PENGHITUNGAN BANYAKNYA TREE COVER PADA GRAF YANG DIPEROLEH DARI OPERASI JOIN DAN CORONA PADA GRAF LINTASAN, GRAF LENGKAP DAN GRAF LINGKARAN

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat
Guna Memperoleh Gelar Sarjana S1
Dalam Ilmu Matematika

oleh:

MUHAMMAD FAIDLUR ROHMAN
NIM : 1608046024

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG

2023

PENGHITUNGAN BANYAKNYA TREE COVER PADA GRAF YANG DIPEROLEH DARI OPERASI JOIN DAN CORONA PADA GRAF LINTASAN, GRAF LENGKAP DAN GRAF LINGKARAN

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat
Guna Memperoleh Gelar Sarjana S1
Dalam Ilmu Matematika

WALISONGO

oleh:

MUHAMMAD FAIDLUR ROHMAN

NIM : 1608046024

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG

2023

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Muhammad Faidlur Rohman

NIM : 1608046024

Jurusan : Matematika

Menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

PENGHITUNGAN BANYAKNYA TREE COVER PADA GRAF YANG DIPEROLEH DARI OPERASI JOIN DAN CORONA PADA GRAF LINTASAN, GRAF LENGKAP DAN GRAF

Secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 18 Juni 2023

Pembuat Pernyataan

Muhammad Faidlur Rohman

NIM: 1608046024

KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp.024-7601295 Fax.7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini:

Judul : Penghitungan Banyaknya Tree Cover Pada Graf Yang Diperoleh Dari Operasi Join dan Corona Pada Graf Lintasan, Graf Lengkap dan Graf Lingkaran

Penulis : Muhammad Faidlur Rohman

NIM : 1608046024

Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang munaqasyah oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Pendidikan Fisika.

Semarang, 27 Juni 2023

DEWANPENGUJI

Ketua,	Sekretaris,
Aini Fitriyah, M.Sc	**Prihadi Kurniawan, M.Sc**
NIP: 198909292019032021	NIP: 199012262019031012
Penguji I,	Penguji Ii,
Yolanda Norasia, M.Si	**Any Muanalifah, M.Si, P.hd**
NIP: 199409232019032011	NIP: 198201132011012009
Pembimbing I,	Pembimbing II,
Prihadi Kurniawan, M.Sc.	**Dinni Rahma Oktaviani, M.Si.**
NIP: 199012262019031012	NIP: 199410092019032017

KEMENTERIAN AGAMA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UIN WALISONGO
SEMARANG
REPUBLIK INDONESIA

NOTA DINAS

Semarang, 21/Juni/2023

Kepada
Yth.Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo
di Semarang

Assalamu'alaikum. wr. wb.

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	: Penghitungan Banyaknya Tree Cover Pada Graf Yang Diperoleh Dari Operasi Join dan Corona Pada Graf Lintasan, Graf Lengkap dan Graf Lingkaran
Nama	: Muhammad Faidlur Rohman
NIM	: 1608046024
Jurusan	: Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqsyah.

Wassalamu'alaikum. wr. wb.

Pembimbing I,

<u>Prihadi Kurniawan, M.Sc.</u>
IP : 199012262019031012

NOTA DINAS

Semarang, 21/Juni/2023

Kepada
Yth.Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo
di Semarang

Assalamu'alaikum. wr. wb.

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : Penghitungan Banyaknya Tree Cover Pada Graf Yang Diperoleh Dari Operasi Join dan Corona Pada Graf Lintasan, Graf Lengkap dan Graf Lingkaran
Nama : Muhammad Faidlur Rohman
NIM : 1608046024
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqsyah.

Wassalamu'alaikum. wr. wb.

Pembimbing II,

Dinni Rahma Oktaviani, M.Si.
IP : 199410092019032017

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk membahas banyaknya *tree cover* pada graf yang diperoleh dari operasi join dan corona pada graf lintasan, graf lengkap dan graf lingkaran. Metode penelitian adalah dengan studi pustaka. Penelitian dilakukan dengan cara menggambar graf tersebut dan mencari pola dari gambar tersebut, kemudian membuktikan teorema yang diperoleh dari pola yang telah ditemukan. Hasil dari penelitian ini adalah didapatkannya nilai dari banyaknya *tree cover* pada graf yang diperoleh dari operasi join dan corona pada graf lintasan, graf lengkap dan graf lingkaran.

Kata kunci : *tree cover,* operasi *join,* operasi *corona,* graf lintasan, graf lingkaran, graf lengkap

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

اللهم صل على سيدنا محمد وعلى ال سيدنا محمد

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillahi rabbil 'alamin, puja dan puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, taufiq dan hidayah serta inayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.

Shalawat serta salam kerinduan senantiasa tercurahkan kepada junjungan ummat, pemberi syafa'at, penuntun jalan kebajikan, penerang di muka bumi ini, seorang manusia pilihan dan teladan kita, Nabi Muhammad SAW yang menjadi pelita di tengah kegelapan.

Penulisan skripsi ini dikerjakan dalam rangka memenuhi salah satu syarat demi mencapai gelar S1 jurusan Matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Walisongo. Penulis mengetahui bahwa penulisan skripsi ini masih belum sempurna, baik dari segi kualitas maupun penyajiannya. Hal ini karena keterbatasan penulis dalam mengumpulkan data serta literatur. Selain itu sebagai makhluk ciptaan Allah SWT, penulis tidak dapat luput dari yang namanya salah dan khilaf. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran serta masukan ataupun koreksi yang sifatnya membangun untuk menyempurnakan penelitian ini.

Penulis mengetahui bahwa, berakhirnya penelitian dan penyusunan skripsi ini tidak dapat terlepas dari bantuan, bimbingan, dorongan dan doa yang tulus dari banyak pihak, dari masa perkuliahan sampai pada berakhirnya penyusunan skripsi ini. Atas kerja sama yang baik dari semua pihak, penulis berhasil dengan baik menyelesaikan penelitian dan penyusunan skripsi ini.

Dengan selesainya penelitian dan penyusunan skripsi ini, perkenankan penulis untuk mengucapkan dan menyampaikan terima kasih kepada:

1. Allah SWT, berkat ridho dan rahmat-Nya penulis dapat melaksanakan tugas akhir dengan lancar.
2. Prof. Dr. Imam Taufiq, M.Ag., selaku rektor UIN Walisongo.
3. Dr. H. Ismail, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo.
4. Hj. Emy Siswanah, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika.
5. Ahmad Aunur Rohman, M. Pd., selaku Sekretaris Program Studi Matematika.
6. Prihadi Kurniawan, M.Sc. dan Dinni Rahma Oktaviani, M.Si., selaku Dosen Pembimbing.

7. Ali Mahfudh selaku ayah dan Sholichah selaku ibu yang telah memberikan berbagai dukungan baik dari materiil maupun non materiil hingga akhir
8. Seluruh keluarga yang juga telah memberikan berbagai dukungan dari mulai awal kuliah hingga berakhirnya masa perkuliahan
9. Seluruh staff dan dosen UIN Walisongo yang telah memberikan serta mengajarkan berbagai ilmu dan pengalaman serta berbagai bantuan selama masa perkuliahan sampai berakhirnya masa perkuliahan
10. Teman-teman kuliah, pondok, dan berbagai kelompok studi, yang selalu menemani hari-hari kuliah sampai berakhirnya masa perkuliahan
11. Semua pihak dan kalangan yang baik secara langsung maupun tidak langsung turut terlibat dan membantu dalam penelitian serta penyusunan skripsi ini yang penulis tidak dapat sebutkan satu per satu.

Semoga penelitian dan skripsi ini dapat menambah literasi dan berguna bagi siapa saja yang membaca serta mengkajinya, sehingga dapat dikembangkan dan disempurnakan agar lebih berguna dan bermanfaat untuk kepentingan orang banyak. Aaamiiin.

