PEMODELAN LALU LINTAS DAN PENJADWALAN BUS TRANS SEMARANG DENGAN PETRI NET DAN ALJABAR MAX PLUS

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika

Oleh : **AFWAN GIRI FIRDAUS**
NIM : 1908046030

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2023

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	Afwan Giri Firdaus
NIM	:	1908046030
Jurusan/Program Studi	:	Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

PEMODELAN LALU LINTAS DAN PENJADWALAN BUS TRANS SEMARANG DENGAN PETRI NET DAN ALJABAR MAX PLUS

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 21 Juli 2023
Pembuat pernyataan,

Afwan Giri Firdaus
NIM : 1908046030

KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus III) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul	:	**PEMODELAN LALU LINTAS DAN PENJADWALAN BUS TRANS SEMARANG DENGAN PETRI NET DAN ALJABAR MAX PLUS**
Penulis	:	Afwan Giri Firdaus
NIM	:	1908046030
Jurusan	:	Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 21 Juli 2023

DEWAN PENGUJI

Penguji I,	Penguji II,
Budi Cahyono, S.Pd.,M.Si	**Mohamad Tafrikan, M.Si**
NIP : 198012152009121003	NIP : 198904172019031010
Penguji III,	Penguji IV,
Any Muanalifah, M.Si.,Ph.D	**Dr. Minhayati Shaleh, M.Sc**
NIP : 198201132011012009	NIP : 197604262006042001
Pembimbing I,	Pembimbing II,
Any Muanalifah, M.Si.,Ph.D	**Prihadi Kurniawan, M.Sc**
NIP : 19820113 201101 2 009	NIP : 19901226 201903 1 012

NOTA DINAS

Semarang, 21 Juli 2023

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	PEMODELAN LALU LINTAS DAN PENJADWALAN BUS TRANS SEMARANG DENGAN PETRI NET DAN ALJABAR MAX PLUS
Nama	:	Afwan Giri Firdaus
NIM	:	1908046030
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,

Anya

Any Muanalifah, M.Si.,Ph.D
NIP : 19820113 201101 2 009

NOTA DINAS

Semarang, 21 Juli 2023

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	PEMODELAN LALU LINTAS DAN PENJADWALAN BUS TRANS SEMARANG DENGAN PETRI NET DAN ALJABAR MAX PLUS
Nama	:	Afwan Giri Firdaus
NIM	:	1908046030
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing II,

Prihadi Kurniawan, M.Sc
NIP : 19901226 201903 1 012

ABSTRAK

Transportasi umum lebih jarang diminati dibandingkan dengan transportasi pribadi yang mana menjadi salah satu faktor penyebab utama kemacetan di Semarang. Pemerintah telah melakukan upaya untuk meminimalkan penyebab kemacetan tersebut dengan mengoperasikan Bus Trans Semarang. Namun ada suatu permasalahan dimana jadwal keberangkatan bus sering tidak tepat. Masalah tersebut dapat dicari solusinya menggunakan penerapan graf berarah berbobot, petri net, dan aljabar max plus. Pada skripsi ini, dibuat model graf berarah berbobot dan petri net jalur Bus Trans Semarang koridor 1,4, dan 8. Model graf berarah berbobot dan petri net dibuat menggunakan sistem antrian berdasarkan beberapa asumsi yang telah dibuat, sehingga model akan berjalan dengan stabil. Kemudian, membuat model aljabar max plus berdasarkan model graf berarah berbobot dan petri net yang telah dibuat sebelumnya, dan dengan menggunakan algoritma power untuk mencari nilai periodiknya, sehingga diperoleh nilai eigen $\lambda = 8,2$, yang berarti bus akan berangkat setiap $8,2$ menit sekali dari setiap halte menuju halte lainnya dengan arah sesuai rute yang telah dimodelkan.

Kata kunci : Aljabar max plus, graf berarah berbobot, petri net, penjadwalan

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahka rahmat, taufiq, serta inayah-Nya, sehingga peneliti dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**PEMODELAN LALU LINTAS DAN PENJADWALAN BUS TRANS SEMARANG DENGAN PETRI NET DAN ALJABAR MAX PLUS**" ini sebagai salah satu syarat menyelesaikan Program Sarjana (S1) Matematika.

Tersusunnya skripsi ini tidak lepas dari doa, bantuan, bimbingan, dandorongan banyak pihak. Oleh karena itu penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Imam Taufiq, M.Ag selaku Rektor Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
2. Bapak Dr. H. Ismail, M.Ag selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang
3. Ibu Emy Siswanah, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang
4. Ibu Any Muanalifah, M.Si., Ph.D sebagai dosen pembimbing I.
5. Bapak Prihadi Kurniawan, M.Sc sebagai dosen pembimbing II. selama penulisan skripsi.
6. Bapak Agus Wayan Yulianto, M.Sc sebagai dosen wali.
7. Para Dosen Matematika yang terhormat, Terima kasih atas ilmu, nasihat, semangat dan segala sesuatu yang diberikan kepada para penerima beasiswa selama menempuh studi di Program Studi Matematika UIN Walisongo Semarang.

8. Ayahanda dan ibunda tercinta Bapak A'an dan Ibu Ulfayati yang selalu memberikan dukungan lahir dan batin.
9. Teman teman KSR PMI Unit UIN Walisongo Semarang.
10. Teman-teman seperjuangan kelas Matematika A dan B 2019.

Semoga segala amal kebaikan menjadi ibadah yang diakui dan dibalas dengan berlipat ganda oleh Allah SWT. Amin.

Terlepas dari segala kekurangan dan kelemahan skripsi ini, penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun. Semoga tulisan sederhana ini dapat menjadi bacaan yang bermanfaat dan dikembangkan lebih lanjut untuk peneliti selanjutnya.

Semarang,21 Juli 2023

Afwan Giri Firdaus

NIM : 1908046030

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Kemacetan lalu lintas telah menjadi permasalahan yang kerap terjadi, terutama lalu lintas di daerah kota-kota besar, salah satunya adalah kota Semarang. Kecenderungan masyarakat untuk menggunakan kendaraan pribadi daripada transportasi umum merupakan faktor utama pemicu penyebab terjadinya kemacetan tersebut.

Pemerintah Kota Semarang telah menyediakan bus trans Semarang sebagai alternatif kendaraan masyarakat. Fasilitas di dalam bus trans Semarang juga cukup baik, tarifnya tergolong murah, dan juga bisa dibayar dengan metode non-tunai. Bahkan, mulai tanggal 18 Maret 2022, jam layanan bus trans Semarang sudah mulai diperpanjang hingga pukul 23:00 pada koridor khusus. Dikutip dari artikel situs resmi Trans Semarang, Hendrix Setiawan, Kepala Bidang Pelayanan Publik Unit Pelaksana Teknis Daerah Trans Semarang mengatakan, pihaknya siap dengan kebutuhan armada dan personel pada koridor khusus. Hendrix mengatakan layanan khusus tersebut akan dilayani oleh empat armada berukuran sedang dengan periode 15 menit tiap pemberangkatan. (https://transsemarang.semarangkota.go.id).

Dalam sistem lalu lintas bus Trans Semarang terdapat pengaturan jadwal keberangkatan dan kedatangan bus di tiap haltenya. Namun, masih banyak keluhan mengenai ketidaktepatan waktu kedatangan bus di tiap haltenya. Meskipun datang tepat waktu, terkadang juga tidak menjamin bahwa bus yang akan datang dalam keadaan tidak penuh. Hal ini tentunya menjadi sebuah problematika mengenai ketepatan penjadwalan dan alokasi pendistribusian keberangkatan bus sesuai kebutuhan.

Sistem lalu lintas Bus Trans Semarang tersebut dapat dibuat model dan penjadwalannya dengan menggunakan petri net dan aljabar max plus. Petri net merupakan metode pemodelan suatu sistem *event* diskrit, baik secara matematis dan grafis yang konsep kerjanya hampir sama dengan graf berarah yang diberi bobot. Aljabar max plus juga digunakan untuk menghitung suatu sistem event diskrit yang telah dimodelkan dengan menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks yang diperoleh melalui model yang dibuat.

Petri net lebih efektif digunakan apabila diimbangi dengan kemampuan *software* pemodelan yang mumpuni, karena pada penjadwalan Bus Trans Semarang melibatkan suatu keadaan tertentu seperti waktu dan jumlah armada yang beroperasi. Kemudian untuk pengoptimasian seperti penjadwalan, transportasi, antrian, dan produksi dapat dilakukan dengan menggunakan aljabar max-plus, karena aljabar-max plus memiliki kemampuan untuk memecahkan masalah yang dapat dimodelkan dengan *event-graph* seperti petri net ini (Nait-Sidi-Moh, A., 2008). Sehingga, untuk penjadwalan bus Trans Semarang dapat dilakukan menggunakan aljabar max-plus, dan menjadi lebih efektif jika dikombinasikan dengan graf maupun petri net untuk pemodelannya.

Peneliti merujuk pada jurnal berjudul "Traffic Modelling and Real-Time Control for Metro Lines" oleh Nadir Farhi pada tahun 2018. Pada jurnal tersebut telah dilakukan penelitian mengenai model lalu lintas pada kereta api bawah tanah menggunakan simulasi numerik dan menggunakan model aljabar max plus. Farhi melakukan kontrol pada variabel waktu tunggu penumpang, kemudian Farhi membandingkan antara keduanya model yang telah dibuat dan diperoleh bahwa model aljabar max plus mempunyai hasil yang stabil untuk melakukan kontrol waktu tunggupenumpang pada kereta api bawah tanah tersebut. Ada juga literatur lain yang meneliti penjadwalan pada Bus Trans Jakarta oleh Winarni pada tahun 2009 yang berjudul "Penjadwalan Jalur Bus Dalam Kota dengan Model Petri Net dan Aljabar Max Plus (Studi Kasus Busway Transjakarta)". Winarni melakukan optimasi penjadwalan karena sering terjadi ketidaktepatan waktu tunggu kedatangan bus di tiap halte, dengan memodelkan menggunakan aljabar max plus, kemudian diterjemahkan ke dalam model aljabar max plus winarni memperoleh hasil kestabilan pada jadwal bus yang telah dibuat dengan periode waktu keberangkatan bus yaitu 3,95 menit sekali dari tiap haltenya. Ada pula penelitian aljabar max plus dengan studi kasus bus yang lain yaitu "Implementasi Aljabar Max Plus Pada Pemodelan dan Penjadwalan Keberangkatan Bus Kota DAMRI (Studi Kasus di Surabaya)" oleh Kresna Otafianto dkk. Kresna dkk melakukan pemodelan rute menggunakan graf berarah yang kemudian dari model yang dibuat akan dianalisis menggunakan aljabar max plus untuk memperoleh penjadwalannya. Kresna dkk menggunakan *software* Scilab untuk memudahkan perhitungan dan diperoleh waktu tunggu periodiknya yaitu 6 menit sekali. Dari beberapa literatur utama yang dijadikan rujukan, Kira-kira bagaimana jika studi kasusnya diganti dengan Bus Trans Semarang, yang mana kondisi kota Semarang dengan melakukan penjadwalannya menggunakan aljabar max plus. Setidaknya penjadwalan yang nantinya akan diperoleh sudah mendekati penjadwalan yang dimiliki Bus Trans Semarang saat ini.

Oleh karena itu, penulis tertarik untuk melakukan penelitian mengenai pemodelan dan penjadwalan sistem lalu lintas menggunakan petri net dan aljabar max-plus yang diterapkan pada sistem lalu lintas bus Trans Semarang. Beberapa literatur yang sudah disebutkan pada paragraf sebelumnya akan digunakan sebagai acuan dalam penelitian ini.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan pada subbab 1.1, maka peneliti merumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana model lalu lintas pada bus trans Semarang dengan graf dan petri net?
2. Bagaimana penerapan aljabar max plus dalam penjadwalan bus trans Semarang?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah pada 1.2, maka dapat diketahui tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Memodelkan lalu lintas pada bus trans Semarang dengan graf dan petri net
2. Mengetahui penerapan aljabar max plus dalam penjadwalan bus trans Semarang

1.4 Batasan Masalah

Adapun beberapa batasan masalah yang penulis gunakan antara lain:

1. Rute Bus Trans Semarang menggunakan rute dengan terminal ujungnya berada di wilayah Semarang bagian barat, yaitu rute 1, rute 4, dan rute 8.
2. Halte transit dan terminal ujung saja yang dimodelkan.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian pada 1.3, akan diperoleh manfaat dari penelitian ini diantaranya:

1. Bagi penulis
   Menambah pengetahuan mengenai graf, petri net, dan aljabar max plus.
2. Bagi instansi
   Sebagai tambahan pustaka baik untuk penelitian selanjutnya ataupun sebagai bahan perkuliahan tentang penerapan dari aljabar max plus.
3. Bagi pembaca
   Dapat menambah wawasan tentang pengaturan jadwal yang dapat didesain dan dihitung menggunakan aljabar max plus.

