut pulih dari penyakit, sehingga menjadi subpopulasi *Recovered* (R) sebesar $\sigma_v I$, kemudian subpopulasi *Recovered* (R) berkurang karena terjadi kematian alami (μ).

Subpopulasi *Vaccinated 1* (V_1) berkurang akibat terjadi kematian alami (μ). Selain itu, subpopulasi *Vaccinated 1* (V_1) juga berkurang karena ketidakefektifan dari vaksinasi dosis pertama dan terjadi interaksi antara subpopulasi yang sudah vaksinasi dosis pertama dengan subpopulasi terinfeksi yang belum dan sudah vaksinasi sebesar $\gamma_1(\beta_1 V_1 I + \eta_1 V_1 I_v)$, sehingga mengakibatkan subpopulasi *Exposed* (E) bertambah, lalu subpopulasi tersebut berkurang dan menjadi subpopulasi *Vaccinated 2* (V_2) karena melakukan vaksinasi dosis kedua sebesar ωV_1 .

Subpopulasi *Vaccinated 2* (V_2) berkurang karena terjadi *kematian* alami (μ). Selain itu, subpopulasi *Vaccinated 2* (V_2) juga berkurang karena ketidakefektifan dari vaksinasi dosis kedua dan terjadi interaksi antara subpopulasi yang sudah vaksinasi dosis kedua dengan subpopulasi terinfeksi yang belum dan sudah vaksinasi sebesar $\gamma_2(\beta_2 V_2 I + \eta_2 V_2 I_v)$, sehingga mengakibatkan subpopulasi *Exposed* (E) bertambah.

2.5. Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan adalah titik yang menggambarkan suatu keadaan tidak mengalami perubahan atau tetap, sejalan dengan waktu yang bertambah. Diberikan sistem otonomus, yaitu sistem yang tidak menyatakan variabel bebas t secara jelas. Sistem tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad (2.15)$$

Sebuah titik $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan dari sistem persamaan (2.15) jika $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}$ (Wiggins, 2003).

Contoh 2.6 Tentukan titik kesetimbangan dari sistem persamaan diferensial non linear berikut

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2xy \\ \dot{y} = 2y - 2y^2 - 3xy \end{cases} \quad (2.16)$$

Misalkan $f_1 = x - x^2 - 2xy$ dan $f_2 = 2y - 2y^2 - 3xy$. Akan ditentukan titik kesetimbangan pada sistem persamaan (2.16) dengan metode substitusi. Untuk $f_1 = 0$ diperoleh

$$\begin{aligned}x - 2xy &= 0 \\x(1 - 2y) &= 0 \\x = 0 \text{ atau } y &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Substitusikan $x = 0$ dan $y = \frac{1}{2}$ ke dalam persamaan $f_2 = 0$.

Jika $x = 0$, maka

$$\begin{aligned}2y - 2y^2 - 3(0)y &= 0 \\2y - 2y^2 &= 0 \\2y(1 - y) &= 0 \\y = 0 \text{ atau } y &= 1\end{aligned}$$

Jika $y = \frac{1}{2}$, maka

$$\begin{aligned}2\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3x\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \\1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x &= 0 \\\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x &= 0 \\x &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Jadi, titik kesetimbangan dari sistem persamaan (2.16) adalah $(0,0); (0,1), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

2.6. Linearisasi

Linearisasi merupakan proses transformasi dari sistem persamaan diferensial non linear menjadi sistem persamaan diferensial linear agar memperoleh penyelesaian sederhana dari sistem persamaan diferensial non linear tersebut. Proses linearisasi tersebut diselesaikan dengan menggunakan matriks Jacobian agar diperoleh penyelesaian yang lebih sederhana dari sistem persamaan diferensial non linear tersebut. Penyelesaian yang diperoleh tersebut merupakan representasi dari perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan. Berikut proses linearisasi dengan menggunakan matriks Jacobian.

Diberikan fungsi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada sistem persamaan non linear

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad (2.17)$$

dengan $f_i \in C(E)$ dan $E \subseteq \mathbb{R}^n$ dan $i = 1, 2, \dots, n$. Proses linearisasi dapat dilakukan dengan ekspansi deret Taylor di sekitar titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$, yaitu (Perko, 2001)

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= f_1(\bar{y}) + \frac{\partial f_1(\bar{y})}{\partial y_1}(y_1 - \bar{y}_1) + \dots + \frac{\partial f_1(\bar{y})}{\partial y_n}(y_n - \bar{y}_n) + \\
&\quad \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f_1(\bar{y})}{\partial y_1^2}(y_1 - \bar{y}_1)^2 + \dots + \frac{\partial^2 f_1(\bar{y})}{\partial y_n^2}(y_n - \bar{y}_n)^2 \right] + \dots + \\
&\quad \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k f_1(\bar{y})}{\partial y_1^k}(y_1 - \bar{y}_1)^k + \dots + \frac{\partial^k f_1(\bar{y})}{\partial y_n^k}(y_n - \bar{y}_n)^k \right] \\
\frac{dy_2}{dt} &= f_2(\bar{y}) + \frac{\partial f_2(\bar{y})}{\partial y_1}(y_1 - \bar{y}_1) + \dots + \frac{\partial f_2(\bar{y})}{\partial y_n}(y_n - \bar{y}_n) + \\
&\quad \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f_2(\bar{y})}{\partial y_1^2}(y_1 - \bar{y}_1)^2 + \dots + \frac{\partial^2 f_2(\bar{y})}{\partial y_n^2}(y_n - \bar{y}_n)^2 \right] + \dots + \\
&\quad \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k f_2(\bar{y})}{\partial y_1^k}(y_1 - \bar{y}_1)^k + \dots + \frac{\partial^k f_2(\bar{y})}{\partial y_n^k}(y_n - \bar{y}_n)^k \right] \\
&\quad \vdots \\
\frac{dy_n}{dt} &= f_n(\bar{y}) + \frac{\partial f_n(\bar{y})}{\partial y_1}(y_1 - \bar{y}_1) + \dots + \frac{\partial f_n(\bar{y})}{\partial y_n}(y_n - \bar{y}_n) + \\
&\quad \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f_n(\bar{y})}{\partial y_1^2}(y_1 - \bar{y}_1)^2 + \dots + \frac{\partial^2 f_n(\bar{y})}{\partial y_n^2}(y_n - \bar{y}_n)^2 \right] + \dots + \\
&\quad \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k f_n(\bar{y})}{\partial y_1^k}(y_1 - \bar{y}_1)^k + \dots + \frac{\partial^k f_n(\bar{y})}{\partial y_n^k}(y_n - \bar{y}_n)^k \right]
\end{aligned}$$

Proses linearisasi persamaan (2.17) di sekitar titik kesetimbangan $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$ dilakukan dengan mengabaikan suku yang pangkatnya lebih dari satu pada ekspansi deret Taylor sebelumnya, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= f_1(\bar{y}) + \frac{\partial f_1(\bar{y})}{\partial y_1}(y_1 - \bar{y}_1) + \cdots + \frac{\partial f_1(\bar{y})}{\partial y_n}(y_n - \bar{y}_n) \\
\frac{dy_2}{dt} &= f_2(\bar{y}) + \frac{\partial f_2(\bar{y})}{\partial y_1}(y_1 - \bar{y}_1) + \cdots + \frac{\partial f_2(\bar{y})}{\partial y_n}(y_n - \bar{y}_n) \\
&\vdots \\
\frac{dy_n}{dt} &= f_n(\bar{y}) + \frac{\partial f_n(\bar{y})}{\partial y_1}(y_1 - \bar{y}_1) + \cdots + \frac{\partial f_n(\bar{y})}{\partial y_n}(y_n - \bar{y}_n)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Misalkan

$$v_1 = y_1 - \bar{y}_1, v_2 = y_2 - \bar{y}_2, \dots, v_n = y_n - \bar{y}_n, \tag{2.19}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{dy_1}{dt}, \frac{dv_2}{dt} = \frac{dy_2}{dt}, \dots, \frac{dv_n}{dt} = \frac{dy_n}{dt} \tag{2.20}$$

Substitusikan persamaan (2.19) dan (2.20) ke sistem persamaan (2.18), sehingga bentuknya menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{dv_1}{dt} &= f_1(\bar{y}) + \frac{\partial f_1(\bar{y})}{\partial y_1}v_1 + \cdots + \frac{\partial f_1(\bar{y})}{\partial y_n}v_n \\
\frac{dv_2}{dt} &= f_2(\bar{y}) + \frac{\partial f_2(\bar{y})}{\partial y_1}v_1 + \cdots + \frac{\partial f_2(\bar{y})}{\partial y_n}v_n \\
&\vdots \\
\frac{dv_n}{dt} &= f_n(\bar{y}) + \frac{\partial f_n(\bar{y})}{\partial y_1}v_1 + \cdots + \frac{\partial f_n(\bar{y})}{\partial y_n}v_n
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Berdasarkan sistem persamaan (2.17), titik kesetimbangannya adalah $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$, maka $f_1(\bar{y}) = f_2(\bar{y}) = \dots = f_n(\bar{y}) = 0$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{\partial f_1(\bar{y})}{\partial y_1} v_1 + \dots + \frac{\partial f_1(\bar{y})}{\partial y_n} v_n \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{\partial f_2(\bar{y})}{\partial y_1} v_1 + \dots + \frac{\partial f_2(\bar{y})}{\partial y_n} v_n \\ &\vdots \\ \frac{dv_n}{dt} &= \frac{\partial f_n(\bar{y})}{\partial y_1} v_1 + \dots + \frac{\partial f_n(\bar{y})}{\partial y_n} v_n \end{aligned} \quad (2.22)$$

atau

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = Jf(\bar{y})\mathbf{v}, \quad (2.23)$$

dengan matriks

$$Jf(\bar{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\bar{y}) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(\bar{y}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(\bar{y}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(\bar{y}) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(\bar{y}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}(\bar{y}) \\ \frac{\partial f_3}{\partial y_1}(\bar{y}) & \frac{\partial f_3}{\partial y_2}(\bar{y}) & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial y_n}(\bar{y}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(\bar{y}) & \frac{\partial f_n}{\partial y_2}(\bar{y}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(\bar{y}) \end{bmatrix}$$

merupakan matriks Jacobian di sekitar titik kesetimbangan $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$ (Layek, 2015). Sehingga diperoleh bahwa sistem persamaan (2.22) merupakan hasil linearisasi dari persamaan non linear (2.17) di sekitar titik kesetimbangan $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$.

2.7. Nilai Eigen

Definisi 2.1 (Nilai Eigen)

Diberikan matriks B dengan dimensi $n \times n$ dan vektor tak nol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dikatakan vektor eigen dari B jika $B\mathbf{x}$ merupakan kelipatan skalar dari \mathbf{x} , maka dapat dinyatakan sebagai berikut

$$B\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (2.24)$$

Yang mana skalar λ merupakan nilai eigen dari B dan \mathbf{x} merupakan vektor eigen dari B .

Untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks $B_{n \times n}$, maka persamaan (2.24) dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$B\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$$

Atau

$$(\lambda I - B)\mathbf{x} = 0 \quad (2.25)$$

dengan I merupakan matriks identitas. Agar didapatkan nilai eigen dari B , maka persamaan (2.25) mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - B) = 0 \quad (2.26)$$

Persamaan (2.26) disebut persamaan karakteristik dari matriks B (Howard, 2004).

2.8. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar merupakan suatu permulaan terjadinya wabah penyakit dengan tujuan untuk mengukur infeksi sekunder yang terjadi karena infeksi primer pada populasi rentan (Diekmann dan Heesterbeek, 2000). Notasi dari bilangan reproduksi adalah R_0 . Apabila $R_0 < 1$, maka rata-rata individu yang terinfeksi berkurang sehingga tidak dapat bertambah, sedangkan apabila $R_0 > 1$, maka rata-rata individu yang terinfeksi bertambah sehingga penyakit menyebar pada suatu area tertentu. Bilangan reproduksi dasar dapat ditentukan dengan cara menemukan nilai eigen terbesar dari *next generation matrix* (Ma dan Li, 2009). *Next generation matrix* adalah model kompartemen dari persamaan diferensial biasa yang ditentukan oleh suatu matriks yang berkorelasi dengan total individu yang baru terkena infeksi dalam kategori generasi yang berurutan (Martcheva, 2015).

Diberikan $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)^T \in \mathbb{R}^m$ dengan m merupakan kompartemen penyakit dan $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ dengan n merupakan kompartemen tidak berpenyakit. Didefinisikan matriks dari

tingkat munculnya infeksi baru dari kompartemen penyakit dinyatakan dengan F_k dan matriks dari tingkat kelahiran, kematian, perkembangan penyakit, dan pemulihan dinyatakan dengan V_k (Martcheva, 2015). Model yang terbentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - V_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}), k = 1, 2, \dots, n \\ \dot{\mathbf{y}} &= h_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}), j = 1, 2, \dots, n\end{aligned}\quad (2.27)$$

Asumsikan $\dot{\mathbf{y}} = h_j(0, \mathbf{y})$ memiliki titik kesetimbangan bebas penyakit dinyatakan dengan $(0, y_0)$, maka diperoleh

$$\mathbb{F} = \frac{\partial F_k(0, y_0)}{\partial x_j} \quad \text{dan} \quad \mathbb{V} = \frac{\partial V_k(0, y_0)}{\partial x_j} \quad (2.28)$$

Sehingga *next generation matrix* dapat didefinisikan sebagai berikut

$$K = \mathbb{F}\mathbb{V}^{-1} \quad (2.29)$$

Bilangan reproduksi dasar dari matriks K merupakan nilai R_0 terhadap populasi rentan dan dapat dituliskan sebagai berikut

$$R_0 = \rho(K) \quad (2.30)$$

Dengan $\rho(K)$ merupakan radius spektral (nilai eigen terbesar) dari matriks K .

Bilangan ini menimbulkan beberapa kondisi diantaranya (Ma dan Li, 2009).

1. Apabila $R_0 < 1$, maka penyakit menghilang
2. Apabila $R_0 > 1$, maka wabah penyakit meningkat
3. Apabila $R_0 = 1$, maka penyakit menetap

2.9. Aturan Tanda Descartes

Aturan Tanda Descartes digunakan untuk menentukan jumlah akar riil positif atau negatif dari suatu polinomial dengan koefisien riil. Aturan tersebut bergantung pada jumlah perubahan tanda dalam urutan koefisien polinomial (Wang, 2004), seperti yang dijelaskan dalam teorema berikut ini.

Teorema 2.1 (Aturan Tanda Descartes)

Misalkan $g(x) = b_0x^{c_0} + b_1x^{c_1} + \dots + b_nx^{c_n}$ menunjukkan polinomial dengan koefisien riil tak nol b_i , dan c_i adalah bilangan bulat yang memenuhi $0 \leq c_0 < c_1 < \dots < c_n$. Maka jumlah akar real positif dari $g(x)$ sama dengan atau kurang dari jumlah variasi tanda dalam barisan b_0, b_1, \dots, b_n dan jumlah akar real negatif dari $g(x)$ sama dengan atau kurang dari jumlah variasi tanda dalam koefisien $g(-x)$.

Contoh 2.7

Diberikan persamaan polinomial berderajat 4 berikut

$$g(x) = 4x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 5x + 2 \quad (2.31)$$

Dari persamaan (2.31) diperoleh dua akar real positif yaitu $x_1 = 1$ dan $x_2 = 2$, sedangkan akar real negatif yaitu $x_{3,4} = -\frac{1}{2}$. Berdasarkan teorema (2.1), dalam persamaan (2.30) memungkinkan banyaknya akar real positif adalah 0 atau 2. Hal tersebut disebabkan persamaan $g(x)$ pada persamaan (2.31) mengalami perubahan tanda sebanyak dua kali. Sedangkan, banyaknya akar real negatif adalah 0 atau 2. Hal tersebut disebabkan persamaan $g(-x)$ pada persamaan (2.31) mengalami perubahan tanda sebanyak dua kali. Oleh karena itu, diperoleh dua keadaan yang memungkinkan, yaitu

- Situasi 1 : 2 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 0 akar kompleks.
- Situasi 2 : 0 akar real positif, 2 akar real negatif, dan 0 akar kompleks.
- Situasi 3 : 2 akar real positif, 2 akar real negatif, dan 0 akar kompleks.

2.10. Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta adalah metode yang diperoleh dari pendekatan deret Taylor yang mampu menghasilkan nilai yang lebih akurat tanpa memerlukan perhitungan turunan fungsi (Chapra dan Canale, 2010). Bentuk umum dari metode Runge-Kutta yaitu:

$$x_{i+1} = x_i + b_1 m_1 + b_2 m_2 + \dots + b_n m_n \quad (2.32)$$

dengan b merupakan konstanta dan

$$m_1 = hf(t_i, x_i)$$

$$m_2 = hf(t_i + r_1h, x_i + s_{11}m_1)$$

$$m_3 = hf(t_i + r_2h, x_i + s_{21}m_1 + s_{22}m_2)$$

⋮

$$m_n = hf(t_i + r_{n-1}h, x_i + s_{n-1,1}m_1 + s_{n-1,2}m_2 + \dots + s_{n-1,n-1}m_{n-1})$$

dengan

h merupakan panjangnya langkah

$f(t_i, x_i)$ merupakan persamaan diferensial orde pertama x terhadap t

r dan s merupakan konstanta

Nilai m merupakan hubungan perulangan. Karena setiap nilai k digunakan untuk menghitung fungsi, maka dengan adanya hubungan perulangan ini membuat metode Runge-Kutta menjadi lebih efisien dalam perhitungan komputer.

Salah satu metode Runge-Kutta yang banyak digunakan adalah metode Runge-Kutta orde empat. Metode tersebut sering digunakan karena memiliki tingkat ketelitian yang tinggi daripada metode Runge-Kutta orde sebelumnya. Bentuk umum dari metode Runge-Kutta orde empat adalah sebagai berikut:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)h \quad (2.33)$$

dengan

$$m_1 = f(t_i, x_i)$$

$$m_2 = f\left(t_1 + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}m_1h\right)$$

$$m_3 = f\left(t_1 + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}m_2h\right)$$

$$m_4 = f(t_i + h, x_i + m_3h)$$

2.11. Kajian Pustaka

Dalam penelitian ini, peneliti terlebih dahulu meninjau karya ilmiah sebelumnya terkait dengan pembahasan yang diteliti. Berikut beberapa karya ilmiah sebelumnya yang menjadi acuan dalam penelitian ini, antara lain:

Tabel 2.7 Perbedaan dan Persamaan Penelitian dengan Penelitian Sebelumnya

No.	Penelitian Sebelumnya	Persamaan	Perbedaan
1.	<i>"Mathematical Model for Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) Containing Isolation Class"</i> oleh Anwar Zeb dkk (2020)	Menganalisis model matematika mengenai penyakit COVID-19.	Anwar Zeb dkk mengembangkan model <i>SEIQR</i> dengan kompartemen <i>Q</i> merupakan subpopulasi yang melakukan isolasi. Sedangkan pada penelitian ini, kompartemen tersebut diabaikan.
2.	<i>"Optimal Prevention and Treatment Control on"</i>	Menganalisis model matematika mengenai penyakit COVID-19.	Model matematika penyakit COVID-19 oleh Jonner Nainggolan

	<p><i>SVEIR Type Model Spread of COVID-19</i>" oleh Jonner Nainggolan (2021)</p>		<p>dikembangkan dengan menggunakan model <i>SVEIR</i> dan menambahkan variabel kontrol berupa vaksinasi, pengendalian preventif, dan upaya penyembuhan. Sedangkan pada penelitian ini, kompartemen V dibagi menjadi tiga yang mewakili subpopulasi yang telah menerima dosis satu, dua, dan tiga. Selain itu, dalam penelitian ini tidak memperhatikan variabel kontrol.</p>
3.	<p>"Model Matematika Penularan Penyakit COVID-19 dengan Penerapan Vaksinasi Dua Dosis: Studi Kasus di Sidoarjo, Indonesia" oleh Moch. Faisal Alam dan Abadi (2021)</p>	<p>Menganalisis model matematika mengenai penyakit COVID-19.</p>	<p>Moch. Faisal Alam dan Abadi mengembangkan model SV_1V_2IR dengan V_1 dan V_2 adalah subpopulasi yang telah menerima vaksin dosis satu dan dua. Sedangkan dalam penelitian, V dibagi menjadi tiga, yaitu V_1, V_2, dan V_3 yang mewakili</p>

			subpopulasi yang telah memperoleh vaksin dosis satu, dua, dan tiga, serta adanya penambahan kompartemen E (<i>Exposed</i>) yaitu subpopulasi yang terpapar penyakit, tetapi tidak terlihat gejalanya.
4.	<i>"Mathematical Modeling and Stability Analysis of the Time-delayed SAIM Model for COVID-19 Vaccination and Media Coverage"</i> oleh Liu, Lv dan Ding (2022)	Menganalisis model matematika mengenai penyakit COVID-19.	Pada artikel Liu, Lv dan Ding, model yang dikembangkan adalah <i>SAIM</i> dengan kompartemen A merupakan subpopulasi yang memiliki antibodi dan M merupakan subpopulasi yang tidak berkeinginan untuk vaksin, tetapi setelah dipengaruhi oleh media, subpopulasi tersebut berkeinginan untuk divaksin. Selain itu, dalam artikel ini juga ditambahkan waktu tunda. Sedangkan, pada penelitian ini kedua kompartemen tersebut diabaikan

			dan tidak menambahkan waktu tunda.
5.	<i>"Mathematical COVID-19 model with vaccination: a case study in Saudi Arabia"</i> oleh Abeer Algarni dkk (2022)	Menganalisis model matematika mengenai penyakit COVID-19.	Abeer D. Algarni dkk mengembangkan model dalam bentuk <i>SVIAR</i> dengan V (<i>Vaccinated</i>) merupakan subpopulasi yang telah memperoleh vaksin dan A (<i>Asymptotic</i>) merupakan subpopulasi yang terkena penyakit namun tidak bergejala. Sedangkan pada penelitian ini, kompartemen A diabaikan dan kompartemen V dibagi menjadi tiga yaitu V_1, V_2 , dan V_3 yang mewakili subpopulasi yang telah memperoleh vaksin 1,2 maupun 3.
6.	<i>"Analysis of Stability Covid19 Spread Mathematical Model Type SVV_2EIR Regarding Both</i>	Menganalisis model matematika mengenai penyakit COVID-19.	Model yang dikembangkan oleh Asmaidi dan Qonita Qurrota A'yun adalah model SVV_2EIR dengan memperhatikan

	<p><i>Vaccinated and Not Vaccinated Human Population</i>" oleh Asmaidi dan Qonita Qurrota A'yun, (2022)</p>		<p>subpopulasi yang telah menerima vaksin (V_1) dan subpopulasi tidak vaksin (V_2). Sedangkan pada penelitian ini, subpopulasi yang diperhatikan adalah subpopulasi yang telah menerima vaksin dosis pertama, kedua, dan ketiga.</p>
7.	<p>"Rumus Bilangan Reproduksi Dasar Covid-19 dengan Adanya Vaksinasi Dosis 1 dan 2" oleh Aini Fitriyah (2022)</p>	<p>Menganalisis model matematika mengenai penyakit COVID-19.</p>	<p>Aini Fitriyah mengembangkan model matematika yaitu model $SV_1V_2EII_vR$ (<i>Susceptible, Vaccinated</i> untuk dosis satu, <i>Vaccinated</i> untuk dosis dua, <i>Exposed, Infected</i> untuk individu yang telah vaksin dosis satu dan dua, <i>Infected</i> untuk individu yang belum vaksin dosis satu dan dua, <i>Recovered</i>). Sedangkan pada penelitian ini, model yang terbentuk adalah $SV_1V_2V_3EIR$ (<i>Susceptible,</i></p>

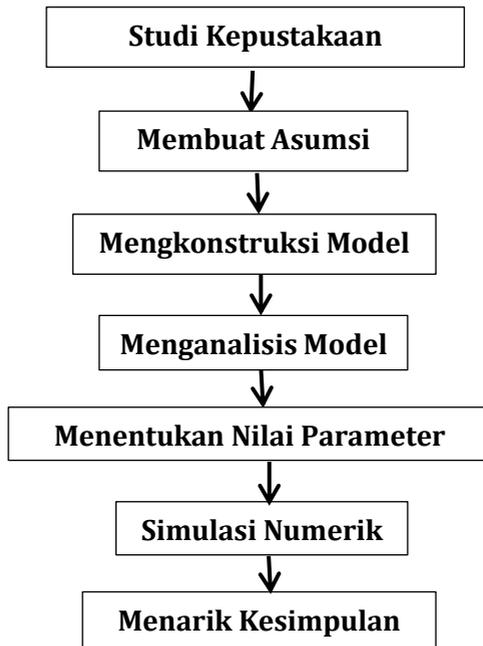
			<i>Vaccinated 1</i> untuk dosis pertama, <i>Vaccinated 2</i> untuk dosis kedua, <i>Vaccinated 3</i> untuk dosis ketiga, <i>Exposed, Infected, Recovered</i>).
8.	<i>“Basic Reproduction Number of a Mathematical Model of Corona Virus Disease 2019 (Covid-19)”</i> oleh Goni Umar Modu dan Maiduguri (2021)	Menganalisis model matematika mengenai penyakit COVID-19.	Goni Umar Modu dan Maiduguri mengembangkan model matematika yaitu model <i>SEIQR</i> (<i>Susceptible, Exposed, Infected, Quarantined, Recovered</i>). Sedangkan pada penelitian ini, kompartemen <i>Q</i> (<i>Quarantined</i>) diabaikan dan diganti dengan kompartemen V_1, V_2, V_3 (individu yang telah menerima vaksin dosis pertama, kedua, dan ketiga).
9.	<i>“Mathematics Model of COVID-19 with Two-Stage Vaccination, Symptomatic, Asymptomatic, and Quarantine Individuals”</i> oleh Nur Inayah,	Menganalisis model matematika mengenai penyakit COVID-19.	Nur Inayah, Muhamad Manaqib, dan Muhammad Febry Fadillah mengembangkan model berupa delapan subpopulasi yaitu $SV_PV_FEI_SIAQR$. Dalam penelitian

	Muhamad Manaqib, dan Muhammad Febry Fadillah (2022)		tersebut membagi kompartemen V menjadi dua yaitu subpopulasi terveksinasi dosis pertama (V_P) dan subpopulasi terveksinasi dosis kedua (V_F). Selain itu, kompartemen I juga dibagi menjadi dua, yaitu I_S (subpopulasi terinfeksi dan bergejala) dan I_A (subpopulasi terinfeksi dan tidak bergejala) serta terdapat kompartemen tambahan lainnya yaitu Q (subpopulasi yang dikarantina). Sedangkan, pada penelitian ini membagi V kedalam tiga subpopulasi yaitu V_1 (subpopulasi terveksinasi dosis pertama), V_2 (subpopulasi terveksinasi dosis kedua), dan V_3 (subpopulasi terveksinasi dosis ketiga).
10.	<i>“Mathematical modelling of</i>	Menganalisis model matematika	Sileshi Sintayehu Sharbayta, Henok

	<p><i>COVID-19 transmission dynamics with vaccination: A case study in Ethiopia</i>" oleh Sileshi Sintayehu Sharbayta, Henok Desalegn, dan Tadesse Abdi (2022)</p>	<p>mengenai penyakit COVID-19.</p>	<p>Desalegn, dan Tadesse Abdi mengembangkan model berupa delapan subpopulasi yaitu $SV_1V_2EI_sI_aQHR$ dengan membagi kompartemen V menjadi dua yaitu subpopulasi terveksinasi dosis pertama (V_1) dan subpopulasi terveksinasi dosis kedua (V_2). Selain itu, terdapat kompartemen tambahan yaitu Q (subpopulasi yang dikarantina) dan H (subpopulasi yang dirawat di rumah sakit). Sedangkan, pada penelitian ini V dibagi menjadi tiga subpopulasi yaitu V_1 (subpopulasi terveksinasi dosis pertama), V_2 (subpopulasi terveksinasi dosis kedua), dan V_3 (subpopulasi terveksinasi dosis ketiga), serta mengabaikan kompartemen Q dan H.</p>
--	--	------------------------------------	---

BAB III METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini, metode yang digunakan adalah studi literatur. Metode tersebut dilakukan dengan mengumpulkan referensi berupa informasi yang ada di jurnal ilmiah, buku maupun referensi lainnya sesuai dengan kebutuhan dalam penelitian. Adapun langkah-langkah dalam menyelesaikan model $SV_1V_2V_3EIR$ pada penyakit Covid-19 yang telah disajikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1. Diagram Alur Penelitian

Alur pada Gambar 3.1 dapat dijelaskan secara terperinci dalam tahapan sebagai berikut:

1. Menelusuri kepustakaan dengan mencari referensi yang mendukung penelitian. Referensi yang digunakan berupa buku, jurnal, maupun artikel terkait model matematika penyebaran Covid-19.
2. Membuat asumsi sesuai dengan kondisi nyata yang ada dengan tujuan untuk memperoleh model yang lebih sederhana.
3. Mengkonstruksikan model matematika penyebaran Covid-19 dengan adanya vaksinasi dosis pertama, kedua, dan ketiga.
4. Menganalisis sistem dinamik dari model dengan menentukan titik kesetimbangan. Titik tersebut dapat diperoleh dengan cara menjadikan ruas kanan nol pada sistem persamaan diferensial yang terbentuk. Titik kesetimbangan tersebut terdiri dari dua titik, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik. Dari titik kesetimbangan bebas penyakit dapat diperoleh bilangan reproduksi dasar (R_0). Berikut langkah-langkah dalam menganalisisnya:
 - (a) Menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit yang terjadi ketika subpopulasi terinfeksi sama dengan nol atau $i = 0$.

