

**ANALISIS PROFIL KECEPATAN DAN MIKOROTASI PADA  
ALIRAN FLUIDA MIKROKUTUB**

**SKRIPSI**

Diajukan untuk Memenuhi Sebagai Syarat  
Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains dalam Ilmu  
Matematika



Oleh:

**Ananik**

NIM : 1908046012

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO SEMARANG  
2023**

## PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini;

Nama : Ananik

NIM : 1908046012

Jurusan : Matematika

Menyatakan bahwa skripsi yang berjudul:

**“Analisis Profil Kecepatan dan Mikrorotasi pada Aliran  
Fluida Mikroktub”**

Secara keseluruhan adalah hasil penelitian atau karya sendiri,  
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 06 Juni 2023

Pembuat Pernyataan,



Ananik

NIM: 1908046012

# PENGESAHAN



KEMENTERIAN AGAMA  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Prof. Dr. Hamka Ngaliyan Semarang  
Telp.024-7601295 Fax.7615387

## PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :


Judul : **Analisis Profil Kecepatan dan Mikrorotasi pada Aliran Fluida Mikroktub**  
Penulis : Ananik  
NIM : 1908046012  
Jurusan : Matematika

Telah diajukan dalam sidang tugas akhir oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.


Semarang, 11 Oktober 2023

DEWAN PENGUJI

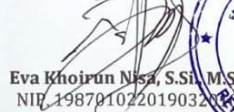
Ketua Sidang,

  
**Mohamad Tafrikan, M.Si.**  
NIP. 198904172019031010

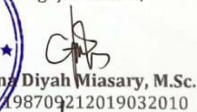
Sekretaris Sidang,

  
**Ulliya Fitriani, S.Pd.I., M.Pd.**  
NIP. 198708082016012901

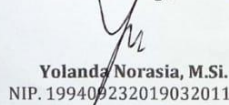
Penguji Utama I,

  
**Eva Khoirun Nisa, S.Si., M.Si.**  
NIP. 198701072019032010

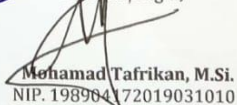
Penguji Utama II,

  
**Gefina Diah Miasary, M.Sc.**  
NIP. 198709212019032010

Pembimbing I,

  
**Yolanda Norasia, M.Si.**  
NIP. 199409232019032011

Pembimbing II,

  
**Mohamad Tafrikan, M.Si.**  
NIP. 198904172019031010

## NOTA DINAS

Semarang, 6 Juni 2023

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Walisongo  
Di Semarang

*Assalamu'alaikum wr.wb.*

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : Analisis Profil Kecepatan dan Mikrorotasi  
pada Aliran Fluida Mikrokutub

Penulis : **Ananik**

NIM : 1908046012

Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diajukan dalam sidang Munaqasyah.

*Wassalamu'alaikum wr.wb*

Pembimbing I



Yolanda Norasia, M. Si.  
NIP. 1994232019032000

## NOTA DINAS

Semarang, 06 Juni 2023

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Walisongo  
Di Semarang

*Assalamu'alaikum Wr. Wb.*

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : Analisis Profil Kecepatan dan Mikrorotasi  
pada Aliran Fluida Mikroktub

Penulis : **Ananik**

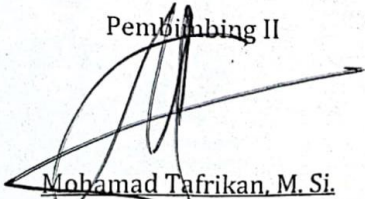
NIM : 1908046012

Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diajukan dalam sidang Munaqasyah.

*Wassalamu'alaikum Wr. Wb*

Pembimbing II

  
Mohamad Tafrikan, M. Si.

NIP: 198904172019031010

## ABSTRAK

Judul : **Analisis Profil Kecepatan dan Mikrorotasi pada Aliran Fluida Mikrokutub**

Nama : Ananik

NIM : 1908046012

Fluida mikrokutub adalah jenis fluida yang terdiri dari komponen kaku dalam media kental dan memiliki kemampuan untuk melakukan mikrorotasi. Ketika fluida ini mengalir melewati permukaan bola, terbentuklah lapisan batas di sekitar penampang benda yang dilalui oleh fluida. Lapisan batas ini terbentuk karena adanya gesekan dan viskositas fluida. Untuk menganalisis lapisan batas ini, persamaan tersebut kemudian diubah menjadi bentuk non-dimensional menggunakan variabel non-dimensional, dan kemudian dikonversi menjadi persamaan similaritas dengan menggunakan fungsi alir. Untuk menyelesaikan persamaan similaritas ini secara numerik, digunakan metode Keller-Box.

Hasil numerik yang diperoleh dari simulasi ini kemudian digunakan untuk memperoleh profil kecepatan ( $f'$ ) dan mikrorotasi ( $h$ ), serta menganalisis pengaruh parameter magnetik ( $M$ ) dan parameter bahan ( $h$ ) terhadap profil-profil

tersebut. Hasil simulasi menunjukkan bahwa semakin besar nilai parameter magnetik, profil kecepatan akan semakin meningkat. Namun, semakin besar nilai parameter bahan, profil kecepatan akan semakin menurun. Selain itu, semakin besar nilai parameter magnetik, profil mikrorotasi akan menurun pada  $n = 0$  dan akan meningkat pada  $n = 0.5$ . Sedangkan, semakin besar nilai parameter bahan, profil mikrorotasi akan semakin menurun.

***Kata Kunci*** : *fluida mikrokutub, lapisan batas, permukaan bola, metode Keller-Box.*

## KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan Rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini guna memperoleh gelar Sarjana Strata Satu (S1). Sholawat dan salam semoga tetap terlimpah kepada Rasulullah Muhammad SAW yang senantiasa memupuk rasa semangat dan keyakinan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Ucapan terimakasih penulis sampaikan kepada semua pihak yang telah memberikan pengarahan, bimbingan dan bantuan yang sangat berarti bagi penulis sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik, maka pada kesempatan kali ini dengan kerendahan hati dan rasa hormat yang dalam penulis haturkan kepada:

1. Bapak Dr. H. Ismail, M. Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi.
2. Ibu Yulia Romadiastri, M. Sc., selaku Ketua Jurusan Matematika.
3. Ibu Emy Siswanah, M. Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika.
4. Bapak Ahmad Aunur Rohman, M. Pd., selaku Sekretaris Program Studi Matematika.



5. Bapak Prihadi Kurniawan, M. Sc., selaku dosen wali yang telah memberikan bimbingan dan arahan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi.
6. Ibu Yolanda Norasia, M. Si., selaku dosen pembimbing pertama yang telah memberikan kritik dan saran bimbingan yang sangat berguna dalam penyusunan skripsi.
7. Bapak Mohamad Tafrikan, M. Si., selaku dosen pembimbing kedua yang telah memberikan kritik dan saran bimbingan yang sangat berguna dalam penyusunan skripsi.
8. Bapak/Ibu dosen dan staf di lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang, khususnya Program Studi Matematika yang telah banyak membantu dan memberikan ilmunya kepada penulis selama kuliah.
9. Teristimewa kepada Orang Tua penulis, Kakak, saudara-saudara dan keluarga yang selalu mendoakan, memberikan motivasi dan pengorbanannya baik dari segi moral maupun materil kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
10. Teman-teman seperjuangan Pondok Pesantren Daarun Najaah 2019 yang telah menemani dan memberikan semangat setiap harinya selama perkuliahan dan proses pembuatan skripsi.

11. Teman-teman seperjuangan Matematika 2019 yang telah memberikan bantuan dan dukungan dalam proses pengerjaan skripsi ini.
12. Teman-teman KKN MIT ke-15 posko 4 Kelurahan Srandol Wetan Kec. Banyumanik Kota Semarang yang telah memberi pengalaman berharga bagi penulis.
13. Teman-teman KAMMAR (Keluarga Alumni Mu'allimin Mu'allimat Rembang) Semarang yang telah memberi banyak motivasi dan dukungan bagi penulis.
14. Semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Demikian ucapan hormat penulis. Semoga Allah SWT membalas jasa-jasa mereka dengan balasan yang setimpal dan semoga skripsi ini dapat bermanfaat untuk pembaca dan sekaligus dapat memberikan masukan dalam penelitian ini.

Semarang, 7 Juni 2023  
Penulis,

**Ananik**  
NIM: 1908046012

## DAFTAR ISI

<b>PERNYATAAN KEASLIAN .....</b>	<b>ii</b>
<b>PENGESAHAN.....</b>	<b>iii</b>
<b>NOTA DINAS .....</b>	<b>iv</b>
<b>NOTA DINAS.....</b>	<b>v</b>
<b>ABSTRAK.....</b>	<b>vi</b>
<b>KATA PENGANTAR.....</b>	<b>viii</b>
<b>DAFTAR ISI .....</b>	<b>xi</b>
<b>DAFTAR GAMBAR.....</b>	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR TABEL .....</b>	<b>xiv</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN.....</b>	<b>xv</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Latar Belakang Masalah .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2 Rumusan Masalah .....</b>	<b>6</b>
<b>1.3 Batasan Penelitian .....</b>	<b>6</b>
<b>1.4 Tujuan Penelitian .....</b>	<b>7</b>
<b>1.5 Manfaat Penelitian .....</b>	<b>7</b>
<b>BAB II LANDASAN PUSTAKA .....</b>	<b>9</b>
<b>2.1 Fluida .....</b>	<b>9</b>
<b>2.2 Fluida Mikrokutub .....</b>	<b>11</b>
<b>2.3 Aliran Fluida Berdasarkan Waktu .....</b>	<b>12</b>
<b>2.4 Lapisan Batas (<i>Boundary Layer</i>).....</b>	<b>14</b>
<b>2.5 Metode Keller-Box.....</b>	<b>15</b>

2.6	Penelitian Terdahulu.....	19
<b>BAB III</b>	<b>METODOLOGI PENELITIAN.....</b>	<b>33</b>
3.1	Jenis Penelitian .....	33
3.2	Tahap Penelitian.....	33
<b>BAB IV</b>	<b>HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN .....</b>	<b>39</b>
4.1	Persamaan Pembangun Dimensional .....	39
4.1.1	Merubah Variabel Dimensi ke Dalam Variabel Tak Berdimensi .....	41
4.1.2	Pendekatan Menggunakan Teori Lapisan Batas .....	47
4.1.3	Fungsi Alir ( <i>Stream Function</i> ) .....	50
4.1.4	Persamaan Similaritas .....	53
4.1.5	Penyelesaian Numerik Model .....	56
4.1.6	Hasil Simulasi Numerik.....	79
<b>BAB V</b>	<b>PENUTUP.....</b>	<b>93</b>
5.1	Kesimpulan.....	93
5.2	Saran .....	95
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>		<b>96</b>
<b>LAMPIRAN.....</b>		<b>99</b>

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 2.1</b> Skema Keller-Box	18
<b>Gambar 4.1</b> Metode Beda Hingga	59
<b>Gambar 4.2</b> Grafik profil kecepatan ( $f'$ ) dengan variasi parameter magnetik ( $M$ ) saat $K = 1, n = 0$	81
<b>Gambar 4.3</b> Grafik profil kecepatan ( $f'$ ) dengan variasi parameter magnetik ( $M$ ) saat $K = 1, n = 0.5$	82
<b>Gambar 4.4</b> Grafik profil kecepatan ( $f'$ ) dengan variasi parameter bahan ( $K$ ) saat $M = 1, n = 0$	84
<b>Gambar 4.5</b> Grafik profil kecepatan ( $f'$ ) dengan variasi parameter bahan ( $K$ ) saat $M = 1, n = 0.5$	85
<b>Gambar 4.6</b> Grafik profil mikrorotasi ( $h$ ) dengan variasi parameter magnetik ( $M$ ) saat $K = 1, n = 0$	86
<b>Gambar 4.7</b> Grafik profil mikrorotasi ( $h$ ) dengan variasi parameter magnetik ( $M$ ) saat $K = 1, n = 0.5$	88
<b>Gambar 4.8</b> Grafik profil mikrorotasi ( $h$ ) dengan variasi parameter bahan ( $K$ ) saat $M = 1, n = 0$	90
<b>Gambar 4.9</b> Grafik profil mikrorotasi ( $h$ ) dengan variasi parameter bahan ( $K$ ) saat $M = 1, n = 0.5$	92

## DAFTAR TABEL

<b>Tabel 2.1</b> Perbedaan dan Persamaan Penelitian Terdahulu dengan Penelitian yang dilakukan	24
---	----

## DAFTAR LAMPIRAN

<b>Lampiran 1:</b> Transformasi Persamaan Pembangun Dimensional ke Persamaan Non-Dimensional	99
<b>Lampiran 2:</b> Perhitungan Kecepatan Aliran Bebas ( <i>Free Stream</i> ) $U_e$ Permukaan Bola	105
<b>Lampiran 3:</b> Perhitungan Persamaan Similaritas	108
<b>Lampiran 4:</b> List Program dengan MATLAB	116

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

### **1.1 Latar Belakang Masalah**

Fluida merupakan suatu zat yang dapat mengalami perubahan bentuk secara terus-menerus saat terkena gaya gesekan. Berdasarkan karakteristiknya, fluida cair dapat dikategorikan menjadi dua jenis, yaitu fluida Newtonian dan fluida non-Newtonian. Fluida Newtonian adalah jenis fluida di mana kurva tegangan yang terbentuk linear dan viskositas (kekentalan) fluida tetap konstan ketika gaya diberikan ke fluida tersebut. Contoh fluida Newtonian termasuk air, minyak, dan udara. Fluida non-Newtonian merupakan jenis fluida yang memiliki kurva tegangan yang tidak berbentuk linear dan viskositas (kekentalan) yang tidak konstan ketika fluida tersebut mengalami gaya yang diberikan. Contoh dari fluida non-Newtonian adalah fluida mikrokutub (Elseth, 2001).

Dalam Islam, terdapat ayat Al-Qur'an yang mencerminkan prinsip ilmiah bahwa dalam alam, ada berbagai jenis fluida yang dapat memiliki karakteristik yang berbeda dan bertemu satu sama lain, yang dijelaskan dalam Q.S. Al-Furqan ayat 53:



:

وهو الذي مرج البحرين هذا عذب فرات وهذا ملح اجاج وجعل بينهما  
برزخا وحجرا محجورا

Yang artinya: *“Dan Dialah yang membiarkan dua laut yang mengalir (berdampingan); yang ini tawar lagi segar dan yang lain asin lagi pahit; dan Dia jadikan antara keduanya dinding dan batas yang menghalangi.”*

Ayat tersebut menjelaskan fenomena geografis terkait dengan perjumpaan dua jenis air, yaitu air payau (tawar) dan air laut (asin). Ayat ini mengilustrasikan bahwa dalam alam, kita sering menemui fenomena di mana dua jenis fluida atau larutan dengan sifat yang berbeda bisa bertemu. Hal ini sesuai dengan kerangka pemikiran dalam penelitian tentang fluida mikrokutub non-Newtonian, di mana penelitian dilakukan pada campuran atau larutan yang menggabungkan berbagai jenis bahan, seperti mikrokutub, dalam satu medium cair yang mungkin memiliki sifat reologis yang kompleks.

Fluida mikrokutub adalah jenis fluida yang terdiri dari partikel-partikel kaku dengan orientasi acak didalam medium kental dan memiliki kemampuan untuk mengalami mikrorotasi (Haque dkk, 2011). Sehingga menimbulkan banyak penelitian untuk melakukan pengembangan tentang teori fluida, salah satunya yaitu mengenai tentang akibat mikrorotasi terhadap fluida.

Penelitian tentang fluida mikrokutub sudah banyak dilakukan oleh beberapa peneliti. Salah satu contohnya adalah penelitian yang dilakukan oleh Rita (2016) mengenai fluida mikrokutub tak tunak magnetohidrodinamik pada lapisan batas yang mengalir melalui bola teriris. Selanjutnya, Rahma (2017) melakukan penelitian mengenai fluida mikrokutub yang membahas konveksi paksa terjadi ketika aliran fluida magnetohidrodinamik tak tunak mengalir melalui sebuah bola berpori. Selanjutnya, Rizky (2017) melakukan penelitian tentang fluida mikrokutub yang membahas fenomena magnetohidrodinamik tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub dengan adanya pengaruh medan magnet. Kemudian, Charisma (2018) melakukan penelitian mengenai fluida mikrokutub yang membahas aliran fluida magnetohidrodinamik pada bola berpori yang dipengaruhi oleh konveksi campuran dan medan magnet. Kemudian, Fauziyah (2018) sedang melakukan penelitian yang berfokus pada karakterisasi magnetohidrodinamik pada fluida mikrokutub tak tunak. Penelitiannya melibatkan aliran fluida mikrokutub yang mengalir melalui bola dan dipengaruhi oleh konveksi campuran. Dalam penelitiannya, Fauziyah menggunakan skema

Euler implisit sebagai metode numerik untuk menganalisis fenomena ini. Penelitian tentang fluida mikrokutub selanjutnya dilakukan oleh Rahayu (2018), penelitian ini tentang magnetohidrodinamik tak tunak dengan konveksi paksa pada fluida mikropolar yang melewati bola berpori. Penelitian selanjutnya dilakukan oleh Yolanda dkk (2022), yang membahas tentang aliran cairan viskos laminar dengan kemampuan rotasi mikro yang melewati permukaan silinder.

Penelitian terkait tentang fluida non-Newtonian mikrokutub belum banyak dilakukan oleh peneliti. Oleh karena itu, penelitian ini fokus pada analisis profil kecepatan dan mikrorotasi dalam aliran fluida mikrokutub yang melintasi permukaan bola.

Kecepatan sendiri merupakan perubahan posisi suatu objek persatuan waktu. Dalam konteks mekanika fluida, kecepatan menggambarkan seberapa cepat suatu partikel fluida bergerak dalam aliran fluida. Kecepatan dapat dinyatakan dalam berbagai satuan, seperti meter per detik ( $\frac{m}{s}$ ) atau sentimeter per detik ( $\frac{cm}{s}$ ), tergantung pada skala dan tujuan pada pengukuran (Bruce R, 2009).

Profil kecepatan merupakan kecepatan partikel-partikel fluida dalam suatu aliran. Ini menggambarkan bagaimana kecepatan berubah sepanjang jarak atau

posisi tertentu dalam saluran atau aliran fluida. Profil kecepatan dapat berubah tergantung pada faktor-faktor seperti bentuk geometri saluran, viskositas fluida, dan gaya yang bekerja pada fluida (Bruce R, 2009).

Mikrorotasi sendiri merupakan rotasi kecil atau mikrokopis dari partikel-partikel dalam aliran fluida. Ketika suatu partikel berada dalam aliran fluida, gaya-gaya seperti viskositas dapat menyebabkan partikel tersebut mengalami gerakan rotasi kecil disekitar sumbu tertentu (Bruce R, 2009).

Profil mikrorotasi menggambarkan bagaimana mikrorotasi partikel-partikel dalam aliran fluida berubah sepanjang jarak atau posisi tertentu dalam saluran atau aliran. Seperti profil kecepatan, profil mikrorotasi juga bisa berubah tergantung pada geometri saluran, viskositas fluida, dan karakteristik aliran (Bruce R, 2009).

Fluida yang digunakan dalam penelitian ini adalah fluida mikroktub non-Newtonian yang mengalir melalui permukaan bola dengan dipengaruhi oleh parameter bahan dan magnetik, termasuk konsentrasi pekat dan konsentrasi setengah pekat. Dalam penelitian ini peneliti memilih fluida mikroktub non-Newtonian karena fluida mikroktub non-Newtonian memiliki sifat aliran yang khusus dan kompleks yang lebih umum

ditemukan dalam aplikasi nyata seperti nanoteknologi, biologi seluler, dan industri farmasi. Oleh karena itu, penelitian tentang fluida ini memiliki aplikasi yang lebih langsung dan relevan dalam berbagai industri (Johnson, 2020). Selanjutnya, untuk menyelesaikan permasalahan secara numerik, digunakan metode *Keller-Box* dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan uraian latar belakang sebelumnya, dapat merumuskan masalah penelitian sebagai berikut:

1. Bagaimana cara mengembangkan model matematika untuk menggambarkan aliran fluida mikrokutub non-Newtonian melalui permukaan bola?
2. Bagaimana profil kecepatan dan profil mikrorotasi pada model aliran fluida mikrokutub non-Newtonian yang diselesaikan secara numerik dengan menggunakan skema *Keller-Box*?

## **1.3 Batasan Penelitian**

Dalam kerangka penelitian ini, terdapat beberapa batasan yang diberlakukan, yaitu:

1. Fluida yang digunakan dalam penelitian ini adalah fluida mikrokutub non-Newtonian.

2. Untuk mendapatkan solusi numerik, digunakan skema *Keller-Box* dengan bantuan perangkat lunak MATLAB.
3. Objek yang digunakan dalam penelitian ini adalah permukaan berbentuk bola.
4. Penelitian ini difokuskan pada sistem tak tunak (*unsteady*).
5. Parameter yang digunakan adalah parameter bahan dan magnetik.

#### **1.4 Tujuan Penelitian**

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mencapai beberapa hal berikut:

1. Mengembangkan model matematika untuk menggambarkan aliran fluida non-Newtonian melalui permukaan bola.
2. Menganalisis profil kecepatan dan profil mikrorotasi pada aliran fluida mikrokutub non-Newtonian.

#### **1.5 Manfaat Penelitian**

Melalui penelitian ini, diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam pengembangan ilmu matematika terapan, khususnya dalam pemodelan matematika untuk permasalahan aliran fluida mikrokutub non-Newtonian yang melalui permukaan bola dengan mempertimbangkan parameter bahan dan

magnetik, serta konsentrasi pekat dan konsentrasi setengah pekat menggunakan metode *Keller-Box*.

## **BAB II**

### **LANDASAN PUSTAKA**

#### **2.1 Fluida**

Fluida adalah suatu zat yang mampu mengalami perubahan bentuk secara terus-menerus ketika terkena tegangan geser, bahkan dalam keadaan tegangan geser sangat kecil. Tegangan geser sendiri adalah rasio antara gaya geser dan luas permukaan atau luas bidang geser ketika terdapat gaya geser yang bekerja. Sedangkan gaya geser adalah komponen dari gaya yang dapat berinteraksi dengan permukaan (Elseth, 2001).

Di dalam fluida terdapat dua sifat yang sangat penting yaitu sifat kepadatan atau yang sering disebut dengan densitas dan sifat kekentalan atau yang sering disebut dengan viskositas. Viskositas merupakan sebuah sifat dari fluida yang menunjukkan sejauh mana fluida tersebut memberikan hambatan terhadap tegangan geser yang bekerja pada fluida tersebut. Viskositas fluida dapat bervariasi tergantung pada suhu fluida tersebut, baik suhu tinggi maupun suhu rendah. Karakter fluida cair adalah bahwa viskositasnya cenderung menurun ketika suhunya meningkat. Di sisi lain, karakteristik fluida gas adalah bahwa viskositasnya cenderung meningkat seiring dengan peningkatan suhu. Dalam konteks ini,



densitas atau kerapatan suatu fluida dapat didefinisikan sebagai perbandingan antara massa fluida tersebut dengan volume yang ditempatinya (Elseth, 2001).

Berdasarkan karakteristiknya, fluida dapat dibagi menjadi dua yaitu:

#### 2.1.1 Fluida Newtonian

Fluida Newtonian adalah jenis fluida yang memiliki viskositas yang konstan dan mengikuti kurva tegangan yang linier ketika diberikan gaya. Contoh-contoh fluida Newtonian meliputi air, minyak, dan udara. Salah satu sifat khas fluida adalah kemampuannya untuk tetap mengalir meskipun ada gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Karena sifat ini, nilai viskositas fluida tetap konstan walaupun terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Perubahan pada viskositas fluida terjadi hanya jika terdapat perubahan pada tekanan dan suhu fluida tersebut (Fox & McDonal, 2011).

#### 2.1.2 Fluida non-Newtonian

Fluida non-Newtonian merupakan jenis fluida yang memiliki viskositas yang tidak konstan dan mengikuti kurva tegangan yang tidak linier ketika diberikan gaya, berbeda dengan fluida Newtonian. Berdasarkan aliran, fluida non-Newtonian tidak

mengikuti hukum aliran Newtonian yang berlaku untuk fluida Newtonian. Ketika fluida non-Newtonian mengalami gaya yang bekerja, aliran fluida tersebut tidak berlangsung secara terus-menerus. Akibatnya, viskositas fluida tersebut dapat mengalami perubahan atau tidak bersifat konstan. Salah satu contoh dari fluida non-Newtonian adalah fluida mikrokutub. Fluida mikrokutub memiliki sifat viskositas yang tidak linier dan dapat berubah tergantung pada kekuatan yang bekerja padanya. Pada penelitian ini, akan digunakan fluida mikrokutub sebagai objek penelitian. Fluida mikrokutub termasuk dalam kategori fluida non-Newtonian, yang berarti viskositasnya tidak konstan dan dapat bergantung pada kekuatan (Fox & McDonal, 2011).

## **2.2 Fluida Mikrokutub**

Seperti yang dijelaskan pada bagian sebelumnya, fluida mikrokutub adalah salah satu fluida non-Newtonian yang terdiri dari partikel kaku yang tersebar dalam medium kental. Fluida mikrokutub adalah fluida dengan struktur mikro. Fluida mikrokutub bersifat kaku, partikel berorientasi acak dengan dirinya sendiri dan mikrorotasi, tergantung pada medium viskositas. Dalam

fluida mikrokutub, partikel yang kaku termuat didalam elemen kecil volume yang dapat berotasi dipusat elemen volume, hal ini dideskripsikan sebagai vektor mikrorotasi (Haque dkk, 2011).

## 2.3 Aliran Fluida Berdasarkan Waktu

Selanjutnya akan dibahas tentang jenis aliran fluida yang mengalami perubahan berdasarkan waktu. Menurut Bruce R (2009) aliran fluida ini dibagi menjadi dua yaitu:

### 2.3.1 Aliran Tunak (*Steady State*)

Aliran tunak adalah jenis aliran fluida dimana kecepatan aliran tidak dipengaruhi oleh waktu. Pada jenis aliran ini, berlaku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

Disini,  $\frac{\partial u}{\partial t}$  adalah turunan parsial kecepatan ( $u$ ) terhadap waktu ( $t$ ). Jadi, jika turunan ini sama dengan nol, itu menunjukkan bahwa aliran adalah aliran tunak.

Ini berarti bahwa pada setiap titik dalam ruang, kecepatan aliran tetap konstan sepanjang waktu. Dengan kata lain, tidak ada perubahan dalam kecepatan aliran terhadap waktu.

### 2.3.2 Aliran Tak Tunak (*Unsteady State*)

Aliran tak tunak adalah jenis aliran fluida dimana kecepatan aliran dipengaruhi oleh waktu. Pada jenis aliran ini, berlaku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0 \quad (2.2)$$

Disini,  $\frac{\partial u}{\partial t}$  adalah turunan parsial kecepatan ( $u$ ) terhadap waktu ( $t$ ). Jadi, jika turunan ini tidak sama dengan nol, itu menunjukkan bahwa aliran adalah aliran tak tunak.

Ini berarti bahwa kecepatan aliran tidak tetap konstan, dan ada perubahan dalam kecepatan aliran seiring berjalannya waktu.

Jadi, perbedaan utama antara aliran tunak dan aliran tak tunak terletak pada bagaimana kecepatan aliran berubah seiring waktu. Dalam aliran tunak, kecepatan tetap konstan, sedangkan dalam aliran tak tunak, kecepatan berubah sepanjang waktu.

Namun pada penelitian ini, difokuskan pada sistem tak tunak (*unsteady*). Dalam memahami tentang dinamika fluida mikrokutub, penting untuk mempertimbangkan karakteristik aliran lapisan batas yang memiliki dampak signifikan.

## 2.4 Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

Konsep lapisan batas pertama kali dikemukakan oleh ilmuwan Jerman, Prandtl, pada tahun 1904. Lapisan batas merupakan suatu lapisan tipis pada permukaan padat yang dilewati oleh fluida saat mengalir. Lapisan batas dipengaruhi oleh viskositas dan gaya inersia beda tersebut. Pada dasarnya lapisan batas membagi daerah aliran sekitar benda ke dalam dua domain, yaitu 1) lapisan tipis yang meliputi permukaan benda tersebut dimana gradien kecepatan dan gaya viskosnya besar dan 2) daerah diluar lapisan batas tersebut yang mana kecepatan hampir sama dengan nilai aliran bebas (*free-stream*) serta efek viskositas dapat diabaikan.

Dengan memakai konsep lapisan batas, persamaan gerak yang biasanya disebut Navier-Stoke, dapat diturunkan ke bentuk yang dapat diselesaikan. Pengaruh viskositas terdapat aliran batas ditentukan dan koefisien gesekan sepanjang permukaan benda dapat dihitung (Imron dkk, 2011)

Bilangan Reynold untuk suatu aliran fluida dapat dihitung dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$R_e = \frac{U_\infty a}{\nu}$$

dengan:

$R_e$  = Bilangan Reynolds

$U_{\infty}$  = Kecepatan pada aliran bebas ( $\frac{m}{s}$ ) atau  $\frac{meter}{detik}$

$a$  = Panjang karakteristik

$\nu$  = Viskositas kinematik

Proses tranfer yang berlangsung pada fluida dan benda padat adalah momentum massa dan perpindahan panas. Pada saat memformulasikan hukum kekekalan massa, momentum, dan energi, hukum termodinamik dan gas dinamik juga harus diperhatikan. Sehingga dapat disimpulkan bahwa bersama dengan aliran *boundry layer*, ada juga *thermal boundary layer* dan pengaruh timbal balik dari lapisan-lapisan batas lain juga harus diperhitungkan. Teori mengenai lapisan batas digunakan pada berbagai ilmu teknis sains, seperti hidrodinamik, aerodinamik, automobile, dan teknik (Hussanan, 2014)

## 2.5 Metode Keller-Box

Metode Keller-Box merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan lapisan batas yang terjadi pada permukaan parabola. Metode ini memungkinkan kita untuk memperoleh solusi numerik yang akurat dengan membagi domain permasalahan menjadi elemen-elemen kecil yang saling terhubung. Dengan menggunakan teknik ini, kita dapat mengestimasi profil kecepatan dan distribusi tekanan pada permukaan parabola secara efektif. Skema ini

merupakan bentuk implisit dengan ketelitian orde kedua, baik dalam dimensi ruang maupun waktu, yang memungkinkan adanya resolusi yang berbeda antara waktu dan ruang. Dalam penyelesaian permasalahan lapisan batas menggunakan metode Keller-Box, terdapat beberapa langkah yang dapat diikuti, antara lain:

1. Salah satu langkah penting dalam penyelesaian permasalahan lapisan batas dengan menggunakan metode Keller-Box adalah mengubah bentuk persamaan diferensial orde dua atau orde tinggi menjadi persamaan diferensial orde satu. Dengan melakukan transformasi ini, dapat diubah persamaan yang kompleks menjadi bentuk yang lebih sederhana, yang lebih mudah untuk dipecahkan menggunakan metode numerik. Langkah ini memungkinkan untuk diterapkan metode Keller-Box dengan lebih efisien dan mendapatkan solusi yang akurat untuk permasalahan lapisan batas pada permukaan parabola.