1.6 Metode penelitian

Adapun tahapan penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Studi literatur

   Mencari dan mempelajari jurnal, skripsi, serta thesis terdahulu yang melakukan pengkajian maupun penelitian dengan menggunakan petri net maupun aljabar max plus.

2. Pengambilan data rute dan waktu perjalanan Bus Trans Semarang

   Pada tahap ini, dilakukan pengambilan data meliputi jalur keberangkatan Bus Trans Semarang dan waktu keberangkatan serta kedatangan di tiap halte atau pemberhentiannya melalui situs resminya yaitu https://ppid.semarangkota.go.id.

3. Memodelkan rute dengan graf berarah

   Tahap ini dilakukan dengan memodelkan graf berarah jalur yang dilalui Bus Trans Semarang dimana *vertex* menyatakan halte dan terminal Bus Trans Semarang.

4. Pembuatan model petri net

   Pada tahap ini, dilakukan pemodelan menggunakan petri net berdasarkan model graf yang sudah dibuat. Dengan transisi menyatakan halte dan terminal bus trans S*place*

5. Penjadwalan dengan aljabar max plus

   Kemudian dari model yang telah dibuat, dilakukan desain penjadwalan menggunakan aljabar max plus. Penghitungan dilakukan dengan bantuan *software* Scilab.

6. Penyusunan laporan

   Setelah mendapatkan hasil akhirnya, kemudian disusun dalam bentuk skripsi.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penyusunan skripsi ini diperlukan urutan yang sistematis untuk memudahkan pemaknaan dari setiap bab yang ada. Secara keseluruhan, skripsi ini terdiri dari lima bab:

1. **BAB I PENDAHULUAN**

   Bab ini memberikan pembahasan mengenai latar belakang penelitian, rumusan masalah yang akan diteliti, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

2. **BAB II LANDASAN PUSTAKA**

   Bab ini membahas mengenai teori-teori yang melandasi penelitian ini. Adapun teori-teori yang termuat adalah aljabar max plus, graf berarah berbobot dan matriks, dan petri net.

3. **BAB III HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN**

   Bab ini berisi hasil dan penjelasan mengenai model graf berarah berbobot, model petri net, dan desain penjadwalan menggunakan aljabar max plus.

4. **BAB IV SIMPULAN DAN SARAN**

   Bab ini memberikan kesimpulan dari pembahasan materi dan hasil yang diperoleh pada bab sebelumnya, dan juga berisi saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

Pada BAB ini, berisi teori-teori yang melandasi pembahasan pemodelan dengan petri net dan penjadwalan dengan aljabar max plus pada bus trans Semarang. Adapun teori yang akan dijelaskan yaitu mencakup aljabar max plus, graf berarah berbobot, dan petri net.

2.1 Aljabar Max Plus

Aljabar max plus dapat digunakan untuk melakukan optimasi sistem *event* diskrit melalui sistem persamaan liniernya. Sistem *event* diskrit merupakan suatu sistem yang terjadi perubahan pada setiap titiknya. Namun sebelum membahas mengenai aljabar max plus, perlu diketahui bahwa aljabar max plus merupakan salah satu bentuk atau contoh dari semiring. Maka dari itu akan dijelaskan terlebih dahulu apa itu semiring.

1. Aljabar Max Plus

Definisi 2.1.1 *(Semiring, e.g. Jonathan, 1999)*

Dipunyai himpunan tak kosong S dimana S dilengkapi dengan dua operasi biner $+$ dan $\times$. S disebut semiring apabila memenuhi aksioma berikut:

1. *S dengan operasi + adalah semigrup komutatif dengan elemen netral* **0**

   Untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku

(a) $a + (b + c) = (a + b) + c$ *<assosiatif>*

(b) $a + b = b + a$ *<komutatif>*

(c) $a + \mathbf{0} = \mathbf{0} + a = a$, $\mathbf{0}$ *merupakan elemen netral <eksistensi elemen netral>*

2. S *dengan operasi* $\times$ *adalah semigrup dengan elemen satuan* $\mathbf{1}$

   Untuk setiap $a, b, c \in S$ *berlaku*

   (a) $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ *<assosiatif>*

   (b) $a \times \mathbf{1} = \mathbf{1} \times a = a$, *untuk* $\mathbf{1}$ *adalah elemen satuan <eksistensi elemen satuan>*

3. *Elemen netral bersifat menyerap terhadap operasi* $\times$, *dimana*

   $a \times \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \times a = \boldsymbol{0}$

4. *Bersifat distributif*

   Untuk setiap $a, b, c \in S$ *berlaku*

   (a) $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

   (b) $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$

Berikut ini merupakan salah satu contoh kajian dalam lingkup semiring yaitu aljabar max plus.

Contoh 2.1.1 *(Aljabar Max Plus)*

Aljabar max plus $(\mathbb{R} \cup -\infty, \oplus, \otimes)$ *dinotasikan* $\mathbb{R}_{\max}$. *Didefinisikan* $-\infty = \varepsilon$ *sebagai elemen satuan atas operasi* $\oplus$ *dan* $\boldsymbol{0} = e$ *sebagai elemen netral atas operasi* $\otimes$. *Operasi* $\oplus$ *dan* $\otimes$ *didefinisikan untuk setiap* $x, y \in \mathbb{R}_{\max}$

$$x \oplus y = \max(x, y)$$
$$x \otimes y = x + y$$

Contoh 2.1.2 *(Contoh Operasi $\oplus$ dan $\otimes$)*

1. *Apabila dipunyai dua bilangan real yaitu* 4 *dan* 6*, apabila kedua bilangan tersebut dioperasikan dengan* $\oplus$ *maka diperoleh*
   $4 \oplus 6 = \max(4, 6) = 6$

2. *Dipunyai dua bilangan real yaitu* 10 *dan* 8*, apabila kedua bilangan tersebut dioperasikan dengan* $\otimes$ *maka diperoleh*
   $10 \otimes 8 = 10 + 8 = 18$

2. Vektor dan Matriks atas Aljabar Max Plus

Aljabar max plus diperluas ke dalam vektor dan matriks, sehingga aljabar max plus juga dapat digunakan untuk menghitung operasi-operasi pada matriks, didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1.2 *(Matriks atas Aljabar Max Plus)*

Matriks pada aljabar max plus yang dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ *merupakan himpunan matriks* $m \times n$*, untuk setiap* $m, n \in \mathbb{N}$*. Entri-entri dari matriks* $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ *pada baris* i *dan kolom* j *dinotasikan* $a_{i,j}$*, untuk setiap* $i \in n$ *dan* $j \in m$*. Matriks* A *dapat ditulis sebagai*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada aljabar max plus dapat diperluas ke dalam vektor dan matriks, yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.3 *(Operasi aljabar max plus pada matriks)*

Misalkan A dan B adalah matriks berukuran $m \times n$ *yang dilengkapi operasi* $\oplus$ *dan* $\otimes$*, berlaku,*

1. *Operasi* $\oplus$ *pada matriks atas aljabar max plus didefinisikan, apabila dipunyai matriks* A *dan* B

$$\left[A \oplus B\right]_{i,j} = a_{i,j} \oplus b_{i,j} = \max(a_{i,j}, b_{i,j})$$

Contoh 2.1.3 *(Operasi* $\oplus$ *pada matriks atas aljabar max plus)*

Dipunyai matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ *dan matriks* $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Matriks A *dioperasikan* $\oplus$ *dengan matriks* B *diperoleh,*

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} \left[A \oplus B\right]_{1,1} & \left[A \oplus B\right]_{1,2} \\ \left[A \oplus B\right]_{2,1} & \left[A \oplus B\right]_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(1,2) & \max(2,5) \\ \max(4,3) & \max(3,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

2. *Operasi perkalian skalar* $\otimes$ *pada matriks atas aljabar max plus didefinisikan, apabila dipunyai sembarang matriks* B *dan skalar* c

$$\left[c \otimes B\right]_{i,j} = c \otimes b_{i,j} = c + b_{i,j}$$

Contoh 2.1.4 *(Operasi perkalian skalar pada matriks)*

Dipunyai matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ *dan skalar* $c = 4$

$$c \otimes B = \begin{bmatrix} \left[c \otimes B\right]_{1,1} & \left[c \otimes B\right]_{1,2} \\ \left[c \otimes B\right]_{2,1} & \left[c \otimes B\right]_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \otimes 1 & 4 \otimes 2 \\ 4 \otimes 4 & 4 \otimes 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

3. *Operasi perkalian $\otimes$ pada matriks atas aljabar max plus.*

   Untuk setiap matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times l}$ dan matriks $B \in \mathbb{R}_{\max}^{l\times n}$, didefinisikan

$$\left[A \otimes B\right]_{i,j} = \bigoplus_{k=1}^{l}(a_{i,k} \otimes b_{k,j}) = \max(a_{i,k} + b_{k,j})$$

   Contoh 2.1.5 *(Operasi $\otimes$ pada matriks atas aljabar max plus)*

   Dipunyai matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

   diperoleh,

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} (1 \otimes 2) \oplus (2 \otimes 3) & (1 \otimes 5) \oplus (1 \otimes 4) \\ (4 \otimes 2) \oplus (4 \otimes 3) & (4 \otimes 5) \oplus (4 \otimes 4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(3,5) & \max(6,5) \\ \max(6,7) & \max(9,8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

4. *Perpangkatan pada matriks atas aljabar max plus, didefinisikan, matriks persegi atas aljabar max plus ($A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times m}$), berlaku*

$$A^{\otimes k} = \bigotimes_{i=1}^{k} A_i = A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_k, k \in \mathbb{N}$$

   Contoh 2.1.6 *(Perpangkatan $\otimes$ pada Matriks atas Aljabar Max Plus)*

   Dipunyai matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix}$

   Sehingga, nilai dari $A^{\otimes 3} = A \otimes A \otimes A$

$$A^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} \max((3+3),(\varepsilon+\varepsilon)) & \max((3+\varepsilon),(\varepsilon+2)) \\ \max((\varepsilon+3),(2+\varepsilon)) & \max((\varepsilon+\varepsilon),(2+2)) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} \max(6,\varepsilon) & \max(3,2) \\ \max(3,2) & \max(\varepsilon,4)) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} \max((6+3),(3+\varepsilon)) & \max((6+\varepsilon),(3+2)) \\ \max((3+3),(4+\varepsilon)) & \max((3+\varepsilon),(4+2)) \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} \max(9,3) & \max(6,5) \\ \max(6,4) & \max(3,6) \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

2.2 Graf Berarah Berbobot dan Matriks

Pada subbab ini akan dijelaskan mengenai graf berarah berbobot, terminologi graf berarah berbobot, menghitung nilai eigen, dan mengenai algoritma power. Graf berarah berbobot dan matriks ini dapat digunakan untuk memodelkan suatu sistem *event* diskrit.

1. Graf Berarah

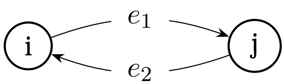
Definisi 2.2.1 *(Graf Berarah, e.g. Douglas, 2002)*

Suatu graf berarah G adalah pasangan (V, E), dimana V adalah himpunan tak kosong berhingga vertex dan E adalah himpunan dari *pasangan terurut dari vertex yang disebut edge.*

$$E = \{(i, j)|i, j \in V\}$$

i *sebagai vertex awal dan* j *sebagai vertex akhir. Dengan kata lain edge* E *adalah edge dari vertex awal (*i*) ke vertex akhir (*j*), sehingga* $(i, j) \neq (j, i)$.

Contoh 2.2.1 *(Graf berarah)*



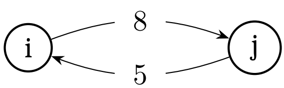
Gambar 2.1. Graf Berarah

Dari graf diatas, dapat diperoleh bahwa graf tersebut mempunyai dua buah vertex $V = \{i, j\}$ *dan dua buah edge* $E = \{e_1, e_2\}$ *dimana* $e_1 = (i, j)$, $e_2 = (j, i)$, *dan* $(i, j) \neq (j, i)$.

