EKSPANSI CSR DALAM ALJABAR MAX PLUS UNTUK MENENTUKAN KEPERIODIKAN PANGKAT MATRIKS *IRREDUCIBLE*

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika

Oleh : **RIZKY AMALIA**
NIM : 1908046051

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
202

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	Rizky Amalia
NIM	:	1908046051
Jurusan/Program Studi	:	Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

EKSPANSI CSR DALAM ALJABAR MAX PLUS UNTUK MENENTUKAN KEPERIODIKAN PANGKAT MATRIKS *IRREDUCIBLE*

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 10 Mei 2023

Pembuat pernyataan,

Rizky Amalia

NIM : 1908046051

KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul	:	**EKSPANSI CSR DALAM ALJABAR MAX PLUS UNTUK MENENTUKAN KEPERIODIKAN PANGKAT MATRIKS *IRREDUCIBLE***
Penulis	:	Rizky Amalia
NIM	:	1908046051
Jurusan	:	Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 25 Mei 2023

DEWAN PENGUJI

Penguji I,	Penguji II,
Any Muanalifah, M.Si., Ph.D	**Prihadi Kurniawan, M.Sc**
NIP : 19820113 201101 2 009	NIP : 19901226 201903 1 012
Penguji III,	Penguji IV,
Dinni Rahma Oktaviani, M.Si	**Ayus Riana Isnawati, M.Sc**
NIP : 19941009 201903 2 013	NIP : 19851019 201903 2 014
Pembimbing I,	Pembimbing II,
Any Muanalifah, M.Si., Ph.D	**Prihadi Kurniawan, M.Sc**
NIP : 19820113 201101 2 009	NIP : 19901226 201903 1 012

NOTA DINAS

Semarang, 10 Mei 2023

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	EKSPANSI CSR DALAM ALJABAR MAX PLUS UNTUKMENENTUKAN KEPERIODIKAN PANGKAT MATRIKS *IRREDUCIBLE*
Nama	:	Rizky Amalia
NIM	:	1908046051
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,

Any Muanalifah, M.Si., Ph.D
NIP : 19820113 201101 2 009

NOTA DINAS

Semarang, 10 Mei 2023

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : EKSPANSI CSR DALAM ALJABAR MAX PLUS UNTUK MENENTUKAN KEPERIODIKAN PANGKAT MATRIKS *IRREDUCIBLE*
Nama : Rizky Amalia NIM
: 1908046051
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing II,

Prihadi Kurniawan, M.Sc
NIP : 19901226 201903 1 012

MOTTO

"Suatu pekerjaan tidak bisa dilakukan dengan totalitas kecuali dengan keyakinan"

PERSEMBAHAN

Karya ini peneliti persembahkan
kepada:

1. Kedua orang tua saya Bapak Mastiyono dan Ibu Nurul Fatmawati yang selalu mendoakan dan bekerja keras tak kenal lelah untuk peneliti sehingga sampai di tahap ini.
2. Bapak KH. Ahmad Amnan Muqoddam dab Ibu Nyai Hj. Rofiqotul Makiyyah, AH. selaku pendiri dan pengasuh Ponpes Tahfidzul Qur'an Al Hikmah Tugurejo, Tugu, Semarang.
3. Kepada semua pihak yang selalu mendoakan peneliti dan memberi support dalam bentuk apapun sehingga bisa menyelesaikan tugas akhir ini.

ABSTRAK

Aljabar max-plus merupakan suatu struktur aljabar $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real yang dilengkapi dengan operasi maksimum dan penjumlahan. Aljabar max-plus memiliki pengaplikasian yang cukup luas salah satunya adalah menyelesaikan keperiodikan pangkat matriks *irreducible*. Sehingga penelitian ini bertujuan untuk menentukan keperiodikan pangkat matriks *irreducible* dengan menggunakan ekspansi *CSR* dalam aljabar max-plus. Suatu matriks A yang *irreducible* dikatakan periodik apabila terdapat siklisitas γ sehingga $A^{t+\gamma} = \lambda^{\gamma} A^{t}$ untuk semua $t \geq T(A)$. Jika $\lambda = 0$ maka $A^{t+\gamma} = A^{t}$ untuk $t \geq T(A)$. Matriks CSR diperoleh dengan mencari *critical digraph* dan menghitung metrik matriks. Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa suatu matriks A dikatakan periodik apabila memenuhi $A^{t} = \lambda(A)^{\otimes t} \otimes CS^{t}R$ yang merupakan teorema siklisitas.

Kata kunci : Pangkat Matriks, Periodik, CSR

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah bini'matillah, puji syukur kehadirat Allah SWT. Maha pengasih pencurah kasih, Maha penyayang sayangnya tak terbilang, sehingga peneliti dapat menyelesaikan penelitian dan penulisan skripsi ini sesuai dengan waktu yang telah direncanakan.

Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW. beserta keluarga dan para sahabatnya yang telah berjuang menegakkan agama Allah SWT. di alam semsesta ini.

Skripsi ini dapat terselesaikan berkat doa dan dukungan dari berbagai pihak, baik bersifat moral maupun material. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Imam Taufiq, M.Ag selaku Rektor Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
2. Bapak Dr. H. Ismail, M.Ag selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
3. Ibu Emy Siswanah, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
4. Ibu Any Muanalifah, M.Si., Ph.D sebagai dosen pembimbing I yang telah bersedia memberikan bimbingan dan arahan selama penulisan skripsi.
5. Bapak Prihadi Kurniawan, M.Sc sebagai dosen pembimbing II yang telah bersedia memberikan bimbingan dan arahan selama penulisan skripsi.

6. Bapak dan Ibu Dosen Prodi Matematika, terima kasih atas ilmu, nasehat, motivasi dan segala yang telah diberikan kepada peneliti selama peneliti menjalani perkuliahan di Prodi Matematika UIN Walisongo Semarang.
7. Teruntuk Ayahanda dan Ibunda tercinta Bapak Mastiyono dan Ibu Nurul Fatmawati, terima kasih telah memberikan segalanya kepada putri sulung kalian, Ayah yang tak pernah lelah berjuang hingga sebrang pulau hanya untuk kemenangan dan kebahagiaan istri dan putra-putrinya. Ibu yang selalu menjadi pangkuan tumpahan air mata dikala diri ini tak lagi mampu berjuang. Terima kasih selalu hadir menggenggam jemari hingga sanubari.
8. Yang saya ta'dzimi Al-Mukarrom Bapak KH. Ahmad Amnan Muqoddam beserta Ibu Nyai Hj. Rofiqotul Makkiyah, AH. selaku pendiri dan pengasuh Ponpes Tahfidzul Qur'an Al Hikmah Tugurejo, Tugu, Semarang. Terima kasih atas doa dan ridhonya, murobbi ruhi yang selalu saya cintai, manusia tanpa hubungan darah yang mau memelas dan memberikan sejuta cipratan kasih dengan keikhlasan kepada santri-santrinya.
9. Untuk adik saya, Fajar Gilang Firmansyah yang selalu mewarnai hidup saya, menemani dan membersamai dalam mengarungi jalan kehidupan keluarga. Semoga kesuksesan menyertai kita berdua sebagai wujud cinta kita untuk orang tua. Aamin.
10. Teruntuk kalian teman-teman Matematika B 2019 yang telah mensupport dan membantu peneliti dalam hal apapun.

Terkhusus untuk Putri Aulia Azali dan teman temanku sebidang aljabar yang selalu memberi dukungan dalam bentuk apapun.

11. Teman-temanku santri PPPTQ Al Hikmah Tugurejo Semarang, terutama untuk Susmita Zen Noviani Putri dan Devi Renita Apriliani terima kasih telah bersedia menjadi tempat keluh kesah saya selama ini. Dan teruntuk teman seangkatan seperjuangan bila, azah, aeni, mahera, fiki, farisa, eva yang sudi menjadi teman dalam setiap waktu yang selalu memberi support dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Semoga Allah SWT. senantiasa memberikan kesehatan dan keberkahan hidup kepada kita semua. Terutama bagi nama-nama yang ikut serta dalam penyelesaian skripsi ini. Peneliti menyadari tanpa adanya bantuan, dorongan, support, arahan, bimbingan serta motivasi yang sangat luar biasa diberikan kepada peneliti, skripsi ini tidak mampu terselesaikan dengan baik, semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis khususnya dan umumnya bagi pembaca.

Semarang, 12 Mei 2023

Rizky Amalia
NIM: 1908046051

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada dengan memuat bentuk dan konsep matematika. Allah telah menciptakan segala isinya dengan begitu cermat, teliti dengan perhitungan dan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007).

Di dalam Al-Qur’an sudah banyak sekali ayat-ayat yang menjelaskan tentang ilmu matematika. Salah satu ayat yang menjelaskan tentang ilmu matematika adalah surat Al-Qamar/54 ayat 49, yang berbunyi:

اِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنٰهُ بِقَدَرٍ

"Sungguh, Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran". (QS. Yunus(54): 49)

Di dalam ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah telah menciptakan alam semesta beserta segala isinya dengan ukuran, takaran, dan hitungan yang seimbang. Jadi matematika sebenarnya sudah ada sejak zaman dahulu dan manusia hanya menyimbolkan dari fenomena-fenomena di dalam kehidupan sehari-hari.

Matematika mempunyai beberapa cabang ilmu yang banyak sekali. Salah satu cabang ilmunya adalah aljabar. Kemudian cabang ilmu aljabar terbagi lagi menjadi beberapa cabang seperti aljabar abstrak dan aljabar linier. Aljabar abstrak merupakan suatu bidang matematika yang mengkaji struktur aljabar seperti grup, ring, *field*, modul dan ruang vektor. Aljabar abstrak juga membahas tentang himpunan dan operasinya. Sehingga dalam mempelajari materi ini selalu identik dengan sebuah himpunan tidak kosong yang mempunyai elemen-elemen yang dapat dikombinasikan dengan penjumlahan, perkalian, ataupun keduanya. Sedangkan aljabar linier adalah bidang matematika yang mengkaji tentang vektor, pemetaan linier dan matriks (Majid, 2011).

Aljabar max-plus merupakan suatu struktur aljabar $\mathbb{R}_\epsilon := \mathbb{R} \cup \{\epsilon\}$ dimana $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real dan $\epsilon := -\infty$ dan disertai operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$ yang dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}_\epsilon, \oplus, \otimes)$. Operasi $\oplus$ dalam aljabar max-plus menyatakan maksimum dan $\otimes$ menyatakan operasi penjumlahan bilangan real.

Aljabar max-plus merupakan suatu topik aljabar yang memiliki pengaplikasian yang cukup luas di antaranya yaitu kombinatorik, teori graf, teori sistem, dan teori antrian. Pada aljabar max-plus sering digunakan untuk memodelkan suatu permasalahan diantaranya penjadwalan (Fahim, 2013), sistem antrian (Wibowo, 2018), transportasi (Della, 2013), lalu lintas (Pungkas, 2021), *manufacturing* (Singgih, 2014) dan sebagainya. Aljabar max-plus juga memiliki banyak permasalahan yang muncul sehingga harus diselesaikan dengan solusi yang tepat. Sehingga dalam penyelesaiannya dibutuhkan analisis atau komputasi.

