STRUKTUR ALJABAR DARI POLINOMIAL ATAS ALJABAR MAX-PLUS

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika

Oleh : **SHAHROJI SETIAWAN**
NIM : 1908046035

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG

2023

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	Shahroji Setiawan
NIM	:	1908046035
Jurusan/Program Studi	:	Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

STRUKTUR ALJABAR DARI POLINOMIAL ATAS ALJABAR MAX-PLUS

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 16 Juni 2023
Pembuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
26AKX463232156

Shahroji Setiawan
NIM : 1908046035

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. HamkaKampus II NgaliyanTelp. 7601295 Fax. 7615387 Semarang 50185

PENGESAHAN

Naskah skripsi ini:

Judul	: Struktur Aljabar dari Polinomial atas Aljabar Max-Plus
Penulis	: Shahroji Setiawan
NIM	: 1908046035
Jurusan	: Matematika

Telah diujikan dalam sidang tugas akhir oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika

Semarang, 23 Juni 2023

DEWAN PENGUJI

Penguji I	Penguji II
Emy Siswanah, M. Sc.	**Ariska Kurnia Rachmawati, M. Sc.**
NIP. 198702022011012014	NIP. 198908112019032019
Penguji III	Penguji IV
Any Muanalifah, M. Si, Ph.d.	**Dinni Rahma Oktaviani, M. Si.**
NIP. 198201132011012009	NIP. 199410092019032017
Pembimbing I	Pembimbing II
Dinni Rahma Oktaviani, M. Si.	**Agus Wayan Yulianto, M.Sc.**
NIP. 199410092019032017	NIP : 198907162019031007

KEMENTERIAN AGAMA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UIN WALISONGO
SEMARANG
REPUBLIK INDONESIA

NOTA DINAS

Semarang, 16 Juni 2023

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	Struktur Aljabar dari Polinomial atas Aljabar Max-plus
Nama	:	Shahroji Setiawan
NIM	:	1908046035
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,

Dinni Rahma Oktaviani, M.Si.
NIP : 199410092019032017

NOTA DINAS

Semarang, 16 Juni 2023

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	Struktur Aljabar dari Polinomial atas Aljabar Max-plus
Nama	:	Shahroji Setiawan
NIM	:	1908046035
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing II,

Agus Wayan Yulianto, M.Sc.
NIP : 198907162019031007

ABSTRAK

Aljabar max-plus ($\mathbb{R}_{max}$) merupakan salah satu kajian dalam struktur aljabar. Struktur ini diperoleh dari himpunan semua bilangan real yang digabung dengan negatif tak hingga serta diikuti dua operasi biner yaitu operasi maksimum dan penjumlahan. Pembahasan mengenai aljabar max-plus dapat diperluas ke dalam struktur polinomial dengan cara mendefinisikan setiap koefisien polinomial dengan elemen-elemen $\mathbb{R}_{max}$. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui struktur apa saja yang dapat dibentuk dari polinomial atas aljabar max-plus ($\mathbb{R}_{max}[X]$). Suatu struktur aljabar dapat terbentuk apabila terdapat suatu himpunan tak kosong yang diikuti oleh operasi biner. Berdasarkan hasil pembahasan dalam penelitian ini didapat struktur $(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus, \otimes)$ membentuk semiring komutatif idempoten, $\mathbb{R}_{max}[X]$ merupakan semimodul kiri atas semiring $\mathbb{R}_{max}$, dan $\mathbb{R}_{max}[X]$ merupakan semimodul kanan atas semiring $\mathbb{R}_{max}$.

Kata kunci : aljabar max-plus, polinomial, struktur aljabar

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas semua rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Struktur Aljabar dari Polinomial atas Aljabar Max-Plus"**. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Baginda Nabi Muhammad SAW, beserta keluarga dan para sahabatnya hingga hari akhir zaman, amin.

Penyusunan skripsi ini dimaksudkan guna memenuhi persyaratan dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di UIN Walisongo Semarang. Penyelesaian skripsi ini tidak terlepas dari doa, dukungan, serta bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Imam Taufiq, M.Ag selaku Rektor Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.

2. Bapak Dr. H. Ismail, M.Ag selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.

3. Ibu Emy Siswanah, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.

4. Ibu Dinni Rahma Oktaviani, M.Si sebagai dosen pembimbing I yang telah bersedia memberikan bimbingan dan arahan selama penulisan skripsi.

5. Bapak Agus Wayan Yulianto, M.Sc sebagai dosen pembimbing II dan sebagai wali dosen yang telah bersedia memberikan bimbingan dan arahan selama penulisan skripsi serta.

6. Orang tua tercinta, Bapak Sungkono dan Ibu Sugiwati, serta Adik saya Nur Riski Maulana Karim, yang telah memberikan do’a dan dukungan yang tidak putus, sehingga penulis dapat menyelesaikan pendidikan dan skripsi ini dengan baik.
7. Teman-teman Matematika angkatan 2019 terkhusus Matematika B telah mensupport dan membantu peneliti dalam segala hal.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini jauh dari sempurna. Atas segala kekurangan dan kelemahan dalam skripsi ini penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun. Semoga karya tulis yang sederhana ini dapat menjadi bacaan yang bermanfaat dan dapat dikembangkan bagi peneliti-peneliti selanjutnya.

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Aljabar adalah salah satu kajian dalam ilmu matematika, kajian yang dipelajari dalam ilmu ini meliputi struktur, kuantitas, serta hubungan. Kajian aljabar biasa menggunakan huruf atau simbol yang sering disebut variabel, untuk merepresentasikan angka secara umum sebagai sarana menyederhanakan dan pemecahan masalah (Hidayani, 2012). Dalam aljabar sendiri, salah satu kajian yang dibahas adalah aljabar abstrak atau biasnya disebut struktur aljabar. Struktur ini biasanya dibentuk oleh suatu himpunan yang diikuti operasi biner, yang mana suatu operasi disebut operasi biner pada suatu himpunan apabila hasil operasi elemen-elemen suatu himpunan kembali pada himpunan tersebut (Malik, dkk, 2007). Tiap-tiap struktur aljabar memiliki definisi yang berbeda serta memiliki teorema-teorema berkaitan yang sangat menarik untuk dikaji.