Definisi 2.2.2 *(Graf Berarah Berbobot, e.g. Douglas, 2002)*

Graf berarah berbobot D *merupakan suatu graf berarah* G *yang setiap edgenya diberi bobot. Apabila dipunyai dua buah vertex* i *dan* j*, bobot edge dari* i *menuju* j *dinotasikan* $w(i, j)$.

Contoh 2.2.2 *(Graf berarah berbobot)*



Gambar 2.2. Graf Berarah Berbobot

Gambar diatas merupakan gambar graf berarah yang sama pada contoh sebelumnya yang diberi bobot pada masing-masing edgenya yaitu bobot edge dari i ke j $w(i,j) = 8$ dan bobot edge dari j ke i $w(j,i) = 5$.

2. Terminologi Pada Graf dan Matriks

Graf berarah memiliki terminologi-terminologi didalamnya, yaitu sebagai berikut.

Definisi 2.2.3 *(Path, e.g. Bacelli, 2001)*

Untuk setiap graf D, urutan vertex $\rho = (i_1, i_2, ..., i_p)$. ρ disebut path.

Definisi 2.2.4 *(Cycle, e.g. Bacelli, 2001)*

Untuk setiap path $\rho = (i_1, i_2, ..., i_p)$ untuk setiap $p \in \mathbb{N}$ pada graf D, disebut Cycle apabila $i_1 = i_p$. Dinotasikan $\sigma = (i_1, i_2, i_3, \ldots, i_1)$

Panjang dari *path* dinotasikan $|\rho|_l$ dan untuk *cycle* dinotasikan $|\mu|_l$ merupakan jumlah semua edge yang ada pada *path* ataupun *cycle*. Sedangkan, bobot *path* dituliskan $|\rho|_w = w(i_1, i_2) + w(i_2, i_3) + \cdots + w(i_{p-1}, i_p)$, begitu pula untuk bobot *cycle* $|\mu|_w$ menyesuaikan.

Definisi 2.2.5 *(Loop, e.g. Bacelli, 1992)*

Untuk setiap path $\rho = (i_p, i_q)$ untuk setiap $p, q \in \mathbb{N}$ pada graf D, ρ merupakan loop apabila $i_p = i_q$.

Definisi 2.2.6 *(Matriks Representasi Graf Berarah Berbobot, e.g. Bacelli, 1992)*

Untuk setiap matriks $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ merepresentasikan graf berarah berbobot D dinotasikan A_D, didefinisikan

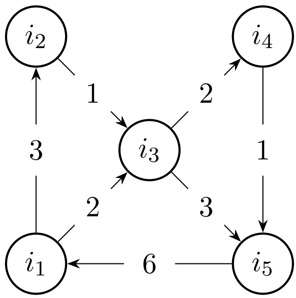
$$a_{i,j} = \begin{cases} w(i,j), \forall i,j \in E \\ \varepsilon, lainnya \end{cases} \textit{ untuk setiap } i, j \in \mathbf{N}$$

Definisi 2.2.7 *(Strongly Connected, e.g. Peter, 2010)*

Graf berarah D disebut Strongly Connected apabila untuk setiap vertex i, j terdapat path dari i ke j. Matriks representasi dari graf berarah yang Strongly Connected disebut matriks irreducible.

Contoh 2.2.3 *(Matriks Representasi Graf Berarah)*

Dipunyai graf berarah berbobot D



Gambar 2.2 Graf berarah berbobot

dapat diperoleh matriks representasinya yaitu

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 3 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Jelas bahwa A strongly connected karena untuk setiap vertex pada graf D, terdapat path yang melewati semua vertex-nya. Sehingga matriks representasi A merupakan matriks irreducible.

Definisi 2.2.8 *(Maximum Cycle Mean, e.g. Peter, 2010)*

Untuk setiap cycle σ dan matriks representasi A, cycle mean graf berarah berbobot D dinotasikan $\mu(\sigma, A)$, dimana jumlah bobot dari cycle dinotasikan $|\mu|_w$ dan panjang cycle dinotasikan $|\mu|_l$, dengan

$$\mu(\sigma, A) = \frac{|\mu|_w}{|\mu|_l}$$

Kemudian untuk menghitung maximum cycle mean dari matriks representasi tersebut didefinisikan

$$\lambda(A) = \max \mu(\sigma, A)$$

Contoh 2.2.4 *(Maximum Cycle Mean)*

Perhatikan graf pada Contoh 2.2.3. Graf berarah berbobot D memiliki beberapa cycle dengan panjang yang berbeda-beda, pada setiap cycle dapat dihitung cycle mean-nya, yaitu

1. $\sigma_1 = (i_1, i_3, i_5, i_1)$
   $|\mu|_l = 3$ *dan* $|\mu|_w = 11$,
   sehingga $\mu(\sigma_1, A) = \frac{11}{3} = 3.67$

2. $\sigma_2 = (i_1, i_3, i_4, i_5, i_1)$
   $|\mu|_l = 4$ *dan* $|\mu|_w = 11$,
   sehingga $\mu(\sigma_2, A) = \frac{11}{4} = 2.75$

3. $\sigma_3 = (i_1, i_2, i_3, i_5, i_1)$
   $|\mu|_l = 4$ *dan* $|\mu|_w = 13$,
   sehingga $\mu(\sigma_3, A) = \frac{13}{4} = 3.25$

4. $\sigma_4 = (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_1)$
   $|\mu|_l = 5$ *dan* $|\mu|_w = 13$,
   sehingga $\mu(\sigma_4, A) = \frac{13}{5} = 2.6$

dari tiap cycle mean pada graf berarah D tersebut, dapat ditentukan maximum cycle mean-nya. Sehingga diperoleh
$\lambda(A) = \max(\mu(\sigma_1, A), \mu(\sigma_2, A), \mu(\sigma_3, A), \mu(\sigma_4, A))$
$\lambda(A) = \max(3.67, 2.75, 3.25, 2.6)$
$\lambda(A) = 3.67$

3. Sistem Persamaan Linier pada Aljabar Max Plus

Bentuk umum dari sistem persamaan linier pada aljabar max plus yaitu, untuk setiap $A \in \mathbb{R}_{\max}$

$$\bar{b} = A \otimes \bar{x}$$

Selanjutnya, sistem persamaan linier ini dievolusikan sesuai dengan sistem penjadwalan menjadi suatu proses $x(k+1)$ dapat dikerjakan apabila proses $x(k)$ sudah selesai, sehingga untuk setiap $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$

$$x(k+1) = \overline{A} \otimes x(k), k \geqslant 0$$

Kemudian, persamaan diatas akan dibawa ke dalam bentuk persamaan matriks berikut:

$$x(k+1) = \bigoplus_{p=1}^{M} A_p \otimes x(k-1+p)$$

dengan A_p merupakan matriks berukuran $n \times n$, dan n adalah banyaknya edge. Sedangkan M adalah banyaknya unit maksimum pada tiap vertex. Sehingga diperoleh bentuk dari matriks $\overline{A}$ nantinya menjadi

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{M-1} & A_M \\ E & \boldsymbol{\varepsilon} & \dots & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} & E & \dots & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & \dots & E & \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

dengan E merupakan matriks berukuran $n \times n$ yang entri-entrinya berupa elemen netral pada aljabar max plus yaitu **0** atau dinotasikan sebagai e. Kemudian, $\boldsymbol{\varepsilon}$ yang merupakan matriks berukuran $n \times n$ yang entri-entrinya berupa elemen satuan pada aljabar max plus yaitu $-\infty$ atau dinotasikan ε.

4. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Seperti nilai eigen dan vektor eigen matriks aljabar klasik. Aljabar Max Plus juga dapat dicari nilai eigen dan vektor eigennya.

Definisi 2.2.9 *(Nilai Eigen dan Vektor Eigen)*

Nilai eigen dinotasikan λ merupakan skalar pada aljabar max plus yang didefinisikan, untuk setiap matriks A dan vektor v pada aljabar max plus,

$$A \otimes \lambda = \lambda \otimes v$$

dengan vektor v adalah vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan λ. Kemudian $v \neq \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \end{bmatrix}^T$, dengan $\begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \end{bmatrix}^T$ menyatakan transpose dari matriks $\begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \end{bmatrix}$.

5. Algoritma Power

Algoritma Power merupakan sebuah algoritma yang dapat digunakan untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks persegi dalam aljabar max plus. Adapun tahapan pada Algoritma Power sebagai berikut:

1. Menentukan vektor awal $x(0) \neq \boldsymbol{\varepsilon}$. Dengan $\boldsymbol{\varepsilon}$ merupakan vektor yang entri-entrinya ε.

2. Iterasikan $\overline{x}(k+1) = \overline{A} \otimes (k)$ hingga didapatkan bilangan bulat $p > q \geqslant 0$ dan bilangan real c sehingga terjadi suatu keperiodikan yaitu $x(p) = c \otimes x(q)$.

3. Menghitung nilai eigen (λ)
$\lambda = \frac{c}{p-q}$.

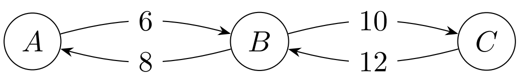
4. Menghitung vektor eigen ($\mathbf{v}$)
$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1))$.

Nilai eigen dan vektor eigen ini digunakan untuk menentukan penjadwalan, dengan vektor eigen akan dijadikan sebagai nilai awal dan nilai eigen sebagai waktu periodiknya. (Subiono dkk, 2000)

Penghitungan dalam Algoritma Power ini sudah terdapat *toolbox* pada *software Scilab* yang bernama max plus *toolbox* yang pada BAB 4 nantinya akan digunakan untuk memudahkan proses penghitungan.

Contoh 2.2.5 *(Menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari rute bus sederhana)*

Misalkan dipunyai sebuah jaringan rute bus yang memiliki empat titik pemberhentian yaitu terminal A, B, dan C yang dimodelkan menggunakan graf berarah.



Gambar 2.3. Jalur Sistem Bus Sederhana

Adapun beberapa asumsi yang digunakan pada jalur sistem bus sederhana diatas sebagai berikut:

1. *Waktu perjalanan tetap, dan kondisi diasumsikan tidak macet.*
2. *Ada penambahan waktu 2 menit di tiap halte sebagai waktu perpindahan penumpang.*
3. *Keberangkatan bus tidak menunggu kedatangan bus yang berlawanan arah.*

Bobot pada tiap edge merepresentasikan lamanya waktu perjalanan (menit). Adapun data waktu perjalanan dan jumlah bus pada tiap jalur adalah sebagai berikut:

Rute	**Dari**	**Tujuan**	**Waktu**	**Banyanya bus**
1	A	B	6	1
1	B	C	10	1
1	C	B	12	1
1	B	A	8	1

Tabel 2.1. Urutan dan Waktu Perjalanan Bus

Berdasarkan model graf berarah dan data keberangkatan pada tabel, total bus yang beroperasi adalah 4 unit. Kemudian, dapat dibentuk suatu aturan sinkronisasi bus di tiap rutenya sebagai berikut:

1. *Keberangkatan bus ke-*$(k+1)$ *dari* A *menuju* B *harus menunggu bus ke-*k *yang berangkat dari* B *tiba di* A*.*
2. *Keberangkatan bus ke-*$(k+1)$ *dari* B *menuju* C *harus menunggu bus ke-*k *yang berangkat dari* A *tiba di* B*.*
3. *Keberangkatan bus ke-*$(k+1)$ *dari* C *menuju* B *harus menunggu bus ke-*k *yang berangkat dari* B *tiba di* C*.*

4. *Keberangkatan bus ke-*$(k+1)$ *dari* B *menuju* A *harus menunggu bus ke-*k *yang berangkat dari* C *tiba di* B.

Selanjutnya, beberapa keadaan yang diperoleh pada aturan sinkronisasi akan disusun menjadi beberapa variabel. Adapun variabel-variabelnya sebagai berikut:

Variabel	**Waktu keberangkatan dari**
$x_1(k)$	A ke B pada saat ke-k
$x_2(k)$	B ke C pada saat ke-k
$x_3(k)$	C ke B pada saat ke-k
$x_4(k)$	B ke A pada saat ke-k

Tabel 2.2. Pendefinisian Variabel

Kemudian, setelah diperoleh aturan sinkronisasi dan variabel-variabel pada Tabel 2.1 dan Tabel 2.2 dapat dibuat persamaan aljabar max plusnya sebagai berikut.