Akhirnya, hanya kepada Allah SWT penulis memohon ridho dan maghfirah-Nya. Penulis tidak dapat memberikan balasan satu persatu serta ucapan terima kasih dan iringan do’a semoga segala dukungan serta bantuan semua pihak mendapat sebaik-baiknya balasan dan dilipat gandakan oleh Allah SWT, *Aamiin*.

Semarang, 18 Juni 2023

Muhammad Faidlur Rohman
NIM: 1608046024

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Graf adalah salah satu jenis struktur data yang terdiri dari titik (*vertex*) dan garis *(edge)*, dimana dalam graf tersebut, *vertex - vertex* yang ada dihubungkan oleh *edge*, hingga menjadi suatu kesatuan yang disebut graf (Rosen, 2012). Sebagai contoh dari pemodelan graf adalah peta kota kota, dimana kota disini sebagai *vertex* dan jalur yang menghubungkannya berlaku sebagai *edge*. Graf yang titik dan sisinya merupakan himpunan bagian dari graf lain disebut subgraf.

Graf dapat dikelompokkan ke dalam beberapa kategori berdasarkan sudut pandang pengelompokannya. Berdasarkan ada atau tidaknya gelang (*loop*) atau sisi ganda (*multiple edges*) pada suatu graf, graf dapat dikelompokkan dalam dua jenis, yaitu: graf sederhana dan graf tak-sederhana. Graf sederhana yaitu graf yang tidak mengandung gelang atau sisi ganda .

Salah satu contoh dari graf sederhana yaitu graf lintasan, graf lengkap, graf lingkaran dan graf pohon (*tree*). Graf lintasan adalah graf yang mempunyai tepat satu lintasan dengan n titik dan panjang n-1. Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua (Munir, 2010).

Pohon merupakan sebuah graf terhubung yang tidak mengandung sirkuit (Munir, 2010). Dalam graf pohon, dikenal sebuah istilah yang bernama subpohon. Subpohon adalah pohon yang titik dan sisinya merupakan himpunan bagian dari pohon lain.

Artes dan Dignos (2014) menyatakan bahwa misal G adalah sebuah graf dan $T_g = \{G_1, G_2, G_3, \ldots, G_k\}$ adalah subgraf G dimana G_i adalah subpohon dari G untuk setiap $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Jika untuk setiap sisi $e \in E(G)$, terdapat $G_i \in T_g$ sehingga $e \in E(G_i)$, maka T_g adalah *tree cover* dari G. Banyaknya *tree cover* dari G, dinotasikan dengan $t_c(G)$, yaitu

$$t_c(G) = min\{|T_g| : T_g \textit{ adalah tree cover dari } G\}.$$

Artes dan Dignos (2015) juga telah mengkaji tentang batas atas banyaknya *tree cover* pada graf yang diperoleh dari operasi *join* dan *corona* secara umum. Operasi *join* dan *corona* merupakan salah satu operasi yang menghubungkan antara dua graf. Kajian kali ini akan membahas lebih spesifik lagi kasus tersebut yaitu menghitung banyaknya *tree cover* pada graf yang diperoleh dari operasi *join* dan *corona* pada graf lintasan, graf lengkap dan graf lingkaran.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka diambil rumusan masalah sebagai berikut::

1. Berapa banyak *tree cover* pada graf yang diperoleh dari operasi *join* dan *corona* pada graf lengkap, lingkaran dan teratur ($P_n \oplus C_m$, $P_n \oplus K_m$, $C_n \oplus K_m$, P_n o C_m, P_n o K_m dan C_n o K_m)?

C. Tujuan Penelitian

Tujuan Penelitian Skripsi ini adalah:

1. Untuk mengetahui banyaknya *tree cover* pada graf yang diperoleh dari operasi *join* dan *corona* pada graf lengkap, lingkaran dan teratur ($P_n \oplus C_m$, $P_n \oplus K_m$, $C_n \oplus K_m$, P_n o C_m, P_n o K_m dan C_n o K_m).

D. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini yaitu:

1. Bagi pembaca

   Hasil penelitian dapat digunakan sebagai salah satu referensi serta memperkaya penelitian dan literatur khususnya dalam hal *tree cover*.

2. Bagi penulis

   Memberikan tambahan pengetahuan untuk menghitung banyaknya *tree cover* pada graf yang diperoleh dari operasi *join* dan *corona* pada graf lengkap, lingkaran dan teratur.

BAB II

LANDASAN TEORI

A. KAJIAN PUSTAKA

Berikut ini merupakan penelitian-penelitian yang bersinggungan dan berhubungan serta telah dilakukan oleh penelitian sebelumnya. Hasil penelitian ini dijadikan peneliti sebagai referensi utama untuk digunakan dalam penelitian.

1. Penelitian yang dilakukan oleh Artes dan Dignos (2014). Penelitian ini berisi tentang definisi *tree cover,* karakteristik *tree cover,* banyakya *tree cover* pada graf lingkaran, kipas, roda dan banyaknya *tree cover* pada graf yang mempunyai tepat satu *cycle.* Persamaan dengan penelitian yang akan dilakukan adalah sama-sama membahas tentang *tree cover* dan banyaknya *tree cover* pada graf lingkaran. Perbedaan penelitian ini dengan penelitian yang akan dilakukan diantaranya adalah penelitian juga akan membahas tentang *tree cover* pada graf lain yaitu graf lintasan dan graf lengkap.
2. Penelitian yang dilakukan oleh Artes dan Dignos (2015). Penelitian ini berisi tentang batas atas dari banyaknya *tree cover* yang diperoleh dari operasi *join* dan *corona* pada dua graf yang saling terpisah.

Persamaan dengan penelitian yang akan dilakukan adalah sama-sama membahas tentang banyaknya *tree cover* yang diperoleh dari operasi *join* dan *corona* pada dua graf yang saling terpisah. Perbedaan penelitian ini dengan penelitian yang akan dilakukan diantaranya adalah penelitian akan membahas lebih spesifik lagi tentang *tree cover* yang diperoleh dari operasi *join* dan *corona* pada graf lintasan, graf lingkaran dan graf lengkap.

3. Penelitian yang dilakukan oleh Bozeman, dkk (2017). Penelitian ini berisi tentang banyaknya *tree cover* pada d-dimensi hiperkubus untuk setiap $d \geq 2$. Persamaan dengan penelitian yang akan dilakukan adalah sama-sama membahas tentang banyaknya *tree cover* pada suatu graf. Perbedaan penelitian ini dengan penelitian yang akan dilakukan diantaranya adalah penelitian akan membahas tentang banyaknya *tree cover* yang diperoleh dari operasi *join* dan *corona* pada graf lintasan, graf lingkaran dan graf lengkap.
4. Penelitian yang dilakukan oleh G. Even. Penelitian ini berisi tentang algoritma untuk meminimumkan bobot *tree cover* dari graf pohon berbobot. Persamaan dengan penelitian ini adalah sama-sama membahas tentang *tree cover*. Perbedaan penelitian ini dengan

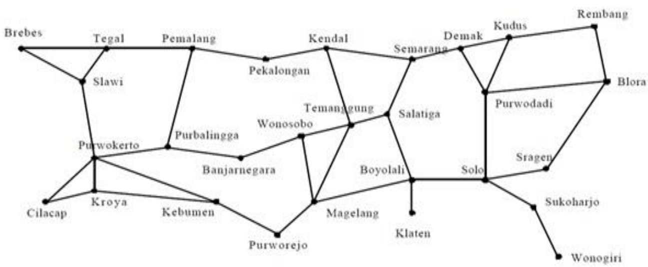
penelitian yang akan dilakukan diantaranya adalah penelitian akan membahas *tree cover* pada graf tak berbobot.

B. KAJIAN TEORI

1. GRAF

Graf adalah salah satu jenis struktur data yang terdiri dari titik (*vertex*) dan garis (*edge*), dimana dalam graf tersebut, titik - titik yang ada dihubungkan oleh garis, hingga menjadi suatu kesatuan yang disebut graf (Rosen, 2012). Sebagai contoh dari pemodelan graf adalah peta kota kota, dimana kota disini sebagai *vertex* dan jalur yang menghubungkannya berlaku sebagai *edge*.