Sebagai bagian dari ilmu pengetahuan, aljabar tentunya berkaitan dengan hukum alam yang berlaku. Dapat diibaratkan sifat tertutup operasi biner pada himpunan dengan perbuatan manusia. Misalkan diibaratkan perbuatan baik sebagai operasi penjumlahan, perbuatan jahat sebagai operasi perkalian, dan manusia sebagai suatu himpunan. Allah berfiman dalam Al-Qur’an surat Al-Isra’ ayat 7, yang berbunyi:

إِنْ أَحْسَنْتُمْ أَحْسَنْتُمْ لِأَنْفُسِكُمْ وَإِنْ أَسَأْتُمْ فَلَهَا

Artinya: *"Jika kamu berbuat baik (berarti) kamu berbuat baik bagi dirimu sendiri dan jika kamu berbuat jahat, maka (kejahatan) itu bagi dirimu sendiri."*(QS Al-Isra' ayat 7)
Berdasarkan ayat di atas dapat diihat bahwa semua perbuatan (baik atau buruk) yang dilakukan oleh seseorang, maka akan kembali kepada dirinya sendiri. Sehingga diambil kesimpulan, ketika manusia melakukan sesuatu perbuatan, maka sama halnya perbuatan tersebut dilakukan kepada dirinya sindiri. Hal ini sesuai dengan sifat tertutup operasi biner, yang mana jika ada anggota himpunan yang dikenai operasi biner maka hasil operasinya akan kembali ke himpunan itu sendiri. Berdasarkan hal tersebut, dapat diketahui bahwa struktur aljabar merupakan salah satu analogi yang terjadi pada kehidupan.

Berkaitan dengan struktur aljabar, dapat dibentuk suatu struktur yang dinamakan semiring. Semiring dinotasikan $(S, *, \bullet)$, definisiakan S sebagai suatu himpunan tak kosong, diikuti dengan dua operasi biner, misalkan operasi $(*)$ dan operasi $(\bullet)$. Dimana himpunan S diikuti operasi $*$ membentuk struktur monoid komutatif (semi grup komutatif yang memiliki elemen netral), himpunan S terhadap operasi perkalian $\bullet$ membentuk struktur monoid (semi grup yang memiliki elemen satuan), kemudian elemen netral menjadi elemen penyerap operasi $(\bullet)$, serta opersasi $(*)$ dan $(\bullet)$ berlaku distributif kiri dan kanan (Subiono, 2013).

Semiring dapat membentuk struktur aljabar baru yaitu aljabar max-plus. Struktur ini dinotasikan $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$, dengan $\mathbb{R}_\varepsilon$ didefinisikan sebagai himpunan semua bilangan real dengan negatif tak hingga $(\mathbb{R} \cup -\infty)$, diikuti dua operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$ berturut-turut didefinisikan sebagai operasi masksimum dan penjumlahan (Baccelli, 2001). Aljabar max-plus $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$

biasannya cukup ditulis $\mathbb{R}_{max}$.

Pembahasan mengenai aljabar max-plus dapat diperluas ke dalam struktur polinomial dengan cara mendefinisikan setiap koefisien polinomial dengan elemen-elemen pada $\mathbb{R}_{max}$. Polinomial ini disebut sebagai polinomial atas aljabar max-plus. Selanjutnya, polinom-polinom yang terbentuk dari $\mathbb{R}_{max}$ ini dapat dimuat kedalam suatu himpunan yang dinamakan himpunan polinomial atas aljabar max-plus, yang dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}[X]$ (Suroto, 2012).

Sebelumnya, telah terdapat beberapa penelitian tentang kajian polinomial atas aljabar max-plus. Penelitian yang dilakukan oleh Suroto (2012), penelitian ini membahas tentang struktur yang terbentuk dari himpunan polinomial atas aljabar max-plus diikuti dengan dua operasi, operasi pertama yaitu maksimum dan operasi kedua yaitu penjumlahan. Pada penelitian ini, telah dibuktikan bahwa struktur yang terbentuk adalah semiring. Kemudian ada penelitian yang dilakukan oleh Nugroho, dkk (2013). Penelitian ini serupa dengan penelitian yang dilakukan oleh Suroto (2012), dimana himpunan polinomial yang dibentuk atas aljabar max-plus menghasilkan struktur semiring komutatif idempoten.

Dari penelitian-penelitian yang telah ada sebelumnya, penulis tertarik untuk mengkaji lebih dalam tentang polinomial yang terbentuk dari elemen serta operasi pada aljabar max-plus. Lebih lanjut, penulis akan mengidentifikasi struktur aljabar yang terbentuk dari polinomial atas aljabar max-plus.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, maka identifikasi masalah yang diperoleh yaitu bagaimana struktur yang terbentuk dari polinomial atas aljabar max-plus?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan, maka tujuan peneletian ini yaitu untuk mengetahui struktur yang terbentuk dari polinomial atas aljabar max-plus.

1.4. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat bagi:

1. Penulis
   Menambah ilmu pengetahuan mengenai struktur polinomial atas aljabar max-plus.
2. Lembaga
   Sebagai rujukan penelitian-penelitian selanjutnya terkait struktur polinomial atas aljabar max-plus.
3. Pembaca
   Sebagai bahan pembelajaran terkait struktur polinomial atas aljabar max-plus.

1.5. Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini yaitu hanya membahas struktur yang terbentuk dari polinomial atas aljabar max-plus.

1.6. Metodologi Penelitian

Penelitian ini menggunakan jenis penelitian kepustakaan. Penelitian dilakukan dengan cara mencari referensi atau materi yang terkait dengan permasalahan yang ada kemudian mengkajinya.

Tahapan-tahapan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji penelitian-penelitian terdahulu yang terkait dengan topik yang sedang diteliti.
   Pada bagian ini dilakukan kajian penelitian terdahulu terkait topik penelitian. Hal ini dilakukan agar tidak ada kesamaan penelitian yang dilakukan oleh penulis dengan penelitian-penelitian yang sudah ada sebelumnya. Selain itu hal ini juga untuk menambah pengetahuan penulis terkait materi dalam penelitian.

2. Mengkaji tentang definisi serta sifat-sifat aljabar max-plus, semi modul atas semiring, serta polinomial.
   Pada tahap ini dikaji definisi serta teorema yang ada pada aljabar max-plus, semi modul atas semiring, serta polinomial. Dari tahap ini kita dapat menemukan sifat-sifat yang ada pada aljabar max-plus, struktur semimodul atas semiring, serta struktur polinomial.

3. Mengkaji tentang definisi serta operasi pada himpunan polinomial atas aljabar max-plus.
   Pada tahap ini dikaji tentang himpunan polinomial yang terbentuk atas aljabar max-plus, serta operasi yang ada didalamnya.

4. Mengkonstruksi polinomial atas aljabar max-plus kemudian

mengidentifikasi struktur yang terbebentuk.

Pada tahap ini penulis membentuk polinomial atas aljabar max-plus. Setelah itu, penulis mengidentifikasi struktur yang terbentuk dari polinomial tersebut.

1.7. Sistematika Penulisan

Penelitian ini disusun dengan langkah-langkah yang sistematis. Hal ini, dilakukan untuk mempermudah dalam memahami isi dari penelitian. Penelitian ini terbagi menjadi empat pokok bahasan, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN

   Bab ini diuraikan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metodologi penelitian, dan sistematika penulisan.

2. BAB II LANDASAN PUSTAKA

   Bab ini berisi teori-teori dasar yang menjadi landasan dalam penelitian. Teori-teori yang termuat meliputi aljabar max-plus, struktur semimodul atas semiring, serta polinomial.