Selain itu, aljabar max-plus juga dapat menyelesaikan permasalahan keperiodikan. Di mana periodik yang dimaksud adalah keperiodikan pangkat matriks. Suatu matriks A yang *irreducible* dikatakan periodik apabila terdapat bilangan γ sehingga $A^{t+\gamma} = \lambda^\gamma A^t$ untuk semua $t \geq T(A)$. Jika $\lambda = 0$ maka $A^{t+\gamma} = A^t$ untuk $t \geq T(A)$.

Jika A adalah matriks persegi atas $\mathbb{R}_{\max}$, maka hasil kali iterasi $A \otimes A \otimes ... \otimes A$ di mana simbol A muncul sebanyak t kali akan dilambangkan dengan A^t. Ini adalah pangkat matriks dalam aljabar max-plus yang merupakan objek dari penelitian ini.

Berikut ini merupakan beberapa penelitian yang membahas mengenai matriks tidak tereduksi, perpangkatan matriks dan keperiodikan pada aljabar max-plus. Diantaranya (Schutter, 1998) membahas mengenai definisi dari pada matriks tidak tereduksi dan matriks boolean. Kemudian dari (Cavalec,1999) membahas mengenai definisi keperiodikan suatu matriks.

Selanjutnya penelitian dari Nurwan (2015) menjelaskan tentang matriks pada aljabar max-plus serta beberapa aplikasinya yang bertujuan untuk mengkaji tentang matriks pada aljabar max-plus khususnya bagaimana perilaku perpangkatan matriks. Penelitian sebelumnya juga dilakukan oleh Ilwaru(2014) yang berjudul Matriks Pangkat dan Keperiodikannya dalam Aljabar Max-Plus. Penelitian tersebut bertujuan untuk membahas mengenai permasalahan yang diberikan oleh Sergeev (2009) yaitu menghitung periodik pangkat matriks A^r dan mendapatkan perilaku periodik akhir dari matriks $A^l \otimes x$. Ide utama dari penelitian tersebut adalah menggunakan penskalaan similaritas diagonal yang sesuai $A \rightarrow X^{-1}AX$, yang disebut penskalaan visualisasi.

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan maka peneliti bermaksud untuk mengkaji lebih dalam tentang "Ekspansi CSR dalam Aljabar Max-Plus untuk Menentukan Keperiodikan Pangkat Matriks *Irreducible*" yang terdapat dalam artikel "CSR Expansions of Matrix Powers in Max Algebra" oleh Sergei Sergeev dan Hans Schneider (2012). Penelitian tersebut bertujuan untuk mengetahui keperiodikan pangkat matriks dalam aljabar max-plus dengan memperkenalkan konsep ekspansi CSR dan menggunakan teorema siklisitas.

1.2. Rumusan Masalah

Sesuai dengan latar belakang yang telah diuraikan, maka identifikasi masalah dalam penelitian ini adalah "Bagaimana penentuan keperiodikan pangkat matriks *irreducible* dengan menggunakan ekspansi CSR dalam aljabar max-plus".

1.3. Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah yang telah dipaparkan, maka dapat diketahui tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan keperiodikan pangkat matriks *irreducible* dengan menggunakan ekspansi CSR dalam aljabar max-plus.

1.4. Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah hanya membahas matris *irreducible* saja dan untuk $\lambda(A) = 0$.

1.5. Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat sebagai berikut.

1. Penulis
   Menambah pengetahuan dan keilmuan yang berkaitan tentang aljabar max-plus.

2. Lembaga
   Sebagai tambahan pustaka untuk rujukan penelitian dan bahan perkuliahan khususnya tentang materi aljabar max-plus.

3. Pembaca
   Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai aljabar max-plus yang diharapkan dapat menjadi rujukan untuk penelitian yang akan datang.

1.6. Metodologi Penelitian

Pada bab ini peneliti akan menjelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam menyelasaikan penelitian ini. Peneliti menggunakan metode penelitian kepustakaan *library research* atau kajian pustaka. Metode ini dilakukan untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang dilakukan dalam penelitian ini. Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan oleh peniliti dalam menyelesaikan permasalahan adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan kajian dari buku, jurnal-jurnal yang berhubungan dengan perpangkatan matriks dan keperiodikan dalam aljabar max-plus.

2. Mengkaji definisi dasar seperti aljabar max-plus, digraf dan matriks, dan perpangkatan matriks.

3. Mendefinisikan matriks CSR dan keperiodikan suatu pangkat matriks.

4. Menunjukkan keperiodikan pangkat suatu matriks *irreducible* A^t dengan menggunakan matriks CSR.

5. Melaporkan hasil perhitungan dan membuat kesimpulan.

1.7. Sistematika Penulisan

Dalam penyusunan penelitian ini diperlukan langkah-langkah yang sistematis guna memudahkan dalam makna dari setiap bab yang ada. Secara umum penelitian ini terdiri dari tiga bab.

1. **BAB I PENDAHULUAN**
   Bab ini membahas mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metodologi penelitian, dan sistematika penulisan.

2. **BAB II LANDASAN PUSTAKA**
   Bab ini berisi teori-teori yang mendasari penulisan proposal ini. Adapun teori-teori yang termuat di dalamnya adalah aljabar max-plus, digraf dan matriks, dan perpangkatan matriks.

3. **BAB III EKSPANSI CSR DALAM ALJABAR MAX-PLUS UNTUK MENENTUKAN KEPERIODIKAN PANGKAT MATRIKS IRREDUCIBLE**
   Bab ini berisi pembahasan mengenai penelitian ini yaitu ekspansi CSR dalam aljabar max-plus untuk menentukan keperiodikan pangkat matriks *irreducible*.

4. **BAB IV PENUTUP**
   Bab ini berisi kesimpulan dari materi yang telah dibahas pada bab sebelumnya dan berisi saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan definisi-definisi dasar dalam aljabar max-plus yang pembahasannya meliputi definisi aljabar max-plus, digraf dan matriks, serta perpangkatan matriks. Pembahasan dimulai dari gagasan penting tentang aljabar max-plus yang berisi definisi, sifat-sifat dan operasinya. Perhatikan definisi aljabar max-plus berikut ini.

2.1. Aljabar Max-Plus

Pada subbab ini akan dijelaskan tentang definisi dasar aljabar max-plus dan sifat-sifatnya beserta operasinya. Kemudian dilanjutkan dengan matriks dan operasinya kemudian dilanjutkan dengan matriks-matriks dalam aljabar max-plus.

2.1.1. Definisi Aljabar Max-Plus

Diketahui terdapat suatu himpunan tak kosong yang diperluas dengan $\epsilon = -\infty$. Sehingga $\mathbb{R}_\epsilon$ menunjukkan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dimana $\mathbb{R}$ merupakan himpunan bilangan real. Selanjutnya untuk elemen $a, b \in \mathbb{R}_\epsilon$, didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ sebagai berikut.

$$a \oplus b := \max(a, b)$$
$$a \otimes b := a + b.$$

Definisi dari aljabar max-plus dapat dilihat sebagai berikut.

Definisi 2.1.1

Aljabar max-plus merupakan suatu struktur aljabar $\mathbb{R}_\epsilon$ dan disertai dengan dua operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$ yang dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}_\epsilon, \oplus, \otimes)$ dan memenuhi sifat berikut.

a) Asosiatif terhadap operasi $\oplus$ dan $\otimes$, yaitu
$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_{\max} : a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
dan
$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_{\max} : a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c.$

b) Komutatif terhadap operasi $\oplus$ dan $\otimes$, yaitu
$\forall a, b \in \mathbb{R}_{\max} : a \oplus b = b \oplus a$ dan $a \otimes b = b \otimes a.$

c) Distributif $\otimes$ terhadap $\oplus$, yaitu
$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_{\max} : (a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$ (Distributif kiri)
dan
$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_{\max} : a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ (Distributif kanan).

d) Eksistensi elemen nol, yaitu $-\infty$, sehingga berlaku
$\forall a \in \mathbb{R}_{\max} : a \oplus -\infty = -\infty \oplus a = a.$

e) Eksistensi elemen satuan, yaitu 0
$\forall a \in \mathbb{R}_{\max} : a \otimes 0 = 0 \otimes a = a.$

f) Elemen nol adalah absorbing untuk operasi $\otimes$, sehingga berlaku
$\forall a \in \mathbb{R}_{\max} : a \otimes -\infty = -\infty \otimes a = -\infty.$

g) Idempoten dari operasi $\oplus$, yaitu
$\forall a \in \mathbb{R}_{\max} : a \oplus a = a.$

Dari definisi di atas dapat diilustrasikan dengan beberapa contoh operasi aritmatika sederhana dalam aljabar max-plus.

Contoh 2.1.2

$$\begin{aligned}
5 \oplus 3 &= \max(5, 3) = 5 \\
0 \oplus 3 &= \max(0, 3) = 3 \\
5 \otimes 3 &= 5 + 3 = 8 \\
0 \otimes 3 &= 0 + 3 = 3.
\end{aligned}$$

Seperti pada aljabar konvensional bahwa prioritas dalam hal urutan pengoperasian, operasi $\otimes$ mempunyai prioritas lebih besar daripada operasi $\oplus$.

Contoh 2.1.3

$$\begin{aligned}
3 \otimes 4 \oplus 5 \otimes 1 &= (3 \otimes 4) \oplus (5 \otimes 1) \\
&= (3 + 4) \oplus (5 + 1) \\
&= 7 \oplus 6 \\
&= \max\{7, 6\} \\
&= 7
\end{aligned}$$

Contoh 2.1.4

$$\begin{aligned}
10 \oplus 2 \otimes -5 &= 10 \oplus (2 \otimes -5) \\
&= 10 \oplus -3 \\
&= \max\{10, -3\} \\
&= 10
\end{aligned}$$

Perluasan untuk operasi $-\infty$

Jelas bahwa, max $(a, -\infty)$ =max$(-\infty, a) = a$ dan $a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}_{\max}$, sehingga didapatkan

$$a \oplus -\infty = -\infty \oplus a = a \text{ dan } a \otimes -\infty = -\infty \otimes a = -\infty.$$

Contoh 2.1.5

$$5 \oplus -\infty = \max(5, -\infty) = 5$$
$$5 \otimes -\infty = 5 + (-\infty) = -\infty$$
$$0 \oplus -\infty = \max(0, -\infty) = 0$$

Selanjutnya diberikan definisi pangkat bilangan yang menyatakan himpunan bilangan asli termasuk nol yang dinotasikan dengan $\mathbb{N}_0$ untuk $x \in \mathbb{R}_{\max}$

Definisi 2.1.6 (Pangkat Bilangan, e.g (Heidergott, 2005))
Misalkan $n \in \mathbb{N}_0$ dan $x \in \mathbb{R}_{\max}$ maka pangkat bilangan dapat didefinisikan

$$x^{\otimes n} := \underbrace{x \otimes x \otimes \cdots \otimes x}_{\text{n}}$$

untuk semua $n \in \mathbb{N}_0$ dengan $n \neq 0$. Untuk $n = 0$ didefinisikan $x^{\otimes 0} := 0$.