(b) Menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) dari titik kesetimbangan pada penyebaran Covid-19 dengan adanya vaksinasi dosis pertama, kedua, dan ketiga. Langkah penentuan bilangan reproduksi dasar (R_0) diantaranya:

- Mengambil persamaan dari subpopulasi kelas terinfeksi dari model matematika yang telah terbentuk.
- Merepresentasikan subpopulasi kelas terinfeksi kedalam bentuk matriks.
- Matriks yang diperoleh didekomposisikan menjadi matriks transmisi (F) dan matriks transisi (V). Matriks transisi merupakan matriks yang entri-entrinya mengilustrasikan peralihan populasi yang terinfeksi, sedangkan matriks transmisi merupakan matriks yang entri-entrinya mengilustrasikan adanya infeksi baru.
- Melakukan linearisasi terhadap matriks transmisi (F) dan matriks transisi (V) kedalam bentuk matriks \mathbb{F} dan \mathbb{V} dengan menggunakan matriks Jacobian.
- Mencari hasil dari $K = \mathbb{F}\mathbb{V}^{-1}$ dengan K merupakan *next generation matrix*.

- Menghitung bilangan reproduksi dasar dengan rumus $R_0 = \rho(\mathbb{F}\mathbb{V}^{-1})$, dengan R_0 merupakan nilai eigen terbesar dari matriks $\mathbb{F}\mathbb{V}^{-1}$.
- (c) Menentukan titik kesetimbangan endemik yang terjadi ketika subpopulasi terinfeksi tidak sama dengan nol atau lebih dari nol ($i \neq 0$ atau $i > 0$).
5. Menentukan nilai parameter untuk disubstitusikan kedalam persamaan R_0 dan simulasi numerik. Nilai parameter didapatkan dari data penyebaran Covid-19 di Kota Semarang dan jurnal yang berkaitan dengan penelitian ini, tetapi terdapat beberapa nilai parameter yang sulit dicari sehingga dapat diasumsikan oleh penulis.
 6. Mensimulasikan model secara numerik menggunakan *software* MATLAB R2017a.
 7. Menarik kesimpulan dari hasil yang telah diperoleh dengan menjelaskan dalam bahasa yang mudah dipahami.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Model Matematika Penyebaran Covid-19 dengan Adanya Vaksinasi Dosis Pertama, Kedua, dan Ketiga

Dalam penelitian ini, model matematika penyebaran Covid-19 yang dikembangkan adalah model $SV_1V_2V_3EIR$. Model tersebut diklasifikasikan menjadi tujuh kompartemen diantaranya S (*Susceptible*) yaitu subpopulasi yang rentan terhadap Covid-19, V_1 (*Vaccinated 1*) yaitu subpopulasi yang telah menerima vaksin dosis pertama, V_2 (*Vaccinated 2*) yaitu subpopulasi yang telah menerima vaksin dosis kedua, V_3 (*Vaccinated 3*) yaitu subpopulasi yang telah menerima vaksin dosis ketiga, E (*Exposed*) yaitu subpopulasi yang terpapar Covid-19, I (*Infected*) yaitu subpopulasi yang terinfeksi Covid-19, dan R (*Recovered*) yaitu subpopulasi yang pulih dari Covid-19.

Tahapan dalam memodelkan diantaranya menentukan asumsi model, variabel dan parameter. Setelah itu, dilakukan pembentukan model penyebaran Covid-19 dengan adanya vaksinasi dosis pertama, kedua, dan ketiga menggunakan sistem persamaan diferensial.

4.1.1. Asumsi Model

Asumsi model dalam menentukan penyebaran Covid-19 pada penelitian ini adalah

- a. Covid-19 dianggap sebagai penyakit fatal, artinya menyebabkan kematian.
- b. Laju kematian setiap subpopulasi dianggap sama.
- c. Setiap subpopulasi memiliki proporsi yang sama terinfeksi Covid-19.
- d. Subpopulasi yang telah melakukan vaksinasi dosis pertama memiliki tingkat kekebalan lebih tinggi daripada yang belum melakukan vaksinasi.
- e. Subpopulasi yang telah melakukan vaksinasi dosis kedua memiliki tingkat kekebalan lebih tinggi daripada yang hanya melakukan vaksinasi dosis pertama.
- f. Subpopulasi yang telah melakukan vaksinasi dosis ketiga memiliki tingkat kekebalan lebih tinggi daripada yang hanya melakukan vaksinasi dosis pertama dan kedua.
- g. Subpopulasi yang telah melakukan vaksinasi dosis pertama, kedua, ketiga dapat tertular Covid-19 karena berinteraksi dengan subpopulasi yang terinfeksi, sehingga masuk ke dalam subpopulasi *Exposed (E)*.

- h. Subpopulasi yang belum vaksinasi memiliki laju perkembangan virus Covid-19 yang lebih tinggi dibandingkan subpopulasi yang sudah vaksinasi karena tingkat kekebalan tubuh subpopulasi yang belum vaksinasi lebih rendah daripada yang sudah vaksinasi.
- i. Subpopulasi yang belum vaksinasi memiliki laju pemulihan yang lebih rendah dibandingkan subpopulasi yang sudah vaksinasi karena tingkat kekebalan tubuh subpopulasi yang telah vaksinasi lebih tinggi daripada yang belum vaksinasi.
- j. Subpopulasi yang terinfeksi Covid-19 dapat pulih dari penyakit karena dua faktor, yaitu adanya pemberian vaksinasi ataupun faktor kesembuhan alami disebabkan tingkat kekebalan tubuh yang tinggi.
- k. Subpopulasi yang pulih memiliki tingkat kekebalan tubuh yang baik, sehingga tidak dapat menjadi rentan kembali apabila melakukan protokol kesehatan.

4.1.2. Variabel dan Parameter

Variabel dan parameter yang digunakan pada model matematika penyebaran Covid-19 ditunjukkan pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2 sebagai berikut:

Tabel 4.1 Variabel Model Matematika Penyebaran Covid-19 dengan Adanya Vaksinasi Dosis Pertama, Kedua, dan Ketiga

Variabel	Definisi	Satuan	Syarat
$N(t)$	Jumlah populasi pada saat waktu ke-t	Individu	$N(t) \geq 0$
$S(t)$	Subpopulasi yang rentan terhadap Covid-19 pada saat waktu ke-t	Individu	$S(t) \geq 0$
$V_1(t)$	Subpopulasi yang telah melakukan vaksinasi dosis pertama pada saat waktu ke-t	Individu	$V_1(t) \geq 0$
$V_2(t)$	Subpopulasi yang telah melakukan vaksinasi dosis kedua pada saat waktu ke-t	Individu	$V_2(t) \geq 0$
$V_3(t)$	Subpopulasi yang telah melakukan vaksinasi dosis ketiga pada saat waktu ke-t	Individu	$V_3(t) \geq 0$
$E(t)$	Subpopulasi yang terpapar Covid-19 pada saat waktu ke-t	Individu	$E(t) \geq 0$
$I(t)$	Subpopulasi yang terinfeksi Covid-19 pada saat waktu ke-t	Individu	$I(t) \geq 0$
$R(t)$	Subpopulasi yang pulih dari Covid-19	Individu	$R(t) \geq 0$

	pada saat waktu ke-t		
--	----------------------	--	--

Tabel 4.2 Parameter Model Matematika Penyebaran Covid-19 dengan Adanya Vaksinasi Dosis Pertama, Kedua, dan Ketiga

Parameter	Definisi	Satuan	Syarat
μ	Laju kematian alami	$\frac{1}{\text{waktu}}$	$\mu \geq 0$
π	Laju kelahiran	$\frac{\text{individu}}{\text{hari}}$	$\pi \geq 0$
β	Laju interaksi infeksi antara subpopulasi rentan (<i>Susceptible</i>) dan subpopulasi yang terinfeksi Covid-19 (<i>Infected</i>)	$\frac{1}{\text{individu} \cdot \text{hari}}$	$\beta \geq 0$
α	Laju perkembangan virus	$\frac{1}{\text{hari}}$	$\alpha \geq 0$
γ	Laju pemulihan subpopulasi yang terinfeksi terhadap Covid-19	$\frac{1}{\text{hari}}$	$\gamma \geq 0$

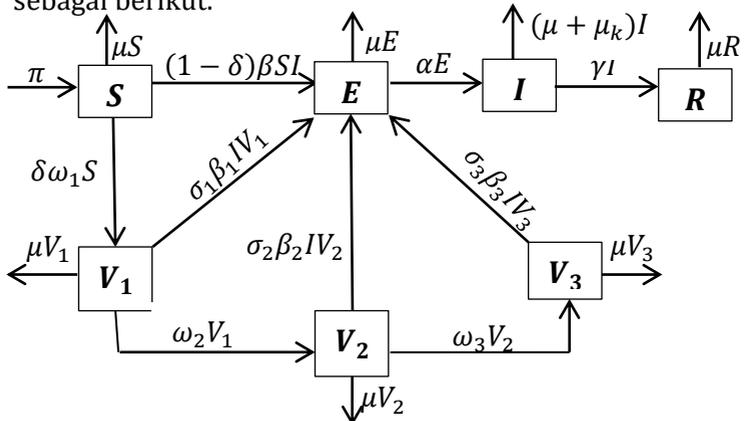
ω_1	Laju subpopulasi <i>Susceptible</i> melakukan vaksinasi dosis pertama	$\frac{1}{\text{hari}}$	$\omega_1 \geq 0$
ω_2	Laju subpopulasi <i>Vaccinated 1</i> melakukan vaksinasi dosis kedua	$\frac{1}{\text{hari}}$	$\omega_2 \geq 0$
ω_3	Laju subpopulasi <i>Vaccinated 2</i> melakukan vaksinasi dosis ketiga	$\frac{1}{\text{hari}}$	$\omega_3 \geq 0$
σ_1	Persentase penurunan efektivitas vaksin dosis pertama	Persen	$\sigma_1 \geq 0$
σ_2	Persentase penurunan efektivitas vaksin dosis kedua	Persen	$\sigma_2 \geq 0$
σ_3	Persentase penurunan efektivitas vaksin dosis ketiga	Persen	$\sigma_3 \geq 0$
β_1	Laju interaksi	$\frac{1}{\text{individu} \cdot \text{hari}}$	$\beta_1 \geq 0$

	infektif antara subpopulasi yang telah vaksinasi dosis pertama dengan subpopulasi yang terinfeksi		
β_2	Laju interaksi infektif antara subpopulasi yang telah vaksinasi dosis kedua dengan subpopulasi yang terinfeksi	$\frac{1}{\text{individu} \cdot \text{hari}}$	$\beta_2 \geq 0$
β_3	Laju interaksi infektif antara subpopulasi yang telah vaksinasi dosis ketiga dengan subpopulasi yang terinfeksi	$\frac{1}{\text{individu} \cdot \text{hari}}$	$\beta_3 \geq 0$

μ_k	Laju kematian akibat Covid-19	$\frac{1}{hari}$	$\mu_k \geq 0$
δ	Proporsi subpopulasi <i>Susceptible</i> yang telah melakukan vaksinasi	-	$0 \leq \delta \leq 1$

4.1.3. Pembentukan Model Penyebaran Covid-19 dengan Adanya Vaksinasi Dosis Pertama, Kedua, dan Ketiga

Secara ilustratif proses terjadinya penyebaran Covid-19 dengan adanya vaksinasi dosis pertama, kedua, dan ketiga ditunjukkan pada Gambar 4.1 sebagai berikut.



Gambar 4.1. Diagram Kompartemen Model $SV_1V_2V_3EIR$

Berdasarkan diagram pada Gambar 4.1 terlihat bahwa kompartemen dibagi kedalam tujuh subpopulasi, yaitu subpopulasi yang rentan terhadap Covid-19 (S), subpopulasi yang telah melakukan vaksinasi dosis pertama (V_1), subpopulasi yang telah melakukan vaksinasi dosis kedua (V_2), subpopulasi yang telah melakukan vaksinasi dosis ketiga (V_3), subpopulasi yang terpapar Covid-19 (E), subpopulasi yang terinfeksi Covid-19 (I), dan subpopulasi yang pulih dari Covid-19 (R).

Subpopulasi rentan (S) bertambah karena adanya laju kelahiran (π) yang masuk kedalamnya, lalu subpopulasi tersebut memiliki peluang terinfeksi penyakit apabila berkontak dengan subpopulasi yang terinfeksi sehingga masuk ke dalam subpopulasi terpapar (E) dengan laju β dan proporsi sebesar $1 - \delta$. Disisi lain subpopulasi rentan (S) melakukan vaksinasi dosis pertama (V_1) dengan laju ω_1 dan proporsi sebesar δ , selanjutnya subpopulasi tervaksinasi dosis pertama (V_1) mengalami penurunan efektivitas vaksin akibat terpapar oleh penyakit dengan laju β_1 dan persentase sebesar σ_1 sehingga masuk ke dalam subpopulasi terpapar (E). Disisi lain subpopulasi tervaksinasi dosis pertama (V_1)

melakukan vaksinasi dosis kedua (V_2) dengan laju ω_2 , lalu subpopulasi tervaksinasi dosis kedua (V_2) mengalami penurunan efektivitas vaksin akibat terpapar oleh penyakit dengan laju β_2 dan persentase sebesar σ_2 sehingga masuk ke dalam subpopulasi terpapar (E).

Subpopulasi tervaksinasi dosis kedua (V_2) melakukan vaksinasi dosis ketiga (V_3) dengan laju ω_3 , kemudian subpopulasi tervaksinasi dosis ketiga (V_3) mengalami penurunan efektivitas vaksin akibat terpapar oleh penyakit dengan laju β_3 dan persentase sebesar σ_3 sehingga masuk ke dalam subpopulasi terpapar (E), selanjutnya subpopulasi terpapar (E) mengalami perkembangan virus dengan laju sebesar α sehingga masuk ke dalam subpopulasi terinfeksi (I). Subpopulasi terinfeksi (I) dapat pulih dengan laju γ dan subpopulasi terinfeksi (I) yang tidak pulih akan meninggal akibat penyakit dengan laju sebesar μ_k . Pada setiap subpopulasi terdapat kematian alami dengan laju μ .

Berikut adalah model penyebaran Covid-19 yang melibatkan vaksinasi dosis pertama hingga ketiga:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \pi - (1 - \delta)\beta SI - \delta\omega_1 S - \mu S \\ \frac{dV_1}{dt} = \delta\omega_1 S - \sigma_1\beta_1 IV_1 - \omega_2 V_1 - \mu V_1 \\ \frac{dV_2}{dt} = \omega_2 V_1 - \sigma_2\beta_2 IV_2 - \omega_3 V_2 - \mu V_2 \\ \frac{dV_3}{dt} = \omega_3 V_2 - \sigma_3\beta_3 IV_3 - \mu V_3 \\ \frac{dE}{dt} = (1 - \delta)\beta SI - \alpha E + \sigma_1\beta_1 IV_1 + \sigma_2\beta_2 IV_2 + \sigma_3\beta_3 IV_3 - \mu E \\ \frac{dI}{dt} = \alpha E - (\mu + \mu_k)I - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \end{array} \right. \quad (4.1)$$

dengan $N = S + V_1 + V_2 + V_3 + E + I + R$

Pada sistem persamaan (4.1), dilakukan proses penyederhanaan dengan mengubah sistem tersebut menjadi bentuk proporsi antara banyaknya subpopulasi dengan total populasi. Sistem persamaan (4.1) dapat disederhanakan dengan memisalkan

$$\begin{aligned} s = \frac{S}{N}, v_1 = \frac{V_1}{N}, v_2 = \frac{V_2}{N}, v_3 = \frac{V_3}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N} \\ b = \beta N, b_1 = \beta_1 N, b_2 = \beta_2 N, b_3 = \beta_3 N, \Pi = \frac{\pi}{N} \end{aligned} \quad (4.2)$$

diperoleh

$$s + v_1 + v_2 + v_3 + e + i + r = \frac{S}{N} + \frac{V_1}{N} + \frac{V_2}{N} + \frac{V_3}{N} + \frac{E}{N} + \frac{I}{N} + \frac{R}{N} = 1$$

Sehingga sistem persamaan (4.1) dapat dilakukan proses penyederhanaan dengan mensubstitusikan persamaan (4.2) ke dalam sistem persamaan (4.1). Akibatnya diperoleh persamaan baru hasil reduksi sebagai berikut:

- Persamaan pertama

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \pi - (1 - \delta) \beta SI - \delta \omega_1 S - \mu S \\ \Leftrightarrow \frac{dsN}{dt} &= \pi - (1 - \delta) \beta sNiN - \delta \omega_1 sN - \mu sN \\ \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} &= \frac{\pi}{N} - (1 - \delta) \beta siN - \delta \omega_1 s - \mu s \\ \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} &= \Pi - (1 - \delta) bsi - \delta \omega_1 s - \mu s \end{aligned} \tag{4.3}$$

Berdasarkan persamaan (4.3) terlihat bahwa dalam persamaan tersebut tidak memuat variabel r .

- Persamaan kedua

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= \delta \omega_1 S - \sigma_1 \beta_1 IV_1 - \omega_2 V_1 - \mu V_1 \\ \Leftrightarrow \frac{dv_1 N}{dt} &= \delta \omega_1 sN - \sigma_1 \beta_1 iNv_1 N - \omega_2 v_1 N - \mu v_1 N \\ \Leftrightarrow \frac{dv_1}{dt} &= \omega_1 s - \sigma_1 \beta_1 iv_1 N - \omega_2 v_1 - \mu v_1 \\ \Leftrightarrow \frac{dv_1}{dt} &= \omega_1 s - \sigma_1 b_1 iv_1 - \omega_2 v_1 - \mu v_1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Berdasarkan persamaan (4.4) terlihat bahwa dalam persamaan tersebut tidak memuat variabel r .

- Persamaan ketiga

$$\begin{aligned}
 \frac{dV_2}{dt} &= \omega_2 V_1 - \sigma_2 \beta_2 I V_2 - \omega_3 V_2 - \mu V_2 \\
 \Leftrightarrow \frac{dv_2 N}{dt} &= \omega_2 v_1 N - \sigma_2 \beta_2 i N v_2 N - \omega_3 v_2 N - \mu v_2 N \\
 \Leftrightarrow \frac{dv_2}{dt} &= \omega_2 v_1 - \sigma_2 \beta_2 i v_2 N - \omega_3 v_2 - \mu v_2 \\
 \Leftrightarrow \frac{dv_2}{dt} &= \omega_2 v_1 - \sigma_2 b_2 i v_2 - \omega_3 v_2 - \mu v_2
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Berdasarkan persamaan (4.5) terlihat bahwa dalam persamaan tersebut tidak memuat variabel r .

- Persamaan keempat

$$\begin{aligned}
 \frac{dV_3}{dt} &= \omega_3 V_2 - \sigma_3 \beta_3 I V_3 - \mu V_3 \\
 \Leftrightarrow \frac{dv_3 N}{dt} &= \omega_3 v_2 N - \sigma_3 \beta_3 i N v_3 N - \mu v_3 N \\
 \Leftrightarrow \frac{dv_3}{dt} &= \omega_3 v_2 - \sigma_3 \beta_3 i v_3 N - \mu v_3 \\
 \Leftrightarrow \frac{dv_3}{dt} &= \omega_3 v_2 - \sigma_3 b_3 i v_3 - \mu v_3
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Berdasarkan persamaan (4.6) terlihat bahwa dalam persamaan tersebut tidak memuat variabel r .

- Persamaan kelima

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= (1-\delta)\beta SI - \alpha E + \sigma_1\beta_1IV_1 + \sigma_2\beta_2IV_2 + \sigma_3\beta_3IV_3 - \mu E \\
 \Leftrightarrow \frac{deN}{dt} &= (1-\delta)\beta sNiN - \alpha eN + \sigma_1\beta_1iNv_1N \\
 &\quad + \sigma_2\beta_2iNv_2N + \sigma_3\beta_3iNv_3N - \mu eN \\
 \Leftrightarrow \frac{de}{dt} &= (1-\delta)\beta siN - \alpha e + \sigma_1\beta_1iv_1N + \sigma_2\beta_2iv_2N \\
 &\quad + \sigma_3\beta_3iv_3N - \mu e \\
 \Leftrightarrow \frac{de}{dt} &= (1-\delta)bsi - \alpha e + \sigma_1b_1iv_1 + \sigma_2b_2iv_2 + \sigma_3b_3iv_3 - \mu e
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Berdasarkan persamaan (4.7) terlihat bahwa dalam persamaan tersebut tidak memuat variabel r .

- Persamaan keenam

$$\begin{aligned}
 \frac{dI}{dt} &= \alpha E - (\mu + \mu_k)I - \gamma I \\
 \Leftrightarrow \frac{diN}{dt} &= \alpha eN - (\mu + \mu_k)iN - \gamma iN \\
 \Leftrightarrow \frac{di}{dt} &= \alpha e - (\mu + \mu_k)i - \gamma i
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Berdasarkan persamaan (4.8) terlihat bahwa dalam persamaan tersebut tidak memuat variabel r .

- Persamaan ketujuh

$$\begin{aligned}
 \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R \\
 \Leftrightarrow \frac{drN}{dt} &= \gamma iN - \mu rN \\
 \Leftrightarrow \frac{dr}{dt} &= \gamma i - \mu r
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Pada persamaan (4.3) sampai persamaan (4.8) tidak memuat variabel r , sehingga variabel r sementara diabaikan dari sistem karena tidak berpengaruh pada persamaan lain, selanjutnya subpopulasi yang pulih (r) dapat dihitung dengan rumus $r = 1 - (s + v_1 + v_2 + v_3 + e + i)$. Oleh karena itu, sistem persamaan (4.1) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds}{dt} = \Pi - (1 - \delta)bsi - \delta\omega_1s - \mu s \\ \frac{dv_1}{dt} = \delta\omega_1s - \sigma_1b_1iv_1 - \omega_2v_1 - \mu v_1 \\ \frac{dv_2}{dt} = \omega_2v_1 - \sigma_2b_2iv_2 - \omega_3v_2 - \mu v_2 \\ \frac{dv_3}{dt} = \omega_3v_2 - \sigma_3b_3iv_3 - \mu v_3 \\ \frac{de}{dt} = (1 - \delta)bsi - \alpha e + \sigma_1b_1iv_1 + \sigma_2b_2iv_2 + \sigma_3b_3iv_3 - \mu e \\ \frac{di}{dt} = \alpha e - (\mu + \mu_k)i - \gamma i \end{array} \right. \quad (4.10)$$

4.1.4. Solusi Positif dan Terbatas

Karena setiap variabel dari sistem persamaan diferensial (4.3) sampai (4.9) merupakan subpopulasi manusia, sehingga perlu menunjukkan bahwa semua variabel $s(t), v_1(t), v_2(t), v_3(t), e(t), i(t), r(t)$ positif untuk setiap $t > 0$.

Teorema 4.1 (Solusi Positif)

Jika $s(0) \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, v_3 \geq 0, e(0) \geq 0, i(0) \geq 0$, dan $r \geq 0$ maka himpunan solusi $\{s(t), v_1(t), v_2(t), v_3(t), e(t), i(t), r(t)\}$ dari persamaan (4.3) sampai (4.9) terdiri atas anggota positif untuk setiap $t > 0$.

Bukti. Dari persamaan (4.3) dapat dibuktikan bahwa sistem persamaan tersebut positif

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \Pi - (1 - \delta)bsi - \delta\omega_1s - \mu s \\ \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} &\geq -((1 - \delta)bi + \delta\omega_1 + \mu)s \\ \Leftrightarrow \frac{ds}{s} &\geq -((1 - \delta)bi + \delta\omega_1 + \mu)dt \end{aligned}$$

Dari persamaan diatas kedua ruas diintegalkan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int \frac{ds}{s} &\geq \int -((1 - \delta)bi + \delta\omega_1 + \mu)dt \\ \Leftrightarrow \int \frac{ds}{s} &\geq \int -((1 - \delta)bi)dt - \int (\delta\omega_1 + \mu)dt \\ \Leftrightarrow \ln|s| &\geq \left(-\int ((1 - \delta)bi)dt\right) - (\delta\omega_1 + \mu)t + C \\ \Leftrightarrow e^{\ln|s|} &\geq e^{\left(-\int ((1 - \delta)bi)dt\right) - (\delta\omega_1 + \mu)t + C} \\ \Leftrightarrow s(t) &\geq Ae^{-\int ((1 - \delta)bi)dt} e^{-(\delta\omega_1 + \mu)t}, \text{ dengan } e^C = A \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ketika $t = 0$ maka

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow s(0) &\geq A e^{-\int((1-\delta)bi)dt} \\ \Leftrightarrow s(0) e^{\int((1-\delta)bi)dt} &\geq A e^{-\int((1-\delta)bi)dt} e^{\int((1-\delta)bi)dt} \\ \Leftrightarrow A &\leq s(0) e^{\int((1-\delta)bi)dt} \end{aligned}$$

Substitusikan nilai A ke persamaan (4.11) diperoleh

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow s(t) &\geq s(0) e^{\int((1-\delta)bi)dt} e^{-\int((1-\delta)bi)dt} e^{-(\delta\omega_1+\mu)t} \\ \Leftrightarrow s(t) &\geq s(0) e^{-(\delta\omega_1+\mu)t} \\ \Leftrightarrow s(t) &\geq s(0) \cdot 0 \geq 0, \text{ karena } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\delta\omega_1+\mu)t} = 0 \\ \Leftrightarrow s(t) &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Sehingga terbukti bahwa $s(t) \geq 0$ untuk setiap $t > 0$.