3. BAB III PEMBAHASAN

   Bab ini berisi bagian utama dalam penelitian ini, yaitu membahas polinomial atas aljabar max-plus serta struktur-struktur yang terbentuk dari polinomial tersebut.

4. BAB IV PENUTUP

   Bab ini berisi kesimpulan dari pokok penelitian beserta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan penjelasan tentang aljabar max-plus dan sifat-sifat yang ada di dalamnya, struktur semimodul atas semiring, serta penjelasan mengenai struktur polinoial.

2.1. Aljabar Max-Plus

Subbab ini menjelaskan bagaimana struktur aljabar max-plus dapat terbentuk. Aljabar max-plus merupakan salah satu contoh semiring, untuk itu perlu memahami definisi semiring sebelum memahami struktur aljabar max-plus.

Struktur aljabar dapat terbentuk apabila terdapat suatu himpunan tak kosong yang diikuti dengan operasi biner. Penjelasan mengenai himpunan dan operasi biner adalah sebagai berikut.

Definisi 2.1.1 ***(Himpunan, e.g Fraleigh, 1994)***
Himpunan diartikan sebagai kumpulan dari objek-objek yang dapat didefinisikan dengan jelas. Misalkan S merupakan suatu himpunan yang tersusun atas elemen-elemen/anggota-anggota himpunan. Notasi $a \in S$ menyatakan a adalah anggota himpunan S dan $a \notin S$ menyatakan a bukan anggota himpunan S.

Contoh 2.1.2 *Diberikan suatu himpunan G, yaitu himpunan bilangan bulat positif yang kurang dari 5, maka*
$G = \{1, 2, 3, 4\}$
$1, 2, 3, 4 \in G$ *dan* $5, 6, 7, \ldots \notin G$

Definisi 2.1.3 ***(Operasi Biner/tertutup, e.g Andari, 2015)***
Diberikan sembarang himpuna tak kosong S, suatu operasi biner atau tertutup pada himpunan S yaitu:

$$\begin{aligned} * : S \times S &\to S \\ (m,n) \to *(m,n) &= m * n \end{aligned}$$

Operasi biner atau tertutup artinya jika m, n elemen himpunan S maka $m * n$ harus merupakan elemen himpunan S pula.

Contoh 2.1.4 *Operasi penjumlahan $+$ merupakan operasi biner pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$.*
Misalkan diambil sembarang $(s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dinotasikan $+(s,t) = s+t$ untuk setiap $s,t \in \mathbb{R}$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $s,t \in \mathbb{R}$ berlaku $s + t \in \mathbb{R}$ yang berarti operasi $+$ tertutup pada $\mathbb{R}$. Jadi $+$ adalah operasi biner pada $\mathbb{R}$.

Struktur aljabar dapat terbentuk dengan mengambil suatu himpunan dengan diikuti operasi biner. Salah satu contoh bentuk struktur aljabar adalah semiring, adapun definisi dari semiring adalah sebagai berikut,

Definisi 2.1.5 ***(Semiring, e.g Subiono, 2013)***
Diberikan suatu himpunan tak kosong S. Himpunan S diikuti operasi biner yaitu $*$ dan $\bullet$ dinotasikan $(S, *, \bullet)$ dikatakan semiring apabila memenuhi aksioma berikut:

1. *$(S, *)$ merupakan semigrup komutatif yang memiliki elemen netral 0, yaitu untuk setiap $s, t, u \in S$ berlaku:*

   (i) $s * (t * u) = (s * t) * u$ *(bersifat asosiatif)*

   (ii) $s * 0 = s = 0 * s$ *(mempunyai elemen netral, yaitu 0)*

(iii) $s * t = t * s$ *(bersifat komutatif)*

2. $(S, \bullet)$ *merupakan semigrup yang memiliki elemen satuan* 1*, yaitu untuk setiap* $s, t, u \in S$ *berlaku:*

   (i) $s \bullet (t \bullet u) = (s \bullet t) \bullet u$ *(bersifat asosiatif)*

   (ii) $s \bullet 1 = s = 1 \bullet s$ *(mempunyai elemen satuan, yaitu 1)*

3. *elemen netral* 0 *menjadi elemen penyerap pada operasi* $\bullet$*, yaitu untuk setiap* $s \in S$ *berlaku:*

$$s \bullet 0 = 0 = 0 \bullet s$$

4. *operasi biner pada* S *berlaku distributif kiri dan distributif kanan, yaitu untuk setiap* $s, t, u \in S$ *berlaku:*

   (i) $s \bullet (t * u) = (s \bullet t) * (s \bullet u)$ *(distributif kiri)*

   (ii) $(s * t) \bullet u = (s \bullet u) * (t \bullet u)$ *(distributif kanan)*

Contoh 2.1.6 *Diberikan struktur aljabar* $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ *dengan definisi:* $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *(yaitu himpunan bilangan real dengan negatif tak hingga), untuk setiap* $s, t \in \mathbb{R}_\varepsilon$ *berlaku:*

(i) $s \oplus t = max\{s, t\}$

(ii) $s \otimes t = s + t$ *(*$+$ *merupakan operasi penjumlahan pada bilangan real)*

Buktikan bahwa struktur $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ *adalah semiring dengan* $-\infty$ *sebagai elemen netral dan* 0 *sebagai elemen satuan!*

Bukti:

Akan dibuktikan struktur $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ *adalah semiring.*

1. *Akan ditunjukkan* $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus)$ *semigrup komutatif yang memiliki elemen netral.*

   Diambil sembarang $s, t, u \in \mathbb{R}_\varepsilon$, *dengan* $u < t < s$, *sedemikian sehingga:*

   (i) *Akan ditunjukkan operasi* $\oplus$ *bersifat tertutup, perhatikan bahwa:*

   $s \oplus t = max\{s, t\} = s$, *dimana* $p \in \mathbb{R}_\varepsilon$

   Artinya operasi $\oplus$ *merupakan operasi biner.*

   (ii) *Akan ditunjukkan operasi* $\oplus$ *bersifat asosiatif, perhatikan bahwa:*

$$\begin{aligned}(s \oplus t) \oplus u &= max\{s, t\} \oplus u \\ &= s \oplus u \\ &= max\{s, u\} \\ &= s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s \oplus (t \oplus u) &= s \oplus max\{t, u\} \\ &= s \oplus t \\ &= max\{s, t\} \\ &= s\end{aligned}$$

   Dari hasil diatas terlihat bahwa $(s \oplus t) \oplus u = s \oplus (t \oplus u)$, *artinya operasi* $\oplus$ *bersifat asosiatif.*

   (iii) *Akan ditunjukkan* $\mathbb{R}_\varepsilon$ *memiliki elemen netral, perhatikan bahwa:*

   $s \oplus -\infty = max\{s, -\infty\} = s = max\{-\infty, s\} = -\infty \oplus s$

   Artinya $\mathbb{R}_\varepsilon$ *memiliki elemen netral yaitu* $-\infty$.