Langkah yang digunakan yaitu menggunakan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial parsial adalah persamaan matematis yang mengandung turunan parsial dari satu atau lebih variabel terhadap satu atau lebih variabel lainnya.

Berikut adalah contoh pengubah persamaan diferensial orde dua menjadi persamaan diferensial orde satu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial}{\partial x}(v) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

dengan didefinisikan

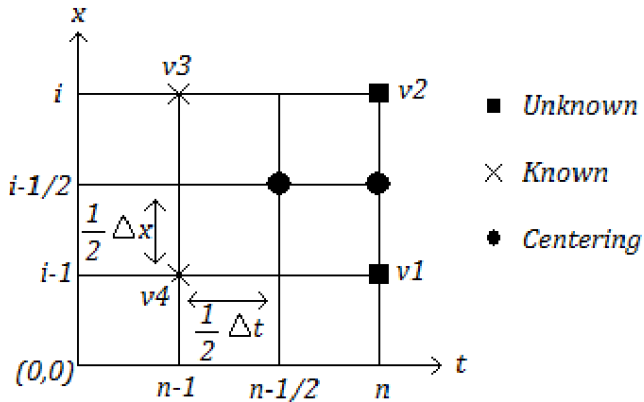
$$v = \frac{\partial u}{\partial x}$$

2. Langkah selanjutnya adalah menerapkan diskritisasi pada model matematika tersebut dengan menggunakan metode beda hingga pusat terhadap sumbu- $x$  dan sumbu- $y$ . Dengan menerapkan metode beda hingga pusat, dapat diaproksimasi turunan parsial dalam persamaan dengan menggunakan perbedaan nilai di sekitar titik diskrit. Hal ini memungkinkan penyelesaian numerik model matematika dalam bentuk diskrit, yang dapat diimplementasikan dengan menggunakan algoritma komputasi.



3. Langkah berikutnya adalah melakukan linierisasi persamaan-persamaan yang telah diperoleh dengan menggunakan metode Newton. Hasil linierisasi tersebut kemudian disajikan dalam bentuk matriks vektor.
4. Pada tahap akhir, solusi dari proses linierisasi tersebut dihasilkan menggunakan pendekatan eliminasi matriks dengan struktur blok tridiagonal

Berikut ini adalah contoh skema Keller-Box:



**Gambar 2.1** Skema Keller-Box (Al-Shibani dkk, 2012)

Di misalkan bahwa

$$u = f'$$

Untuk titik  $(n, i - \frac{1}{2})$  berada diantara  $v_1, v_2,$

Sedangkan untuk titik  $(n - \frac{1}{2}, i - \frac{1}{2})$  berada diantara

$v_1, v_2, v_3, v_4$

Maka menghasilkan

$$u_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\nabla x} \quad (2.8)$$

yang merupakan bentuk diskrit dari perubahan kecepatan terhadap posisi yaitu:

$$u_\eta = \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

Sedangkan untuk

$$u_i^{n-\frac{1}{2}} = \frac{f_i^n - f_i^{n-1}}{\nabla t} \quad (2.9)$$

yang merupakan bentuk diskrit dari perubahan kecepatan terhadap waktu yaitu:

$$u_t = \frac{\partial f}{\partial t}$$

## 2.6 Penelitian Terdahulu

Beberapa penelitian terdahulu yang dapat ditinjau dalam penelitian ini meliputi:

### 1. Rita Ayu Ningtyas pada Tahun 2016

Penelitian ini difokuskan pada analisis aliran fluida mikrokutub tak tunak magnetohidrodinamik yang melintasi permukaan bola yang memiliki irisan. Dalam penelitian ini, ditemukan bahwa ketika parameter magnetik dan sudut irisannya semakin besar, terjadi peningkatan dalam profil kecepatan aliran fluida mikrokutub. Hal yang sama berlaku untuk profil mikrorotasi, dimana semakin besar

parameter magnetik dan sudut irisannya, profil mikrorotasi akan menurun atau semakin kecil pada nilai  $n = 0$ , dan akan meningkat atau semakin besar pada nilai  $n = 0.5$ .

2. Nadya Alvi Rahma pada Tahun 2017

Dalam penelitian ini, dilakukan analisis perbandingan beberapa parameter yang meliputi parameter magnetik, bilangan Prandtl, konveksi paksa, porositas, dan permeabilitas. Dalam penelitian ini, sebuah model matematika dikembangkan untuk mempelajari konveksi paksa dari aliran fluida magnetohidrodinamik tidak tunak yang melewati bola berpori. Dalam analisis tersebut, kurva kecepatan dan temperatur dihasilkan. Dalam penelitian ini, metode Keller-Box digunakan untuk melakukan penyelesaian numerik. Hasil simulasi menunjukkan bahwa terjadi peningkatan kurva kecepatan seiring dengan meningkatnya parameter magnetik, konveksi paksa, dan parameter porositas. Sedangkan, terdapat kecenderungan bahwa kurva kecepatan menurun seiring dengan peningkatan parameter permeabilitas.

3. Rizky Verdyanto Pratomo pada Tahun 2017

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji fenomena magnetohidrodinamik yang tidak tunak terjadi pada lapisan batas saat aliran fluida mikrokutub melintasi bola di dalam medium dan berada di bawah pengaruh medan magnet. Dalam penelitian ini, ditemukan bahwa semakin meningkatkan parameter magnetik pada aliran fluida mikrokutub akan berakibat pada peningkatan profil kecepatan. Selain itu, saat parameter bahan meningkat, profil kecepatan pada aliran fluida mikrokutub akan cenderung menurun, sedangkan peningkatan parameter magnetik akan berdampak sebaliknya, yaitu meningkatkan profil kecepatan. Maka pada profil mikrorotasinya akan semakin besar jika untuk nilai  $n = 0.5$  dan nilai  $n = 1$  semakin membesar pada parameter magnetiknya.

4. Charisma Juni K pada Tahun 2018

Dalam penelitian ini mengkaji tentang fluida magnetohidrodinamik mikrokutub yang melewati bola berpori yang dipengaruhi oleh medan magnet dan konveksi campuran. Pada penelitian menghasilkan semakin membesar parameter magnetiknya, bilangan Prandtlnya, parameter

porositasnya serta parameter mikropolarnya maka akan menghasilkan kecepatan fluida yang semakin menurun, sedangkan pada profil mikrorotasinya apabila semakin meningkat lalu menurun maka temperaturnya akan semakin menurun.

5. Mufatin Fauziah pada Tahun 2018

Dalam penelitian ini, dilakukan karakterisasi magnetohidrodinamik pada fluida mikrokutub tidak tunak yang dialirkan melalui bola dan dipengaruhi oleh konveksi campuran. Metode yang sedang digunakan dalam penelitian ini adalah skema Euler implisit. Pada penelitian ini menghasilkan bahwa nilai dari parameter konveksi campuran akan meningkat jika kecepatan semakin besar. Apabila bilangan Prandtl, parameter pada bahan mikro dan parameter magnetik semakin bertambah maka kecepatan akan semakin mengecil. Jika parameter pada konveksi campuran dan bahan mikrokutub akan semakin membesar maka temperatur pada fluida akan semakin tinggi. Begitupun sebaliknya, apabila bilangan Prandtl dan parameter pada magnetik bertambah maka temperatur akan semakin rendah. Apabila bilangan Prandtl dan parameter pada magnetiknya meningkat maka profil

mikrorotasi akan meningkat pula. Apabila pada parameter konveksi campuran semakin meningkat maka profil mikrorotasi akan semakin menurun. Dan apabila profil mikrorotasi makin rendah sampai pada titik tertentu dan kemudian membalik menjadi semakin meninggi maka akan semakin besar parameter bahan pada mikroktub.

6. Rahayu Oktavia Putri pada Tahun 2018

Dalam penelitian ini akan mengkaji tentang fluida magnetohidrodinamik tidak tunak dengan menggunakan konveksi paksa yang terdapat pada fluida mikropolar dan melalui bola berpori yang bermagnet. Pada penelitian ini menghasilkan ketika terdapat parameter magnetik, parameter porositas, dan mikropolar meningkat maka simulasi akan menunjukka kurva kecepatannya menurun. Dan apabila parameter pada magnetik, parameter porositas, dan parameter mikropolar meningkat maka kurva pada mikrorotasi dan temperaturnya akan meningkat pula. Namun, apabila nilai Prandtl meningkat maka kurva temperaturnya akan menurun.

7. Yolanda Norasia, dkk pada Tahun 2022

Dalam penelitian ini mengkaji tentang cairan viskos laminar dengan kemampuan rotasi mikro yang melewati permukaan silinder. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa kecepatan dan temperatur aliran fluida kental dapat dipengaruhi oleh parameter viskositas, bahan rotasi mikro, dan sumber panas. Adanya tumbukan antar partikel panas menyebabkan peningkatan varians parameter viskositas, bahan rotasi mikro, dan sumber panas. Oleh karena itu, kecepatan fluida kental berkurang dan suhunya meningkat.

Dalam beberapa penelitian terdahulu, terdapat beberapa persamaan dan perbedaan yang relevan dengan penelitian yang akan dilakukan. Informasi lebih lanjut dapat dilihat dalam Tabel 2.1.

**Tabel 2.1** Perbedaan dan Persamaan Penelitian Terdahulu dengan Penelitian yang dilakukan

	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
1.	Rita Ayu Ningtyas (2016) <i>"Aliran Fluida"</i>	a. Sama-sama menggunakan fluida mikrokutub.	a. Media yang digunakan pada penelitian terdahulu yaitu

	<p><i>Mikrokutub Tak Tunak Magnetohidrodinamik Pada Lapisan Batas Yang Melewati Bola Teriris”</i></p>	<p>b. Sama-sama dipengaruhi oleh magnetik dan parameter bahan.</p> <p>c. Cara penyelesaiannya sama-sama menggunakan metode Keller-Box.</p>	<p>bola teriris, sedangkan pada penelitian ini menggunakan permukaan bola.</p> <p>b. Pada penelitian terdahulu dipengaruhi oleh sudut iris, magnetik, dan parameter bahan sedangkan pada penelitian ini dipengaruhi oleh parameter bahan dan magnetik.</p>
2.	<p>Nadya Alvi Rahma (2017)</p> <p><i>“Konveksi Paksa Dari Aliran Fluida Magnetohidrodinamik Tak Tunak Yang Melalui Bola Berpori”</i></p>	<p>a. Sama-sama dipengaruhi oleh magnetik.</p> <p>b. Cara penyelesaiannya sama-sama menggunakan metode Keller-Box.</p>	<p>a. Pada penelitian terdahulu menggunakan fluida magnetohidrodinamik tak tunak. Sedangkan pada penelitian ini menggunakan fluida mikrokutub.</p>



			<p>b. Pada penelitian sebelumnya, media yang digunakan adalah bola yang telah teriris. Namun, pada penelitian ini, digunakan permukaan bola sebagai media yang relevan.</p> <p>c. Pada penelitian terdahulu dipengaruhi oleh magnetik, bilangan Prandtl, konveksi paksa, porositas, dan permeabilitas. Sedangkan pada penelitian ini dipengaruhi oleh parameter bahan dan magnetik.</p>
3.	Rizky Verdyanto Pratomo (2017)	a. Sama-sama menggunakan	a. Media yang digunakan pada

	<p><i>“Magnetohidrodinamik Yang Tak Tunak Pada Lapisan Batas Yang Mengalir Melalui Bola Di Dalam Fluida Mikrokatub Di Bawah Pengaruh Medan Magnet”</i></p>	<p>fluida mikrokatub.</p> <p>b. Sama-sama dipengaruhi oleh magnetik dan parameter bahan.</p> <p>c. Cara penyelesaiannya sama-sama menggunakan metode Keller-Box</p>	<p>penelitian terdahulu yaitu bola. Sedangkan pada penelitian ini menggunakan permukaan bola.</p>
4.	<p>Charisma Juni K (2018)</p> <p><i>“Aliran Fluida Magnetohidrodinamik Mikrokatub Yang Melalui Bola Berpori Dipengaruhi Oleh Konveksi Campuran Dan Medan Magnet”</i></p>	<p>a. Sama-sama menggunakan fluida mikrokatub.</p> <p>b. Sama-sama dipengaruhi oleh magnetik.</p> <p>c. Cara penyelesaiannya sama-sama menggunakan metode Keller-Box.</p>	<p>a. Dalam penelitian sebelumnya, media yang digunakan adalah bola berpori. Namun, dalam penelitian ini, digunakan permukaan bola sebagai media yang diteliti.</p> <p>b. Pada penelitian terdahulu dipengaruhi oleh magnetik, bilangan Prandtl, dan porositas, dan</p>

			<p>mikropolar. Sedangkan pada penelitian ini dipengaruhi oleh parameter bahan dan magnetik.</p>
5.	<p>Mufatin Fauziyyah (2018)</p> <p><i>“Karakterisasi Magnetohidrodinamik Fluida Mikrokatub Tak Tunak Yang Melewati Bola Dipengaruhi Konveksi Campuran Menggunakan Skema Implisit Euler”</i></p>	<p>a. Sama-sama menggunakan fluida mikrokatub.</p> <p>b. Sama-sama dipengaruhi oleh magnetik.</p>	<p>a. Pada penelitian sebelumnya, media yang digunakan adalah bola sebagai objek penelitian. Namun, dalam penelitian ini, kami memfokuskan pada eksplorasi dan analisis yang berkaitan dengan permukaan bola itu sendiri.</p> <p>b. Pada penelitian terdahulu dipengaruhi oleh konveksi campuran, bilangan Prandtl, bahan mikro, dan magnetik. Sedangkan pada</p>

			<p>penelitian ini dipengaruhi oleh parameter bahan dan magnetik.</p> <p>c. Cara penyelesaian pada penelitian terdahulu menggunakan metode beda hingga skema implisit Euler. Sedangkan pada penelitian ini menggunakan metode Keller-Box.</p>
6.	<p>Rahayu Oktavia Putri (2018)</p> <p><i>"Magnetohidrodinamik Tak Tunak Dengan Konveksi Paksa Pada Fluida Micropolar Yang Melalui Bola Berpori"</i></p>	<p>a. Sama-sama menggunakan fluida mikrokutub.</p> <p>b. Sama-sama dipengaruhi oleh magnetik.</p> <p>c. Cara penyelesaiannya sama-sama menggunakan metode Keller-Box.</p>	<p>a. Dalam penelitian sebelumnya, media yang digunakan adalah bola yang memiliki pori-pori. Namun, dalam penelitian ini, fokus tertuju pada penelitian yang berhubungan dengan sifat dan karakteristik</p>

			<p>permukaan bola.</p> <p>b. Pada penelitian terdahulu dipengaruhi oleh parameter magnetik, porositas, mikropolar, bilangan Prandtl, dan konveksi paksa. Sedangkan pada penelitian ini dipengaruhi oleh parameter bahan dan magnetik.</p>
7.	<p>Yolanda Norasia dkk (2022)</p> <p><i>"Laminar Viscous Fluid Flow with Micro-rotation Capabilities through Cylindrical Surface"</i></p>		<p>a. Dalam penelitian sebelumnya, media yang digunakan adalah permukaan silinder sebagai objek penelitian. Namun, dalam penelitian ini, dirubah fokus dan menggunakan permukaan bola sebagai media yang relevan</p>

			<p>untuk mendapatkan wawasan baru.</p> <p>b. Pada penelitian terdahulu mengkaji tentang cairan viskositas laminar. Sedangkan pada penelitian ini mengkaji tentang fluida mikrotab.</p> <p>c. Pada penelitian terdahulu dipengaruhi oleh parameter viskositas, bahan rotasi mikro, dan sumber panas. Sedangkan pada penelitian ini dipengaruhi oleh parameter bahan dan magnetik.</p> <p>d. Pada penelitian terdahulu cara penyelesaiannya menggunakan metode Gauss-</p>
--	--	--	---

			Seidel. Sedangkan pada penelitian ini cara penyelesaiannya menggunakan metode Keller-Box.
--	--	--	--

## **BAB III**

### **METODOLOGI PENELITIAN**

#### **3.1 Jenis Penelitian**

Jenis penelitian ini adalah studi literatur dengan pemodelan matematika.

#### **3.2 Tahap Penelitian**

Berikut adalah beberapa tahapan yang dapat dilakukan dalam penelitian ini:

##### **3.2.1 Studi Literatur**

Pada tahap ini, dilakukan studi terhadap model matematika yang menggambarkan aliran fluida mikrokutub yang mengalir melalui permukaan bola. Pada setiap model matematika memiliki sifat dan karakteristik yang berbeda, sehingga untuk mengembangkan bentuk model matematika yang sesuai dengan tujuan penelitian, perlu dilakukan analisis dan studi mendalam terlebih dahulu.

##### **3.2.2 Penyelesaian Model Matematika**

Pada tahap ini, peneliti melakukan beberapa langkah penting dalam menyelesaikan model matematika, yang meliputi:

- a. Dalam penelitian ini, digunakan beberapa persamaan pembangun untuk membentuk



model matematika tentang aliran fluida yang melalui permukaan bola. Adapun dalam penelitian ini, digunakan beberapa yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum linier dan persamaan momentum angular. Berikut uraian persamaan aliran fluida dalam kondisi tak tunak (*unsteady*), yang diambil dari penelitian sebelumnya yaitu (Fauziyah, 2018):

1. Persamaan Kontinuitas:

$$\frac{\partial \bar{r}\bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{r}\bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (3.1)$$

2. Persamaan Momentum Linier

a. Persamaan momentum linier pada sumbu - x

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma B_0^2 \bar{u} + k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \quad (3.2)$$

b. Persamaan momentum linier pada sumbu - y

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} +$$

$$(\mu + k) \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma B_0^2 \bar{v} - k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}}$$

(3.3)

### 3. Persamaan Momentum Angular

$$\rho j \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) = \gamma \left( \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) -$$

$$k \left( 2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)$$

(3.4)

- c. Melakukan penentuan kondisi batas yang relevan untuk persamaan-persamaan dasar model yang telah dikaji, khususnya pada aliran fluida yang melintasi permukaan bola.
- d. Kemudian dilakukan penyederhanaan terhadap persamaan-persamaan dasar yang memiliki dimensi, dengan melakukan substitusi variabel-variabel tak berdimensi untuk mendapatkan persamaan-persamaan tak berdimensi yang lebih sederhana.
  - a. Penyederhanaan dilakukan terhadap persamaan-persamaan tak berdimensi dengan pendekatan terhadap lapisan batas untuk menghasilkan bentuk yang lebih sederhana.
  - b. Selanjutnya, persamaan-persamaan yang tak berdimensi diubah menjadi persamaan

similaritas yang terdapat pada persamaan 2.9 melalui penggunaan fungsi alir atau *stream function* yang terdapat pada persamaan 2.7 dan 2.8 pada permukaan bola.

c. Setelah proses tersebut, diperoleh bentuk persamaan similaritas yang berlaku untuk aliran fluida mikrokutub melalui lapisan batas permukaan bola.

2. Penyelesaian numerik dilakukan dengan menggunakan metode Keller-Box

Dalam proses penyelesaian model matematika yang telah diperoleh, digunakan metode Keller-Box dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Persamaan similaritas yang ada pada lapisan batas yang melintasi permukaan bola dalam fluida mikrokutub diubah menjadi persamaan yang berorde satu.

b. Pada proses diskritisasi, digunakan metode beda hingga pusat untuk mendekati atau memperkirakan persamaan.

c. Selama proses linierisasi, persamaan dapat dihasilkan dengan menggunakan Metode Newton, dan kemudian diubah menjadi bentuk matriks vektor.

- d. Pada tahap penyelesaian hasil linierisasi, dilakukan eliminasi pada matriks blok tridiagonal untuk mencapai solusi.
3. Membuat, Running, dan Validasi

Algoritma dari model yang telah diperoleh diimplementasikan ke dalam program menggunakan bahasa pemrograman Matlab. Setelah program yang telah dibuat dan dijalankan, dapat memasukkan input yang diperlukan dan melakukan analisis terhadap output numerik yang dihasilkan. Selanjutnya, model matematika dari aliran fluida mikrokutub yang melewati permukaan bola akan divalidasi kembali dengan membandingkan hasil output program.
4. Simulasi

Dengan menggunakan program yang telah dikembangkan, simulasi kemudian dilakukan dengan memvariasikan beberapa nilai yang terdapat pada parameter dan variabel input.
5. Analisis Hasil dan Pembahasan

Hasil simulasi yang telah dilakukan kemudian akan dianalisis dan dievaluasi untuk mencari solusi numerik terbaik untuk aliran fluida mikrokutub melalui permukaan bola. Hal ini meliputi profil

kecepatan dan profil mikrorotasi dari aliran fluida mikroktub. Dari hasil evaluasi ini, kesimpulan akan diambil mengenai masalah yang telah dikaji.

## **BAB IV**

### **HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN**

#### **4.1 Persamaan Pembangun Dimensional**

Pada sub bab ini, akan dibahas tentang persamaan-persamaan dasar yang membentuk model. Persamaan tersebut meliputi persamaan kontinuitas, persamaan momentum linier, dan angular. Tidak seperti jenis fluida pada umumnya, dalam kasus fluida mikrokutub, terdapat dua persamaan momentum yang harus diperhatikan, yaitu persamaan momentum linier dan angular. Persamaan momentum angular digunakan dalam penelitian ini karena fluida mikrokutub memiliki karakteristik unik yang melibatkan gerakan mikrorotasi. Jadi dalam kasus aliran fluida mikrokutub, selain adanya aliran fluida yang melewati permukaan bola, elemen fluida juga dapat mengalami gerakan rotasi. (Rita, 2016).

Dalam penelitian fluida ini, model matematika diperoleh melalui turunan hukum konservasi massa, yang dinyatakan dalam bentuk persamaan kontinuitas, hukum II Newton, yang dinyatakan dalam bentuk persamaan momentum, serta hukum I termodinamika, yang dinyatakan dalam bentuk persamaan energi. Namun, dalam penelitian ini, pengaruh konveksi campuran tidak

diperhitungkan, sehingga persamaan energi tidak digunakan. Persamaan yang digunakan dalam penelitian ini adalah persamaan pembangun untuk aliran tak tunak (*unsteady*), yang diambil dari penelitian sebelumnya yaitu (Fauziyah, 2018). Persamaan pembangun ini dinyatakan dalam bentuk dimensional, dan berikut adalah bentuk persamaannya:

1. Persamaan Kontinuitas:

$$\frac{\partial \bar{r}\bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{r}\bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.1)$$

2. Persamaan Momentum Linier

b. Persamaan momentum linier pada sumbu - x

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma B_0^2 \bar{u} + k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \quad (4.2)$$

c. Persamaan momentum linier pada sumbu - y

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma B_0^2 \bar{v} - k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} \quad (4.3)$$

### 3. Persamaan Momentum Angular

$$\rho j \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) = \gamma \left( \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - k \left( 2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \quad (4.4)$$

Dengan kondisi batas sebagai berikut:

$$\bar{t} < 0 : \bar{u} = \bar{v} = \bar{N}, \text{ untuk setiap } \bar{x}, \bar{y}$$

$$\bar{t} \geq 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{N} = -n \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}, \text{ pada saat } \bar{y} = 0$$

$$\bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{N} = 0, \text{ pada saat } \bar{y} \rightarrow \infty$$

#### 4.1.1 Merubah Variabel Dimensi ke Dalam Variabel Tak Berdimensi

Persamaan pembangun yang awalnya dinyatakan dalam bentuk dimensional, kemudian diubah menjadi bentuk persamaan non-dimensional. Proses ini dilakukan dengan tujuan untuk menghapus satuan-satuan dalam model yang diperoleh, sehingga memudahkan proses komputasi. Akibatnya, variabel-variabel yang tidak berdimensi hanya akan berupa nilai-nilai perbandingan saja. Dengan mempertimbangkan besaran-besaran yang digunakan dalam penelitian ini, maka dapat diidentifikasi beberapa variabel tak berdimensi yang termasuk di dalamnya, yaitu:



$$x = \frac{\bar{x}}{a} \quad (4.5)$$

dengan

$x$  = Sumbu  $x$  tak dimensi

$\bar{x}$  = Sumbu  $x$  dimensi

$a$  = Jari-jari bola.

$$y = Re^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\bar{y}}{a} \right) \quad (4.6)$$

dengan

$y$  = Sumbu  $y$  tak dimensi

$\bar{y}$  = Sumbu  $y$  dimensi

$a$  = Jari-jari bola

$Re$  = Bilangan reynolds.

Dengan  $Re = \frac{U_{\infty} a}{\nu}$  dan  $\nu$  merupakan viskositas kinematik.

$$t = \frac{u_{\infty} \bar{t}}{a} \quad (4.7)$$

dengan

$t$  = Waktu tak dimensi

$\bar{t}$  = Waktu dimensi

$u_\infty$  = Kecepatan aliran bebas

$a$  = Jari-jari bola.

$$u = \frac{\bar{u}}{U_\infty} \quad (4.8)$$

dengan

$u$  = Kecepatan searah sumbu-  $x$  tak dimensi

$\bar{u}$  = Kecepatan searah sumbu-  $x$  dimensi

$U_\infty$  = Kecepatan aliran bebas.

$$v = Re^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\bar{v}}{U_\infty} \right) \quad (4.9)$$

dengan

$v$  = Kecepatan searah sumbu-  $y$  tak dimensi

$\bar{v}$  = Kecepatan searah sumbu-  $y$  dimensi

$U_\infty$  = Kecepatan aliran bebas.

$$p = \frac{\bar{p}}{\rho U_\infty^2} \quad (4.10)$$

dengan

$p$  = Tekanan tak dimensi

$\bar{p}$  = Tekanan dimensi

$\rho$  = Densitas

$U_\infty$  = Kecepatan aliran bebas.

$$r(x) = \frac{\bar{r}(\bar{x})}{a} \quad (4.11)$$

dengan

$r(x)$  = Jari-jari tak dimensi

$\bar{r}(\bar{x})$  = Jari-jari dimensi

$a$  = Jari-jari bola.

Salah satu variabel tak berdimensi yang terdapat di antara beberapa variabel yang telah disebutkan adalah viskositas kinematik. Viskositas kinematik adalah perbandingan antara viskositas dinamis dan densitas, dan dapat dinyatakan secara matematis sebagai  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ . Selanjutnya, dilakukan substitusi variabel-variabel tak berdimensi ke dalam persamaan-persamaan pembangun yang telah terbentuk.

Dalam penelitian ini peneliti memilih menggunakan parameter bahan dan magnetik karena dalam aplikasi dunia nyata parameter bahan dan magnetik dapat bekerja secara bersamaan. Contohnya, dalam bidang medis, penggunaan magnetik untuk menggerakkan partikel dalam aliran darah dapat memiliki dampak besar pada

kinerja sistem pengiriman obat. Oleh karena itu, kombinasi dua parameter ini bisa lebih relevan.

Beberapa parameter tak berdimensi yang digunakan untuk mendapatkan persamaan-persamaan tak berdimensi antara lain:

$$K = \frac{k}{\mu} \quad (4.12)$$

dengan

$K$  = Parameter bahan mikro (konsentrasi mikroktub)

$k$  = Konduktifitas thermal fluida

$\mu$  = Viskositas dinamik fluida.

$$M = \frac{\alpha \sigma B_0^2}{\rho U_\infty} \quad (4.13)$$

dengan

$M$  = Parameter magnetik

$\alpha$  = Jari-jari bola

$\sigma$  = Konduktifitas listrik

$B_0$  = Medan magnet

$\rho$  = Densitas fluida

$U_\infty$  = Kecepatan aliran bebas.

$$N = Re \frac{1}{2} \frac{a\bar{N}}{u_\infty} \quad (4.14)$$

dengan

$a$  = Jari-jari Bola

$N$  = Mikrorotasi tak berdimensi

$\bar{N}$  = Mikrorotasi dimensi

$u_\infty$  = Kecepatan aliran bebas

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.5) - (4.11) kedalam persamaan (4.1) - (4.4) sehingga diperoleh persamaan-persamaan non-dimensional sebagai berikut:

1. Persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} = 0 \quad (4.15)$$

2. Persamaan Momentum

- a. Persamaan momentum linier pada sumbu -  $x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(1+K)}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ (1+K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu + K \frac{\partial N}{\partial y} & \quad (4.16) \end{aligned}$$

b. Persamaan momentum linier pada sumbu - y

$$\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1+K}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{(1+K)}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{Mv}{Re} - \frac{K}{Re} \frac{\partial N}{\partial x} \quad (4.17)$$

3. Persamaan Momentum Angular

$$\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} = \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left( 2N + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4.18)$$

Dengan kondisi batas sebagai berikut:

$$t < 0 : u = v = N, \text{ untuk setiap } x, y$$

$$t \geq 0 : u = v = 0, N = -n \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ pada saat } y = 0$$

$$u = u_e(x), N = 0, \text{ pada saat } y \rightarrow \infty$$

Selanjutnya, dilakukan pendekatan lapisan batas karena diasumsikan bahwa lapisan batas yang terbentuk sangat tipis.