Pada persamaan (4.4) dapat dibuktikan bahwa sistem persamaan tersebut positif. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \omega_1 s - \sigma_1 b_1 i v_1 - \omega_2 v_1 - \mu v_1 \\ \Leftrightarrow \frac{dv_1}{dt} &\geq -(\sigma_1 b_1 i + \omega_2 + \mu) v_1 \\ \Leftrightarrow \frac{dv_1}{v_1} &\geq -(\sigma_1 b_1 i + \omega_2 + \mu) dt \end{aligned}$$

Kedua ruas dari persamaan diatas diintegrasikan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \int \frac{dv_1}{v_1} \geq \int -(\sigma_1 b_1 i + \omega_2 + \mu) dt \\
&\Leftrightarrow \int \frac{dv_1}{v_1} \geq \int -(\sigma_1 b_1 i) dt - \int (\omega_2 + \mu) dt \\
&\Leftrightarrow \ln|v_1| \geq \left(-\int (\sigma_1 b_1 i) dt \right) - (\omega_2 + \mu)t + C \\
&\Leftrightarrow e^{\ln|v_1|} \geq e^{\left(-\int (\sigma_1 b_1 i) dt \right) - (\omega_2 + \mu)t + C} \\
&\Leftrightarrow v_1(t) \geq A e^{-\int (\sigma_1 b_1 i) dt} e^{-(\omega_2 + \mu)t}, \text{ dengan } e^C = A \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Ketika $t = 0$ maka

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow v_1(0) \geq A e^{-\int (\sigma_1 b_1 i) dt} \\
&\Leftrightarrow v_1(0) e^{\int (\sigma_1 b_1 i) dt} \geq A e^{-\int (\sigma_1 b_1 i) dt} e^{\int (\sigma_1 b_1 i) dt} \\
&\Leftrightarrow A \leq v_1(0) e^{\int (\sigma_1 b_1 i) dt}
\end{aligned}$$

Substitusikan nilai A ke persamaan (4.13) diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow v_1(t) \geq v_1(0) e^{\int (\sigma_1 b_1 i) dt} e^{-\int (\sigma_1 b_1 i) dt} e^{-(\omega_2 + \mu)t} \\
&\Leftrightarrow v_1(t) \geq v_1(0) e^{-(\omega_2 + \mu)t} \\
&\Leftrightarrow v_1(t) \geq v_1(0) \cdot 0 \geq 0, \text{ karena } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\omega_2 + \mu)t} = 0 \\
&\Leftrightarrow v_1(t) \geq 0 \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa $v_1(t) \geq 0$ untuk setiap $t > 0$.

Pada persamaan (4.5) dapat dibuktikan bahwa sistem persamaan tersebut positif. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\frac{dv_2}{dt} &= \omega_2 v_1 - \sigma_2 b_2 i v_2 - \omega_3 v_2 - \mu v_2 \\ \Leftrightarrow \frac{dv_2}{dt} &\geq -(\sigma_2 b_2 i + \omega_3 + \mu) v_2 \\ \Leftrightarrow \frac{dv_2}{v_2} &\geq -(\sigma_2 b_2 i + \omega_3 + \mu) dt\end{aligned}$$

Kedua ruas dari persamaan diatas diintegrasikan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \int \frac{dv_2}{v_2} &\geq \int -(\sigma_2 b_2 i + \omega_3 + \mu) dt \\ \Leftrightarrow \int \frac{dv_2}{v_2} &\geq \int -(\sigma_2 b_2 i) dt - \int (\omega_3 + \mu) dt \\ \Leftrightarrow \ln|v_2| &\geq \left(-\int (\sigma_2 b_2 i) dt\right) - (\omega_3 + \mu)t + C \\ \Leftrightarrow e^{\ln|v_2|} &\geq e^{-\int (\sigma_2 b_2 i) dt - (\omega_3 + \mu)t + C} \\ \Leftrightarrow v_2(t) &\geq A e^{-\int (\sigma_2 b_2 i) dt} e^{-(\omega_3 + \mu)t}, \text{ dengan } e^C = A \quad (4.15)\end{aligned}$$

Ketika $t = 0$ maka

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow v_2(0) &\geq A e^{-\int (\sigma_2 b_2 i) dt} \\ \Leftrightarrow v_2(0) e^{\int (\sigma_2 b_2 i) dt} &\geq A e^{-\int (\sigma_2 b_2 i) dt} e^{\int (\sigma_2 b_2 i) dt} \\ \Leftrightarrow A &\leq v_2(0) e^{\int (\sigma_2 b_2 i) dt}\end{aligned}$$

Substitusikan nilai A ke persamaan (4.15) diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow v_2(t) \geq v_2(0) e^{\int(\sigma_2 b_2 i) dt} e^{-\int(\sigma_2 b_2 i) dt} e^{-(\omega_3 + \mu)t} \\
&\Leftrightarrow v_2(t) \geq v_2(0) e^{-(\omega_3 + \mu)t} \\
&\Leftrightarrow v_2(t) \geq v_2(0) \cdot 0 \geq 0, \text{ karena } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\omega_3 + \mu)t} = 0 \\
&\Leftrightarrow v_2(t) \geq 0 \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa $v_2(t) \geq 0$ untuk setiap $t > 0$.

Pada persamaan (4.6) dapat dibuktikan bahwa sistem persamaan tersebut positif. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\frac{dv_3}{dt} &= \omega_3 v_2 - \sigma_3 b_3 i v_3 - \mu v_3 \\
&\Leftrightarrow \frac{dv_3}{dt} \geq -(\sigma_3 b_3 i + \mu) v_3 \\
&\Leftrightarrow \frac{dv_3}{v_3} \geq -(\sigma_3 b_3 i + \mu) dt
\end{aligned}$$

Kedua ruas dari persamaan diatas diintegalkan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \int \frac{dv_3}{v_3} \geq \int -(\sigma_3 b_3 i + \mu) dt \\
&\Leftrightarrow \int \frac{dv_3}{v_3} \geq \int -(\sigma_3 b_3 i) dt - \int \mu dt \\
&\Leftrightarrow \ln |v_3| \geq \left(-\int (\sigma_3 b_3 i) dt \right) - \mu t + C \\
&\Leftrightarrow e^{\ln |v_3|} \geq e^{\left(-\int (\sigma_3 b_3 i) dt \right) - \mu t + C} \\
&\Leftrightarrow v_3(t) \geq A e^{-\int (\sigma_3 b_3 i) dt} e^{-\mu t}, \text{ dengan } e^C = A \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Ketika $t = 0$ maka

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow v_3(0) &\geq Ae^{-\int(\sigma_3 b_3 i) dt} \\ \Leftrightarrow v_3(0) e^{\int(\sigma_3 b_3 i) dt} &\geq Ae^{-\int(\sigma_3 b_3 i) dt} e^{\int(\sigma_3 b_3 i) dt} \\ \Leftrightarrow A &\leq v_3(0) e^{\int(\sigma_3 b_3 i) dt} \end{aligned}$$

Substitusikan nilai A ke persamaan (4.17) diperoleh

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow v_3(t) &\geq v_3(0) e^{\int(\sigma_3 b_3 i) dt} e^{-\int(\sigma_3 b_3 i) dt} e^{-\mu t} \\ \Leftrightarrow v_3(t) &\geq v_3(0) e^{-\mu t} \\ \Leftrightarrow v_3(t) &\geq v_3(0) \cdot 0 \geq 0, \text{ karena } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\mu t} = 0 \\ \Leftrightarrow v_3(t) &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Sehingga terbukti bahwa $v_3(t) \geq 0$ untuk setiap $t > 0$.

Pada persamaan (4.7) dapat dibuktikan bahwa sistem persamaan tersebut positif. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= (1 - \delta) bsi - \alpha e + \sigma_1 b_1 i v_1 + \sigma_2 b_2 i v_2 + \sigma_3 b_3 i v_3 - \mu e \\ \Leftrightarrow \frac{de}{dt} &\geq -(\alpha + \mu) e \\ \Leftrightarrow \frac{de}{e} &\geq -(\alpha + \mu) dt \end{aligned}$$

Kedua ruas dari persamaan diatas diintegrasikan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \int \frac{de}{e} \geq \int -(\alpha + \mu) dt \\
&\Leftrightarrow \ln|e| \geq -(\alpha + \mu)t + C \\
&\Leftrightarrow e^{\ln|e|} \geq e^{-(\alpha + \mu)t + C} \\
&\Leftrightarrow e(t) \geq Ae^{-(\alpha + \mu)t}, \text{ dengan } e^C = A \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Ketika $t = 0$ maka

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow e(0) \geq A \\
&\Leftrightarrow A \leq e(0)
\end{aligned}$$

Substitusikan nilai A ke persamaan (4.19) diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow e(t) \geq e(0)e^{-(\alpha + \mu)t} \\
&\Leftrightarrow e(t) \geq e(0) \cdot 0 \geq 0, \text{ karena } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\alpha + \mu)t} = 0 \\
&\Leftrightarrow e(t) \geq 0 \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa $e(t) \geq 0$ untuk setiap $t > 0$.

Pada persamaan (4.8) dapat dibuktikan bahwa sistem persamaan tersebut positif. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\frac{di}{dt} &= \alpha e - (\mu + \mu_k)i - \gamma i \\
&\Leftrightarrow \frac{di}{dt} \geq -((\mu + \mu_k) + \gamma)i \\
&\Leftrightarrow \frac{di}{i} \geq -((\mu + \mu_k) + \gamma) dt
\end{aligned}$$

Kedua ruas dari persamaan diatas diintegalkan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \int \frac{di}{i} \geq \int -((\mu + \mu_k) + \gamma) dt \\
&\Leftrightarrow \ln|i| \geq -((\mu + \mu_k) + \gamma)t + C \\
&\Leftrightarrow e^{\ln|i|} \geq e^{-((\mu + \mu_k) + \gamma)t + C} \\
&\Leftrightarrow i(t) \geq Ae^{-((\mu + \mu_k) + \gamma)t}, \text{ dengan } e^C = A \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Ketika $t = 0$ maka

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow i(0) \geq A \\
&\Leftrightarrow A \leq i(0)
\end{aligned}$$

Substitusikan nilai A ke persamaan (4.21) diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow i(t) \geq i(0)e^{-((\mu + \mu_k) + \gamma)t} \\
&\Leftrightarrow i(t) \geq i(0) \cdot 0 \geq 0, \text{ karena } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-((\mu + \mu_k) + \gamma)t} = 0 \\
&\Leftrightarrow i(t) \geq 0 \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa $i(t) \geq 0$ untuk setiap $t > 0$.

Pada persamaan (4.9) dapat dibuktikan bahwa sistem persamaan tersebut positif. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
&\frac{dr}{dt} = \gamma i - \mu r \\
&\Leftrightarrow \frac{dr}{dt} \geq -\mu r \\
&\Leftrightarrow \frac{dr}{r} \geq -\mu dt
\end{aligned}$$

Kedua ruas dari persamaan diatas diintegalkan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \int \frac{dr}{r} \geq \int -\mu dt \\
&\Leftrightarrow \ln|r| \geq -\mu t + C \\
&\Leftrightarrow e^{\ln|r|} \geq e^{-\mu t + C} \\
&\Leftrightarrow r(t) \geq Ae^{-\mu t}, \text{ dengan } e^C = A
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Ketika $t = 0$ maka

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow r(0) \geq A \\
&\Leftrightarrow A \leq r(0)
\end{aligned}$$

Substitusikan nilai A ke persamaan (4.23) diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow r(t) \geq r(0)e^{-\mu t} \\
&\Leftrightarrow r(t) \geq r(0) \cdot 0 \geq 0, \text{ karena } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\mu t} = 0 \\
&\Leftrightarrow r(t) \geq 0
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Sehingga terbukti bahwa $r(t) \geq 0$ untuk setiap $t > 0$.

Oleh karena itu, terbukti bahwa persamaan (4.3) sampai (4.9) merupakan solusi yang positif.

Teorema 4.2 (Terbatas)

Himpunan solusi $\{s(t), v_1(t), v_2(t), v_3(t), e(t), i(t), r(t)\}$ dari sistem persamaan (4.3) sampai (4.9) dengan kondisi awal terbatas pada daerah

$$\begin{aligned}
\Omega = \{ &(s(t), v_1(t), v_2(t), v_3(t), e(t), i(t), r(t)) \in \mathbb{R}_+^7 : 0 \leq \\
&N \leq \frac{\Pi}{\mu} \}
\end{aligned}$$

Bukti. Jumlah populasi dari persamaan (4.3) sampai (4.9) adalah $N(t) = s(t) + v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + e(t) + i(t) + r(t)$. Turunkan N terhadap t diperoleh

$$\frac{dN}{dt} = \frac{ds}{dt} + \frac{dv_1}{dt} + \frac{dv_2}{dt} + \frac{dv_3}{dt} + \frac{de}{dt} + \frac{di}{dt} + \frac{dr}{dt}$$

Substitusikan persamaan (4.3) sampai (4.9) ke persamaan $\frac{dN}{dt}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} = & \Pi - (1 - \delta)bsi - \delta\omega_1s - \mu s + \delta\omega_1s - \sigma_1b_1iv_1 - \omega_2v_1 - \mu v_1 \\ & + \omega_2v_1 - \sigma_2b_2iv_2 - \omega_3v_2 - \mu v_2 + \omega_3v_2 - \sigma_3b_3iv_3 - \mu v_3 \\ & + (1 - \delta)bsi - \alpha e + \sigma_1b_1iv_1 + \sigma_2b_2iv_2 + \sigma_3b_3iv_3 - \mu e + \alpha e \\ & - (\mu + \mu_k)i - \gamma i + \gamma i - \mu \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dN}{dt} = \Pi - \mu(s + v_1 + v_2 + v_3 + e + i + r) - \mu_k i$$

$$\Leftrightarrow \frac{dN}{dt} = \Pi - \mu N - \mu_k i$$

Karena keadaan variabel dari persamaan i adalah positif untuk setiap $t \geq 0$ diperoleh

$$\frac{dN}{dt} \leq \Pi - \mu N$$

$$\Leftrightarrow \frac{dN}{\Pi - \mu N} \leq dt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dN}{\Pi - \mu N} \leq \int dt$$

Misal $g = \Pi - \mu N$ maka $dg = -\mu dN$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \int \frac{dg}{-\mu g} \leq t + C \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{\mu} \int \frac{dg}{g} \leq t + C \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{\mu} \ln|g| \leq t + C \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{\mu} \ln|\Pi - \mu N| \leq t + C \\
&\Leftrightarrow \ln|\Pi - \mu N| \leq -\mu t - \mu C \\
&\Leftrightarrow e^{\ln|\Pi - \mu N|} \leq e^{-\mu t + C}, \text{ karena } C = -\mu C \\
&\Leftrightarrow \Pi - \mu N(t) \leq Ae^{-\mu t}, \text{ dengan } e^C = A \\
&\Leftrightarrow -\mu N(t) \leq -\Pi + Ae^{-\mu t} \\
&\Leftrightarrow N(t) \leq \frac{\Pi}{\mu} + \frac{A}{\mu} e^{-\mu t} \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Ketika $t = 0$ maka

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow N(0) \leq \frac{\Pi}{\mu} + \frac{A}{\mu} \\
&\Leftrightarrow \mu N(0) \leq \Pi + A \\
&\Leftrightarrow A \geq \mu N(0) - \Pi
\end{aligned}$$

Substitusikan nilai A ke persamaan (4.25) diperoleh

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow N(t) &\leq \frac{\Pi + (\mu N(0) - \Pi)e^{-\mu t}}{\mu} \\ \Leftrightarrow N(t) &\leq \frac{\Pi}{\mu} + N(0)e^{-\mu t} - \frac{\Pi}{\mu}e^{-\mu t} \\ \Leftrightarrow N(t) &\leq \frac{\Pi}{\mu} + 0 - 0, \text{ karena } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\mu t} = 0 \\ \Leftrightarrow N(t) &\leq \frac{\Pi}{\mu} \end{aligned}$$

Sehingga terbukti daerah

$$\Omega = \left\{ (s(t), v_1(t), v_2(t), v_3(t), e(t), i(t), r(t)) \in \mathbb{R}_+^7 : 0 \leq N \leq \frac{\Pi}{\mu} \right\} \text{ dan persamaan (4.3) sampai (4.9) terbatas.}$$

4.2. Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran Covid-19 dengan Adanya Vaksinasi Dosis Pertama, Kedua, dan Ketiga

Sistem persamaan (4.10) merupakan sistem persamaan diferensial non linear yang menggambarkan model penyebaran Covid-19 dengan memperhatikan vaksinasi dosis pertama hingga ketiga. Sistem persamaan tersebut memiliki titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan didapatkan ketika keenam persamaan dari sistem persamaan (4.10) sama dengan nol atau $\frac{ds}{dt} = \frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_2}{dt} = \frac{dv_3}{dt} = \frac{de}{dt} = \frac{di}{dt} = 0$. Sehingga sistem persamaan (4.10) menjadi

$$\Pi - (1 - \delta)bsi - \delta\omega_1s - \mu s = 0 \quad (4.26)$$

$$\delta\omega_1s - \sigma_1b_1iv_1 - \omega_2v_1 - \mu v_1 = 0 \quad (4.27)$$

$$\omega_2v_1 - \sigma_2b_2iv_2 - \omega_3v_2 - \mu v_2 = 0 \quad (4.28)$$

$$\omega_3v_2 - \sigma_3b_3iv_3 - \mu v_3 = 0 \quad (4.29)$$

$$(1 - \delta)bsi - \alpha e + \sigma_1b_1iv_1 + \sigma_2b_2iv_2 + \sigma_3b_3iv_3 - \mu e = 0 \quad (4.30)$$

$$\alpha e - (\mu + \mu_k)i - \gamma i = 0 \quad (4.31)$$

Titik kesetimbangan pada sistem persamaan (4.26) sampai (4.31) dibagi menjadi dua, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik. Dari titik kesetimbangan bebas penyakit dapat diperoleh bilangan reproduksi dasar (R_0) pada sistem persamaan (4.10). Berikut titik kesetimbangan bebas penyakit, bilangan reproduksi dasar (R_0), dan titik kesetimbangan endemik dari sistem persamaan (4.10).

4.2.1. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh apabila dalam suatu populasi tidak ada penyakit, sehingga $i = 0$. Langkah dalam memperoleh hasil dari titik kesetimbangan bebas penyakit sebagai berikut: Substitusikan nilai $i = 0$ ke dalam persamaan (4.26) untuk memperoleh hasil dari subpopulasi \hat{s} sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \Pi - (1 - \delta)bsi - \delta\omega_1s - \mu s = 0 \\
&\Leftrightarrow \Pi - (1 - \delta)bs(0) - \delta\omega_1s - \mu s = 0 \\
&\Leftrightarrow \Pi - (\delta\omega_1 + \mu)s = 0 \\
&\Leftrightarrow (\delta\omega_1 + \mu)s = \Pi \\
&\Leftrightarrow \hat{s} = \frac{\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)} \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Substitusikan persamaan (4.32) dan nilai $i = 0$ ke dalam persamaan (4.27) untuk memperoleh hasil dari subpopulasi \hat{v}_1 sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \delta\omega_1s - \sigma_1b_1iv_1 - \omega_2v_1 - \mu v_1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \delta\omega_1 \left(\frac{\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)} \right) - \sigma_1b_1(0)v_1 - \omega_2v_1 - \mu v_1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\delta\omega_1\Pi}{\delta\omega_1 + \mu} - (\omega_2 + \mu)v_1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\omega_2 + \mu)v_1 = \frac{\delta\omega_1\Pi}{\delta\omega_1 + \mu} \\
&\Leftrightarrow \hat{v}_1 = \frac{\delta\omega_1\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)} \tag{4.33}
\end{aligned}$$

Substitusikan persamaan (4.33) dan nilai $i = 0$ ke dalam persamaan (4.28) untuk memperoleh hasil dari subpopulasi \hat{v}_2 sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \omega_2 v_1 - \sigma_2 b_2 i v_2 - \omega_3 v_2 - \mu v_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \omega_2 \left(\frac{\delta \omega_1 \Pi}{(\delta \omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)} \right) - \sigma_2 b_2(0) v_2 - \omega_3 v_2 - \mu v_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\omega_2 \delta \omega_1 \Pi}{(\delta \omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)} - (\omega_3 + \mu) v_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\omega_3 + \mu) v_2 = \frac{\omega_2 \delta \omega_1 \Pi}{(\delta \omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)} \\
&\Leftrightarrow \hat{v}_2 = \frac{\delta \omega_1 \omega_2 \Pi}{(\delta \omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)(\omega_3 + \mu)} \tag{4.34}
\end{aligned}$$

Substitusikan (4.34) dan nilai $i = 0$ ke dalam persamaan (4.29) untuk memperoleh hasil dari subpopulasi \hat{v}_3 sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \omega_3 v_2 - \sigma_3 b_3 i v_3 - \mu v_3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \omega_3 \left(\frac{\delta \omega_1 \omega_2 \Pi}{(\delta \omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)(\omega_3 + \mu)} \right) - \sigma_3 b_3(0) v_3 - \mu v_3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\omega_3 \delta \omega_1 \omega_2 \Pi}{(\delta \omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)(\omega_3 + \mu)} - \mu v_3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \mu v_3 = \frac{\omega_3 \delta \omega_1 \omega_2 \Pi}{(\delta \omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)(\omega_3 + \mu)} \\
&\Leftrightarrow \hat{v}_3 = \frac{\delta \omega_1 \omega_2 \omega_3 \Pi}{(\delta \omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)(\omega_3 + \mu) \mu} \tag{4.35}
\end{aligned}$$

Substitusikan nilai $i = 0$ ke dalam persamaan (4.30) untuk memperoleh hasil dari subpopulasi \hat{e} sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow (1-\delta)bsi - \alpha e + \sigma_1 b_1 i v_1 + \sigma_2 b_2 i v_2 + \sigma_3 b_3 i v_3 - \mu e = 0 \\
 &\Leftrightarrow (1-\delta)bs(0) - \alpha e + \sigma_1 b_1(0)v_1 + \sigma_2 b_2(0)v_2 + \sigma_3 b_3(0)v_3 - \mu e = 0 \\
 &\Leftrightarrow -\alpha e - \mu e = 0 \\
 &\Leftrightarrow -(\alpha + \mu)e = 0 \\
 &\Leftrightarrow \hat{e} = 0
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Jadi, diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit dari sistem persamaan (4.10) yaitu

$$TK_1 = \left(\frac{\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)}, \frac{\delta\omega_1\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)}, \frac{\delta\omega_1\omega_2\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)(\omega_3 + \mu)}, \frac{\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)(\omega_3 + \mu)\mu}, 0, 0 \right)$$

4.2.2. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar didapatkan dengan menggunakan metode *next generation matrix* (matriks generasi selanjutnya). Matriks tersebut didapatkan dari subpopulasi kelas terinfeksi pada sistem persamaan (4.10). Langkah dalam memperoleh hasil dari bilangan reproduksi dasar pada sistem persamaan (4.10), yaitu

- Mengambil persamaan dari subpopulasi kelas terinfeksi pada sistem persamaan (4.10),

diantaranya subpopulasi terpapar penyakit (E) dan subpopulasi terinfeksi penyakit (I).