Perhatikan bahwa $x^{\otimes n}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dibaca dalam aljabar konvensional sebagai

$$x^{\otimes n} = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{\text{n}} = n \times x$$

Contoh 2.1.7

$$3^{\otimes 5} = 5 \times 3 = 15$$
$$6^{\otimes 2} = 2 \times 6 = 12 =$$

Dalam hal yang sama, akar max-plus juga dapat diperkenalkan sebagai berikut.

$$x^{\otimes \alpha} = \alpha \times x,$$

untuk $\alpha \in \mathbb{R}$.

Contoh 2.1.8

$$10^{\otimes \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$
$$16^{\otimes -\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4} \times 16 = -4 = 4^{\otimes -1}.$$

Selain itu juga diperkenalkan pangkat negatif dari bilangan real, seperti contoh berikut ini.

Contoh 2.1.9

$$10^{\otimes -2} = -2 \times 10 = -20 = 20^{\otimes -1}$$
$$-4^{\otimes -2} = -2 \times -4 = 8$$

2.2.2. Matriks dan Operasi Matriks

Pada bagian ini, akan diperkenalkan sebuah matriks atas $\mathbb{R}_{\max}$. Pada aljabar max-plus matriks yang berukuran $n \times m$ dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$. Untuk $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n, m \neq 0$, didefinisikan $\underline{n} = \{1, 2, ..., n\}$ dan $\underline{m} = \{1, 2, ..., m\}$. Elemen matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$ pada baris i dan kolom j dinotasikan dengan a_{ij}, untuk $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$. Matriks A dapat ditulis sebagai

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Terkadang, elemen a_{ij} juga dilambangkan dengan

$$[A]_{ij}, i \in \underline{n}, j \in \underline{m}.$$

Matriks dimana jumlah baris dan kolom sama disebut matriks bujur sangkar atau matriks persegi. Matriks bujur sangkar dengan n baris dan n kolom dinotasikan dengan $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ dan dapat ditulis sebagai

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada aljabar max-plus dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbb{R}_{\max}^{n\times m}$ seperti berikut ini.

1. Penjumlahan Matriks

   Penjumlahan matriks merupakan penjumlahan dua matriks dengan menjumlahkan komponen-komponen yang letaknya sama. Dua matriks dapat dijumlahkan jika jumlah baris dan kolomnya sama. Dengan demikian matriks hasil penjumlahannya juga akan memiliki ordo yang sama. Berikut ini diberikan definisi dari penjumlahan matriks dalam aljabar max-plus.

Definisi 2.1.10 (Penjumlahan Matriks, e.g(Heidergott, 2005))
Diketahui dua buah matriks $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times m}$ dan didefinisikan operasi penjumlahan matriks A dan B sebagai berikut.

$$\begin{aligned} A \oplus B &= [A \oplus B]_{ij} \\ &= a_{ij} \oplus b_{ij} \\ &= \max(a_{ij}, b_{ij}) \end{aligned}$$

untuk $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$.

Contoh 2.1.11
Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & -\infty \\ 4 & -\infty & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hitung operasi $A \oplus B$ dan $B \oplus A$
Penyelesaian:
Berdasarkan definisi yang telah diberikan maka dapat diselesaikan sebagai berikut.
$[A \oplus B]_{11} = (-3 \oplus -\infty) = \max(-3, -\infty) = -3$
$[A \oplus B]_{12} = (-4 \oplus 0) = \max(-4, 0) = 0$
$[A \oplus B]_{13} = (0 \oplus -\infty) = \max(0, -\infty) = 0$
$[A \oplus B]_{21} = (-1 \oplus 4) = \max(-1, 4) = 4$
$[A \oplus B]_{22} = (2 \oplus -\infty) = \max(2, -\infty) = 2$
$[A \oplus B]_{23} = (1 \oplus 1) = \max(1, 1) = 1$
$[A \oplus B]_{31} = (0 \oplus -2) = \max(0, -2) = 0$
$[A \oplus B]_{32} = (1 \oplus -1) = \max(1, -1) = 1$
$[A \oplus B]_{33} = (2 \oplus 0) = \max(2, 0) = 2$

Maka dalam penulisan matriks dapat juga ditulis seperti berikut ini

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -\infty & 0 & -\infty \\ 4 & -\infty & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

kemudian melakukan dengan cara yang sama seperti di atas untuk menyelesaikan $B \oplus A$.
$[B \oplus A]_{11} = (-\infty \oplus -3) = \max(-\infty, -3) = -3$
$[B \oplus A]_{12} = (0 \oplus -4) = \max(0, -4) = 0$
$[B \oplus A]_{13} = (-\infty \oplus 0) = \max(-\infty, 0) = 0$
$[B \oplus A]_{21} = (4 \oplus -1) = \max(4, -1) = 4$
$[B \oplus A]_{22} = (-\infty \oplus 2) = \max(-\infty, 2) = 2$
$[B \oplus A]_{23} = (1 \oplus 1) = \max(1, 1) = 1$
$[B \oplus A]_{31} = (-2 \oplus 0) = \max(-2, 0) = 0$
$[B \oplus A]_{32} = (-1 \oplus 1) = \max(-1, 1) = 1$
$[B \oplus A]_{33} = (0 \oplus 2) = \max(0, 2) = 2$
Sehingga hasil akhir dari perhitungan $B \oplus A$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$B \oplus A = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & -\infty \\ 4 & -\infty & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan contoh tersebut dapat diperhatikan bahwa untuk $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times m}$ menyatakan bahwa $A \oplus B = B \oplus A$, sebab

$$\begin{aligned}[A \oplus B]_{ij} &= \max(a_{ij}, b_{ij}) \\ &= \max(b_{ij}, a_{ij}) \\ &= [B \oplus A]_{ij}\end{aligned}$$

sehingga $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times m}$ dalam penjumlahan matriks bersifat komutatif.

2. Perkalian Skalar

   Selain penjumlahan dua matriks, dikenal juga operasi antara skalar dengan matriks yang definisinya sebagai berikut.

   Definisi 2.1.12 (Perkalian Skalar, e.g (Heidergott, 2005))
   Misalkan $A \in {}_{\max}^{n\times m}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$, maka perkalian $\alpha \otimes A$ didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\alpha \otimes A &= [\alpha \otimes A]_{ij} \\ &= \alpha \otimes a_{ij} \\ &= \alpha + a_{ij}\end{aligned}$$

   untuk $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$.

   Contoh 2.1.13
   Misalkan $A = \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan $\alpha = 2$. Hitung $2 \otimes A$
   Penyelesaian:
   Hasil skalar α dengan matriks A adalah
   $[2 \otimes A]_{11} = 2 \otimes 0 = 2 + 0 = 2$
   $[2 \otimes A]_{12} = 2 \otimes -\infty = 2 + (-\infty) = -\infty$

$[2 \otimes A]_{21} = 2 \otimes 3 = 2 + 3 = 5$
$[2 \otimes A]_{22} = 2 \otimes 2 = 2 + 2 = 4$
Sehingga
$2 \otimes A = \begin{bmatrix} 2 & -\infty \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

3. Perkalian Matriks

   Perkalian matriks merupakan nilai pada matriks yang bisa dihasilkan dengan cara dikalikannya tiap baris dengan setiap kolom yang memiliki jumlah baris yang sama. Berikut ini diberikan definisi perkalian matriks dalam aljabar max-plus.

   Definisi 2.1.14 (Perkalian Matriks, e.g (Heidergott, 2005)) Misalkan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times l}$ dan $B \in \mathbb{R}_{\max}^{l \times m}$, maka perkalian matriks dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} A \otimes B &= [A \otimes B]_{ik} \\ &= \bigoplus_{j=1}^{l} a_{ij} \otimes b_{jk} \\ &= \max_{j \in \underline{l}} (a_{ij} + b_{jk}) \end{aligned}$$

   untuk $i \in \underline{n}$ dan $k \in \underline{m}$.

   Contoh 2.1.15
   Misalkan $A = \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -1 & 11 \\ 1 & -\infty \end{bmatrix}$ Hitung $A \otimes B$ dan $B \otimes A$
   Penyelesaian:
   $[A \otimes B]_{11} = 0 \otimes -1 \oplus -\infty \otimes 1 = \max(0 - 1, -\infty + 1) = -1$
   $[A \otimes B]_{12} = 0 \otimes 11 \oplus -\infty \otimes -\infty = \max(0 + 11, -\infty - \infty) = 11$
   $[A \otimes B]_{21} = 3 \otimes -1 \oplus 2 \otimes 1 = \max(3 - 1, 2 + 1) = 3$

$[A \otimes B]_{22} = 3 \otimes 11 \oplus 2 \otimes -\infty = \max(3+11, 2-\infty) = 14$

Maka $A \otimes B = \begin{bmatrix} -1 & 11 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$

Selanjutnya

$[B \otimes A]_{11} = -1 \otimes 0 \oplus 11 \otimes 3 = \max(-1+0, 11+3) = 14$

$[B \otimes A]_{12} = -1 \otimes -\infty \oplus 11 \otimes 2 = \max(-1-\infty, 11+2) = 13$

$[B \otimes A]_{21} = 1 \otimes 0 \oplus -\infty \otimes -\infty = \max(1+0, -\infty-\infty) = 1$

$[B \otimes A]_{22} = 1 \otimes -\infty \oplus -\infty \otimes 2 = \max(1-\infty, -\infty+2) = 14$

Maka $B \otimes A = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 1 & -\infty \end{bmatrix}$

Definisi 2.1.16 (Pangkat Matriks, e.g(Heidergott, 2005))
Misal matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, t menyatakan pangkat ke-t dari matriks A sehingga A^t didefinisikan sebagai

$$A^t = \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}_{\text{k}}$$

untuk $t \in \mathbb{N}$ dengan $t \neq 0$. Untuk matriks $A^0 := I$ dimana I merupakan matriks identitas dalam aljabar max-plus.

2.3.3. Matriks dalam Aljabar Max-Plus

Berikut ini diberikan macam-macam matriks yang terdapat dalam aljabar max-plus.

1) Matriks Identitas

   Dalam aljabar linear, matriks identitas merupakan matriks persegi yang berukuran $n \times n$ dimana elemen-elemen diagonal utamanya bernilai 1 dan bernilai 0 di elemen-elemen lainnya. Berikut ini diberikan definisi matriks identitas dalam aljabar max-plus sebagai berikut.

Definisi 2.1.17 (Matriks Identitas, e.g (Heidergott, 2005)) Misal $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ disebut matriks identitas atas aljabar max-plus jika

$$A = \begin{cases} a_{ij} = 0, & i = j \\ a_{ij} = -\infty, & i \neq j \end{cases}$$

Matriks A disebut matriks identitas dan dapat disimbolkan dengan I.

Contoh 2.1.18

$$I = \begin{bmatrix} 0 & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix}$$

2) Matriks Zero

Matriks zero merupakan sebuah matriks yang semua elemennya nol.