   (iv) *Akan ditunjukkan operasi* $\oplus$ *bersifat komutatif,* *perhatikan bahwa:*

$$\begin{aligned} s \oplus t &= max\{s, t\} \\ &= s \\ &= max\{t, s\} \\ &= t \oplus s \end{aligned}$$

Artinya, operasi $\oplus$ *bersifat komutatif.*

Dari bukti (i), (ii), (iii), dan (iv) terlihat bahwa $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus)$ *merupakan semigrup komutatif yang memiliki elemen netral yaitu* $-\infty$*.*

2. *Akan ditunjukkan* $(\mathbb{R}_\varepsilon, \otimes)$ *semigrup yang memiliki elemen satuan.*
   Diambil sembarang $s, t, u \in \mathbb{R}_\varepsilon$*, sedemikian sehingga:*

   (i) *Akan ditunjukkan operasi* $\otimes$ *bersifat tertutup, perhatikan bahwa:*
   $s \otimes t = s + t$ *karena* $s, t \in \mathbb{R}_\varepsilon$ *maka* $s + t \in \mathbb{R}_\varepsilon$*.*
   Aritunya operasi $\otimes$ *merupakan operasi biner.*

   (ii) *Akan ditunjukkan operasi* $\otimes$ *bersifat asosiatif, perhatikan bahwa:*
   $(s \otimes t) \otimes u = (s + t) + u = s + (t + u) = s \otimes (t \otimes u).$
   Artinya operasi $\otimes$ *bersifat asosiatif.*

   (iii) *Akan ditunjukkan* $\mathbb{R}_\varepsilon$ *memiliki elemen satuan, perhatikan bahwa:*
   $s \otimes 0 = s + 0 = s = 0 + s = 0 \otimes s$
   Artinya $\mathbb{R}_\varepsilon$ *memiliki elemen satuan yaitu* 0*.*

   Dari bukti (i), (ii), dan (iii) terlihat bahwa $(\mathbb{R}_\varepsilon, \otimes)$ *merupakan* *semigrup yang memiliki elemen satuan yaitu* 0.

3. *Akan ditunjukkan elemen netral* $-\infty$ *menjadi elemen penyerap pada operasi* $\otimes$
Diambil sembarang $s \in \mathbb{R}_{\varepsilon}$, *perhatikan bahwa:*

$$s \otimes (-\infty) = s + (-\infty) = -\infty = -\infty + s = -\infty \otimes s$$

Terbukti elemen netral $-\infty$ *menjadi elemen penyerap pada operasi* $\otimes$.

4. *Akan ditunjukkan operasi* $\oplus$ *dan* $\otimes$ *pada* $\mathbb{R}_{\varepsilon}$ *berlaku distributif kiri dan kanan.*
Diambil sembarang $s, t, u \in \mathbb{R}_{\varepsilon}$, *dimana* $u < t < s$, *perhatikan bahwa:*

$$\begin{aligned} s \otimes (t \oplus u) &= s \otimes max\{t, u\} \\ &= s \otimes t \\ &= s + t \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} (s \otimes t) \oplus (s \otimes u) &= max\{(s \otimes t), (s \otimes u\} \\ &= max\{(s + t), (s + u)\} \\ &= s + t \end{aligned}$$

Dari hasil diatas terlihat bahwa $s \otimes (t \oplus t) = (s \otimes t) \oplus (s \otimes u)$, *artinya operasi* $\oplus$ *dan* $\otimes$ *berlaku distributif kiri.*

$$\begin{aligned} (t \oplus u) \otimes s &= max\{t, u\} \otimes s \\ &= t \otimes s \\ &= t + s \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}(t \otimes s) \oplus (u \otimes s) &= (t + s) \oplus (u + s)\\ &= max\{(t + s), (u + s)\}\\ &= t + s\end{aligned}$$

Dari hasil diatas terlihat bahwa $(t \oplus u) \otimes s = (t \otimes s) \oplus (u \otimes s)$*, artinya operasi* $\oplus$ *dan* $\otimes$ *berlaku distributif kanan.*

Berdasarkan bukti 1,2,3, dan 4 terbukti bahwa $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ *adalah semiring dengan* $-\infty$ *sebagai elemen netral dan* 0 *sebagai elemen satuan.*

Berdasarkan contoh di atas telah diketahui bahwa struktur $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ adalah semiring. Struktur $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ inilah yang disebut dengan aljabar max-plus. Selanjutnya struktur aljabar max-plus biasanya dinotasikan $\mathbb{R}_{max}$. Elemen netral dan elemen satuan pada $\mathbb{R}_{max}$ berturut-turut adalah $-\infty$ dan 0. Untuk selanjutnya elemen netral pada $\mathbb{R}_{max}$ disimbolkan dengan $\varepsilon_r = -\infty$ dan elemen satuan disimbolkan dengan $0_r = 0$.

Berikut ini merupakan sifat-sifat semiring yang berlaku pada aljabar max-plus.

Definisi 2.1.7 ***(Semiring Komutatif, e.g Subiono 2013)***
Diberikan semiring $(S, *, \bullet)$*. Apabila operasi* $\bullet$ *berlaku komutatif, yakni untuk setiap* $s, t \in S$ *berlaku* $s \bullet t = t \bullet s$ *maka* $(S, *, \bullet)$ *dinamakan semiring komutatif.*

Contoh 2.1.8 $\mathbb{R}_{max}$ *adalah semiring komutatif.*
Sebelumnya telah terbukti $\mathbb{R}_{max}$ *adalah semiring. Lebih lanjut apabila diambil sembarang* $s, t \in \mathbb{R}_{max}$*, perhatikan bahwa:*

$$s \otimes t = s + t = t + s = t \otimes s$$

Jadi $\mathbb{R}_{max}$ adalah semiring komutatif.

Definisi 2.1.9 ***(Semiring idempoten, e.g Subiono 2013)***
Diberikan semring $(S, *, \bullet)$. Apabila operasi $*$ berlaku idempoten, yakni untuk setiap $t \in S$ berlaku $t * t = p$ maka $(S, *, \bullet)$ dinamakan semiring idempoten.

Contoh 2.1.10 *$\mathbb{R}_{max}$ adalah semiring idempoten.*
Sebelumnya telah terbukti $\mathbb{R}_{max}$ adalah semiring. Lebih lanjut apabila diambil sembarang $u \in \mathbb{R}_{max}$, perhatikan bahwa:

$$u \oplus u = max\{u, u\} = p$$

Jadi $\mathbb{R}_{max}$ adalah semiring idempoten.

Definisi 2.1.11 ***(Semifield, e.g Subiono 2013)***
Diberikan $(S, *, \bullet)$ adalah semiring komutatif. Apabila untuk setiap $t \in S - \{0\}$(himpunan S tanpa 0) memiliki invers terhadap operasi perkalian $(\bullet)$, yakni untuk setiap $t \in S - \{0\}$ terdapat$-t \in S - \{0\}$ sedemikian sehingga $t \bullet (-t) = 1 = -t \bullet t$ maka $(S, *, \bullet)$ dinamakan semifield.