1. $x_1(k+1) = x_4(k) \otimes 8 \otimes 2$
2. $x_2(k+1) = x_1(k) \otimes 6 \otimes 2$
3. $x_3(k+1) = x_2(k) \otimes 10 \otimes 2$
4. $x_4(k+1) = x_3(k) \otimes 12 \otimes 2$

Kemudian, disusun menjadi matriks aljabar max plus menggunakan persamaan $(k+1) = \overline{A} \otimes (k)$, $k \geqslant 0$, *diperoleh hasil sebagai berikut:*

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 \\ 8 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 12 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 14 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}$$

Kemudian, gunakan Algoritma Power untuk memperoleh nilai eigen dan vektor eigennya. Ambil sembarang vektor awal $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. *Kemudian lakukan iterasi* $\overline{x}(k+1) = \overline{A} \otimes \overline{x}(k)$ *hingga didapatkan bilangan bulat* $p > q \geqslant 0$ *dan bilangan real* c *sehingga terjadi suatu keperiodikan yaitu* $x(p) = c \otimes x(q)$.

Iterasi pertama

$$x(1) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 \\ 8 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 12 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 14 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Iterasi kedua

$$x(2) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 \\ 8 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 12 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 14 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 18 \\ 20 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Iterasi ini akan terus berjalan hingga diperoleh kondisi $x(p) = c \otimes x(q)$.

$$\begin{matrix} x(3) & x(4) & x(5) \\ \begin{bmatrix} 36 \\ 32 \\ 30 \\ 34 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 44 \\ 44 \\ 44 \\ 44 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 54 \\ 52 \\ 56 \\ 58 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Diperoleh kondisi yang memenuhi $x(p) = c \otimes x(q)$ *yaitu*

$$\begin{bmatrix} 54 \\ 52 \\ 56 \\ 58 \end{bmatrix} = 44 \otimes \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x(5) = 44 \otimes x(1)$$

Berdasarkan kondisi diatas, dapat diketahui nilai $p = 5, c = 44, q = 1$ *sehingga dapat dihitung nilai eigennya sebagai berikut*

$$\lambda = \frac{c}{p-q} = \frac{44}{5-1} = 11$$

Setelah diperoleh nilai eigennya, kemudian dapat dihitung vektor eigennya yaitu

$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q}(\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1))$

$= \bigoplus_{i=1}^{5-1}(11^{\otimes(5-1-i)} \otimes x(1+i-1))$

$= \max(11^{\otimes(4-1)} \otimes x(1+1-1), 11^{\otimes(4-2)} \otimes x(1+2-1), 11^{\otimes(4-3)} \otimes x(1+3-1), 11^{\otimes(4-4)} \otimes x(1+4-1))$

$= \max(11^{\otimes}3 \otimes x(1), 11^{\otimes}2 \otimes x(2), 11^{\otimes}1 \otimes x(3), 11^{\otimes}0 \otimes x(4))$

$= \max\left(\begin{bmatrix}43\\41\\45\\47\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}45\\40\\42\\48\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}47\\43\\41\\45\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}44\\44\\44\\44\end{bmatrix}\right)$

$= \begin{bmatrix}47\\44\\45\\48\end{bmatrix}$

Dapat diperoleh bahwa bus akan berangkat dari tiap halte secara periodik setiap 11 menit dengan keadaan awalnya yaitu $\overline{x}(0) = [$*47 44 45 48*$]^T$*. Keadaan awal ini adalah waktu awal yang akan menjamin bahwa keberangkatan bus selanjutnya menggunakan persamaan*

$$\overline{x}(k+1) = \lambda \otimes \overline{x}(k)$$

sehingga tidak akan ada bus yang berbeda di satu halte dalam satu waktu. Dalam kasus ini, untuk melihat waktu keberangkatan selanjutnya yaitu:

$$\overline{x}(1) = 11 \otimes \overline{x}(0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix}58\\55\\56\\59\end{bmatrix} = 11 \otimes \begin{bmatrix}47\\44\\45\\48\end{bmatrix}$$

Dengan acuan persamaan aljabar max plus, jelas bahwa

$$\begin{bmatrix} 58 \\ 55 \\ 56 \\ 59 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \otimes 8 \otimes 2 \\ 47 \otimes 6 \otimes 2 \\ 44 \otimes 10 \otimes 2 \\ 45 \otimes 12 \otimes 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga dari contoh ini dapat dipastikan bahwa Algoritma Power bekerja dengan baik, dan juga dapat digunakan untuk melakukan penjadwalan pada sistem yang lebih besar.

2.3 Petri Net

Petri Net merupakan graf berarah khusus, didalamnya terdapat istilah *event*, dengan *event* berkaitan dengan transisi. *Event* tersebut dapat terjadi apabila terdapat suatu keadaan yang disebut *place*, sehingga *place* disini merupakan input dan output suatu transisi.

1. Definisi Petri Net

Petri net atau place transition net merupakan salah satu metode pemodelan sistem distribusi *event diskrit* yang untuk pertama kalinya dikembangkan oleh Carl Adam Petri pada Agustus 1939. Pada subbab ini akan dibahas mengenai petri net yang mencakup definisi petri net, dinamika petri net, dan representasi matriks pada petri net.

Definisi 2.3.1 *(Petri Net, e.g. Bacelli, 2001)*

Petri net mempunyai 4 elemen, yaitu

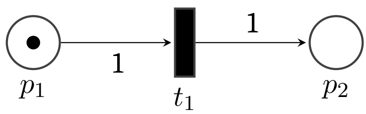
1. *P disebut place yang dinotasikan* $p_i, i = 1, 2, 3, ..., |P|$ *dan digambarkan sebagai lingkaran.*

2. *T disebut transisi yang dinotasikan* $t_j, j = 1, 2, 3, ..., |T|$ *dan digambarkan sebagai garis atau persegi panjang.*

3. *A disebut arch, arch menjadi penghubung dari place ke transisi maupun sebaliknya, lebih formalnya sebagai berikut* $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$*.*

4. *w disebut bobot arch, untuk setiap arc dari* p_i *ke* t_j *dapat ditulis* $w(p_i, t_j)$*, begitu sebaliknya.*

Contoh 2.3.1 *(Petri Net Sederhana)*



Gambar 2.4. Petri net sederhana

Pada petri net diatas, terdapat dua buah place yaitu $P = \{p_1, p_2\}$*, sebuah transisi yaitu* $T = t_1$*, dan dua buah arc yaitu* $(p_1 \to t_1)$ *dan* $(t_1 \to p_2)$ *atau dapat ditulis* $A = \{(p_1, t_1), (t_1, p_2)\}$*. Bobot* (p_1, t_1) *ditulis* $w(p_1, t_1)$ *adalah* 1 *dan bobot* (t_1, p_2) *ditulis* $w(p_1, t_1)$ *adalah* 1*. Kondisi pada petri net diatas yaitu terdapat 1 token yang ada di* p_1*.*

Definisi 2.3.2 *(Penananda Petri Net, e.g. Bacelli, 2001)*

Tanda (mark) pada petri net dinotasikan **x** *dimana* x *merupakan fungsi yang didefinisikan* **x** $: P \to \{0, 1, 2, \dots\}$

Dimana **x** *dinyatakan sebagai vektor yang entri-entrinya adalah elemen bilangan bulat positif yang menyatakan jumlah token,* *dengan* $\mathbf{x}=\left[\mathbf{x}(p_1), \mathbf{x}(p_2), \ldots, \mathbf{x}(p_{|P|})\right]^T$. *Dengan banyaknya elemen* $\mathbf{x}$ *sama dengan banyaknya place. Apabila petri net difire, maka vektor* $\mathbf{x}$ *akan berubah sesuai dengan jumlah token di tiap place, dengan penandanya ditunjukkan dengan* $\mathbf{x}_i, i = \{0, 1, 2, \ldots\}$ *dan* $\mathbf{x}_0$ *sebagai penanda awal, yaitu sebelum petri net difire atau biasa disebut sebagai keadaan idle.*

Definisi 2.3.3 *(Transisi Enable, e.g. Bacelli, 2001)*

Transisi $t_j \in T$ *enable apabila difire memenuhi*

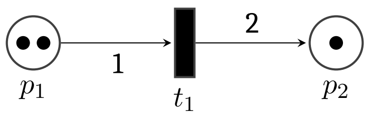
$$\mathbf{x}(p_i) \geqslant w(p_i, t_j)$$

dan apabila tidak memenuhi maka transisi disebut disable.

Definisi 2.3.4 *(Deadlock)*

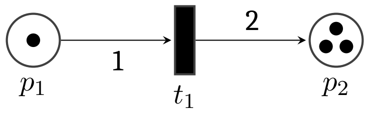
Suatu penanda petri net disebut deadlock apabila penanda tertentu tidak dapat difire atau tidak enable.

Contoh 2.3.2 *(Penanda pada Enabled Petri Net)*

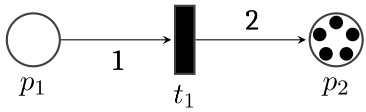


Gambar 2.5. Keadaan awal petri net

Dari petri net di atas, terdapat beberapa penanda yaitu penanda awal dan penanda ketika transisi difire. penanda awal pada petri net diatas adalah $\mathbf{x}_0 = [2\ 1]^T$ *dengan transisinya enabled ketika difire karena* $\mathbf{x}(p_1) \geqslant w(p_1, t_1)$ *yaitu* $2 \geqslant 1$. *Kemudian, ketika transisi difire satu kali menjadi.*
Keadaan setelah difire sekali memiliki penanda yaitu $\mathbf{x}_1 = [1\ 3]^T$, *kemudian ketika difire untuk kedua kali menjadi*



Gambar 2.6. Keadaan ke-2 petri net



Gambar 2.7. Keadaan ke-3 petri net

Keadaan setelah difire dua kali memiliki penanda yaitu $\mathbf{x}_2 = [0\ 5]^T$. *Dari keadaan ini, jelas bahwa transisi tidak dapat difire lagi, oelh karena itu keadaan ketiga ini terjadi deadlock.*

2. Representasi Matriks pada Petri Net

Sama seperti graf berarah pada umumnya, petri net juga dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks yang disebut *incidence matrix*. *Incidence matrix* ini dibentuk dari dua buah matriks yaitu matriks *forwards incidence* dan matriks *Backwards incidence*.

a. Matriks *Forwards Incidence* dan *Backwards Incidence*

Untuk setiap $\mathbf{A}^{|P|\times|T|}$ adalah matriks berukuran banyak place $\times$ banyak transisi. Matriks *forwards incidence* adalah matriks dengan entri-entrinya berasal dari bobot arc yang memetakan transisi ke place, dan apabila tidak terdapat arc yang memetakan transisi ke place bobotnya adalah 0.

Definisi 2.3.5 *(Matriks Forwards Incidence, e.g. Bacelli, 2001)*

Untuk setiap $\mathbf{A}^{|P|\times|T|}$, matriks Forwards Incidence dinotasikan $\boldsymbol{A}_f$, didefinisikan

$$\boldsymbol{A}_f = a_{p_i,t_j}\begin{cases} w(t_j,p_i),\forall T\rightarrow P \\ 0.lainnya \end{cases}$$

Definisi 2.3.6 *(Matriks Backwards Incidence, e.g. Bacelli, 2001)*

Untuk setiap $\mathbf{A}^{|P|\times|T|}$, matriks backwards Incidence dinotasikan $\boldsymbol{A}_b$, didefinisikan

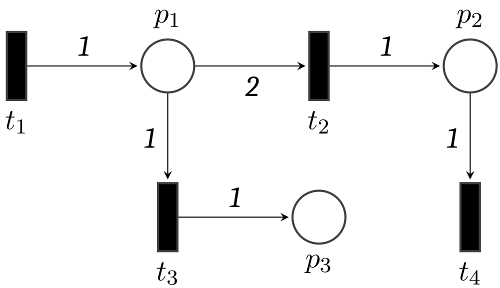
$$\boldsymbol{A}_b = a_{p_i,t_j}\begin{cases} w(p_i,t_j),\forall P\rightarrow T \\ 0.lainnya \end{cases}$$

Setelah diperoleh matriks *forwards incidence* dan matriks *backwards incidence*, selanjutnya dapat dihitung *Incidence Matrix*. Misal *Incidence Matrix* adalah matriks A, maka

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_f - \mathbf{A}_b$$

Contoh 2.3.3 *(Mencari Incidence Matrix)*

Dipunyai sebuah petri net



Gambar 2.7 Petri net

Dari petri net diatas, dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks atau incidence matrix-nya. Diperoleh matriks forward incidence dan matriks forward incidence

$$\boldsymbol{A}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_b = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dapat dihitung incidence matrix-nya yaitu

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_f - \boldsymbol{A}_b$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

BAB III

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pada BAB ini dipaparkan hasil penelitian yang berupa data-data mengenai Bus Trans Semarang, analisis permasalah, model graf, model petri net, dan analisis menggunakan aljabar max plus. Analisis masalah yang akan dijelaskan berupa proses pemodelan jaringan Bus Trans Semarang berdasarkan data yang diperoleh dari aplikasi Trans Semarang. Kemudian, pemodelan petri net dilakukan dengan dibantu software PIPE 4.3.0. Kemudian yang terakhir, model tersebut akan dianalisis menggunakan aljabar max plus dengan perhitungan nilai eigen dan vektor eigen dibantu dengan *software* Scilab 5.5.2 yang nantinya dari hasil tersebut akan disusun desain penjadwalannya.