Agar lebih jelas perhatikan gambar di bawah ini:



Gambar 2.1. graf peta kota di pulau jawa
(sumber: Munir, 2010)

Dalam gambar tersebut, terdapat beberapa kota yang berada di pulau jawa dimana kota-kota tersebut dihubungkan oleh beberapa jalur jalur yang ada.

Untuk contoh di atas kita bisa menganggap bahwa kota-kota yang ada merupakan *vertex*, dan jalur-jalur yang menghubungkan kota-kota tersebut sebagai *edge*. Sehingga secara keseluruhan peta diatas dapat dibuat pemodelannya sebagai sebuah graf.

Suatu graf didefinisikan sebagai himpunan *vertex* dan himpunan sisi (*edge*). *Vertex* menyatakan entitas-entitas data dan sisi menyatakan keterhubungan antara *vertex*. Biasanya untuk suatu graf G digunakan notasi matematis.

$$\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$$

Dimana : G = Graf

V = Simpul, *vertex*, node atau titik

E = Busur, *edge* atau *arc*

V adalah himpunan *vertex* dan E himpunan sisi yang terdefinisi antara pasangan-pasangan *vertex*. Sebuah sisi antara *vertex* x dan y ditulis [x, y]. Suatu graf $H = (V_1, E_1)$ disebut subgraf dari graf G jika V_1 adalah himpunan bagian dari V dan E_1 himpunan bagian dari E (Munir, 2010).

2. Istilah Pada Graf

Berikut ini beberapa istilah yang sering digunakan dalam graf (Munir, 2010):

a. *Adjacency*: Dua *vertex* x dan y yang berlainan disebut berhubungan langsung (*adjacent*) jika terdapat sisi [x, y] dalam graf tersebut.
b. *Incident*: Jika e merupakan busur dengan simpul-simpulnya adalah v dan w yang ditulis $e = \{v, w\}$, maka v dan w disebut "terletak" pada e, dan e disebut *incident* dengan v dan w.
c. Derajat (*degree*): Derajat dari suatu *vertex* x dalam graf adalah jumlah busur yang incident dengan simpul tersebut.
d. Lintasan (*path*): Sederetan *vertex* yang mana setiap *vertex* adjacent dengan *vertex* yang tepat berada disebelahnya.
e. Panjang dari *path*: jumlah sisi yang dilalui *path*.
f. Gelang (*loop*): sebuah busur yang bermula dan berakhir pada simpul yang sama.
g. Sisi ganda (*multiple edge*): dua atau lebih busur yang menghubungkan dua simpul yang sama.
h. Sirkuit (*cycle*): suatu path dengan panjang lebih dari satu yang dimulai dan berakhir pada suatu *vertex* yang sama.
i. Siklus sederhana: dalam graf, siklus yang terbentuk pada tiga atau lebih *vertex*-*vertex* yang berlainan yang mana tidak ada *vertex* yang

dikunjungi lebih dari satu kali kecuali *vertex* awal/akhir.

j. Dua *vertex* x dan y yang berbeda dalam suatu graf disebut berkoneksi (*connected*) apabila jika terdapat path yang menghubungkannya.

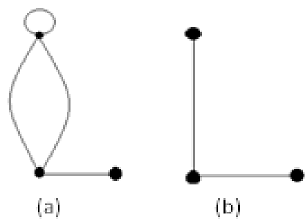
k. Himpunan bagian *vertex* S disebut terkoneksi (*connected*) apabila dari setiap *vertex* x dalam S terdapat path ke setiap *vertex* y (y bukan x) dalam S.

l. Suatu komponen terkoneksi (*connected components*) adalah subgraf (bagian dari graf) yang berisikan satu himpunan bagian *vertex* yang berkoneksi.

m. Suatu graf bisa terbagi mejadi beberapa komponen yang terkoneksi; jika dalam komponen tersebut terdapat lebih dari satu komponen terkoneksi maka tidak terdapat path dari suatu *vertex* dalam satu komponen *vertex* di komponen lainnya.

3. Macam-Macam Graf

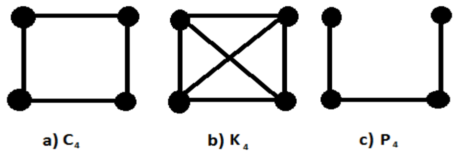
Graf dapat dikelompokkan ke dalam beberapa kategori berdasarkan sudut pandang pengelompokannya. Berdasarkan ada atau tidaknya gelang (*loop*) atau sisi ganda (*multiple edges*) pada suatu graf, graf dapat dikelompokkan dalam dua jenis, yaitu: graf sederhana dan graf tak-sederhana. Graf sederhana yaitu graf yang tidak mengandung gelang atau sisi ganda. Sebaliknya, graf tak sederhana yaitu graf yang mengandung gelang atau sisi ganda (Munir, 2010).



Gambar 2.2. (a) graf tak sederhana, (b) graf sederhana

Ada beberapa contoh graf sederhana, diantaranya sebagai berikut (Munir, 2010):

a. Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap sisinya memiliki sisi ke seluruh sisi lainnya. Graf lengkap dengan n simpul dilambangkan dengan K_n.
b. Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap sisinya memiliki derajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n.
c. Graf lintasan yang dinotasikan dengan P_n adalah graf yang memiliki hanya satu lintasan dengan jumlah titik sebanyak n dan panjang sisi n-1.

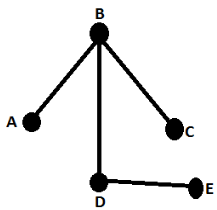


Gambar 2.3. (a) graf lingkaran, (b) graf lengkap dan (c) graf lintasan

d. Graf kosong, dinotasikan dengan $\overline{K_n}$ adalah graf yang tidak memiliki sisi

Gambar 2.4. graf kosong $\overline{K_3}$

e. Pohon (*tree*) adalah graf terhubung yang tidak mengandung sirkuit.



Gambar 2.5. graf pohon

Pohon yang titik dan sisinya merupakan himpunan bagian dari pohon lain disebut subpohon.

4. Macam-macam operasi pada graf

Ada beberapa macam operasi pada graf, diantaranya yaitu:

a. Operasi gabungan (Diestel, 2005)

Misalkan terdapat dua buah graf G_1 dan G_2, maka gabungan dari graf G_1 dan G_2, notasi $G_1 \cup G_2$ adalah graf dengan himpunan titik

$$V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$$

dan himpunan sisi

$$E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2).$$

Dengan kata lain, operasi gabungan dalam graf didapat dengan menggabungkan dua buah graf tanpa menambah ataupun mengurangi sisi dan titik pada graf tersebut.

b. Operasi penjumlahan (*join*) (Artes dan Dignos, 2015)

Misal G dan H adalah graf yang tidak saling terhubung. *Join* $G \oplus H$ dari H dan G mempunyai set-titik $V(G \oplus H) = V(G) \cup V(H)$ dan set-sisi

$$E(G \oplus H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv : u \in V(G), v \in V(H)\}$$

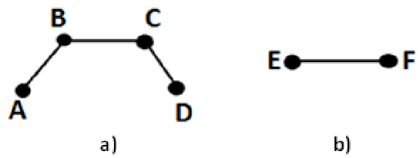
sehingga,

$$|V(G \oplus \mathrm{H})| = |V(G)| + |V(\mathrm{H})|$$

Dan

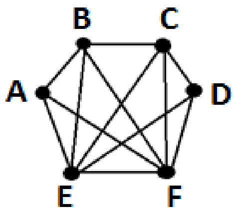
$$|E(G \oplus \mathrm{H})| = |E(G)| + |E(\mathrm{H})| + |V(G)||V(H)|$$

Sebagai contoh, graf lintasan P_4 dengan graf komplit K_2



Gambar 2.6. (a) graf lintasan P_4 dan (b) graf komplit K_2

Join dari graf lintasan P_4 dengan graf komplit K_2 ditunjukkan seperti gambar di bawah:

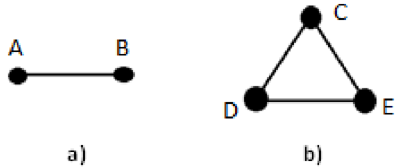


Gambar 2.7. Join dari graf P_4 dengan graf K_2

c. Operasi *corona* (Artes dan Dignos, 2015)

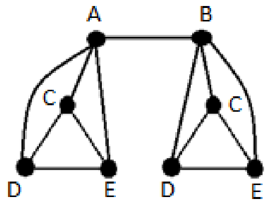
Corona $G \circ H$ dari dua graf G dan H adalah graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan dari G dengan order n dan n salinan dari H, dan kemudian menggabungkan titik ke-i dari G ke setiap titik di salinan ke-i dari H.