Contoh 2.1.12 *$\mathbb{R}_{max}$ adalah semifield.*
Berdasarkan contoh 2.1.8 $\mathbb{R}_{max}$ adalah semiring komutatif, lebih lanjut apabila diambil sembarang $t \in \mathbb{R}_{max}$ maka ada $-t \in \mathbb{R}_{max}$ sedemikian sehingga:

$$t \otimes (-t) = t + (-t) = 0 = -t + t = -t \otimes t$$

Jadi $\mathbb{R}_{max}$ adalah semifield.

Berdasarkan contoh 2.1.8, 2.1.10, 2.1.12 diketahui bahwa aljabar max-plus merupakan semiring yang memenuhi sifat komutatif, idempoten, serta membentuk semifield.

Aljabar max-plus yaitu himpunan bilangan real dengan negatif tak hingga, dimana operasi yang digunakan adalah $\oplus$ dan $\otimes$. Berikut ini diberikan contoh operasi aritmatika sederhana pada aljabar max-plus.

Contoh 2.1.13 *Perhatikan operasi aritmatika sederhana pada aljabar max-plus berikut ini,*

(i) $2 \oplus 6 = max(2, 6) = 6$

(ii) $4 \oplus (-\infty) = max(4, (-\infty)) = 4$

(iii) $3 \otimes 9 = 3 + 9 = 12$

(iv) $-\infty \otimes 5 = -\infty + 5 = -\infty$

Selanjutnya, perpangkatan dalam aljabar max-plus didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.14 ***(Perpangkatan pada $\mathbb{R}_{max}$, e.g Heidergott, 2006)*** *Misalkan $s \in \mathbb{R}_{max}$ maka berlaku*

$$s^{\otimes k} = \underbrace{s \otimes s \otimes \cdots \otimes s}_{k\ kali}$$

untuk setiap $k \in \mathbb{N} \cup 0$ dan jika $k = 0$ didefinisikan $s^{\otimes k} = 0$(elemen netral pada $\mathbb{R}_{max}$).

Perhatikan bahwa, $s^{\otimes k}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N} \cup 0$, pada aljabar *konvensional dibaca*

$$s^{\otimes k} = \underbrace{s + s + \cdots + s}_{k\ kali} = k \times s$$

Contoh 2.1.15 *Perhatikan operasi perpangkatan pada aljabar max-lus berikut ini,*

(i) $4^{\otimes 3} = 3 \times 4 = 12$

(ii) $-7^{\otimes 5} = 5 \times (-7) = -35$

(iii) $4^{\otimes -\infty} = -\infty \times 4 = -\infty$

(iv) $3^{\otimes 0} = 0 \times 3 = 0$

Terinspirasi dari definisi perpangkatan pada $\mathbb{R}_{max}$, selanjtnya perpangkatan ini juga berlaku pada pangkat bilangan real

$$s^{\otimes n} = n \times s$$

Untuk $n \in \mathbb{R}$. Sebagai contoh,

(i) $5^{\otimes -2} = -2 \times 5 = -10$

(ii) $6^{\otimes \frac{1}{2}} = 5 \times \frac{1}{2} = 3$

(iii) $9^{\otimes} - \frac{1}{3} = 9 \times -\frac{1}{3} = -3$

2.2. Semimodul atas Semiring

Pada kajian semimodul atas semiring terdapat beberapa definisi yang dapat dipelajari. Salah satu teori yang dibahas pada kajian adalah semimodul kiri atas semiring, adapun definisinya adalah sebagai berikut,

Definisi 2.2.1 ***(Semimodul kiri atas semiring, e.g Andari, 2016)*** *Misalkan diberikan suatu himpunan tak kosong V serta suatu semiring komutatif dengan elemen satuan W. Himpunan V dikatakan semimodul kiri atas semiring W (biasanya dituliskan dengan $V : W \rightarrow$ semimodul kiri) apabila aksioma berikut terpenuhi:*

(i) $(V, +)$ *adalah monoid komutatif.*

(ii) Didefinisikan pemetaan

$$\bullet : W \times V \rightarrow V$$
$$(g, h) \rightarrow \bullet(g, h) = g \bullet h = gh$$

dan untuk setiap $g, g_1, g_2 \in W$ dan $h, h_1, h_2 \in V$, serta $0_W, 1_W$ merupakan elemen netral dan elemen satuan pada W, kemudian 0_V adalah elemen netral pada V. Memenuhi:

a. $g(h_1 + h_2) = gh_1 + gh_2$

b. $(g_1 + g_2)h = g_1h + g_2h$

c. $(g_1g_2)h = g_1(g_2h)$

d. $1 \cdot h = h$

e. $0_W \cdot h = 0_V = h \cdot 0_V$

Berikut ini diberikan contoh semimodul kiri atas semiring,

Contoh 2.2.2 *Misalkan diberikan himpunan $M_2(S)$, yaitu himpunan matriks ordo 2×2 yang entri-entrinya bilangan bulat tak negatif $(S = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$, dan suatu semiring $(S = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$. Himpunan $M_2(S)$ merupakan semimodul kiri atas semiring $(S = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$.*

Bukti. Dipunyai $M_2(S)$, yaitu himpunan matriks ordo 2×2 yang entri-entrinya bilangan bulat tak negatif $(S = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$, dan suatu semiring $(S = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$. Akan dibuktikan $M_2(S)$ merupakan semimodul kiri atas semiring $(S = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$.

I. Akan ditunjukkan $(M_2(S), +)$ merupakan monoid komutatif. Diambil sembarang $D, E, F \in M_2(S)$, dimana

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix}$$

swdemikian sehingga:

(i) Akan ditunjukkan operasi $+$ berisifat tertutup, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} D + E &= \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1 + e_1 & d_2 + e_2 \\ d_3 + e_3 & d_4 + e_4 \end{pmatrix} \in M_2(S) \end{aligned}$$

Artinya operasi $+$ pada $M_2(S)$ bersifat tertutup.

(ii) Akan ditunjukkan operasi $+$ berisifat asosiatif, perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
(D+E)+F &= \left[\begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1+e_1 & d_2+e_2 \\ d_3+e_3 & d_4+e_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (d_1+e_1)+f_1 & (d_2+e_2)+f_2 \\ (d_3+e_3)+f_3 & (d_4+e_4)+f_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1+(e_1+f_1) & d_2+(e_2+f_2) \\ d_3+(e_3+f_3) & d_4+(e_4+f_4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1+f_1 & e_2+f_2 \\ e_3+f_3 & e_4+f_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix}\right] \\
&= D+(E+F)
\end{aligned}
$$

Aritnya operasi $+$ pada $M_2(S)$ bersifat asosiatif.