3) Matriks Diagonal

Dalam aljabar biasa, matriks diagonal adalah matriks dengan semua elemen-elemen yang bukan diagonal utamanya bernilai 0. Berikut ini diberikan definisi dari matriks diagonal dala aljabar max-plus.

Definisi 2.1.19 Misal $D \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ disebut matriks diagonal atas aljabar max-plus jika

$$D = \begin{cases} d_{ij} = k, & k \in \mathbb{R}, i = j \\ d_{ij} = -\infty, & i \neq j \end{cases}$$

Contoh 2.1.20

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -\infty & -\infty \\ -\infty & 4 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -3 \end{bmatrix}$$

4) Matriks Permutasi

Matriks permutasi merupakan suatu matriks yang setiap baris ke-i dan setiap kolom ke-j memuat tepat satu entri yaitu 0 dan entri selain itu adalah $-\infty$. Jika $\sigma : \{1, 2, ..., n\} \rightarrow \{1, 2, ..., n\}$ adalah permutasi maka matriks permutasi atas aljabar max-plus dapat didefinisikan P_σ=$[p_{ij}]$ dengan

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 : i = \sigma(j) \\ -\infty : i \neq \sigma(j) \end{cases}$$

5) Kleene Star

Misalkan diberikan suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ dikatakan kleene star apabila memenuhi definisi berikut ini.

Definisi 2.1.21 (Kleene Star, e.g (Sergeev, 2009))

Misalkan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$

$$A^* := I \oplus A \oplus A^2 \oplus ...,$$

dimana I merupakan matriks identitas. Deret tersebut adalah analog aljabar max dari $(I - A)^{-1}$, dan konvergen ke matriks dengan entri berhingga jika dan hanya jika $\lambda(A) \leq 1$.

Dalam kasus ini

$$A^* := I \oplus A \oplus A^2 \oplus ... \oplus A^{n-1},$$

yang disebut Kleene star dari A.

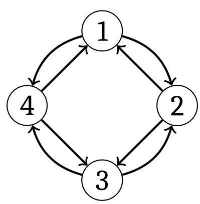
2.2. Digraf dan Matriks

Pada subbab ini diberikan definisi-definisi dasar mengenai digraf dan matriks. Pada bab ini juga dijelaskan mengenai definisi-definisi dasar pada suatu digraf dan representasinya pada matriks seperti berikut ini.

2.1.1. Definisi Dasar Digraf dan Matriks

Definisi 2.2.1 (Digraf, e.g (Bacelli, 2001))
Digraf atau graf berarah didefinisikan sebagai pasangan $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ di mana $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ terdiri dari himpunan tak kosong yang disebut titik dan $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ terdiri dari himpunan sisi yang berarah. Setiap sisi berarah berkaitan dengan pasangan terurut (i, j) yang berawal di i dan berakhir di j.

Contoh 2.2.2
Berikut ini diberikan contoh dari suatu digraf.

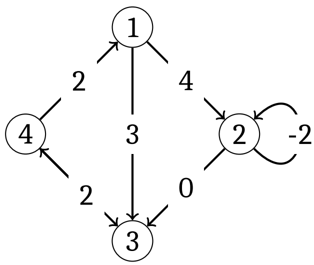


Gambar 2.1. Digraf $\mathcal{G}$

Digraf $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ terdiri dari himpunan titik $\mathcal{V} = \{1,2,3,4\}$ dan himpunan sisi berarah $\mathcal{E} = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(1,4),(4,1)\}$.

Definisi 2.2.3 (Digraf berbobot)
Suatu digraf $\mathcal{G}$ dikatakan berbobot jika setiap sisinya mempunyai bobot atau nilai tertentu. Bobot pada digraf $\mathcal{G}$ biasanya dinotasikan dengan $w(i,j)$ dimana i dan j sebagai titik yang terhubung dengan sisi yang mempunyai bobot atau nilai w.

Contoh 2.2.4
Berikut ini diberikan contoh dari suatu digraf berbobot.



Gambar 2.2. Digraf Berbobot

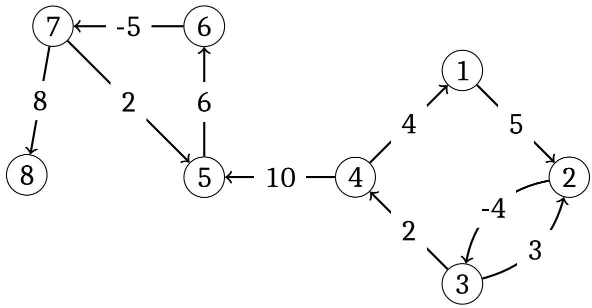
Definisi 2.2.5 (Lintasan (*path*), e.g (Bacelli, 2001))
Lintasan adalah barisan dari sisi $(i_1, i_2), (i_2, i_3), ..., (i_{p-1}, i_p)$. Titik i_1 merupakan titik awal dan i_p adalah titik akhir dari sebuah lintasan.

Definisi 2.2.6 (Lintasan Elementer, e.g (Bacelli, 2001))
Lintasan elementer adalah lintasan di mana tidak ada sisi yang muncul lebih dari sekali. Artinya semua titiknya berbeda.

Definisi 2.2.7 (*Cycle*, e.g (Bacelli, 2001))
Ketika titik awal dan titik akhir dari suatu lintasan bertepatan $(i_1, i_2), (i_2, i_3), ..., (i_{p-1}, i_1)$ maka disebut dengan *cycle*.

Definisi 2.2.8 (*Cycle* Elementer, e.g (Bacelli, 2001))
Cycle $(i_1, i_2), (i_2, i_3), ..., (i_{p-1}, i_1)$ merupakan *cycle* elementer jika lintasan $(i_1, i_2), (i_2, i_3), ..., (i_{p-1}, i_p)$ adalah elementer tertutup.

Contoh 2.2.9



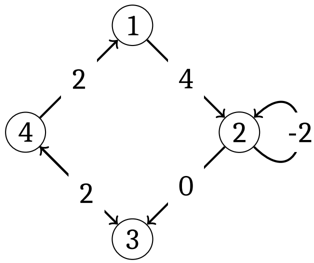
Gambar 2.3. Digraf O

Dari gambar digraf O dapat diketahui bahwa
Lintasan= ((1,2), (2,3), (3,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,7), (7,8)).
Lintasan elementer= ((1,2), (2,3), (3,4), (4,5)).
Cycle= ((3,2), (2,3), (3,4), (4,1), (1,2), (2,3), (3,2)).
Cycle elementer= ((2,3), (3,2)).

Definisi 2.2.10 (*Loop*, e.g (Bacelli, 2001))
Loop adalah *cycle* (i, i) yaitu *cycle* yang terdiri dari satu titik yang merupakan sebagai titik awal dan akhir.

Contoh 2.2.11

Berikut ini diberikan contoh dari suatu *loop*.



Gambar 2.4. Digraf P

Dari gambar Digraf P tersebut diketahui bahwa *loop*nya berada di (2,2).

Definisi 2.2.12 (e.g (Clark, 1995))

Sebuah digraf $\mathcal{G}$ dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik i dan j terdapat lintasan dari i ke j.

Definisi 2.2.13 (Strongly Connected, e.g (Clark, 1995))

Dua titik i dan j pada digraf $\mathcal{G}$ dikatakan terhubung kuat (*strongly connected*) jika terdapat lintasan berarah dari i ke j dan juga lintasan berarah dari j ke i.

Definisi 2.2.14 (Representasi Digraf, e.g(Heidergott, 2005))

Misalkan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ dan $\mathcal{G}(A)$ adalah digraf berbobot dengan $\mathcal{V}(A) = \{1, ..., n\}$ dan $\mathcal{E}(A) = \{(i,j)|a_{ij} \neq -\infty\}$. Representasi digraf dari matriks A adalah digraf $\mathcal{G}(A)$ dengan bobot $w(i,j) = a_{ij}$. Jika $a_{ij} = -\infty$ maka (i,j) tidak ada.

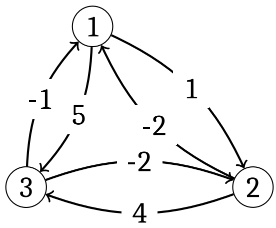
Contoh 2.2.15 Misalkan matriks

$$Q = \begin{pmatrix} -\infty & 1 & 5 \\ -2 & -\infty & 4 \\ -1 & -2 & -\infty \end{pmatrix}$$

representasikan matriks tersebut ke dalam bentuk digraf.

Penyelesaian:

Berdasarkan penulisan matriks pada 2.1 dan 2.2 maka representasi digraf dari matriks Q tersebut dapat digambarkan seperti berikut ini.



Gambar 2.5. Digraf Q

Misalkan terdapat suatu $\mathcal{G}(A)$ dengan lintasan $\pi = (i_1, i_2), (i_2, i_3), ..., (i_{p-1}, i_p)$ maka bobot dari π didefinisikan sebagai $w(\pi, A) = a_{i_1 i_2}, a_{i_2 i_3}, ..., a_{i_{p-1} i_p}$ jika $p > 1$. Jika $i_1 = i_p$ maka π disebut dengan *cycle* yang dinotasikan dengan σ.

Definisi 2.2.16 (*Cycle Mean*, e.g (Sergeev, 2009))

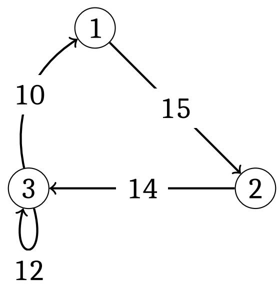
Cycle mean merupakan bobot rata-rata suatu *cycle* yang didefinisikan sebagai jumlah dari masing-masing bobot pada suatu *cycle* dan dibagi dengan panjang *cycle*nya. Sedemikian sehingga *cycle mean* μ didefinisikan sebagai berikut.

$$\mu(\sigma, A) = \frac{w(\sigma, A)}{l(\sigma)}$$

dimana
$\mu(\sigma, A) =$ *cycle mean* σ
$w(\sigma, A) =$ bobot(entri matriks) σ
$l(\sigma) =$ panjang dari *cycle* σ.

Contoh 2.2.17

Diberikan suatu matriks $C = \begin{pmatrix} -\infty & 15 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 14 \\ 10 & -\infty & 12 \end{pmatrix}$ kemudian matriks tersebut direpresentasikan ke dalam bentuk digraf seperti berikut ini.