Sebagai contoh graf lintasan P_2 dengan graf lingkaran C_3



Gambar 2.8. a) graf lintasan P_2 dan b) graf lingkaran

Corona dari graf lintasan P_2 dengan graf lingkaran C_3 ditunjukkan seperti gambar dibawah:



Gambar 2.9. Corona dari graf P_2 dengan graf C_3

5. *Tree* Cover Pada Graf

Misal G adalah sebuah graf dan $T_g = \{G_1, G_2, G_3, \ldots, G_k\}$ adalah subgraf G dimana G_i adalah pohon untuk setiap $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Jika untuk setiap sisi $e \in E(G)$, terdapat $G_i \in Tg$ sehingga $e \in E(G_i)$, maka T_g adalah *tree cover* dari G (Artes dan Dignos, 2014).

Dari definisi di atas, dapat disimpulkan bahwa $T_g = \{G_1, G_2, G_3, \ldots, G_k\}$ dapat disebut sebagai *tree cover* dari graf G jika:

a. G_i merupakan subgraf dari graf G untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, k\}$

b. G_i adalah graf pohon untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, k\}$

c. $G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_k = G$

Banyaknya *tree cover* (*tree cover number*) dari G, dinotasikan dengan $t_c(G)$, yaitu $t_c(G) = min\{|T_g| \; T_g \; adalah \; tree \; cover \; dari \; G)$ (Artes dan Dignos, 2014).

Dari definisi diatas, jelas bahwa untuk setiap graf G, $t_c(G) \geq 0$.

Artes dan Dignos (2014) telah membahas beberapa teorema tentang *tree cover number,* beberapa diantaranya yaitu:

a. **Teorema 2.1.** misal G adalah graf dengan titik sebanyak n. Maka $t_c(G) = 0$ jika dan hanya jika $G \cong \overline{K_n}$.

   Bukti: Misal $t_c(G) = 0$. Maka $|E(G)| = 0$. Karena $|V(G)| = n$, maka $G \cong \overline{K_n}$.

   Sebaliknya, misalkan $G \cong \overline{K_n}$. Sesuai definisi, $t_c(G) \leq 0$. Dengan menggabungkannya dengan pertidaksamaan $t_c(G) \geq 0$, kita dapatkan $t_c(G) = 0$. ■

   Teorema diatas berakibat bahwa jika G bukan graf kosong, maka $t_c(G) \geq 1$.

b. **Teorema 2.2.** misal G adalah graf terhubung tak kosong dengan derajat n. $t_c(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf pohon.

Bukti: misal $t_c(G) = 1$, maka terdapat tree cover T_g dari graf G *sedemikian* hingga $|T_g| = 1$. Misal $T_g = \{T\}$. Karena G terhubung dan tak kosong, $G = T$. Maka G adalah graf pohon.

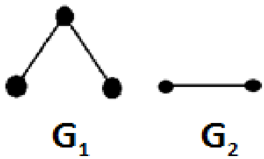
Sebaliknya, asumsikan bahwa G adalah graf pohon. Misal $T_g = \{G\}$. Maka T_g adalah *tree cover* dari G. Sesuai definisi, $t_c(G) \leq |T_g| = 1$. Karena G bukan graf kosong, akibat dari Teorema 2.1 menunjukkan bahwa $t_c(G) \geq 1$. Menggabungkan kedua pertidaksamaan tersebut, diperoleh $t_c(G) = 1$. ■

Teorema diatas berakibat bahwa jika G graf terhubung, bukan graf kosong dan bukan graf pohon, maka $t_c(G) \geq 2$.

c. **Teorema 2.3.** untuk setiap bilangan positif $n \geq 3$, $t_c(C_n) = 2$.

Bukti: akibat dari Teorema 2.2 menunjukkan bahwa $t_c(C_n) \geq 2$. Anggap sirkuit graf $C_n = [u_1, u_2, u_3, \dots u_n, u_1]$. Misal $T_g = \{G_1, G_2\}$, dimana $G_1 = [u_1, u_2, u_3, \dots u_n]$ dan $G_2 = [u_n, u_1]$. Maka G_1 dan G_2 adalah graf pohon. Jadi, T_g adalah tree cover dari C_n, sehingga $t_c(C_n) \leq |T_g| = 2$. Menggabungkan kedua pertidaksamaan tersebut, diperoleh $T_c(C_n) = 2$. ■

Sebagai contoh, graf lingkaran C_3 memiliki jumlah *tree cover* sebanyak dua. Sebagai bukti, misal $T_g = \{G_1, G_2\}$ dimana G_1 dan G_2 adalah subgraf dari C_3 seperti ditunjukkan pada gambar di bawah.



Gambar 2.14. G_1 dan G_2 Subgraf dari C_3

Jelas bahwa G_1 dan G_2 adalah pohon, dan juga $G_1 \cup G_2 = C_3$. Akibatnya T_g adalah *tree cover* dari G. Sehingga sesuai definisi $t_c(C_3) \leq |T_g| = 2$. Karena C_3 bukan pohon, maka sesuai akibat dari teorema 2.2 $t_c(C_3) \geq 2$. Dengan menggabungkan dua pertidaksamaan tersebut, diperoleh $t_c(C_3) = 2$.

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu studi literatur. Metode studi literatur adalah serangkaian kegiatan yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca dan mencatat, serta mengelola bahan penelitian (Zed, 2003).

Adapun langkah-langkah yang digunakan ditampilkan sebagai berikut:

1. Menggambar graf lintasan (P_n), graf lengkap (K_n) dan graf lingkaran (C_n) dengan menerapkan operasi *join* dan *corona*.
2. Mencari pola dari banyaknya *tree cover* yang diperoleh dari hasil operasi *join* dan *corona* antara ketiga graf tersebut.
3. Membuktikan teorema tentang banyaknya *tree cover* yang telah diperoleh dari pola sebelumnya.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

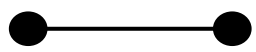
A. *Tree cover number* pada graf lintasan (P_n)

1. *Tree cover number* pada P_1

Gambar 4.1 graf P_1

P_1 adalah graf kosong, sehingga $P_1 = \overline{K_1}$. Sesuai teorema 2.1, karena $P_1 = \overline{K_1}$ maka $t_c(P_1) = 0$.

2. *Tree cover number* pada P_2



Gambar 4.2 graf P_2

P_2 termasuk graf pohon, karena P_2 merupakan graf terhubung yang tidak mempunyai *cycle*. Sesuai teorema 2.2, $t_c(P_2) = 1$.

3. *Tree cover number* pada P_3

Gambar 4.3 graf P_3

P_3 termasuk graf pohon, karena P_3 merupakan graf terhubung yang tidak mempunyai *cycle*. Sesuai teorema 2.2, $t_c(P_3) = 1$.