(iii) Akan ditunjukkan operasi $M_2(S)$ mempunyai elemen netral, perhatikan bahwa:

Dipilih $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(S)$, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} D + G &= \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1 + 0 & d_2 + 0 \\ d_3 + 0 & d_4 + 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} \\ &= D \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} G + D &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 + d_1 & 0 + d_2 \\ 0 + d_3 & 0 + d_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} \\ &= D \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil diatas terbukti bahwa $M_2(S)$ memiliki elemen netral. Elemen netral pada $M_2(S)$ disimbolkan dengan 0_M.

(iv) Akan ditunjukkan operasi $+$ berisifat komutatif, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
D+E &= \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1+e_1 & d_2+e_2 \\ d_3+e_3 & d_4+e_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e_1+d_1 & e_2+d_2 \\ e_3+d_3 & e_4+d_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} \\
&= E+D
\end{aligned}$$

Artinya operasi $+$ pada $M_2(S)$ bersifat komutatif. Berdasarkan bukti (i), (ii), (iii), dan (iv) terbukti bahwa $M_2(S)$ merupakan monoid komutatif.

II. Didefinisikan pemetaan

$$S \times M_2(S) \to M_2(S)$$
$$\left[s, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] \to = s \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sehingga untuk setiap $s, s_1, s_2 \in S$ dan $D, E \in M_2(S)$ serta 1_s merupakan elemen satuan pada S dan 0_s merupakan elemen netral pada S memenuhi:

(i) Akan ditunjukkan $s(D+E) = sD + sE$, perhatikan

bahwa:

$$\begin{aligned}
s(D+E) &= s\left[\begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix}\right] \\
&= s\begin{pmatrix} d_1+e_1 & d_2+e_2 \\ d_3+e_3 & d_4+e_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s(d_1+e_1) & s(d_2+e_2) \\ s(d_3+e_3) & s(d_4+e_4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} sd_1+se_1 & sd_2+se_2 \\ sd_3+se_3 & sd_4+se_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} sd_1 & sd_2 \\ sd_3 & sd_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} se_1 & se_2 \\ se_3 & se_4 \end{pmatrix} \\
&= s\begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix} \\
&= sD + sE
\end{aligned}$$

Dari hasil diatas diperoleh $s(D+E) = sD + sE$.

(ii) Akan ditunjukkan $(s_1+s_2)D = s_1D + s_2D$, perhatikan

bahwa:

$$
\begin{aligned}
(s_1+s_2)D &= (s_1+s_2)\begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (s_1+s_2)d_1 & (s_1+s_2)d_2 \\ (s_1+s_2)d_3 & (s_1+s_2)d_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s_1d_1+s_2d_1 & s_1d_2+s_2d_2 \\ s_1d_3+s_2d_3 & s_1d_4+s_2d_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s_1d_1 & s_1d_2 \\ s_1d_3 & s_1d_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_2d_1 & s_2d_2 \\ s_2d_3 & s_2d_4 \end{pmatrix} \\
&= s_1\begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} \\
&= s_1D + s_2D
\end{aligned}
$$

Dari hasil diatas diperoleh $(s_1+s_2)D = s_1D + s_2D$.

(iii) Akan ditunjukkan $(s_1s_2)D = s_1(s_2D)$, perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
(s_1s_2)D &= (s_1s_2)\begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (s_1s_2)d_1 & (s_1s_2)d_2 \\ (s_1s_2)d_3 & (s_1s_2)d_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s_1(s_2d_1) & s_1(s_2d_2) \\ s_1(s_2d_3) & s_1(s_2d_4) \end{pmatrix} \\
&= s_1\begin{pmatrix} s_2d_1 & s_2d_2 \\ s_2d_3 & s_2d_4 \end{pmatrix} \\
&= s_1(s_2D)
\end{aligned}
$$

Darihasil diatas diperoleh $(s_1 s_2)D = s_1(s_2 D)$.

(iv) Akan ditunjukkan $1_s D = D$, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} 1_s \cdot D &= 1 \cdot \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot d_1 & 1 \cdot d_2 \\ 1 \cdot d_3 & 1 \cdot d_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} \\ &= D \end{aligned}$$

Dari hasil diatas diperoleh $1_s \cdot D = D$.

(v) Akan ditunjukkan $0_s \cdot D = 0_M = D \cdot 0_M$,

$$\begin{aligned} 0_s \cdot D &= 0 \cdot \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot d_1 & 0 \cdot d_2 \\ 0 \cdot d_3 & 0 \cdot d_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0_M \end{aligned}$$

dan

$$
\begin{aligned}
D \cdot 0_M &= \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0_M
\end{aligned}
$$

Dari hasil diatas diperoleh $0_s \cdot D = 0_M = D \cdot 0_M$.

Berdasarkan bukti I dan II terbukti bahwa himpunan $M_2(S)$ merupakan semimodul kiri atas semiring $(S = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$. ■

Selanjutnya terdapat pembahsan mengenai semimodul kanan atas semiring, adapun definisinya adalah sebagai berikut.

Definisi 2.2.3 *(Semimodul kanan atas semiring, e.g Andari, 2016)*

Misalkan diberikan suatu himpunan tak kosong V serta suatu semiring komutatif dengan elemen satuan W. Himpunan V dikatakan semimodul kanan atas semiring W (biasanya dituliskan dengan $V : W \rightarrow$ semimodul kanan) apabila aksioma berikut terpenuhi:

(i) $(V+)$ *merupakan monoid komutatif.*

(ii) Didefinisikan pemetaan

$$
\begin{aligned}
&\bullet : V \times W \rightarrow V \\
&(h, g) \rightarrow \bullet(h, g) = h \bullet g = hg
\end{aligned}
$$

dan untuk setiap $g, g_1, g_2 \in W$ dan $h, h_1, h_2 \in V$, serta $0_W, 1_W$ merupakan elemen netral dan elemen satuan pada W, kemudian 0_V adalah elemen netral pada V. Memenuhi:

a. $(h_1 + h_2)g = h_1 g + h_2 g$

b. $h(g_1 + g_2) = hg_1 + hg_2$

c. $h(g_1 g_2) = (hg_1)g_2$

d. $h \cdot 1_W = h$

e. $h \cdot 0_W = 0_V = 0_V \cdot h$

Brikut ini diberikan contoh semimodul kanan atas semiring,

Contoh 2.2.4 *Misalkan diberikan himpunan $M_2(S)$, yaitu himpunan matriks ordo 2×2 yang entri-entrinya bilangan bulat tak negatif $(S = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$, dan suatu semiring $(S = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$. Himpunan $M_2(S)$ merupakan semimodul kanan atas semiring $(S = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$.*

Bukti.