#### 4.1.2 Pendekatan Menggunakan Teori Lapisan Batas

Pendekatan lapisan batas digunakan karena lapisan batas yang terbentuk sangat tipis, dengan bilangan Reynolds mendekati tak terhingga ( $Re \rightarrow \infty$ ) sehingga  $\frac{1}{Re} \rightarrow 0$ . Dalam hal ini,

penggunaan pendekatan lapisan batas memiliki dampak pada persamaan non-dimensi yang telah terbentuk. Oleh karena itu, dengan substitusi  $\frac{1}{Re} = 0$  dapat diperoleh persamaan lapisan batas sebagai berikut:

1. Persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} = 0 \quad (4.19)$$

2. Persamaan Momentum

- a. Persamaan momentum linier pada sumbu - x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu + K \frac{\partial N}{\partial x} \quad (4.20)$$

- b. Persamaan momentum linier pada sumbu - y

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.21)$$

3. Persamaan Momentum Angular

$$\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} = \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - K \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (4.22)$$

Berdasarkan pendekatan lapisan batas yang digunakan, persamaan (4.21) menunjukkan bahwa tekanan tidak mempengaruhi persamaan momentum

sumbu- $y$ . Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa dalam konteks ini, persamaan momentum hanya berlaku untuk sumbu- $x$  dalam aliran fluida mikrokutub yang melewati permukaan bola. Dengan demikian, persamaan momentum untuk aliran bebas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} - M u_e + K \frac{\partial N}{\partial y} \quad (4.23)$$

Dalam hal ini, kecepatan aliran bebas yang melewati permukaan bola adalah  $u_e = \frac{3}{2} \sin x$  (terlampir pada lampiran 2). Dengan demikian, aliran bebas pada lapisan batasnya dapat diperoleh sebagai berikut

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = 0, \frac{\partial u_e}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0 \text{ dan } \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (4.24)$$

Setelah itu, persamaan (4.24) dapat disubstitusikan ke dalam sistem persamaan (4.23), yang menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} - M u_e \quad (4.25)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + M u_e \quad (4.26)$$



Selanjutnya, persamaan (4.26) dapat disubstitusikan ke dalam persamaan (4.23), yang menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \left( u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + M u_e \right) + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu + K \frac{\partial N}{\partial y}$$

Oleh karena itu, didapatkan persamaan momentum dari aliran bebas sebagai berikut

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} - M(u - u_e) + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} \quad (4.27)$$

Selanjutnya, diperkenalkan fungsi alir yang merupakan variabel yang mewakili komponen kecepatan  $u$  dan komponen kecepatan  $v$ . Hal ini bertujuan untuk mengurangi jumlah variabel yang ada dan mempermudah proses komputasinya.

#### 4.1.3 Fungsi Alir (*Stream Function*)

Dalam rangka mempermudah proses komputasi, diperkenalkan fungsi alir atau *stream function*, yang memiliki fungsi untuk mengurangi jumlah variabel dari beberapa persamaan yang telah diperoleh menjadi satu variabel tunggal. Dalam penelitian ini, diperkirakan bahwa aliran fluida mikroktub yang

melewati permukaan bola adalah aliran fluida dua dimensi, yaitu aliran fluida yang terjadi sepanjang sumbu- $x$  dan sumbu- $y$ . Oleh karena itu, terdapat dua komponen kecepatan, yaitu komponen kecepatan  $u$  dan komponen kecepatan  $v$ . Untuk menghubungkan kedua komponen kecepatan ini, diperkenalkan fungsi alir. Dengan demikian, masing-masing komponen kecepatan didefinisikan sebagai berikut (Bruce R, 2009):

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4.28)$$

dengan

$u$  = Komponen kecepatan fluida pada sumbu- $x$

$r$  = Jari-jari bola

$\psi$  = Fungsi alir

$y$  = Jarak daerah pengamatan terhadap permukaan bola.

dan

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.29)$$

dengan

$v$  = Komponen kecepatan fluida pada sumbu- $y$

$r$  = Jari-jari bola

$\psi$  = Fungsi alir

$x$  = sudut pengamatan terhadap permukaan bola.

Selanjutnya, persamaan (4.28) dan persamaan (4.29) dapat disubstitusikan ke dalam persamaan (4.19), (4.20), dan (4.22), dengan langkah-langkah penyelesaiannya terdapat pada (Lampiran 1) sehingga diperoleh persamaan-persamaan berikut ini:

1. Persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (4.30)$$

2. Persamaan Momentum Linier

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \\ u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + M \left( u_e - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + (1 + K) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + K \frac{2N}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.31)$$

3. Persamaan Momentum Angular

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} = \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - \\ K \left( 2N + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Dengan kondisi batas sebagai berikut:

$$t < 0 : \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = N, \text{ untuk setiap } x, y$$

$$t \geq 0 : \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, N = -n \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \text{ pada saat } y = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e(x), N = 0, \text{ pada saat } y \rightarrow \infty$$

Langkah terakhir adalah mentransformasikan persamaan-persamaan tersebut ke dalam bentuk persamaan similaritas, yang menggambarkan kondisi aliran dalam lapisan batas yang terbentuk saat fluida mikrokutub mengalir melintasi permukaan bola.

#### 4.1.4 Persamaan Similaritas

Persamaan similaritas dalam persamaan (4.30) dapat dihilangkan dari fungsi alir karena tidak memberikan informasi yang berpengaruh. Dalam hal ini, kontinuitas kecepatan  $u$  dan kontinuitas kecepatan  $v$  dianggap sama.

Sebagai hasilnya, persamaan yang dibangun hanya terdiri dari persamaan untuk momentum linier dan momentum angular, yang selanjutnya disederhanakan menjadi variabel similaritas dalam waktu. Berikut adalah definisi variabel similaritas disembarang waktu (Mohammad, 2012):

$$\psi = t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t) \quad (4.33)$$

dengan

$$\eta = \frac{y}{t^{\frac{1}{2}}} \text{ dan } N = t^{\frac{1}{2}} u_e(x) h(x, \eta, t)$$

Berikutnya, persamaan (4.33) disubstitusikan ke dalam persamaan momentum linier, sehingga menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & (1 + K) \left( \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + K \left( \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + Mt \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + \\ & \frac{du_e}{dx} t \left( 1 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right) = t \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} \right) + u_e t \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \right. \\ & \left. \frac{f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Selanjutnya, persamaan (4.33) disubstitusikan ke dalam persamaan momentum angular, sehingga menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{h}{2} + t \frac{du_e}{dx} \left( f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial h}{\partial t} + \\ & tu_e \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + Kt \left( 2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Dengan kondisi batas sebagai berikut:

$$t < 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = h = 0, \text{ untuk setiap } x, \eta$$

$$t \geq 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, h = -n \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}, \text{ pada } \eta = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, h = 0, \text{ pada } \eta \rightarrow \infty$$

Dalam penelitian ini, titik fokus penelitian terletak pada bagian bawah titik stagnasi, yaitu titik di mana lapisan batas berada yang paling dekat dengan permukaan benda, ( $x = 0$ ) yang pada posisi tersebut memiliki nilai  $u_e(x) = 0$  dan  $\frac{du_e}{dx} = \frac{3}{2}$ , Oleh karena itu, persamaan momentum linier dan momentum angular menjadi:

1. Persamaan momentum linier

$$(1 + K) \left( \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + K \left( \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + Mt \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + \frac{3}{2} t \left( 1 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right) = t \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} \right) \quad (4.36)$$

2. Persamaan momentum angular

$$\left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{h}{2} + \frac{3}{2} t \left( f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial h}{\partial t} + Kt \left( 2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \quad (4.37)$$

Untuk  $\frac{\partial f}{\partial \eta} = f'$ , dan  $\frac{\partial h}{\partial \eta} = h'$  maka persamaan momentum dan persamaan momentum angular menjadi:

1. Persamaan momentum linier

$$(1 + K)f'''' + Kh' + \frac{\eta}{2}f'' + Mt(1 - f') + \frac{3}{2}t(1 + ff'' - (f')^2) = t \left( \frac{\partial f'}{\partial t} \right) \quad (4.38)$$

2. Persamaan momentum angular

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right)h'' + \frac{\eta}{2}h' + \frac{h}{2} + \frac{3}{2}t(fh' - hf') = t \frac{\partial h}{\partial t} + Kt(2h + f'') \quad (4.39)$$

#### 4.1.5 Penyelesaian Numerik Model

Setelah memperoleh model matematika kemudian langkah selanjutnya adalah menggambarkan aliran fluida mikrotub yang melintasi permukaan bola, dengan penyelesaian numerik. Dalam penelitian ini, persamaan model yang telah ditemukan diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Keller-Box. Setelah melakukan penyelesaian numerik, diharapkan mendapatkan hasil berupa grafik profil kecepatan dan profil mikrorotasi. Selanjutnya, variasi parameter bahan dan variasi parameter magnetik akan diterapkan dalam analisis untuk mengetahui pengaruhnya terhadap profil kecepatan dan profil mikrorotasi di lapisan batas yang terbentuk di sekitar titik stagnasi terendah pada permukaan bola ( $x = 0^\circ$ ).

Metode Keller-Box adalah metode yang efisien untuk menyelesaikan persamaan lapisan batas yang memiliki bentuk parsial parabolik. Berikut adalah tahapan-tahapan dalam penyelesaian numerik menggunakan metode ini:

- a. Persamaan (4.38) dan (4.39) diubah menjadi persamaan pada orde pertama.
- b. Langkah selanjutnya adalah melakukan diskritisasi yang dilakukan dengan menggunakan metode beda hingga pusat.
- c. Selanjutnya, persamaan yang diperoleh dilinierisasi menggunakan metode Newton dan diwujudkan dalam bentuk matriks vektor.
- d. Hasil linierisasi kemudian diselesaikan menggunakan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal.

Penjabaran secara rinci dari tiap-tiap langkah dapat dilihat sebagai berikut:

**a. Persamaan Orde Pertama**

Persamaan (4.38) dan (4.39) mengandung persamaan-persamaan dengan orde tinggi. Namun, dalam penyelesaian numerik menggunakan metode Keller-Box, perlu



ditransformasikan persamaan-persamaan tersebut menjadi bentuk orde satu. Untuk itu, dapat dilakukan pemisalan fungsi sebagai langkah awal dalam proses transformasi tersebut.

$$f' = g \quad (4.40)$$

$$g' = s \quad (4.41)$$

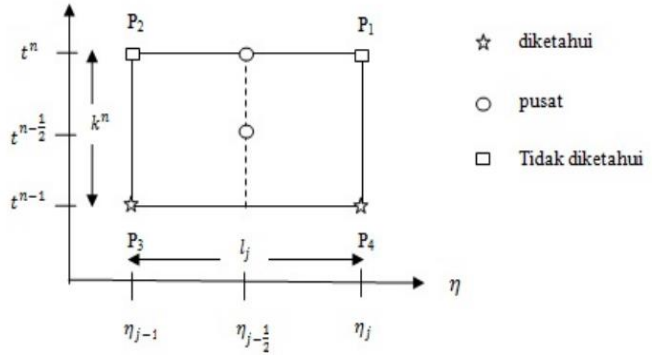
$$h' = q \quad (4.42)$$

$$(1 + K)s' + Kq + \frac{\eta}{2}s + Mt(1 - g) + \frac{3}{2}t(1 + fs - (g)^2) = t \left( \frac{\partial g}{\partial t} \right) \quad (4.43)$$

$$\left( 1 + \frac{K}{2} \right) q' + \frac{\eta}{2}q + \frac{h}{2} + \frac{3}{2}t(fq - hg) = t \frac{\partial h}{\partial t} + Kt(2h + s) \quad (4.44)$$

### **b. Diskritisasi Model**

Diskritisasi model dilakukan pada Persamaan (4.40) sampai (4.42) yang menggunakan metode beda hingga pusat terhadap sumbu- $y$ . Hal ini dilakukan karena penelitian ini berfokus pada titik stagnasi dengan koordinat  $x = 0$ . Hasilnya, kita mendapatkan diskritisasi sebagai berikut:



**Gambar 4.1:** Metode Beda Hingga

$$\frac{(f_j^n - f_{j-1}^n)}{l_j} = g_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j} (f_j^n - f_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (g_j^n - g_{j-1}^n) \quad (4.45)$$

$$\frac{(g_j^n - g_{j-1}^n)}{l_j} = s_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j} (g_j^n - g_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (s_j^n - s_{j-1}^n) \quad (4.46)$$

$$\frac{(h_j^n - h_{j-1}^n)}{l_j} = q_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j} (h_j^n - h_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (q_j^n - q_{j-1}^n) \quad (4.47)$$

1. Untuk persamaan momentum linier (4.43)

$$\frac{1}{2} \left[ (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = t^{n-\frac{1}{2}} \left[ \frac{g_{j-\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right]$$

dengan

$$\begin{aligned}
(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left[ (1+K)s' + Kq + \frac{\eta}{2}s + \right. \\
&\quad \left. Mt(1-g) + \frac{3}{2}t(1+fs - (g)^2) \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&= (1+K) \left( \frac{s_j^n - s_{j-1}^n}{l_j} \right) + Kq_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left( s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \\
&\quad Mt^n \left( 1 - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{3}{2}t^n \left( 1 + f_{j-\frac{1}{2}}^n s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \\
&\quad \left( g_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2
\end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned}
(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= \left[ (1+K)s' + Kq + \frac{\eta}{2}s + \right. \\
&\quad \left. Mt(1-g) + \frac{3}{2}t(1+fs - (g)^2) \right]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&= (1+K) \left( \frac{s_j^{n-1} - s_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + Kq_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \\
&\quad \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left( s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + Mt^{n-1} \left( 1 - g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \\
&\quad \frac{3}{2}t^{n-1} \left( 1 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \left( g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 & (1 + K) \left( \frac{s_j^n - s_{j-1}^n}{l_j} \right) + Kq_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left( s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \\
 & Mt^n \left( 1 - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{3}{2} t^n \left( 1 + f_{j-\frac{1}{2}}^n s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \\
 & \left( g_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + (1 + K) \left( \frac{s_j^{n-1} - s_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + Kq_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \\
 & \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left( s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + Mt^{n-1} \left( 1 - g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \\
 & \frac{3}{2} t^{n-1} \left( 1 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \left( g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 = \\
 & 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} g_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
 \end{aligned}$$

Dapat ditulis dengan

$$\begin{aligned}
 & (1 + K) \left( \frac{s_j^n - s_{j-1}^n}{l_j} \right) + Kq_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left( s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \\
 & Mt^n \left( 1 - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{3}{2} t^n \left( 1 + f_{j-\frac{1}{2}}^n s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \\
 & \left( g_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} g_{j-\frac{1}{2}}^n = -(1 + \\
 & K) \left( \frac{s_j^{n-1} - s_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - Kq_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left( s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Mt^{n-1} \left(1 - g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) - \frac{3}{2} t^{n-1} \left(1 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) - \\
& \left(g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right)^2 - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (4.48)
\end{aligned}$$

2. Untuk persamaan momentum angular (4.44)

$$\frac{1}{2} \left[ (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = t^{n-\frac{1}{2}} \left[ \frac{h_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right]$$

Dengan

$$\begin{aligned}
(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left[ \left(1 + \frac{K}{2}\right) q' + \frac{\eta}{2} q + \frac{h}{2} + \right. \\
& \left. \frac{3}{2} t (fq - hg) - Kt(2h + s) \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&= \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{lj} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n + \\
& \frac{3}{2} t^n \left( f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - Kt^n \left( 2h_{j-\frac{1}{2}}^n + \right. \\
& \left. s_{j-\frac{1}{2}}^n \right)
\end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned}
(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= \left[ \left(1 + \frac{K}{2}\right) q' + \frac{\eta}{2} q + \frac{h}{2} + \right. \\
& \left. \frac{3}{2} t (fq - hg) - Kt(2h + s) \right]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{lj} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \\
&\frac{3}{2} t^n \left( f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - K t^n \left( 2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \right. \\
&\left. s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{lj} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n + \\
&\frac{3}{2} t^n \left( f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - K t^n \left( 2h_{j-\frac{1}{2}}^n + \right. \\
&\left. s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{lj} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \\
&\frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{3}{2} t^n \left( f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \\
&K t^n \left( 2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) = 2 \frac{t^{\frac{n-1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n - \\
&2 \frac{t^{\frac{n-1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

Dapat ditulis dengan

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{lj} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n + \\
&\frac{3}{2} t^n \left( f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - K t^n \left( 2h_{j-\frac{1}{2}}^n + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& s_{j-\frac{1}{2}}^n \Big) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n = - \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{lj} - \\
& \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{3}{2} t^{n-1} \left( f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \right. \\
& \left. h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + K t^{n-1} \left( 2 h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \\
& 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^{n-1}} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \tag{4.49}
\end{aligned}$$

### c. Linierisasi Model

Setelah mendapatkan hasil diskritisasi model, langkah selanjutnya adalah melakukan linierisasi model pada Persamaan (4.45) - (4.49) menggunakan metode Newton. Untuk melaksanakan metode Newton, diperkenalkan bentuk iterasi yang akan digunakan sebagai pendekatan solusi.

$$\begin{aligned}
f_j^{(i+1)} &= f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} \\
g_j^{(i+1)} &= g_j^{(i)} + \delta g_j^{(i)} \\
s_j^{(i+1)} &= s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)} \\
h_j^{(i+1)} &= h_j^{(i)} + \delta h_j^{(i)} \\
q_j^{(i+1)} &= q_j^{(i)} + \delta q_j^{(i)} \tag{4.50}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, bentuk iterasi (4.50) disubstitusikan ke dalam sistem Persamaan (4.45) - (4.49), menghasilkan persamaan-persamaan berikut:

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta g_j - \delta g_{j-1}) = -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(g_j^n - g_{j-1}^n) \quad (4.51)$$

$$(\delta g_j - \delta g_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta s_j - \delta s_{j-1}) = -(g_j^n - g_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(s_j^n - s_{j-1}^n) \quad (4.52)$$

$$(\delta h_j - \delta h_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_j - \delta q_{j-1}) = -(h_j^n - h_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(q_j^n - q_{j-1}^n) \quad (4.53)$$

Dengan melakukan pemisalan pada Persamaan (4.51) - (4.53), maka dapat menyusun persamaan-persamaan berikut:

$$(r_1)_j = -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(g_j^n - g_{j-1}^n)$$

$$(r_2)_j = -(g_j^n - g_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(s_j^n - s_{j-1}^n)$$

$$(r_3)_j = -(h_j^n - h_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(q_j^n - q_{j-1}^n)$$

Sehingga bentuk Persamaan (4.51) - (4.53) menjadi:



$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta g_j - \delta g_{j-1}) = (r_1)_j \quad (4.54)$$

$$(\delta g_j - \delta g_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta s_j - \delta s_{j-1}) = (r_2)_j \quad (4.55)$$

$$(\delta h_j - \delta h_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_j - \delta q_{j-1}) = (r_3)_j \quad (4.56)$$

Langkah selanjutnya adalah melakukan pemisalan berdasarkan hasil perhitungan dari (4.48) dan (4.49), sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (r_4)_j = & -(1 + K) \left( \frac{s_j^n - s_{j-1}^n}{l_j} \right) - Kq_{j-\frac{1}{2}}^n - \\ & \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left( s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - Mt^n \left( 1 - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{3}{2} t^n \left( \left( 1 + \right. \right. \\ & \left. \left. f_{j-\frac{1}{2}}^n s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \left( g_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 \right) + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} g_{j-\frac{1}{2}}^n - \\ & (1 + K) \left( \frac{s_j^{n-1} - s_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - Kq_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left( s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \\ & Mt^{n-1} \left( 1 - g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \frac{3}{2} t^{n-1} \left( \left( 1 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \right. \\ & \left. \left( g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned}
(r_5)_j = & - \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{lj} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n - \\
& \frac{3}{2} t^n \left( f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + K t^n \left( 2h_{j-\frac{1}{2}}^n + s_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \\
& 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n - \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{lj} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \\
& \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{3}{2} t^{n-1} \left( f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \\
& K t^{n-1} \left( 2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^{n-1}} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (4.58)
\end{aligned}$$

Dengan

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{(1+K)}{lj} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
a_2 &= -\frac{(1+K)}{lj} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
a_3 &= \frac{3}{4} t^n s_{j-\frac{1}{2}}^n \\
a_4 &= (a_3)_j \\
a_5 &= -\frac{3}{2} t^n g_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{M}{2} t^n - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
a_6 &= (a_5)_j \\
a_7 &= \frac{1}{2} K \\
a_8 &= (a_7)_j
\end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{(1+\frac{K}{2})}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4}t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$b_2 = -\frac{(1+\frac{K}{2})}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4}t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$b_3 = \frac{3}{4}t^n q_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$b_4 = (b_3)_j$$

$$b_5 = -\frac{3}{4}t^n h_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$b_6 = (b_5)_j$$

$$b_7 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}t^n g_{j-\frac{1}{2}}^n - Kt^n - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}$$

$$b_8 = (b_7)_j$$

$$b_9 = -\frac{1}{2}Kt^n$$

$$b_{10} = (b_9)_j$$

Selanjutnya, melakukan substitusi  $(a_1) - (b_{10})$  kedalam persamaan (4.57) dan (4.58), menghasilkan persamaan-persamaan berikut:

$$\begin{aligned} &(a_1)_j \delta s_j + (a_2)_j \delta s_{j-1} + (a_3)_j \delta f_j + (a_4)_j \delta f_{j-1} + \\ &(a_5)_j \delta g_j + (a_6)_j \delta g_{j-1} + (a_7)_j \delta q_j + \\ &(a_8)_j \delta q_{j-1} = (r_4)_j \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} &(b_1)_j \delta q_j + (b_2)_j \delta q_{j-1} + (b_3)_j \delta f_j + (b_4)_j \delta f_{j-1} + \\ &(b_5)_j \delta g_j + (b_6)_j \delta g_{j-1} + (b_7)_j \delta h_j + (b_8)_j \delta h_{j-1} + \\ &(b_9)_j \delta s_j + (b_{10})_j \delta s_{j-1} = (r_5)_j \end{aligned} \quad (4.60)$$

Berdasarkan kondisi batas maka dapat dinyatakan bahwa  $\delta f_0 = 0, \delta g_0 = 0, \delta h_0 = 0, \delta g_N = 0, \delta h_N = 0$

#### **d. Teknik Eliminasi Blok**

Pada langkah keempat, penyelesaian dari proses linierisasi dilakukan dengan cara menggunakan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal (Mohammad, 2014). Beberapa persamaan yang muncul dari hasil linierisasi di atas dapat dipecahkan menggunakan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal. Dalam teknik ini, persamaan-persamaan tersebut diatur dalam bentuk matriks blok untuk mempermudah penyelesaiannya. Ini adalah salah satu ciri khas dari metode Keller-Box. Dalam metode ini, ketika menggunakan matriks blok tridiagonal untuk penyelesaian, elemen-elemen dalam matriks tersebut biasanya berisi konstanta-konstanta yang muncul dari persamaan-persamaan linierisasi. Hasil dari proses linierisasi tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk matriks blok tridiagonal dengan tiga kondisi yang terbentuk, yaitu saat  $j = 1, j = N - 1, \text{ dan } j = N$ . Matriks ini menggambarkan hubungan antara variabel-

variabel dalam sistem secara terstruktur dan memungkinkan penggunaan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal untuk penyelesaiannya.

**Keadaan 1** Saat  $j = 1$ , maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$(\delta f_1 - \delta f_0) - \frac{l_1}{2}(\delta g_1 - \delta g_0) = (r_1)_1$$

$$(\delta g_1 - \delta g_0) - \frac{l_1}{2}(\delta s_1 - \delta s_0) = (r_2)_1$$

$$(\delta h_1 - \delta h_0) - \frac{l_1}{2}(\delta q_1 - \delta q_0) = (r_3)_1$$

$$(a_1)_1 \delta s_1 + (a_2)_1 \delta s_0 + (a_3)_1 \delta f_1 + (a_4)_1 \delta f_0 + (a_5)_1 \delta g_1 + (a_6)_1 \delta g_0 + (a_7)_1 \delta q_1 + (a_8)_1 \delta q_0 = (r_4)_1$$

$$(b_1)_1 \delta q_1 + (b_2)_1 \delta q_0 + (b_3)_1 \delta f_1 + (b_4)_1 \delta f_0 + (b_5)_1 \delta g_1 + (b_6)_1 \delta g_0 + (b_7)_1 \delta h_1 + (b_8)_1 \delta h_0 + (b_9)_1 \delta s_1 + (b_{10})_1 \delta s_0 = (r_5)_1$$

Dengan memperhatikan kondisi batas  $\delta f_0 = 0, \delta g_0 = 0, \delta h_0 = 0$ , sistem tersebut dapat diekspresikan dalam bentuk matriks berikut ini:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} \\ (a_2)_1 & (a_8)_1 & (a_3)_1 & (a_1)_1 & (a_7)_1 \\ (b_{10})_1 & (b_2)_1 & (b_3)_1 & (b_9)_1 & (b_1)_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta s_0 \\ \delta q_0 \\ \delta f_1 \\ \delta s_1 \\ \delta q_1 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_5)_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (b_5)_1 & (b_7)_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta g_1 \\ \delta h_1 \\ \delta f_2 \\ \delta s_2 \\ \delta q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1)_1 \\ (r_2)_1 \\ (r_3)_1 \\ (r_4)_1 \\ (r_5)_1 \end{pmatrix}$$

Secara sederhana, dapat dinyatakan bahwa untuk  $j = 1$   $[A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1]$

**Keadaan 2** Saat  $j = N - 1$ , maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (\delta f_{N-1} - \delta f_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2} (\delta g_{N-1} - \delta g_{N-2}) &= \\ (r_1)_{N-1} & \\ (\delta g_{N-1} - \delta g_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2} (\delta s_{N-1} - \delta s_{N-2}) &= \\ (r_2)_{N-1} & \\ (\delta h_{N-1} - \delta h_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2} (\delta q_{N-1} - \delta q_{N-2}) &= \\ (r_3)_{N-1} & \\ (a_1)_{N-1} \delta s_{N-1} + (a_2)_{N-1} \delta s_{N-2} + & \\ (a_3)_{N-1} \delta f_{N-1} + (a_4)_{N-1} \delta f_{N-2} + & \\ (a_5)_{N-1} \delta g_{N-1} + (a_6)_{N-1} \delta g_{N-2} + & \\ (a_7)_{N-1} \delta q_{N-1} + (a_8)_{N-1} \delta q_{N-2} &= (r_4)_{N-1} \\ (b_1)_{N-1} \delta q_{N-1} + (b_2)_{N-1} \delta q_{N-2} + & \\ (b_3)_{N-1} \delta f_{N-1} + (b_4)_{N-1} \delta f_{N-2} + & \\ (b_5)_{N-1} \delta g_{N-1} + (b_6)_{N-1} \delta g_{N-2} + & \end{aligned}$$

$$(b_7)_{N-1}\delta h_{N-1} + (b_8)_{N-1}\delta h_{N-2} + \\ (b_9)_{N-1}\delta s_{N-1} + (b_{10})_{N-1}\delta s_{N-2} = (r_5)_{N-1}$$

Dengan mempertimbangkan kondisi batas  $\delta f_0 = 0, \delta g_0 = 0, \delta h_0 = 0$ , sistem tersebut dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\ 0 & 0 & (a_4)_{N-1} & (a_2)_{N-1} & (a_8)_{N-1} \\ 0 & 0 & (b_4)_{N-1} & (b_{10})_{N-1} & (b_2)_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta s_{N-2} \\ \delta q_{N-2} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta s_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \end{pmatrix} \\ + \\ \begin{pmatrix} -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\ (a_6)_{N-1} & 0 & (a_3)_{N-1} & (a_1)_{N-1} & (a_7)_{N-1} \\ (b_6)_{N-1} & (b_8)_{N-1} & (b_3)_{N-1} & (b_9)_{N-1} & (b_1)_{N-1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \delta g_{N-2} \\ \delta h_{N-2} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta s_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_5)_{N-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (b_5)_{N-1} & (b_7)_{N-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta g_{N-1} \\ \delta h_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta s_N \\ \delta q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1)_{N-1} \\ (r_2)_{N-1} \\ (r_3)_{N-1} \\ (r_4)_{N-1} \\ (r_5)_{N-1} \end{pmatrix}$$

Secara sederhana bentuk matriks diatas dapat dinyatakan sebagai

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] + [C_j][\delta_{j+1}] = [r_j]$$

Bentuk ini berlaku untuk setiap iterasi  $j$  mulai dari 2 hingga  $N - 1$ .