- Merepresentasikan subpopulasi kelas terinfeksi ($\dot{\mathbf{x}}$) kedalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} \frac{dE}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-\delta)bsi - \alpha e + \sigma_1 b_1 iv_1 + \sigma_2 b_2 iv_2 + \sigma_3 b_3 iv_3 - \mu e \\ \alpha e - (\mu + \mu_k)i - \gamma i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Dekomposisikan matriks yang terbentuk pada langkah kedua ke dalam bentuk matriks $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} - \mathbf{V}$ dengan matriks F mengilustrasikan laju infeksi baru dan matriks V mengilustrasikan peralihan populasi yang terinfeksi.

$$F = \begin{bmatrix} (1-\delta)bsi + \sigma_1 b_1 iv_1 + \sigma_2 b_2 iv_2 + \sigma_3 b_3 iv_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} usi + kiv_1 + xiv_2 + yiv_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$V = \begin{bmatrix} (\alpha + \mu)e \\ -\alpha e + (\mu + \mu_k + \gamma)i \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} me \\ -\alpha e + ni \end{bmatrix}$$

dengan

$$m = (\alpha + \mu), n = (\mu + \mu_k + \gamma), u = (1 - \delta)b, k = \sigma_1 b_1$$

$$x = \sigma_2 b_2, \text{ dan } y = \sigma_3 b_3$$

- Melakukan linearisasi terhadap matriks transmisi (F) dan matriks transisi (V) kedalam bentuk matriks \mathbb{F} dan matriks \mathbb{V} sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathbb{F} &= \frac{\partial F_i}{\partial e, i} (\hat{s}, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{e}, \hat{i}) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{de}{de} (\hat{s}, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{e}, \hat{i}) & \frac{de}{di} (\hat{s}, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{e}, \hat{i}) \\ \frac{di}{de} (\hat{s}, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{e}, \hat{i}) & \frac{di}{di} (\hat{s}, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{e}, \hat{i}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & (1 - \delta)b\hat{s} + \sigma_1 b_1 \hat{v}_1 + \sigma_2 b_2 \hat{v}_2 + \sigma_3 b_3 \hat{v}_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 - \delta)b \left(\frac{\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)} \right) + \sigma_1 b_1 \left(\frac{\delta\omega_1 \Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)} \right) + \sigma_2 b_2 \left(\frac{\delta\omega_1 \omega_2 \Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)(\omega_3 + \mu)} \right) \\ + \sigma_3 b_3 \left(\frac{\delta\omega_1 \omega_2 \omega_3 \Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)(\omega_3 + \mu)\mu} \right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbb{F} &= \begin{bmatrix} 0 & u \left(\frac{\Pi}{p} \right) + k \left(\frac{\delta\omega_1 \Pi}{pq} \right) + x \left(\frac{\delta\omega_1 \omega_2 \Pi}{pqr} \right) + y \left(\frac{\delta\omega_1 \omega_2 \omega_3 \Pi}{pqr\mu} \right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.37) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V} &= \frac{\partial V_i}{\partial e, i} (\hat{s}, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{e}, \hat{i}) \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{de}{de} (\hat{s}, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{e}, \hat{i}) & \frac{de}{di} (\hat{s}, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{e}, \hat{i}) \\ \frac{di}{de} (\hat{s}, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{e}, \hat{i}) & \frac{di}{di} (\hat{s}, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{e}, \hat{i}) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \alpha + \mu & 0 \\ -\alpha & \mu + \mu_k + \gamma \end{bmatrix} \\
 \mathbb{V} &= \begin{bmatrix} m & 0 \\ -\alpha & n \end{bmatrix} \tag{4.38}
 \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 m &= (\alpha + \mu), n = (\mu + \mu_k + \gamma), u = (1 - \delta)b, k = \sigma_1 b_1 \\
 x &= \sigma_2 b_2, y = \sigma_3 b_3, p = \delta \omega_1 + \mu, q = \omega_2 + \mu, \text{ dan } r = \omega_3 + \mu
 \end{aligned}$$

Persamaan (4.38) diinverskan, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}^{-1} &= \frac{1}{mn} \begin{bmatrix} n & 0 \\ \alpha & m \end{bmatrix} \\
 \mathbb{V}^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ \frac{\alpha}{mn} & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \tag{4.39}
 \end{aligned}$$

- Menentukan matriks *next generation matrix* (matriks generasi selanjutnya) dengan mencari nilai dari K

$$\begin{aligned}
K &= \mathbb{FV}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & u \left(\frac{\Pi}{p} \right) + k \left(\frac{\delta\omega_1\Pi}{pq} \right) + x \left(\frac{\delta\omega_1\omega_2\Pi}{pqr} \right) + y \left(\frac{\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{pqr\mu} \right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ \frac{\alpha}{mn} & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(\frac{(u\Pi\mu qr + k\delta\omega_1\Pi\mu r)}{+x\delta\omega_1\omega_2\Pi\mu} \right) & \left(\frac{(u\Pi\mu qr + k\delta\omega_1\Pi\mu r)}{+x\delta\omega_1\omega_2\Pi\mu} \right) \\ \frac{\alpha}{mn} \left(\frac{+y\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{\mu pqr} \right) & \frac{1}{n} \left(\frac{+y\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{\mu pqr} \right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Nilai eigen dari persamaan (4.40), yaitu

$$|\lambda I - K| = 0$$

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{mn} \left(\frac{(u\Pi\mu qr + k\delta\omega_1\Pi\mu r)}{+x\delta\omega_1\omega_2\Pi\mu} \right) & \frac{1}{n} \left(\frac{(u\Pi\mu qr + k\delta\omega_1\Pi\mu r)}{+x\delta\omega_1\omega_2\Pi\mu} \right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \\
&\begin{bmatrix} \lambda - \frac{\alpha}{mn} \left(\frac{(u\Pi\mu qr + k\delta\omega_1\Pi\mu r)}{+x\delta\omega_1\omega_2\Pi\mu} \right) & -\frac{1}{n} \left(\frac{(u\Pi\mu qr + k\delta\omega_1\Pi\mu r)}{+x\delta\omega_1\omega_2\Pi\mu} \right) \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0 \\
&\lambda \left[\lambda - \frac{\alpha}{mn} \left(\frac{u\Pi\mu qr + k\delta\omega_1\Pi\mu r + x\delta\omega_1\omega_2\Pi\mu + y\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{\mu pqr} \right) \right] = 0 \quad (4.41)
\end{aligned}$$

Dari persamaan (4.41) didapatkan

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha}{mn} \left(\frac{u\Pi\mu qr + k\delta\omega_1\Pi\mu r + x\delta\omega_1\omega_2\Pi\mu + y\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{\mu pqr} \right)$$

- Menentukan hasil bilangan reproduksi besar dengan menentukan nilai eigen terbesar sebagai berikut:

$$R_0 = \rho(\mathbb{F}\mathbb{V}^{-1})$$

$$= \frac{\alpha}{mn} \left(\frac{u\Pi\mu qr + k\delta\omega_1\Pi\mu r + x\delta\omega_1\omega_2\Pi\mu + y\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{\mu pqr} \right)$$

Jadi, diperoleh bilangan reproduksi dasarnya adalah

$$R_0 = \left(\frac{\alpha u\Pi\mu qr + \alpha k\delta\omega_1\Pi\mu r + \alpha x\delta\omega_1\omega_2\Pi\mu + \alpha y\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{mn\mu pqr} \right) \quad (4.42)$$

4.2.3. Titik Keseimbangan Endemik

Misalkan $(s^*, v_1^*, v_2^*, v_3^*, e^*, i^*)$ merupakan titik kesetimbangan endemik dari model penyebaran Covid-19 pada sistem persamaan (4.10), maka titik kesetimbangan tersebut diperoleh ketika dalam suatu populasi terjadi penyebaran penyakit ($i^* > 0$). Langkah dalam memperoleh hasil dari titik kesetimbangan endemik pada sistem persamaan (4.10) sebagai berikut:

Mencari hasil dari s^* yang diperoleh dari persamaan (4.26) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 & \Pi - (1 - \delta)bsi - \delta\omega_1s - \mu s = 0 \\
 & \Leftrightarrow \Pi - [(1 - \delta)bi + (\delta\omega_1 + \mu)]s = 0 \\
 & \Leftrightarrow [(1 - \delta)bi + (\delta\omega_1 + \mu)]s = \Pi \\
 & \Leftrightarrow s^* = \frac{\Pi}{(1 - \delta)bi^* + (\delta\omega_1 + \mu)} \\
 & \Leftrightarrow s^* = \frac{\Pi}{ui^* + p} \tag{4.43}
 \end{aligned}$$

Mencari hasil dari v_1^* dengan mensubstitusikan persamaan (4.43) ke persamaan (4.27)

$$\begin{aligned}
 & \delta\omega_1s - \sigma_1b_1iv_1 - \omega_2v_1 - \mu v_1 = 0 \\
 & \Leftrightarrow \delta\omega_1\left(\frac{\Pi}{ui^* + p}\right) - (\sigma_1b_1i + \omega_2 + \mu)v_1 = 0 \\
 & \Leftrightarrow (\sigma_1b_1i + \omega_2 + \mu)v_1 = \delta\omega_1\left(\frac{\Pi}{ui^* + p}\right) \\
 & \Leftrightarrow v_1^* = \frac{\delta\omega_1\Pi}{(ui^* + p)(\sigma_1b_1i^* + \omega_2 + \mu)} \\
 & \Leftrightarrow v_1^* = \frac{\delta\omega_1\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)} \tag{4.44}
 \end{aligned}$$

Mencari hasil dari v_2^* dengan mensubstitusikan persamaan (4.44) ke persamaan (4.28)

$$\begin{aligned}
& \omega_2 v_1 - \sigma_2 b_2 i v_2 - \omega_3 v_2 - \mu v_2 = 0 \\
& \Leftrightarrow \omega_2 \left(\frac{\delta \omega_1 \Pi}{(u i^* + p)(k i^* + q)} \right) - (\sigma_2 b_2 i + \omega_3 + \mu) v_2 = 0 \\
& \Leftrightarrow (\sigma_2 b_2 i + \omega_3 + \mu) v_2 = \omega_2 \left(\frac{\delta \omega_1 \Pi}{(u i^* + p)(k i^* + q)} \right) \\
& \Leftrightarrow v_2^* = \frac{\omega_2 \delta \omega_1 \Pi}{(u i^* + p)(k i^* + q)(\sigma_2 b_2 i^* + \omega_3 + \mu)} \\
& \Leftrightarrow v_2^* = \frac{\delta \omega_1 \omega_2 \Pi}{(u i^* + p)(k i^* + q)(x i^* + r)} \tag{4.45}
\end{aligned}$$

Mencari hasil dari v_3^* dengan mensubstitusikan persamaan (4.45) ke persamaan (4.29)

$$\begin{aligned}
& \omega_3 v_2 - \sigma_3 b_3 i v_3 - \mu v_3 = 0 \\
& \Leftrightarrow \omega_3 \left(\frac{\delta \omega_1 \omega_2 \Pi}{(u i^* + p)(k i^* + q)(x i^* + r)} \right) - (\sigma_3 b_3 i + \mu) v_3 = 0 \\
& \Leftrightarrow (\sigma_3 b_3 i + \mu) v_3 = \omega_3 \left(\frac{\delta \omega_1 \omega_2 \Pi}{(u i^* + p)(k i^* + q)(x i^* + r)} \right) \\
& \Leftrightarrow v_3^* = \frac{\omega_3 \delta \omega_1 \omega_2 \Pi}{(u i^* + p)(k i^* + q)(x i^* + r)(\sigma_3 b_3 i^* + \mu)} \\
& \Leftrightarrow v_3^* = \frac{\delta \omega_1 \omega_2 \omega_3 \Pi}{(u i^* + p)(k i^* + q)(x i^* + r)(y i^* + \mu)} \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Mencari hasil dari e^* dengan mensubstitusikan persamaan (4.43) sampai persamaan (4.46) ke persamaan (4.30)

$$\begin{aligned}
(1-\delta)bsi - \alpha e + \sigma_1 b_1 i v_1 + \sigma_2 b_2 i v_2 + \sigma_3 b_3 i v_3 - \mu e &= 0 \\
\Leftrightarrow -(\alpha + \mu)e + ((1-\delta)bs + \sigma_1 b_1 v_1 + \sigma_2 b_2 v_2 + \sigma_3 b_3 v_3)i &= 0 \\
\Leftrightarrow (\alpha + \mu)e = ((1-\delta)bs + \sigma_1 b_1 v_1 + \sigma_2 b_2 v_2 + \sigma_3 b_3 v_3)i & \\
\Rightarrow e^* = \frac{\left(u \left(\frac{\Pi}{ui^* + p} \right) + k \left(\frac{\delta \omega_1 \Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)} \right) + x \left(\frac{\delta \omega_1 \omega_2 \Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)} \right) \right.}{m} & \\
\left. + y \left(\frac{\delta \omega_1 \omega_2 \omega_3 \Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)(yi^* + \mu)} \right) \right) i^* & \\
\Rightarrow e^* = \frac{i^*}{m} \left[u \left(\frac{\Pi}{ui^* + p} \right) + k \left(\frac{\delta \omega_1 \Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)} \right) + x \left(\frac{\delta \omega_1 \omega_2 \Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)} \right) \right. & \quad (4.47) \\
\left. + y \left(\frac{\delta \omega_1 \omega_2 \omega_3 \Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)(yi^* + \mu)} \right) \right] &
\end{aligned}$$

Mencari hasil dari i^* dengan mensubstitusikan persamaan (4.47) ke persamaan (4.31)

$$\begin{aligned}
\alpha e - (\mu + \mu_k)i - \gamma i &= 0 \\
\Leftrightarrow \alpha e^* - (\mu + \mu_k + \gamma)i^* &= 0 \\
\Leftrightarrow (\mu + \mu_k + \gamma)i^* &= \alpha e^* \\
\Leftrightarrow i^* &= \frac{\alpha e^*}{(\mu + \mu_k + \gamma)} \\
\Leftrightarrow i^* &= \frac{\alpha}{n} e^*
\end{aligned}$$

Substitusikan persamaan (4.47) ke persamaan i^* sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow i^* = \frac{\alpha}{n} \frac{i^*}{m} \left[\begin{array}{l} u \left(\frac{\Pi}{ui^* + p} \right) + k \left(\frac{\delta\omega_1\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)} \right) + x \left(\frac{\delta\omega_1\omega_2\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)} \right) \\ + y \left(\frac{\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)(yi^* + \mu)} \right) \end{array} \right]$$

Bagi kedua ruas dari persamaan diatas dengan i^* sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{\alpha}{nm} \left[\begin{array}{l} (u\Pi(ki^* + q)(xi^* + r)(yi^* + \mu) + k\delta\omega_1\Pi(xi^* + r)(yi^* + \mu) \\ + x\delta\omega_1\omega_2\Pi(yi^* + \mu) + y\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi) \end{array} \right] \\ \frac{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)(yi^* + \mu)}$$

Bagi kedua ruas dari persamaan diatas dengan $\frac{\alpha}{nm}$ sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow \frac{nm}{\alpha} = \left[\begin{array}{l} (u\Pi(kxi^{*2} + kri^* + qxi^* + qr)(yi^* + \mu) + k\delta\omega_1\Pi(xyi^{*2} + x\mu^* + ryi^* + r\mu) \\ + x\delta\omega_1\omega_2\Pi(yi^* + \mu) + y\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi) \end{array} \right] \\ \frac{(uki^{*2} + uqi^* + pki^* + pq)(xyi^{*2} + x\mu^* + ryi^* + r\mu)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{nm}{\alpha} = \left[\begin{array}{l} (u\Pi(kxyi^{*3} + kx\mu^{*2} + kryi^{*2} + kr\mu^* + qxyi^{*2} + qx\mu^* + qryi^* + qr\mu) \\ + (k\delta\omega_1\Pi xyi^{*2} + k\delta\omega_1\Pi x\mu^* + k\delta\omega_1\Pi ryi^* + k\delta\omega_1\Pi r\mu) \\ + (x\delta\omega_1\omega_2\Pi yi^* + x\delta\omega_1\omega_2\Pi \mu) + y\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi) \end{array} \right] \\ \frac{(ukxyi^{*4} + ukx\mu^{*3} + ukryi^{*3} + ukr\mu^{*2} + uqxyi^{*3} + \\ uqx\mu^{*2} + uqryi^{*2} + uqr\mu^* + pkxyi^{*3} + pkx\mu^{*2} + \\ pkryi^{*2} + pkr\mu^* + pqxyi^{*2} + pqx\mu^* + pqryi^* + pqr\mu)}$$

Kalikan silang kedua ruas persamaan diatas sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow nm \left[ukxyi^{*4} + ukx\mu i^{*3} + ukryi^{*3} + ukr\mu i^{*2} + uqxyi^{*3} + uqx\mu i^{*2} \right. \\
 &\quad + uqryi^{*2} + uqr\mu i^{*} + pkxyi^{*3} + pkx\mu i^{*2} + pkryi^{*2} + pkr\mu i^{*} \\
 &\quad + pqxyi^{*2} + pqx\mu i^{*} + pqryi^{*} + pqr\mu] = \alpha \left[u\Pi kxyi^{*3} + u\Pi kx\mu i^{*2} \right. \\
 &\quad + u\Pi kryi^{*2} + u\Pi kr\mu i^{*} + u\Pi qxyi^{*2} + u\Pi qx\mu i^{*} + u\Pi qryi^{*} + u\Pi qr\mu \\
 &\quad + k\delta\omega_1\Pi xyi^{*2} + k\delta\omega_1\Pi x\mu i^{*} + k\delta\omega_1\Pi ryi^{*} + k\delta\omega_1\Pi r\mu + x\delta\omega_1\omega_2\Pi yi^{*} \\
 &\quad \left. + x\delta\omega_1\omega_2\Pi\mu + y\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi \right] \\
 &\Leftrightarrow \left[ukxynmi^{*4} + ukx\mu nmi^{*3} + ukrynmi^{*3} + ukr\mu nmi^{*2} + uqxyynmi^{*3} \right. \\
 &\quad + uqx\mu nmi^{*2} + uqrynmi^{*2} + uqr\mu nmi^{*} + pkxyynmi^{*3} + pkx\mu nmi^{*2} \\
 &\quad + pkrynmi^{*2} + pkr\mu nmi^{*} + pqxyynmi^{*2} + pqx\mu nmi^{*} + pqrynmi^{*} \\
 &\quad + pqr\mu nmi] = \left[u\Pi\alpha kxyi^{*3} + u\Pi\alpha kx\mu i^{*2} + u\Pi\alpha kryi^{*2} + u\Pi\alpha kr\mu i^{*} \right. \\
 &\quad + u\Pi\alpha qxyi^{*2} + u\Pi\alpha qx\mu i^{*} + u\Pi\alpha qryi^{*} + u\Pi\alpha qr\mu + \alpha k\delta\omega_1\Pi xyi^{*2} \\
 &\quad + \alpha k\delta\omega_1\Pi x\mu i^{*} + \alpha k\delta\omega_1\Pi ryi^{*} + \alpha k\delta\omega_1\Pi r\mu + \alpha x\delta\omega_1\omega_2\Pi yi^{*} \\
 &\quad \left. + \alpha x\delta\omega_1\omega_2\Pi\mu + \alpha y\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi \right]
 \end{aligned}$$

Pindahkan ruas kanan ke ruas kiri sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \left[ukxynmi^{*4} + ukx\mu nmi^{*3} + ukrynmi^{*3} + ukr\mu nmi^{*2} + uqxyynmi^{*3} \right. \\
 &\quad + uqx\mu nmi^{*2} + uqrynmi^{*2} + uqr\mu nmi^{*} + pkxyynmi^{*3} + pkx\mu nmi^{*2} \\
 &\quad + pkrynmi^{*2} + pkr\mu nmi^{*} + pqxyynmi^{*2} + pqx\mu nmi^{*} + pqrynmi^{*} \\
 &\quad + pqr\mu nmi] - \left[u\Pi\alpha kxyi^{*3} + u\Pi\alpha kx\mu i^{*2} + u\Pi\alpha kryi^{*2} + u\Pi\alpha kr\mu i^{*} \right. \\
 &\quad + u\Pi\alpha qxyi^{*2} + u\Pi\alpha qx\mu i^{*} + u\Pi\alpha qryi^{*} + u\Pi\alpha qr\mu + \alpha k\delta\omega_1\Pi xyi^{*2} \\
 &\quad + \alpha k\delta\omega_1\Pi x\mu i^{*} + \alpha k\delta\omega_1\Pi ryi^{*} + \alpha k\delta\omega_1\Pi r\mu + \alpha x\delta\omega_1\omega_2\Pi yi^{*} \\
 &\quad \left. + \alpha x\delta\omega_1\omega_2\Pi\mu + \alpha y\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi \right] = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (ukxynm)i^{*4} + (ukx\mu nm + ukrynm + uqxy nm + pkxynm - u\Pi\alpha kxy)i^{*3} \\
&\quad + \left(\begin{array}{l} ukr\mu nm + uqx\mu nm + uqrynm + pkx\mu nm + pkrynm + pqxy nm \\ -u\Pi\alpha kx\mu - u\Pi\alpha kry - u\Pi\alpha qxy - \alpha k\delta\omega_1\Pi xy \end{array} \right) i^{*2} \\
&\quad + \left(\begin{array}{l} uqr\mu nm + pkr\mu nm + pqx\mu nm + pqrynm - u\Pi\alpha kr\mu - u\Pi\alpha qx\mu \\ -u\Pi\alpha qry - \alpha k\delta\omega_1\Pi x\mu - \alpha k\delta\omega_1\Pi ry - \alpha x\delta\omega_1\omega_2\Pi y \end{array} \right) i^{*} \\
&\quad + (pqr\mu nm - u\Pi\alpha qr\mu - \alpha k\delta\omega_1\Pi r\mu - \alpha x\delta\omega_1\omega_2\Pi\mu - \alpha y\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi) = 0
\end{aligned}$$

Bagi kedua ruas dari persamaan diatas dengan $pqr\mu nm$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(\frac{ukxy}{pqr\mu} \right) i^{*4} + \left(\frac{ukx\mu nm + ukrynm + uqxy nm + pkxynm - u\Pi\alpha kxy}{pqr\mu nm} \right) i^{*3} \\
&\quad + \left(\frac{\begin{array}{l} (ukr\mu nm + uqx\mu nm + uqrynm + pkx\mu nm + pkrynm + pqxy nm) \\ -u\Pi\alpha kx\mu - u\Pi\alpha kry - u\Pi\alpha qxy - \alpha k\delta\omega_1\Pi xy \end{array}}{pqr\mu nm} \right) i^{*2} \\
&\quad + \left(\frac{\begin{array}{l} (uqr\mu nm + pkr\mu nm + pqx\mu nm + pqrynm - u\Pi\alpha kr\mu - u\Pi\alpha qx\mu) \\ -u\Pi\alpha qry - \alpha k\delta\omega_1\Pi x\mu - \alpha k\delta\omega_1\Pi ry - \alpha x\delta\omega_1\omega_2\Pi y \end{array}}{pqr\mu nm} \right) i^{*} \\
&\quad + \left(1 - \frac{u\Pi\alpha qr\mu + \alpha k\delta\omega_1\Pi r\mu + \alpha x\delta\omega_1\omega_2\Pi\mu + \alpha y\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{pqr\mu nm} \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\text{Karena } R_0 = \frac{u\Pi\alpha qr\mu + \alpha k\delta\omega_1\Pi r\mu + \alpha x\delta\omega_1\omega_2\Pi\mu + \alpha y\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{pqr\mu nm},$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(\frac{ukxy}{pqr\mu} \right) i^{*4} + \left(\frac{ukx\mu nm + ukrynm + uqxy nm + pkxy nm - u\Pi\alpha kxy}{pqr\mu nm} \right) i^{*3} \\
&+ \left(\frac{(ukr\mu nm + uqx\mu nm + uqry nm + pkx\mu nm + pkry nm + pqxy nm) - u\Pi\alpha kx\mu - u\Pi\alpha kry - u\Pi\alpha qxy - \alpha k\delta\omega_1\Pi xy}{pqr\mu nm} \right) i^{*2} \\
&+ \left(\frac{(uqr\mu nm + pkr\mu nm + pqx\mu nm + pqry nm - u\Pi\alpha kr\mu - u\Pi\alpha qx\mu) - u\Pi\alpha qry - \alpha k\delta\omega_1\Pi x\mu - \alpha k\delta\omega_1\Pi ry - \alpha x\delta\omega_1\omega_2\Pi y}{pqr\mu nm} \right) i^{*} \\
&+ (1 - R_0) = 0
\end{aligned} \tag{4.48}$$

dengan

$$m = (\alpha + \mu), n = (\mu + \mu_k + \gamma), u = (1 - \delta)b, k = \sigma_1 b_1$$

$$x = \sigma_2 b_2, y = \sigma_3 b_3, p = \delta\omega_1 + \mu, q = \omega_2 + \mu, \text{ dan } r = \omega_3 + \mu$$

Sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow Ai^{*4} + Bi^{*3} + Ci^{*2} + Di^{*} + E = 0 \tag{4.49}$$

dengan

$$A = \frac{ukxy}{pqr\mu}$$

$$B = \frac{ukx\mu nm + ukry nm + uqxy nm + pkxy nm - u\Pi\alpha kxy}{pqr\mu nm}$$

$$C = \frac{(ukr\mu nm + uqx\mu nm + uqry nm + pkx\mu nm + pkry nm + pqxy nm) - u\Pi\alpha kx\mu - u\Pi\alpha kry - u\Pi\alpha qxy - \alpha k\delta\omega_1\Pi xy}{pqr\mu nm}$$

$$D = \frac{(uqr\mu nm + pkr\mu nm + pqx\mu nm + pqrynm - u\Pi\alpha k r\mu - u\Pi\alpha q x\mu - u\Pi\alpha q r y - \alpha k\delta\omega_1\Pi x\mu - \alpha k\delta\omega_1\Pi r y - \alpha x\delta\omega_1\omega_2\Pi y)}{pqr\mu nm}$$

$$E = (1 - R_0)$$

Untuk mendapatkan nilai i^* , dapat dilakukan dengan mencari akar positif dari persamaan (4.49). Dalam mencari akar positif dari persamaan tersebut dapat digunakan metode aturan tanda Descartes untuk mendapatkan setidaknya satu akar positif dengan memperhatikan jumlah perubahan tanda koefisien setidaknya satu perubahan tanda dalam persamaan tersebut (Wang, 2004). Diperhatikan bahwa

$$A = \frac{ukxy}{pqr\mu} \quad (4.50)$$

Dari persamaan (4.50) terlihat jelas bahwa nilai dari A adalah positif, lalu persamaan selanjutnya yaitu

$$B = \frac{ukx\mu nm + ukrynm + uqxynm + pkxynm - u\Pi\alpha kxy}{pqr\mu nm} \quad (4.51)$$

Dari persamaan (4.51) terlihat bahwa nilai dari B dapat bernilai positif atau negatif, kemudian persamaan selanjutnya yaitu

$$C = \frac{(ukr\mu nm + uqx\mu nm + uqryn m + pkx\mu nm + pkryn m + pqxy nm - u\Pi\alpha kx\mu - u\Pi\alpha kry - u\Pi\alpha qxy - \alpha k\delta\omega_1\Pi xy)}{pqr\mu nm} \quad (4.52)$$

Dari persamaan (4.52) terlihat bahwa nilai dari C dapat bernilai positif atau negatif, kemudian persamaan selanjutnya yaitu

$$D = \frac{(uqr\mu nm + pkr\mu nm + pqx\mu nm + pqryn m - u\Pi\alpha kr\mu - u\Pi\alpha qx\mu - u\Pi\alpha qry - \alpha k\delta\omega_1\Pi x\mu - \alpha k\delta\omega_1\Pi ry - \alpha x\delta\omega_1\omega_2\Pi y)}{pqr\mu nm} \quad (4.53)$$

Dari persamaan (4.53) terlihat bahwa nilai dari D dapat bernilai positif atau negatif, kemudian persamaan selanjutnya yaitu

$$E = (1 - R_0) \quad (4.54)$$

Dari persamaan (4.54) terlihat bahwa apabila $R_0 > 1$ maka nilai dari E bernilai negatif.

Oleh karena itu, persamaan (4.49) mempunyai kemungkinan-kemungkinan dalam mengubah tanda koefisien pada persamaan tersebut. Kemungkinan-kemungkinan tersebut terlihat pada tabel berikut.

Tabel 4.3 Kemungkinan Tanda Koefisien B , C , dan D

B	C	D
+	+	+
+	+	-
+	-	+
+	-	-
-	+	+
-	+	-
-	-	+
-	-	-

Berdasarkan Tabel 4.3 terlihat bahwa terdapat delapan kemungkinan terjadinya perubahan tanda koefisien. Karena persamaan A bernilai positif dan persamaan E bernilai negatif, sehingga dapat ditentukan kemungkinan terjadinya perubahan nilai dari setiap koefisien pada persamaan (4.49) sebagai berikut.

Tabel 4.4 Seluruh Kemungkinan Tanda Koefisien dari Persamaan (4.49)

Banyaknya Kemungkinan	A	B	C	D	E	Banyaknya Perubahan Tanda	Banyaknya Akar Real Positif*
Kemungkinan 1	+	+	+	+	-	1	1
Kemungkinan 2	+	+	+	-	-	1	1
Kemungkinan 3	+	+	-	+	-	3	1,3
Kemungkinan 4	+	+	-	-	-	1	1
Kemungkinan 5	+	-	+	+	-	3	1,3

Kemungkinan 6	+	-	+	-	-	3	1,3
Kemungkinan 7	+	-	-	+	-	3	1,3
Kemungkinan 8	+	-	-	-	-	1	1

***Dapat dilihat pada Lampiran 1**

Karena terdapat delapan kemungkinan dalam persamaan (4.49) dan setiap kemungkinan mengalami perubahan tanda koefisien, sehingga menurut aturan tanda Descartes, persamaan tersebut mempunyai setidaknya satu akar positif apabila terdapat setidaknya satu perubahan tanda koefisien. Dikarenakan pada persamaan (4.49), nilai dari A selalu positif dan $E < 0$ apabila $R_0 > 1$, sehingga agar t^* memiliki tepat satu akar real positif maka harus memenuhi kemungkinan-kemungkinan yang ada sesuai dengan Tabel 4.4, yaitu :

- Kemungkinan 1, yaitu ketika $B > 0, C > 0$ dan $D > 0$
- Kemungkinan 2, yaitu ketika $B > 0, C > 0$ dan $D < 0$
- Kemungkinan 4, yaitu ketika $B > 0, C < 0$ dan $D < 0$
- Kemungkinan 8, yaitu ketika $B < 0, C < 0$ dan $D < 0$

4.3. Simulasi Numerik Model Matematika Penyebaran Covid-19 dengan Adanya Vaksinasi Dosis Pertama, Kedua, dan Ketiga

Simulasi numerik pada model penyebaran Covid-19 dengan melibatkan vaksinasi dosis pertama hingga ketiga

digunakan untuk membuktikan kebenaran dari Teorema 4.3 dan perhitungan dari bilangan reproduksi dasar serta mengetahui keadaan penyakit di suatu wilayah dengan mensubstitusikan nilai dari parameter yang ada. Simulasi ini dilakukan dengan memanfaatkan software MATLAB R2017a. Nilai parameter yang digunakan dalam model penyebaran Covid-19 ini diperoleh dari penelitian sebelumnya, sedangkan jumlah seluruh populasi dan setiap subpopulasi diperoleh dari data BPS (Badan Pusat Statistik Kota Semarang, 2022) dan kasus Covid-19 di Kota Semarang pada tahun 2022. Data yang telah diperoleh diantaranya S (*Susceptible*) = 989.150, V_1 (*Vaccinated 1*) = 236.408, V_2 (*Vaccinated 2*) = 168.919, V_3 (*Vaccinated 3*) = 108.709, E (*Exposed*) = 25.127, I (*Infected*) = 27.741, R (*Recovered*) = 100.510, N (jumlah populasi di Kota Semarang) = 1.656.564.