4. Generalisasi

Teorema 4.1. *Tree cover number* dari graf lintasan P_n adalah

- $t_c(P_n) = 0$ untuk $n = 1$
- $t_c(P_n) = 1$ untuk $n > 1$

Bukti: Untuk $n = 1$, P_1 adalah graf trivial, sehingga $P_1 = \overline{K_1}$. Sesuai teorema 2.1, karena $P_1 = \overline{K_1}$, maka $t_c(P_1) = 0$.

Untuk $n > 1$, P_n termasuk graf pohon, karena P_n merupakan graf terhubung yang tidak mempunyai *cycle*. Sesuai teorema 2.2, $t_c(P_n) = 1$. ■

B. *Tree cover number* pada graf lingkaran (C_n)

Tree cover number pada graf lingkaran telah dibahas pada bab sebelumnya yaitu pada teorema 2.3. untuk setiap bilangan bulat $n > 3$. $t_c(C_n) = 2$. (Artes dan Dignos, 2014)

C. *Tree cover number* pada graf lengkap (K_n)

Teorema 4.2 Misal G adalah graf sederhana terhubung dengan n titik dan m sisi dan T_g *tree cover* dari G, maka

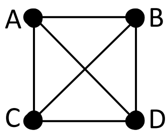
$$t_c(G) \geq \left\lceil \frac{m}{n-1} \right\rceil$$

Keterangan: $\lceil x \rceil$ artinya bilangan bulat terkecil lebih dari atau sama dengan x

Bukti: Diberikan graf G adalah graf sederhana terhubung dengan n titik dan m sisi. Misal $T_g = \{G_1, G_2, G_3, \dots, G_k\}$ adalah *tree cover* dari graf G, maka G_i subgraf dari G, G_i pohon dan $G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_k = G$, untuk setiap $i \in 1,2,3, \dots, k$.

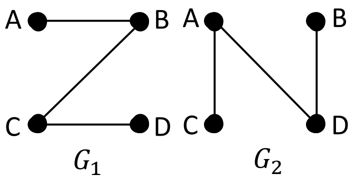
Untuk setiap $i \in 1,2,3,\dots,k$, G_i subgraf dari graf G, maka G_i hanya bisa memiliki maksimal titik sebanyak n. Karena G_i merupakan pohon, maka G_i hanya bisa memiliki maksimal sisi sebanyak $n-1$. Karena graf G terhubung dan memiliki sisi sebanyak m, maka dibutuhkan minimum sebanyak $\left\lceil \frac{m}{n-1} \right\rceil$ graf G_i, agar $G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_k = G$. Sehingga $\left|T_g\right| \geq \left\lceil \frac{m}{n-1} \right\rceil$. Jadi, $t_c(G) \geq \left\lceil \frac{m}{n-1} \right\rceil$ ■

1. *Tree cover number* pada graf lengkap K_4



Gambar 4.4 graf K_4

Karena K_4 mempunyai *cycle* maka K_4 bukan pohon, maka sesuai akibat dari teorema 2.2, $t_c(K_4) \geq 2$.

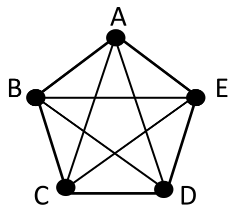


Gambar 4.5 G_1 dan G_2 *tree cover* dari graf K_4

Sesuai gambar diatas, $T_g = \{G_1, G_2\}$ merupakan *tree cover* dari graf K_4, Sehingga sesuai definisi, $t_c(K_4) \leq 2$.

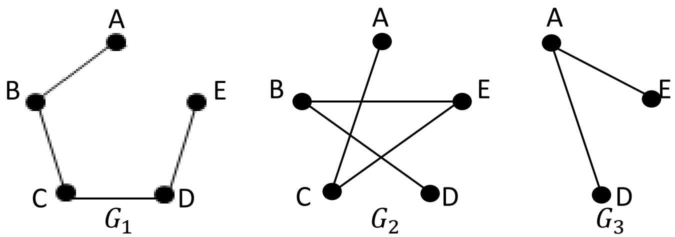
Dengan menggabungkan dua pertidaksamaan tersebut, diperoleh $t_c(K_4) = 2$.

2. *Tree cover number* pada graf lengkap K_5



Gambar 4.6 graf K_5

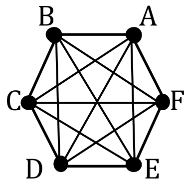
Graf K_5 merupakan graf sederhana terhubung dengan 5 titik dan 10 sisi. Sesuai Teorema 4.2, $t_c(K_5) \geq \left\lceil \frac{10}{5-1} \right\rceil = \lceil 2{,}5 \rceil = 3$.



Gambar 4.7 G_1, G_2 dan G_3 *tree cover* dari graf K_5

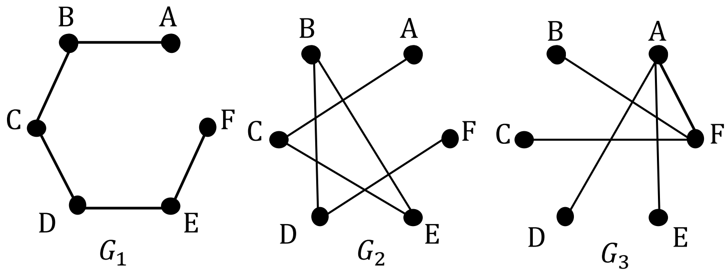
Sesuai gambar diatas, $T_g = \{G_1, G_2, G_3\}$ merupakan *tree cover* dari graf K_5. Sehingga sesuai definisi, $t_c(K_5) \leq 3$. Dengan menggabungkan kedua persamaan tersebut, diperoleh $t_c(K_5) = 3$

3. *Tree cover number* pada graf lengkap K_6



Gambar 4.8 graf K_6

Graf K_6 merupakan graf sederhana terhubung dengan 6 titik dan 15 sisi. Sesuai Teorema 4.2, $t_c(K_6) \geq \left\lceil \frac{15}{6-1} \right\rceil = \lceil 3 \rceil = 3$.



Gambar 4.9 G_1, G_2 dan G_3 *tree cover* dari graf K_6

Sesuai gambar diatas, $T_g = \{G_1, G_2, G_3\}$ merupakan *tree cover* dari graf K_6. Sehingga sesuai definisi, $t_c(K_6) \leq 3$. Dengan menggabungkan kedua persamaan tersebut, diperoleh $t_c(K_6) = 3$.

4. Generalisasi

Teorema 4.3. *Tree cover number* dari graf lengkap K_n adalah

$$t_c(K_n) = \begin{cases} 0 & jika\, n = 1 \\ \dfrac{n}{2} & jika\, n\, genap \\ \dfrac{n+1}{2} & jika\, n\, ganjil, n \neq 1 \end{cases}$$

Bukti: Untuk $n = 1$, graf K_1 merupakan graf kosong. Sehingga sesuai Teorema 2.1, $t_c(K_1) = 0$.

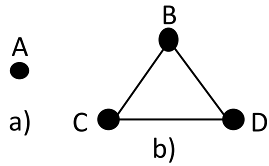
Untuk $n =$ genap, graf K_n mempunyai sisi sebanyak $\frac{n(n+1)}{2}$, sehingga sesuai Teorema 4.2, $t_c(K_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n}{2}$. Misal titik pada graf $K_n = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, maka dapat dibentuk $T_g = \{G_1, G_2, G_3, \ldots, G_{\frac{n}{2}}\}$ *tree cover* dari graf lengkap K_n, dengan $G_1 = [x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n]$, $G_2 = [x_1, x_3, x_5, \ldots x_{n-1}, x_2, x_4, x_6, \ldots, x_n]$ dan G_i mengikuti pola sebelumnya tanpa melewati lintasan yang sama untuk $i \in 3,4,5, \ldots, \frac{n-2}{2}$. $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_{\frac{n-2}{2}}$ akan membentuk graf lintasan dan G_n akan membentuk graf pohon dengan $G_n = K_n - \{G_1, G_2, G_3, \ldots, G_{\frac{n-2}{2}}\}$. Sehingga $t_c(K_n) \leq \frac{n}{2}$. Dengan menggabungkan kedua pertidaksamaan tersebut diperoleh $t_c(K_n) = \frac{n}{2}$.