3.1 Sistem Jaringan Bus Trans Semarang Koridor 1, 4, dan 8

Sistem jaringan Bus Trans Semarang dengan terminal ujungnya berada di Senarang bagian barat terdiri dari tiga koridor yaitu koridor 1, 2, dan 3. Masing-masing koridor memiliki jumlah bus yang beroperasi dan berbeda-beda tiap koridor, yakni koridor 1 sebanyak 23 bus, koridor 4 sebanyak 23 bus, dan koridor 8 sebanyak 17 bus, dengan total keseluruhan sebanyak 63 bus yang beroperasi.

Adapun beberapa asumsi yang digunakan dalam penelitian yaitu

1. Data waktu tempuh antar halte diperoleh dari penghitungan menggunakan data jarak antar halte yang sudah diperoleh.

2. Kondisi jalan diasumsikan normal, tidak ada pengalihan jalur yang disebabkan karena suatu masalah yang terjadi di jalan pada jalur tersebut.

3. Ada penambahan waktu 2 menit di tiap halte sebagai waktu perpindahan penumpang yang turun ataupun naik bus.

4. Keberangkatan bus menunggu kedatangan bus yang lain agar tidak menimbulkan penumpukan bus dalam satu halte.

5. Kecepatan rata-rata bus diasumsikan 30 km/jam.

Berdasarkan batasan masalah yang telah penulis tentukan, dimana rute yang akan dilakukan pennjadwalan adalah rute yang mempunyai halte ujung di wilayah Semarang bagian barat sebagai berikut:

- **Rute koridor 1**

  Melinntasi TerminalMangkanng (TM) - Cakrawala (CW) - Karang Ayu (KA) - Balaikota (BK) - Simpang Lima (SL) - Terminal Penggaron (TP) - Simpang Lima (SL) - Balaikota (BK) - Cakrawala (CW) - Pengadilan (PD) - Terminal Mangkang (TM).

- **Rute koridor 4**

  Melintasi Terminak Cangkiran (TC) - Cakrawala (CW) - Karang Ayu (KA) - Balaikota (BK) - Simpang Lima (SL) - Layur (LY) - Raden Patah (RP) - Balaikota (BK) - Cakrawala (CW) - Pengadilan (PN) - Terminal Cangkiran (TC).

- **Rute koridor 8**

Melintasi Simpang Lima (SL) - Cakrawala (CW) - Terminal Cangkiran (TC) - Cakrawala (CW) - Karang Ayu (KA) - Balaikota (BK) - Simpang Lima (SL).

Adapun data jarak dari tiap halte atau terminal yang akan dimodelkan diperoleh dari aplikasi *Google Maps* sebagai berikut:

Rute	Dari	Tujuan	Jarak (meter)
1	Terminal Mangkang (TM)	Pengadilan (PD)	10.100
1	Pengadilan (PD)	Cakrawala (CW)	2.200
1	Cakrawala (CW)	Balaikota (BK)	3.850
1	Balaikota (BK)	Simpang Lima (SL)	2.500
1	Simpang Lima (SL)	Terminal Penggaron (TP)	9.200
1	Terminal Penggaron (TP)	Simpang Lima (SL)	9.950
1	Simpang Lima (SL)	Balaikota (BK)	3.650
1	Balaikota (BK)	Cakrawala (CW)	3.200
1	Cakrawala (CW)	Pengadilan (PD)	2.000
1	Pengadilan (PD)	Terminal Mangkang (TM)	11.450
4	Layur (LY)	Balaikota (BK)	10.700
4	Balaikota (BK)	Cakrawala (CW)	3.200
4	Cakrawala (CW)	Pengadilan (PD)	2.000
4	Pengadilan (PD)	Terminal Cangkiran (TC)	16.300
4	Terminal Cangkiran (TC)	Cakrawala (CW)	17.600
4	Cakrawala (CW)	Balaikota (BK)	3.850
4	Balaikota (BK)	Simpang Lima (SL)	2.500
4	Simpang Lima (SL)	Layur (LY)	2.600
8	Simpang Lima (SL)	Cakrawala (CW)	4.450
8	Cakrawala (CW)	Terminal Cangkiran (TC)	22.100
8	Terminal Cangkiran (TC)	Cakrawala (CW)	22.500
8	Cakrawala (CW)	Balaikota (BK)	3.400
8	Balaikota (BK)	Simpang Lima (SL)	2.500

Tabel 3.1. Jarak Antar Halte atau Terminal

3.2 Model Graf Berarah

Pemodelan graf berarah dari jaringan Bus Trans Semarang memerlukan beberapa data berupa daftar halte sebagai *vertex*, kemudian urutan perjalanan bus antar halte sebagai *edge*, dan waktu tempuh perjalanan bus antar halte sebagai bobotnya.

Waktu tempuh bus dinyatakan dalam satuan menit, dan diperoleh menggunakan rumus

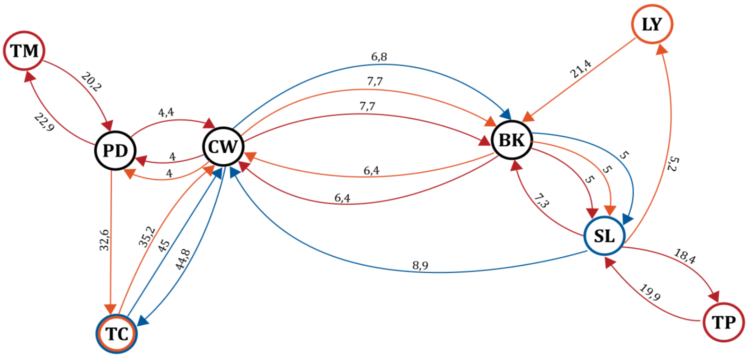
$$Waktu = \frac{Jarak}{Kecepatan}$$

dengan menggunakan data jarak antar halte pada tabel 3.1 dan kecepatan rata-rata yang telah diasumsikan yaitu 30 km/jam. Diperoleh waktu perjalanan bus dan banyaknya bus yang beroperasi antar halte sebagai berikut:

Rute	Dari	Tujuan	Waktu	Banyak Bus
1	Terminal Mangkang (TM)	Pengadilan (PD)	20,2	4
1	Pengadilan (PD)	Cakrawala (CW)	4,4	1
1	Cakrawala (CW)	Balaikota (BK)	7,7	2
1	Balaikota (BK)	Simpang Lima (SL)	5	1
1	Simpang Lima (SL)	Terminal Penggaron (TP)	18,4	3
1	Terminal Penggaron (TP)	Simpang Lima (SL)	19,9	3
1	Simpang Lima (SL)	Balaikota (BK)	7,3	2
1	Balaikota (BK)	Cakrawala (CW)	6,4	1
1	Cakrawala (CW)	Pengadilan (PD)	4	1
1	Pengadilan (PD)	Terminal Mangkang (TM)	22,9	5
4	Layur (LY)	Balaikota (BK)	21,4	4
4	Balaikota (BK)	Cakrawala (CW)	6,4	2
4	Cakrawala (CW)	Pengadilan (PD)	4	1
4	Pengadilan (PD)	Terminal Cangkiran (TC)	32,6	6
4	Terminal Cangkiran (TC)	Cakrawala (CW)	35,2	6
4	Cakrawala (CW)	Balaikota (BK)	7,7	2
4	Balaikota (BK)	Simpang Lima (SL)	5	1
4	Simpang Lima (SL)	Layur (LY)	5,2	1
8	Simpang Lima (SL)	Cakrawala (CW)	8,9	1
8	Cakrawala (CW)	Terminal Cangkiran (TC)	45	7
8	Terminal Cangkiran (TC)	Cakrawala (CW)	45	7
8	Cakrawala (CW)	Balaikota (BK)	6,8	1
8	Balaikota (BK)	Simpang Lima (SL)	5	1

Tabel 3.2. Jalur 1, 4, dan 8 Bus Trans Semarang

Berdasarkan data pada tabel 3.2, dapat dibuat model graf berarah koridor 1, 4, dan 8 sebagai berikut:



Gambar 3.1. Graf berarah jalur 1, 4 , dan 8

Model graf diatas memiliki 8 buah vertex yang merepresentasikan halte/terminal dan 23 buah edge berbobot yang merepresentasikan waktu tempuh dalam satuan menit. Vertex berwarna merah merepresentasikan terminal ujung Koridor 1 yaitu Terminal Mangkang (TM) dan Terminal Penggaron (TP), kemudian edge bewarna merah merepresentasikan rute dari Koridor 1. Vertex berwarna oranye merepresentasikan terminal ujung Koridor 4 yaitu Simpang Lima (SL) dan Terminal Cangkiran (TC), kemudian edge berwarna oranye merepresentasikan rute dari koridor 4. Terakhir, vertex berwarna biru merepresentasikan terminal ujung Koridor 8 yaitu Layur (LY) dan Terminal Cangkiran (TC), kemudian edge berwarna biru merepresentasikan rute dari koridor 8.

Berdasarkan model graf berarah, data keberangkatan pada tabel, dan asumsi yang telah ditentukan, akan dibentuk suatu aturan sinkronisasi bus di tiap rutenya sebagai berikut:

Koridor 1

1. Keberangkatan bus ke-$(k+1)$ dari Terminal Mangkang (TM)

menuju Pengadilan (PD) harus menunggu bus ke-$(k-4)$ yang berangkat dari Pengadilan (PD) tiba di Terminal Mangkang (TM) pada koridor 1.

2. Keberangkatan bus ke-$(k+1)$ dari Pengadilan (PD) menuju Cakrawala (CW) harus menunggu bus ke-$(k-3)$ yang berangkat dari Terminal Mangkang (TM) tiba di Pengadilan (PD) pada koridor 1.

3. Keberangkatan bus ke-$(k+1)$ dari Cakrawala (CW) menuju Balaikota (BK) harus menunggu bus ke-k yang berangkat dari Pengadilan (PD) tiba di Cakrawala (CW) pada koridor 1, dan menunggu bus ke-$(k-5)$ dan bus ke-$(k-6)$ yang berangkat dari Terminal Cangkiran (TC) tiba di Cakrawala (CW) pada koridor 4 dan 8.

4. Keberangkatan bus ke-$(k+1)$ dari Balaikota (BK) menuju Simpang Lima (SL) harus menunggu bus ke-$(k-1)$ yang berangkat dari Cakrawala (CW) tiba di Balaikota (BK) pada Koridor 1 dan 4, dan menunggu bus ke-k yang berangkat dari Cakrawala (CW) tiba di Balaikota (BK) pada koridor 8. Menunggu bus ke-$(k-3)$ yang berangkat dari Layur (LY) tiba di Balaikota (BK) pada koridor 4, dan menunggu bus ke-$(k-1)$ yang berangkat dari Simpang Lima (SL) tiba di Balaikota (BK) pada koridor 1.

5. Keberangkatan bus ke-$(k+1)$ dari Simpang Lima (SL) menuju Terminal Penggaron (TP) harus menunggu bus ke-k yang berangkat dari Balaikota (BK) tiba di Simpang Lima (SL) pada Koridor 1, 4 dan 8.

6. Keberangkatan bus ke-$(k+1)$ dari Terminal Penggaron (TP)

menuju Simpang Lima (SL) harus menunggu bus ke-$(k-2)$ dari Simpang Lima (SL) tiba di Terminal Penggaron (TP).

7. Keberangkatan bus ke-$(k+1)$ dari Simpang Lima (SL) menuju Balaikota (BK) harus menunggu bus ke-k yang berangkat dari Balaikota (BK) tiba di Simpang Lima (SL) pada Koridor 1, 4 dan 8, dan menunggu bus ke-$(k-2)$ dari Terminal Penggaron (TP) tiba di Simpang Lima (SL) pada koridor 1.