4.3.1. Simulasi Ketika Bebas Penyakit

Nilai awal yang digunakan untuk melakukan simulasi ketika bebas penyakit adalah $S(0) = 0,598$, $V_1(0) = 0,143$, $V_2(0) = 0,102$, $V_3(0) = 0,066$, $E(0) = 0,015$, $I(0) = 0,017$. Nilai awal tersebut diperoleh dari hasil bagi antara jumlah setiap subpopulasi dengan jumlah populasi di Kota Semarang sesuai dengan data yang telah diperoleh. Sedangkan,

nilai parameter yang digunakan untuk memperoleh hasil simulasi penyebaran Covid-19 dengan melibatkan vaksinasi dosis pertama hingga ketiga ditunjukkan pada Tabel 4.5 :

Tabel 4.5 Nilai Parameter ketika $R_0 < 1$

Parameter	Nilai	Sumber
μ	0,013	Asumsi
Π	0,67	Asumsi
β	0,007	(Fitriyah, 2022)
α	0,001	(Pal dkk, 2022)
γ	0,09	(Wu dkk, 2020)
ω_1	0,022	(Fitriyah, 2022)
ω_2	0,0071	(Fitriyah, 2022)
ω_3	0,0056	(Fonseca dkk., 2022)
σ_1	0,447	(Fitriyah, 2022)
σ_2	0,22	(Simatupang, 2021)
σ_3	0,8	(Dyer, 2021)
β_1	0,005	(Fitriyah, 2022)
β_2	0,002	(Fitriyah, 2022)
β_3	0,01	(Menni dkk, 2022)
μ_k	0,002	(Nainggolan, 2021)
δ	0,31	(Badan Pusat Statistika Kota Semarang, 2022) dan (Dinkes, 2022)

Pada Tabel 4.5 terdapat nilai parameter yang diasumsikan yaitu μ (laju kematian alami) dan Π (laju kelahiran). Nilai μ diperoleh dari 1 per angka harapan hidup di Kota Semarang. Angka harapan hidup di Kota

Semarang adalah 74 tahun, sehingga nilai $\mu = \frac{1}{74} = 0,013$. Nilai Π diperoleh dari selisih antara banyaknya populasi di Kota Semarang tahun 2022 dengan tahun 2021 per 365 hari, sehingga nilai $\Pi = \frac{1.656.564 - 1.656.319}{365} = \frac{245}{365} = 0,67$.

Berdasarkan nilai parameter yang terdapat pada Tabel 4.5, maka diperoleh hasil bilangan reproduksi dasar yaitu

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \left(\frac{\alpha u \Pi \mu q r + \alpha k \delta \omega_1 \Pi \mu r + \alpha x \delta \omega_1 \omega_2 \Pi \mu + \alpha y \delta \omega_1 \omega_2 \omega_3 \Pi}{m n \mu p q r} \right) \\
 &= \frac{((0,001)(0,0048)(0,67)(0,013)(0,0201)(0,0186) \\
 &\quad + (0,001)(0,0022)(0,31)(0,022)(0,67)(0,013)(0,0186) \\
 &\quad + (0,001)(0,00044)(0,31)(0,022)(0,0071)(0,67)(0,013) \\
 &\quad + (0,001)(0,008)(0,31)(0,022)(0,0071)(0,0056)(0,67))}{(0,014)(0,105)(0,013)(0,0198)(0,0201)(0,0186)} \\
 &= \frac{0,00000000019836}{0,0000000001416} \\
 &\approx 0,14 \\
 &< 1
 \end{aligned}$$

Karena $R_0 < 1$ maka dapat disimpulkan bahwa Covid-19 tidak menyebar atau bebas dari penyakit tersebut dalam kurun waktu tertentu dengan titik kesetimbangan bebas penyakit sebagai berikut:

a. Titik kesetimbangan subpopulasi rentan (S)

$$\begin{aligned}\hat{s} &= \frac{\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)} \\ &= \frac{0,67}{((0,31)(0,022) + (0,013))} \\ &= \frac{0,67}{0,00682 + 0,013} \\ &= \frac{0,67}{0,01982} \\ &= 33,804\end{aligned}$$

b. Titik kesetimbangan subpopulasi tervaksinasi dosis pertama (V_1)

$$\begin{aligned}\hat{v}_1 &= \frac{\delta\omega_1\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)} \\ &= \frac{(0,31)(0,022)(0,67)}{((0,31)(0,022) + 0,013)(0,0071 + 0,013)} \\ &= \frac{0,0045694}{(0,01982)(0,0201)} \\ &= \frac{0,0045694}{0,000398382} \\ &= 11,47\end{aligned}$$

c. Titik kesetimbangan subpopulasi tervaksinasi dosis kedua (V_2)

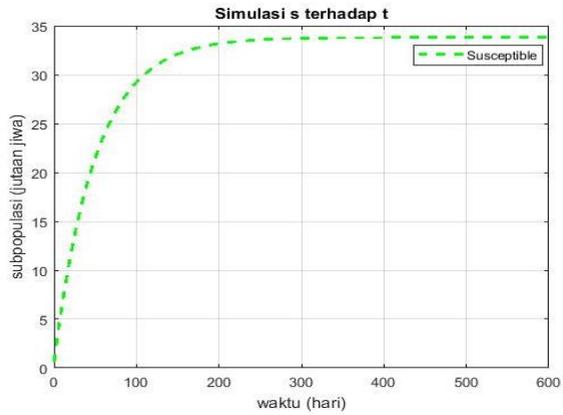
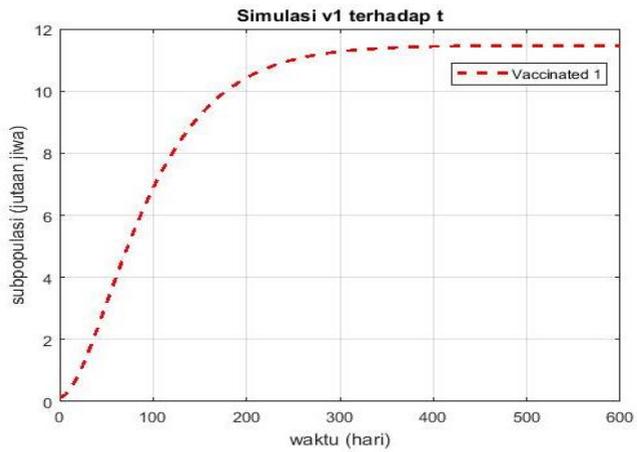
$$\begin{aligned}\hat{v}_2 &= \frac{\delta\omega_1\omega_2\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)(\omega_3 + \mu)} \\ &= \frac{(0,31)(0,022)(0,0071)(0,67)}{((0,31)(0,022) + 0,013)(0,0071 + 0,013)(0,0056 + 0,013)} \\ &= \frac{0,00003244274}{(0,01982)(0,0201)(0,0186)} \\ &= \frac{0,00003244274}{0,0000074099052} \\ &= 4,378\end{aligned}$$

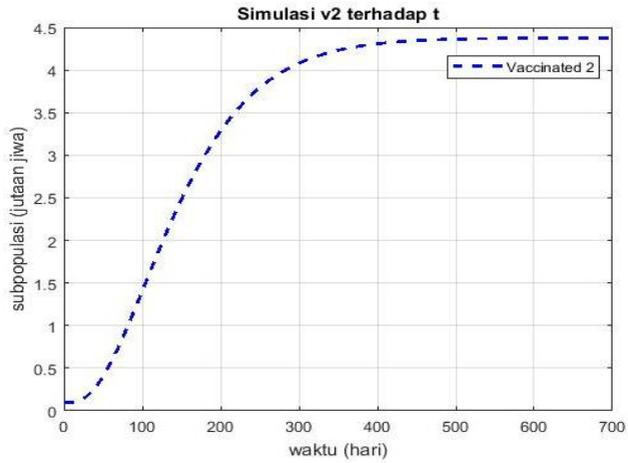
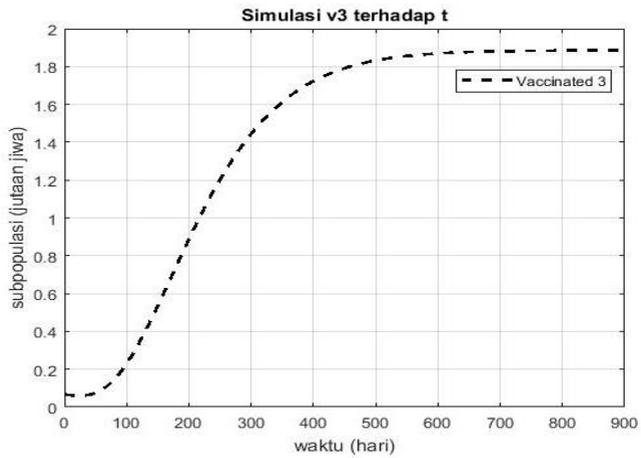
d. Titik kesetimbangan subpopulasi tervaksinasi dosis ketiga (V_3)

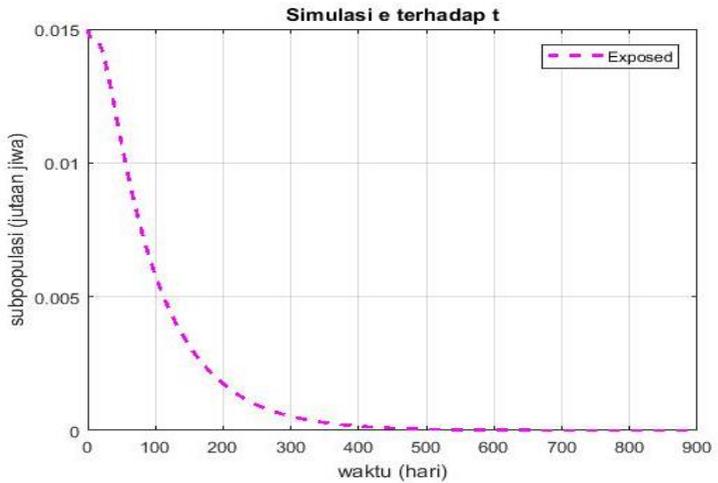
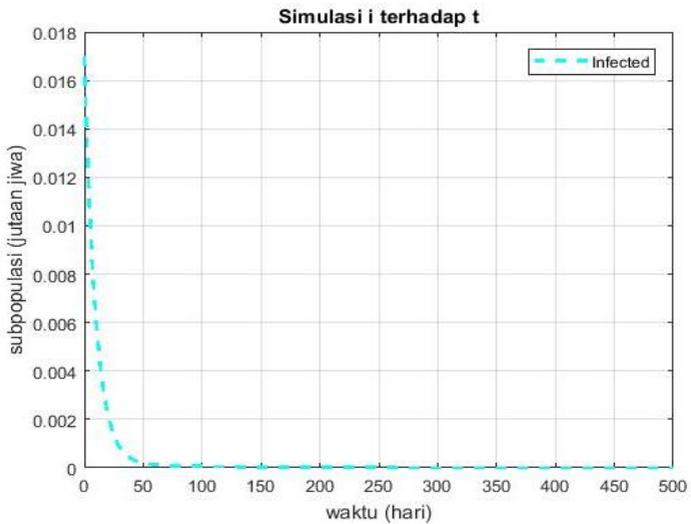
$$\begin{aligned}
 \hat{v}_3 &= \frac{\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)(\omega_3 + \mu)\mu} \\
 &= \frac{(0,31)(0,022)(0,0071)(0,0056)(0,67)}{\left[\left((0,31)(0,022) + 0,013 \right) \left(0,0071 + 0,013 \right) \left(0,0056 + 0,013 \right) \right.} \\
 &\quad \left. (0,013) \right]} \\
 &= \frac{0,000000181679344}{(0,01982)(0,0201)(0,0186)(0,013)} \\
 &= \frac{0,000000181679344}{0,0000000963287676} \\
 &= 1,88
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (4.36), maka diperoleh $\hat{e} = 0$.

Jadi, diperoleh $TK_1 = (33,804; 11,47; 4,378; 1,88; 0; 0)$. Selanjutnya, ditunjukkan hasil simulasi ketika bebas penyakit dengan menggunakan MATLAB R2017a yang terlihat pada Gambar 4.2 – Gambar 4.7 dan disajikan dengan rentang waktu harian hingga 600 hari dan 900 hari sebagai berikut:

Gambar 4.2 Simulasi variabel \hat{s} Gambar 4.3 Simulasi variabel \hat{v}_1

Gambar 4.4 Simulasi variabel \hat{v}_2 Gambar 4.5 Simulasi variabel \hat{v}_3

Gambar 4.6 Simulasi variabel \hat{e} Gambar 4.7 Simulasi variabel \hat{i}

Berdasarkan Gambar 4.2 subpopulasi rentan (S) mengalami peningkatan sampai hari ke-400 dengan

solusi sebesar 33,804 dan menuju keadaan setimbang. Selanjutnya, pada Gambar 4.3 subpopulasi yang tervaksinasi dosis pertama (V_1) mengalami peningkatan sampai hari ke-500 dengan solusi sebesar 11,47 dan menuju ke keadaan yang setimbang, lalu pada Gambar 4.4 subpopulasi yang tervaksinasi dosis kedua (V_2) mengalami peningkatan sampai hari ke-600 dengan solusi sebesar 4,378 dan menuju ke keadaan yang setimbang.

Pada Gambar 4.5 subpopulasi yang tervaksinasi dosis ketiga (V_3) mengalami peningkatan sampai hari ke-700 dengan solusi sebesar 1,88 dan menuju ke keadaan yang setimbang, kemudian pada Gambar 4.6 subpopulasi yang terpapar Covid-19 (E) mengalami penurunan sampai hari ke-750 dengan solusi sebesar 0 dan menuju ke keadaan yang setimbang. Selanjutnya, pada Gambar 4.7 subpopulasi yang terinfeksi Covid-19 (I) mengalami penurunan sampai hari ke-300 dengan solusi sebesar 0 dan menuju ke keadaan yang setimbang. Berdasarkan penjelasan dari Gambar 4.2 – Gambar 4.7, dapat disimpulkan bahwa setiap subpopulasi menuju ke titik kesetimbangan bebas penyakit (TK_1). Hal tersebut dapat dilihat dari solusi

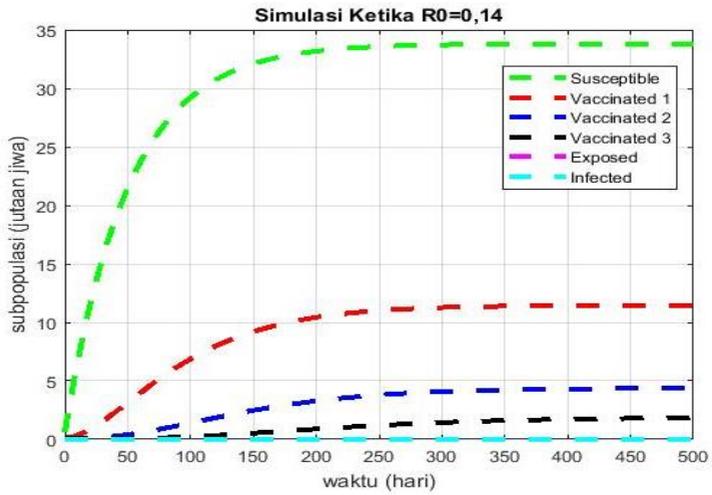
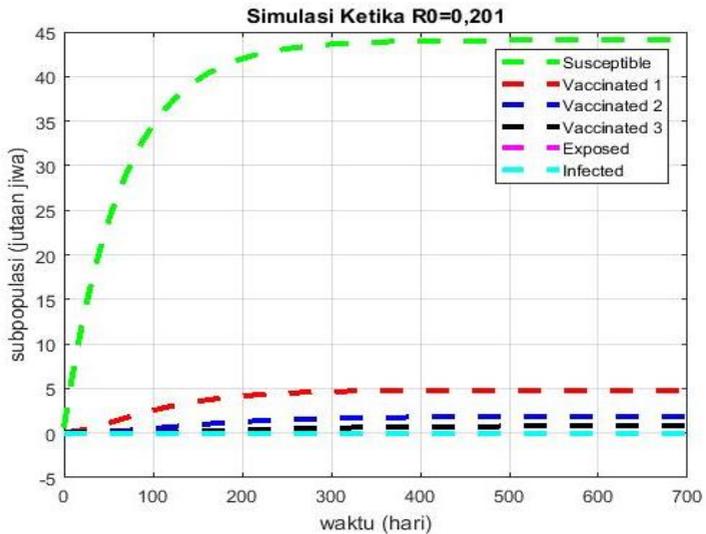
setiap subpopulasi S, V_1, V_2, V_3, E , dan I secara berurutan menuju 33,804; 11,47; 4,378; 1,88; 0; 0.

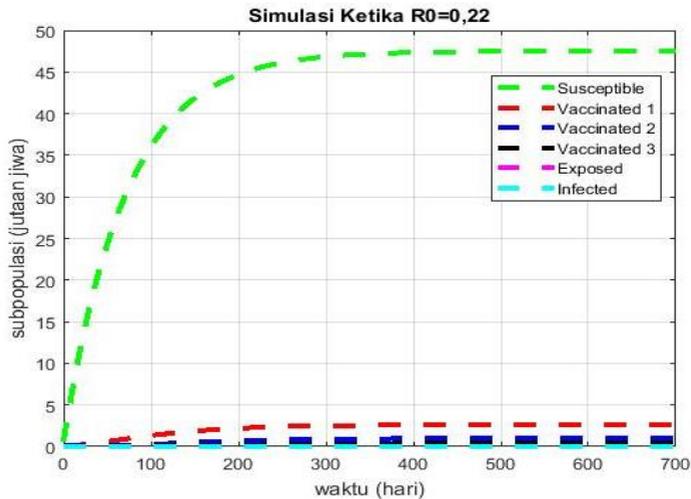
Selanjutnya, ditampilkan plot dengan nilai bilangan reproduksi dasar (R_0) yang berbeda yaitu ketika $R_0 = 0,14$; $R_0 = 0,201$; dan $R_0 = 0,22$ untuk melihat kondisi dari titik kesetimbangan bebas penyakit. Bilangan reproduksi dasar yang berbeda ini diperoleh dengan mengganti nilai parameter δ yang disajikan dalam Tabel 4.6 berikut:

Tabel 4.6 Nilai Parameter δ untuk $R_0 = 0,14$; $R_0 = 0,201$; dan $R_0 = 0,22$

Parameter	Nilai Parameter untuk $R_0 = 0,14$	Nilai Parameter untuk $R_0 = 0,201$	Nilai Parameter untuk $R_0 = 0,22$
δ	0,31	0,1	0,05

Berdasarkan Tabel 4.6 diperoleh hasil simulasi sebagai berikut:

Gambar 4.8 Simulasi ketika $R_0 = 0,14$ Gambar 4.9 Simulasi ketika $R_0 = 0,201$



Gambar 4.10 Simulasi ketika $R_0 = 0,22$

Berdasarkan Gambar 4.8 ketika $R_0 = 0,14$ diperoleh solusi setiap subpopulasi S, V_1, V_2, V_3, E , dan I secara berurutan menuju 33,804; 11,47; 4,378; 1,88; 0; 0, kemudian pada Gambar 4.9 ketika $R_0 = 0,201$ diperoleh solusi setiap subpopulasi S, V_1, V_2, V_3, E , dan I secara berurutan menuju 44,079; 4,824; 1,842; 0,793; 0; 0, selanjutnya pada Gambar 4.10 ketika $R_0 = 0,22$ diperoleh solusi setiap subpopulasi S, V_1, V_2, V_3, E , dan I secara berurutan menuju 47,518; 2,6; 0,993; 0,428; 0; 0. Sedangkan berdasarkan perhitungan secara manual yang terdapat pada Lampiran 4, nilai-nilai tersebut merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit pada setiap keadaan R_0 . Dengan demikian, ketika $R_0 < 1$,

maka solusi dari setiap subpopulasi cenderung menuju ke titik kesetimbangan bebas penyakit atau dapat dikatakan bahwa Covid-19 tidak dapat menyebar atau bebas dari penyakit tersebut.

4.3.2. Simulasi Ketika Endemik

Pada simulasi ketika endemik, nilai awal yang digunakan adalah $S(0) = 0,598$, $V_1(0) = 0,143$, $V_2(0) = 0,102$, $V_3(0) = 0,066$, $E(0) = 0,015$, $I(0) = 0,017$. Nilai awal tersebut diperoleh dari hasil bagi antara jumlah subpopulasi dengan jumlah populasi di Kota Semarang sesuai dengan data yang telah diperoleh. Sedangkan, nilai parameter yang digunakan dalam simulasi penyebaran Covid-19 dengan melibatkan vaksinasi dosis pertama hingga ketiga ditunjukkan pada Tabel 4.7 :

Tabel 4.7 Nilai Parameter ketika $R_0 > 1$

Parameter	Nilai	Sumber
μ	0,013	Asumsi
Π	0,67	Asumsi
β	0,05	Asumsi
α	0,036	(Nainggolan, 2021)
γ	0,09	(Wu dkk., 2020)
ω_1	0,022	(Fitriyah, 2022)
ω_2	0,0071	(Fitriyah, 2022)
ω_3	0,0056	(Fonseca dkk., 2022)

σ_1	0,447	(Fitriyah, 2022)
σ_2	0,22	(Simatupang, 2021)
σ_3	0,8	(Dyer, 2021)
β_1	0,03	Asumsi
β_2	0,02	Asumsi
β_3	0,06	Asumsi
μ_k	0,002	(Nainggolan, 2021)
δ	0,11	Asumsi

Pada Tabel 4.7 terdapat nilai parameter yang diasumsikan yaitu μ (laju kematian alami), Π (laju kelahiran), β (laju interaksi infeksi antara subpopulasi rentan dan subpopulasi yang terinfeksi Covid-19), β_1 (laju interaksi infeksi antara subpopulasi yang telah vaksinasi dosis pertama dengan subpopulasi yang terinfeksi), β_2 (laju interaksi infeksi antara subpopulasi yang telah vaksinasi dosis kedua dengan subpopulasi yang terinfeksi), β_3 (laju interaksi infeksi antara subpopulasi yang telah vaksinasi dosis ketiga dengan subpopulasi yang terinfeksi), dan δ (proporsi subpopulasi *Susceptible* yang telah melakukan vaksinasi). Nilai μ diperoleh dari 1 per angka harapan hidup di Kota Semarang. Angka harapan hidup di Kota Semarang adalah 74 tahun, sehingga nilai $\mu = \frac{1}{74} = 0,013$. Nilai Π diperoleh dari selisih antara banyaknya populasi di Kota Semarang tahun 2022 dengan tahun

2021 per 365 hari, sehingga nilai

$$\Pi = \frac{1.656.564 - 1.656.319}{365} = \frac{245}{365} = 0,67.$$

Nilai β diperoleh dari 1 per banyaknya individu yang terinfeksi Covid-19 harian tertinggi sebesar 10 individu dikali 2 hari masa peralihan dari subpopulasi rentan menjadi subpopulasi yang terinfeksi Covid-19, sehingga nilai $\beta = \frac{1}{10 \times 2} = \frac{1}{20} = 0,05$. Nilai β_1 diperoleh dari 1 per banyaknya individu yang terinfeksi Covid-19 harian tertinggi sebesar 10 individu dikali 3 hari masa peralihan dari subpopulasi yang telah vaksinasi dosis pertama menjadi subpopulasi yang terinfeksi Covid-19, sehingga nilai $\beta_1 = \frac{1}{10 \times 3} = \frac{1}{30} = 0,03$. Nilai β_2 diperoleh dari 1 per banyaknya individu yang terinfeksi Covid-19 harian tertinggi sebesar 10 individu dikali 5 hari masa peralihan dari subpopulasi yang telah vaksinasi dosis kedua menjadi subpopulasi yang terinfeksi Covid-19, sehingga nilai $\beta_2 = \frac{1}{10 \times 5} = \frac{1}{50} = 0,02$. Nilai β_3 diperoleh dari 1 per banyaknya individu yang terinfeksi Covid-19 harian tertinggi sebesar 5 individu dikali 3 hari masa peralihan dari subpopulasi yang telah vaksinasi dosis ketiga menjadi subpopulasi yang terinfeksi Covid-19, sehingga nilai $\beta_3 = \frac{1}{5 \times 3} = \frac{1}{15} = 0,06$. Nilai δ diperoleh dari banyaknya individu yang telah vaksinasi dosis

pertama hingga ketiga ketika kondisi endemik per banyaknya populasi di Kota Semarang tahun 2022. Banyaknya individu yang telah vaksinasi dosis pertama hingga ketiga sebesar 182.222 individu, sehingga nilai $\delta = \frac{182.222}{1.656.564} = 0,11$.