**Keadaan 3** Saat  $j = N$ , maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$(\delta f_N - \delta f_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta g_N - \delta g_{N-1}) = (r_1)_N$$

$$(\delta g_N - \delta g_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta s_N - \delta s_{N-1}) = (r_2)_N$$

$$(\delta h_N - \delta h_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta q_N - \delta q_{N-1}) = (r_3)_N$$

$$(a_1)_N \delta s_N + (a_2)_N \delta s_{N-1} + (a_3)_N \delta f_N +$$

$$(a_4)_N \delta f_{N-1} + (a_5)_N \delta g_N + (a_6)_N \delta g_{N-1} +$$

$$(a_7)_N \delta q_N + (a_8)_N \delta q_{N-1} = (r_4)_N$$

$$(b_1)_N \delta q_N + (b_2)_N \delta q_{N-1} + (b_3)_N \delta f_N +$$

$$(b_4)_N \delta f_{N-1} + (b_5)_N \delta g_N + (b_6)_N \delta g_{N-1} +$$

$$(b_7)_N \delta h_N + (b_8)_N \delta h_{N-1} + (b_9)_N \delta s_N +$$

$$(b_{10})_N \delta s_{N-1} = (r_5)_N$$



Dengan mempertimbangkan kondisi batas  $\delta f_0 = 0, \delta g_0 = 0, \delta h_0 = 0$ , sistem tersebut dapat direpresentasikan kedalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ 0 & 0 & (a_4)_N & (a_2)_N & (a_8)_N \\ 0 & 0 & (b_4)_N & (b_{10})_N & (b_2)_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta s_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta s_N \\ \delta q_N \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{l_N}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ (a_6)_N & 0 & (a_3)_N & (a_1)_N & (a_7)_N \\ (b_6)_N & (b_8)_N & (b_3)_N & (b_9)_N & (b_1)_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta g_{N-1} \\ \delta h_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta s_N \\ \delta q_N \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (r_1)_N \\ (r_2)_N \\ (r_3)_N \\ (r_4)_N \\ (r_5)_N \end{pmatrix}$$

Secara sederhana bentuk matriks diatas dapat dinyatakan sebagai

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] = [r_j] \text{ untuk } j = N$$

Secara keseluruhan, untuk setiap nilai  $j$  mulai dari 1 hingga  $N - 1$ , dapat disederhanakan sebagai berikut:

$$j = 1 \quad : [A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1]$$

$$j = 2 \quad : [B_2][\delta_1] + [A_2][\delta_2] + [C_2][\delta_3] = [r_2]$$

$$j = 3 \quad : [B_3][\delta_2] + [A_3][\delta_3] + [C_3][\delta_4] = [r_3]$$

⋮

$$j = N - 1 : [B_{N-1}][\delta_{N-2}] + [A_{N-1}][\delta_{N-1}] + [C_{N-1}][\delta_N] = [r_{N-1}]$$

$$j = N \quad : [B_N][\delta_{N-1}] + [A_N][\delta_N] = [r_N]$$

Atau dapat dinyatakan sebagai:

$$A\delta = r \tag{4.61}$$

Matriks  $A$ ,  $\delta$ , dan  $r$  merupakan matriks-matriks yang memiliki elemen-elemen spesifik sebagai yang telah diberikan. Setiap elemen dalam matriks-matriks tersebut ditentukan sesuai dengan persamaan yang telah disebutkan sebelumnya, yaitu sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} [A_1] & [C_1] & 0 & 0 & 0 \\ [B_2] & [A_2] & [C_2] & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & [B_{N-1}] & [A_{N-1}] & [C_{N-1}] \\ 0 & 0 & 0 & [B_N] & [A_N] \end{pmatrix}$$

$$\delta = \begin{pmatrix} [\delta_1] \\ [\delta_2] \\ \vdots \\ [\delta_{N-1}] \\ [\delta_N] \end{pmatrix}, \text{ dan } r = \begin{pmatrix} [r_1] \\ [r_2] \\ \vdots \\ [r_{N-1}] \\ [r_N] \end{pmatrix}$$

Dengan merujuk pada Persamaan (4.61), dapat diamati bahwa matriks  $A$  memiliki struktur tridiagonal, artinya hampir semua elemennya bernilai nol kecuali untuk tiga diagonal utamanya. Dengan menerapkan metode eliminasi blok pada Persamaan (4.61), dapat dilesaikannya dengan asumsi bahwa matriks  $A$  adalah matriks *nonsingular*. Selanjutnya, matriks  $A$  dapat difaktorkan ke dalam bentuk yang sesuai sebagai langkah penyelesaian:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \tag{4.62}$$

Dengan

$$L = \begin{pmatrix} [\alpha_1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [B_2] & [\alpha_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [B_{N-1}] & [\alpha_{N-1}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [B_N] & [\alpha_N] \end{pmatrix}$$

dan

$$U = \begin{pmatrix} [I] & [\tau_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [I] & [\tau_2] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [I] & [\tau_{N-1}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [I] \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan matriks identitas  $[I]$  berukuran  $5 \times 5$ , serta matriks  $[\alpha_j]$  dan  $[\tau_j]$  yang berukuran  $5 \times 5$  dengan elemen-elemennya ditentukan menggunakan persamaan berikut.:

$$[\alpha_1] = [A_1]$$

$$[A_1][\tau_1] = [C_1]$$

$$[\alpha_j] = [A_j] - [B_j][\tau_{j-1}], \quad j = 2, 3, \dots, N$$

$$[\alpha_j][\tau_j] = [C_j], \quad j = 2, 3, \dots, N - 1$$

Selanjutnya, melakukan substitusi persamaan (4.62) ke dalam persamaan (4.61), menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$LU\delta = r \quad (4.63)$$

Dengan mendefinisikan bahwa

$$U\delta = W \quad (4.64)$$

Sehingga persamaan (4.63) dapat dituliskan sebagai

$$LW = r \quad (4.65)$$

Dimana

$$W = \begin{pmatrix} [W_1] \\ [W_2] \\ \vdots \\ [W_{N-1}] \\ [W_N] \end{pmatrix}$$

Dan  $[W_j]$  adalah matriks berukuran  $5 \times 1$  dengan elemen-elemennya didapatkan dari persamaan (4.64), yaitu

$$[\alpha_1][W_1] = [r_1]$$

$$[\alpha_j][W_j] = [r_j] - [B_j][W_{j-1}], \quad 2 \leq j \leq N$$

Setelah memperoleh elemen-elemen dari matriks  $W$ , langkah selanjutnya adalah menentukan penyelesaian untuk  $\delta$  pada persamaan (4.64) dengan menggunakan persamaan berikut.

$$[\delta_j] = [W_j]$$

$$[\delta_j] = [W_j] - [\tau_j][\delta_{j+1}], \quad 1 \leq j \leq N - 1$$

Dalam hal ini, setelah mendapatkan nilai  $\delta$ , persamaan (4.54) - (4.58) dapat digunakan untuk mendapatkan penyelesaian persamaan (4.50) melalui iterasi yang dilakukan hingga kriteria konvergensi terpenuhi. Menurut Cebeci dan Bradshaw, kriteria konvergensi ditetapkan menggunakan  $v(0, t)$  dan iterasi berhenti ketika  $|\delta v(0, t)| < \varepsilon$ , di mana  $\varepsilon$  adalah suatu nilai yang sangat kecil. Pada penelitian ini, digunakan nilai  $\varepsilon = 10^{-5}$  yang memberikan presisi hingga empat desimal (Mohammad, 2014).

#### **4.1.6 Hasil Simulasi Numerik**

Setelah menyelesaikan sistem menggunakan metode Keller-Box secara numerik, langkah selanjutnya adalah menggunakan perangkat lunak Matlab untuk mendapatkan solusi numerik dari sistem yang telah diidentifikasi. Tugas Akhir ini melibatkan dua parameter yang terlibat dalam beberapa percobaan terpisah dalam proses simulasi. Berdasarkan hasil simulasi yang dilakukan, terdapat hubungan antara parameter magnetik ( $M$ ) dan parameter bahan ( $K$ ) terhadap kecepatan ( $f'$ ) dan mikrorotasi ( $h$ ). Berikut ini adalah penjelasan mengenai masing-masing parameter tersebut.

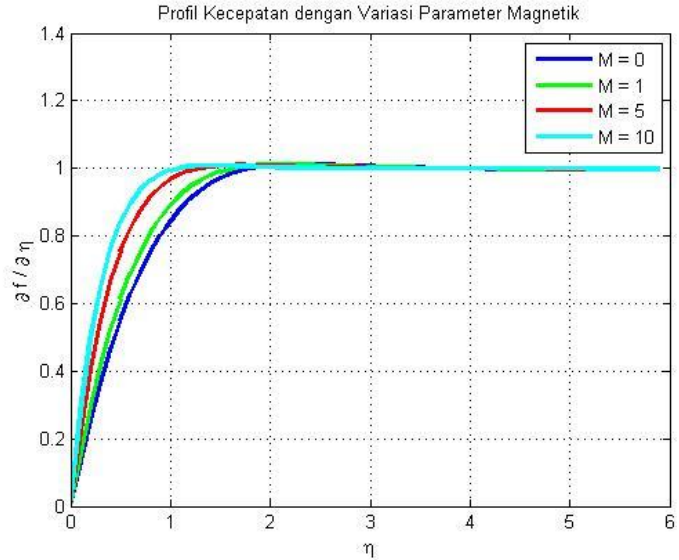
**a. Pengaruh Variasi Parameter Magnetik ( $M$ ) Terhadap Profil Kecepatan ( $f'$ )**

**1. Saat Konsentrasi Pekat ( $n = 0$ )**

Gambar 4.2 merupakan grafik yang dihasilkan dari software Matlab dengan list program terdapat pada (Lampiran 4), menunjukkan hasil simulasi yang menggambarkan profil kecepatan ( $f'$ ) dari aliran fluida. Pada simulasi ini, dilakukan variasi pada parameter magnetik ( $M$ ) dengan nilai 0, 1, 5, dan 10, sedangkan parameter bahan ( $K$ ) tetap pada nilai 1.

Dari gambar 4.2, dapat disimpulkan bahwa semakin besar nilai magnetik yang diberikan, maka kecepatan fluida akan mengalami peningkatan. Dengan kata lain, semakin tinggi nilai magnetik, semakin cepat pula pergerakan fluida. Peningkatan kecepatan fluida disebabkan oleh adanya gaya Lorentz yang terjadi pada fluida mikroktub. Gaya Lorentz ini menjadi semakin kuat seiring dengan peningkatan medan magnet yang mempengaruhi fluida, sehingga menyebabkan kecepatan fluida semakin meningkat. Dalam penelitian ini, digunakan fluida

mikrokutub yang memiliki konsentrasi pekat atau tingkat kepekatan yang lebih tinggi.

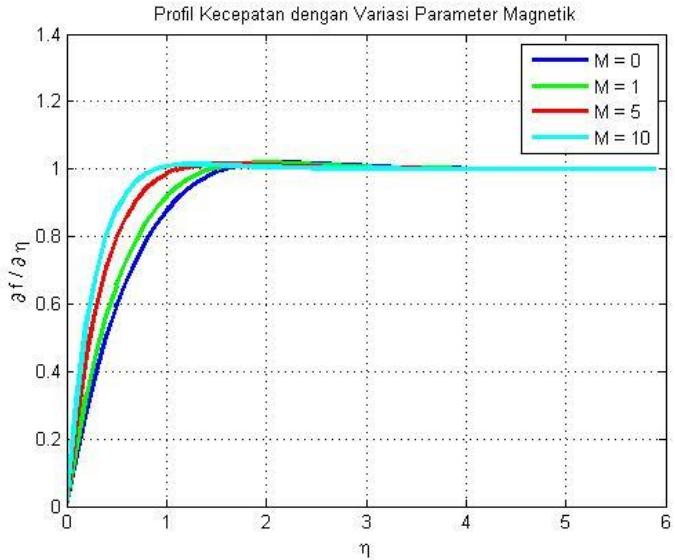


**Gambar 4.2** Grafik profil kecepatan ( $f'$ ) dengan variasi parameter magnetik ( $M$ ) saat  $K = 1, n = 0$

## 2. Saat Konsentrasi Setengah Pekat ( $n = 0.5$ )

Selanjutnya, di lakukan simulasi yang serupa untuk fluida mikrokutub dengan konsentrasi setengah dari kepekatan sebelumnya, dengan menggunakan parameter bahan  $K = 1$ . Tetap digunakan variasi parameter magnetik yang sama, yaitu ( $M$ ) = 0, 1, 5, 10.





**Gambar 4.3** Grafik profil kecepatan ( $f'$ ) dengan variasi parameter magnetik ( $M$ ) saat  $K = 1, n = 0.5$

Pada Gambar 4.3 merupakan grafik yang dihasilkan dari software Matlab dengan list program terdapat pada (Lampiran 5), terlihat bahwa saat dilakukan simulasi pada fluida mikroktub dengan diberi konsentrasi setengah pekat, hasilnya menunjukkan pola yang serupa dengan simulasi pada fluida mikroktub konsentrasi pekat sebelumnya. Melalui penelitian ini, ditemukan bahwa dengan meningkatnya nilai

parameter magnetik, kecepatan aliran fluida juga mengalami peningkatan.

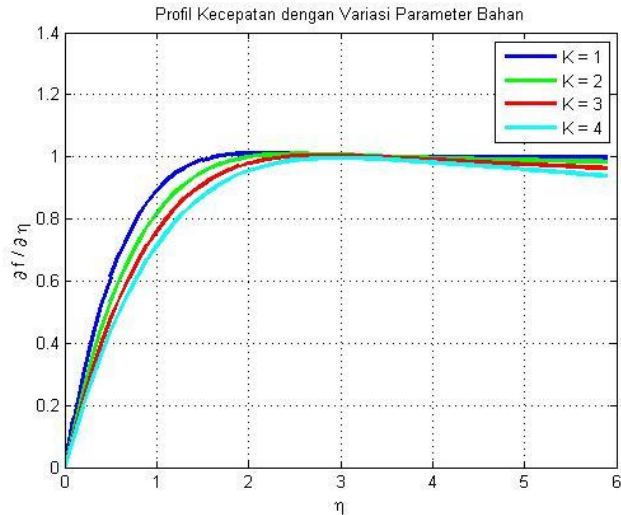
**b. Pengaruh Variasi Parameter Bahan ( $K$ ) Terhadap Profil Kecepatan ( $f'$ )**

1. Saat Konsentrasi Pekat ( $n = 0$ )

Dalam gambar 4.4 merupakan grafik yang dihasilkan dari software Matlab dengan list program terdapat pada (Lampiran 6), dapat dilihat hasil simulasi berupa profil kecepatan ( $f'$ ) dengan variasi parameter bahan ( $K$ ) sebesar 1, 2, 3, dan 4. Nilai parameter magnetik ( $M$ ) yang digunakan adalah 1. Hasil dari gambar 4.4 menunjukkan bahwa ketika nilai parameter bahan ditingkatkan, maka kecepatan fluida juga mengalami penurunan.

Dalam penelitian ini, ditemukan bahwa semakin tinggi nilai parameter bahan dalam fluida mikrokutub, maka gaya gesek antara partikel-partikel fluida juga meningkat. Akibatnya, kecepatan aliran fluida mikrokutub cenderung mengalami penurunan yang seiring dengan peningkatan nilai parameter bahan. Dalam penelitian ini, dilakukan menggunakan

fluida mikroktub yang memiliki konsentrasi pekat atau tingkat konsentrasi yang tinggi.

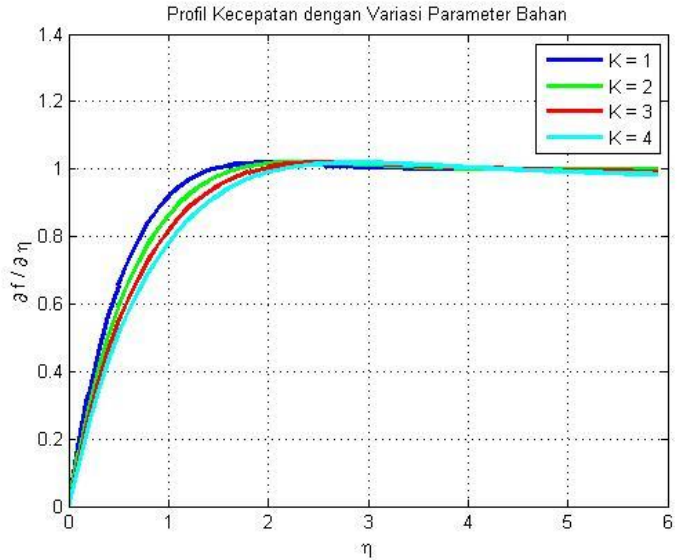


**Gambar 4.4** Grafik profil kecepatan ( $f'$ ) dengan variasi parameter bahan ( $K$ ) saat  $M = 1, n = 0$

## 2. Saat Konsentrasi Setengah Pekat ( $n = 0.5$ )

Selanjutnya, dalam gambar 4.5 merupakan grafik yang dihasilkan dari software Matlab dengan list program terdapat pada (Lampiran 7), dilakukan simulasi serupa untuk fluida mikroktub dengan konsentrasi setengah pekat. Dan digunakan parameter magnetik  $M = 1$  dalam simulasi tersebut. Dalam simulasi ini, tetap digunakan variasi parameter bahan ( $K$ ) yaitu 1, 2,

3, dan 4. Hasil simulasi menunjukkan pola yang serupa dengan fluida mikrokutub konsentrasi pekat. Hasil penelitian menunjukkan bahwa semakin besar nilai parameter bahan yang diberikan, maka terjadi penurunan kecepatan aliran fluida. Hal ini menggambarkan bahwa semakin tinggi nilai parameter bahan yang diberikan, aliran fluida cenderung melambat.



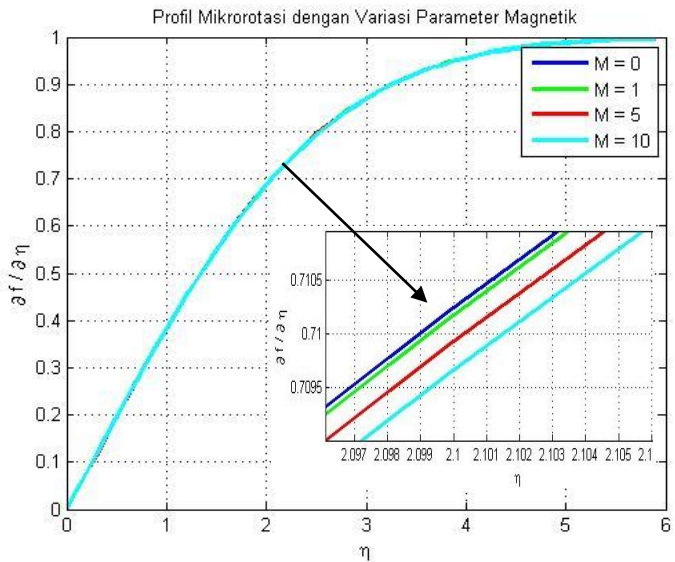
**Gambar 4.5** Grafik profil kecepatan ( $f'$ ) dengan variasi parameter bahan ( $K$ ) saat  $M = 1, n = 0.5$

Dalam simulasi ini, tetap menggunakan variasi parameter bahan ( $K$ ) yaitu 1, 2, 3, dan 4.

Hasil simulasi menunjukkan pola yang serupa dengan fluida mikrokutub konsentrasi pekat. Dalam penelitian ini, fluida mikrokutub dengan konsentrasi yang tinggi digunakan sebagai objek penelitian.

**c. Pengaruh Variasi Parameter Magnetik ( $M$ ) Terhadap Profil Mikrorotasi ( $h$ )**

**1. Saat Konsentrasi Pekat ( $n = 0$ )**



**Gambar 4.6** Grafik profil mikrorotasi ( $h$ ) dengan variasi parameter magnetik ( $M$ ) saat  $K = 1, n = 0$

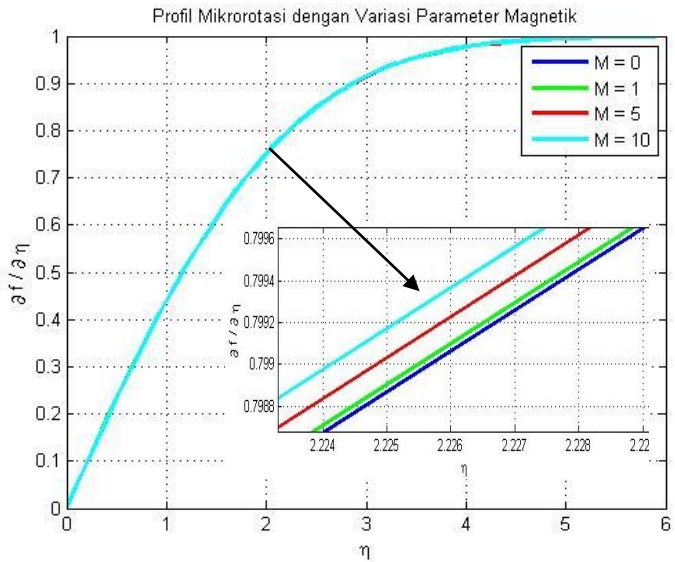
Hasil dari simulasi pada gambar 4.6 merupakan grafik yang dihasilkan dari software

Matlab dengan list program terdapat pada (Lampiran 8), menunjukkan bahwa semakin tinggi nilai magnetik yang diberikan, maka kecepatan mikrorotasi pada fluida cenderung menurun. Dapat disimpulkan bahwa semakin tinggi nilai parameter magnetik yang diberikan, maka kemampuan partikel dalam melakukan mikrorotasi pada fluida mikrokutub dengan konsentrasi pekat akan semakin menurun. Hal tersebut terjadi karena medan magnet yang terinduksi mempengaruhi pergerakan partikel-partikel dalam fluida, sehingga mengurangi kemampuan untuk melakukan mikrorotasi.

## 2. Saat Konsentrasi Setengah Pekat ( $n = 0.5$ )

Kemudian, dilakukan simulasi dengan kondisi yang serupa untuk fluida mikrokutub yang memiliki konsentrasi setengah dari kondisi pekat, dengan menggunakan parameter bahan  $K = 1$ . Pada simulasi ini, dilakukan variasi parameter magnetik dengan nilai ( $M$ ) sebesar 0, 1, 5, dan 10. Hasil simulasi tersebut kemudian dianalisis dan dicatat untuk mendapatkan hasil yang diperoleh dari setiap parameter yang digunakan.

Berdasarkan hasil simulasi yang tergambar pada Gambar 4.7 merupakan grafik yang dihasilkan dari software Matlab dengan list program terdapat pada (Lampiran 9), dapat diamati bahwa ketika konsentrasi fluida mikrokutub berada pada tingkat setengah pekat, terjadi peningkatan signifikan dalam kecepatan mikrorotasi fluida ketika nilai parameter magnetiknya ditingkatkan.



**Gambar 4.7** Grafik profil mikrorotasi ( $h$ ) dengan variasi parameter magnetik ( $M$ ) saat  $K = 1, n = 0.5$

Hal ini menunjukkan adanya hubungan yang kuat antara parameter magnetik dan kecepatan

mikrorotasi fluida mikrokutub pada kondisi tersebut. Penelitian ini menunjukkan bahwa aliran fluida mikrokutub dengan konsentrasi setengah pekat, teramati bahwa partikel-partikel fluida cenderung memiliki kecepatan mikrorotasi yang lebih rendah. Dengan meningkatnya parameter magnetik, terlihat bahwa kecepatan mikrorotasi partikel-partikel fluida meningkat. Dampaknya, kecepatan mikrorotasi pada aliran fluida juga mengalami peningkatan.

**d. Pengaruh Variasi Parameter Bahan ( $K$ ) Terhadap Profil Mikrorotasi ( $h$ )**

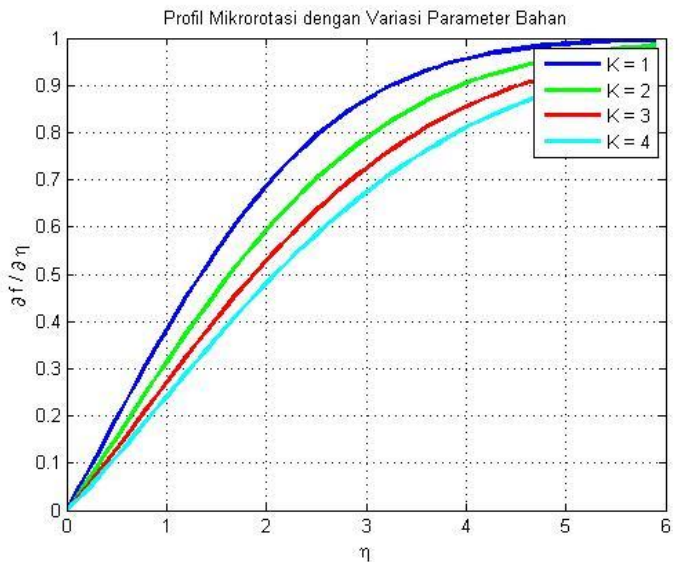
1. Saat Konsentrasi Pekat ( $n = 0$ )

Melanjutkan penelitian ini, simulasi dilakukan pada gambar 4.8 merupakan grafik yang dihasilkan dari software Matlab dengan list program terdapat pada (Lampiran 10), dengan mengamati profil mikrorotasi ( $h$ ) pada fluida mikrokutub. Variasi parameter bahan ( $K$ ) yang digunakan adalah 1, 2, 3, dan 4, sedangkan parameter magnetik ( $M$ ) tetap 1. Dalam penelitian ini, dilakukan penggunaan fluida mikrokutub dengan konsentrasi yang lebih tinggi untuk mengamati aliran dan karakteristiknya.



Hasil pengamatan pada gambar 4.8 menunjukkan bahwa semakin tinggi nilai parameter bahan yang digunakan, maka kecepatan mikrorotasi pada fluida mikroktub cenderung menurun.

Hal ini dapat dijelaskan oleh adanya peningkatan gaya gesek antara partikel-partikel fluida mikroktub saat mengalir. Akibatnya, semakin tinggi nilai parameter bahan yang digunakan, gesekan antar partikel semakin besar, yang berkontribusi pada penurunan kecepatan mikrorotasi pada aliran fluida mikroktub. Berikut adalah hasil simulasi yang telah diperoleh dari penelitian ini:

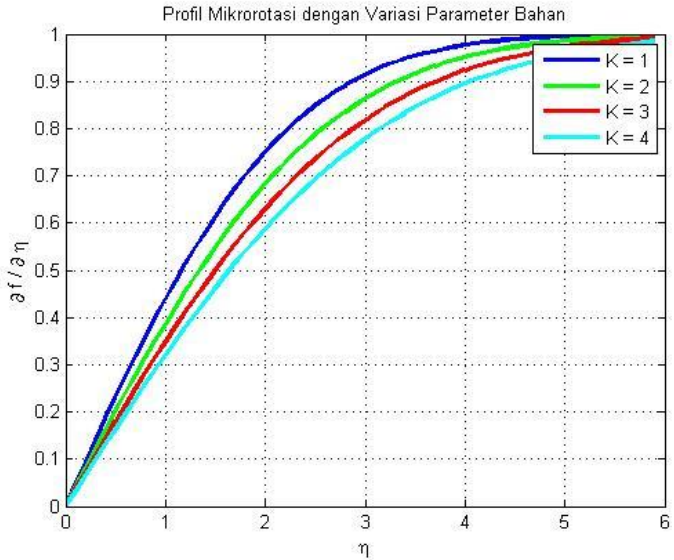


**Gambar 4.8** Grafik profil mikrorotasi ( $h$ ) dengan variasi parameter bahan ( $K$ ) saat  $M = 1, n = 0$

2. Saat Konsentrasi Setengah Pekat ( $n = 0.5$ )

Kemudian, dilakukan serangkaian simulasi yang serupa untuk mempelajari aliran fluida mikrokutub dengan konsentrasi setengah pekat. Dalam simulasi tersebut, parameter magnetik yang digunakan adalah  $M = 1$ . Dalam penelitian ini, dilakukan variasi parameter bahan ( $K$ ) dengan nilai 1, 2, 3, dan 4 pada simulasi aliran fluida mikrokutub. Hasil simulasi ini memberikan pengertian tentang perubahan karakteristik aliran berdasarkan perbedaan nilai parameter bahan yang digunakan.

Pada Gambar 4.9 merupakan grafik yang dihasilkan dari software Matlab dengan list program terdapat pada (Lampiran 11), hasil simulasi menunjukkan hal yang serupa dengan fluida mikrokutub dengan konsentrasi pekat. Hasil simulasi menunjukkan bahwa semakin tinggi nilai parameter bahan yang diberikan pada fluida mikrokutub dengan konsentrasi setengah pekat, maka kecepatan mikrorotasi aliran fluida akan semakin menurun.



**Gambar 4.9** Grafik profil mikrorotasi ( $h$ ) dengan variasi parameter bahan ( $K$ ) saat  $M = 1, n = 0.5$

Hal ini menunjukkan bahwa parameter bahan memiliki pengaruh signifikan terhadap karakteristik aliran fluida mikrokutub, terlepas dari konsentrasi pekat atau setengah pekatnya. Hasil penelitian ini memberikan pemahaman yang lebih menyeluruh tentang interaksi antara parameter bahan dan mikrorotasi fluida, serta memberikan kontribusi penting dalam pengembangan penelitian dan aplikasi terkait fluida mikrokutub.

## BAB V

### PENUTUP

#### 5.1 Kesimpulan

Setelah melakukan analisis dan pembahasan mengenai topik sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan bahwa:

1. Model matematika untuk aliran fluida mikroktub tak tunak melalui lapisan batas pada permukaan bola dapat diperoleh dengan menurunkan persamaan kontinuitas, persamaan momentum linear, dan persamaan momentum angular. Proses ini melibatkan konversi persamaan dari dimensi ke non-dimensi, pendekatan lapisan batas, dan transformasi persamaan menjadi bentuk similaritas. Sebagai hasilnya, diperoleh model matematika berikut ini:

- a. Persamaan momentum linier

$$(1 + K)f''' + Kh' + \frac{\eta}{2}f'' + Mt(1 - f') + \frac{3}{2}t(1 + ff'' - (f')^2) = t\left(\frac{\partial f'}{\partial t}\right)$$

- b. Persamaan momentum angular

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right)h'' + \frac{\eta}{2}h' + \frac{h}{2} + \frac{3}{2}t(fh' - hf') = t\frac{\partial h}{\partial t} + Kt(2h + f'')$$

2. Dengan mengaplikasikan dua variasi parameter, yaitu parameter magnetik ( $M$ ) dan parameter bahan ( $K$ ), pada simulasi numerik dengan  $n = 0$  dan  $n = 0.5$ , diperoleh hasil sebagai berikut:
  - a. Semakin besar nilai yang diberikan pada parameter magnetik yang digunakan, maka profil kecepatan fluida yang dihasilkan akan semakin meningkat.
  - b. Semakin besar nilai yang diberikan pada parameter bahan yang digunakan, maka profil kecepatan fluida yang dihasilkan akan semakin menurun.
  - c. Ketika parameter magnetik ditingkatkan, profil mikrorotasi akan mengalami penurunan untuk nilai  $n = 0$  (saat konsentrasi pekat). Namun, untuk  $n = 0.5$  (saat konsentrasi setengah pekat), semakin besar pula parameter magnetik yang digunakan, maka profil mikrorotasi akan meningkat.
  - d. Apabila nilai parameter bahan ditingkatkan, profil mikrorotasi fluida akan mengalami penurunan.

## **5.2 Saran**

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan terhadap permasalahan ini, disarankan untuk penelitian selanjutnya untuk melakukan studi tentang konveksi paksa ataupun konveksi campuran dari berbagai aliran fluida mikrokutub saat melewati struktur benda yang berbeda.

## DAFTAR PUSTAKA

- Al-Shibani, F.S., Ismail, A.I. Md., dan Abdullah, F.A., (2012), *"The Implicit Keller-Box Method for The OneDimensional Time Fractional Diffusion Equation"*, Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics, Vol. 2, No. 3, hal. 69-84.
- Elseth, G. (2001). *An Experimental Study of Oil/Water Flow in Horizontal Pipes*. Tess Ph.D. Telemark University College. Norwegia.
- Fauziyah, M. (2018). *Karakterisasi Magnetohidrodinamik Fluida Mikrokutub Tak Tunak Yang Melewati Bola Dipengaruhi Konveksi Campuran Menggunakan Skema Implisit Euler*.
- Fox, R. W., McDonald, A.T., dan Pritchard, P.J. (2011). *Introduction to Fluid Mechanics*. 8th edition. John Wiley and Sons. United States Of America.
- Haque, MD. Z., Alam, MD. M., Ferdows, M., Postelnicu, A. (2011). *"Micropolar Fluid Behaviors On Steady MHD Free Convection And Mass Fluxes, Joule Heating And Viscous Dissipation"*. Journal of King Saud University Engineering Science 24, 71-84.
- Hussanan, A., Ismail, Z., Khan, I., Hussein, A., dan Shafie, S. (2014). *Unsteady Boundary Layer MHD Free Convection Flow in a Porous Medium with Constant Mass Diffusion and Newtonian Heating*. The European Physical Journal Plus. hal. 1-16
- Imron, C., Suhariningsih, Widodo, B., dan Yuwono, T. (2011). *Solusi Numerik dari Persamaan Navier-Stokes*.