Untuk $n =$ ganjil, graf K_n mempunyai sisi sebanyak $\frac{n(n+1)}{2}$, sehingga sesuai Teorema 4.2,

$t_c(K_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n+1}{2}$. Misal titik pada graf $K_n = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, maka dapat dibentuk $T_g = \{G_1, G_2, G_3, \dots, G_{\frac{n+1}{2}}\}$, dengan G_i adalah *tree cover* pada graf lengkap K_{n-1} untuk $i \in 3,4,5, \dots, \frac{n-1}{2}$ dan $G_{\frac{n+1}{2}} = \{x_n\} \oplus (K_n - \{x_n\})$. Sehingga $t_c(K_n) \leq \frac{n+1}{2}$. Dengan menggabungkan kedua pertidaksamaan tersebut diperoleh $t_c(K_n) = \frac{n+1}{2}$. ■

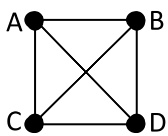
D. *Tree cover number* pada operasi join antara graf P_n dan C_m

1. *Tree cover number* pada $P_1 \oplus C_3$



Gambar 4.10 a) graf P_1 b) graf C_3

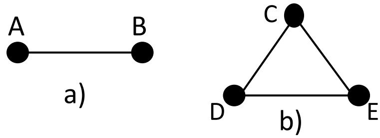
Operasi *join* $P_1 \oplus C_3$ ditunjukkan seperti gambar dibawah



Gambar 4.11 $P_1 \oplus C_3$

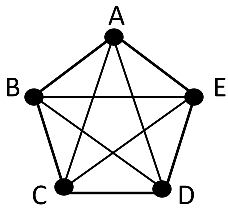
Terlihat jelas bahwa $P_1 \oplus C_3 = K_4$, sehingga $t_c(P_1 \oplus C_3) = t_c(K_4) = 2$.

2. *Tree cover number* pada $P_2 \oplus C_3$



Gambar 4.12 a) graf P_2 b) graf C_3

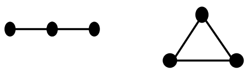
Operasi *join* $P_2 \oplus C_3$ ditunjukkan seperti gambar dibawah



Gambar 4.13 graf $P_2 \oplus C_3$

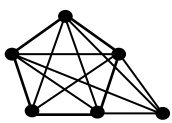
Terlihat jelas bahwa $P_2 \oplus C_3 = K_5$, sehingga $t_c(P_2 \oplus C_3) = t_c(K_5) = 3$.

3. *Tree cover number* pada $P_3 \oplus C_3$



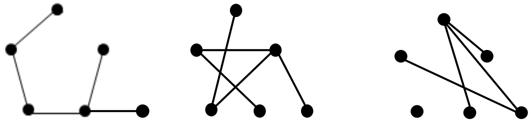
Gambar 4.14 graf P_3 dan C_3

Operasi *join* $P_3 \oplus C_3$ ditunjukkan seperti gambar dibawah



Gambar 4.15 graf $P_3 \oplus C_3$

Tree cover $T_g = \{G_1, G_2, G_3\}$ dari $P_3 \oplus C_3$ ditunjukkan seperti gambar di bawah



Gambar 4.16 *tree cover* dari graf $P_3 \oplus C_3$

Dapat kita lihat bahwa graf G_1 dan G_2 memiliki jumlah titik dan sisi maksimum untuk menjadi graf pohon dan $G_1 \cap G_2 \cap G_3 = \{\ \}$ sehingga T_g merupakan *tree cover* minimum dari graf $P_3 \oplus C_3$ sehingga $t_c(P_3 \oplus C_3) = |T_g| = 3$.

4. Kesimpulan

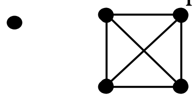
Teorema 4.4. *Tree cover number* dari graf $P_n \oplus C_3$ adalah

$$t_c(P_n \oplus C_3) = \begin{cases} 2 & jika\ n = 1 \\ 3 & jika\ n = 2,3 \end{cases}$$

Untuk buktinya seperti yang sudah dijelaskan di atas.

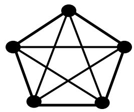
E. *Tree cover number* pada operasi join antara graf P_n dan K_m

1. *Tree cover number* pada $P_1 \oplus K_4$



Gambar 4.17 graf P_1 dan K_4

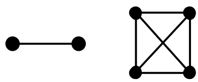
Operasi *join* $P_1 \oplus K_4$ ditunjukkan seperti gambar dibawah



Gambar 4.18 graf $P_1 \oplus K_4$

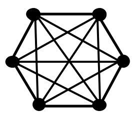
Terlihat jelas bahwa $P_1 \oplus K_4 = K_5$, sehingga $t_c(P_1 \oplus K_4) = t_c(K_5) = 3$.

2. *Tree cover number* pada $P_2 \oplus K_4$



Gambar 4.19 graf P_2 dan K_4

Operasi *join* $P_2 \oplus K_4$ ditunjukkan seperti gambar dibawah

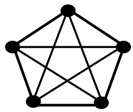


Gambar 4.20 graf $P_2 \oplus K_4$

Terlihat jelas bahwa $P_2 \oplus K_4 = K_6$, sehingga $t_c(P_2 \oplus K_4) = t_c(K_6) = 3$.

3. *Tree cover number* pada $P_2 \oplus K_3$

   Operasi *join* $P_2 \oplus K_3$ ditunjukkan seperti gambar dibawah



Gambar 4.21 graf $P_2 \oplus K_3$

   Terlihat jelas bahwa $P_2 \oplus K_3 = K_5$, sehingga $t_c(P_2 \oplus K_3) = t_c(K_5) = 3$.

4. Generalisasi

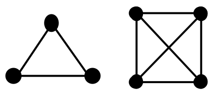
   Teorema 4.5. *Tree cover number* dari graf $P_n \oplus K_m$ adalah

   $t_c(P_n \oplus K_m) = t_c(K_{m+n})$ untuk $n = 1,2$

   Bukti: untuk $n = 1,2$, sesuai pola pada gambar 4.18, 4.20 dan 4.21, $P_n \oplus K_m = K_{m+n}$. Sehingga $t_c(P_n \oplus K_m) = t_c(K_{m+n})$. ■

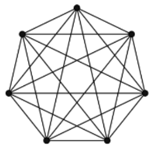
F. *Tree cover number* pada operasi *join* antara graf C_n dan K_m

1. *Tree cover number* pada $C_3 \oplus K_4$



Gambar 4.22 graf C_3 dan K_4

   Operasi *join* $C_3 \oplus K_4$ ditunjukkan seperti gambar dibawah

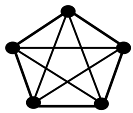


Gambar 4.23 graf $C_3 \oplus K_4$

Terlihat jelas bahwa $C_3 \oplus K_4 = t_c(K_7)$, sehingga $t_c(C_3 \oplus K_4) = t_c(K_7) = 4$.

2. *Tree cover number* pada $C_3 \oplus K_2$

   Operasi *join* $C_3 \oplus K_2$ ditunjukkan seperti gambar dibawah



Gambar 4.24 graf $C_3 \oplus K_2$

Terlihat jelas bahwa $C_3 \oplus K_4 = t_c(K_7)$, sehingga $t_c(C_3 \oplus K_4) = t_c(K_7) = 4$.

3. Generalisasi

   Teorema 4.5. *Tree cover number* dari graf $C_3 \oplus K_m$ adalah

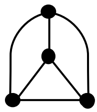
$$t_c(C_3 \oplus K_m) = t_c(K_{m+n})$$

Bukti: untuk $n = 3$, sesuai pola pada gambar 4.23, 4.24, $C_n \oplus K_m = K_{m+n}$. Sehingga $t_c(C_n \oplus K_m) = t_c(K_{m+n})$.