Berdasarkan nilai parameter yang terdapat pada Tabel 4.7, maka diperoleh hasil bilangan reproduksi dasar yaitu

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \left(\frac{\alpha u \Pi \mu q r + \alpha k \delta \omega_1 \Pi \mu r + \alpha x \delta \omega_1 \omega_2 \Pi \mu + \alpha y \delta \omega_1 \omega_2 \omega_3 \Pi}{m n \mu p q r} \right) \\
 &= \frac{((0,036)(0,0445)(0,67)(0,013)(0,0201)(0,0186) \\
 &\quad + (0,036)(0,0134)(0,11)(0,022)(0,67)(0,013)(0,0186) \\
 &\quad + (0,036)(0,0044)(0,11)(0,022)(0,0071)(0,67)(0,013) \\
 &\quad + (0,036)(0,048)(0,11)(0,022)(0,0071)(0,0056)(0,67))}{(0,049)(0,105)(0,013)(0,0154)(0,0201)(0,0186)} \\
 &= \frac{0,00000000541}{0,0000000038559} \\
 &\approx 14,3703 \\
 &> 1
 \end{aligned}$$

Karena $R_0 > 1$ maka dapat disimpulkan bahwa Covid-19 menyebar atau terjadi endemik dalam kurun waktu tertentu dengan titik kesetimbangan endemik sebagai berikut:

- a. Titik kesetimbangan subpopulasi terinfeksi Covid-19 (I)
 Nilai i^* diperoleh dari persamaan (4.49) berikut

$$Ai^{*4} + Bi^{*3} + Ci^{*2} + Di^{*} + E = 0$$

dengan

$$\begin{aligned} \bullet A &= \frac{ukxy}{pqr\mu} \\ &= \frac{(0,0445)(0,0134)(0,0044)(0,0480)}{(0,0154)(0,0201)(0,0186)(0,013)} \\ &= 1,681690129 \\ \bullet B &= \frac{ukx\mu nm + ukrynm + uqxynm + pkxynm - u\Pi\alpha kxy}{pqr\mu nm} \\ &\quad (0,0445)(0,0134)(0,0044)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\ &\quad + (0,0445)(0,0134)(0,0186)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\ &\quad + (0,0445)(0,0201)(0,0044)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\ &\quad + (0,0154)(0,0134)(0,0044)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\ &= \frac{-(0,0445)(0,67)(0,036)(0,0134)(0,0044)(0,0480)}{(0,0154)(0,0201)(0,0186)(0,013)(0,1050)(0,0490)} \\ &= 2,783966872 \\ \bullet C &= \frac{(ukr\mu nm + uqx\mu nm + uqryn m + pkx\mu nm + pkrynm + pqxynm - u\Pi\alpha kx\mu - u\Pi\alpha kry - u\Pi\alpha qxy - \alpha k\delta\omega_1\Pi xy)}{pqr\mu nm} \\ &\quad (0,0445)(0,0134)(0,0186)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\ &\quad + (0,0445)(0,0201)(0,0044)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\ &\quad + (0,0445)(0,0201)(0,0186)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\ &\quad + (0,0154)(0,0134)(0,0044)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\ &\quad + (0,0154)(0,0134)(0,0186)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\ &\quad + (0,0154)(0,0201)(0,0044)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\ &\quad - (0,0445)(0,67)(0,036)(0,0134)(0,0044)(0,013) \\ &\quad - (0,0445)(0,67)(0,036)(0,0134)(0,0186)(0,0480) \\ &\quad - (0,0445)(0,67)(0,036)(0,0201)(0,0044)(0,0480) \\ &= \frac{-(0,036)(0,0134)(0,11)(0,022)(0,67)(0,0044)(0,0480)}{(0,0154)(0,0201)(0,0186)(0,013)(0,1050)(0,0490)} \\ &= -30,949877790 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (uqr\mu nm + pkr\mu nm + pqx\mu nm + pqr\gamma nm - u\Pi\alpha kr\mu - u\Pi\alpha qx\mu \\
 & - u\Pi\alpha qry - \alpha k\delta\omega_1\Pi x\mu - \alpha k\delta\omega_1\Pi ry - \alpha x\delta\omega_1\omega_2\Pi y) \\
 \bullet D = & \frac{ \\
 & (0,0445)(0,0201)(0,0186)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\
 & + (0,0154)(0,0134)(0,0186)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\
 & + (0,0154)(0,0201)(0,0044)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\
 & + (0,0154)(0,0201)(0,0186)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\
 & - (0,0445)(0,67)(0,036)(0,0134)(0,0186)(0,013) \\
 & - (0,0445)(0,67)(0,036)(0,0201)(0,0044)(0,013) \\
 & - (0,0445)(0,67)(0,036)(0,0201)(0,0186)(0,0480) \\
 & - (0,036)(0,0134)(0,11)(0,022)(0,67)(0,0044)(0,013) \\
 & - (0,036)(0,0134)(0,11)(0,022)(0,67)(0,0186)(0,0480) \\
 & - (0,036)(0,0044)(0,11)(0,022)(0,0071)(0,67)(0,0480)}{pqr\mu nm} \\
 & = \frac{(0,0154)(0,0201)(0,0186)(0,013)(0,1050)(0,0490)}{(0,0154)(0,0201)(0,0186)(0,013)(0,1050)(0,0490)} \\
 & = -56,853590103
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet E &= 1 - R_0 \\
 &= 1 - 14,3703 \\
 &= -13,3703
 \end{aligned}$$

Sehingga persamaan (4.49) menjadi

$$\begin{aligned}
 & 1,681690129i^{*4} + 2,783966872i^{*3} - 30,949877790i^{*2} \\
 & - 56,853590103i^{*} - 13,3703 = 0 \tag{4.55}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan aturan tanda Descartes, persamaan (4.55) terjadi satu kali perubahan tanda, maka i^* memiliki satu akar real positif. Akar dari i^* dalam persamaan (4.55) diantaranya $i_1^* = -4,223307404$, $i_2^* = -1,542202872$,

$i_3^* = -0,278171259, i_4^* = 4,388223836$. Dari keempat akar persamaan (4.55), akar real positif yang memenuhi adalah $i_4^* = 4,388223836$. Jadi, $i^* = 4,388223836$.

- a. Titik kesetimbangan subpopulasi rentan (S)

$$\begin{aligned} s^* &= \frac{\Pi}{ui^* + p} \\ &= \frac{0,67}{(0,0445)(4,388223836) + (0,0154)} \\ &= 3,1799 \end{aligned}$$

- b. Titik kesetimbangan subpopulasi tervaksinasi dosis pertama (V_1)

$$\begin{aligned} v_1^* &= \frac{\delta\omega_1\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)} \\ &= \frac{(0,11)(0,022)(0,67)}{((0,0445)(4,388223836) + (0,0154)) \\ &\quad ((0,0134)(4,388223836) + (0,0201))} \\ &= 0,097 \end{aligned}$$

- c. Titik kesetimbangan subpopulasi tervaksinasi dosis kedua (V_2)

$$\begin{aligned} v_2^* &= \frac{\delta\omega_1\omega_2\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)} \\ &= \frac{(0,11)(0,022)(0,0071)(0,67)}{((0,0445)(4,388223836) + (0,0154)) \\ &\quad ((0,0134)(4,388223836) + (0,0201)) \\ &\quad ((0,0044)(4,388223836) + (0,0186))} \\ &= 0,0183 \end{aligned}$$

- d. Titik kesetimbangan subpopulasi tervaksinasi dosis ketiga (V_3)

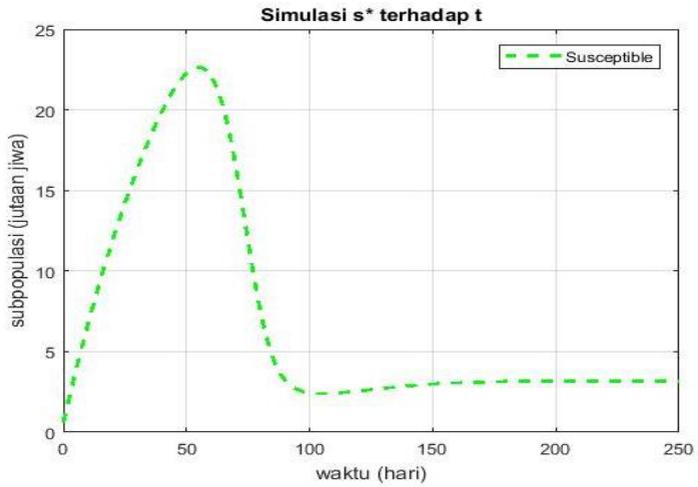
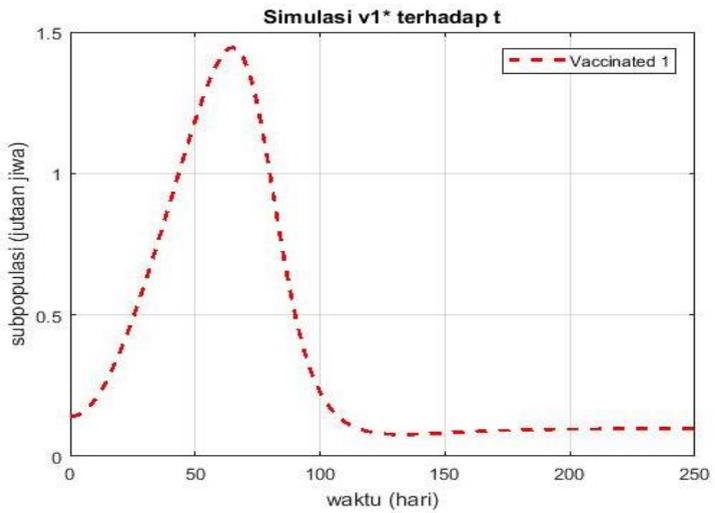
$$\begin{aligned}
 v_3^* &= \frac{\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)(yi^* + \mu)} \\
 &= \frac{(0,11)(0,022)(0,0071)(0,0056)(0,67)}{((0,0445)(4,388223836) + (0,0154))} \\
 &\quad ((0,0134)(4,388223836) + (0,0201)) \\
 &\quad ((0,0044)(4,388223836) + (0,0186)) \\
 &\quad ((0,0480)(4,388223836) + (0,013)) \\
 &= 0,00046
 \end{aligned}$$

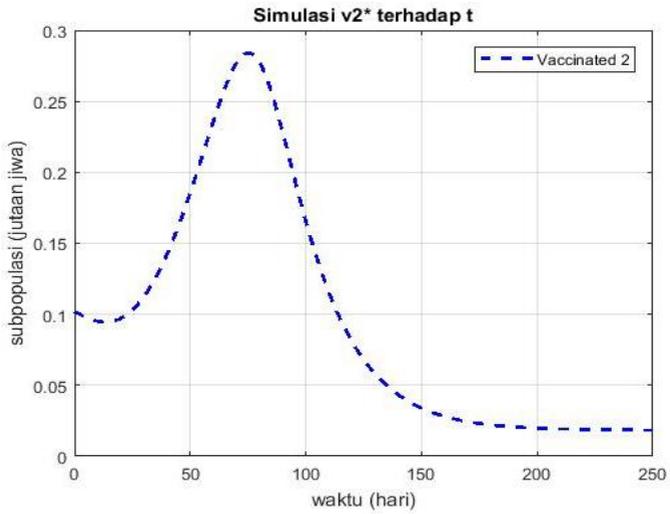
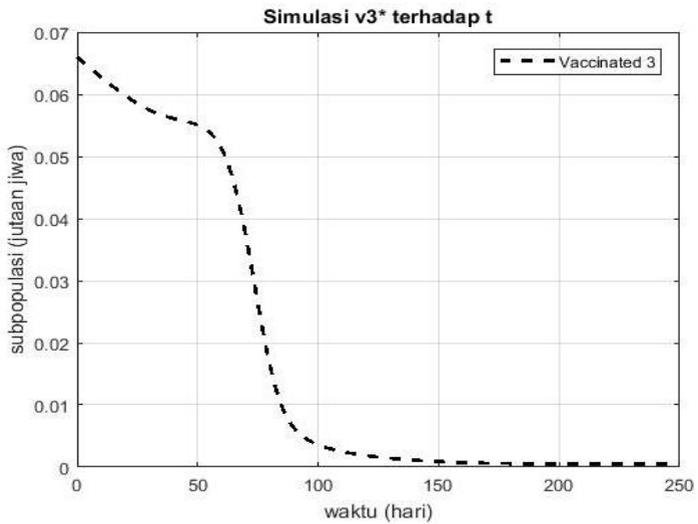
e. Titik kesetimbangan subpopulasi terpapar Covid-19 (E)

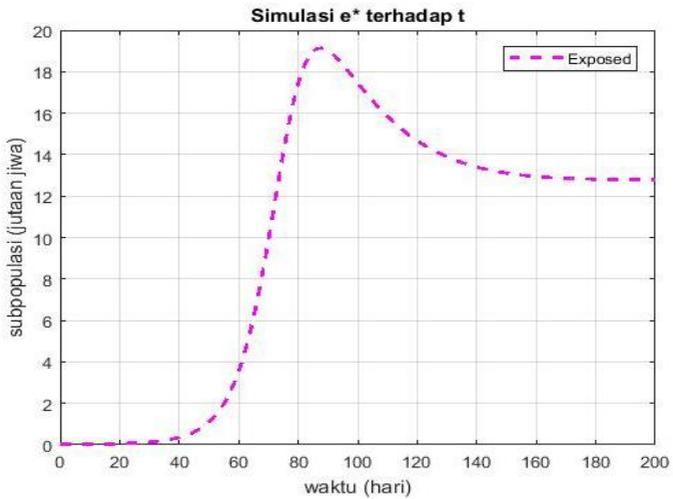
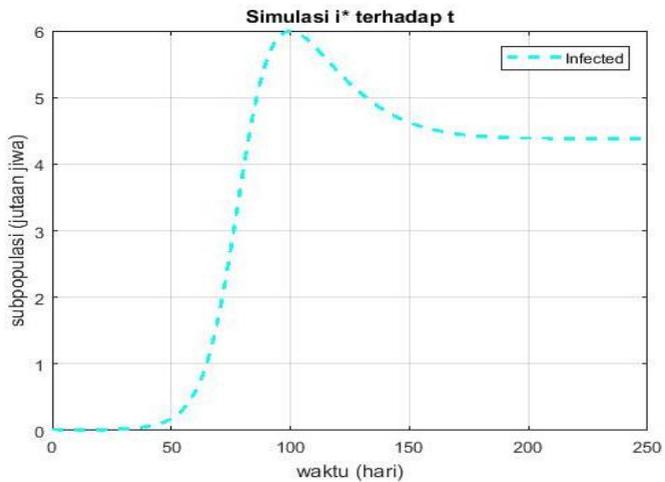
$$\begin{aligned}
 e^* &= \frac{i^*}{m} \left[u \left(\frac{\Pi}{ui^* + p} \right) + k \left(\frac{\delta\omega_1\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)} \right) + x \left(\frac{\delta\omega_1\omega_2\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + y \left(\frac{\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)(yi^* + \mu)} \right) \right] \\
 &= \frac{4,388223836}{0,0490} [(0,0445)(3,1799) + (0,0134)(0,097) + (0,0044)(0,0183) \\
 &\quad + (0,0480)(0,00046)] \\
 &= 12,799
 \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $TK_2 = (3,1799; 0,097; 0,0183; 0,00046; 12,799; 4,388223836)$

Selanjutnya, ditunjukkan hasil simulasi ketika endemik dengan menggunakan MATLAB R2017a yang terlihat pada Gambar 4.11 – Gambar 4.16 dan disajikan dengan rentang waktu harian hingga 200 hari dan 250 hari sebagai berikut:

Gambar 4.11 Simulasi variabel s^* Gambar 4.12 Simulasi variabel v_1^*

Gambar 4.13 Simulasi variabel v_2^* Gambar 4.14 Simulasi variabel v_3^*

Gambar 4.15 Simulasi variabel e^* Gambar 4.16 Simulasi variabel i^*

Berdasarkan Gambar 4.11 subpopulasi rentan (S) mengalami peningkatan sampai hari ke-55, kemudian

menurun hingga hari ke-100, lalu meningkat kembali hingga hari ke-200 sebesar 3,1799 dan menuju keadaan setimbang. Selanjutnya, pada Gambar 4.12 subpopulasi yang tervaksinasi dosis pertama (V_1) mengalami peningkatan sampai hari ke-65, kemudian menurun hingga hari ke-125, lalu meningkat kembali hingga hari ke-150 sebesar 0,097 menuju keadaan setimbang. Pada Gambar 4.13 subpopulasi yang tervaksinasi dosis kedua (V_2) mengalami penurunan hingga hari ke-15, kemudian meningkat hingga hari ke-75, selanjutnya subpopulasi tersebut mengalami penurunan sampai hari ke-180 sebesar 0,0183 dan menuju ke keadaan yang setimbang.

Pada Gambar 4.14 subpopulasi yang tervaksinasi dosis ketiga (V_3) mengalami penurunan sampai hari ke-40, lalu mengalami penurunan kembali hingga hari ke-200 sebesar 0,00046 dan menuju ke keadaan yang setimbang, kemudian pada Gambar 4.15 subpopulasi yang terpapar Covid-19 (E) mengalami peningkatan sampai hari ke-85, lalu penurunan hingga hari ke-180 sebesar 12,799 dan menuju ke keadaan yang setimbang. Selanjutnya, pada Gambar 4.16 subpopulasi yang terinfeksi Covid-19 (I) mengalami peningkatan sampai hari ke-100, lalu penurunan hingga hari ke-180 sebesar

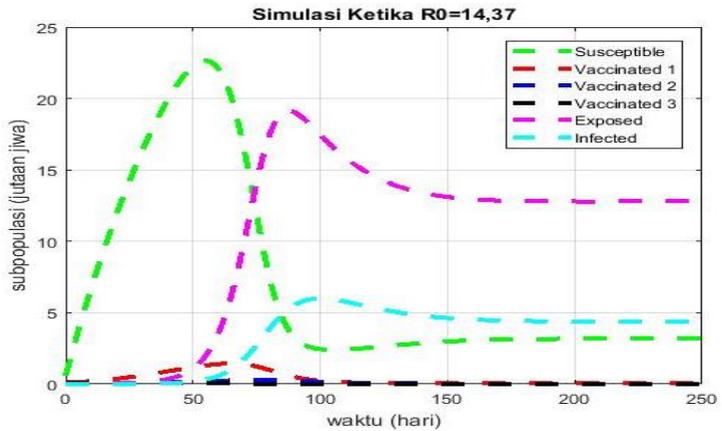
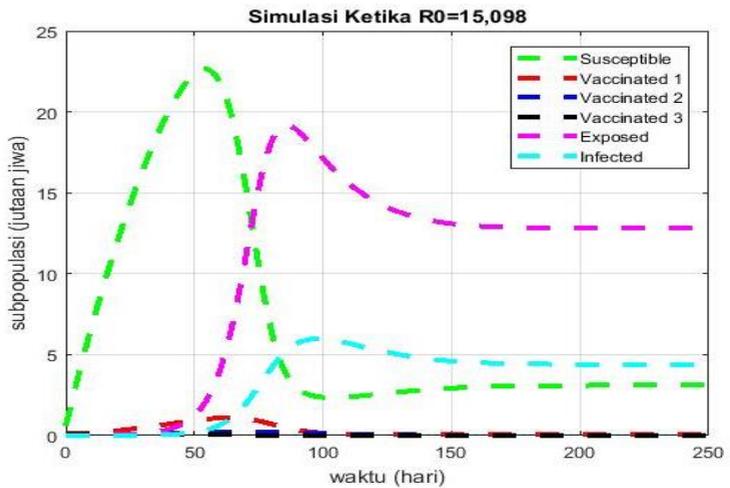
4,388 dan menuju ke keadaan yang setimbang. Berdasarkan penjelasan dari Gambar 4.11 – Gambar 4.16, dapat disimpulkan bahwa setiap subpopulasi menuju ke titik kesetimbangan endemik (TK_2). Hal tersebut dapat dilihat dari solusi setiap subpopulasi S, V_1, V_2, V_3, E , dan I secara berurutan menuju 3,1799; 0,097; 0,0183; 0,00046; 12,799; 4,388223836.

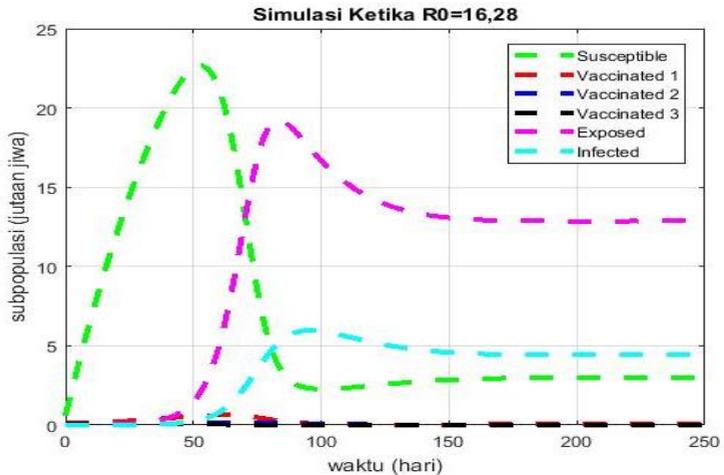
Selanjutnya, ditampilkan plot dengan nilai bilangan reproduksi dasar (R_0) yang berbeda yaitu ketika $R_0 = 14,37$; $R_0 = 15,098$; dan $R_0 = 16,28$ untuk melihat kondisi dari titik kesetimbangan endemik. Bilangan reproduksi dasar yang berbeda ini diperoleh dengan mengganti nilai parameter δ yang disajikan dalam Tabel 4.8 berikut:

Tabel 4.8 Nilai Parameter δ untuk $R_0 = 14,37$; $R_0 = 15,098$; dan $R_0 = 16,28$

Parameter	Nilai Parameter untuk $R_0 = 14,37$	Nilai Parameter untuk $R_0 = 15,098$	Nilai Parameter untuk $R_0 = 16,28$
δ	0,11	0,085	0,048

Berdasarkan Tabel 4.8 diperoleh hasil simulasi sebagai berikut:

Gambar 4.17 Simulasi ketika $R_0 = 14,37$ Gambar 4.18 Simulasi ketika $R_0 = 15,098$



Gambar 4.19 Simulasi ketika $R_0 = 16,28$

Berdasarkan Gambar 4.17 ketika $R_0 = 14,37$ diperoleh solusi setiap subpopulasi S, V_1, V_2, V_3, E , dan I secara berurutan menuju 3,1799; 0,097; 0,0183; 0,00046; 12,799; 4,388223836, kemudian pada Gambar 4.18 ketika $R_0 = 15,098$ diperoleh solusi setiap subpopulasi S, V_1, V_2, V_3, E , dan I secara berurutan menuju 3,1; 0,073; 0,014; 0,00034; 12,828; 4,398, selanjutnya pada Gambar 4.19 ketika $R_0 = 16,28$ diperoleh solusi setiap subpopulasi S, V_1, V_2, V_3, E , dan I secara berurutan menuju 2,99; 0,04; 0,0074; 0,000185; 12,868; 4,412. Sedangkan berdasarkan perhitungan secara manual yang terdapat pada Lampiran 5, nilai-nilai tersebut merupakan titik kesetimbangan endemik

pada setiap keadaan R_0 . Dengan demikian, ketika $R_0 > 1$, maka solusi dari setiap subpopulasi cenderung menuju ke titik kesetimbangan endemik atau dapat dikatakan bahwa Covid-19 dapat menyebar atau menjadi endemik di suatu daerah tertentu.

4.3.3. Simulasi Keberhasilan Penggunaan Vaksin

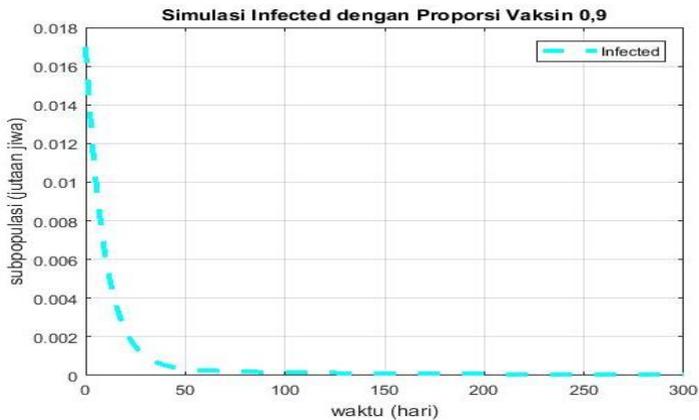
Pada simulasi selanjutnya, dilakukan pengujian numerik untuk mengevaluasi keberhasilan penggunaan vaksin dengan menggunakan asumsi nilai parameter laju perkembangan virus Covid-19 (α) sebesar 0,002 dan mengubah nilai parameter proporsi subpopulasi *Susceptible* (S) yang telah melakukan vaksinasi (δ) yang ditampilkan dalam Tabel 4.9 berikut:

Tabel 4.9 Keberhasilan Penggunaan Vaksin

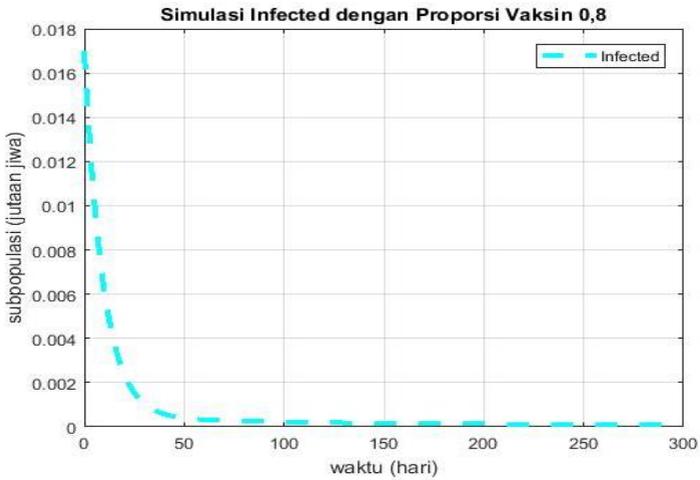
Nilai Parameter δ	Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) *	Kondisi Variabel i
0,9	0,716932511	Bebas dari Covid-19 ($R_0 < 1$)
0,8	0,837555459	Bebas dari Covid-19 ($R_0 < 1$)
0,5	1,332109546	Covid-19 menyebar ($R_0 > 1$)
0,3	1,846849514	Covid-19 menyebar ($R_0 > 1$)

*Dapat dilihat pada Lampiran 6

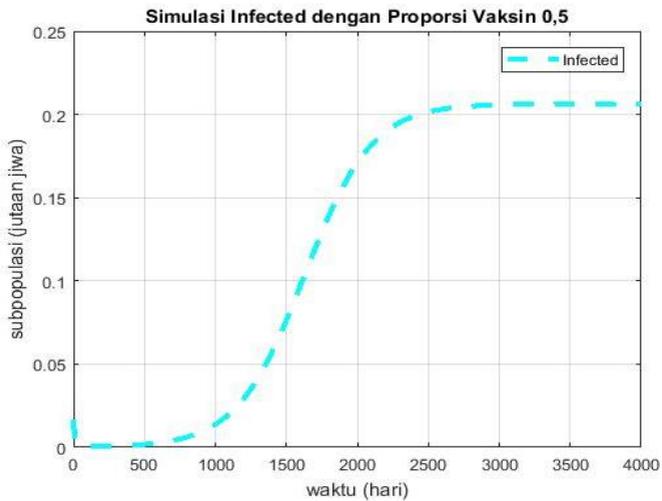
Sedangkan, nilai parameter selain δ dan α memiliki nilai yang sama dengan parameter ketika kondisi endemik ($R_0 > 1$) yang terdapat pada Tabel 4.7. Selanjutnya, ditampilkan grafik dari pengujian numerik dengan menggunakan MATLAB R2017a yang terlihat pada Gambar 4.20–Gambar 4.23 dan disajikan dengan rentang waktu harian hingga 300 hari dan 4000 hari sebagai berikut:



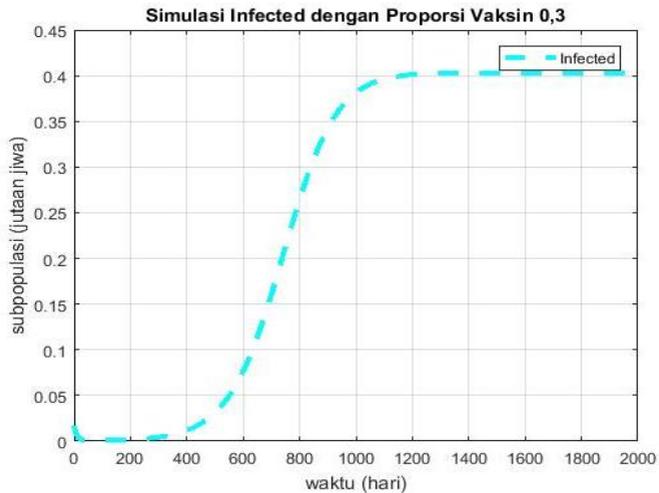
Gambar 4.20 Simulasi variabel i ketika $\delta = 0,9$



Gambar 4.21 Simulasi variabel i ketika $\delta = 0,8$



Gambar 4.22 Simulasi variabel i ketika $\delta = 0,5$



Gambar 4.23 Simulasi variabel i ketika $\delta = 0,3$

Berdasarkan Gambar 4.20 subpopulasi terinfeksi (I) dengan proporsi $\delta = 0,9$ menurun sampai hari ke-200 menuju titik 0 dan menghasilkan bilangan reproduksi dasar (R_0) sebesar 0,716932511 yang artinya Covid-19 tidak menyebar atau bebas penyakit. Selanjutnya, pada Gambar 4.21 subpopulasi terinfeksi (I) dengan proporsi $\delta = 0,8$ menurun sampai hari ke-250 menuju titik 0 dan menghasilkan bilangan reproduksi dasar (R_0) sebesar 0,976866469 yang artinya Covid-19 tidak menyebar atau bebas penyakit.