Journal of Mathematics and Its Applications. Vol.8,  
No.2.

Johnson, A., Smith, B. (2020). *The Rheological Properties of Non-Newtonian Fluids*. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 30(4), 455-468.

Kumalasari, C. J. (2018). *Aliran Fluida Magnetohidrodinamik Mikrokatub yang melalui Bola Berpori Dipengaruhi Oleh Konveksi Campuran dan Medan Magnet*.

Mohammad, N. F., Mohd Kasim, A. R., Ali, A. and Shafie, S. (2012), *"Unsteady Mixed Convection Boundary Layer Flow Past a Sphere in a Micropolar Fluid"*, American Institute of Physics Conference Series. Vol. 1450. 211-217.

Mohammad, N.F, (2014), *Unsteady Magnetohydrodynamic Convective Boundary Layer Flow Past a Sphere In Viscous and Micropolar Fluids*, Thesis Doctor of Philosophy (Mathematics). Universiti Teknologi Malaysia, Malaysia.

Munson, BR., Yong, DF., Okiishi, Ted H., dan Huebsch, WW., (2009). *Fundamentals of Fluid Mechanics*. 6th edition. John Wiley and Sons. United States Of America.

Ningtyas, R. A. (2016). *Aliran Fluida Mikrokatub Tak Tunak Magnetohidrodinamik Pada Lapisan Batas Yang Melewati Bola Teriris*. 1-5.

Norasia, Y., Tafrikan, M., & Ghani, M. (2022). "Laminar Viscous Fluid Flow with Micro-Rotation Capabilities through Cylindrical Surface." *JTAM (Jurnal Teori Dan Aplikasi Matematika)* 6 (4): 865.



- Pratomo, R. V. (2017). *Magnetohidrodinamik Yang Tak Tunak Pada Lapisan Batas Yang Mengalir Melalui Bola Di Dalam Fluida Mikrokutub Di Bawah Pengaruh Medan Magnet.*
- Putri, R. O. (2018). *Magnetohidrodinamik Tak Tunak dengan Konveksi Paksa pada Fluida Micropolar yang Melalui Bola Berpori.*
- Rahma, N. A. (2017). *Konveksi Paksa dari Aliran Fluida Magnetohidrodinamik Tak Tunak yang Melalui Bola Berpori.*

## LAMPIRAN

### Lampiran 1: Transformasi Persamaan Pembangun Dimensional ke Persamaan Non-Dimensional

#### 1. Persamaan Kontinuitas

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{r}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{r}\bar{v}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial aruU_\infty}{\partial ax} + \frac{\partial arvU_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{\partial ay Re^{\frac{1}{2}}} &= 0 \\ \frac{aU_\infty}{a} \left( \frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

#### 2. Persamaan Momentum

##### a. Persamaan momentum sumbu-x

$$\begin{aligned}\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \\ \sigma B_0^2 \bar{u} + k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}}\end{aligned}$$

Ruas kiri:

$$\begin{aligned}\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho \left( \frac{\partial uU_\infty}{\partial at \frac{U_\infty}{a}} + uU_\infty \frac{\partial uU_\infty}{\partial ax} + \right. \\ &\left. \frac{vU_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial uU_\infty}{\frac{\partial ay}{Re^{\frac{1}{2}}}} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho \left( \frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{U_\infty^2}{a} u \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ &\left. \frac{U_\infty^2}{a} Re^{-\frac{1}{2}} v \frac{\partial u}{\partial y Re^{-\frac{1}{2}}} \right)\end{aligned}$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = \rho \frac{U_\infty^2}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Ruas kanan:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) - \sigma B_0^2 \bar{u} + k \frac{\partial N}{\partial y} \\ & = -\frac{\partial \rho U_\infty^2 p}{\frac{\partial a x}{Re^{\frac{1}{2}}}} + (\mu + \mu k) \left( \frac{\partial^2 u U_\infty}{\partial a^2 x^2} + \frac{\partial^2 u U_\infty Re}{\partial a^2 y^2} \right) - \\ & \sigma (B_0)^2 u U_\infty + \mu k \frac{U_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{a} \frac{\partial N}{\frac{\partial a y}{Re^{\frac{1}{2}}}} \\ & = -\frac{\rho U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + k) \left( \frac{U_\infty}{a^2} \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \\ & \sigma U_\infty B_0^2 u + \frac{U_\infty Re}{a^2} k \frac{\partial N}{\partial y} \end{aligned}$$

Ruas kiri sama dengan ruas kanan:

$$\begin{aligned} \rho \frac{U_\infty^2}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) & = -\frac{\rho U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + \\ k) \left( \frac{U_\infty}{a^2} \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) & - \sigma U_\infty B_0^2 u + \frac{U_\infty Re}{a^2} k \frac{\partial N}{\partial y} \end{aligned}$$

Kemudian kedua ruas dikalikan dengan  $\frac{a}{\rho U_\infty^2}$  dan disubstitusikan  $k = K \mu$  sehingga didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} & = -\frac{\partial p}{\partial x} + (1 + k) \mu \left( \frac{1}{a \rho U_\infty} \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. \\ Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big) + \frac{a}{\rho U_\infty} \sigma B_0^2 u + \frac{K \mu Re}{\rho a U_\infty} \frac{\partial N}{\partial y} \end{aligned}$$

Substitusikan  $U_\infty \cdot a = Re \cdot v$ ,  $v = \frac{\mu}{\rho}$ ,  $M = \frac{a\sigma B_0^2}{\rho U_\infty}$ ,  $Gr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)a^3}{v^3}$ , dan  $\alpha = \frac{Gr}{Re^2}$ . Sehingga diperoleh persamaan momentum sumbu-x non-dimensional sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(1+K)}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu + K \frac{\partial N}{\partial y}$$

b. Persamaan momentum sumbu-y:

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_0^2 \bar{v} - k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}}$$

Ruas kiri:

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = \rho \left( \frac{\frac{\partial v U_\infty}{Re^2 \frac{1}{a}}}{\frac{U_\infty}{a}} + u U_\infty \frac{\frac{\partial U_\infty v}{Re^2 \frac{1}{a}}}{\frac{1}{a}} + \frac{\frac{\partial v U_\infty}{Re^2 \frac{1}{a}}}{\frac{1}{a}} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = \rho \left( \frac{U_\infty^2}{a Re^2 \frac{1}{a}} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{U_\infty^2}{a Re^2 \frac{1}{a}} u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{a Re^2 \frac{1}{a}} v \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = \rho \frac{U_\infty^2}{a Re^2} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Ruas kanan:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_0^2 \bar{v} - k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} \\
 = & -\frac{\partial \rho U_\infty^2 p}{\frac{\partial a y}{\frac{1}{Re^2}}} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 v U_\infty}{\partial a^2 Re^2 x^2} + \frac{\partial^2 v U_\infty}{\partial a^2 y^2} \right) + \\
 & \sigma B_0^2 v U_\infty - k \frac{U_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{a} \frac{\partial N}{\frac{\partial a y}{\frac{1}{Re^2}}} \\
 = & -\frac{\rho U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + k) \left( \frac{U_\infty}{a^2 Re^{\frac{1}{2}}} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \\
 & \frac{U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} v \sigma B_0^2 - \frac{U_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{a^2} k \frac{\partial N}{\partial y}
 \end{aligned}$$

Ruas kiri sama dengan ruas kanan:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{U_\infty^2}{a Re^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & -\frac{\rho U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + \\
 k) \left( \frac{U_\infty}{a^2 Re^{\frac{1}{2}}} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + & \frac{U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} v \sigma B_0^2 - \frac{U_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{a^2} k \frac{\partial N}{\partial y}
 \end{aligned}$$

Kemudian kedua ruas dikalikan dengan  $\frac{a}{\rho U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}}}$  dan

disubstitusikan kedalam  $k = K \mu, Gr = \frac{g \beta (T_w - T_\infty) a^3}{\nu^3}$

sehingga didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + (1 + K) \left( \frac{\mu}{U_\infty a Re \rho} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \\
 & \left. Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{av}{U_\infty} \sigma B_0^2 - \frac{\mu}{\rho a U_\infty} K \frac{\partial N}{\partial y}
 \end{aligned}$$

Dan substitusikan  $U_\infty \cdot a = Re \cdot v, v = \frac{\mu}{\rho}, M = \frac{\alpha B_0^2}{\rho U_\infty}$ ,  
 dan  $\alpha = \frac{Gr}{Re^2}$ . Maka diperoleh persamaan momentum  
 pada sumbu-y non-dimensional sebagai berikut:

$$\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1+K}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{(1+k)}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{Mv}{Re} - \frac{K}{Re} \frac{\partial N}{\partial x}$$

### c. Persamaan Momentum Angular

$$\rho j \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) = \gamma \left( \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - k \left( 2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)$$

Ruas kiri:

$$\begin{aligned} & \rho j \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) \\ &= \rho j \left( \frac{U_\infty^2 Re^2}{a^2} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{u U_\infty^2 Re^2}{a^2} \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{v U_\infty^2 Re^2}{a^2} \frac{\partial N}{\partial y} \right) \\ &= \rho j \frac{U_\infty^2 Re^2}{a^2} \left( \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Ruas kanan:

$$\begin{aligned} & \gamma \left( \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - k \left( 2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) = \left( \mu + \right. \\ & \left. \frac{K\mu}{2} \right) j \left( \frac{\partial^2 Re^2 U_\infty N}{\partial a^2 x^2 a} + \frac{\partial^2 Re^2 U_\infty N R_e}{\partial a^2 y^2 a} \right) - K\mu \left( 2 \frac{U_\infty Re^2}{a} N + \right. \\ & \left. \frac{\partial Re^2 U_\infty u}{\partial a y} + \frac{\partial U_\infty v}{\partial Re^2 a x} \right) \end{aligned}$$

$$\gamma \left( \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - k \left( 2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) = \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \mu j \left( \frac{Re^{\frac{1}{2}} U_{\infty}}{a^3} \right) \left( \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \mu \frac{U_{\infty} Re^{\frac{1}{2}}}{a} \left( 2N + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Ruas kiri sama dengan ruas kanan:

$$\rho j \frac{U_{\infty}^2 Re^{\frac{1}{2}}}{a^2} \left( \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) = \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \mu j \left( \frac{Re^{\frac{1}{2}} U_{\infty}}{a^3} \right) \left( \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \mu \frac{U_{\infty} Re^{\frac{1}{2}}}{a} \left( 2N + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Kedua ruas dikalikan dengan  $\frac{a^2}{U_{\infty}^2 Re^{\frac{1}{2}}}$ , sehingga diperoleh:

$$\rho j \left( \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) = \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \frac{\mu j}{U_{\infty} a} \left( \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \mu \frac{a}{U_{\infty}} \left( 2N + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Membagi kedua ruas dengan  $\rho j$  kemudian substitusi  $\mu = \rho v$  dan  $j = \frac{av}{U_{\infty}}$ , sehingga diperoleh persamaan momentum angular sebagai berikut:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} = \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left( 2N + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

## Lampiran 2: Perhitungan Kecepatan Aliran Bebas (*Free Stream*) $U_e$ Permukaan Bola

Kecepatan aliran bebas (*Free Stream*) dalam bentuk koordinat bola (*Spherical*) adalah:

$$U_r = -U_\infty \cos(\theta) \quad (6.1)$$

$$U_\theta = U_\infty \sin(\theta) \quad (6.2)$$

$$U_\phi = 0 \quad (6.3)$$

Streamline dari kecepatan dituliskan menjadi sebagai berikut (John, 2010):

$$U = \nabla\varphi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^3} e_r + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^3} e_\theta + 0e_\phi \quad (6.4)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (6.1) kedalam persamaan (6.4) maka diperoleh:

$$U_r = -U_\infty \cos\theta + \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^3} = -\left(U_\infty - \frac{\mu}{2\pi r^3}\right) \cos\theta \quad (6.5)$$

$$U_\theta = U_\infty \sin\theta + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^3} = \left(U_\infty + \frac{\mu}{4\pi r^3}\right) \sin\theta \quad (6.6)$$

$$U_\phi = 0 \quad (6.7)$$

Untuk titik stagnasi dimana  $U_r = U_\theta = 0$ , maka  $U_\theta = 0$  mengakibatkan  $\sin\theta = 0$  yang terletak pada  $\theta = 0$  atau  $\theta = \pi$ . Sedangkan untuk  $U_r = 0$ , maka

$$U_\infty - \frac{\mu}{2\pi R^3} = 0 \quad (6.8)$$

Dengan  $r = R$  merupakan koordinat jari-jari dari titik stagnasi. Untuk menyelesaikan persamaan (6.8) maka diperoleh nilai  $R$  sebagai berikut:

$$R = \left(\frac{\mu}{2\pi U_\infty}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (6.9)$$



Dengan mensubstitusikan persamaan (6.9) kedalam persamaan (6.5) maka diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 U_r &= -\left(U_\infty - \frac{\mu}{2\pi R^3}\right) \cos \theta \\
 &= -\left(U_\infty - \frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{2\pi U_\infty}{\mu}\right)\right) \cos \theta \\
 &= -(U_\infty - U_\infty) \cos \theta \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Dengan substitusi (6.9) pada  $U_\theta$ , maka

$$U_\theta = \left(U_\infty + \frac{\mu}{4\pi r^3}\right) \sin \theta \tag{6.11}$$

Selanjutnya, persamaan (6.9) dapat dituliskan menjadi sebagai berikut:

$$\mu = 2\pi R^3 U_\infty \tag{6.12}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (6.12) kedalam persamaan (6.11) maka diperoleh:

$$U_\theta = \left(U_\infty + \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi R^3 U_\infty}{R^3}\right) \sin \theta \tag{6.13}$$

Atau dapat dituliskan menjadi sebagai berikut:

$$U_\theta = \frac{3}{2} U_\infty \sin \theta \tag{6.14}$$

Kecepatan aliran bebas untuk penelitian ini dituliskan sebagai berikut:

$$\bar{U}_e = \frac{3}{2} U_\infty \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)$$

Dengan mengubah ke bentuk non-dimensional, maka menjadi:

$$u_e U_\infty = \frac{3}{2} U_\infty \sin\left(\frac{ax}{a}\right)$$

$$u_e = \frac{3}{2} \sin x$$

### Lampiran 3: Perhitungan Persamaan Similaritas

Persamaan yang diperoleh dari fungsi alir, selanjutnya akan ditransformasikan ke dalam persamaan similaritas menggunakan variabel-variabel similaritas sebagai berikut:

$$\psi = t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t)$$

$$\eta = \frac{y}{t^{\frac{1}{2}}}$$

$$N = t^{\frac{1}{2}} u_e(x) h(x, \eta, t)$$

Sehingga didapatkan

#### 1. Persamaan Kontinu

$$\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial r}{\partial y} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

#### 2. Persamaan momentum

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} +$$

$$M \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + (1 + K) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + K \frac{2N}{\partial y}$$

Dengan

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial (t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t))}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\eta} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} =$$

$$u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\eta}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t)}{\partial x} = t^{\frac{1}{2}} f(x, \eta, t) r(x) \frac{d u_e(x)}{d x} +$$

$$t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x} + t^{\frac{1}{2}} u_e(x) f(x, \eta, t) \frac{d r(x)}{d x}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial (t^{\frac{1}{2}} U_e(x) r(x) f(x, \eta, t))}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = t^{\frac{1}{2}} U_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\eta} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} =$$

$$u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\eta} \right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} =$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\eta} \right) \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{u_e(x) r(x)}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u_e(x) r(x)}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u_e(x) r(x)}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \frac{u_e(x) r(x)}{t} \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( U_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\eta} \right) =$$

$$r(x) \frac{d U_e(x)}{d(x)} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + U_e(x) \frac{d r(x)}{d(x)} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + U_e(x) +$$

$$r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta \partial x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) = \\
&\frac{\partial}{\partial \eta} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) = \\
&u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \left( -\frac{\eta}{2t} \right) + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta \partial t} = \\
&- \frac{u_e(x) r(x) \eta}{t} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{2 \partial \eta^2} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta \partial t} \\
\frac{\partial N}{\partial y} &= \frac{\partial \left( t^{-\frac{1}{2}} u_e(x) h(x, \eta, t) \right)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = t^{-\frac{1}{2}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = \\
&\frac{u_e(x)}{t} \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta}
\end{aligned}$$

Untuk selanjutnya akan dituliskan  $u_e = u_e$ ,  $r(x) = r$  dan  $f(x, \eta, t) = f$  sehingga persamaan similaritas untuk momentum yaitu:

Ruas kiri:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \\
&\frac{1}{r} \left( -\frac{u_e r \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} \right) + \frac{1}{r^2} \left( u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left( \frac{d u_e}{d r} r \frac{\partial f}{\partial \eta} + \right. \\
&u_e \frac{d r}{d x} \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \left. \right) - \frac{1}{r^3} \frac{d r}{d x} \left( u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - \\
&\frac{1}{r^2} \left( t^{\frac{1}{2}} f(x, \eta, t) r(x) \frac{d u_e(x)}{d x} + t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x} + \right. \\
&t^{\frac{1}{2}} u_e(x) f(x, \eta, t) \frac{d r(x)}{d x} \left. \right) \left( \frac{u_e r}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{u_e \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} + u_e \frac{du_e}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{u_e^2}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \\
&u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} u_e^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{du_e}{dx} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e - \frac{u_e^2 f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \\
&u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

Ruas kanan

$$\begin{aligned}
&u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + M \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + (1 + K) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + K \frac{\partial N}{\partial y} \\
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + M \left( \frac{1}{r} \left( u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - u_e \right) + (1 + K) \frac{1}{r} \left( \frac{u_e r}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + \\
&K \frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} \\
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + M \left( u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} - u_e \right) + (1 + K) \left( \frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + \\
&K \left( \frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

Ruas kiri sama dengan ruas kanan

$$\begin{aligned}
&-\frac{u_e \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} + u_e \frac{du_e}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{u_e^2}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \\
&u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} u_e^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{du_e}{dx} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e - \frac{u_e^2 f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \\
&u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + M \left( u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} - u_e \right) + (1 + \\
&K) \left( \frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + K \left( \frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

Kedua ruas dikali dengan  $\frac{t}{u_e}$ , sehingga diperoleh persamaan momentum sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} + t \frac{du_e}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{u_e t}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \\
& u_e t \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} u_e t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{du_e}{dx} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} t - \frac{u_e t f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \\
& u_e t \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = t \frac{\partial u_e}{\partial x} + Mt \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) + (1 + K) \left( \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + \\
& K \left( \frac{\partial h}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 + K) \left( \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + K \left( \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \left( \frac{du_e}{dx} + M \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} - \right. \right. \\
& \left. \left. 1 \right) \right) + \frac{du_e}{dx} t \left( f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right) \\
& = t \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} \right) + u_e t \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{df}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 + K) \left( \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + K \left( \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + Mt \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) + \\
& \frac{du_e}{dx} t \left( 1 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right) \\
& = t \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} \right) + u_e t \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{df}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

### 3. Persamaan Momentum Angular

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} = \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left( 2N + \right. \\
& \left. \frac{1}{r} \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}$$

Dengan,

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( t^{-\frac{1}{2}} u_e(x) h(x, \eta, t) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial\left(t^{-\frac{1}{2}}u_e(x)h(x,\eta,t)\right)}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}u_e(x)h(x,\eta,t)\right) \\
&= t^{-\frac{1}{2}}u_e(x)\frac{\partial h(x,\eta,t)}{\partial\eta}\left(-\frac{1}{2t}\right)+t^{-\frac{1}{2}}u_e(x)\frac{\partial h(x,\eta,t)}{\partial t}- \\
&\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}u_e(x)h(x,\eta,t) \\
&= -\frac{\eta}{2}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}u_e(x)\frac{\partial h(x,\eta,t)}{\partial\eta}+\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}u_e(x)\frac{\partial h(x,\eta,t)}{\partial t}- \\
&\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}u_e(x)h(x,\eta,t) \\
\frac{\partial N}{\partial x}&= \frac{\partial}{\partial x}\left(t^{-\frac{1}{2}}u_e(x)h(x,\eta,t)\right)=\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\frac{du_e(x)}{dx}h(x,\eta,t)+ \\
&\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}u_e(x)\frac{\partial h(x,\eta,t)}{\partial x} \\
\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_e(x)}{t}\frac{\partial h(x,\eta,t)}{\partial\eta}\right)=\frac{u_e(x)}{t^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial^2 h(x,\eta,t)}{\partial\eta^2}
\end{aligned}$$

Persamaan momentum angular ruas kiri:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial N}{\partial y} \\
&= -\frac{\eta}{2}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}u_e(x)\frac{\partial h(x,\eta,t)}{\partial\eta}+\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}u_e(x)\frac{\partial h(x,\eta,t)}{\partial t}- \\
&\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}u_e(x)h(x,\eta,t)+ \\
&\frac{1}{r}\left(u_e(x)r(x)\frac{\partial f(x,\eta,t)}{\partial\eta}\right)\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\frac{du_e(x)}{dx}h(x,\eta,t)+\right. \\
&\left.\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}u_e(x)\frac{\partial h(x,\eta,t)}{\partial x}\right)-\frac{1}{r}\left(t^{\frac{1}{2}}f(x,\eta,t)r(x)\frac{du_e(x)}{dx}+\right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x} + \\
& t^{\frac{1}{2}} u_e(x) f(x, \eta, t) \frac{dr(x)}{dx} \left( \frac{u_e(x)}{t} \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
& = -\frac{\eta}{2} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} u_e \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} u_e h + \frac{u_e h}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{du_e}{dx} + \\
& \frac{u_e^2}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \left( \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} f \frac{du_e}{dx} - \frac{t^{\frac{1}{2}} u_e f}{r} \frac{dr}{dx} - t^{\frac{1}{2}} u_e \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left( \frac{1}{t} u_e \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \\
& = -\frac{\eta}{2} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} u_e \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} u_e h + \frac{u_e h}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{du_e}{dx} + \\
& \frac{u_e^2}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{u_e f}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{du_e}{dx} - \frac{u_e^2 f}{t^{\frac{1}{2}} r} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{dr}{dx} - \frac{u_e^2}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x}
\end{aligned}$$

Ruas kanan

$$\begin{aligned}
& \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left( 2N + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \\
& = \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{u_e(x)}{t^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial^2 h(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) - K \left( 2 \left( \frac{u_e h}{t^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{1}{r} \frac{u_e r}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\
& = \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{u_e(x)}{t^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial^2 h(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) - K \left( 2 \left( \frac{u_e h}{t^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{u_e}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\
& = \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{u_e(x)}{t^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial^2 h(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) - K \frac{u_e}{t^{\frac{1}{2}}} \left( 2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

Ruas kiri sama dengan ruas kanan, sehingga

$$\begin{aligned}
& -\frac{\eta}{2} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} u_e \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} u_e h + \frac{u_e h}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{du_e}{dx} + \\
& \frac{u_e^2}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{u_e f}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{du_e}{dx} - \frac{u_e^2 f}{t^{\frac{1}{2}} r} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{dr}{dx} - \frac{u_e^2}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} = \\
& \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{u_e(x)}{t^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial^2 h(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) - K \frac{u_e}{t^{\frac{1}{2}}} \left( 2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

Kedua ruas dikali dengan  $\frac{t^{\frac{3}{2}}}{u_e}$ , sehingga persamaan momentum angular menjadi

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + t \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{h}{2} + th \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{du_e}{dx} + u_e t \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - tf \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{du_e}{dx} - \\
 & \frac{u_e t f}{r} \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{dr}{dx} - u_e t \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} = \left(1 + \frac{K}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}\right) - Kt \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \\
 & \left(1 + \frac{K}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{h}{2} + t \frac{du_e}{dx} \left(f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \\
 & = t \frac{\partial h}{\partial t} + tu_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta}\right) + Kt \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)
 \end{aligned}$$

#### Lampiran 4: List Program dengan Matlab Grafik Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik saat Konsentrasi Pekat

```
clear all
clc
close all
format long
np = 60; %% banyak partisi eta
nt = 33; %% banyak partisi waktu
nt1 = 21; %% banyak partisi waktu untuk small
time
K = 1; %Parameter Bahan
%M = 1; %Parameter Magnetik
na = 0;
deleta = 0.1; %% step size dari eta
delt = 0.05; %% step size dari waktu
magnetik(1)= 0;
magnetik(2)= 1;
magnetik(3)= 5;
magnetik(4)= 10;
for i=1:4
    eta(1) = 0;
    etac(1) = 0;
end
for j = 2:np
    eta(j) = eta(j-1) + deleta;
    etac(j) = 0.5*(eta(j) + eta(j-1));
end
for n = 1:nt
    if n == 1
        t(1) = 0;
        t1(1) = 0;
    else
        t(n) = t(n-1) + delt;
        t1(n) = 0.5*(t(n) + t(n-1));
    end
end
for i=1:4
    M = magnetik(i);
for n = 1:nt
```

```

k = 1;
stop = 1;
while stop > 0.00001
    %%initial condition
    for j = 1:np
        if n == 1
            f(j,1,n) =
eta(j)*erf(0.5*eta(j)/sqrt(1 + K*(1 -
na))) + 2*sqrt((1 + K*(1 - na))/pi)*(exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na))) - 1);
            u(j,1,n) = erf(0.5*eta(j)/sqrt(1
+ K*(1 - na)));
            v(j,1,n) = exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 -
na)))/sqrt(pi*(1 + K*(1 - na)));
            g(j,1,n) = -na*exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 -
na)))/sqrt(pi*(1 + K*(1 - na)));
            p(j,1,n) = na*eta(j)*exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 -
na)))/(sqrt(pi*(1 + K*(1 - na)))*2*(1 +
K*(1 - na)));
        else
            f(j,1,n) = ff(j,n-1);
            u(j,1,n) = uu(j,n-1);
            v(j,1,n) = vv(j,n-1);
            g(j,1,n) = gg(j,n-1);
            p(j,1,n) = pp(j,n-1);
        end
    end
    for j = 2:np
        if n == 1
            cfb(j,n) = 0;
            cub(j,n) = 0;
            cvb(j,n) = 0;
            cgb(j,n) = 0;
            cpb(j,n) = 0;
            cdervb(j,n) = 0;
            cderpb(j,n) = 0;
            cfvb(j,n) = cfb(j,n)*cvb(j,n);
            cfpb(j,n) = cfb(j,n)*cpb(j,n);
            cgub(j,n) = cgb(j,n)*cub(j,n);

```

```

    cuub(j,n) = cub(j,n)^2;
    else
    cfb(j,n) = ffb(j,n-1);
    cub(j,n) = uub(j,n-1);
    cvb(j,n) = vvb(j,n-1);
    cgb(j,n) = ggb(j,n-1);
    cpb(j,n) = ppb(j,n-1);
    cuub(j,n) = cub(j,n)^2;
    cdervb(j,n) = ddervb(j,n-1);
    cderpb(j,n) = dderpb(j,n-1);
    cfvb(j,n) = cfb(j,n)*cvb(j,n);
    cfpb(j,n) = cfb(j,n)*cpb(j,n);
    cgub(j,n) = cgb(j,n)*cub(j,n);
    end
    fb(j,k,n) = 0.5*(f(j,k,n) +
f(j-1,k,n));
    ub(j,k,n) = 0.5*(u(j,k,n) +
u(j-1,k,n));
    vb(j,k,n) = 0.5*(v(j,k,n) +
v(j-1,k,n));
    gb(j,k,n) = 0.5*(g(j,k,n) +
g(j-1,k,n));
    pb(j,k,n) = 0.5*(p(j,k,n) +
p(j-1,k,n));
    dervb(j,k,n) = (v(j,k,n) -
v(j-1,k,n))/deleta;
    derpb(j,k,n) = (p(j,k,n) -
p(j-1,k,n))/deleta;
    fvb(j,k,n) = fb(j,k,n)*vb(j,k,n);
    fpb(j,k,n) = fb(j,k,n)*pb(j,k,n);
    gub(j,k,n) = gb(j,k,n)*ub(j,k,n);
    uub(j,k,n) = ub(j,k,n)^2;
    if n < nt1 + 1
        %persamaan momentum linier
        a1(j,k) = ((1 + K)/deleta)
+ (0.25*etac(j)) +
((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
        a2(j,k) = (-(1 + K)/deleta +
0.25*etac(j)) + ((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
        a3(j,k) =
(0.75)*t1(n)*vb(j,k,n);
        a4(j,k) = a3(j,k);

```

```

a5(j,k) = (-
(1.5)*t1(n)*ub(j,k,n) - (0.5*(M)*t1(n) -
(t1(n)/delt);
a6(j,k) = a5(j,k);
a7(j,k) = 0.5*K;
a8(j,k) = a7(j,k);

%persamaan momentum angular
b1(j,k) = ((1 +
0.5*K)/deleta) + (0.25*etac(j) +
((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
b2(j,k) = (- (1 + 0.5*K)/deleta)
+ (0.25*etac(j) +
((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
b3(j,k) =
(0.75)*t1(n)*pb(j,k,n);
b4(j,k) = b3(j,k);
b5(j,k) = -
(0.75)*t1(n)*gb(j,k,n);
b6(j,k) = b5(j,k);
b7(j,k) = 0.25 -
((0.75)*t1(n)*ub(j,k,n) - (t1(n)*K) -
(t1(n)/delt);
b8(j,k) = b7(j,k);
b9(j,k) = -0.5*t1(n)*K;
b10(j,k) = b9(j,k);

r1(j,k) = f(j-1,k,n) -
f(j,k,n) + deleta*ub(j,k,n);
r2(j,k) = u(j-1,k,n) - u(j,k,n)
+ deleta*vb(j,k,n);
r3(j,k) = g(j-1,k,n) - g(j,k,n)
+ deleta*pb(j,k,n);

%momentum linier
r4(j,k) = -(1 +
K)*dervb(j,k,n) - 0.5*etac(j)*vb(j,k,n) -
(1.5)*t1(n)*(1 - uub(j,k,n) + ...
fvb(j,k,n)) - K*pb(j,k,n) -
M*t1(n)*(1 - ub(j,k,n))