8. Keberangkatan bus ke-$(k+1)$ dari Balaikota (BK) menuju Cakrawala (CW) harus menunggu bus ke-$(k-1)$ yang berangkat dari Simpang Lima (SL) tiba di Balaikota (BK) pada koridor 1, menunggu bus ke-$(k-3)$ yang berangkat dari Layur (LY) tiba di Balaikota (BK) pada koridor 4, dan menunggu bus ke-$(k-1)$ yang berangkat dari Cakrawala (CW) tiba di Balaikota (BK) pada Koridor 1 dan 4, dan menunggu bus ke-k yang berangkat dari Cakrawala (CW) tiba di Balaikota (BK) pada koridor 8.

9. Keberangkatan bus ke-$(k+1)$ dari Cakrawala (CW) menuju Pengadilan (PD) harus menunggu bus ke-k yang berangkat dari Balaikota (BK) tiba di Cakrawala (CW) pada koridor 1, menunggu bus ke-$(k-1)$ yang berangkat dari Balaikota (BK) tiba di Cakrawala (CW) pada Koridor 4, dan menunggu bus ke-k yang berangkat dari Simpang Lima (SL) tiba di Cakrawala (CW) pada koridor 8.

10. Keberangkatan ke-$(k+1)$ dari Pengadilan (PD) menuju Terminal Mangkang (TM) harus menunggu bus ke-k yang berangkat dari Cakrawala (CW) tiba di Pengadilan (PD) pada Koridor 1 dan 4.

Koridor 4

1. Keberangkatan bus ke-$(k + 1)$ dari Layur (LY) menuju Balaikota (BK) harus menunggu bus ke-k yang berangkat dari Simpang Lima (SL) tiba di Layur (LY) pada koridor 4.

2. Keberangkatan bus ke-$(k + 1)$ dari Balaikota (BK) menuju Cakrawala (CW) harus menunggu bus ke-$(k - 1)$ yang berangkat dari Simpang Lima (SL) tiba di Balaikota (BK) pada koridor 1, menunggu bus ke-$(k - 3)$ yang berangkat dari Layur (LY) tiba di Balaikota (BK) pada koridor 4, dan menunggu bus ke-$(k - 1)$ yang berangkat dari Cakrawala (CW) tiba di Balaikota (BK) pada Koridor 1 dan 4, dan menunggu bus ke-k yang berangkat dari Cakrawala (CW) tiba di Balaikota (BK) pada koridor 8.

3. Keberangkatan bus ke-$(k + 1)$ dari Cakrawala (CW) menuju Pengadilan (PD) harus menunggu bus ke-k yang berangkat dari Balaikota (BK) tiba di Cakrawala (CW) pada koridor 1, menunggu bus ke-$(k - 1)$ yang berangkat dari Balaikota (BK) tiba di Cakrawala (CW) pada Koridor 4, dan menunggu bus ke-k yang berangkat dari Simpang Lima (SL) tiba di Cakrawala (CW) pada koridor 8.

4. Keberangkatan bus ke-$(k + 1)$ dari Pengadilan (PD) menuju Terminal Cangkiran (TC) harus menunggu bus ke-k yang berangkat dari Cakrawala (CW) tiba di Pengadilan (PD) pada koridor 1 dan 4.

5. Keberangkatan bus ke-$(k + 1)$ dari Terminal Cangkiran (TC) menuju Cakrawala (CW) harus menunggu bus ke-$(k-5)$ yang

berangkat dari Pengadilan (PD) menuju Terminal Cangkiran (TC) pada koridor 4.

6. Keberangkatan bus ke-$(k + 1)$ dari Cakrawala (CW) menuju Balaikota (BK) harus menunggu bus ke-k yang berangkat dari Pengadilan (PD) tiba di Cakrawala (CW) pada koridor 1, dan menunggu bus ke-$(k - 5)$ dan bus ke-$(k - 6)$ yang berangkat dari Terminal Cangkiran (TC) tiba di Cakrawala (CW) pada koridor 4 dan 8.

7. Keberangkatan bus ke-$(k + 1)$ dari Balaikota (BK) menuju Simpang Lima (SL) harus menunggu bus ke-$(k - 1)$ yang berangkat dari Cakrawala (CW) tiba di Balaikota (BK) pada Koridor 1 dan 4, dan menunggu bus ke-k yang berangkat dari Cakrawala (CW) tiba di Balaikota (BK) pada koridor 8. Menunggu bus ke-$(k - 3)$ yang berangkat dari Layur (LY) tiba di Balaikota (BK) pada koridor 4, dan menunggu bus ke-$(k - 1)$ yang berangkat dari Simpang Lima (SL) tiba di Balaikota (BK) pada koridor 1.

8. Keberangkatan bus ke-$(k+1)$ dari Simpang Lima (SL) menuju Layur (LY) harus menunggu bus ke-k yang berangkat dari Balaikota (BK) tiba di Simpang Lima (SL) pada Koridor 1, 4 dan 8. dan menunggu bus ke-$(k - 2)$ yang berangkat dari Terminal Pengaron (TP) tiba di Simpang Lima (SL) pada koridor 1.

Koridor 8

1. Keberangkatan bus ke-$(k+1)$ dari Simpang Lima (SL) menuju Cakrawala (CW) harus menunggu bus ke-k dari Balaikota (BK) tiba di Simpang Lima (SL) pada koridor 1, 4, dan 8.

Kemudian menunggu bus ke-$(k-2)$ yang berangkat dari Terminal Pengaron (TP) tiba di Simpang Lima (SL).

2. Keberangkatan bus ke-$(k+1)$ dari Cakrawala (CW) menuju Terminal Cangkiran (TC) harus menunggu bus ke-k yang berangkat dari Balaikota (BK) tiba di Cakrawala (CW) pada koridor 1, menunggu bus ke-$(k-1)$ yang berangkat dari Balaikota (BK) tiba di Cakrawala (CW) pada Koridor 4, dan menunggu bus ke-k yang berangkat dari Simpang Lima (SL) tiba di Cakrawala (CW) pada koridor 8.

3. Keberangkatan bus ke-$(k+1)$ dari Terminal Cangkiran (TC) menuju Cakrawala (CW) harus menunggu bus ke-$(k-6)$ yang berangkat dari Cakrawala (CW) tiba di Terminal Cangkiran (TC) pada koridor 8.

4. Keberangkatan bus ke-$(k+1)$ dari Cakrawala (CW) menuju Balaikota (BK) harus menunggu bus ke-k yang berangkat dari Pengadilan (PD) tiba di Cakrawala (CW) pada koridor 1, dan menunggu bus ke-$(k-5)$ dan bus ke-$(k-6)$ yang berangkat dari Terminal Cangkiran (TC) tiba di Cakrawala (CW) pada koridor 4 dan 8.

5. Keberangkatan bus ke-$(k+1)$ dari Balaikota (BK) menuju Simpang Lima (SL) harus menunggu bus ke-$(k-1)$ yang berangkat dari Cakrawala (CW) tiba di Balaikota (BK) pada Koridor 1 dan 4, dan menunggu bus ke-k yang berangkat dari Cakrawala (CW) tiba di Balaikota (BK) pada koridor 8. Menunggu bus ke-$(k-3)$ yang berangkat dari Layur (LY) tiba di Balaikota (BK) pada koridor 4, dan menunggu bus ke-$(k-1)$ yang berangkat dari Simpang Lima (SL) tiba di

Balaikota (BK) pada koridor 1.

Dari informasi rute bus dan lamanya waktu perjalanan serta aturan sinkronisasi yang telah didapatkan. Selanjutnya diberikan pendefinisian variabel pada model sistem jaringan Bus Trans Semarang sebagai berikut.

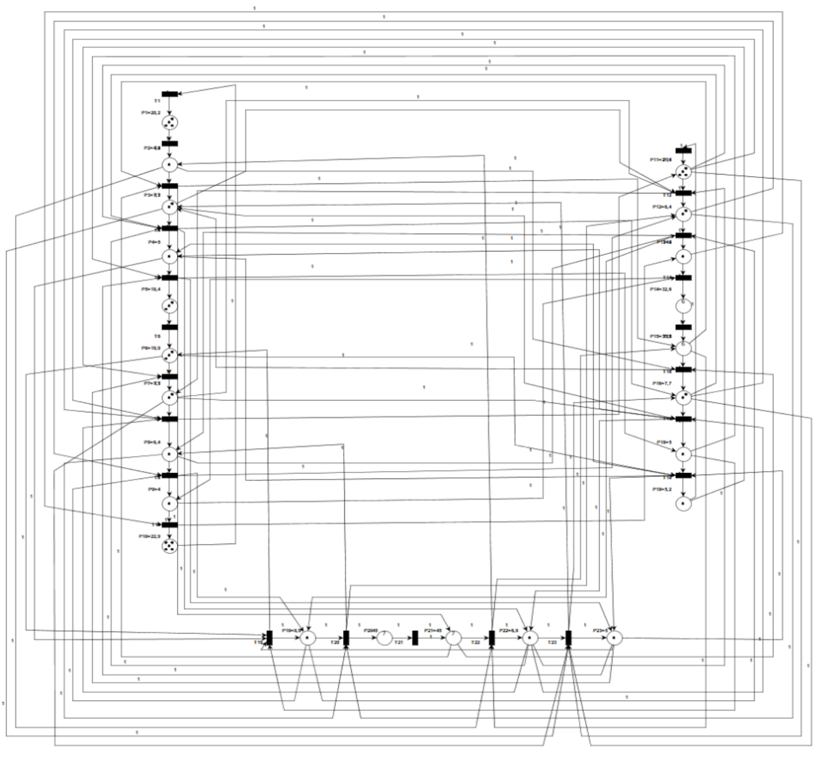
Rute	**Variabel**	**Waktu Keberangkatan Bus dari**
1	$x_1(k)$	TM ke PD pada saat ke-k
1	$x_2(k)$	PD ke CW pada saat ke-k
1	$x_3(k)$	CW ke BK pada saat ke-k
1	$x_4(k)$	BK ke SL pada saat ke-k
1	$x_5(k)$	SL ke TP pada saat ke-k
1	$x_6(k)$	TP ke SL pada saat ke-k
1	$x_7(k)$	SL ke BK pada saat ke-k
1	$x_8(k)$	BK ke CW pada saat ke-k
1	$x_9(k)$	CW ke PD pada saat ke-k
1	$x_{10}(k)$	PD ke TM pada saat ke-k
4	$x_{11}(k)$	LY ke BK pada saat ke-k
4	$x_{12}(k)$	BK ke CW pada saat ke-k
4	$x_{13}(k)$	CW ke PD pada saat ke-k
4	$x_{14}(k)$	PD ke TC pada saat ke-k
4	$x_{15}(k)$	TC ke CW pada saat ke-k
4	$x_{16}(k)$	CW ke BK pada saat ke-k
4	$x_{17}(k)$	BK ke SL pada saat ke-k
4	$x_{18}(k)$	SL ke LY pada saat ke-k
8	$x_{19}(k)$	SL ke CW pada saat ke-k
8	$x_{20}(k)$	CW ke TC pada saat ke-k
8	$x_{21}(k)$	TC ke CW pada saat ke-k
8	$x_{22}(k)$	CW ke BK pada saat ke-k
8	$x_{23}(k)$	BK ke SL pada saat ke-k

Tabel 3.3. Pendefinisian Variabel

3.3 Model Petri Net

Pada penyusunan model petri net jarngan Bus Trans Semarang perlu untuk menentukan *place* dan transisinya. *Place* pada petri net yang akan dibuat merepresentasikan keadaan dimana bus dapat bergerak menuju halte berikutnya, sedangkan transisi merepresentasikan tiap haltenya.

Untuk keadaan awal berdasarkan banyaknya token di setiap *place*-nya, dengan token disini merepresentasikan jumlah bus yang diberangkatkan dari tiap halte. Keadaan awal petri net ini dibuat berdasarkan Tabel 3.2. Kemudian, dengan menggunakan acuan pada model graf berarah dan aturan sinkronisasi, akan dibuat model metri net sebagai berikut:



Gambar 3.2. Model Petri Net Bus Trans Semarang Koridor 1,4,8

Adapun himpunan *place* petri net pada Gambar 3.2 yaitu

$P = \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{26}\}$. Dibuat berdasarkan Tabel 3.2, dengan p_1 merepresentasikan keberangkatan dari Terminal Mangkang (TM) menuju Pengadilan (PD) pada koridor 1, p_2 merepresentasikan keberangkatan dari Pengadilan (PD) ke Cakrawala (CW) pada koridor 1, dan seterusnya hingga p_{23} merepresentasikan keberangkatan dari Balaikota (BK) menuju Simpang Lima (SL) pada koridor 8.

Himpunan transisi, $T = \{T_1, T_2, T_3, \ldots, T_{23}\}$ menunjukkan pemberhentian atau halte.