Pada Gambar 4.22 subpopulasi terinfeksi (I) dengan proporsi $\delta = 0,5$ mengalami peningkatan sampai hari ke-3000 sebesar 0,206 dan menghasilkan bilangan

reproduksi dasar sebesar 1,332109546 yang artinya Covid-19 menyebar atau endemik di suatu daerah tertentu, kemudian pada Gambar 4.23 subpopulasi terinfeksi (I) dengan proporsi $\delta = 0,3$ meningkat sampai hari ke-1200 sebesar 0,4 dan menghasilkan bilangan reproduksi dasar sebesar 1,846849514 yang artinya Covid-19 menyebar atau endemik di suatu daerah tertentu.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa apabila proporsi subpopulasi *Susceptible* (S) yang melakukan vaksinasi (δ) meningkat, maka penyakit tidak dapat menyebar dengan cepat. Sebaliknya, apabila proporsi subpopulasi *Susceptible* (S) yang melakukan vaksinasi (δ) menurun, maka penyakit dapat menyebar dengan cepat. Sehingga, dapat dikatakan bahwa penggunaan vaksinasi berpengaruh dalam menekan penyebaran Covid-19 di Kota Semarang.

BAB V

PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dari model penyebaran Covid-19 dengan melibatkan vaksinasi dosis pertama hingga ketiga dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Model matematika penyebaran Covid-19 dengan melibatkan vaksinasi dosis pertama hingga ketiga dapat disusun dalam sistem persamaan diferensial non linear berikut

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \pi - (1 - \delta)\beta SI - \delta\omega_1 S - \mu S \\ \frac{dV_1}{dt} = \delta\omega_1 S - \sigma_1\beta_1 IV_1 - \omega_2 V_1 - \mu V_1 \\ \frac{dV_2}{dt} = \omega_2 V_1 - \sigma_2\beta_2 IV_2 - \omega_3 V_2 - \mu V_2 \\ \frac{dV_3}{dt} = \omega_3 V_2 - \sigma_3\beta_3 IV_3 - \mu V_3 \\ \frac{dE}{dt} = (1 - \delta)\beta SI - \alpha E + \sigma_1\beta_1 IV_1 + \sigma_2\beta_2 IV_2 + \sigma_3\beta_3 IV_3 - \mu E \\ \frac{dI}{dt} = \alpha E - (\mu + \mu_k) I - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \end{array} \right.$$

2. Titik kesetimbangan bebas penyakit dari model penyebaran Covid-19 yang melibatkan vaksinasi dosis pertama hingga ketiga adalah

$$TK_1 = \left(\frac{\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)}, \frac{\delta\omega_1\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)}, \frac{\delta\omega_1\omega_2\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)(\omega_3 + \mu)}, \frac{\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)(\omega_3 + \mu)\mu}, 0, 0 \right)$$

Sedangkan, titik kesetimbangan endemik dari model tersebut adalah $TK_2 = (s^*, v_1^*, v_2^*, v_3^*, e^*, i^*)$ dengan

$$s^* = \frac{\Pi}{ui^* + p}$$

$$v_1^* = \frac{\delta\omega_1\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)}$$

$$v_2^* = \frac{\delta\omega_1\omega_2\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)}$$

$$v_3^* = \frac{\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)(yi^* + \mu)}$$

$$e^* = \frac{i^*}{m} \left[u \left(\frac{\Pi}{ui^* + p} \right) + k \left(\frac{\delta\omega_1\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)} \right) + x \left(\frac{\delta\omega_1\omega_2\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)} \right) + y \left(\frac{\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)(yi^* + \mu)} \right) \right]$$

dan $i^* > 0$ apabila $R_0 > 1$ dan memenuhi beberapa kemungkinan agar i^* memiliki tepat satu akar real positif dengan menggunakan aturan tanda Descartes.

3. Bilangan reproduksi dasar dari model yang telah terbentuk dalam penelitian ini adalah

$$R_0 = \left(\frac{\alpha u \Pi \mu q r + \alpha k \delta \omega_1 \Pi \mu r + \alpha x \delta \omega_1 \omega_2 \Pi \mu + \alpha y \delta \omega_1 \omega_2 \omega_3 \Pi}{m n \mu p q r} \right)$$

4. Berdasarkan hasil simulasi secara numerik dengan memanfaatkan *software* MATLAB R2017a dari model dalam penelitian ini diketahui bahwa apabila keadaan $R_0 < 1$ maka Covid-19 tidak dapat menyebar atau bebas dari penyakit tersebut, sedangkan apabila keadaan $R_0 > 1$ maka Covid-19 dapat menyebar atau menjadi endemik di suatu daerah tertentu. Selain itu, penyakit tidak dapat menyebar dengan cepat apabila proporsi subpopulasi *Susceptible* (S) yang melakukan vaksinasi (δ) ditingkatkan, sehingga penggunaan vaksin dapat berpengaruh dalam menekan penyebaran Covid-19 di Kota Semarang.

5.2. Saran

Disarankan pada penelitian selanjutnya untuk melakukan pengembangan pada model penyebaran Covid-19 yang melibatkan vaksinasi dosis pertama hingga ketiga dengan

menambahkan subpopulasi lain yang sesuai dan menganalisis kestabilan lokal maupun global pada titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik.

DAFTAR PUSTAKA

- Alam, M.F. dan Abadi, A. (2021) "Model Matematika Penularan Penyakit COVID-19 dengan Penerapan Vaksinasi Dua Dosis: Studi Kasus di Sidoarjo, Indonesia," *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 9(3), hal. 501-513.
- Algarni, A.D. *et al.* (2022) "Mathematical COVID-19 model with vaccination: a case study in Saudi Arabia," *PeerJ Computer Science*, 8, hal. 1-20.
- Annas, S. *et al.* (2020) "Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia," *Chaos, Solitons and Fractals*, 139, hal. 110072.
- As Med, A. dan A, Q.Q. (2022) "Analysis of Stability Covid19 Spread Mathematical Model Type SV1V2EIR Regarding Both Vaccinated and Not Vaccinated Human Population," *Jurnal Inotera*, 7(1), hal. 1-11.
- Badan Pusat Statistik Kota Semarang. (2022). *Jumlah Penduduk Menurut Jenis Kelamin (Jiwa), 2020-2022*. Semarang
- Barnes, B. dan Fulford, G.R. (2014) "Mathematical modelling with case studies: Using maple™ and MATLAB®, third edition," *Mathematical Modelling with Case Studies: Using Maple and MATLAB, Third Edition*, hal. 1-365.
- Boyce, W.E. dan DiPrima, R.C. (2009) "Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Textbook and Student Solutions Manual Set," hal. 796.

- Braun, M. (1993). Second-order linear differential equations. In: *Differential Equations and Their Applications. Texts in Applied Mathematics*, vol 11. Springer, New York, NY.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2010). *Numerical methods for engineers Sixth Edition*. New York: Mcgraw-hill.
- Dinas Kesehatan Kota Semarang. (2022). *Update Kasus COVID-19 tahun 2022*. Retrieved Desember 9, 2022.
- Dinas Kesehatan Kota Semarang. (2022). *Update Kasus COVID-19 Desember 2022*. Retrieved Desember 5, 2022.
- Dyer, O. (2021) "Covid-19: Omicron is causing more infections but fewer hospital admissions than delta, South African data show," *BMJ (Clinical research ed.)*, 375(December), hal. n3104.
- Fadhilah, I. (2017) "Kontrol Optimal pada Model Epidemi SEIQR dengan Tingkat Kejadian Standar," 1(1), hal. 41–51.
- Fitriyah, A. (2022) "Rumus Bilangan Reproduksi Dasar Covid-19 dengan Adanya Vaksinasi Dosis 1 dan 2," *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 19(1), hal. 87.
- Fonseca, M.H.G. dkk. (2022) "Dynamics of antibody response to CoronaVac vaccine," *Journal of Medical Virology*, 94(5), hal. 2139–2148.
- Inayah, N., Manaqib, M. dan Fadillah, M.F. (2022) "Mathematics Model of COVID-19 with Two-Stage Vaccination, Symptomatic, Asymptomatic, and Quarantine Individuals," *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, 7(3), hal. 370–383.

- Iswanto, R. J. (2012). *Pemodelan Matematika Aplikasi dan Terapannya*. Yogyakarta:Graha Ilmu.
- Kartono. (2012). *Persamaan Diferensial Biasa*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Keputusan Menteri Kesehatan Republik Indonesia (2020) “Keputusan Menteri Kesehatan Republik Indonesia Nomor HK.01.07/MenKes/413/2020 Tentang Pedoman Pencegahan dan Pengendalian Corona Virus Disease 2019 (Covid-19),” *MenKes/413/2020*, 2019, hal. 207.
- Larasati, P.A. dan Sulistianingsih, D. (2021) “Urgensi Edukasi Program Vaksinasi Covid-19 Berdasarkan Peraturan Menteri Kesehatan Nomor 10 Tahun,” *Jurnal Pengabdian Hukum Indonesia*, 4(1), hal. 99–111.
- Layek, G.C. (2015) *An introduction to dynamical systems and chaos, An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*.
- Liu, X., Lv, Z. dan Ding, Y. (2022) “Mathematical modeling and stability analysis of the time-delayed SAIM model for COVID-19 vaccination and media coverage,” *Mathematical Biosciences and Engineering*, 19(6), hal. 6296–6316.
- Martcheva, M. (2015) *Chapter 2: Introduction to Epidemic Modeling” in An Introduction to Mathematical Epidemiology., An Introduction to Mathematical Epidemiology*.
- Menni, C. dkk. (2022) “COVID-19 vaccine waning and effectiveness and side-effects of boosters: a prospective community study from the ZOE COVID Study,” *The Lancet Infectious Diseases*, 22(7), hal. 1002–1010.

- Modu, G.U. dan Maiduguri, R.P. (2021) "Basic Reproduction Number of a Mathematical Model of Corona Virus Disease 2019 (Covid-19) Goni Umar Modu," 2019(March).
- Murray, J.D. (2002) *Mathematical Biology I An Introduction*, Springer Verlag.pdf.
- Nainggolan, J. (2021) "Optimal Prevention and Treatment Control on SVEIR Type Model Spread of COVID-19," *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, 7(1), hal. 40–48.
- Nurfadilah, Hikmah dan Fardinah (2021) "Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit Ispa," *Journal of Mathematics : Theory and Application*, 3(1), hal. 14–22.
- Pal, D. dkk. (2022) "Mathematical Analysis of a COVID-19 Epidemic Model by Using Data Driven Epidemiological Parameters of Diseases Spread in India," *Biophysics (Russian Federation)*, 67(2), hal. 231–244.
- Setyowati, Frida Anggraeni, Muhammad Kharis, dan Tri Sri Noor Asih. 2020. "Model matematika penyebaran flu burung dengan vaksinasi dan pertumbuhan logistik pada populasi unggas." *Jurnal Ilmiah Matematika* 7 (1): 27.
- Sharbayta SS, Desta HD, Abdi T. (2022) "Mathematical modelling of COVID-19 transmission dynamics with vaccination: A case study in Ethiopia". medRxiv.
- Simatupang, A. (2021) "Mengupas vaksin covid-19 dan nutrisi untuk lansia," *Repository.Uki.Ac.Id*, hal. 1–21.
- Sinaga, E.S. dkk. (2022) "Pemberian Vaksinasi Booster Covid-

19 sebagai Upaya Percepatan Terbentuknya Kekebalan Kelompok pada Masyarakat di Wilayah DKI Jakarta Provision of Covid-19 Booster Vaccination to Accelerate the Herd Immunity in DKI J,” *Jurnal Wahana Abdimas Sejahtera*, 3(2), hal. 227–237.

Telaumbanua, D. (2020) “Urgensi Pembentukan Aturan Terkait Pencegahan Covid-19 di Indonesia,” *QALAMUNA: Jurnal Pendidikan, Sosial, dan Agama*, 12(01), hal. 59–70.

Wang, X. (2004) “A simple proof of Descartes’s rule of signs,” *American Mathematical Monthly*, 111(6), hal. 525–526.

Wang, J. dkk. (2022) “A Modified SIR Model for the COVID-19 Epidemic in China,” *Journal of Physics: Conference Series*, 2148(1).

Wiggins, S. (2003) “Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos (Second Edition),” *Texts in Applied Mathematics 2*, hal. 847.

Wu, J. dkk. (2020) “Early antiviral treatment contributes to alleviate the severity and improve the prognosis of patients with novel coronavirus disease (COVID-19),” *Journal of Internal Medicine*, 288(1), hal. 128–138.

Zeb, A. dkk. (2020) “Mathematical Model for Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) Containing Isolation Class,” *BioMed Research International*, 2020.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Penentuan Banyaknya Akar Real Positif dengan Aturan Tanda Descartes

Misalkan u dan v adalah banyaknya pergantian tanda positif dan negatif, np adalah banyaknya akar real positif, dan nq adalah banyaknya akar real negatif. Kemudian, np dan nq dapat dihitung dengan rumus $u - n_p = \text{bilangan genap } (0,2,4,6, \dots)$ dengan syarat $np \leq u$ dan $v - n_q = \text{bilangan genap } (0,2,4,6, \dots)$ dengan syarat $nq \leq v$. Selanjutnya dari persamaan (4.49) diperoleh delapan kemungkinan diantaranya:

1. Kemungkinan 1

$$P(i^*) = Ai^{*4} + Bi^{*3} + Ci^{*2} + Di^* - E$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak satu kali, sehingga $u = 1$. Selanjutnya, diperoleh

$$u - n_p = 0$$

$$1 - n_p = 0$$

$$n_p = 1$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 1 adalah 1.

$$P(-i^*) = Ai^{*4} - Bi^{*3} + Ci^{*2} - Di^* - E$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak dua kali, sehingga $v = 3$. Selanjutnya, diperoleh

$$v - n_q = 0 \text{ dan } v - n_q = 2$$

Diperhatikan bahwa

$$v - n_q = 0$$

$$3 - n_q = 0$$

$$n_q = 3$$

dan

$$v - n_q = 2$$

$$3 - n_q = 2$$

$$n_q = 1$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 1 adalah 1 dan 3.

Jadi, diperoleh 2 kemungkinan yaitu

- Kondisi 1: 1 akar real positif, 3 akar real negatif
- Kondisi 2: 1 akar real positif, 1 akar real negatif, 2 akar kompleks

2. Kemungkinan 2

$$P(i^*) = Ai^{*4} + Bi^{*3} + Ci^{*2} - Di^* - E$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak satu kali, sehingga $u = 1$. Selanjutnya, diperoleh

$$u - n_p = 0$$

$$1 - n_p = 0$$

$$n_p = 1$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 1 adalah 1.

$$P(-i^*) = Ai^{*4} - Bi^{*3} + Ci^{*2} + Di^* - E$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak dua kali, sehingga $v = 3$. Selanjutnya, diperoleh

$$v - n_q = 0 \text{ dan } v - n_q = 2$$

Diperhatikan bahwa

$$v - n_q = 0$$

$$3 - n_q = 0$$

$$n_q = 3$$

dan

$$v - n_q = 2$$

$$3 - n_q = 2$$

$$n_q = 1$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 1 adalah 1 dan 3.

Jadi, diperoleh 2 kemungkinan yaitu

- Kondisi 1: 1 akar real positif, 3 akar real negatif
- Kondisi 2: 1 akar real positif, 1 akar real negatif, 2 akar kompleks

3. Kemungkinan 3

$$P(i^*) = Ai^{*4} + yBi^{*3} - Ci^{*2} + Di^* - E$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak satu kali, sehingga $u = 3$. Selanjutnya, diperoleh

$$u - n_p = 0 \text{ dan } u - n_p = 2$$

Diperhatikan bahwa

$$u - n_p = 0$$

$$3 - n_p = 0$$

$$n_p = 3$$

dan

$$u - n_p = 2$$

$$3 - n_p = 2$$

$$n_p = 1$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 1 adalah 1 dan 3.

$$P(-i^*) = Ai^{*4} - Bi^{*3} - Ci^{*2} - Di^* - E$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak dua kali, sehingga $v = 1$. Selanjutnya, diperoleh

$$v - n_q = 0$$

$$1 - n_q = 0$$

$$n_q = 1$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 1 adalah 1.

Jadi, diperoleh 2 kemungkinan yaitu

- Kondisi 1: 1 akar real positif, 1 akar real negatif, 2 akar real kompleks
- Kondisi 2: 3 akar real positif, 1 akar real negatif

4. Kemungkinan 4

$$P(i^*) = Ai^{*4} + Bi^{*3} - Ci^{*2} - Di^* - E$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak satu kali, sehingga $u = 1$. Selanjutnya, diperoleh

$$u - n_p = 0$$

$$1 - n_p = 0$$

$$n_p = 1$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 1 adalah 1.

$$P(-i^*) = Ai^{*4} - Bi^{*3} - Ci^{*2} + Di^* - E$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak dua kali, sehingga $v = 3$. Selanjutnya, diperoleh

$$v - n_q = 0 \text{ dan } v - n_q = 2$$

Diperhatikan bahwa

$$v - n_q = 0$$

$$3 - n_q = 0$$

$$n_q = 3$$

dan

$$v - n_q = 2$$

$$3 - n_q = 2$$

$$n_q = 1$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 1 adalah 1 dan 3.

Jadi, diperoleh 2 kemungkinan yaitu

- Kondisi 1: 1 akar real positif, 3 akar real negatif

- Kondisi 2: 1 akar real positif, 1 akar real negatif, 2 akar kompleks

5. Kemungkinan 5

$$P(i^*) = Ai^{*4} - Bi^{*3} + Ci^{*2} + Di^* - E$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak satu kali, sehingga $u = 3$. Selanjutnya, diperoleh

$$u - n_p = 0 \text{ dan } u - n_p = 2$$

Diperhatikan bahwa

$$u - n_p = 0$$

$$3 - n_p = 0$$

$$n_p = 3$$

dan

$$u - n_p = 2$$

$$3 - n_p = 2$$

$$n_p = 1$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 1 adalah 1 dan 3.

$$P(-i^*) = Ai^{*4} + Bi^{*3} + Ci^{*2} - Di^* - E$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak dua kali, sehingga $v = 1$. Selanjutnya, diperoleh

$$v - n_q = 0$$

$$1 - n_q = 0$$

$$n_q = 1$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 1 adalah 1.

Jadi, diperoleh 2 kemungkinan yaitu

- Kondisi 1: 1 akar real positif, 1 akar real negatif, 2 akar real kompleks
- Kondisi 2: 3 akar real positif, 1 akar real negatif

6. Kemungkinan 6

$$P(i^*) = Ai^{*4} - Bi^{*3} + Ci^{*2} - Di^* - E$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak satu kali, sehingga $u = 3$. Selanjutnya, diperoleh

$$u - n_p = 0 \text{ dan } u - n_p = 2$$

Diperhatikan bahwa

$$u - n_p = 0$$

$$3 - n_p = 0$$

$$n_p = 3$$

dan

$$u - n_p = 2$$

$$3 - n_p = 2$$

$$n_p = 1$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 1 adalah 1 dan 3.

$$P(-i^*) = Ai^{*4} + Bi^{*3} + Ci^{*2} + Di^* - E$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak dua kali, sehingga $v = 1$. Selanjutnya, diperoleh

$$v - n_q = 0$$

$$1 - n_q = 0$$

$$n_q = 1$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 1 adalah 1.

Jadi, diperoleh 2 kemungkinan yaitu

- Kondisi 1: 1 akar real positif, 1 akar real negatif, 2 akar real kompleks
- Kondisi 2: 3 akar real positif, 1 akar real negatif

7. Kemungkinan 7

$$P(i^*) = Ai^{*4} - Bi^{*3} - Ci^{*2} + Di^* - E$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak satu kali, sehingga $u = 3$. Selanjutnya, diperoleh

$$u - n_p = 0 \text{ dan } u - n_p = 2$$

Diperhatikan bahwa

$$u - n_p = 0$$

$$3 - n_p = 0$$

$$n_p = 3$$

dan

$$u - n_p = 2$$

$$3 - n_p = 2$$

$$n_p = 1$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 1 adalah 1 dan 3.

$$P(-i^*) = Ai^{*4} + Bi^{*3} - Ci^{*2} - Di^* - E$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak dua kali, sehingga $v = 1$. Selanjutnya, diperoleh

$$v - n_q = 0$$

$$1 - n_q = 0$$

$$n_q = 1$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 1 adalah 1.

Jadi, diperoleh 2 kemungkinan yaitu

- Kondisi 1: 1 akar real positif, 1 akar real negatif, 2 akar real kompleks
- Kondisi 2: 3 akar real positif, 1 akar real negatif

8. Kemungkinan 8

$$P(i^*) = Ai^{*4} - Bi^{*3} - Ci^{*2} - Di^* - E$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak satu kali, sehingga $u = 1$. Selanjutnya, diperoleh

$$u - n_p = 0$$

$$1 - n_p = 0$$

$$n_p = 1$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 1 adalah 1.

$$P(-i^*) = Ai^{*4} + Bi^{*3} - Ci^{*2} + Di^* - E$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak dua kali, sehingga $v = 3$. Selanjutnya, diperoleh

$$v - n_q = 0 \text{ dan } v - n_q = 2$$

Diperhatikan bahwa

$$v - n_q = 0$$

$$3 - n_q = 0$$

$$n_q = 3$$

dan

$$v - n_q = 2$$

$$3 - n_q = 2$$

$$n_q = 1$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 1 adalah 1 dan 3.

Jadi, diperoleh 2 kemungkinan yaitu

- Kondisi 1: 1 akar real positif, 3 akar real negatif
- Kondisi 2: 1 akar real positif, 1 akar real negatif, 2 akar kompleks

Lampiran 2. Simulasi Titik Keseimbangan Ketika $R_0 < 1$

```

function dx=mcovid(t,x)
global mu alpha beta betal beta2 beta3 omegal
omega2 gamma omega3 sil si2 si3 delta muk pi;
dx=zeros(6,1);
dx(1)=(pi)-((1-delta)*beta*x(1)*x(6))-
(delta*omegal*x(1))-(mu*x(1));
dx(2)=(delta*omegal*x(1))-(sil*beta1*x(6)*x(2))-
(omega2*x(2))-(mu*x(2));
dx(3)=(omega2*x(2))-(si2*beta2*x(6)*x(3))-
(omega3*x(3))-(mu*x(3));
dx(4)=(omega3*x(3))-(si3*beta3*x(6)*x(4))-
(mu*x(4));
dx(5)=((1-delta)*beta*x(1)*x(6))-
(alpha*x(5))+(sil*beta1*x(6)*x(2))+(si2*beta2*x(
6)*x(3))+(si3*beta3*x(6)*x(4))-(mu*x(5));
dx(6)=(alpha*x(5))-(mu*x(6))-(muk*x(6))-
(gamma*x(6));

clear
clc
global mu alpha beta betal beta2 beta3 gamma
omegal omega2 omega3 sil si2 si3 delta muk pi;
pi=0.67;
mu=0.013;
alpha=0.001;
beta=0.007;
betal=0.005;
beta2=0.002;
beta3=0.01;
omegal=0.022;
omega2=0.0071;
omega3=0.0056;
gamma=0.09;
sil=0.447;
si2=0.22;
si3=0.8;
delta=0.31;
muk=0.002;

```

```
[t,x]=ode45('mcovid',[0 500],[0.598 0.143 0.102  
0.066 0.015 0.017]);
```

```
figure(1)  
plot(t,x(:,1),'--g','linewidth',2);  
title('Simulasi s^ terhadap t');  
legend('Susceptible');  
xlabel('waktu (hari)');  
ylabel('subpopulasi (jutaan jiwa)');  
grid on  
figure(2)  
plot(t,x(:,2),'--r','linewidth',2);  
title('Simulasi v1^ terhadap t');  
legend('Vaccinated 1');  
xlabel('waktu (hari)');  
ylabel('subpopulasi (jutaan jiwa)');  
grid on  
figure(3)  
plot(t,x(:,3),'--b','linewidth',2);  
title('Simulasi v2^ terhadap t');  
legend('Vaccinated 2');  
xlabel('waktu (hari)');  
ylabel('subpopulasi (jutaan jiwa)');  
grid on  
figure(4)  
plot(t,x(:,4),'--k','linewidth',2);  
title('Simulasi v3^ terhadap t');  
legend('Vaccinated 3');  
xlabel('waktu (hari)');  
ylabel('subpopulasi (jutaan jiwa)');  
grid on  
figure(5)  
plot(t,x(:,5),'--m','linewidth',2);  
title('Simulasi e^ terhadap t');  
legend('Exposed');  
xlabel('waktu (hari)');  
ylabel('subpopulasi (jutaan jiwa)');  
grid on  
figure(6)  
plot(t,x(:,6),'--c','linewidth',2);
```

```
title('Simulasi  $i^t$  terhadap  $t$ ');  
legend('Infected');  
xlabel('waktu (hari)');  
ylabel('subpopulasi (jutaan jiwa)');  
grid on
```

Lampiran 3. Simulasi Titik Keseimbangan Ketika $R_0 > 1$

```

function dx=mcovid(t,x)
global mu alpha beta betal beta2 beta3 omegal
omega2 gamma omega3 sil si2 si3 delta muk pi;
dx=zeros(6,1);
dx(1)=(pi)-((1-delta)*beta*x(1)*x(6))-
(delta*omegal*x(1))-(mu*x(1));
dx(2)=(delta*omegal*x(1))-(sil*beta1*x(6)*x(2))-
(omega2*x(2))-(mu*x(2));
dx(3)=(omega2*x(2))-(si2*beta2*x(6)*x(3))-
(omega3*x(3))-(mu*x(3));
dx(4)=(omega3*x(3))-(si3*beta3*x(6)*x(4))-
(mu*x(4));
dx(5)=((1-delta)*beta*x(1)*x(6))-
(alpha*x(5))+(sil*beta1*x(6)*x(2))+(si2*beta2*x(
6)*x(3))+(si3*beta3*x(6)*x(4))-(mu*x(5));
dx(6)=(alpha*x(5))-(mu*x(6))-(muk*x(6))-
(gamma*x(6));

clear
clc
global mu alpha beta betal beta2 beta3 gamma
omegal omega2 omega3 sil si2 si3 delta muk pi;
pi=0.67;
mu=0.013;
alpha=0.036;
beta=0.05;
betal=0.03;
beta2=0.02;
beta3=0.06;
omegal=0.022;
omega2=0.0071;
omega3=0.0056;
gamma=0.09;
sil=0.447;
si2=0.22;
si3=0.8;
delta=0.11;
muk=0.002;

```

```
[t,x]=ode45('mcovid',[0 250],[0.598 0.143 0.102
0.066 0.015 0.017]);
```

```
figure(1)
plot(t,x(:,1),'--g','linewidth',2);
title('Simulasi s* terhadap t');
legend('Susceptible');
xlabel('waktu (hari)');
ylabel('subpopulasi (jutaan jiwa)');
grid on
figure(2)
plot(t,x(:,2),'--r','linewidth',2);
title('Simulasi v1* terhadap t');
legend('Vaccinated 1');
xlabel('waktu (hari)');
ylabel('subpopulasi (jutaan jiwa)');
grid on
figure(3)
plot(t,x(:,3),'--b','linewidth',2);
title('Simulasi v2* terhadap t');
legend('Vaccinated 2');
xlabel('waktu (hari)');
ylabel('subpopulasi (jutaan jiwa)');
grid on
figure(4)
plot(t,x(:,4),'--k','linewidth',2);
title('Simulasi v3* terhadap t');
legend('Vaccinated 3');
xlabel('waktu (hari)');
ylabel('subpopulasi (jutaan jiwa)');
grid on
figure(5)
plot(t,x(:,5),'--m','linewidth',2);
title('Simulasi e* terhadap t');
legend('Exposed');
xlabel('waktu (hari)');
ylabel('subpopulasi (jutaan jiwa)');
grid on
figure(6)
plot(t,x(:,6),'--c','linewidth',2);
title('Simulasi i* terhadap t');
```

```
legend('Infected');  
xlabel('waktu (hari)');  
ylabel('subpopulasi (jutaan jiwa)');  
grid on
```

Lampiran 4. Perhitungan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit Ketika $R_0 = 0,201$ dan $R_0 = 0,22$

Misalkan $(\hat{s}, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{e}, \hat{i})$ merupakan titik keseimbangan bebas penyakit dari model penyebaran Covid-19 pada sistem persamaan (4.10), maka titik keseimbangan tersebut diperoleh apabila dalam suatu populasi tidak ada penyakit, sehingga $\hat{i} = 0$. Selanjutnya, titik keseimbangan subpopulasi $\hat{s}, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{e}$ dengan bilangan reproduksi dasar (R_0) yang berbeda dapat diperoleh dengan perhitungan sebagai berikut:

1. Titik Keseimbangan Bebas Penyakit Ketika $R_0 = 0,201$ dengan Nilai dari $\delta = 0,1$
 - a. Titik keseimbangan subpopulasi rentan (S)

$$\begin{aligned}
 \hat{s} &= \frac{\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)} \\
 &= \frac{0,67}{((0,1)(0,022) + (0,013))} \\
 &= \frac{0,67}{0,0022 + 0,013} \\
 &= \frac{0,67}{0,0152} \\
 &= 44,709
 \end{aligned}$$

- b. Titik keseimbangan subpopulasi tervaksinasi dosis pertama (V_1)

$$\begin{aligned}
\hat{v}_1 &= \frac{\delta\omega_1\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)} \\
&= \frac{(0,1)(0,022)(0,67)}{((0,1)(0,022) + 0,013)(0,0071 + 0,013)} \\
&= \frac{0,001474}{(0,0152)(0,0201)} \\
&= \frac{0,001474}{0,00030552} \\
&= 4,824
\end{aligned}$$

- c. Titik kesetimbangan subpopulasi tervaksinasi dosis kedua (V_2)

$$\begin{aligned}
\hat{v}_2 &= \frac{\delta\omega_1\omega_2\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)(\omega_3 + \mu)} \\
&= \frac{(0,1)(0,022)(0,0071)(0,67)}{((0,1)(0,022) + 0,013)(0,0071 + 0,013)(0,0056 + 0,013)} \\
&= \frac{0,0000104654}{(0,0152)(0,0201)(0,0186)} \\
&= \frac{0,0000104654}{0,000005682672} \\
&= 1,842
\end{aligned}$$

- d. Titik kesetimbangan subpopulasi tervaksinasi dosis ketiga (V_3)

$$\begin{aligned}
\hat{v}_3 &= \frac{\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)(\omega_3 + \mu)\mu} \\
&= \frac{(0,1)(0,022)(0,0071)(0,0056)(0,67)}{\left[((0,1)(0,022) + 0,013)(0,0071 + 0,013)(0,0056 + 0,013) \right. \\
&\quad \left. (0,013) \right]} \\
&= \frac{0,00000005860624}{(0,0152)(0,0201)(0,0186)(0,013)} \\
&= \frac{0,00000005860624}{0,000000073874736} \\
&= 0,793
\end{aligned}$$

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (4.36), maka diperoleh $\hat{e} = 0$.