```

```

+2*t1(n)*ub(j,k,n)/delt - (1 +
K)*cdervb(j,n) - ...
0.5*etac(j)*cvb(j,n) -
(1.5)*t1(n)*(1 - cuub(j,n) + cfvb(j,n)) -
K*cpb(j,n) - M*t1(n)*(1 - cub(j,n)) -
2*t1(n)*cub(j,n)/delt ;

%momentum angular
%r5(j,k) = -(1 + 0.5*K)*derpb(j,k,n) -
0.5*etac(j)*pb(j,k,n) - 0.5*gb(j,k,n) -
(1.5)*t1(n)*(fpb(j,k,n)-gub(j,k,n)) ...
%+ t1(n)*K*(2*gb(j,k,n) + vb(j,k,n)) +
2*t1(n)*gb(j,k,n)/delt- (1 +
0.5*K)*cderpb(j,n) - 0.5*etac(j)*cpb(j,n)
- 0.5*cgb(j,n)...
%-(1.5)*t1(n)*(cfpb(j,n) - cgub(j,n)) +
t1(n)*K*(2*cgb(j,n) + cvb(j,n)) -
2*t1(n)*cgb(j,n)/delt;
r5(j,k)=0;

end
end
%%Matrices
a{2,k} = [0 0 1 0 0; -0.5*deleta 0
0 -0.5*deleta 0; 0 -0.5*deleta 0 0 -
0.5*deleta; a2(2,k) a8(2,k) a3(2,k)
a1(2,k) a7(2,k); b10(2,k) b2(2,k) b3(2,k)
b9(2,k) b1(2,k)];
for j = 3:np
a{j,k} = [-0.5*deleta 0 1 0 0;
-1 0 0 -0.5*deleta 0; 0 -1 0 0 -
0.5*deleta; a6(j,k) 0 a3(j,k) a1(j,k)
a7(j,k); b6(j,k) b8(j,k) b3(j,k) b9(j,k)
b1(j,k)];
b{j,k} = [0 0 -1 0 0; 0 0 0 -
0.5*deleta 0; 0 0 0 0 -0.5*deleta; 0 0
a4(j,k) a2(j,k) a8(j,k); 0 0 b4(j,k)
b10(j,k) b2(j,k)];
end;
for j = 2:np

```

```

        c{j,k} = [-0.5*deleta 0 0 0 0;
1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; a5(j,k) 0 0 0 0;
b5(j,k) b7(j,k) 0 0 0];
    end;
    alfa{2,k} = a{2,k};
    gamma{2,k} = inv(alfa{2,k})*c{2,k};
    for j = 3:np
        alfa{j,k} = a{j,k} -
(b{j,k}*gamma{j-1,k});
        gamma{j,k} = inv(alfa{j,k})*c{j,k};
    end;
    for j = 2:np
        rr{j,k} = [r1(j,k);
r2(j,k);r3(j,k);r4(j,k);r5(j,k)];
    end;
    ww{2,k} = inv(alfa{2,k})*rr{2,k};
    for j = 3:np
        ww{j,k} =
inv(alfa{j,k})*(rr{j,k} - (b{j,k}*ww{j-
1,k}));
    end;

    %%backward sweep
    delu(1,k) = 0;
    delu(np,k) = 0;
    delg(1,k) = 0;
    delg(np,k) = 0;
    delf(1,k) = 0;
    dell{np,k} = ww{np,k};
    for j = np-1:-1:2
        dell{j,k} = ww{j,k} -
(gamma{j,k}*dell{j+1,k});
    end;
    delv(1,k) = dell{2,k}(1,1);
    delp(1,k) = dell{2,k}(2,1);
    delf(2,k) = dell{2,k}(3,1);
    delv(2,k) = dell{2,k}(4,1);
    delp(2,k) = dell{2,k}(5,1);
    delg(1,k) = -na*delv(1,k);

    for j = np:-1:3

```



```

        delu(j-1,k) = dell{j,k}(1,1);
        delg(j-1,k) = dell{j,k}(2,1);
        delf(j,k) = dell{j,k}(3,1);
        delv(j,k) = dell{j,k}(4,1);
        delp(j,k) = dell{j,k}(5,1);
    end;

    %% Newton's Method
    for j = 1:np
        u(j,k+1,n) = u(j,k,n) + delu(j,k);
        g(j,k+1,n) = g(j,k,n) + delg(j,k);
        f(j,k+1,n) = f(j,k,n) + delf(j,k);
        v(j,k+1,n) = v(j,k,n) + delv(j,k);
        p(j,k+1,n) = p(j,k,n) + delp(j,k);
    end;

    %%check for convergence of the iterations
    stop = abs(delv(1,k));
    kmax = k;
    k = k+1;
end

%shift profile
for j = 1:np
    ff(j,n) = f(j,k,n);
    uu(j,n) = u(j,k,n);
    vv(j,n) = v(j,k,n);
    gg(j,n) = g(j,k,n);
    pp(j,n) = p(j,k,n);
end

for j = 1:np
    ffb(j,n) = fb(j,kmax,n);
    uub(j,n) = ub(j,kmax,n);
    vvb(j,n) = vb(j,kmax,n);
    ggb(j,n) = gb(j,kmax,n);
    ppb(j,n) = pb(j,kmax,n);
    ddervb(j,n) = dervb(j,kmax,n);
    dderpb(j,n) = derpb(j,kmax,n);
end
end

```

```

if(i==1)
a11=u(:,kmax,nt)
figure(1)
plot(eta,u(:,kmax,nt),'b','Linewidth',2.5)
grid on;
hold on;
elseif(i==2)
a12=u(:,kmax,nt)
figure(1)
plot(eta,u(:,kmax,nt),'g','Linewidth',2.5)
grid on;
hold on;
elseif(i==3)
a13=u(:,kmax,nt)
figure(1)
plot(eta,u(:,kmax,nt),'r','Linewidth',2.5)
grid on;
hold on;
elseif(i==4)
a14=u(:,kmax,nt)
figure(1)
plot(eta,u(:,kmax,nt),'c','Linewidth',2.5)
grid on;
hold on;
legend('M = 0', 'M = 1', 'M = 5', 'M =
10')
title('Profil Kecepatan dengan Variasi
Parameter Magnetik')
xlabel ('\eta')
ylabel ('\partial f / \partial \eta')
end
end

```

## Lampiran 5: List Program dengan Matlab Grafik Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik saat Konsentrasi Setengah Pekat

```
clear all
clc
close all
format long
np = 60; %% banyak partisi eta
nt = 33; %% banyak partisi waktu
nt1 = 21; %% banyak partisi waktu untuk small
time
K = 1; %%Parameter Bahan
%M = 1; %%Parameter Magnetik
na = 0.5;
deleta = 0.1; %% step size dari eta
delt = 0.05; %% step size dari waktu
magnetik(1)= 0;
magnetik(2)= 1;
magnetik(3)= 5;
magnetik(4)= 10;
for i=1:4
    eta(1) = 0;
    etac(1) = 0;
end
for j = 2:np
    eta(j) = eta(j-1) + deleta;
    etac(j) = 0.5*(eta(j) + eta(j-1));
end
for n = 1:nt
    if n == 1
        t(1) = 0;
        t1(1) = 0;
    else
        t(n) = t(n-1) + delt;
        t1(n) = 0.5*(t(n) + t(n-1));
    end
end
for i=1:4
    M = magnetik(i);
for n = 1:nt
```

```

k = 1;
stop = 1;
while stop > 0.00001
    %%initial condition
    for j = 1:np
        if n == 1
            f(j,1,n) =
eta(j)*erf(0.5*eta(j)/sqrt(1 + K*(1 - na))) +
2*sqrt((1 + K*(1 - na))/pi)*(exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na))) - 1);
            u(j,1,n) =
erf(0.5*eta(j)/sqrt(1 + K*(1 - na)));
            v(j,1,n) = exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)));
            g(j,1,n) = -na*exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)));
            p(j,1,n) = na*eta(j)*exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/(sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)))*2*(1 + K*(1 - na)));
        else
            f(j,1,n) = ff(j,n-1);
            u(j,1,n) = uu(j,n-1);
            v(j,1,n) = vv(j,n-1);
            g(j,1,n) = gg(j,n-1);
            p(j,1,n) = pp(j,n-1);
        end
    end
    for j = 2:np
        if n == 1
            cfb(j,n) = 0;
            cub(j,n) = 0;
            cvb(j,n) = 0;
            cgb(j,n) = 0;
            cpb(j,n) = 0;
            cdervb(j,n) = 0;
            cderpb(j,n) = 0;
            cfvb(j,n) =
cfb(j,n)*cvb(j,n);
            cfpb(j,n) =
cfb(j,n)*cpb(j,n);

```

```

                                cgub (j, n) =
cgb (j, n) * cub (j, n) ;
                                cuub (j, n) = cub (j, n) ^2;
                                else
                                cfb (j, n) = ffb (j, n-1) ;
                                cub (j, n) = uub (j, n-1) ;
                                cvb (j, n) = vvb (j, n-1) ;
                                cgb (j, n) = ggb (j, n-1) ;
                                cpb (j, n) = ppb (j, n-1) ;
                                cuub (j, n) = cub (j, n) ^2;
                                cdervb (j, n) = ddervb (j, n-1) ;
                                cderpb (j, n) = dderpb (j, n-1) ;
                                cfvb (j, n) =
cfb (j, n) * cvb (j, n) ;
                                cfpb (j, n) =
cfb (j, n) * cpb (j, n) ;
                                cgub (j, n) =
cgb (j, n) * cub (j, n) ;
                                end
                                fb (j, k, n) = 0.5*(f(j, k, n) + f(j-
1, k, n)) ;
                                ub (j, k, n) = 0.5*(u(j, k, n) + u(j-
1, k, n)) ;
                                vb (j, k, n) = 0.5*(v(j, k, n) + v(j-
1, k, n)) ;
                                gb (j, k, n) = 0.5*(g(j, k, n) + g(j-
1, k, n)) ;
                                pb (j, k, n) = 0.5*(p(j, k, n) + p(j-
1, k, n)) ;
                                dervb (j, k, n) = (v(j, k, n) - v(j-
1, k, n))/deleta;
                                derpb (j, k, n) = (p(j, k, n) - p(j-
1, k, n))/deleta;
                                fvb (j, k, n) = fb (j, k, n) * vb (j, k, n) ;
                                fpb (j, k, n) = fb (j, k, n) * pb (j, k, n) ;
                                gub (j, k, n) = gb (j, k, n) * ub (j, k, n) ;
                                uub (j, k, n) = ub (j, k, n) ^2;
                                if n < nt1 + 1
                                %persamaan momentum linier
                                a1 (j, k) = ((1 + K)/deleta) +
(0.25*etac(j)) + ((0.75)*t1(n)*fb(j, k, n));

```

```

a2(j,k) = (- (1 + K)/deleta +
0.25*etac(j)) + ((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
a3(j,k) =
(0.75)*t1(n)*vb(j,k,n);
a4(j,k) = a3(j,k);
a5(j,k) = (-
(1.5)*t1(n)*ub(j,k,n)) - (0.5*(M)*t1(n)) -
(t1(n)/delt);
a6(j,k) = a5(j,k);
a7(j,k) = 0.5*K;
a8(j,k) = a7(j,k);

```

`%persamaan momentum angular`

```

b1(j,k) = ((1 +
0.5*K)/deleta) + (0.25*etac(j)) +
((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
b2(j,k) = (- (1 +
0.5*K)/deleta) + (0.25*etac(j)) +
((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
b3(j,k) =
(0.75)*t1(n)*pb(j,k,n);
b4(j,k) = b3(j,k);
b5(j,k) = -
(0.75)*t1(n)*gb(j,k,n);
b6(j,k) = b5(j,k);
b7(j,k) = 0.25 -
((0.75)*t1(n)*ub(j,k,n)) - (t1(n)*K) -
(t1(n)/delt);
b8(j,k) = b7(j,k);
b9(j,k) = -0.5*t1(n)*K;
b10(j,k) = b9(j,k);

```

```

r1(j,k) = f(j-1,k,n) -
f(j,k,n) + deleta*ub(j,k,n);
r2(j,k) = u(j-1,k,n) -
u(j,k,n) + deleta*vb(j,k,n);
r3(j,k) = g(j-1,k,n) -
g(j,k,n) + deleta*pb(j,k,n);

```

`%momentum linier`

```

r4(j,k) = - (1 +
K)*dervb(j,k,n) - 0.5*etac(j)*vb(j,k,n) -
(1.5)*t1(n)*(1 - uub(j,k,n) + ...

```

```

        fvb(j,k,n)) -
K*pb(j,k,n) - M*t1(n)*(1 - ub(j,k,n))
+2*t1(n)*ub(j,k,n)/delt - (1 + K)*cdervb(j,n)
- ...
        0.5*etac(j)*cvb(j,n) -
(1.5)*t1(n)*(1 - cuub(j,n) + cfvb(j,n)) -
K*cpb(j,n) - M*t1(n)*(1 - cub(j,n)) -
2*t1(n)*cub(j,n)/delt ;

        %momentum angular
%
        r5(j,k) = -(1 +
0.5*K)*derpb(j,k,n) - 0.5*etac(j)*pb(j,k,n) -
0.5*gb(j,k,n) - (1.5)*t1(n)*(fjb(j,k,n) -
gub(j,k,n)) ...
%
        + t1(n)*K*(2*gb(j,k,n)
+ vb(j,k,n)) + 2*t1(n)*gb(j,k,n)/delt - (1 +
0.5*K)*cderpb(j,n) - 0.5*etac(j)*cpb(j,n) -
0.5*cgb(j,n)...
%
        - (1.5)*t1(n)*(cfpb(j,n)
- cgub(j,n)) + t1(n)*K*(2*cgb(j,n) +
cvb(j,n)) - 2*t1(n)*cgb(j,n)/delt;
        r5(j,k)=0;

end
end
%%Matrices
a{2,k} = [0 0 1 0 0; -0.5*deleta 0 0
-0.5*deleta 0; 0 -0.5*deleta 0 0 -0.5*deleta;
a2(2,k) a8(2,k) a3(2,k) a1(2,k) a7(2,k);
b10(2,k) b2(2,k) b3(2,k) b9(2,k) b1(2,k)];
for j = 3:np
    a{j,k} = [-0.5*deleta 0 1 0 0; -1
0 0 -0.5*deleta 0; 0 -1 0 0 -0.5*deleta;
a6(j,k) 0 a3(j,k) a1(j,k) a7(j,k); b6(j,k)
b8(j,k) b3(j,k) b9(j,k) b1(j,k)];
    b{j,k} = [0 0 -1 0 0; 0 0 0 -
0.5*deleta 0; 0 0 0 0 -0.5*deleta; 0 0
a4(j,k) a2(j,k) a8(j,k); 0 0 b4(j,k) b10(j,k)
b2(j,k)];
end;
for j = 2:np

```

```

        c{j,k} = [-0.5*deleta 0 0 0 0; 1
0 0 0 0; 0 1 0 0 0; a5(j,k) 0 0 0 0; b5(j,k)
b7(j,k) 0 0 0];
    end;
    alfa{2,k} = a{2,k};
    gamma{2,k} = inv(alfa{2,k})*c{2,k};
    for j = 3:np
        alfa{j,k} = a{j,k} -
(b{j,k}*gamma{j-1,k});
        gamma{j,k} =
inv(alfa{j,k})*c{j,k};
    end;
    for j = 2:np
        rr{j,k} = [r1(j,k);
r2(j,k);r3(j,k);r4(j,k);r5(j,k)];
    end;
    ww{2,k} = inv(alfa{2,k})*rr{2,k};
    for j = 3:np
        ww{j,k} = inv(alfa{j,k})*(rr{j,k}
- (b{j,k}*ww{j-1,k}));
    end;

%%backward sweep
    delu(1,k) = 0;
    delu(np,k) = 0;
    delg(1,k) = 0;
    delg(np,k) = 0;
    delf(1,k) = 0;
    dell{np,k} = ww{np,k};
    for j = np-1:-1:2
        dell{j,k} = ww{j,k} -
(gamma{j,k}*dell{j+1,k});
    end;
    delv(1,k) = dell{2,k}(1,1);
    delp(1,k) = dell{2,k}(2,1);
    delf(2,k) = dell{2,k}(3,1);
    delv(2,k) = dell{2,k}(4,1);
    delp(2,k) = dell{2,k}(5,1);
    delg(1,k) = -na*delv(1,k);

    for j = np:-1:3

```



```

        delu(j-1,k) = dell{j,k}(1,1);
        delg(j-1,k) = dell{j,k}(2,1);
        delf(j,k) = dell{j,k}(3,1);
        delv(j,k) = dell{j,k}(4,1);
        delp(j,k) = dell{j,k}(5,1);
    end;

    %% Newton's Method
    for j = 1:np
        u(j,k+1,n) = u(j,k,n) +
delu(j,k);
        g(j,k+1,n) = g(j,k,n) +
delg(j,k);
        f(j,k+1,n) = f(j,k,n) +
delf(j,k);
        v(j,k+1,n) = v(j,k,n) +
delv(j,k);
        p(j,k+1,n) = p(j,k,n) +
delp(j,k);
    end;

    %%check for convergence of the
iterations
    stop = abs(delv(1,k));
    kmax = k;
    k = k+1;
end

%shift profile
for j = 1:np
    ff(j,n) = f(j,k,n);
    uu(j,n) = u(j,k,n);
    vv(j,n) = v(j,k,n);
    gg(j,n) = g(j,k,n);
    pp(j,n) = p(j,k,n);
end

for j = 1:np
    ffb(j,n) = fb(j,kmax,n);
    uub(j,n) = ub(j,kmax,n);
    vvb(j,n) = vb(j,kmax,n);

```

```

        ggb(j,n) = gb(j,kmax,n);
        ppb(j,n) = pb(j,kmax,n);
        ddervb(j,n) = dervb(j,kmax,n);
        dderpb(j,n) = derpb(j,kmax,n);
    end
end
if(i==1)
    a11=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'b','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==2)
    a12=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'g','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==3)
    a13=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'r','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==4)
    a14=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'c','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
    legend('M = 0', 'M = 1', 'M = 5', 'M =
10')
    title('Profil Kecepatan dengan Variasi
Parameter Magnetik')
    xlabel ('\eta')
    ylabel ('\partial f / \partial \eta')
end
end

```

## Lampiran 6: List Program dengan Matlab Grafik Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Bahan saat Konsentrasi Pekat

```
clear all
clc
close all
format long
np = 60; %% banyak partisi eta
nt = 33; %% banyak partisi waktu
nt1 = 21; %% banyak partisi waktu untuk small
time
%K = 1; %Parameter Bahan
M = 1; %Parameter Magnetik
na = 0;
deleta = 0.1; %% step size dari eta
delt = 0.05; %% step size dari waktu
parameter_bahan(1)= 1;
parameter_bahan(2)= 2;
parameter_bahan(3)= 3;
parameter_bahan(4)= 4;
for i=1:4
    eta(1) = 0;
    etac(1) = 0;
end
for j = 2:np
    eta(j) = eta(j-1) + deleta;
    etac(j) = 0.5*(eta(j) + eta(j-1));
end
for n = 1:nt
    if n == 1
        t(1) = 0;
        t1(1) = 0;
    else
        t(n) = t(n-1) + delt;
        t1(n) = 0.5*(t(n) + t(n-1));
    end
end
for i=1:4
    K = parameter_bahan(i);
for n = 1:nt
```

```

k = 1;
stop = 1;
while stop > 0.00001
    %%initial condition
    for j = 1:np
        if n == 1
            f(j,1,n) =
eta(j)*erf(0.5*eta(j)/sqrt(1 + K*(1 - na))) +
2*sqrt((1 + K*(1 - na))/pi)*(exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na))) - 1);
            u(j,1,n) =
erf(0.5*eta(j)/sqrt(1 + K*(1 - na)));
            v(j,1,n) = exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)));
            g(j,1,n) = -na*exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)));
            p(j,1,n) = na*eta(j)*exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/(sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)))*2*(1 + K*(1 - na)));
        else
            f(j,1,n) = ff(j,n-1);
            u(j,1,n) = uu(j,n-1);
            v(j,1,n) = vv(j,n-1);
            g(j,1,n) = gg(j,n-1);
            p(j,1,n) = pp(j,n-1);
        end
    end
    for j = 2:np
        if n == 1
            cfb(j,n) = 0;
            cub(j,n) = 0;
            cvb(j,n) = 0;
            cgb(j,n) = 0;
            cpb(j,n) = 0;
            cdervb(j,n) = 0;
            cderpb(j,n) = 0;
            cfvb(j,n) =
cfb(j,n)*cvb(j,n);
            cfpb(j,n) =
cfb(j,n)*cpb(j,n);

```

```

                                cgub (j, n) =
cgb (j, n) * cub (j, n) ;
                                cuub (j, n) = cub (j, n) ^2;
                                else
                                cfb (j, n) = ffb (j, n-1) ;
                                cub (j, n) = uub (j, n-1) ;
                                cvb (j, n) = vvb (j, n-1) ;
                                cgb (j, n) = ggb (j, n-1) ;
                                cpb (j, n) = ppb (j, n-1) ;
                                cuub (j, n) = cub (j, n) ^2;
                                cdervb (j, n) = ddervb (j, n-1) ;
                                cderpb (j, n) = dderpb (j, n-1) ;
                                cfvb (j, n) =
cfb (j, n) * cvb (j, n) ;
                                cfpb (j, n) =
cfb (j, n) * cpb (j, n) ;
                                cgub (j, n) =
cgb (j, n) * cub (j, n) ;
                                end
                                fb (j, k, n) = 0.5*(f(j, k, n) + f(j-
1, k, n)) ;
                                ub (j, k, n) = 0.5*(u(j, k, n) + u(j-
1, k, n)) ;
                                vb (j, k, n) = 0.5*(v(j, k, n) + v(j-
1, k, n)) ;
                                gb (j, k, n) = 0.5*(g(j, k, n) + g(j-
1, k, n)) ;
                                pb (j, k, n) = 0.5*(p(j, k, n) + p(j-
1, k, n)) ;
                                dervb (j, k, n) = (v(j, k, n) - v(j-
1, k, n))/deleta;
                                derpb (j, k, n) = (p(j, k, n) - p(j-
1, k, n))/deleta;
                                fvb (j, k, n) = fb (j, k, n) *vb (j, k, n) ;
                                fpb (j, k, n) = fb (j, k, n) *pb (j, k, n) ;
                                gub (j, k, n) = gb (j, k, n) *ub (j, k, n) ;
                                uub (j, k, n) = ub (j, k, n) ^2;
                                if n < nt1 + 1
                                %persamaan momentum linier
                                a1 (j, k) = ((1 + K)/deleta) +
(0.25*etac(j)) + ((0.75)*t1 (n) *fb (j, k, n)) ;

```

```

a2(j,k) = (- (1 + K) / deleta +
0.25*etac(j)) + ((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
a3(j,k) =
(0.75)*t1(n)*vb(j,k,n);
a4(j,k) = a3(j,k);
a5(j,k) = (-
(1.5)*t1(n)*ub(j,k,n)) - (0.5*(M)*t1(n)) -
(t1(n)/delt);
a6(j,k) = a5(j,k);
a7(j,k) = 0.5*K;
a8(j,k) = a7(j,k);
%persamaan momentum angular
b1(j,k) = ((1 +
0.5*K) / deleta) + (0.25*etac(j)) +
((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
b2(j,k) = (- (1 +
0.5*K) / deleta) + (0.25*etac(j)) +
((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
b3(j,k) =
(0.75)*t1(n)*pb(j,k,n);
b4(j,k) = b3(j,k);
b5(j,k) = -
(0.75)*t1(n)*gb(j,k,n);
b6(j,k) = b5(j,k);
b7(j,k) = 0.25 -
((0.75)*t1(n)*ub(j,k,n)) - (t1(n)*K) -
(t1(n)/delt);
b8(j,k) = b7(j,k);
b9(j,k) = -0.5*t1(n)*K;
b10(j,k) = b9(j,k);

r1(j,k) = f(j-1,k,n) -
f(j,k,n) + deleta*ub(j,k,n);
r2(j,k) = u(j-1,k,n) -
u(j,k,n) + deleta*vb(j,k,n);
r3(j,k) = g(j-1,k,n) -
g(j,k,n) + deleta*pb(j,k,n);
%momentum linier
r4(j,k) = - (1 +
K)*dervb(j,k,n) - 0.5*etac(j)*vb(j,k,n) -
(1.5)*t1(n)*(1 - uub(j,k,n) + ...

```

```

        fvb(j,k,n)) -
K*pb(j,k,n) - M*t1(n)*(1 - ub(j,k,n))
+2*t1(n)*ub(j,k,n)/delt - (1 + K)*cdervb(j,n)
- ...
        0.5*etac(j)*cvb(j,n) -
(1.5)*t1(n)*(1 - cuub(j,n) + cfvb(j,n)) -
K*cpb(j,n) - M*t1(n)*(1 - cub(j,n)) -
2*t1(n)*cub(j,n)/delt ;

        %momentum angular
%
        r5(j,k) = -(1 +
0.5*K)*derpb(j,k,n) - 0.5*etac(j)*pb(j,k,n) -
0.5*gb(j,k,n) - (1.5)*t1(n)*(fjb(j,k,n) -
gub(j,k,n)) ...
%
        + t1(n)*K*(2*gb(j,k,n)
+ vb(j,k,n)) + 2*t1(n)*gb(j,k,n)/delt - (1 +
0.5*K)*cderpb(j,n) - 0.5*etac(j)*cpb(j,n) -
0.5*cgb(j,n)...
%
        - (1.5)*t1(n)*(cfpb(j,n)
- cgub(j,n)) + t1(n)*K*(2*cgb(j,n) +
cvb(j,n)) - 2*t1(n)*cgb(j,n)/delt;
        r5(j,k)=0;

end
end
%%Matrices
a{2,k} = [0 0 1 0 0; -0.5*deleta 0 0
-0.5*deleta 0; 0 -0.5*deleta 0 0 -0.5*deleta;
a2(2,k) a8(2,k) a3(2,k) a1(2,k) a7(2,k);
b10(2,k) b2(2,k) b3(2,k) b9(2,k) b1(2,k)];
for j = 3:np
    a{j,k} = [-0.5*deleta 0 1 0 0; -1
0 0 -0.5*deleta 0; 0 -1 0 0 -0.5*deleta;
a6(j,k) 0 a3(j,k) a1(j,k) a7(j,k); b6(j,k)
b8(j,k) b3(j,k) b9(j,k) b1(j,k)];
    b{j,k} = [0 0 -1 0 0; 0 0 0 -
0.5*deleta 0; 0 0 0 0 -0.5*deleta; 0 0
a4(j,k) a2(j,k) a8(j,k); 0 0 b4(j,k) b10(j,k)
b2(j,k)];
end;
for j = 2:np

```

```

        c{j,k} = [-0.5*deleta 0 0 0 0; 1
0 0 0 0; 0 1 0 0 0; a5(j,k) 0 0 0 0; b5(j,k)
b7(j,k) 0 0 0];
    end;
    alfa{2,k} = a{2,k};
    gamma{2,k} = inv(alfa{2,k})*c{2,k};
    for j = 3:np
        alfa{j,k} = a{j,k} -
(b{j,k}*gamma{j-1,k});
        gamma{j,k} =
inv(alfa{j,k})*c{j,k};
    end;
    for j = 2:np
        rr{j,k} = [r1(j,k);
r2(j,k);r3(j,k);r4(j,k);r5(j,k)];
    end;
    ww{2,k} = inv(alfa{2,k})*rr{2,k};
    for j = 3:np
        ww{j,k} = inv(alfa{j,k})*(rr{j,k}
- (b{j,k}*ww{j-1,k}));
    end;

%%backward sweep
    delu(1,k) = 0;
    delu(np,k) = 0;
    delg(1,k) = 0;
    delg(np,k) = 0;
    delf(1,k) = 0;
    dell{np,k} = ww{np,k};
    for j = np-1:-1:2
        dell{j,k} = ww{j,k} -
(gamma{j,k}*dell{j+1,k});
    end;
    delv(1,k) = dell{2,k}(1,1);
    delp(1,k) = dell{2,k}(2,1);
    delf(2,k) = dell{2,k}(3,1);
    delv(2,k) = dell{2,k}(4,1);
    delp(2,k) = dell{2,k}(5,1);
    delg(1,k) = -na*delv(1,k);

    for j = np:-1:3

```



```

        delu(j-1,k) = dell{j,k}(1,1);
        delg(j-1,k) = dell{j,k}(2,1);
        delf(j,k) = dell{j,k}(3,1);
        delv(j,k) = dell{j,k}(4,1);
        delp(j,k) = dell{j,k}(5,1);
    end;

    %% Newton's Method
    for j = 1:np
        u(j,k+1,n) = u(j,k,n) +
delu(j,k);
        g(j,k+1,n) = g(j,k,n) +
delg(j,k);
        f(j,k+1,n) = f(j,k,n) +
delf(j,k);
        v(j,k+1,n) = v(j,k,n) +
delv(j,k);
        p(j,k+1,n) = p(j,k,n) +
delp(j,k);
    end;

    %%check for convergence of the
iterations
    stop = abs(delv(1,k));
    kmax = k;
    k = k+1;
end

%shift profile
for j = 1:np
    ff(j,n) = f(j,k,n);
    uu(j,n) = u(j,k,n);
    vv(j,n) = v(j,k,n);
    gg(j,n) = g(j,k,n);
    pp(j,n) = p(j,k,n);
end

for j = 1:np
    ffb(j,n) = fb(j,kmax,n);
    uub(j,n) = ub(j,kmax,n);
    vvb(j,n) = vb(j,kmax,n);

```

```

        ggb(j,n) = gb(j,kmax,n);
        ppb(j,n) = pb(j,kmax,n);
        ddervb(j,n) = dervb(j,kmax,n);
        dderpb(j,n) = derpb(j,kmax,n);
    end
end
if(i==1)
    a11=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'b','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==2)
    a12=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'g','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==3)
    a13=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'r','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==4)
    a14=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'c','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
    legend('K = 1', 'K = 2', 'K = 3', 'K =
4')
    title('Profil Kecepatan dengan Variasi
Parameter Bahan')
    xlabel ('\eta')
    ylabel ('\partial f / \partial \eta')
end
end