Himpunan *arch*, $A = \{(P_{15}, T_3), (P_{21}, T_3), (P_{16}, T_4), (P_{22}, T_4),$ $(P_{11}, T_4), (P_{17}, T_5), (P_{23}, T_5), (P_{17}, T_7), (P_{23}, T_7), (P_{11}, T_8), (P_{16}, T_8),$ $(P_{22}, T_8), (P_{12}, T_9), (P_{19}, T_9), (P_{13}, T_{10}), (P_7, T_{12}), (P_3, T_{12}), (P_{22}, T_{12}),$ $(P_8, T_{13}), (P_{19}, T_{13}), (P_9, T_{14}), (P_2, T_{16}), (P_{21}, T_{16}), (P_3, T_{17}), (P_{22}, T_{17}),$ $(P_7, T_{17}), (P_4, T_{18}), (P_{23}, T_{18}), (P_6, T_{18}), (P_4, T_{19}), (P_{17}, T_{19}), (P_6, T_{19}),$ $(P_8, T_{20}), (P_{12}, T_{20}), (P_2, T_{22}), (P_{15}, T_{22}), (P_3, T_{23}), (P_{16}, T_{23}), (P_{11}, T_{23}),$ $(P_7, T_{23}), (T_3, P_{21}), (T_3, P_{15}), (T_4, P_{22}), (T_4, P_{16}), (T_5, P_{23}), (T_5, P_{17}),$ $(T_8, P_{11}), (T_9, P_{19}), (T_9, P_{12}), (T_{10}, P_{13}), (T_{12}, P_7), (T_{13}, P_8), (T_{13}, P_{19}),$ $(T_{14}, P_9), (T_{16}, P_2), (T_{17}, P_{22}), (T_{17}, P_3), (T_{18}, P_4), (T_{18}, P_{23}), (T_{19}, P_6),$ $(T_{20}, P_{12}), (T_{20}, P_6), (T_{22}, P_{15}), (T_{22}, P_2), (T_{23}, P_{16}), (T_{23}, P_3)\}$

Bobot pada tiap *arch* mempunyai bobot 1 karena bus diberangkatkan satu per satu.

Penanda awalnya $\mathbf{x}_0 = [4\ 1\ 2\ 1\ 3\ 3\ 2\ 1\ 1\ 5\ 4\ 2\ 1\ 6\ 6\ 2\ 1\ 1\ 1\ 7\ 7\ 1\ 1]^T$, menunjukkan banyaknya token di tiap *place*-nya berdasarkan banyaknya bus pada Tabel 3.2.

3.4 Model Aljabar Max Plus

Model aljabar max plus akan dibuat dalam bentuk $\overline{x}(k+1) = \overline{A} \otimes \overline{x}(k)$. Berdasarkan data jalur Bus Trans Semarang, aturan sinkronisasi, dan pendefinisian variabel. Dapat dibentuk model aljabar max plus sistem Bus Trans Semarang adalah sebagai berikut.

Koridor 1

- $x_1(k+1) = [x_{10}(k-4) \otimes 22, 9 \otimes 2]$
- $x_2(k+1) = [x_1(k-3) \otimes 20, 2 \otimes 2]$
- $x_3(k+1) = [x_2(k) \otimes 4, 4 \otimes 2] \oplus [x_{15}(k-5) \otimes 35, 2 \otimes 2] \oplus [x_{21}(k-6) \otimes 45 \otimes 2]$
- $x_4(k+1) = [x_3(k-1) \otimes 7, 7 \otimes 2] \oplus [x_{16}(k-1) \otimes 7, 7 \otimes 2] \oplus [x_{22}(k) \otimes 6, 8 \otimes 2] \oplus [x_{11}(k-3) \otimes 21, 4 \otimes 2] \oplus [x_7(k-1) \otimes 7, 3 \otimes 2]$
- $x_5(k+1) = [x_4(k) \otimes 5 \otimes 2] \oplus [x_{17}(k) \otimes 5 \otimes 2] \oplus [x_{23}(k) \otimes 5 \otimes 2]$
- $x_6(k+1) = [x_5(k-2) \otimes 18, 4 \otimes 2]$
- $x_7(k+1) = [x_4(k) \otimes 5 \otimes 2] \oplus [x_{17}(k) \otimes 5 \otimes 2] \oplus [x_{23}(k) \otimes 5 \otimes 2] \oplus [x_6(k-2) \otimes 19, 9 \otimes 2]$
- $x_8(k+1) = [x_7(k-1) \otimes 7, 3 \otimes 2] \oplus [x_{11}(k-3) \otimes 21, 4 \otimes 2] \oplus [x_3(k-1) \otimes 7, 7 \otimes 2] \oplus [x_{16}(k-1) \otimes 7, 7 \otimes 2] \oplus [x_{22}(k) \otimes 6, 8 \otimes 2]$
- $x_9(k+1) = [x_8(k) \otimes 6, 4 \otimes 2] \oplus [x_{12}(k-1) \otimes 6, 4 \otimes 2] \oplus [x_{19}(k) \otimes 8, 9 \otimes 2]$
- $x_{10}(k+1) = [x_9(k) \otimes 4 \otimes 2] \oplus [x_{13}(k) \otimes 4 \otimes 2]$

Koridor 4

- $x_{11}(k+1) = [x_{18}(k) \otimes 5, 2 \otimes 2]$
- $x_{12}(k+1) = [x_7(k-1) \otimes 7, 3 \otimes 2] \oplus [x_{11}(k-3) \otimes 21, 4 \otimes 2] \oplus [x_3(k-1) \otimes 7, 7 \otimes 2] \oplus [x_{16}(k-1) \otimes 7, 7 \otimes 2] \oplus [x_{22}(k) \otimes 6, 8 \otimes 2]$

- $x_{13}(k+1) = [x_8(k) \otimes 6,4 \otimes 2] \oplus [x_{12}(k-1) \otimes 6,4 \otimes 2] \oplus [x_{19}(k) \otimes 8,9 \otimes 2]$
- $x_{14}(k+1) = [x_9(k) \otimes 4 \otimes 2] \oplus [x_{13}(k) \otimes 4 \otimes 2]$
- $x_{15}(k+1) = [x_{14}(k-5) \otimes 32,6 \otimes 2]$
- $x_{16}(k+1) = [x_2(k) \otimes 4,4 \otimes 2] \oplus [x_{15}(k-5) \otimes 35,2 \otimes 2] \oplus [x_{21}(k-6) \otimes 45 \otimes 2]$
- $x_{17}(k+1) = [x_3(k-1) \otimes 7,7 \otimes 2] \oplus [x_{16}(k-1) \otimes 7,7 \otimes 2] \oplus [x_{22}(k) \otimes 6,8 \otimes 2] \oplus [x_{11}(k-3) \otimes 21,4 \otimes 2] \oplus [x_7(k-1) \otimes 7,3 \otimes 2]$
- $x_{18}(k+1) = [x_4(k) \otimes 5 \otimes 2] \oplus [x_{17}(k) \otimes 5 \otimes 2] \oplus [x_{23}(k) \otimes 5 \otimes 2] \oplus [x_6(k-2) \otimes 19,9 \otimes 2]$

Koridor 8

- $x_{19}(k+1) = [x_4(k) \otimes 5 \otimes 2] \oplus [x_{17}(k) \otimes 5 \otimes 2] \oplus [x_{23}(k) \otimes 5 \otimes 2] \oplus [x_6(k-2) \otimes 19,9 \otimes 2]$
- $x_{20}(k+1) = [x_8(k) \otimes 6,4 \otimes 2] \oplus [x_{12}(k-1) \otimes 6,4 \otimes 2] \oplus [x_{19}(k) \otimes 8,9 \otimes 2]$
- $x_{21}(k+1) = [x_{20}(k-6) \otimes 45 \otimes 2]$
- $x_{22}(k+1) = [x_2(k) \otimes 4,4 \otimes 2] \oplus [x_{15}(k-5) \otimes 35,2 \otimes 2] \oplus [x_{21}(k-6) \otimes 45 \otimes 2]$
- $x_{23}(k+1) = [x_3(k-1) \otimes 7,7 \otimes 2] \oplus [x_{16}(k-1) \otimes 7,7 \otimes 2] \oplus [x_{22}(k) \otimes 6,8 \otimes 2] \oplus [x_{11}(k-3) \otimes 21,4 \otimes 2] \oplus [x_7(k-1) \otimes 7,3 \otimes 2]$

Selanjutnya, persamaan aljabar max plus pada Koridor 1, Koridor 4, dan Koridor 8 tersebut dinyatakan dalam bentuk persamaan matriks aljabar max plus

$$x(k+1) = \bigoplus_{p=1}^{M} (A_p \otimes x(k-1+p))$$

A_p merupakan matriks berukuran $n \times n$, dimana n adalah banyaknya variabel, dan M adalah banyaknya bus maksimum pada tiap pemberhentian.

Berdasarkan Tabel 3.2 dan Tabel 3.3 banyaknya variabel yaitu 23, dan banyaknya bus maksimum pada halte yaitu 7, diperoleh $n = 23$ dan $M = 7$. Sehingga terdapat 7 buah matriks A_p, dengan $p = \{1, 2, 3, \ldots, 7\}$ dan masing masing matriksnya berukuran 23×23. Adapun matriks A_p sebagaimana *terlampir*.

Setelah didapatkan matriks A_p dengan $p = \{1, 2, 3, \ldots, 7\}$, matriks-matriks ini akan dibentuk dalam matriks blok $\overline{A}$ yaitu

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 \\ E & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} & E & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & E & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & E & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & E & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} & E & \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

Namun, dikarenakan matriks $\overline{A}$ berukuran besar yaitu 161×161 sehingga matriks $\overline{A}$ dapat dilihat sebagaimana *terlampir*. Langkah ini juga bertujuan untuk memudahkan proses penghitungan pada *software* Scilab.

Matriks A_1 merupakan matriks berukuran 23×23 yang bersesuaian dengan model aljabar max plus keberangkatan bus pada saat ke-(k), begitu pula dengan matriks A_2 yang bersesuaian dengan model aljabar max plus keberangkatan bus pada saat ke-$(k-1)$, dan seterusnya hingga matriks A_8. Sedangkan matriks E merupakan matriks berukuran 23×23 yang seluruh entrinya merupakan elemen netral yaitu 0, dan matriks $\boldsymbol{\varepsilon}$ merupakan matriks berukuran 23×23 yang seluruh entrinya merupakan elemen satuan yaitu ε.

3.5 Desain Penjadwalan

Penentuan desain penjadwalan Bus Trans Semarang yaitu dengan menggunakan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $\overline{A}$ yang dapat dihitung menggunakan Algoritma Power. Karena matriks $\overline{A}$ berukuran relatif besar yaitu 161×161, sehingga sulit untuk dihitung secara manual, maka peneliti menggunakan bantuan *software* Scilab dengan perintah "maxplusmaxalgol" untuk menghitung nilai eigen yang termuat dalam Max Plus *Toolbox*.

Dengan menggunakan *software* Scilab dan Max Plus *Toolbox* didalamnya, diperoleh nilai eigen $\lambda = 8,2$, nilai eigen disini menunjukkan bahwa sistem penjadwalan Bus Trans Semarang pada model yang telah dibuat, setiap $8,2$ menit sekali terjadi pemberangkatan bus di tiap haltenya. dan vektor eigen V yang berukuran 161×1, nilai eigen disini digunakan sebagai waktu awal keberangkatan bus dari tiap halte. Namun karena variabel yang digunakan sebanyak 23 variabel, maka entri-entri vektor V yang digunakan hanya entri-entri baris ke-1 sampai dengan baris ke-23 yaitu $V = [\ 147,8 \ \ 153,3 \ \ 153,5 \ \ 157,2 \ \ 156 \ \ 159,7 \ \ 161,2 \ \ 157,2$

$163,9 \;\; 161,7 \;\; 160,2 \;\; 157,2 \;\; 163,9 \;\; 161,7 \;\; 149,3 \;\; 153,5 \;\; 157,2 \;\; 161,2 \;\; 161,2 \;\; 163,9 \;\; 153,5 \;\; 153,5 \;\; 157,2\,]^T$. Dengan menganggap bahwa waktu 2 jam pertama tidak ada, maka nilai $V = [\,27,8 \;\; 33,3 \;\; 33,5 \;\; 37,2 \;\; 36 \;\; 39,7 \;\; 41,2 \;\; 37,2 \;\; 43,9 \;\; 41,7 \;\; 40,2 \;\; 37,2 \;\; 43,9 \;\; 41,7 \;\; 29,3 \;\; 33,5 \;\; 37,2 \;\; 41,2 \;\; 41,2 \;\; 43,9 \;\; 33,5 \;\; 33,5 \;\; 37,2\,]^T$.