Jadi, diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit ketika $R_0 = 0,201$ dengan nilai dari $\delta = 0,1$ adalah $(44,079; 4,824; 1,842; 0,793; 0; 0)$.

2. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit Ketika $R_0 = 0,22$ dengan Nilai dari $\delta = 0,05$
 - a. Titik kesetimbangan subpopulasi rentan (S)

$$\begin{aligned}
\hat{s} &= \frac{\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)} \\
&= \frac{0,67}{((0,05)(0,022) + (0,013))} \\
&= \frac{0,67}{0,0011 + 0,013} \\
&= \frac{0,67}{0,0141} \\
&= 47,518
\end{aligned}$$

- b. Titik kesetimbangan subpopulasi tervaksinasi dosis pertama (V_1)

$$\begin{aligned}
 \hat{v}_1 &= \frac{\delta\omega_1\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)} \\
 &= \frac{(0,05)(0,022)(0,67)}{((0,05)(0,022) + 0,013)(0,0071 + 0,013)} \\
 &= \frac{0,000737}{(0,0141)(0,0201)} \\
 &= \frac{0,000737}{0,00028341} \\
 &= 2,6
 \end{aligned}$$

- c. Titik kesetimbangan subpopulasi tervaksinasi dosis kedua (V_2)

$$\begin{aligned}
 \hat{v}_2 &= \frac{\delta\omega_1\omega_2\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)(\omega_3 + \mu)} \\
 &= \frac{(0,05)(0,022)(0,0071)(0,67)}{((0,05)(0,022) + 0,013)(0,0071 + 0,013)(0,0056 + 0,013)} \\
 &= \frac{0,0000052327}{(0,0141)(0,0201)(0,0186)} \\
 &= \frac{0,0000052327}{0,000005271426} \\
 &= 0,993
 \end{aligned}$$

- d. Titik kesetimbangan subpopulasi tervaksinasi dosis ketiga (V_3)

$$\begin{aligned}
\hat{v}_3 &= \frac{\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{(\delta\omega_1 + \mu)(\omega_2 + \mu)(\omega_3 + \mu)\mu} \\
&= \frac{(0,05)(0,022)(0,0071)(0,0056)(0,67)}{\left[((0,05)(0,022) + 0,013)(0,0071 + 0,013)(0,0056 + 0,013) \right. \\
&\quad \left. (0,013) \right]} \\
&= \frac{0,00000002930312}{(0,0141)(0,0201)(0,0186)(0,013)} \\
&= \frac{0,00000002930312}{0,000000068528538} \\
&= 0,428
\end{aligned}$$

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (4.36), maka diperoleh $\hat{e} = 0$.

Jadi, diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit ketika $R_0 = 0,22$ dengan nilai dari $\delta = 0,05$ adalah $(47,518; 2,6; 0,993; 0,428; 0; 0)$.

Lampiran 5. Perhitungan Titik Kesetimbangan EndemikKetika $R_0 = 15,098$ dan $R_0 = 16,28$

1. Titik Kesetimbangan Endemik Ketika $R_0 = 15,098$ dengan Nilai dari $\delta = 0,085$

a. Titik kesetimbangan subpopulasi terinfeksi Covid-19

(I)

Nilai i^* diperoleh dari persamaan (4.49) berikut

$$Ai^{*4} + Bi^{*3} + Ci^{*2} + Di^* + E = 0$$

dengan

$$\begin{aligned} \bullet A &= \frac{ukxy}{pqr\mu} \\ &= \frac{(0,0458)(0,0134)(0,0044)(0,0480)}{(0,0149)(0,0201)(0,0186)(0,013)} \\ &= 1,792876883 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet B &= \frac{ukx\mu nm + ukrynm + uqxy nm + pkxynm - u\Gamma\alpha kxy}{pqr\mu nm} \\ &= \frac{(0,0458)(0,0134)(0,0044)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\ &\quad + (0,0458)(0,0134)(0,0186)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\ &\quad + (0,0458)(0,0201)(0,0044)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\ &\quad + (0,0149)(0,0134)(0,0044)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\ &\quad - (0,0458)(0,67)(0,036)(0,0134)(0,0044)(0,0480)}{(0,0149)(0,0201)(0,0186)(0,013)(0,1050)(0,0490)} \\ &= 2,929503756 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (ukr\mu nm + uqx\mu nm + uqryn m + pkx\mu nm + pkryn m + pqxyn m \\
& - u\Pi\alpha kx\mu - u\Pi\alpha kry - u\Pi\alpha qxy - \alpha k\delta\omega_1\Pi xy) \\
\bullet C = & \frac{\phantom{(ukr\mu nm + uqx\mu nm + uqryn m + pkx\mu nm + pkryn m + pqxyn m \\
& - u\Pi\alpha kx\mu - u\Pi\alpha kry - u\Pi\alpha qxy - \alpha k\delta\omega_1\Pi xy)}}{pqr\mu nm} \\
& (0,0458)(0,0134)(0,0186)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\
& + (0,0458)(0,0201)(0,0044)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\
& + (0,0458)(0,0201)(0,0186)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\
& + (0,0149)(0,0134)(0,0044)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\
& + (0,0149)(0,0134)(0,0186)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\
& + (0,0149)(0,0201)(0,0044)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\
& - (0,0458)(0,67)(0,036)(0,0134)(0,0044)(0,013) \\
& - (0,0458)(0,67)(0,036)(0,0134)(0,0186)(0,0480) \\
& - (0,0458)(0,67)(0,036)(0,0201)(0,0044)(0,0480) \\
= & \frac{- (0,036)(0,0134)(0,085)(0,022)(0,67)(0,0044)(0,0480)}{(0,0149)(0,0201)(0,0186)(0,013)(0,1050)(0,0490)} \\
= & -33,113681251
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (uqr\mu nm + pkr\mu nm + pqx\mu nm + pqryn m - u\Pi\alpha kr\mu - u\Pi\alpha qx\mu \\
& - u\Pi\alpha qry - \alpha k\delta\omega_1\Pi x\mu - \alpha k\delta\omega_1\Pi ry - \alpha x\delta\omega_1\omega_2\Pi y) \\
\bullet D = & \frac{\phantom{(uqr\mu nm + pkr\mu nm + pqx\mu nm + pqryn m - u\Pi\alpha kr\mu - u\Pi\alpha qx\mu \\
& - u\Pi\alpha qry - \alpha k\delta\omega_1\Pi x\mu - \alpha k\delta\omega_1\Pi ry - \alpha x\delta\omega_1\omega_2\Pi y)}}{pqr\mu nm} \\
& (0,0458)(0,0201)(0,0186)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\
& + (0,0149)(0,0134)(0,0186)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\
& + (0,0149)(0,0201)(0,0044)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\
& + (0,0149)(0,0201)(0,0186)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\
& - (0,0458)(0,67)(0,036)(0,0134)(0,0186)(0,013) \\
& - (0,0458)(0,67)(0,036)(0,0201)(0,0044)(0,013) \\
& - (0,0458)(0,67)(0,036)(0,0201)(0,0186)(0,0480) \\
& - (0,036)(0,0134)(0,085)(0,022)(0,67)(0,0044)(0,013) \\
& - (0,036)(0,0134)(0,085)(0,022)(0,67)(0,0186)(0,0480) \\
= & \frac{- (0,036)(0,0044)(0,085)(0,022)(0,0071)(0,67)(0,0480)}{(0,0149)(0,0201)(0,0186)(0,013)(0,1050)(0,0490)} \\
= & -60,345601385
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet E &= 1 - R_0 \\
 &= 1 - 15,098 \\
 &= -14,098
 \end{aligned}$$

Sehingga persamaan (4.49) menjadi

$$\begin{aligned}
 &1,792876883i^{*4} + 2,929503756i^{*3} - 33,113681251i^{*2} \\
 &-60,345601385i^{*} - 14,098 = 0
 \end{aligned}$$

Berdasarkan aturan tanda Descartes, persamaan diatas terjadi satu kali perubahan tanda, maka i^* memiliki satu akar real positif. Akar dari i^* dalam persamaan diatas diantaranya $i_1^* = -4,224309079$, $i_2^* = -1,531328705$, $i_3^* = -0,276383088$, $i_4^* = 4,398$. Dari keempat akar persamaan (4.55), akar real positif yang memenuhi adalah $i_4^* = 4,398$. Jadi, $i^* = 4,398$.

b. Titik kesetimbangan subpopulasi rentan (S)

$$\begin{aligned}
 s^* &= \frac{\Pi}{ui^* + p} \\
 &= \frac{0,67}{(0,0458)(4,398) + (0,0149)} \\
 &= 3,1
 \end{aligned}$$

c. Titik kesetimbangan subpopulasi tervaksinasi dosis pertama (V_1)

$$\begin{aligned}
 v_1^* &= \frac{\delta\omega_1\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)} \\
 &= \frac{(0,085)(0,022)(0,67)}{((0,0458)(4,398) + (0,0149))} \\
 &\quad ((0,0134)(4,398) + (0,0201)) \\
 &= 0,073
 \end{aligned}$$

d. Titik kesetimbangan subpopulasi tervaksinasi dosis kedua (V_2)

$$\begin{aligned}
 v_2^* &= \frac{\delta\omega_1\omega_2\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)} \\
 &= \frac{(0,085)(0,022)(0,0071)(0,67)}{((0,0458)(4,398) + (0,0149))} \\
 &\quad ((0,0134)(4,398) + (0,0201)) \\
 &\quad ((0,0044)(4,398) + (0,0186)) \\
 &= 0,014
 \end{aligned}$$

e. Titik kesetimbangan subpopulasi tervaksinasi dosis ketiga (V_3)

$$\begin{aligned}
 v_3^* &= \frac{\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)(yi^* + \mu)} \\
 &= \frac{(0,085)(0,022)(0,0071)(0,0056)(0,67)}{((0,0458)(4,398) + (0,0149))} \\
 &\quad ((0,0134)(4,398) + (0,0201)) \\
 &\quad ((0,0044)(4,398) + (0,0186)) \\
 &\quad ((0,0480)(4,398) + (0,013)) \\
 &= 0,00034
 \end{aligned}$$

f. Titik kesetimbangan subpopulasi terpapar Covid-19

(E)

$$\begin{aligned}
 e^* &= \frac{i^*}{m} \left[u \left(\frac{\Pi}{ui^* + p} \right) + k \left(\frac{\delta\omega_1\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)} \right) + x \left(\frac{\delta\omega_1\omega_2\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + y \left(\frac{\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)(yi^* + \mu)} \right) \right] \\
 &= \frac{4,398}{0,0490} [(0,0458)(3,1) + (0,0134)(0,073) + (0,0044)(0,014) \\
 &\quad + (0,0480)(0,00034)] \\
 &= 12,828
 \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh titik kesetimbangan endemik ketika $R_0 = 15,098$ dengan nilai dari $\delta = 0,085$ adalah $(3,1; 0,073; 0,014; 0,00034; 12,828; 4,398)$

2. Titik Kesetimbangan Endemik Ketika $R_0 = 16,28$ dengan Nilai dari $\delta = 0,048$

a. Titik kesetimbangan subpopulasi terinfeksi Covid-19

(I)

Nilai i^* diperoleh dari persamaan (4.49) berikut

$$Ai^{*4} + Bi^{*3} + Ci^{*2} + Di^* + E = 0$$

dengan

$$\begin{aligned}
\bullet A &= \frac{ukxy}{pqr\mu} \\
&= \frac{(0,0476)(0,0134)(0,0044)(0,0480)}{(0,0141)(0,0201)(0,0186)(0,013)} \\
&= 1,973401900 \\
\bullet B &= \frac{ukx\mu nm + ukrynm + uqxynm + pkxynm - u\Pi\alpha kxy}{pqr\mu nm} \\
&\quad (0,0476)(0,0134)(0,0044)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\
&\quad + (0,0476)(0,0134)(0,0186)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\
&\quad + (0,0476)(0,0201)(0,0044)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\
&\quad + (0,0141)(0,0134)(0,0044)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\
&= \frac{- (0,0476)(0,67)(0,036)(0,0134)(0,0044)(0,0480)}{(0,0141)(0,0201)(0,0186)(0,013)(0,1050)(0,0490)} \\
&= 3,165800324 \\
\bullet C &= \frac{(ukr\mu nm + uqx\mu nm + uqryn m + pkx\mu nm + pkrynm + pqxynm - u\Pi\alpha kx\mu - u\Pi\alpha kry - u\Pi\alpha qxy - \alpha k\delta\omega_1\Pi xy)}{pqr\mu nm} \\
&\quad (0,0476)(0,0134)(0,0186)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\
&\quad + (0,0476)(0,0201)(0,0044)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\
&\quad + (0,0476)(0,0201)(0,0186)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\
&\quad + (0,0141)(0,0134)(0,0044)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\
&\quad + (0,0141)(0,0134)(0,0186)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\
&\quad + (0,0149)(0,0201)(0,0044)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\
&\quad - (0,0476)(0,67)(0,036)(0,0134)(0,0044)(0,013) \\
&\quad - (0,0476)(0,67)(0,036)(0,0134)(0,0186)(0,0480) \\
&\quad - (0,0476)(0,67)(0,036)(0,0201)(0,0044)(0,0480) \\
&= \frac{- (0,036)(0,0134)(0,048)(0,022)(0,67)(0,0044)(0,0480)}{(0,0141)(0,0201)(0,0186)(0,013)(0,1050)(0,0490)} \\
&= -36,626875407
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (uqr\mu nm + pkr\mu nm + pqx\mu nm + pqryn m - u\Pi\alpha kr\mu - u\Pi\alpha qx\mu \\
 \bullet D &= \frac{-u\Pi\alpha qry - \alpha k\delta\omega_1\Pi x\mu - \alpha k\delta\omega_1\Pi ry - \alpha x\delta\omega_1\omega_2\Pi y}{pqr\mu nm} \\
 & (0,0476)(0,0201)(0,0186)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\
 & + (0,0141)(0,0134)(0,0186)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\
 & + (0,0141)(0,0201)(0,0044)(0,013)(0,1050)(0,0490) \\
 & + (0,0141)(0,0201)(0,0186)(0,0480)(0,1050)(0,0490) \\
 & - (0,0476)(0,67)(0,036)(0,0134)(0,0186)(0,013) \\
 & - (0,0476)(0,67)(0,036)(0,0201)(0,0044)(0,013) \\
 & - (0,0476)(0,67)(0,036)(0,0201)(0,0186)(0,0480) \\
 & - (0,036)(0,0134)(0,048)(0,022)(0,67)(0,0044)(0,013) \\
 & - (0,036)(0,0134)(0,048)(0,022)(0,67)(0,0186)(0,0480) \\
 & = \frac{- (0,036)(0,0044)(0,048)(0,022)(0,0071)(0,67)(0,0480)}{(0,0141)(0,0201)(0,0186)(0,013)(0,1050)(0,0490)} \\
 & = -66,015300067
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet E &= 1 - R_0 \\
 &= 1 - 16,28 \\
 &= -15,28
 \end{aligned}$$

Sehingga persamaan (4.49) menjadi

$$\begin{aligned}
 & 1,973401900i^{*4} + 3,165800324i^{*3} - 36,626875407i^{*2} \\
 & - 66,015300067i^{*} - 15,28 = 0
 \end{aligned}$$

Berdasarkan aturan tanda Descartes, persamaan diatas terjadi satu kali perubahan tanda, maka i^*

memiliki satu akar real positif. Akar dari i^* dalam persamaan diatas diantaranya $i_1^* = -4,225676582$, $i_2^* = -1,516406919$, $i_3^* = -0,273871646$, $i_4^* = 4,412$. Dari keempat akar persamaan (4.55), akar real positif yang memenuhi adalah $i_4^* = 4,412$. Jadi, $i^* = 4,412$.

b. Titik kesetimbangan subpopulasi rentan (S)

$$\begin{aligned} s^* &= \frac{\Pi}{ui^* + p} \\ &= \frac{0,67}{(0,0476)(4,412) + (0,0141)} \\ &= 2,99 \end{aligned}$$

c. Titik kesetimbangan subpopulasi tervaksinasi dosis pertama (V_1)

$$\begin{aligned} v_1^* &= \frac{\delta\omega_1\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)} \\ &= \frac{(0,048)(0,022)(0,67)}{((0,0476)(4,412) + (0,0141))} \\ &\quad ((0,0134)(4,412) + (0,0201)) \\ &= 0,0398 \\ &\approx 0,04 \end{aligned}$$

d. Titik kesetimbangan subpopulasi tervaksinasi dosis kedua (V_2)

$$\begin{aligned}
 v_2^* &= \frac{\delta\omega_1\omega_2\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)} \\
 &= \frac{(0,048)(0,022)(0,0071)(0,67)}{((0,0476)(4,412) + (0,0141))} \\
 &\quad ((0,0134)(4,412) + (0,0201)) \\
 &\quad ((0,0044)(4,412) + (0,0186)) \\
 &= 0,0074
 \end{aligned}$$

e. Titik kesetimbangan subpopulasi tervaksinasi dosis ketiga (V_3)

$$\begin{aligned}
 v_3^* &= \frac{\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)(yi^* + \mu)} \\
 &= \frac{(0,048)(0,022)(0,0071)(0,0056)(0,67)}{((0,0476)(4,412) + (0,0141))} \\
 &\quad ((0,0134)(4,412) + (0,0201)) \\
 &\quad ((0,0044)(4,412) + (0,0186)) \\
 &\quad ((0,0480)(4,412) + (0,013)) \\
 &= 0,000185
 \end{aligned}$$

f. Titik kesetimbangan subpopulasi terpapar Covid-19 (E)

$$\begin{aligned}
 e^* &= \frac{i^*}{m} \left[u \left(\frac{\Pi}{ui^* + p} \right) + k \left(\frac{\delta\omega_1\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)} \right) + x \left(\frac{\delta\omega_1\omega_2\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + y \left(\frac{\delta\omega_1\omega_2\omega_3\Pi}{(ui^* + p)(ki^* + q)(xi^* + r)(yi^* + \mu)} \right) \right] \\
 &= \frac{4,412}{0,0490} [(0,0476)(2,99) + (0,0134)(0,0398) + (0,0044)(0,0074) \\
 &\quad + (0,0480)(0,000185)] \\
 &= 12,868
 \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh titik kesetimbangan endemik ketika $R_0 = 16,28$ dengan nilai dari $\delta = 0,048$ adalah $(2,99; 0,04; 0,0074; 0,000185; 12,868; 4,412)$

Lampiran 6. Perhitungan Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)
untuk Mengetahui Keberhasilan Penggunaan
Vaksinasi

Perhitungan untuk mengevaluasi keberhasilan penggunaan vaksin dengan menggunakan asumsi nilai parameter laju perkembangan virus Covid-19 (α) sebesar 0,002 dan mengubah nilai parameter proporsi subpopulasi *Susceptible* (S) yang telah melakukan vaksinasi (δ), sedangkan nilai parameter selain δ dan α memiliki nilai yang sama dengan parameter ketika kondisi endemik ($R_0 > 1$) yang terdapat pada Tabel 4.7. Bilangan reproduksi dasar (R_0) dapat diperoleh sebagai berikut:

- a. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) untuk $\delta = 0,9$

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \left(\frac{\alpha u \Pi \mu q r + \alpha k \delta \omega_1 \Pi \mu r + \alpha x \delta \omega_1 \omega_2 \Pi \mu + \alpha y \delta \omega_1 \omega_2 \omega_3 \Pi}{m n \mu p q r} \right) \\
 &= \frac{((0,002)(0,005)(0,67)(0,013)(0,0201)(0,0186) \\
 &\quad + (0,002)(0,0134)(0,9)(0,022)(0,67)(0,013)(0,0186) \\
 &\quad + (0,002)(0,0044)(0,9)(0,022)(0,0071)(0,67)(0,013) \\
 &\quad + (0,002)(0,048)(0,9)(0,022)(0,0071)(0,0056)(0,67))}{(0,015)(0,105)(0,013)(0,0328)(0,0201)(0,0186)} \\
 &= \frac{0,0000000018001}{0,0000000025108} \\
 &= 0,716932511
 \end{aligned}$$

- b. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) untuk $\delta = 0,8$

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \left(\frac{\alpha u \Pi \mu q r + \alpha k \delta \omega_1 \Pi \mu r + \alpha x \delta \omega_1 \omega_2 \Pi \mu + \alpha y \delta \omega_1 \omega_2 \omega_3 \Pi}{m n \mu p q r} \right) \\
 &= \frac{((0,002)(0,01)(0,67)(0,013)(0,0201)(0,0186) \\
 &\quad + (0,002)(0,0134)(0,8)(0,022)(0,67)(0,013)(0,0186) \\
 &\quad + (0,002)(0,0044)(0,8)(0,022)(0,0071)(0,67)(0,013) \\
 &\quad + (0,002)(0,048)(0,8)(0,022)(0,0071)(0,0056)(0,67))}{(0,015)(0,105)(0,013)(0,0306)(0,0201)(0,0186)} \\
 &= \frac{0,00000000019619}{0,00000000023424} \\
 &= 0,837555459
 \end{aligned}$$

c. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) untuk $\delta = 0,5$

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \left(\frac{\alpha u \Pi \mu q r + \alpha k \delta \omega_1 \Pi \mu r + \alpha x \delta \omega_1 \omega_2 \Pi \mu + \alpha y \delta \omega_1 \omega_2 \omega_3 \Pi}{m n \mu p q r} \right) \\
 &= \frac{((0,002)(0,025)(0,67)(0,013)(0,0201)(0,0186) \\
 &\quad + (0,002)(0,0134)(0,5)(0,022)(0,67)(0,013)(0,0186) \\
 &\quad + (0,002)(0,0044)(0,5)(0,022)(0,0071)(0,67)(0,013) \\
 &\quad + (0,002)(0,048)(0,5)(0,022)(0,0071)(0,0056)(0,67))}{(0,015)(0,105)(0,013)(0,024)(0,0201)(0,0186)} \\
 &= \frac{0,00000000024473}{0,00000000018371} \\
 &= 1,332109546
 \end{aligned}$$

d. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) untuk $\delta = 0,3$

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \left(\frac{\alpha u \Pi \mu q r + \alpha k \delta \omega_1 \Pi \mu r + \alpha x \delta \omega_1 \omega_2 \Pi \mu + \alpha y \delta \omega_1 \omega_2 \omega_3 \Pi}{m n \mu p q r} \right) \\
 &= \frac{((0,002)(0,035)(0,67)(0,013)(0,0201)(0,0186) \\
 &\quad + (0,002)(0,0134)(0,3)(0,022)(0,67)(0,013)(0,0186) \\
 &\quad + (0,002)(0,0044)(0,3)(0,022)(0,0071)(0,67)(0,013) \\
 &\quad + (0,002)(0,048)(0,3)(0,022)(0,0071)(0,0056)(0,67))}{(0,015)(0,105)(0,013)(0,0196)(0,0201)(0,0186)} \\
 &= \frac{0,00000000027709}{0,00000000015003} \\
 &= 1,846849514
 \end{aligned}$$

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

Nama Lengkap : Mahardika Karunia Dewi
Purnamasari
Tempat, Tanggal Lahir : Semarang, 31 Agustus 2001
Alamat : Jl. Sapta Prasetya Tgh IV No.
8, Pedurungan Kidul
Nomer HP : 087718088905
E-mail : mahardikadewii318@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. SD Negeri 05 Pedurungan Kidul lulus tahun 2013
2. SMP Negeri 33 Semarang lulus tahun 2016
3. SMA Negeri 2 Semarang lulus tahun 2019
4. UIN Walisongo Semarang

Semarang, Juni 2023

Mahardika Karunia Dewi P.
NIM. 1908046040