```

## Lampiran 7: List Program dengan Matlab Grafik Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Bahan saat Konsentrasi Setengah Pekat

```
clear all
clc
close all
format long
np = 60; %% banyak partisi eta
nt = 33; %% banyak partisi waktu
nt1 = 21; %% banyak partisi waktu untuk small
time
%K = 1; %Parameter Bahan
M = 1; %Parameter Magnetik
na = 0.5;
deleta = 0.1; %% step size dari eta
delt = 0.05; %% step size dari waktu
parameter_bahan(1)= 1;
parameter_bahan(2)= 2;
parameter_bahan(3)= 3;
parameter_bahan(4)= 4;
for i=1:4
    eta(1) = 0;
    etac(1) = 0;
end
for j = 2:np
    eta(j) = eta(j-1) + deleta;
    etac(j) = 0.5*(eta(j) + eta(j-1));
end
for n = 1:nt
    if n == 1
        t(1) = 0;
        t1(1) = 0;
    else
        t(n) = t(n-1) + delt;
        t1(n) = 0.5*(t(n) + t(n-1));
    end
end
for i=1:4
    K = parameter_bahan(i);
for n = 1:nt
```

```

k = 1;
stop = 1;
while stop > 0.00001
    %%initial condition
    for j = 1:np
        if n == 1
            f(j,1,n) =
eta(j)*erf(0.5*eta(j)/sqrt(1 + K*(1 - na))) +
2*sqrt((1 + K*(1 - na))/pi)*(exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na))) - 1);
            u(j,1,n) =
erf(0.5*eta(j)/sqrt(1 + K*(1 - na)));
            v(j,1,n) = exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)));
            g(j,1,n) = -na*exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)));
            p(j,1,n) = na*eta(j)*exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/(sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)))*2*(1 + K*(1 - na)));
        else
            f(j,1,n) = ff(j,n-1);
            u(j,1,n) = uu(j,n-1);
            v(j,1,n) = vv(j,n-1);
            g(j,1,n) = gg(j,n-1);
            p(j,1,n) = pp(j,n-1);
        end
    end
    for j = 2:np
        if n == 1
            cfb(j,n) = 0;
            cub(j,n) = 0;
            cvb(j,n) = 0;
            cgb(j,n) = 0;
            cpb(j,n) = 0;
            cdervb(j,n) = 0;
            cderpb(j,n) = 0;
            cfvb(j,n) =
cfb(j,n)*cvb(j,n);
            cfpb(j,n) =
cfb(j,n)*cpb(j,n);

```

```

                                cgub(j,n) =
cgb(j,n)*cub(j,n);
                                cuub(j,n) = cub(j,n)^2;
                                else
                                cfb(j,n) = ffb(j,n-1);
                                cub(j,n) = uub(j,n-1);
                                cvb(j,n) = vvb(j,n-1);
                                cgb(j,n) = ggb(j,n-1);
                                cpb(j,n) = ppb(j,n-1);
                                cuub(j,n) = cub(j,n)^2;
                                cdervb(j,n) = ddervb(j,n-1);
                                cderpb(j,n) = dderpb(j,n-1);
                                cfvb(j,n) =
cfb(j,n)*cvb(j,n);
                                cfpb(j,n) =
cfb(j,n)*cpb(j,n);
                                cgub(j,n) =
cgb(j,n)*cub(j,n);
                                end
                                fb(j,k,n) = 0.5*(f(j,k,n) + f(j-
1,k,n));
                                ub(j,k,n) = 0.5*(u(j,k,n) + u(j-
1,k,n));
                                vb(j,k,n) = 0.5*(v(j,k,n) + v(j-
1,k,n));
                                gb(j,k,n) = 0.5*(g(j,k,n) + g(j-
1,k,n));
                                pb(j,k,n) = 0.5*(p(j,k,n) + p(j-
1,k,n));
                                dervb(j,k,n) = (v(j,k,n) - v(j-
1,k,n))/deleta;
                                derpb(j,k,n) = (p(j,k,n) - p(j-
1,k,n))/deleta;
                                fvb(j,k,n) = fb(j,k,n)*vb(j,k,n);
                                fpb(j,k,n) = fb(j,k,n)*pb(j,k,n);
                                gub(j,k,n) = gb(j,k,n)*ub(j,k,n);
                                uub(j,k,n) = ub(j,k,n)^2;
                                if n < nt1 + 1
                                %persamaan momentum linier
                                a1(j,k) = ((1 + K)/deleta) +
(0.25*etac(j)) + ((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));

```

```

a2(j,k) = (- (1 + K) / deleta +
0.25*etac(j)) + ((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
a3(j,k) =
(0.75)*t1(n)*vb(j,k,n);
a4(j,k) = a3(j,k);
a5(j,k) = (-
(1.5)*t1(n)*ub(j,k,n)) - (0.5*(M)*t1(n)) -
(t1(n)/delt);
a6(j,k) = a5(j,k);
a7(j,k) = 0.5*K;
a8(j,k) = a7(j,k);
%persamaan momentum angular
b1(j,k) = ((1 +
0.5*K) / deleta) + (0.25*etac(j)) +
((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
b2(j,k) = (- (1 +
0.5*K) / deleta) + (0.25*etac(j)) +
((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
b3(j,k) =
(0.75)*t1(n)*pb(j,k,n);
b4(j,k) = b3(j,k);
b5(j,k) = -
(0.75)*t1(n)*gb(j,k,n);
b6(j,k) = b5(j,k);
b7(j,k) = 0.25 -
((0.75)*t1(n)*ub(j,k,n)) - (t1(n)*K) -
(t1(n)/delt);
b8(j,k) = b7(j,k);
b9(j,k) = -0.5*t1(n)*K;
b10(j,k) = b9(j,k);

r1(j,k) = f(j-1,k,n) -
f(j,k,n) + deleta*ub(j,k,n);
r2(j,k) = u(j-1,k,n) -
u(j,k,n) + deleta*vb(j,k,n);
r3(j,k) = g(j-1,k,n) -
g(j,k,n) + deleta*pb(j,k,n);
%momentum linier
r4(j,k) = - (1 +
K)*dervb(j,k,n) - 0.5*etac(j)*vb(j,k,n) -
(1.5)*t1(n)*(1 - uub(j,k,n) + ...

```

```

        fvb(j,k,n)) -
K*pb(j,k,n) - M*t1(n)*(1 - ub(j,k,n))
+2*t1(n)*ub(j,k,n)/delt - (1 + K)*cdervb(j,n)
- ...
        0.5*etac(j)*cvb(j,n) -
(1.5)*t1(n)*(1 - cuub(j,n) + cfvb(j,n)) -
K*cpb(j,n) - M*t1(n)*(1 - cub(j,n)) -
2*t1(n)*cub(j,n)/delt ;

        %momentum angular
%
        r5(j,k) = -(1 +
0.5*K)*derpb(j,k,n) - 0.5*etac(j)*pb(j,k,n) -
0.5*gb(j,k,n) - (1.5)*t1(n)*(fpb(j,k,n) -
gub(j,k,n)) ...
%
        + t1(n)*K*(2*gb(j,k,n)
+ vb(j,k,n)) + 2*t1(n)*gb(j,k,n)/delt - (1 +
0.5*K)*cderpb(j,n) - 0.5*etac(j)*cpb(j,n) -
0.5*cgb(j,n)...
%
        - (1.5)*t1(n)*(cfpb(j,n)
- cgub(j,n)) + t1(n)*K*(2*cgb(j,n) +
cvb(j,n)) - 2*t1(n)*cgb(j,n)/delt;
        r5(j,k)=0;

end
end
%%Matrices
a{2,k} = [0 0 1 0 0; -0.5*deleta 0 0
-0.5*deleta 0; 0 -0.5*deleta 0 0 -0.5*deleta;
a2(2,k) a8(2,k) a3(2,k) a1(2,k) a7(2,k);
b10(2,k) b2(2,k) b3(2,k) b9(2,k) b1(2,k)];
for j = 3:np
    a{j,k} = [-0.5*deleta 0 1 0 0; -1
0 0 -0.5*deleta 0; 0 -1 0 0 -0.5*deleta;
a6(j,k) 0 a3(j,k) a1(j,k) a7(j,k); b6(j,k)
b8(j,k) b3(j,k) b9(j,k) b1(j,k)];
    b{j,k} = [0 0 -1 0 0; 0 0 0 -
0.5*deleta 0; 0 0 0 0 -0.5*deleta; 0 0
a4(j,k) a2(j,k) a8(j,k); 0 0 b4(j,k) b10(j,k)
b2(j,k)];
end;
for j = 2:np

```

```

        c{j,k} = [-0.5*deleta 0 0 0 0; 1
0 0 0 0; 0 1 0 0 0; a5(j,k) 0 0 0 0; b5(j,k)
b7(j,k) 0 0 0];
    end;
    alfa{2,k} = a{2,k};
    gamma{2,k} = inv(alfa{2,k})*c{2,k};
    for j = 3:np
        alfa{j,k} = a{j,k} -
(b{j,k}*gamma{j-1,k});
        gamma{j,k} =
inv(alfa{j,k})*c{j,k};
    end;
    for j = 2:np
        rr{j,k} = [r1(j,k);
r2(j,k);r3(j,k);r4(j,k);r5(j,k)];
    end;
    ww{2,k} = inv(alfa{2,k})*rr{2,k};
    for j = 3:np
        ww{j,k} = inv(alfa{j,k})*(rr{j,k}
- (b{j,k}*ww{j-1,k}));
    end;

    %%backward sweep
    delu(1,k) = 0;
    delu(np,k) = 0;
    delg(1,k) = 0;
    delg(np,k) = 0;
    delf(1,k) = 0;
    dell{np,k} = ww{np,k};
    for j = np-1:-1:2
        dell{j,k} = ww{j,k} -
(gamma{j,k}*dell{j+1,k});
    end;
    delv(1,k) = dell{2,k}(1,1);
    delp(1,k) = dell{2,k}(2,1);
    delf(2,k) = dell{2,k}(3,1);
    delv(2,k) = dell{2,k}(4,1);
    delp(2,k) = dell{2,k}(5,1);
    delg(1,k) = -na*delv(1,k);

    for j = np:-1:3

```



```

        delu(j-1,k) = dell{j,k}(1,1);
        delg(j-1,k) = dell{j,k}(2,1);
        delf(j,k) = dell{j,k}(3,1);
        delv(j,k) = dell{j,k}(4,1);
        delp(j,k) = dell{j,k}(5,1);
    end;

    %% Newton's Method
    for j = 1:np
        u(j,k+1,n) = u(j,k,n) +
delu(j,k);
        g(j,k+1,n) = g(j,k,n) +
delg(j,k);
        f(j,k+1,n) = f(j,k,n) +
delf(j,k);
        v(j,k+1,n) = v(j,k,n) +
delv(j,k);
        p(j,k+1,n) = p(j,k,n) +
delp(j,k);
    end;

    %%check for convergence of the
iterations
    stop = abs(delv(1,k));
    kmax = k;
    k = k+1;
end

%shift profile
for j = 1:np
    ff(j,n) = f(j,k,n);
    uu(j,n) = u(j,k,n);
    vv(j,n) = v(j,k,n);
    gg(j,n) = g(j,k,n);
    pp(j,n) = p(j,k,n);
end

for j = 1:np
    ffb(j,n) = fb(j,kmax,n);
    uub(j,n) = ub(j,kmax,n);
    vvb(j,n) = vb(j,kmax,n);

```

```

        ggb(j,n) = gb(j,kmax,n);
        ppb(j,n) = pb(j,kmax,n);
        ddervb(j,n) = dervb(j,kmax,n);
        dderpb(j,n) = derpb(j,kmax,n);
    end
end
if(i==1)
    a11=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'b','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==2)
    a12=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'g','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==3)
    a13=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'r','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==4)
    a14=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'c','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
    legend('K = 1', 'K = 2', 'K = 3', 'K =
4')
    title('Profil Kecepatan dengan Variasi
Parameter Bahan')
    xlabel ('\eta')
    ylabel ('\partial f / \partial \eta')
end
end

```

## Lampiran 8: List Program dengan Matlab Grafik Profil Mikrorotasi dengan Variasi Parameter Magnetik saat Konsentrasi Pekat

```
clear all
clc
close all
format long
np = 60; %% banyak partisi eta
nt = 33; %% banyak partisi waktu
nt1 = 21; %% banyak partisi waktu untuk small
time
K = 1; %%Parameter Bahan
%M = 1; %%Parameter Magnetik
na = 0;
deleta = 0.1; %% step size dari eta
delt = 0.05; %% step size dari waktu
magnetik(1)= 0;
magnetik(2)= 1;
magnetik(3)= 5;
magnetik(4)= 10;
for i=1:4
    eta(1) = 0;
    etac(1) = 0;
end
for j = 2:np
    eta(j) = eta(j-1) + deleta;
    etac(j) = 0.5*(eta(j) + eta(j-1));
end
for n = 1:nt
    if n == 1
        t(1) = 0;
        t1(1) = 0;
    else
        t(n) = t(n-1) + delt;
        t1(n) = 0.5*(t(n) + t(n-1));
    end
end
for i=1:4
    M = magnetik(i);
for n = 1:nt
```

```

k = 1;
stop = 1;
while stop > 0.00001
    %%initial condition
    for j = 1:np
        if n == 1
            f(j,1,n) =
eta(j)*erf(0.5*eta(j)/sqrt(1 + K*(1 - na))) +
2*sqrt((1 + K*(1 - na))/pi)*(exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na))) - 1);
            u(j,1,n) =
erf(0.5*eta(j)/sqrt(1 + K*(1 - na)));
            v(j,1,n) = exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)));
            g(j,1,n) = -na*exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)));
            p(j,1,n) = na*eta(j)*exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/(sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)))*2*(1 + K*(1 - na)));
        else
            f(j,1,n) = ff(j,n-1);
            u(j,1,n) = uu(j,n-1);
            v(j,1,n) = vv(j,n-1);
            g(j,1,n) = gg(j,n-1);
            p(j,1,n) = pp(j,n-1);
        end
    end
    for j = 2:np
        if n == 1
            cfb(j,n) = 0;
            cub(j,n) = 0;
            cvb(j,n) = 0;
            cgb(j,n) = 0;
            cpb(j,n) = 0;
            cdervb(j,n) = 0;
            cderpb(j,n) = 0;
            cfvb(j,n) =
cfb(j,n)*cvb(j,n);
            cfpb(j,n) =
cfb(j,n)*cpb(j,n);

```

```

                                cgub (j, n) =
cgb (j, n) * cub (j, n) ;
                                cuub (j, n) = cub (j, n) ^2;
                                else
                                cfb (j, n) = ffb (j, n-1) ;
                                cub (j, n) = uub (j, n-1) ;
                                cvb (j, n) = vvb (j, n-1) ;
                                cgb (j, n) = ggb (j, n-1) ;
                                cpb (j, n) = ppb (j, n-1) ;
                                cuub (j, n) = cub (j, n) ^2;
                                cdervb (j, n) = ddervb (j, n-1) ;
                                cderpb (j, n) = dderpb (j, n-1) ;
                                cfvb (j, n) =
cfb (j, n) * cvb (j, n) ;
                                cfpb (j, n) =
cfb (j, n) * cpb (j, n) ;
                                cgub (j, n) =
cgb (j, n) * cub (j, n) ;
                                end
                                fb (j, k, n) = 0.5*(f(j, k, n) + f(j-
1, k, n)) ;
                                ub (j, k, n) = 0.5*(u(j, k, n) + u(j-
1, k, n)) ;
                                vb (j, k, n) = 0.5*(v(j, k, n) + v(j-
1, k, n)) ;
                                gb (j, k, n) = 0.5*(g(j, k, n) + g(j-
1, k, n)) ;
                                pb (j, k, n) = 0.5*(p(j, k, n) + p(j-
1, k, n)) ;
                                dervb (j, k, n) = (v(j, k, n) - v(j-
1, k, n))/deleta;
                                derpb (j, k, n) = (p(j, k, n) - p(j-
1, k, n))/deleta;
                                fvb (j, k, n) = fb (j, k, n) * vb (j, k, n) ;
                                fpb (j, k, n) = fb (j, k, n) * pb (j, k, n) ;
                                gub (j, k, n) = gb (j, k, n) * ub (j, k, n) ;
                                uub (j, k, n) = ub (j, k, n) ^2;
                                if n < nt1 + 1
                                %persamaan momentum linier
                                a1 (j, k) = ((1 + K)/deleta) +
(0.25*etac(j)) + ((0.75)*t1(n)*fb(j, k, n));

```

```

a2(j,k) = (- (1 + K) / deleta +
0.25*etac(j)) + ((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
a3(j,k) =
(0.75)*t1(n)*vb(j,k,n);
a4(j,k) = a3(j,k);
a5(j,k) = (-
(1.5)*t1(n)*ub(j,k,n)) - (0.5*(M)*t1(n)) -
(t1(n)/delt);
a6(j,k) = a5(j,k);
a7(j,k) = 0.5*K;
a8(j,k) = a7(j,k);
%persamaan momentum angular
b1(j,k) = ((1 +
0.5*K) / deleta) + (0.25*etac(j)) +
((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
b2(j,k) = (- (1 +
0.5*K) / deleta) + (0.25*etac(j)) +
((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
b3(j,k) =
(0.75)*t1(n)*pb(j,k,n);
b4(j,k) = b3(j,k);
b5(j,k) = -
(0.75)*t1(n)*gb(j,k,n);
b6(j,k) = b5(j,k);
b7(j,k) = 0.25 -
((0.75)*t1(n)*ub(j,k,n)) - (t1(n)*K) -
(t1(n)/delt);
b8(j,k) = b7(j,k);
b9(j,k) = -0.5*t1(n)*K;
b10(j,k) = b9(j,k);

r1(j,k) = f(j-1,k,n) -
f(j,k,n) + deleta*ub(j,k,n);
r2(j,k) = u(j-1,k,n) -
u(j,k,n) + deleta*vb(j,k,n);
r3(j,k) = g(j-1,k,n) -
g(j,k,n) + deleta*pb(j,k,n);
%momentum linier
%
r4(j,k) = - (1 +
K)*dervb(j,k,n) - 0.5*etac(j)*vb(j,k,n) -
(1.5)*t1(n)*(1 - uub(j,k,n) + ...

```

```

%                               fvb(j,k,n)) -
K*pb(j,k,n) - M*t1(n)*(1 - ub(j,k,n))
+2*t1(n)*ub(j,k,n)/delt - (1 + K)*cdervb(j,n)
- ...
%                               0.5*etac(j)*cvb(j,n) -
(1.5)*t1(n)*(1 - cuub(j,n) + cfvb(j,n)) -
K*cpb(j,n) - M*t1(n)*(1 - cub(j,n)) -
2*t1(n)*cub(j,n)/delt ;
                               r4(j,k)=0;

                               %momentum angular
                               r5(j,k) = -(1 +
0.5*K)*derpb(j,k,n) - 0.5*etac(j)*pb(j,k,n) -
0.5*gb(j,k,n) - (1.5)*t1(n)*(fpb(j,k,n)-
gub(j,k,n)) ...
                               + t1(n)*K*(2*gb(j,k,n)
+ vb(j,k,n)) + 2*t1(n)*gb(j,k,n)/delt- (1 +
0.5*K)*cderpb(j,n) - 0.5*etac(j)*cpb(j,n) -
0.5*cgb(j,n) ...
                               -(1.5)*t1(n)*(cfpb(j,n)
- cgub(j,n)) + t1(n)*K*(2*cgb(j,n) +
cvb(j,n)) - 2*t1(n)*cgb(j,n)/delt;

                               end
                               end
                               %%Matrices
                               a{2,k} = [0 0 1 0 0; -0.5*deleta 0 0
-0.5*deleta 0; 0 -0.5*deleta 0 0 -0.5*deleta;
a2(2,k) a8(2,k) a3(2,k) a1(2,k) a7(2,k);
b10(2,k) b2(2,k) b3(2,k) b9(2,k) b1(2,k)];
                               for j = 3:np
                               a{j,k} = [-0.5*deleta 0 1 0 0; -1
0 0 -0.5*deleta 0; 0 -1 0 0 -0.5*deleta;
a6(j,k) 0 a3(j,k) a1(j,k) a7(j,k); b6(j,k)
b8(j,k) b3(j,k) b9(j,k) b1(j,k)];
                               b{j,k} = [0 0 -1 0 0; 0 0 0 -
0.5*deleta 0; 0 0 0 0 -0.5*deleta; 0 0
a4(j,k) a2(j,k) a8(j,k); 0 0 b4(j,k) b10(j,k)
b2(j,k)];
                               end;
                               for j = 2:np

```

```

        c{j,k} = [-0.5*deleta 0 0 0 0; 1
0 0 0 0; 0 1 0 0 0; a5(j,k) 0 0 0 0; b5(j,k)
b7(j,k) 0 0 0];
    end;
    alfa{2,k} = a{2,k};
    gamma{2,k} = inv(alfa{2,k})*c{2,k};
    for j = 3:np
        alfa{j,k} = a{j,k} -
(b{j,k}*gamma{j-1,k});
        gamma{j,k} =
inv(alfa{j,k})*c{j,k};
    end;
    for j = 2:np
        rr{j,k} = [r1(j,k);
r2(j,k);r3(j,k);r4(j,k);r5(j,k)];
    end;
    ww{2,k} = inv(alfa{2,k})*rr{2,k};
    for j = 3:np
        ww{j,k} = inv(alfa{j,k})*(rr{j,k}
- (b{j,k}*ww{j-1,k}));
    end;

%%backward sweep
    delu(1,k) = 0;
    delu(np,k) = 0;
    delg(1,k) = 0;
    delg(np,k) = 0;
    delf(1,k) = 0;
    dell{np,k} = ww{np,k};
    for j = np-1:-1:2
        dell{j,k} = ww{j,k} -
(gamma{j,k}*dell{j+1,k});
    end;
    delv(1,k) = dell{2,k}(1,1);
    delp(1,k) = dell{2,k}(2,1);
    delf(2,k) = dell{2,k}(3,1);
    delv(2,k) = dell{2,k}(4,1);
    delp(2,k) = dell{2,k}(5,1);
    delg(1,k) = -na*delv(1,k);

    for j = np:-1:3

```



```

        delu(j-1,k) = dell{j,k}(1,1);
        delg(j-1,k) = dell{j,k}(2,1);
        delf(j,k) = dell{j,k}(3,1);
        delv(j,k) = dell{j,k}(4,1);
        delp(j,k) = dell{j,k}(5,1);
    end;

    %% Newton's Method
    for j = 1:np
        u(j,k+1,n) = u(j,k,n) +
delu(j,k);
        g(j,k+1,n) = g(j,k,n) +
delg(j,k);
        f(j,k+1,n) = f(j,k,n) +
delf(j,k);
        v(j,k+1,n) = v(j,k,n) +
delv(j,k);
        p(j,k+1,n) = p(j,k,n) +
delp(j,k);
    end;

    %%check for convergence of the
iterations
    stop = abs(delv(1,k));
    kmax = k;
    k = k+1;
end

%shift profile
for j = 1:np
    ff(j,n) = f(j,k,n);
    uu(j,n) = u(j,k,n);
    vv(j,n) = v(j,k,n);
    gg(j,n) = g(j,k,n);
    pp(j,n) = p(j,k,n);
end

for j = 1:np
    ffb(j,n) = fb(j,kmax,n);
    uub(j,n) = ub(j,kmax,n);
    vvb(j,n) = vb(j,kmax,n);

```

```

        ggb(j,n) = gb(j,kmax,n);
        ppb(j,n) = pb(j,kmax,n);
        ddervb(j,n) = dervb(j,kmax,n);
        dderpb(j,n) = derpb(j,kmax,n);
    end
end
if(i==1)
    a11=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'b','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==2)
    a12=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'g','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==3)
    a13=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'r','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==4)
    a14=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'c','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
    legend('M = 0', 'M = 1', 'M = 5', 'M =
10')
    title('Profil Mikrorotasi dengan Variasi
Parameter Magnetik')
    xlabel ('\eta')
    ylabel ('\partial f / \partial \eta')
end
end

```

## Lampiran 9: List Program dengan Matlab Grafik Profil Mikrorotasi dengan Variasi Parameter Magnetik saat Konsentrasi Setengah Pekat

```
clear all
clc
close all
format long
np = 60; %% banyak partisi eta
nt = 33; %% banyak partisi waktu
nt1 = 21; %% banyak partisi waktu untuk small
time
K = 1; %%Parameter Bahan
%M = 1; %%Parameter Magnetik
na = 0.5;
deleta = 0.1; %% step size dari eta
delt = 0.05; %% step size dari waktu
magnetik(1)= 0;
magnetik(2)= 1;
magnetik(3)= 5;
magnetik(4)= 10;
for i=1:4
    eta(1) = 0;
    etac(1) = 0;
end
for j = 2:np
    eta(j) = eta(j-1) + deleta;
    etac(j) = 0.5*(eta(j) + eta(j-1));
end
for n = 1:nt
    if n == 1
        t(1) = 0;
        t1(1) = 0;
    else
        t(n) = t(n-1) + delt;
        t1(n) = 0.5*(t(n) + t(n-1));
    end
end
for i=1:4
    M = magnetik(i);
for n = 1:nt
```

```

k = 1;
stop = 1;
while stop > 0.00001
    %%initial condition
    for j = 1:np
        if n == 1
            f(j,1,n) =
eta(j)*erf(0.5*eta(j)/sqrt(1 + K*(1 - na))) +
2*sqrt((1 + K*(1 - na))/pi)*(exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na))) - 1);
            u(j,1,n) =
erf(0.5*eta(j)/sqrt(1 + K*(1 - na)));
            v(j,1,n) = exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)));
            g(j,1,n) = -na*exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)));
            p(j,1,n) = na*eta(j)*exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/(sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)))*2*(1 + K*(1 - na)));
        else
            f(j,1,n) = ff(j,n-1);
            u(j,1,n) = uu(j,n-1);
            v(j,1,n) = vv(j,n-1);
            g(j,1,n) = gg(j,n-1);
            p(j,1,n) = pp(j,n-1);
        end
    end
    for j = 2:np
        if n == 1
            cfb(j,n) = 0;
            cub(j,n) = 0;
            cvb(j,n) = 0;
            cgb(j,n) = 0;
            cpb(j,n) = 0;
            cdervb(j,n) = 0;
            cderpb(j,n) = 0;
            cfvb(j,n) =
cfb(j,n)*cvb(j,n);
            cfpb(j,n) =
cfb(j,n)*cpb(j,n);

```

```

                                cgub (j, n) =
cgb (j, n) * cub (j, n) ;
                                cuub (j, n) = cub (j, n) ^2;
                                else
                                cfb (j, n) = ffb (j, n-1) ;
                                cub (j, n) = uub (j, n-1) ;
                                cvb (j, n) = vvb (j, n-1) ;
                                cgb (j, n) = ggb (j, n-1) ;
                                cpb (j, n) = ppb (j, n-1) ;
                                cuub (j, n) = cub (j, n) ^2;
                                cdervb (j, n) = ddervb (j, n-1) ;
                                cderpb (j, n) = dderpb (j, n-1) ;
                                cfvb (j, n) =
cfb (j, n) * cvb (j, n) ;
                                cfpb (j, n) =
cfb (j, n) * cpb (j, n) ;
                                cgub (j, n) =
cgb (j, n) * cub (j, n) ;
                                end
                                fb (j, k, n) = 0.5*(f (j, k, n) + f (j-
1, k, n)) ;
                                ub (j, k, n) = 0.5*(u (j, k, n) + u (j-
1, k, n)) ;
                                vb (j, k, n) = 0.5*(v (j, k, n) + v (j-
1, k, n)) ;
                                gb (j, k, n) = 0.5*(g (j, k, n) + g (j-
1, k, n)) ;
                                pb (j, k, n) = 0.5*(p (j, k, n) + p (j-
1, k, n)) ;
                                dervb (j, k, n) = (v (j, k, n) - v (j-
1, k, n))/deleta;
                                derpb (j, k, n) = (p (j, k, n) - p (j-
1, k, n))/deleta;
                                fvb (j, k, n) = fb (j, k, n) * vb (j, k, n) ;
                                fpb (j, k, n) = fb (j, k, n) * pb (j, k, n) ;
                                gub (j, k, n) = gb (j, k, n) * ub (j, k, n) ;
                                uub (j, k, n) = ub (j, k, n) ^2;
                                if n < nt1 + 1
                                %persamaan momentum linier
                                a1 (j, k) = ((1 + K)/deleta) +
(0.25*etac (j)) + ((0.75) *t1 (n) *fb (j, k, n)) ;

```

```

        a2(j,k) = (- (1 + K)/deleta +
0.25*etac(j)) + ((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
        a3(j,k) =
(0.75)*t1(n)*vb(j,k,n);
        a4(j,k) = a3(j,k);
        a5(j,k) = (-
(1.5)*t1(n)*ub(j,k,n)) - (0.5*(M)*t1(n)) -
(t1(n)/delt);
        a6(j,k) = a5(j,k);
        a7(j,k) = 0.5*K;
        a8(j,k) = a7(j,k);
        %persamaan momentum angular
        b1(j,k) = ((1 +
0.5*K)/deleta) + (0.25*etac(j)) +
((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
        b2(j,k) = (- (1 +
0.5*K)/deleta) + (0.25*etac(j)) +
((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
        b3(j,k) =
(0.75)*t1(n)*pb(j,k,n);
        b4(j,k) = b3(j,k);
        b5(j,k) = -
(0.75)*t1(n)*gb(j,k,n);
        b6(j,k) = b5(j,k);
        b7(j,k) = 0.25 -
((0.75)*t1(n)*ub(j,k,n)) - (t1(n)*K) -
(t1(n)/delt);
        b8(j,k) = b7(j,k);
        b9(j,k) = -0.5*t1(n)*K;
        b10(j,k) = b9(j,k);

        r1(j,k) = f(j-1,k,n) -
f(j,k,n) + deleta*ub(j,k,n);
        r2(j,k) = u(j-1,k,n) -
u(j,k,n) + deleta*vb(j,k,n);
        r3(j,k) = g(j-1,k,n) -
g(j,k,n) + deleta*pb(j,k,n);
        %momentum linier
%
        r4(j,k) = -(1 +
K)*dervb(j,k,n) - 0.5*etac(j)*vb(j,k,n) -
(1.5)*t1(n)*(1 - uub(j,k,n) + ...