I. Pada bukti 2.2. telah diketahui bahwa $(M_2(S), +)$ merupakan monod komutatif.

II. Didefinisikan pemetaan

$$M_2(S) \times S \to M_2(S)$$
$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, s\right] \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} s$$

sehingga untuk setiap $s, s_1, s_2 \in S$ dan $D, E \in M_2(S)$ serta 0_s merupakan elemen etral pada S dan 1_s merupakan elemen satuan pada S memenuhi:

(i) Akan ditunjukkan $(D + E)s = Ds + Es$, perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
(D+E)s &= \left[\begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix}\right] s \\
&= \begin{pmatrix} d_1+e_1 & d_2+e_2 \\ d_3+e_3 & d_4+e_4 \end{pmatrix} s \\
&= \begin{pmatrix} (d_1+e_1)s & (d_2+e_2)s \\ (d_3+e_3)s & (d_4+e_4)s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1s+e_1s & d_2s+e_2s \\ d_3s+e_3s & d_4s+e_4s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1s & d_2s \\ d_3s & d_4s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1s & e_2s \\ e_3s & e_4s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix} s \\
&= Ds + Es
\end{aligned}
$$

Dari hasil diatas diperoleh $(D + E)s = Ds + Es$.

(ii) Akan ditunjukkan $D(s_1 + s_2) = Ds_1 + Ds_2$, perhatikan

bahwa:

$$
\begin{aligned}
D(s_1+s_2) &= \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}(s_1+s_2) \\
&= \begin{pmatrix} d_1(s_1+s_2) & d_2(s_1+s_2) \\ d_3(s_1+s_2) & d_4(s_1+s_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1s_1+d_1s_2 & d_2s_1+d_2s_2 \\ d_3s_1+d_3s_2 & d_4s_1+d_4s_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1s_1 & d_2s_1 \\ d_3s_1 & d_4s_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1s_2 & d_2s_2 \\ d_3s_2 & d_4s_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} s_2 \\
&= Ds_1 + Ds_2
\end{aligned}
$$

$D(s_1+s_2) = Ds_1 + Ds_2$

(iii) Akan ditunjukkan $D(s_1s_2) = (Ds_1)s_2$, perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
D(s_1s_2) &= \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}(s_1s_2) \\
&= \begin{pmatrix} d_1(s_1s_2) & d_2(s_1s_2) \\ d_3(s_1s_2) & d_4(s_1s_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (d_1s_1)s_2 & (d_2s_1)s_2 \\ (d_3s_1)s_2 & (d_4s_1)s_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1s_1 & d_2s_1 \\ d_3s_1 & d_4s_1 \end{pmatrix} s_2 \\
&= (Ds_1)s_2
\end{aligned}
$$

Dari hasil diatas diperoleh $D(s_1 s_2) = (Ds_1)s_2$

(iv) Akan ditunjukkan $D \cdot 1_s = D$, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} D \cdot 1_s &= \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} 1 \\ &= \begin{pmatrix} d_1 \cdot 1 & d_2 \cdot 1 \\ d_3 \cdot 1 & d_4 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} \\ &= D \end{aligned}$$

Dari hasil diatas diperoleh $1_s \cdot D = D$.

(v) Akan ditunjukkan $D \cdot 0_s = 0_M = 0_M \cdot D$

$$\begin{aligned} D \cdot 0_s &= \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} 0 \\ &= \begin{pmatrix} d_1 \cdot 0 & d_2 \cdot 0 \\ d_3 \cdot 0 & d_4 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0_M \end{aligned}$$

dan

$$
\begin{aligned}
0_M \cdot D &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0_M
\end{aligned}
$$

Dari hasil diatas diperoleh $D \cdot 0_s = 0_M = 0_M \cdot D$.

Berdasarkan bukti I dan II terbukti bahwa himpunan $M_2(S)$ merupakan semimodul kanan atas semiring $(S = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$. $\blacksquare$

2.3. Polinomial

Pada bagian ini akan dijelaskan bentuk umum polinomial serta sifat-sifat yang ada didalamnya.

2.1.1. Polinomial dan Operasinya

Bagian ini dijelaskan definisi dasar dan notasi polinomial yang akan diperlukan untuk pengembangan teori selanjutnya.

Definisi 2.3.1 ***(Polinomial, e.g Kandasamy, 2002)***
Misalkan S adalah semiring, bentuk umum suatu polinomial dengan variabel x dan derajat n dari $S[X]$ yaitu $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$, dimana $a_i \in S$, untuk setiap $i \in (\mathbb{N} \cup 0)$.

Definisi 2.3.2 ***(Kesamaan polinomial, e.g Mas'oed, 2013)***
Misalkan diberikan dua polinomial $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$

dan $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$*. Polinomial* $f(x)$ *dikatakan sama dengan* $g(x)$ *jika dan hanya jika* $a_i = b_i$ *untuk setiap* $i \geq 0$*.*

Contoh 2.3.3 $f(x) = 7 + x^2 + 3x^4$ *adalah polinomial berderajat 4.*

Contoh 2.3.4 *Diberikan* $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{Q}[X]$ *dengan,*

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 + 2x + 3x^2 - 6x^3 + 4x^4 \\ q(x) &= 1 + 2x + 7x^2 - 6x^3 + 4x^4 \\ r(x) &= 1 + 2x + 3x^2 - 6x^3 + 4x^4 \end{aligned}$$

Maka:
$p(x) = r(x)$*, karena masing-masing suku yang bersesuaian memiliki koefisien yang sama.*
$p(x) \neq q(x)$*, karena koefisien* x^2 *pada* $p(x) \neq q(x)$ *yaitu* $(3 \neq 7)$*.*

Operasi penjumlahan dan perkalian pada polinomial didefinisikan sebagai berikut,

Definisi 2.3.5 (*Operasi Penjumlahan Polinomial, e.g Mas'oed, 2013*)
Misalkan diberikan dua buah polinom $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$ *dan* $h(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$*, maka* $g(x) + h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_jx^j$ *dimana untuk setiap* $i, c_i = a_i + b_i$ *untuk* $0 \leq i \leq j$*, dan* $j = maks(m, n)$*.*

Contoh 2.3.6 *Diberikan dua buah polinom* $q(x), r(x)$ *dengan,*

$$\begin{aligned} q(x) &= 1 + 2x - 3x^2 + 8x^3 + x^4 \\ r(x) &= 5 + 7x^2 - 6x^3 \end{aligned}$$

maka,

$$\begin{aligned} q(x) + r(x) &= (1 + 2x - 3x^2 + 8x^3 + x^4) + (5 + 7x^2 - 6x^3) \\ &= (1+5) + (2+0)x + (-3+7)x^2 + (8 + (-6))x^3 + (1+0)x^4 \\ &= 6 + 2x + 4x^2 + 2x^3 + x^4 \end{aligned}$$

Definisi 2.3.7 *(Operasi Perkalian Polinomial, e.g Mas'oed, 2013)*
Misalkan diberikan dua buah polinom $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ *dan* $h(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$*, maka* $g(x)h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_tx^t$ *dimana* $t = n + m$ *dan* $c_j = \sum\limits_{i=0}^{j} a_ib_{j-i}$

Contoh 2.3.8 *Misalkan diberikan dua buah polinom:*

$$\begin{aligned} q(x) &= 1 + x + 3x^2 \\ r(x) &= 2 + x^2 \end{aligned}$$

nilai dari $q(x)r(x)$ *adalah sebagai berikut:*
$q(x)r(x) = (1 + x + 3x^2)(2 + x^2)$

dengan nilai:

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0b_0 \\
&= 1 \cdot 2 = 2 \\
c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0 \\
&= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2 \\
c_2 &= a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 \\
&= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 7 \\
c_3 &= a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 \\
&= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 1 \\
c_4 &= a_0b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0 \\
&= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 3
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
q(x)r(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 \\
&= 2 + 2x + 7x^2 + x^3 + 3x^4
\end{aligned}$$

2.2.2. Polinomial atas Semiring

Polinomial atas semiring atau bisa disebut semiring polinomial merupakan himpunan polinomial bersamaan dengan dua operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma pada semiring.