Gambar 2.6. Digraf C

Berdasarkan Gambar 2.6 diketahui bahwa himpunan $\mathcal{V}(C) = \{1, 2, 3\}$ dan himpunan $\mathcal{E}(C) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 1)\}$. Secara khusus, digraf $\mathcal{G}(C)$ memiliki dua *cycle* elementer yaitu $\rho = ((1, 2), (2, 3), (3, 1))$ dan $\theta = (3, 3)$. Sehingga bobot dan panjang *cycle* σ_ρ adalah

$$\begin{aligned} w(\sigma_\rho, C) &= a_{12} + a_{23} + a_{31} \\ &= 15 + 14 + 10 \\ &= 39 \end{aligned}$$

dan

$$l(\sigma_\rho) = 3$$

dengan demikian dapat dituliskan *cycle mean* dari σ_ρ adalah

$$\begin{aligned} \pi(\sigma_\rho, C) &= \frac{w(\sigma_\rho, C)}{l_{\sigma_\rho}} \\ &= \frac{39}{3} \\ &= 13 \end{aligned}$$

selanjutnya untuk bobot dan panjang dari *cycle* σ_θ adalah

$$\begin{aligned} w(\sigma_\theta, C) &= a_{33} \\ &= 12 \end{aligned}$$

dan

$$l(\sigma_\theta) = 1$$

dengan demikian dapat dituliskan *cycle mean* σ_θ adalah

$$\begin{aligned} \pi(\sigma_\theta, C) &= \frac{w(\sigma_\theta, C)}{l_{\sigma_\theta}} \\ &= \frac{12}{1} \\ &= 12 \end{aligned}$$

Definisi 2.2.18 (*Maximum Cycle Mean*, e.g (Sergeev, 2009)) *Maximum cycle mean* dari $\mathcal{G}(A)$ dinotasikan dengan $\lambda(A)$ bisa disebut nilai eigen A dan didefinisikan

$$\lambda(A) = \max_{\sigma}(\mu(\sigma, A))$$

Selain itu juga diberikan suatu algoritma karps's yang dgunakan untuk menghitung nilai eigen dari suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ yang *irreducible*.

Algoritma 2.2.19 (Algoritma Karp's, e.g (Heidergott, 2005))

1. Pilih sembarang $j \in \underline{n}$, dan himpunan $x(0) = e_j$.
2. Hitung $x(k)$ untuk $k = 0, ..., n$.
3. Hitung nilai eigen

$$\lambda = \max_{i=1,...,n} \min_{k=0,...,n-1} \frac{x_i(n) - x_i(k)}{n-k}.$$

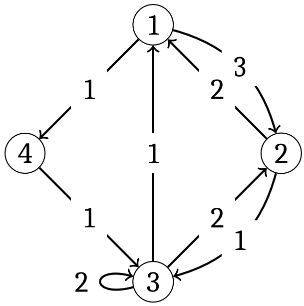
Selanjutnya algoritma karp's dapat diilustrasikan dengan contoh berikut.

Contoh 2.2.20

Misalkan

$$U = \begin{pmatrix} -\infty & 3 & -\infty & 1 \\ 2 & -\infty & 1 & -\infty \\ 1 & 2 & 2 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 1 & -\infty \end{pmatrix}$$

Selanjutnya matriks tersebut direpresentasikan menjadi sebuah digraf seperti berikut ini.



Gambar 2.7. Digraf U

Berdasarkan gambar tersebut terlihat bahwa digraf U adalah ***strongly connected*** sehingga matriks U ***irreducible***. Kemudian dihitung dengan algoritma karp's dimana $j = 1$, dan $x(0) = e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}^T$. Perhatikan bahwa $n = 4$ dan iterasi pada Gambar2.7 sebanyak empat kali menghasilkan

$$x(1) = \begin{pmatrix} -\infty \\ 2 \\ 1 \\ -\infty \end{pmatrix}, x(2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, x(3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, x(4) = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Untuk $i \in \underline{4}$, ketentuan dari minimisasinya $\min_{k=0,\ldots,3}(x_i(4) - x_i(k))/(4-k)$ dibaca

$$\min\{\frac{10}{4}, -\infty, \frac{5}{2}, \frac{5}{1}\} = 2\frac{1}{2}, \min\{-\infty, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, 0\} = 0,$$

$$\min\{-\infty, \frac{8}{3}, \frac{5}{2}, \frac{3}{1}\} = 2\frac{1}{2}, \min\{-\infty, -\infty\frac{5}{2}, \frac{2}{1}\} = 2.$$

dan algoritma karp's menghasilkan

$$\lambda = \max\{\frac{5}{2}, 0, 2\} = 2\frac{1}{2}$$

untuk nilai eigen dari matriks U.

Definisi 2.2.21 (*Critical Digraph*, e.g (Sergeev, 2009))
Cycle σ pada $\mathcal{G}(A)$ disebut *critical* jika

$$\mu(\sigma, A) = \lambda(A)$$

Setiap titik dan sisi yang termasuk dalam *critical cycle* disebut *critical*. Himpunan dari *critical node* (titik kritis) dilambangkan dengan $\mathcal{V}^c(A)$, himpunan dari *critical edges* (sisi kritis) dilambangkan dengan $\mathcal{E}^c(A)$. *Critical digraph* dari A yang dinotasikan dengan $\mathcal{G}^c(A) = (\mathcal{V}^c(A), \mathcal{E}^c(A))$ adalah digraf yang terdiri dari semua titik kritis dan sisi kritis $\mathcal{G}^c(A)$.

Contoh 2.2.22
Berikut ini diberikan suatu contoh dari *critical digraph* berdasarkan matriks pada contoh 2.2.20.

Berdasarkan gambar digraf U pada contoh 2.2.20 diketahui *maximum cycle mean* nya adalah 2.5, sehingga komponen dari $\mathcal{G}^c(U)$ mempunyai dua *critical node* yaitu di titik $1, 2$ dan dua *critical edges* yaitu $(1, 2)$ dan $(2, 1)$.

2.2.2. Matriks *Reducible* dan Matriks *Irreducible*

Definisi 2.2.23 (Matriks *Irreducible*, e.g (Siswanto, 2014))
Misalkan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ dan $\mathcal{G}(A)$ merupakan digraf berbobot yang bersesuaian dengan A disebut tak tereduksi(*irreducible*) jika $\mathcal{G}(A)$ terhubung kuat (*strongly connected*).

Definisi 2.2.24 (Matriks *Reducible*, e.g (Siswanto, 2014))
Misalkan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ merupakan matriks yang tidak terhubung

kuat (*not strongly connected*) maka matriks tersebut dikatakan tereduksi (*reducible*).

2.3. Perpangkatan Matriks

Pada subbab ini akan dijelaskan mengenai siklisitas dan teorema siklisitas pada suatu digraf. Dimana teorema siklisitas berarti bahwa dalam waktu maks, pangkat aljabar max dari setiap matriks yang *irreducible* pada akhirnya akan periodik dengan periode sama dengan siklisitas dari *critical digraph*. Berikut ini akan diberikan penjelasan lebih mengenai siklisitas dari suatu digraf.

2.1.1. Siklisitas Digraf

Definisi 2.3.1 (Siklisitas, e.g (Heidergott, 2005))
Siklisitas dari graf $\mathcal{G}$ dinotasikan dengan $\gamma_{\mathcal{G}}$, dan didefinisikan sebagai berikut.

1. Jika $\mathcal{G}$ *strongly connected*, maka siklisitasnya sama dengan pembagi persekutuan terbesar dari panjang semua *cycle elementer* di $\mathcal{G}$. Jika $\mathcal{G}$ hanya terdiri dari satu titik tanpa loop, maka siklisitasnya didefinisikan sebagai satu.

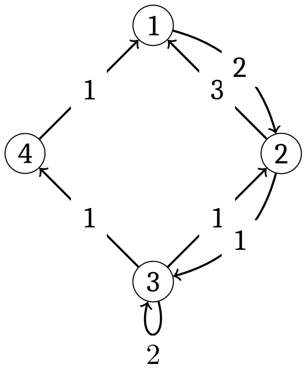
2. Jika $\mathcal{G}$ *not strongly connected*, maka siklisitasnya sama dengan kelipatan persektutuan terkecil dari siklisitas semua subgraf yang terhubung kuat maksimal dari $\mathcal{G}$.

Contoh 2.3.2
Berikut ini merupakan contoh siklisitas

1. *Strongly Connected*

Misalkan $R = \begin{pmatrix} -\infty & 2 & -\infty & -\infty \\ 3 & -\infty & 1 & -\infty \\ -\infty & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$

maka dapat direpresentasikan ke dalam digraf $\mathcal{G}(R)$ seperti berikut ini.



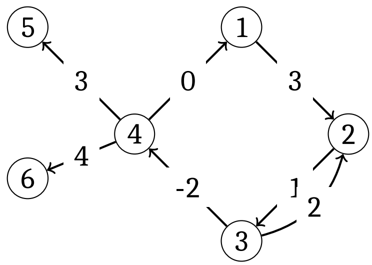
Gambar 2.8. Digraf R

Dari graf $\mathcal{G}(R)$ tersebut diperoleh bahwa $\mathcal{V}(R) = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $\mathcal{E}(R) = \{(3, 3), (3, 4), (4, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$. Secara khusus, $\mathcal{G}(R)$ memiliki 4 *cycle* elementer yaitu $\sigma_\rho = ((3, 3)), \sigma_\theta = ((2, 3), (3, 2)), \sigma_\eta = ((1, 2), (2, 1)), \sigma_\zeta = ((1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1))$. Maka $l(\sigma_\rho) = 1$, $l(\sigma_\theta) = 2$, $l(\sigma_\eta) = 2$, dan $l(\sigma_\zeta) = 4$. Sehingga diperoleh siklisitas dari $\mathcal{G}(R)$ sebesar 2.

2. *Not Strongly Connected*

$$\text{Misalkan } S = \begin{pmatrix} -\infty & 3 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 3 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 2 & -\infty & -2 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty & -\infty & 3 & 4 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

maka dapat direpresentasikan ke dalam graf $\mathcal{G}(S)$ seperti berikut ini.



Gambar 2.9. Digraf S

Dari graf $\mathcal{G}(S)$ tersebut diperoleh bahwa $\mathcal{V}(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $\mathcal{E}(S) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 5), (4, 6)\}$. Secara khusus $\mathcal{G}(S)$ memiliki 2 *cycle* elementer yaitu $\sigma_\rho = ((2, 3), (3, 2))$ dan $\sigma_\zeta = ((1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1))$. Maka $l(\sigma_\rho) = 2$ dan $l(\sigma_\zeta) = 4$. Sehingga diperoleh siklisitas dari $\mathcal{G}(S)$ sebesar 2.

Teorema 2.3.3 (Teorema Siklisitas, e.g (Heidergott, 2005))
Misalkan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ adalah matriks *irreducible* dengan nilai eigen

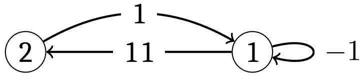
λ dan siklikitas γ = $\gamma(A)$. Maka ada $T(A)$ sedemikian sehingga

$$A^{(t+\gamma)} = \lambda^{\otimes\gamma} \otimes A^t \tag{2.3}$$

untuk semua $t \geq T(A)$. Dimana T terkecil yang dapat dipilih pada 2.3 disebut transien dari A kemudian dinyatakan dengan $T(A)$.