```

```

%                               fvb(j,k,n)) -
K*pb(j,k,n) - M*t1(n)*(1 - ub(j,k,n))
+2*t1(n)*ub(j,k,n)/delt - (1 + K)*cdervb(j,n)
- ...
%                               0.5*etac(j)*cvb(j,n) -
(1.5)*t1(n)*(1 - cuub(j,n) + cfvb(j,n)) -
K*cpb(j,n) - M*t1(n)*(1 - cub(j,n)) -
2*t1(n)*cub(j,n)/delt ;
                               r4(j,k)=0;

                               %momentum angular
                               r5(j,k) = -(1 +
0.5*K)*derpb(j,k,n) - 0.5*etac(j)*pb(j,k,n) -
0.5*gb(j,k,n) - (1.5)*t1(n)*(fpb(j,k,n)-
gub(j,k,n)) ...
                               + t1(n)*K*(2*gb(j,k,n)
+ vb(j,k,n)) + 2*t1(n)*gb(j,k,n)/delt- (1 +
0.5*K)*cderpb(j,n) - 0.5*etac(j)*cpb(j,n) -
0.5*cgb(j,n) ...
                               -(1.5)*t1(n)*(cfpb(j,n)
- cgub(j,n)) + t1(n)*K*(2*cgb(j,n) +
cvb(j,n)) - 2*t1(n)*cgb(j,n)/delt;

                               end
                               end
                               %%Matrices
                               a{2,k} = [0 0 1 0 0; -0.5*deleta 0 0
-0.5*deleta 0; 0 -0.5*deleta 0 0 -0.5*deleta;
a2(2,k) a8(2,k) a3(2,k) a1(2,k) a7(2,k);
b10(2,k) b2(2,k) b3(2,k) b9(2,k) b1(2,k)];
                               for j = 3:np
                               a{j,k} = [-0.5*deleta 0 1 0 0; -1
0 0 -0.5*deleta 0; 0 -1 0 0 -0.5*deleta;
a6(j,k) 0 a3(j,k) a1(j,k) a7(j,k); b6(j,k)
b8(j,k) b3(j,k) b9(j,k) b1(j,k)];
                               b{j,k} = [0 0 -1 0 0; 0 0 0 -
0.5*deleta 0; 0 0 0 0 -0.5*deleta; 0 0
a4(j,k) a2(j,k) a8(j,k); 0 0 b4(j,k) b10(j,k)
b2(j,k)];
                               end;
                               for j = 2:np

```

```

        c{j,k} = [-0.5*deleta 0 0 0 0; 1
0 0 0 0; 0 1 0 0 0; a5(j,k) 0 0 0 0; b5(j,k)
b7(j,k) 0 0 0];
    end;
    alfa{2,k} = a{2,k};
    gamma{2,k} = inv(alfa{2,k})*c{2,k};
    for j = 3:np
        alfa{j,k} = a{j,k} -
(b{j,k}*gamma{j-1,k});
        gamma{j,k} =
inv(alfa{j,k})*c{j,k};
    end;
    for j = 2:np
        rr{j,k} = [r1(j,k);
r2(j,k);r3(j,k);r4(j,k);r5(j,k)];
    end;
    ww{2,k} = inv(alfa{2,k})*rr{2,k};
    for j = 3:np
        ww{j,k} = inv(alfa{j,k})*(rr{j,k}
- (b{j,k}*ww{j-1,k}));
    end;

    %%backward sweep
    delu(1,k) = 0;
    delu(np,k) = 0;
    delg(1,k) = 0;
    delg(np,k) = 0;
    delf(1,k) = 0;
    dell{np,k} = ww{np,k};
    for j = np-1:-1:2
        dell{j,k} = ww{j,k} -
(gamma{j,k}*dell{j+1,k});
    end;
    delv(1,k) = dell{2,k}(1,1);
    delp(1,k) = dell{2,k}(2,1);
    delf(2,k) = dell{2,k}(3,1);
    delv(2,k) = dell{2,k}(4,1);
    delp(2,k) = dell{2,k}(5,1);
    delg(1,k) = -na*delv(1,k);

    for j = np:-1:3

```



```

        delu(j-1,k) = dell{j,k}(1,1);
        delg(j-1,k) = dell{j,k}(2,1);
        delf(j,k) = dell{j,k}(3,1);
        delv(j,k) = dell{j,k}(4,1);
        delp(j,k) = dell{j,k}(5,1);
    end;

    %% Newton's Method
    for j = 1:np
        u(j,k+1,n) = u(j,k,n) +
delu(j,k);
        g(j,k+1,n) = g(j,k,n) +
delg(j,k);
        f(j,k+1,n) = f(j,k,n) +
delf(j,k);
        v(j,k+1,n) = v(j,k,n) +
delv(j,k);
        p(j,k+1,n) = p(j,k,n) +
delp(j,k);
    end;

    %%check for convergence of the
iterations
    stop = abs(delv(1,k));
    kmax = k;
    k = k+1;
end

%shift profile
for j = 1:np
    ff(j,n) = f(j,k,n);
    uu(j,n) = u(j,k,n);
    vv(j,n) = v(j,k,n);
    gg(j,n) = g(j,k,n);
    pp(j,n) = p(j,k,n);
end

for j = 1:np
    ffb(j,n) = fb(j,kmax,n);
    uub(j,n) = ub(j,kmax,n);
    vvb(j,n) = vb(j,kmax,n);

```

```

        ggb(j,n) = gb(j,kmax,n);
        ppb(j,n) = pb(j,kmax,n);
        ddervb(j,n) = dervb(j,kmax,n);
        dderpb(j,n) = derpb(j,kmax,n);
    end
end
if(i==1)
    a11=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'b','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==2)
    a12=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'g','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==3)
    a13=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'r','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==4)
    a14=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'c','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
    legend('M = 0', 'M = 1', 'M = 5', 'M =
10')
    title('Profil Mikrorotasi dengan Variasi
Parameter Magnetik')
    xlabel ('\eta')
    ylabel ('\partial f / \partial \eta')
end
end

```

## Lampiran 10: List Program dengan Matlab Grafik Profil Mikrorotasi dengan Variasi Parameter Bahan saat Konsentrasi Pekat

```
clear all
clc
close all
format long
np = 60; %% banyak partisi eta
nt = 33; %% banyak partisi waktu
nt1 = 21; %% banyak partisi waktu untuk small
time
%K = 1; %Parameter Bahan
M = 1; %Parameter Magnetik
na = 0;
deleta = 0.1; %% step size dari eta
delt = 0.05; %% step size dari waktu
parameter_bahan(1)= 1;
parameter_bahan(2)= 2;
parameter_bahan(3)= 3;
parameter_bahan(4)= 4;
for i=1:4
    eta(1) = 0;
    etac(1) = 0;
end
for j = 2:np
    eta(j) = eta(j-1) + deleta;
    etac(j) = 0.5*(eta(j) + eta(j-1));
end
for n = 1:nt
    if n == 1
        t(1) = 0;
        t1(1) = 0;
    else
        t(n) = t(n-1) + delt;
        t1(n) = 0.5*(t(n) + t(n-1));
    end
end
for i=1:4
    K = parameter_bahan(i);
for n = 1:nt
```

```

k = 1;
stop = 1;
while stop > 0.00001
    %%initial condition
    for j = 1:np
        if n == 1
            f(j,1,n) =
eta(j)*erf(0.5*eta(j)/sqrt(1 + K*(1 - na))) +
2*sqrt((1 + K*(1 - na))/pi)*(exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na))) - 1);
            u(j,1,n) =
erf(0.5*eta(j)/sqrt(1 + K*(1 - na)));
            v(j,1,n) = exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)));
            g(j,1,n) = -na*exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)));
            p(j,1,n) = na*eta(j)*exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/(sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)))*2*(1 + K*(1 - na)));
        else
            f(j,1,n) = ff(j,n-1);
            u(j,1,n) = uu(j,n-1);
            v(j,1,n) = vv(j,n-1);
            g(j,1,n) = gg(j,n-1);
            p(j,1,n) = pp(j,n-1);
        end
    end
    for j = 2:np
        if n == 1
            cfb(j,n) = 0;
            cub(j,n) = 0;
            cvb(j,n) = 0;
            cgb(j,n) = 0;
            cpb(j,n) = 0;
            cdervb(j,n) = 0;
            cderpb(j,n) = 0;
            cfvb(j,n) =
cfb(j,n)*cvb(j,n);
            cfpb(j,n) =
cfb(j,n)*cpb(j,n);

```

```

                                cgub (j, n) =
cgb (j, n) * cub (j, n) ;
                                cuub (j, n) = cub (j, n) ^2;
                                else
                                cfb (j, n) = ffb (j, n-1) ;
                                cub (j, n) = uub (j, n-1) ;
                                cvb (j, n) = vvb (j, n-1) ;
                                cgb (j, n) = ggb (j, n-1) ;
                                cpb (j, n) = ppb (j, n-1) ;
                                cuub (j, n) = cub (j, n) ^2;
                                cdervb (j, n) = ddervb (j, n-1) ;
                                cderpb (j, n) = dderpb (j, n-1) ;
                                cfvb (j, n) =
cfb (j, n) * cvb (j, n) ;
                                cfpb (j, n) =
cfb (j, n) * cpb (j, n) ;
                                cgub (j, n) =
cgb (j, n) * cub (j, n) ;
                                end
                                fb (j, k, n) = 0.5*(f(j, k, n) + f(j-
1, k, n)) ;
                                ub (j, k, n) = 0.5*(u(j, k, n) + u(j-
1, k, n)) ;
                                vb (j, k, n) = 0.5*(v(j, k, n) + v(j-
1, k, n)) ;
                                gb (j, k, n) = 0.5*(g(j, k, n) + g(j-
1, k, n)) ;
                                pb (j, k, n) = 0.5*(p(j, k, n) + p(j-
1, k, n)) ;
                                dervb (j, k, n) = (v(j, k, n) - v(j-
1, k, n))/deleta;
                                derpb (j, k, n) = (p(j, k, n) - p(j-
1, k, n))/deleta;
                                fvb (j, k, n) = fb (j, k, n) * vb (j, k, n) ;
                                fpb (j, k, n) = fb (j, k, n) * pb (j, k, n) ;
                                gub (j, k, n) = gb (j, k, n) * ub (j, k, n) ;
                                uub (j, k, n) = ub (j, k, n) ^2;
                                if n < nt1 + 1
                                %persamaan momentum linier
                                a1 (j, k) = ((1 + K)/deleta) +
(0.25*etac(j)) + ((0.75)*t1(n)*fb(j, k, n));

```

```

a2(j,k) = (- (1 + K) / deleta +
0.25*etac(j)) + ((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
a3(j,k) =
(0.75)*t1(n)*vb(j,k,n);
a4(j,k) = a3(j,k);
a5(j,k) = (-
(1.5)*t1(n)*ub(j,k,n)) - (0.5*(M)*t1(n)) -
(t1(n)/delt);
a6(j,k) = a5(j,k);
a7(j,k) = 0.5*K;
a8(j,k) = a7(j,k);
%persamaan momentum angular
b1(j,k) = ((1 +
0.5*K) / deleta) + (0.25*etac(j)) +
((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
b2(j,k) = (- (1 +
0.5*K) / deleta) + (0.25*etac(j)) +
((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
b3(j,k) =
(0.75)*t1(n)*pb(j,k,n);
b4(j,k) = b3(j,k);
b5(j,k) = -
(0.75)*t1(n)*gb(j,k,n);
b6(j,k) = b5(j,k);
b7(j,k) = 0.25 -
((0.75)*t1(n)*ub(j,k,n)) - (t1(n)*K) -
(t1(n)/delt);
b8(j,k) = b7(j,k);
b9(j,k) = -0.5*t1(n)*K;
b10(j,k) = b9(j,k);

r1(j,k) = f(j-1,k,n) -
f(j,k,n) + deleta*ub(j,k,n);
r2(j,k) = u(j-1,k,n) -
u(j,k,n) + deleta*vb(j,k,n);
r3(j,k) = g(j-1,k,n) -
g(j,k,n) + deleta*pb(j,k,n);
%momentum linier
%
r4(j,k) = - (1 +
K)*dervb(j,k,n) - 0.5*etac(j)*vb(j,k,n) -
(1.5)*t1(n)*(1 - uub(j,k,n) + ...

```

```

%                               fvb(j,k,n)) -
K*pb(j,k,n) - M*t1(n)*(1 - ub(j,k,n))
+2*t1(n)*ub(j,k,n)/delt - (1 + K)*cdervb(j,n)
- ...
%                               0.5*etac(j)*cvb(j,n) -
(1.5)*t1(n)*(1 - cuub(j,n) + cfvb(j,n)) -
K*cpb(j,n) - M*t1(n)*(1 - cub(j,n)) -
2*t1(n)*cub(j,n)/delt ;
                               r4(j,k)=0;

                               %momentum angular
                               r5(j,k) = -(1 +
0.5*K)*derpb(j,k,n) - 0.5*etac(j)*pb(j,k,n) -
0.5*gb(j,k,n) - (1.5)*t1(n)*(fpb(j,k,n)-
gub(j,k,n)) ...
                               + t1(n)*K*(2*gb(j,k,n)
+ vb(j,k,n)) + 2*t1(n)*gb(j,k,n)/delt- (1 +
0.5*K)*cderpb(j,n) - 0.5*etac(j)*cpb(j,n) -
0.5*cgb(j,n) ...
                               -(1.5)*t1(n)*(cfpb(j,n)
- cgub(j,n)) + t1(n)*K*(2*cgb(j,n) +
cvb(j,n)) - 2*t1(n)*cgb(j,n)/delt;

                               end
                               end
                               %%Matrices
                               a{2,k} = [0 0 1 0 0; -0.5*deleta 0 0
-0.5*deleta 0; 0 -0.5*deleta 0 0 -0.5*deleta;
a2(2,k) a8(2,k) a3(2,k) a1(2,k) a7(2,k);
b10(2,k) b2(2,k) b3(2,k) b9(2,k) b1(2,k)];
                               for j = 3:np
                               a{j,k} = [-0.5*deleta 0 1 0 0; -1
0 0 -0.5*deleta 0; 0 -1 0 0 -0.5*deleta;
a6(j,k) 0 a3(j,k) a1(j,k) a7(j,k); b6(j,k)
b8(j,k) b3(j,k) b9(j,k) b1(j,k)];
                               b{j,k} = [0 0 -1 0 0; 0 0 0 -
0.5*deleta 0; 0 0 0 0 -0.5*deleta; 0 0
a4(j,k) a2(j,k) a8(j,k); 0 0 b4(j,k) b10(j,k)
b2(j,k)];
                               end;
                               for j = 2:np

```

```

        c{j,k} = [-0.5*deleta 0 0 0 0; 1
0 0 0 0; 0 1 0 0 0; a5(j,k) 0 0 0 0; b5(j,k)
b7(j,k) 0 0 0];
    end;
    alfa{2,k} = a{2,k};
    gamma{2,k} = inv(alfa{2,k})*c{2,k};
    for j = 3:np
        alfa{j,k} = a{j,k} -
(b{j,k}*gamma{j-1,k});
        gamma{j,k} =
inv(alfa{j,k})*c{j,k};
    end;
    for j = 2:np
        rr{j,k} = [r1(j,k);
r2(j,k);r3(j,k);r4(j,k);r5(j,k)];
    end;
    ww{2,k} = inv(alfa{2,k})*rr{2,k};
    for j = 3:np
        ww{j,k} = inv(alfa{j,k})*(rr{j,k}
- (b{j,k}*ww{j-1,k}));
    end;

%%backward sweep
    delu(1,k) = 0;
    delu(np,k) = 0;
    delg(1,k) = 0;
    delg(np,k) = 0;
    delf(1,k) = 0;
    dell{np,k} = ww{np,k};
    for j = np-1:-1:2
        dell{j,k} = ww{j,k} -
(gamma{j,k}*dell{j+1,k});
    end;
    delv(1,k) = dell{2,k}(1,1);
    delp(1,k) = dell{2,k}(2,1);
    delf(2,k) = dell{2,k}(3,1);
    delv(2,k) = dell{2,k}(4,1);
    delp(2,k) = dell{2,k}(5,1);
    delg(1,k) = -na*delv(1,k);

    for j = np:-1:3

```



```

        delu(j-1,k) = dell{j,k}(1,1);
        delg(j-1,k) = dell{j,k}(2,1);
        delf(j,k) = dell{j,k}(3,1);
        delv(j,k) = dell{j,k}(4,1);
        delp(j,k) = dell{j,k}(5,1);
    end;

    %% Newton's Method
    for j = 1:np
        u(j,k+1,n) = u(j,k,n) +
delu(j,k);
        g(j,k+1,n) = g(j,k,n) +
delg(j,k);
        f(j,k+1,n) = f(j,k,n) +
delf(j,k);
        v(j,k+1,n) = v(j,k,n) +
delv(j,k);
        p(j,k+1,n) = p(j,k,n) +
delp(j,k);
    end;

    %%check for convergence of the
iterations
    stop = abs(delv(1,k));
    kmax = k;
    k = k+1;
end

%shift profile
for j = 1:np
    ff(j,n) = f(j,k,n);
    uu(j,n) = u(j,k,n);
    vv(j,n) = v(j,k,n);
    gg(j,n) = g(j,k,n);
    pp(j,n) = p(j,k,n);
end

for j = 1:np
    ffb(j,n) = fb(j,kmax,n);
    uub(j,n) = ub(j,kmax,n);
    vvb(j,n) = vb(j,kmax,n);

```

```

        ggb(j,n) = gb(j,kmax,n);
        ppb(j,n) = pb(j,kmax,n);
        ddervb(j,n) = dervb(j,kmax,n);
        dderpb(j,n) = derpb(j,kmax,n);
    end
end
if(i==1)
    a11=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'b','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==2)
    a12=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'g','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==3)
    a13=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'r','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==4)
    a14=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'c','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
    legend('K = 1', 'K = 2', 'K = 3', 'K =
4')
    title('Profil Mikrorotasi dengan Variasi
Parameter Bahan')
    xlabel ('\eta')
    ylabel ('\partial f / \partial \eta')
end
end

```

## Lampiran 11: List Program dengan Matlab Grafik Profil Mikrorotasi dengan Variasi Parameter Bahan saat Konsentrasi Setengah Pekat

```
clear all
clc
close all
format long
np = 60; %% banyak partisi eta
nt = 33; %% banyak partisi waktu
nt1 = 21; %% banyak partisi waktu untuk small
time
%K = 1; %Parameter Bahan
M = 1; %Parameter Magnetik
na = 0.5;
deleta = 0.1; %% step size dari eta
delt = 0.05; %% step size dari waktu
parameter_bahan(1)= 1;
parameter_bahan(2)= 2;
parameter_bahan(3)= 3;
parameter_bahan(4)= 4;
for i=1:4
    eta(1) = 0;
    etac(1) = 0;
end
for j = 2:np
    eta(j) = eta(j-1) + deleta;
    etac(j) = 0.5*(eta(j) + eta(j-1));
end
for n = 1:nt
    if n == 1
        t(1) = 0;
        t1(1) = 0;
    else
        t(n) = t(n-1) + delt;
        t1(n) = 0.5*(t(n) + t(n-1));
    end
end
for i=1:4
    K = parameter_bahan(i);
for n = 1:nt
```

```

k = 1;
stop = 1;
while stop > 0.00001
    %%initial condition
    for j = 1:np
        if n == 1
            f(j,1,n) =
eta(j)*erf(0.5*eta(j)/sqrt(1 + K*(1 - na))) +
2*sqrt((1 + K*(1 - na))/pi)*(exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na))) - 1);
            u(j,1,n) =
erf(0.5*eta(j)/sqrt(1 + K*(1 - na)));
            v(j,1,n) = exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)));
            g(j,1,n) = -na*exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)));
            p(j,1,n) = na*eta(j)*exp(-
0.25*(eta(j)^2)/(1 + K*(1 - na)))/(sqrt(pi*(1
+ K*(1 - na)))*2*(1 + K*(1 - na)));
        else
            f(j,1,n) = ff(j,n-1);
            u(j,1,n) = uu(j,n-1);
            v(j,1,n) = vv(j,n-1);
            g(j,1,n) = gg(j,n-1);
            p(j,1,n) = pp(j,n-1);
        end
    end
    for j = 2:np
        if n == 1
            cfb(j,n) = 0;
            cub(j,n) = 0;
            cvb(j,n) = 0;
            cgb(j,n) = 0;
            cpb(j,n) = 0;
            cdervb(j,n) = 0;
            cderpb(j,n) = 0;
            cfvb(j,n) =
cfb(j,n)*cvb(j,n);
            cfpb(j,n) =
cfb(j,n)*cpb(j,n);

```

```

                                cgub (j, n) =
cgb (j, n) * cub (j, n) ;
                                cuub (j, n) = cub (j, n) ^2;
                                else
                                cfb (j, n) = ffb (j, n-1) ;
                                cub (j, n) = uub (j, n-1) ;
                                cvb (j, n) = vvb (j, n-1) ;
                                cgb (j, n) = ggb (j, n-1) ;
                                cpb (j, n) = ppb (j, n-1) ;
                                cuub (j, n) = cub (j, n) ^2;
                                cdervb (j, n) = ddervb (j, n-1) ;
                                cderpb (j, n) = dderpb (j, n-1) ;
                                cfvb (j, n) =
cfb (j, n) * cvb (j, n) ;
                                cfpb (j, n) =
cfb (j, n) * cpb (j, n) ;
                                cgub (j, n) =
cgb (j, n) * cub (j, n) ;
                                end
                                fb (j, k, n) = 0.5*(f(j, k, n) + f(j-
1, k, n)) ;
                                ub (j, k, n) = 0.5*(u(j, k, n) + u(j-
1, k, n)) ;
                                vb (j, k, n) = 0.5*(v(j, k, n) + v(j-
1, k, n)) ;
                                gb (j, k, n) = 0.5*(g(j, k, n) + g(j-
1, k, n)) ;
                                pb (j, k, n) = 0.5*(p(j, k, n) + p(j-
1, k, n)) ;
                                dervb (j, k, n) = (v(j, k, n) - v(j-
1, k, n))/deleta;
                                derpb (j, k, n) = (p(j, k, n) - p(j-
1, k, n))/deleta;
                                fvb (j, k, n) = fb (j, k, n) * vb (j, k, n) ;
                                fpb (j, k, n) = fb (j, k, n) * pb (j, k, n) ;
                                gub (j, k, n) = gb (j, k, n) * ub (j, k, n) ;
                                uub (j, k, n) = ub (j, k, n) ^2;
                                if n < nt1 + 1
                                %persamaan momentum linier
                                a1 (j, k) = ((1 + K)/deleta) +
(0.25*etac(j)) + ((0.75)*t1(n)*fb(j, k, n));

```

```

a2(j,k) = (- (1 + K) /deleta +
0.25*etac(j)) + ((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
a3(j,k) =
(0.75)*t1(n)*vb(j,k,n);
a4(j,k) = a3(j,k);
a5(j,k) = (-
(1.5)*t1(n)*ub(j,k,n)) - (0.5*(M)*t1(n)) -
(t1(n)/delt);
a6(j,k) = a5(j,k);
a7(j,k) = 0.5*K;
a8(j,k) = a7(j,k);
%persamaan momentum angular
b1(j,k) = ((1 +
0.5*K)/deleta) + (0.25*etac(j)) +
((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
b2(j,k) = (- (1 +
0.5*K)/deleta) + (0.25*etac(j)) +
((0.75)*t1(n)*fb(j,k,n));
b3(j,k) =
(0.75)*t1(n)*pb(j,k,n);
b4(j,k) = b3(j,k);
b5(j,k) = -
(0.75)*t1(n)*gb(j,k,n);
b6(j,k) = b5(j,k);
b7(j,k) = 0.25 -
((0.75)*t1(n)*ub(j,k,n)) - (t1(n)*K) -
(t1(n)/delt);
b8(j,k) = b7(j,k);
b9(j,k) = -0.5*t1(n)*K;
b10(j,k) = b9(j,k);

r1(j,k) = f(j-1,k,n) -
f(j,k,n) + deleta*ub(j,k,n);
r2(j,k) = u(j-1,k,n) -
u(j,k,n) + deleta*vb(j,k,n);
r3(j,k) = g(j-1,k,n) -
g(j,k,n) + deleta*pb(j,k,n);
%momentum linier
%
r4(j,k) = -(1 +
K)*dervb(j,k,n) - 0.5*etac(j)*vb(j,k,n) -
(1.5)*t1(n)*(1 - uub(j,k,n) + ...

```

```

%                               fvb(j,k,n)) -
K*pb(j,k,n) - M*t1(n)*(1 - ub(j,k,n))
+2*t1(n)*ub(j,k,n)/delt - (1 + K)*cdervb(j,n)
- ...
%                               0.5*etac(j)*cvb(j,n) -
(1.5)*t1(n)*(1 - cuub(j,n) + cfvb(j,n)) -
K*cpb(j,n) - M*t1(n)*(1 - cub(j,n)) -
2*t1(n)*cub(j,n)/delt ;
                               r4(j,k)=0;

                               %momentum angular
                               r5(j,k) = -(1 +
0.5*K)*derpb(j,k,n) - 0.5*etac(j)*pb(j,k,n) -
0.5*gb(j,k,n) - (1.5)*t1(n)*(fpb(j,k,n) -
gub(j,k,n)) ...
                               + t1(n)*K*(2*gb(j,k,n)
+ vb(j,k,n)) + 2*t1(n)*gb(j,k,n)/delt- (1 +
0.5*K)*cderpb(j,n) - 0.5*etac(j)*cpb(j,n) -
0.5*cgb(j,n) ...
                               -(1.5)*t1(n)*(cfpb(j,n)
- cgub(j,n)) + t1(n)*K*(2*cgb(j,n) +
cvb(j,n)) - 2*t1(n)*cgb(j,n)/delt;

                               end
                               end
                               %%Matrices
                               a{2,k} = [0 0 1 0 0; -0.5*deleta 0 0
-0.5*deleta 0; 0 -0.5*deleta 0 0 -0.5*deleta;
a2(2,k) a8(2,k) a3(2,k) a1(2,k) a7(2,k);
b10(2,k) b2(2,k) b3(2,k) b9(2,k) b1(2,k)];
                               for j = 3:np
                               a{j,k} = [-0.5*deleta 0 1 0 0; -1
0 0 -0.5*deleta 0; 0 -1 0 0 -0.5*deleta;
a6(j,k) 0 a3(j,k) a1(j,k) a7(j,k); b6(j,k)
b8(j,k) b3(j,k) b9(j,k) b1(j,k)];
                               b{j,k} = [0 0 -1 0 0; 0 0 0 -
0.5*deleta 0; 0 0 0 0 -0.5*deleta; 0 0
a4(j,k) a2(j,k) a8(j,k); 0 0 b4(j,k) b10(j,k)
b2(j,k)];
                               end;
                               for j = 2:np

```

```

        c{j,k} = [-0.5*deleta 0 0 0 0; 1
0 0 0 0; 0 1 0 0 0; a5(j,k) 0 0 0 0; b5(j,k)
b7(j,k) 0 0 0];
    end;
    alfa{2,k} = a{2,k};
    gamma{2,k} = inv(alfa{2,k})*c{2,k};
    for j = 3:np
        alfa{j,k} = a{j,k} -
(b{j,k}*gamma{j-1,k});
        gamma{j,k} =
inv(alfa{j,k})*c{j,k};
    end;
    for j = 2:np
        rr{j,k} = [r1(j,k);
r2(j,k);r3(j,k);r4(j,k);r5(j,k)];
    end;
    ww{2,k} = inv(alfa{2,k})*rr{2,k};
    for j = 3:np
        ww{j,k} = inv(alfa{j,k})*(rr{j,k}
- (b{j,k}*ww{j-1,k}));
    end;

%%backward sweep
    delu(1,k) = 0;
    delu(np,k) = 0;
    delg(1,k) = 0;
    delg(np,k) = 0;
    delf(1,k) = 0;
    dell{np,k} = ww{np,k};
    for j = np-1:-1:2
        dell{j,k} = ww{j,k} -
(gamma{j,k}*dell{j+1,k});
    end;
    delv(1,k) = dell{2,k}(1,1);
    delp(1,k) = dell{2,k}(2,1);
    delf(2,k) = dell{2,k}(3,1);
    delv(2,k) = dell{2,k}(4,1);
    delp(2,k) = dell{2,k}(5,1);
    delg(1,k) = -na*delv(1,k);

    for j = np:-1:3

```



```

        delu(j-1,k) = dell{j,k}(1,1);
        delg(j-1,k) = dell{j,k}(2,1);
        delf(j,k) = dell{j,k}(3,1);
        delv(j,k) = dell{j,k}(4,1);
        delp(j,k) = dell{j,k}(5,1);
    end;

    %% Newton's Method
    for j = 1:np
        u(j,k+1,n) = u(j,k,n) +
delu(j,k);
        g(j,k+1,n) = g(j,k,n) +
delg(j,k);
        f(j,k+1,n) = f(j,k,n) +
delf(j,k);
        v(j,k+1,n) = v(j,k,n) +
delv(j,k);
        p(j,k+1,n) = p(j,k,n) +
delp(j,k);
    end;

    %%check for convergence of the
iterations
    stop = abs(delv(1,k));
    kmax = k;
    k = k+1;
end

%shift profile
for j = 1:np
    ff(j,n) = f(j,k,n);
    uu(j,n) = u(j,k,n);
    vv(j,n) = v(j,k,n);
    gg(j,n) = g(j,k,n);
    pp(j,n) = p(j,k,n);
end

for j = 1:np
    ffb(j,n) = fb(j,kmax,n);
    uub(j,n) = ub(j,kmax,n);
    vvb(j,n) = vb(j,kmax,n);

```

```

        ggb(j,n) = gb(j,kmax,n);
        ppb(j,n) = pb(j,kmax,n);
        ddervb(j,n) = dervb(j,kmax,n);
        dderpb(j,n) = derpb(j,kmax,n);
    end
end
if(i==1)
    a11=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'b','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==2)
    a12=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'g','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==3)
    a13=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'r','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
elseif(i==4)
    a14=u(:,kmax,nt)
    figure(1)

plot(eta,u(:,kmax,nt),'c','Linewidth',2.5)
    grid on;
    hold on;
    legend('K = 1', 'K = 2', 'K = 3', 'K =
4')
    title('Profil Mikrorotasi dengan Variasi
Parameter Bahan')
    xlabel ('\eta')
    ylabel ('\partial f / \partial \eta')
end
end

```

## RIWAYAT HIDUP

### A. Identitas Diri

1. Nama Lengkap : Ananik
2. TTL : Rembang, 30 Oktober 2000
3. Alamat Rumah : Ds. Pengkol RT 003/RW 002, Kec.  
Kaliori, Kab. Rembang
4. No. HP : 085647871631
5. E-Mail : [an.anik3010@gmail.com](mailto:an.anik3010@gmail.com)

### B. Riwayat Pendidikan

1. Pendidikan Formal
  - a. TK Purnama
  - b. SDIT An-Nawawiyah Tasik Agung Rembang
  - c. MTs. Mu'allimin Mu'allimat Rembang
  - d. MA. Mu'allimin Mu'allimat Rembang
2. Pendidikan Non-Formal
  - a. Pondok Pesantren Daarun Najaah Jerakah, Tugu,  
Semarang

Semarang,

**Ananik**  
NIM: 1908046012