G. *Tree cover number* pada operasi *corona* antara graf P_n dan C_m

1. *Tree cover number* pada P_1 o C_3

   Operasi *corona* P_1 o C_3 ditunjukkan seperti gambar dibawah

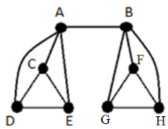


Gambar 4.25 graf P_1 o C_3

Terlihat jelas bahwa P_1 o $C_3 = K_4$, Sehingga $t_c(P_1 \text{ o } C_3) = t_c(K_4) = 2$

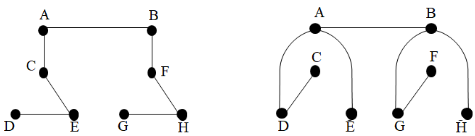
2. *Tree cover number* pada P_2 o C_3

   Operasi *corona* P_2 o C_3 ditunjukkan seperti gambar dibawah



Gambar 4.26 graf P_2 o C_3

Karena P_2 o C_3 bukan graf pohon, maka sesuai teorema 2.2, $t_c(P_2 \text{ o } C_3) \geq 2$.

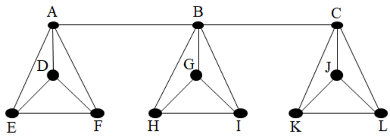


Gambar 4.27 *tree cover* dari graf P_2 o C_3

Kedua gambar graf di atas merupakan *tree cover* dari graf $P_2 \text{ o } C_3$, sehingga $t_c(P_2 \text{ o } C_3) \leq 2$, dengan menggabungkan kedua persamaan tersebut, diperoleh $t_c(P_2 \text{ o } C_3) = 2$.

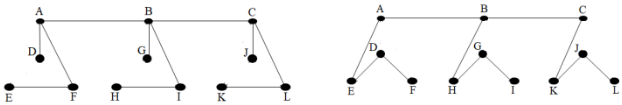
3. *Tree cover number* pada $P_3 \text{ o } \mathrm{C}_3$

   Operasi *corona* $P_3 \text{ o } C_3$ ditunjukkan seperti gambar dibawah



Gambar 4.28 graf $P_3 \text{ o } \mathrm{C}_3$

Karena $P_3 \text{ o } C_3$ bukan graf pohon, maka sesuai teorema 2.2, $t_c(P_3 \text{ o } C_3) \geq 2$



Gambar 4.29 *tree cover* dari graf $P_3 \text{ o } \mathrm{C}_3$

Kedua gambar graf di atas merupakan *tree cover* dari graf $P_3 \text{ o } C_3$, sehingga $t_c(P_3 \text{ o } C_3) \leq 2$, dengan menggabungkan kedua persamaan tersebut, diperoleh $t_c(P_3 \text{ o } C_3) = 2$.

4. Generalisasi

   Teorema 4.6. *Tree cover number* dari operasi *corona* graf $P_n \text{ o } C_m$ adalah $t_c(P_n \text{ o } C_m) = 2$.

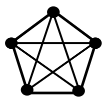
Bukti: karena graf C_m bukan graf pohon, maka operasi *Corona* antara graf P_n o C_m juga bukan graf pohon. Sehingga sesuai Teorema 2.2, $t_c(P_n \text{ o } C_m) \geq 2$. Misal lintasan $P_n = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$ dan lintasan $C_m = [y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, y_1]$, maka dapat dibentuk *tree cover* $T_g = \{G_1, G_2\}$ dengan G_1 merupakan graf pohon $P_n \circ \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}\} \cup [y_1, y_n]$ dan G_2 merupakan graf pohon $P_n \circ \{y_n\} \cup [y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}]$. Sehingga $t_c(P_n \text{ o } C_m) \leq 2$. Dengan menggabungkan kedua pertidaksamaan tersebut, diperoleh $t_c(P_n \text{ o } C_m) = 2$.

■

H. *Tree cover number* pada operasi *corona* antara graf P_n dan K_m

1. *Tree cover number* pada P_1 o K_4

   Operasi *corona* P_1 o K_4 ditunjukkan seperti gambar dibawah

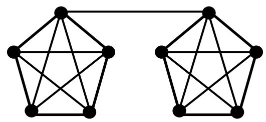


Gambar 4.30 graf P_1 o K_4

Terlihat jelas bahwa $P_1 \text{ o } K_4 = K_5$, sehingga $t_c(P_1 \text{ o } K_4) = t_c(K_5) = 3$.

2. *Tree cover number* pada P_2 o K_4

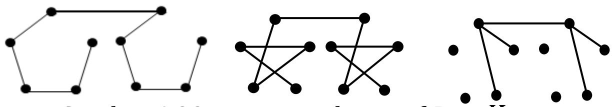
   Operasi *corona* $P_2 \text{ o } K_4$ ditunjukkan seperti gambar dibawah



Gambar 4.31 graf P_2 o K_4

   Karena $P_2 \text{ o } K_4$ memuat graf K_5, maka $t_c(P_2 \text{ o } K_4) \geq t_c(K_5) = 3$.

   Tree cover dari graf $P_2 \text{ o } K_4$ ditunjukkan seperti gambar dibawah

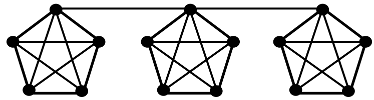


Gambar 4.32 *tree cover* dari graf P_2 o K_4

   Ketiga gambar graf di atas merupakan *tree cover* dari graf $P_2 \text{ o } K_4$, sehingga $t_c(P_2 \text{ o } K_4) \leq 3$, dengan menggabungkan kedua persamaan tersebut, diperoleh $t_c(P_2 \text{ o } K_4) = 3$.

3. *Tree cover number* pada P_3 o K_4

   Operasi *corona* $P_3 \text{ o } K_4$ ditunjukkan seperti gambar dibawah



Gambar 4.33 graf P_3 o K_4

Dengan pola yang sama seperti pada gambar 4.32, diperoleh $t_c(P_3 \text{ o } K_4) = 3$.

4. Generalisasi

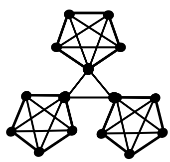
Teorema 4.7. *Tree cover number* dari operasi *corona* graf P_n o C_m adalah $t_c(P_n \text{ o } K_m) = t_c(K_{m+1})$.

Bukti: karena graf P_n o K_m mengandung graf K_{m+1}, maka $t_c(P_n \text{ o } K_m) \geq t_c(K_{m+1})$. Misal lintasan $P_n = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$ dan $T_{g_1} = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_k\}$ adalah *tree cover minimum* dari graf K_{m+1}, dengan $K_{m+1} = \{x_i\} \text{ o } \mathrm{K_m}$ untuk $i \in 1,2,3, \dots, n$. Maka dapat dibentuk *tree cover* $T_{g_2} = \{G_1, G_2, G_3, \dots, G_k\}$ dengan G_i merupakan graf pohon $P_n \cup A_i$, dengan $i \in 1,2,3, \dots, k$. Sehingga $t_c(P_n \text{ o } C_m) \leq t_c(K_{m+1})$. Dengan menggabungkan kedua pertidaksamaan tersebut, diperoleh $t_c(P_n \text{ o } C_m) = t_c(K_{m+1})$. ■

I. *Tree cover number* pada operasi *corona* antara graf C_n dan K_m

1. *Tree cover number* pada C_3 o K_4

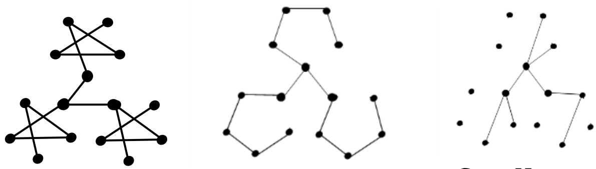
Operasi *corona* C_3 o K_4 ditunjukkan seperti gambar dibawah



Gambar 4.34 graf C_3 o K_4

Karena $C_3 \text{ o } K_4$ memuat graf K_5, maka $t_c(C_3 \text{ o } K_4) \geq t_c(K_5) = 3$.