Contoh 2.3.4

Misalkan $Z = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 1 & -\infty \end{pmatrix}$



Gambar 2.10. Digraf Z

$Z^2 = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, $Z^3 = \begin{pmatrix} 11 & 23 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}$, $Z^4 = \begin{pmatrix} 24 & 22 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}$, $Z^5 = \begin{pmatrix} 23 & 35 \\ 25 & 23 \end{pmatrix}$ dan dapat disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned} Z^{(t+2)} &= 12 \otimes Z^t \\ &= 6^{\otimes 2} \otimes Z^t, t \geq 2. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, dapat diperoleh $\lambda(Z) = 6$, $\gamma(Z) = 2, \gamma_{G(Z)} = 1$ dan $t(Z) = 2$. ditambah lagi

$$Z_\lambda = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -5 & -\infty \end{pmatrix}$$

dan

$$Z_\lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}, Z_\lambda^3 = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -5 & -7 \end{pmatrix},$$

$$Z_\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}, Z_\lambda^5 = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}, \cdots,$$

yang memberikan

$$Z_\lambda^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

BAB III

EKSPANSI CSR DALAM ALJABAR MAX-PLUS UNTUK MENENTUKAN KEPERIODIKAN PANGKAT MATRIKS IRREDUCIBLE

Dalam bab ini akan dibahas mengenai konsep dasar yang akan digunakan untuk membahas keperiodakan pangkat matriks menggunakan CSR dalam aljabar max-plus. Dimulai dari penjabaran definisi, contoh, teorema dan buktinya.

Bab ini dibagi dalam 2 bagian utama. Pada bagian pertama akan diberikan definisi tentang matriks CSR beserta contoh-contohnya. Pada bagian kedua akan dilanjutkan dengan definisi dari keperiodikan pangkat matriks.

3.1. Definisi Matriks CSR

Pada subbab ini akan diberikan suatu definisi dari matriks CSR dengan peneliti mempertimbangkan hasil kali dalam aljabar max-plus dari bentuk CS^tR. Untuk setiap matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ dan metrik matriks dari A dinotasikan dengan $M = ((\lambda(A)^- \otimes A)^{\otimes\gamma(\mathcal{G})})^*$.

Matriks C dan matriks R diperoleh dari mengganti kolom *critical node* dan baris *critical node* dengan metrik matriks. Sedangkan matriks S diperoleh dari mengganti sisi kritis (*critical edges*) dengan $\lambda(A)^- \otimes a_{ij}$. Sehingga matriks C, S, R dapat didefinisikan sebagai

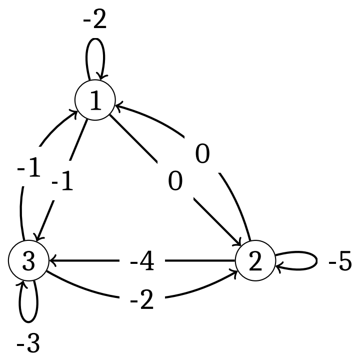
$$C_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, & \text{jika } j \in \mathcal{G}^c \\ -\infty, & \text{lainnya} \end{cases}, \tag{3.1}$$

$$S_{ij} = \begin{cases} \lambda(A)^{-} \otimes a_{ij}, & \text{jika } (i,j) \in \mathcal{G}^c \\ -\infty, & \text{lainnya} \end{cases}, \tag{3.2}$$

$$R_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, & \text{jika } i \in \mathcal{G}^c \\ -\infty, & \text{lainnya} \end{cases} \tag{3.3}$$

Contoh 3.1.1

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ merupakan sebuah matriks berukuran 3×3.



Gambar 3.1. Digraf A

Langkah pertama yaitu menghitung *maximum cycle mean*. Berdasarkan gambar tersebut diketahui bahwa maximum cycle mean nya adalah 0 dan komponen dari $\mathcal{G}^c(A)$ mempunyai dua *critical node* yaitu $1, 2$ dan dua *critical edges* yaitu $(1, 2)$ dan $(2, 1)$.

Setelah itu mencari siklisitas. Dari graf $\mathcal{G}(A)$ tersebut diperoleh bahwa $\mathcal{V}(A) = (1, 2, 3)$ dan $\mathcal{E}(A) = ((1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 1), (1, 3))$. Secara khusus, $\mathcal{G}(A)$ memiliki 8 *cycle* elementer yaitu $\sigma_\rho = ((1, 1))$,

$\sigma_\beta = ((1,2),(2,1))$, $\sigma_\omega = ((2,2))$, $\sigma_\zeta = ((2,3),(3,2))$, $\sigma_\mu = ((3,3))$, $\sigma_\tau = ((1,3),(3,1))$, $\sigma_\eta = ((1,2),(2,3),(3,1))$, $\sigma_\xi = ((1,3),(3,2),(2,1))$. Maka $l(\sigma_\rho) = 1$, $l(\sigma_\beta) = 2$, $l(\sigma_\omega) = 1$, $l(\sigma_\zeta) = 2$, $l(\sigma_\mu) = 1$, $l(\sigma_\tau) = 2$, $l(\sigma_\eta) = 3$, $l(\sigma_\xi) = 3$. Sehingga diperoleh siklisitas dari $\mathcal{G}(A)$ sebesar 1.

Langkah kedua yaitu menghitung

$$\begin{aligned}
M &= ((\lambda(F)^{-} \otimes F)^{\otimes\gamma(\mathcal{G})})^{*} \\
&= \left(\left(0^{-} \otimes \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\right)^{\otimes 1}\right)^{*} \\
&= \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}^{\otimes 1}\right)^{*} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}^{*}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M^{*} &= I \oplus M \oplus M^{\otimes 2} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}^{\otimes 2} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sehingga Matriks C, S, R dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\text{Matriks } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty \\ -1 & -1 & -\infty \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriks } R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriks } S = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

3.2. Keperiodikan Pangkat Matriks

Pada bagian awal sudah dijelaskan bahwa aljabar max-plus memiliki pengaplikasian yang cukup luas dan salah satunya adalah menyelesaikan masalah keperiodikan. Keperiodikan yang dimaksud disini adalah keperiodikan pangkat matriks *irreducible*. Suatu matriks *irreducible* dalam aljabar max-plus jika dipangkatkan dengan bilangan bulat dia akan mencapai periodik.

Berdasarkan teorema siklisitas diperoleh jika suatu matriks A adalah matriks *irreducible* maka A akan periodik untuk $t \geq T(A)$ sehingga

$$A^{(t+\gamma)} = \lambda^{\otimes\gamma} \otimes A^t$$

ketika kasus $\lambda(A) = 0$ maka diperoleh $A^{(t+\gamma)} = A^t$. Selanjutnya (Sergeev, 2012) mendefinisikan keperiodikan pangkat matriks sebagai berikut.

$$\mathcal{P}^t := CS^tR,$$

dengan asumsi bahwa $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ mempunyai $\lambda(A) = 0$.
Dan ternyata definisi tersebut memenuhi teorema siklisitas seperti yang dijelaskan pada proposisi di bawah ini.

Berikut ini adalah teorema dan proposisi untuk menentukan keperiodikan pangkat matriks A^t.

Proposisi 3.2.1 (e.g(Sergeev, 2012))
Misalkan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ mempunyai $\lambda(A) = 0$ dan misalkan S didefinisikan seperti 3.2. Terdapat $z \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$ sedemikian sehingga $D^{-1}SD$ untuk $D := diag(z)$ adalah matriks $0-1$.

Bukti.
Karena $\lambda(S) = 0$, dapat diambil $z := \bigoplus_{j=1}^{n} S_j^*$. Vektor ini positif dan perhatikan bahwa $S_z \leq z$ karena $SS^* \leq S^*$. Dari ini dan $\mathcal{G}(S) =$

$\mathcal{G}^c(S) = \mathcal{G}^c$, dapat disimpulkan dengan mengalikan $z_i^{-1} s_{ij} z_j \leq 1$ sepanjang cycle yang $z_i^{-1} s_{ij} z_j = 1$ untuk semua $(i,j) \in \mathcal{G}(S)$, yang $z_i^{-1} s_{ij} z_j = 0$ untuk semua $(i,j) \notin \mathcal{G}(S)$. ■

Karena S dapat diskalakan ke matriks $0-1$, dapat disimpulkan bahwa $\{S^t, t > 0\}$ menjadi periodik paling banyak setelah bilangan *Wielandt number* $W = (n-1)^2+1$. Sebuah matriks A akan disebut S- divisualisasikan jika S didefinisikan dalam (3.2) adalah Boolean. Dalam kasus S-divisualisasikan, bentuk asimtotik S^t untuk $t \geq T(A)$ adalah ditentukan oleh kelas siklik dari $\mathcal{G}^c$.

$$S_{ij}^t = \begin{cases} 1, & \text{jika } [i] \rightarrow_t [j], \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \tag{3.4}$$

Ini dimulai dengan pengamatan bahwa jika T adalah angka setelah $\{S^t, t \geq 0\}$ menjadi periodik, maka

$$S^{l\gamma} R = R,\ CS^{l\gamma} = C,\ \forall l\gamma \geq T. \tag{3.5}$$

Pada persamaan (3.4) menyiratkan bahwa semua entri diagonal dari $S^{l\gamma}$ dengan indeks $\mathcal{V}_c$ adalah 1 jika $l\gamma \geq T$, yang menyiratkan $S^{l\gamma} R \geq R$ dan $CS^{l\gamma} \geq C$. Disisi lain, $S \leq A$ dan $S^{l\gamma} \leq (A^\gamma)^*$. Selanjutnya, $(A^\gamma)^* R \leq R$ dan $CS^{l\gamma} \leq C(A^\gamma)^* \leq C$ karena $(A^\gamma)^*(A^\gamma)^* = (A^\gamma)^*$, sehingga $S^{l\gamma} R \leq (A^\gamma)^* R \leq R$ dan $CS^{l\gamma} \leq C(A^\gamma)^* \leq C$.

Karena $\{S^t, t \geq T\}$ adalah periodik, demikian juga $\{\mathcal{P}^{(t)}, t \geq T\}$.

Proposisi 3.2.2 (Periodisitas, e.g(Sergeev, 2012))

$$\mathcal{P}^{(t+\gamma)} = \mathcal{P}^{(t)}, \text{untuk semua} t \geq 0.$$

Bukti.
Diketahui pada (Sergeev, 2012) bahwa
$\mathcal{P}^{(t)} := CS^tR$
$S^{l\gamma}R = R$
$CS^{l\gamma} = C$
selanjutnya akan dibuktikan bahwa
$\mathcal{P}^{(t+\gamma)} = \mathcal{P}^{(t)}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{(t)} &= CS^tR \\
&= CS^tS^{l\gamma}R \\
&= CS^{(t+l\gamma)}R \\
&= \mathcal{P}^{(t+l\gamma)} \\
\mathcal{P}^{(t)}\mathcal{P}^{(\gamma)} &= \mathcal{P}^{(t+l\gamma)}\mathcal{P}^{(\gamma)} \\
\mathcal{P}^{(t+\gamma)} &= \mathcal{P}^{(t+l\gamma+\gamma)} \\
&= CS^{(t+l\gamma+\gamma)}R \\
&= CS^tS^{l\gamma}S^{\gamma}R \\
&= CS^tS^{\gamma}R \\
&= CS^tR \\
\mathcal{P}^{(t+\gamma)} &= \mathcal{P}^{(t)}
\end{aligned}$$

■

Jadi berdasarkan proposisi 1 dan teorema 1 dapat disimpulkan bahwa untuk mencari keperiodikan pangkat matriks sebagai berikut. Ini adalah versi CSR dari teorema siklisitas.

$$A^t = \lambda(A)^{\otimes t} \otimes CS^tR$$

Selanjutnya terdapat suatu algoritma yang digunakan untuk mencari suatu keperiodikan pangkat matriks menggunakan matriks CSR dan berdasarkan dari teorema siklisitas.