Bus Trans Semarang mulai beroperasi pada pukul 05:30 WIB. Sehingga, agar pergerakan bus stabil, maka dengan menggunakan waktu awal bus beroperasi yaitu 5 jam 30 menit dan vektor eigen sebagai waktu awalnya. Sehingga waktu awal keperiodikannya adalah:

$$\begin{bmatrix} \overline{x}_1(0) \\ \overline{x}_2(0) \\ \overline{x}_3(0) \\ \overline{x}_4(0) \\ \overline{x}_5(0) \\ \overline{x}_6(0) \\ \overline{x}_7(0) \\ \overline{x}_8(0) \\ \overline{x}_9(0) \\ \overline{x}_{10}(0) \\ \overline{x}_{11}(0) \\ \overline{x}_{12}(0) \\ \overline{x}_{13}(0) \\ \overline{x}_{14}(0) \\ \overline{x}_{15}(0) \\ \overline{x}_{16}(0) \\ \overline{x}_{17}(0) \\ \overline{x}_{18}(0) \\ \overline{x}_{19}(0) \\ \overline{x}_{20}(0) \\ \overline{x}_{21}(0) \\ \overline{x}_{22}(0) \\ \overline{x}_{23}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 357,8 \\ 363,3 \\ 363,5 \\ 367,2 \\ 366 \\ 369,7 \\ 371,2 \\ 367,2 \\ 373,9 \\ 371,7 \\ 370,2 \\ 367,2 \\ 373,9 \\ 371,7 \\ 359,3 \\ 363,5 \\ 367,2 \\ 371,2 \\ 371,2 \\ 373,9 \\ 363,5 \\ 363,5 \\ 367,2 \end{bmatrix}$$

Artinya, $\overline{x}_1$ (TM menuju CW pada koridor 1) pertama kali berangkat pada pukul 05:57,8 WIB, kemudian $\overline{x}_2$ (CW menuju BK pada koridor 1) pertama kali berangkat pada pukul 06:03,3 WIB, begitu seterusnya hingga $\overline{x}_{23}$. Kemudian untuk keberangkatan kedua ($\overline{x}(1)$) diperoleh dengan mengoperasikan $\otimes$ waktu pada $\overline{x}(0)$ dengan nilai λ yaitu 8,2 menit sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \overline{x}_1(1) \\ \overline{x}_2(1) \\ \overline{x}_3(1) \\ \overline{x}_4(1) \\ \overline{x}_5(1) \\ \overline{x}_6(1) \\ \overline{x}_7(1) \\ \overline{x}_8(1) \\ \overline{x}_9(1) \\ \overline{x}_{10}(1) \\ \overline{x}_{11}(1) \\ \overline{x}_{12}(1) \\ \overline{x}_{13}(1) \\ \overline{x}_{14}(1) \\ \overline{x}_{15}(1) \\ \overline{x}_{16}(1) \\ \overline{x}_{17}(1) \\ \overline{x}_{18}(1) \\ \overline{x}_{19}(1) \\ \overline{x}_{20}(1) \\ \overline{x}_{21}(1) \\ \overline{x}_{22}(1) \\ \overline{x}_{23}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 357,8 \\ 363,3 \\ 363,5 \\ 367,2 \\ 366 \\ 369,7 \\ 371,2 \\ 367,2 \\ 373,9 \\ 371,7 \\ 370,2 \\ 367,2 \\ 373,9 \\ 371,7 \\ 359,3 \\ 363,5 \\ 367,2 \\ 371,2 \\ 371,2 \\ 373,9 \\ 363,5 \\ 363,5 \\ 367,2 \end{bmatrix} \otimes 8,2 = \begin{bmatrix} 366 \\ 371,5 \\ 371,7 \\ 375,4 \\ 374,2 \\ 377,9 \\ 379,4 \\ 375,4 \\ 382,1 \\ 379,9 \\ 378,4 \\ 375,4 \\ 382,1 \\ 379,9 \\ 367,5 \\ 371,7 \\ 375,4 \\ 379,4 \\ 379,4 \\ 382,1 \\ 371,7 \\ 371,7 \\ 375,4 \end{bmatrix}$$

$\overline{x}_1$ (TM menuju CW pada koridor 1) untuk keberangkatan ke-dua berangkat pada pukul 06:06 WIB, kemudian $\overline{x}_2$ (CW menuju BK pada koridor 1) untuk keberangkatan ke-dua berangkat pada pukul 06:11,5 WIB, begitu seterusnya hingga $\overline{x}_{23}$.

Kemudian, untuk keberangkatan ke-tiga dan seterusnya tinggal mengoperasikan $\otimes$ waktu keberangkatan sebelumnya dengan nilai

λ. Secara umum dapat dihitungmenggunakan persamaan berikut:

$$\overline{x}(k+1) = \overline{x}(k) \otimes \lambda$$

Untuk waktu keberangkatan bus pertama dan kedua, lebih detailnya dapat dilihat pada *lampiran.*

BAB IV

SIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan pada penjadwalan Bus Trans Semarang, dapat disimpulkan bahwa:

1. Model graf, petri net, dan aljabar max-plus dapat diterapkan untuk membuat desain penjadwalan sistem jaringan Bus Trans Semarang. Model tersebut kemudian dibawa ke dalam persamaan aljabar max plus menggunakan persamaan

   $$\overline{x}(k+1) = \overline{A} \otimes \overline{x}(k)$$

   menghasilkan matriks berukuran 161×161.

2. Desain waktu keberangkatan awal diperoleh dari vektor eigen dan waktu awal beroperasinya Bus Trans Semarang yaitu pukul 05:30 WIB. Kemudian periode keberangkatan pada masing-masing halte atau terminal adalah sebesar λ yaitu 8,2 menit.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, peneliti hanya mengambil sub bagian dari seluruh koridor Bus Trans Semarang, batasan, dan juga beberapa asumsi. Sehingga, saran dari peneliti bahwa penelitian ini dapat dikembangkan lebih lanjut dan lebih detail lagi, mungkin dengan menambah variabel variabel yang bisa saja berpengaruh seperti penambahan waktu saat isi ulang bahan bakar, waktu tunggu di lampu lalu lintas, dll.

Adapun model petri net juga dapat diteruskan ke dalam analisis kestabilan, namun perlu pengembangan $software$ yang dapat membantu melakukan analisis tersebut. Sehingga nantinya penggunaan aljabar max plus dapat bersaing di kehidupan nyata untuk melakukan penjadwalan maupun mengatur sistem antrian.

Agar penjadwalan menggunakan aljabar max plus dapat efektif pada studi kasus Bus Trans, perlu adanya dibuat jalur khusus bus tersebut, sehingga penjadwalan akan dapat lebih stabil dan terjamin karena tidak akan terganggu oleh kendaraan lain dalam jalur tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Adzikya, Dieky. 2008. *Membangun Model Petri Net Lampu Lalu Lintas dan Simulasinya*. (Disertasi, Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya)

Afif, Ahmad. 2015. *Aplikasi Petri Net dan Sljabar Max-Plus Pada Sistem Jaringan Kereta Api di Jawa Timur*. (Disertasi, Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya).

Bacelli, F, dkk. 2001. *Synchronization and Linearity*. Paris: Indria.

Butkovic, Peter. 2010. *Max-linear Systems: Theory and Algorithms*. London: Springer.

Farhi, Nadir, dkk. 2018. *Traffic Modelling and Real-time Control for Metro Lines*. *ArXiv: 1604.04593v2*, 1-13.

Heidergott, B, dkk. 2005. *Max Plus at Work*. Amsterdam: Princeton University.

Oktafianto, Kresna dkk. 2013. *Implementasi Aljabar Max-Plus Pada Pemodelan dan Penjadwalan Keberangkatan Bus Kota DAMRI (Studi Kasus di Surabaya)*. *SEMNASTIKA UNESA*, 152-160.

Pramesthi, Sri Rejeki P. W. 2021. *Penerapan Petri Net pada Sistem Arus Lalu Lintas*. *Barekeng:jurnal ilmu matematika dan terapan,15(1)*,193-201.

Subiono, dkk. 2000. *Power Algorithms for* $(\max .+)$ *and Bipartite* $(\min, \max, +)$ *Systems*. *Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications, 10*, 369-389.

Subiono. 2009. *Aljabar Max Plus dan Aplikasinya: Model Sistem Antrian. Limits: J. Math and Its Appl, 6(1)*, 49-59.

West, Douglas B. 2002. *Introduction to Graph Theory Second Edition*. Urbana: University of Illinois.

Winarni. 2011. *Penjadwalan Jalur Bus Dalam Kota dengan Model Petri Net dan Aljabar Max Plus (Studi Kasus Bussway Transjakarta). Jurnal CAUCHY, 1(4)*, 192-206.

Lampiran 1. Matriks A_p

$$A_1 = \begin{bmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & 6{,}4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8{,}8 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8{,}8 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8{,}4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10{,}9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7{,}2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8{,}8 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8{,}4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10{,}9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & 6{,}4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8{,}8 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8{,}4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10{,}9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & 6{,}4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8{,}8 & \varepsilon
\end{bmatrix}$$

$$A_2=\left[\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 9{,}7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9{,}3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9{,}7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 9{,}7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9{,}3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9{,}7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8{,}4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 9{,}7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9{,}3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9{,}7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8{,}4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 9{,}7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9{,}3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9{,}7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8{,}4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 9{,}7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9{,}3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9{,}7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon
\end{array}\right]$$

$$A_3=\left[\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20{,}4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 21{,}9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 21{,}9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 21{,}9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon
\end{array}\right]$$

$$A_4=\begin{bmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
22{,}2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 23{,}4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 23{,}4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 23{,}4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 23{,}4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 23{,}4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon
\end{bmatrix}$$

$$A_5=\begin{bmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 24{,}9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon
\end{bmatrix}$$

$$A_6=\begin{bmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 37{,}2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34{,}6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 37{,}2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 37{,}2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon
\end{bmatrix}$$

$$A_7=\begin{bmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 47 & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 47 & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 47 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 47 & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon
\end{bmatrix}$$

Lampiran 2. Jadwal keberangkatan bus pertama dan kedua

Koridor 1

Rute		Keberangkatan ke-1 (WIB)	Keberangkatan ke-2 (WIB)
Dari	**Menuju**		
Terminal Mangkang	Pengadilan	05:57	06:06
Pengadilan	Cakrawala	06:03	06:11
Cakrawala	Balaikota	06:03	06:11
Balaikota	Simpang Lima	06:07	06:15
Simpang Lima	Terminal Penggaron	06:06	06:14
Terminal Penggaron	Simpang Lima	06:09	06:17
Simpang Lima	Balaikota	06:11	06:19
Balaikota	Cakrawala	06:07	06:15
Cakrawala	Pengadilan	06:13	06:22
Pengadilan	Terminal Mangkang	06:11	06:19

Koridor 4

Rute		Keberangkatan ke-1 (WIB)	Keberangkatan ke-2 (WIB)
Dari	**Menuju**		
Layur	Balaikota	06:10	06:18
Balaikota	Cakrawala	06:07	06:15
Cakrawala	Pengadilan	06:13	06:22
Pengadilan	Terminal Cangkiran	06:11	06:19
Terminal Cangkiran	Cakrawala	05:59	06:17
Cakrawala	Balaikota	06:03	06:11
Balaikota	Simpang Lima	06:07	06:15
Simpang Lima	Layur	06:11	06:19

Koridor 8

Rute		Keberangkatan ke-1 (WIB)	Keberangkatan ke-2 (WIB)
Dari	**Menuju**		
Simpang Lima	Cakrawala	06:11	06:19
Cakrawala	Terminal Cangkiran	06:13	06:22
Terminal Cangkiran	Cakrawala	06:03	06:11
Cakrawala	Balaikota	06:03	06:11
Balaikota	Simpang Lima	06:07	06:15

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

1. **Identitas Diri**

Nama Lengkap	:	Afwan Giri Firdaus
Tempat, Tgl. Lahir	:	Jepara, 17 Februari 2001
Alamat	:	Sukodono, RT 2 RW 3 Kec. Tahunan, Kab. Jepara
HP	:	0895341478403
E-mail	:	work.afwan@gmail.com

2. **Riwayat Pendidikan**

   (a) SD N 1 Sukodono

   (b) SMP N 1 Jepara

   (c) SMA N 1 Jepara

   (d) UIN Walisongo Semarang

Semarang, 21 Juli 2023

Afwan Giri Firdaus

NIM : 1908046030