Tree cover dari graf $C_3 \text{ o } K_4$ ditunjukkan seperti gambar dibawah



Gambar 4.35 *tree cover* dari graf C_3 o K_4

Ketiga gambar graf di atas merupakan *tree cover* dari graf $C_3 \text{ o } K_4$, sehingga $t_c(C_3 \text{ o } K_4) \leq 3$, dengan menggabungkan kedua persamaan tersebut, diperoleh $t_c(C_3 \text{ o } K_4) = 3$.

2. Generalisasi

Teorema 4.8. *Tree cover number* dari operasi *corona* graf P_n o C_m adalah

$$t_c(C_n \text{ o } K_m) = \begin{cases} 2 & jika\, m = 1 \\ t_c(K_{m+1}) & jika\, m \geq 2 \end{cases}$$

Bukti: Untuk $m = 1$, karena graf $C_n \text{ o } K_1$ bukan graf pohon, maka sesuai akibat dari teorema 2.2 $t_c(C_n \text{ o } K_1) \geq 2$. Misal lintasan $C_n = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_1]$ dan $K_1 = \{y_1\}$. Maka dapat dibentuk *tree cover* $T_g = \{G_1, G_2\}$ dengan G_1 merupakan graf pohon $(C_n - [x_n, x_1]) \text{ o } K_1$ dan G_2 merupakan graf pohon $[x_n, x_1]$. Sehingga

$t_c(C_n \text{ o } K_1) \leq 2$. Dengan menggabungkan kedua pertidaksamaan tersebut, diperoleh $t_c(C_n \text{ o } K_1) = 2$.

Untuk $m \geq 2$, karena graf $P_n \text{ o } K_m$ mengandung graf K_{m+1}, maka $t_c(P_n \text{ o } K_m) \geq t_c(K_{m+1})$. Misal lintasan $C_n = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_1]$ dan $T_{g_1} = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_k\}$ adalah *tree cover minimum* dari graf K_{m+1}. Maka dapat dibentuk *tree cover* $T_{g_2} = \{G_1, G_2, G_3, \dots, G_k\}$ dengan G_1 merupakan graf pohon $(C_n - [x_n, x_1]) \cup A_1$, dan G_i merupakan graf pohon $(C_n - [x_1, x_2]) \cup A_i$, untuk $i \in 2,3,4, \dots, k$. Sehingga $t_c(P_n \text{ o } C_m) \leq t_c(K_{m+1})$. Dengan menggabungkan kedua pertidaksamaan tersebut, diperoleh $t_c(P_n \text{ o } C_m) = t_c(K_{m+1})$. ■

BAB V

PENUTUP

A. KESIMPULAN

Kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan adalah didapatkannya 6 *tree cover number* pada graf yang diperoleh dari operasi *join* dan *corona* pada graf lengkap, lingkaran dan teratur yaitu *tree cover number* dari graf $P_n \oplus C_m,\ P_n \oplus K_m,\ C_n \oplus K_m,\ P_n \text{ o } C_m,\ P_n \text{ o } K_m,\ C_n \text{ o } K_m$, serta *tree cover number* dari graf lintasan dan graf lengkap itu sendiri, *tree cover number* tersebut yaitu:

1. *Tree cover number* dari graf lintasan P_n adalah
   - $t_c(P_n) = 0$ untuk $n = 1$
   - $t_c(P_n) = 1$ untuk $n > 1$
2. *Tree cover number* dari graf lengkap K_n adalah

$$t_c(K_n) = \begin{cases} 0 & \text{jika } n = 1 \\ \dfrac{n}{2} & \text{jika } n \text{ genap} \\ \dfrac{n+1}{2} & \text{jika } n \text{ ganjil}, n \neq 1 \end{cases}$$

3. *Tree* cover *number* dari graf $P_n \oplus C_3$ adalah

$$t_c(P_n \oplus C_3) = \begin{cases} 2 & \text{jika } n = 1 \\ 3 & \text{jika } n = 2,3 \end{cases}$$

4. *Tree cover number* dari graf $P_n \oplus K_m$ adalah

$$t_c(P_n \oplus K_m) = t_c(K_{m+n}) \text{ jika } n = 1,2$$

5. *Tree cover number* dari graf $C_3 \oplus K_m$ adalah

$$t_c(C_3 \oplus K_m) = t_c(K_{m+n})$$

6. *Tree cover number* dari operasi *corona* graf P_n o C_m adalah
$$t_c(P_n \text{ o } C_m) = 2$$
7. *Tree cover number* dari operasi *corona* graf P_n o C_m adalah
$$t_c(P_n \text{ o } K_m) = t_c(K_{m+1})$$
8. *Tree cover number* dari operasi *corona* graf P_n o C_m adalah
$$t_c(C_n \text{ o } K_m) = \begin{cases} 2 & jika\ m = 1 \\ t_c(K_{m+1}) & jika\ m \geq 2 \end{cases}$$

B. SARAN

Saran agar penelitian yang telah dilakukan supaya menjadi lebih baik pada pengembangan selajutnya sebagai berikut:

1. *Tree cover number* dari operasi join pada graf $P_n \oplus C_m$ baru ditemukan untuk $m = 3$ dengan $n = 1{,}2\ dan\ 3$. Penelitian selanjutnya diharapkan untuk bisa menemukan *tree cover number* pada graf $P_n \oplus C_m$ secara umum.
2. *Tree cover number* dari operasi join pada graf $P_n \oplus K_m$ baru ditemukan untuk $n = 1{,}2$. Penelitian selanjutnya diharapkan untuk bisa menemukan *tree cover number* pada graf $P_n \oplus K_m$ secara umum.

3. *Tree cover number* dari operasi join pada graf $C_n \oplus K_m$ baru ditemukan untuk $n = 3$. Penelitian selanjutnya diharapkan untuk bisa menemukan *tree cover number* pada graf $C_n \oplus K_m$ secara umum.

DAFTAR PUSTAKA

Artes, Rosalio G., Rene D. Dignos. 2014. *Tree Cover of Graph.*, international Journal of Mathematical Analysis. 8(150): 7469 – 7473

Artes, Rosalio G., Rene D. Dignos. 2015. *Tree Cover of the Join and the Corona of Graphs*. International Journal of Mathematical Analysis. 9(12): 597-602

Bozeman, Chassidy, dkk. 2013*. On the tree cover number of a graph*. Jurnal involve. 10(5): 767–779

Diestel, Reinhard. 2005. *Graph Theory.* New York: Springer-VerlagHeidelberg

Epp, Susanna S. 2010. *Discrete Mathematics With Applications,* USA: Cengage learning

Even, G., dkk. 2003. *Min-Max Tree Covers of Graphs.* Operations Research Letters. 32(4): 309-315

G. Chartrand., O.R. Oellermann. 1993. *Applied and Algorithmic Graph The-ory*. New York: McGraw-Hill, Inc.

Johnsonbaugh, Richard. 2009. *Discrete Mathematics.* USA: Pearson Education

Munir, Rinaldi. 2010. *Matematika Diskri.* Bandung: Informatika Bandung

Rosen, Kenneth H. 2012. *Discrete Mathematics and its applications.* New York: McGraw-Hill

West, B. Douglas. 2002. *Graph Theory.* Urbana: University of Illinois

Zed, Mestika 2003. Metode Penelitian Kepustakaan. Jakarta: Yayasan Obor Indonesia

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

- Nama Lengkap : Muhammad Faidlur Rohman
- TTL : Kudus, 11 agustus 1998
- Alamat rumah : Besito 03/06 Gebog Kudus
- HP : 082328840869
- E-mail : faidlur1@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan Formal

1. RA (Lulus 2004)
2. MI Besito (Lulus 2010)
3. MTs NU TBS Kudus (Lulus 2013)
4. MA NU TBS Kudus (Lulus 2016)

Semarang, 18 Juni 2023

Muhammad Faidlur Rohman
NIM: 1608046024