Algoritma 3.2.3
Input: $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$
Output: t dengan $A^t = \lambda(A)^{\otimes t} \otimes CS^t R$

1. Langkah pertama yang harus dilakukan adalah memastikan bahwa $\lambda = \lambda(A)$. Selanjutnya mencari *critical digraph* dan siklisitas γ. Kemdudian menghitung metrik matriks $M = ((\lambda(A)^{-} \otimes A)^{\otimes \gamma(\mathcal{G})})^{*}$.

2. Langkah kedua adalah mendefinisikan matriks CSR nya.

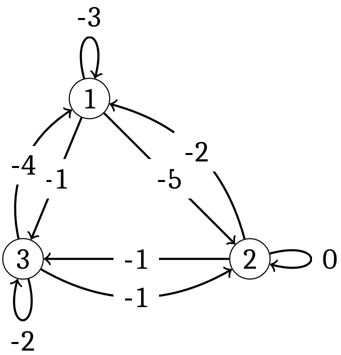
3. Langkah ketiga adalah mencari t. Untuk $t = 0, 1, ..., (n-1)^2 + 1$ periksa apakah $A^t = \lambda(A)^{\otimes t} \otimes CS^t R$ jika memenuhi maka t ditemukan.

Berikut ini merupakan contoh dalam aljabar max-plus untuk menentukan keperiodikan pangkat matriks.

Contoh 3.2.4

$$F = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya matriks F direpresentasikan ke dalam bentuk digraf seperti berikut ini.



Gambar 3.2. Digraf F

Langkah Pertama

Berdasarkan gambar digraf F di atas diketahui *maximum cycle mean* nya adalah 0, dan komponen dari $\mathcal{G}^c(F)$ mempunyai satu *critical node* yaitu 2 dan *critical edges* yaitu $(2, 2)$.

Langkah Kedua

Kemudian dilanjutkan dengan menghitung metrik matriks $M = ((\lambda(F)^{-} \otimes F)^{\otimes\gamma(\mathcal{G})})^{*}$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} M &= ((\lambda(F)^{-} \otimes F)^{\otimes\gamma(\mathcal{G})})^{*} \\ &= \left(\left(0^{-} \otimes \begin{pmatrix} -3 & -5 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}\right)^{\otimes 1}\right)^{*} \\ &= \left(\begin{pmatrix} -3 & -5 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{\otimes 1}\right)^{*} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -5 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{*} \end{aligned}$$

Oleh karena itu

$$
\begin{aligned}
M^* &= I \oplus M \oplus M^{\otimes 2} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 & -5 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 & -5 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{\otimes 2} \\
&= \begin{pmatrix} -0 & -5 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -5 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Sehingga Matriks C, S, R dapat dituliskan sebagai berikut.

Matriks $C = \begin{pmatrix} -\infty & -2 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix}$

Matriks $R = \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -2 & 0 & -1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$

Matriks $S = \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$

Langkah Ketiga

Setelah mendapatkan matriks CSR kemudian langkah selanjutnya menentukan batas atasnya. Karena pangkat matriks menjadi periodik paling banyak setelah bilangan *Wielandt number*

$$
\begin{aligned}
W &= (n-1)^2 + 1 \\
&= (3-1)^2 + 1 \\
&= 2^2 + 1 \\
&= 4 + 1 \\
&= 5
\end{aligned}
$$

Jadi suatu pangkat matriks F ini akan menjadi periodik apabila paling banyak di $t = 5$ sudah memenuhi $F^t = \lambda(F)^{\otimes t} \otimes CS^t R$.

Untuk $t = 0$

$$F^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\lambda(F)^{\otimes 0} \otimes CS^0 R &= 0^{\otimes 0} \otimes \begin{pmatrix} -\infty & -2 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}^{\otimes 0} \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -2 & 0 & -1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \\
&= 0 \otimes \begin{pmatrix} -\infty & -2 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -2 & 0 & -1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \\
&= 0 \otimes \begin{pmatrix} -\infty & -2 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -2 & 0 & -1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \\
&= 0 \otimes \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

karena $F^0 \neq \lambda(F)^{\otimes 0} \otimes CS^0 R$ sehingga $t = 0$ tidak memenuhi

Untuk $t = 1$

$$F^1 = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\lambda(F)^{\otimes 1} \otimes CS^1 R &= 0^{\otimes 1} \otimes \begin{pmatrix} -\infty & -2 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}^{\otimes 1} \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -2 & 0 & -1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \\
&= 0 \otimes \begin{pmatrix} -\infty & -2 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -2 & 0 & -1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \\
&= 0 \otimes \begin{pmatrix} -\infty & -2 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -2 & 0 & -1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \\
&= 0 \otimes \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

karena $F^1 \neq \lambda(F)^{\otimes 1} \otimes CS^1 R$ sehingga $t = 1$ tidak memenuhi

Untuk $t = 2$

$$F^2 = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\lambda(F)^{\otimes 2} \otimes CS^2R &= 0^{\otimes 2} \otimes \begin{pmatrix} -\infty & -2 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}^{\otimes 2} \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -2 & 0 & -1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \\
&= 0 \otimes \begin{pmatrix} -\infty & -2 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -2 & 0 & -1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \\
&= 0 \otimes \begin{pmatrix} -\infty & -2 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -2 & 0 & -1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \\
&= 0 \otimes \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

karena $F^2 \neq \lambda(F)^{\otimes 2} \otimes CS^2R$ sehingga $t = 2$ tidak memenuhi
Untuk $t = 3$

$$F^3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\lambda(F)^{\otimes 3} \otimes CS^2R &= 0^{\otimes 3} \otimes \begin{pmatrix} -\infty & -2 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}^{\otimes 2} \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -2 & 0 & -1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \\
&= 0 \otimes \begin{pmatrix} -\infty & -2 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -2 & 0 & -1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \\
&= 0 \otimes \begin{pmatrix} -\infty & -2 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -2 & 0 & -1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \\
&= 0 \otimes \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

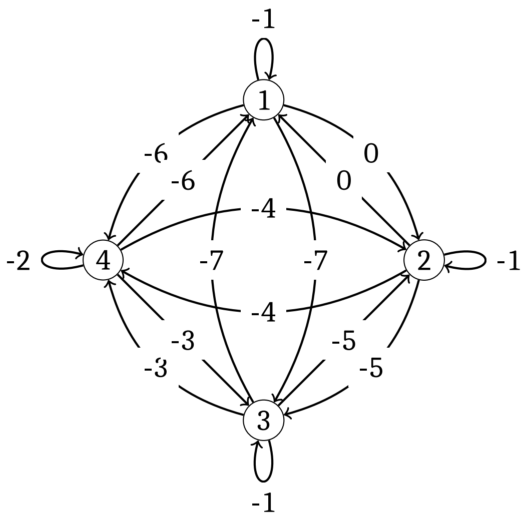
karena $F^3 = \lambda(F)^{\otimes 3} \otimes CS^3R$ sehingga $t = 3$ memenuhi. Jadi keperiodikan pangkat matriks tersebut pada $t = 3$.

Contoh 3.2.5

Misalkan diberikan matriks

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & -1 & -5 & -4 \\ -7 & -5 & -1 & -3 \\ -6 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

kemudian direpresentasikan ke dalam bentuk digraf seperti berikut ini.



Gambar 3.3. Digraf B

Langkah Pertama

Berdasarkan Gambar 3.3 dapat diketahui bahwa *maximum cycle mean*nya adalah $\lambda(B) = 0$ dan komponen dari $\mathcal{G}^c(B)$ mempunyai dua titik yaitu $1, 2$ dan dua sisi yaitu $(1, 2)$ dan $(2, 1)$. Siklisitas dari digraf tersebut adalah 2.

Langkah Kedua

Kemudian dilanjutkan dengan menghitung metrik matriks $M = ((\lambda(B)^{-} \otimes B)^{\otimes\gamma(\mathcal{G})})^{*}$. Sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
M &= ((\lambda(F)^{-} \otimes F)^{\otimes\gamma(\mathcal{G})})^{*} \\
&= \left(\left(0^{-} \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & -1 & -5 & -4 \\ -7 & -5 & -1 & -3 \\ -6 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}\right)^{\otimes 2}\right)^{*} \\
&= \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & -1 & -5 & -4 \\ -7 & -5 & -1 & -3 \\ -6 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}^{\otimes 2}\right)^{*} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 & -4 \\ -1 & 0 & -6 & -5 \\ -5 & -6 & -2 & -4 \\ -4 & -5 & -4 & -4 \end{pmatrix}^{*}
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu

$$
\begin{aligned}
M^{*} &= I \oplus M \oplus M^{2} \oplus M^{3} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & -1 & -5 & -4 \\ -7 & -5 & -1 & -3 \\ -6 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \oplus \\
&\begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 & -4 \\ -1 & 0 & -6 & -5 \\ -5 & -6 & -2 & -4 \\ -4 & -5 & -4 & -4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & -5 & -4 \\ -6 & -5 & -3 & -5 \\ -5 & -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \\ -5 & -5 & 0 & -3 \\ -4 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Sehingga matriks CSR dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\text{Matriks } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty & -\infty \\ -5 & -5 & -\infty & -\infty \\ -4 & -4 & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriks } R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriks } S = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

Langkah Ketiga

Setelah mendapatkan matriks CSR kemudian menentukan batas atasnya. Karena pangkat matriks menjadi periodik paling banyak setelah bilangan *Wielandt number* $W = (n-1)^2 + 1$.

$$\begin{aligned} W &= (n-1)^2 + 1 \\ &= (4-1)^2 + 1 \\ &= 3^2 + 1 \\ &= 9 + 1 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Jadi suatu pangkat matriks B ini akan menjadi periodik apabila paling banyak di $t = 10$ sudah memenuhi $B^t = \lambda(B)^{\otimes t} \otimes CS^tR$. Selanjutnya perhitungan untuk contoh 3.2.5 ini menggunakan bantuan matlab yang telah terlampir.

untuk $t = 10$

$$B^{10} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 & -4 \\ -1 & 0 & -6 & -5 \\ -5 & -6 & -10 & -9 \\ -4 & -5 & -9 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\lambda(B)^{\otimes 10} \otimes CS^{10}R = 0^{\otimes 10} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty & -\infty \\ -5 & -5 & -\infty & -\infty \\ -4 & -4 & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\infty & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}^{\otimes 10}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 & -4 \\ -1 & 0 & -6 & -5 \\ -5 & -6 & -10 & -9 \\ -4 & -5 & -9 & -8 \end{pmatrix}$$

Karena $B^{10} = \lambda(B)^{\otimes 10} \otimes CS^{10}R$ sehingga $t = 10$ memenuhi. Jadi berdasarkan perhitungan tersebut dapat diketahui bahwa pangkat matriks tersebut periodik pada $t = 10$.

BAB IV

Penutup

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan uraian yang telah dipaparkan pada BAB III dapat disimpulkan bahwa untuk menentukan keperiodikan pangkat matriks *irreducible* dengan menggunakan ekspansi CSR dalam aljabar max-plus adalah sebagai berikut.

1. Langkah pertama yang harus dilakukan adalah memastikan bahwa $\lambda = \lambda(A)$. Selanjutnya mencari ***critical digraph*** dan siklisitas γ. Kemudian menghitung metrik matriks $M = ((\lambda(A)^{-} \otimes A)^{\otimes \gamma(\mathcal{G})})^{*}$.

2. Langkah kedua adalah mendefinisikan matriks CSR nya.

3. Langkah ketiga adalah mencari t. Untuk $t = 0, 1, ..., (n-1)^2 + 1$ periksa apakah $A^t = \lambda(A)^{\otimes t} \otimes CS^t R$ jika memenuhi maka t ditemukan.

4.2. Saran

Pada skripsi ini, peneliti hanya memfokuskan pada bagian keperiodikan pangkat matriks *irreducible* dengan menggunakan matriks CSR dengan $\lambda(A) = 0$. Maka disarankan untuk peneliti selanjutnya untuk membahas keperiodikan pangkat matriks $reducible$ atau bisa diteliti pula untuk aljabar min-plus.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Bacelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., dan Quadrat, J. P. 2001. *Sunchronization and Linearity, An Algebra for Discrete Event Systems*. Paris: INDRIA.

Clark, J., Holton, D. A., 1995.*A First Look at Graph Theory*. New Zealand: Otago University.

Della, P. P., dan Suparwanto, A. 2013. *Pemodelan Jaringan Transportasi dan Uji Kestabilan pada Aljabar Max-Plus*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Fahim, K., Subchan, dan Subiono. 2013. *Aplikasi Aljabar Max-Plus Pada Pemodelan Dan Penjadwalan Busway Yang Diintegrasikan Dengan Kereta Api Komuter*. Jurnal Teknik Pomits. 1(1): 1-6.

Gacalec, M. 1999. *Linear Matrix Period in Max-Plus Algebra*. Linear Algebra Appl.

Heidergott, B., Olsder, G. J., dan Woude, J. V. 2005. *Max Plus at Work*. Amsterdam: Princeton University.

Ilwaru, V. 2014. *Matriks Pangkat dan Keperiodikannya dalam Aljabar Max-Plus*. Jurnal Barekeng. 8(2): 47-52

Majid, A. 2011. *Aljabar Max Plus dan Sifat-sifatnya*. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim.

Merlet, G., Nowak, T., Sergeev, S. 2014. *Weak CSR expansions and transience bounds in max-plus algebra*. Linear Algebra Appl.

Muanalifah, A., Sergeev, S. 2021. *On the tropical discrete logarithm problem and security of a protocol based on tropical semidirect product*. London: University of Birmingham.

Nurwan. 2015. *Kajian Matrix dalam Aljabar Max Plus*. Universitas Muhamadiyah Surakarta. Surakarta

Pungkas, Athifa, A.T.N. 2021. *Pemodelan Durasi Nyala Lampu Lalu Lintas di Persimpangan Dago Bandung Menggunakan Aljabar Max-Plus*. UNPAR.

Schutter, B.D., Moor, B. D. 1998. *On The Sequence of Consecutive Matrix Powers of Boolean Matrices*. ESAT-SISTA

Sergeev, S., Schneider, H. 2012. *CSR Expansions of Matrix Powers in Max Algebra*. American Mathematical Society.

Sergeev, S. 2009. *Max algebraic powers of irreducible matrices in the periodic regime: An application of cyclic classes*. Linear Algebra Appl

Singgih, M.L, Nurlina, N. 2014. *Alokasi Resource sebagai Perbaikan Produksi Menggunakan Holonic Manufacturing System, Petri Net dan Aljabar Max-Plus*. Surabaya: Insitut Teknologi Sepuluh Nopember.

Siswanto, Suparwanto, A., dan Rudhito, M. A. 2014. *Ruang Vektor Eigen suatu Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval*. Jurnal Matematika dan Sains. 19(1): 9

Subiono. 2013. *Aljabar Max Plus dan Terapannya*. Surabaya: Insitut Teknologi Sepuluh November.

Wibowo, A., Wijayanti, K., dan Veronica, R. B 2018. *Penerapan Aljabar Max-Plus pada Pengaturan Sistem Antrian Trrafic Light*. UNNES Journal of Mathematics. 7(2): 193-205.

Lampiran 1. Program Matlab

```
function t=CSRalgo(A)

% Finds k such that A=V F^k
% works when lambda(F) equals to 0
% currently only for finite entries

%eps=10^{-9}
eps=0.000000001;

%disp('Discretelog starts here.');
%A
%V
%F

[d1,d2]=size(A);




%We first check if any of the first (n-1)^2
%powers work.
%for higher powers, the method is
%based on the ultimate periodicity
%of critical columns

%disp('compute lambda(A) and lambda(B)');
```

```
[chi1,x1,criticalcycle1]=policyIteration(A);
lambda1=max(chi1)

 %if abs(lambda1)<eps
    % error('The mcm of the third argument is equal to (
 %end



AA=A-lambda1;



e1=eigvector(AA)



%disp('Now finding a critical cycle in A');
cycle1 =critical(AA,e1)
[~,l1]=size(cycle1)
c1=l1-1
zz1=zeros(d1,1);
for i=1:c1
    zz1(cycle1(i))=1;
end
%zz

%CSR

U1=maxfloyd(maxpower(AA,c1))
R=row(U1,zz1)
```

```
C=column(U1,zz1)



S1=-inf*ones(d1,d1);
for i=1:c1
S1(cycle1(i),cycle1(i+1))=AA(cycle1(i),cycle1(i+1));
end
S1

k=(d1-1)*(d1-1)+1
for i=1:k
     W=otimes(C,otimes(maxpower(S1,i),R))
 At=maxpower(A,i)
 selisih=At-W
if selisih==0
    disp("stop")
    break
end
 t=i

end
end
```

Lampiran 2. Perhitungan Contoh 3.2.5

```
t=CSRalgo(A)

lambda1 =

     0



e1 =

     0
     0
    -5
    -4



cycle1 =

     2     1     2



l1 =

     3



c1 =
```

```
     2


U1 =

     0    -1    -5    -4
    -1     0    -6    -5
    -5    -6     0    -4
    -4    -5    -4     0


R =

     0    -1    -5    -4
    -1     0    -6    -5
  -Inf  -Inf  -Inf  -Inf
  -Inf  -Inf  -Inf  -Inf


C =

     0    -1  -Inf  -Inf
    -1     0  -Inf  -Inf
    -5    -6  -Inf  -Inf
    -4    -5  -Inf  -Inf


S1 =
```

```
  -Inf      0   -Inf   -Inf
     0   -Inf   -Inf   -Inf
  -Inf   -Inf   -Inf   -Inf
  -Inf   -Inf   -Inf   -Inf


k =

    10


W =

    -1      0     -6     -5
     0     -1     -5     -4
    -6     -5    -11    -10
    -5     -4    -10     -9


At =

    -1      0     -7     -6
     0     -1     -5     -4
    -7     -5     -1     -3
    -6     -4     -3     -2


selisih =
```

```
     0     0    -1    -1
     0     0     0     0
    -1     0    10     7
    -1     0     7     7


t =

     2


W =

     0    -1    -5    -4
    -1     0    -6    -5
    -5    -6   -10    -9
    -4    -5    -9    -8


At =

     0    -1    -5    -4
    -1     0    -6    -5
    -5    -6    -2    -4
    -4    -5    -4    -4


selisih =
```

```
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     8     5
     0     0     5     4


t =

     3


W =

    -1     0    -6    -5
     0    -1    -5    -4
    -6    -5   -11   -10
    -5    -4   -10    -9


At =

    -1     0    -6    -5
     0    -1    -5    -4
    -6    -5    -3    -5
    -5    -4    -5    -6


selisih =
```

```
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     8     5
     0     0     5     3


t =

     4


W =

     0    -1    -5    -4
    -1     0    -6    -5
    -5    -6   -10    -9
    -4    -5    -9    -8


At =

     0    -1    -5    -4
    -1     0    -6    -5
    -5    -6    -4    -6
    -4    -5    -6    -8


selisih =
```

```
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     6     3
     0     0     3     0


t =

     5


W =

    -1     0    -6    -5
     0    -1    -5    -4
    -6    -5   -11   -10
    -5    -4   -10    -9


At =

    -1     0    -6    -5
     0    -1    -5    -4
    -6    -5    -5    -7
    -5    -4    -7    -9


selisih =
```

```
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     6     3
     0     0     3     0


t =

     6


W =

     0    -1    -5    -4
    -1     0    -6    -5
    -5    -6   -10    -9
    -4    -5    -9    -8


At =

     0    -1    -5    -4
    -1     0    -6    -5
    -5    -6    -6    -8
    -4    -5    -8    -8


selisih =
```

```
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     4     1
     0     0     1     0


t =

     7


W =

    -1     0    -6    -5
     0    -1    -5    -4
    -6    -5   -11   -10
    -5    -4   -10    -9


At =

    -1     0    -6    -5
     0    -1    -5    -4
    -6    -5    -7    -9
    -5    -4    -9    -9


selisih =
```

```
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     4     1
     0     0     1     0


t =

     8


W =

     0    -1    -5    -4
    -1     0    -6    -5
    -5    -6   -10    -9
    -4    -5    -9    -8


At =

     0    -1    -5    -4
    -1     0    -6    -5
    -5    -6    -8    -9
    -4    -5    -9    -8


selisih =
```

```
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     2     0
     0     0     0     0


t =

     9


W =

    -1     0    -6    -5
     0    -1    -5    -4
    -6    -5   -11   -10
    -5    -4   -10    -9


At =

    -1     0    -6    -5
     0    -1    -5    -4
    -6    -5    -9   -10
    -5    -4   -10    -9


selisih =
```

```
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     2     0
     0     0     0     0


t =

    10


W =

     0    -1    -5    -4
    -1     0    -6    -5
    -5    -6   -10    -9
    -4    -5    -9    -8


At =

     0    -1    -5    -4
    -1     0    -6    -5
    -5    -6   -10    -9
    -4    -5    -9    -8


selisih =
```

```
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0

stop

t =

    10
```

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

1. Nama Lengkap	:	Rizky Amalia
2. Tempat & Tgl. Lahir	:	Jepara, 7 September 2001
3. Alamat Rumah	:	Datar RT 01/RW02 Kec. Mayong Kab. Jepara
4. HP	:	087742385228
5. E-mail	:	rizkyaamm@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. Pendidikan Formal:
   1) SD N 2 Datar
   2) SMP N 1 Pecangaan
   3) SMA N 2 Kudus
   4) UIN Walisongo Semarang
2. Pendidikan Non Formal:
   1) PP. Al-Ikhlas Kudus
   2) PPPTQ Al Hikmah Tugurejo

Semarang, 12 Mei 2023

Rizky Amalia
NIM: 1908046051