Definisi 2.3.9 ***(Polinomial atas semiring, e.g Kandasamy, 2002)*** *Misalkan S adalah semiring, $S[X]$ yaitu himpunan polinomial atas S dikatakan semiring apabila memenuhi aksioma-aksioma semiring.*

Contoh 2.3.10 *Himpunan polinomial atas bilangan real diikuti operasi penjumlahan dan perkalian, dinotasikan* $(\mathbb{R}[X], +, \times)$

merupakan semiring. Polinom $0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n \in \mathbb{R}[X]$ *menjadi elemen netral pada* $(\mathbb{R}[X], +, \times)$*, cukup dituliskan* $0 \in \mathbb{R}[X]$*. Polinom* $1 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n \in \mathbb{R}[X]$ *menjadi elemen satuan pada* $(\mathbb{R}[X], +, \times)$*, cukup dituliskan* $1 \in \mathbb{R}[X]$

2.3.3. Polinomial atas Aljabar Max-plus

Polinomial dapat dibentuk dengan elemen-elemen serta operasi pada aljabar max-plus, polinomial ini didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.11 ***(Polinomial atas Aljabar Max-Plus, e.g Suroto, 2012)***
Polinomial atas aljabar max-plus dengan derajat k *dan variabel* x *memiliki bentuk umum:*

$$s(x) = \bigoplus_{j=0}^{k}(u_j \otimes x^{\otimes j}) = (u_0) \oplus (u_1 \otimes x) \oplus \cdots \oplus (u_k \otimes x^{\otimes k})$$

dimana $u_0, u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}_{max}$*, **dan*** $j \in (\mathbb{N} \cup 0)$.

Himpunan polinomial atas aljabar max-plus dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}[X]$.

BAB III

PEMBAHASAN

Bab ini berisi pembahasan tenyang polinomial aljabar atas max-plus. Bab ini diawali dengan pendefinisian polinomial atas aljabar max-plus serta bentuk pengoperasiannya, kemudian menjelaskan struktur yang terbentuk dari polinomial atas aljabar max-plus serta sifat-sifatnya.

3.1. Polinomial atas Aljabar Max-Plus dan Operasinya

Polinomial atas aljabar max-plus dengan derajat k dan variabel x memiliki bentuk umum:

$$s(x) = \bigoplus_{j=0}^{k} (u_j \otimes x^{\otimes j}) = (u_0) \oplus (u_1 \otimes x) \oplus \cdots \oplus (u_k \otimes x^{\otimes k})$$

dimana $u_0, u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}_{max}$, dan $j \in (\mathbb{N} \cup 0)$. Polinomial-polinomial atas aljabar max-plus dapat membentuk suatu himpunan, himpunan ini dinamakan himpunan polinomial atas aljabar max-plus, yang disimbolkan dengan $\mathbb{R}_{max}[X]$. Berikut ini merupakan contoh penulisan polinomial atas aljabar max-plus, beserta maknanya jika diartikan ke dalam aljabar biasa.

Contoh 3.1.1 *Polinomial atas* $\mathbb{R}_{max}$

$$f(x) = 2 \oplus (4 \otimes x) \oplus (3 \otimes x^{\otimes 2})$$

Jika dituliskan ke dalam aljabar biasa, polinomial $f(x)$ *menjadi*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2 \oplus (4 \otimes x) \oplus (3 \otimes x^{\otimes 2}) \\
&= 2 \oplus (4 + x) \oplus (3 + (2 \times x)) \\
&= max(2, 4 + x) \oplus (3 + (2 \times x)) \\
&= max(max(2, 4 + x, 3 + 2x)) \\
&= max(2, 4 + x, 3 + 2x).
\end{aligned}
$$

Koefisien-koefisien pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ merupakan elemen pada $\mathbb{R}_{max}$. Diketahui bahwa elemen netralnya adalah $-\infty$ dan elemen satuannya adalah 0. Hal ini berbeda dengan polinomial pada aljabar biasa, dimana koefisien-koefisien polinomialnya adalah elemen-elemen pada himpunan bilangan real, dan memiliki elemen netral berupa 0 serta elemen satuanya adalah 1. Jadi penulisan koefisien pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ sedikit berbeda dengan polinomial pada aljabar biasa. Sebagai contoh berkaitan dengan elemen netralnya, misalkan polinomial biasa $g(x) = 2x + 4x^3$ memiliki arti $g(x) = 0 + 2x + 0x^2 + 4x^3$, sedangkan pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ misalkan nilai $g(x) = (2 \otimes x) \oplus (4 \otimes x^{\otimes 3})$ memiliki arti $g(x) = -\infty \oplus (2 \otimes x) \oplus (-\infty \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (4 \otimes x^{\otimes 3})$.

Berikut ini diberikan penjelasan tentang operasi penjumlahan pada $\mathbb{R}_{max}[X]$. Operasi yang semula pada aljabar biasa adalah penjumlahan $(+)$, pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ diganti dengan operasi maksimum $(\oplus)$ yaitu operasi pada aljabar max-plus $\mathbb{R}_{max}$.

Definisi 3.1.2 ***(Penjumlahan pada*** $\mathbb{R}_{max}[X]$***, e.g Suroto, 2012)***
Misalkan diberikan dua polinomial $d(x), e(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$*, dimana*
$d(x) = \bigoplus_{t=0}^{u}(d_t \otimes x^{\otimes t}) = (d_0) \oplus (d_1 \otimes x) \oplus \cdots \oplus (d_u \otimes x^{\otimes u})$ *dan*
$e(x) = \bigoplus_{t=0}^{v}(e_t \otimes x^{\otimes t}) = (e_0) \oplus (e_1 \otimes x) \oplus \cdots \oplus (e_v \otimes x^{\otimes v})$,

Nilai dari $d(x) \oplus e(x) = \bigoplus_{t=0}^{w}(f_i \otimes x^{\otimes t}) = (f_0) \oplus (f_1 \otimes x) \oplus \cdots \oplus (f_w \otimes x^{\otimes w})$*, dimana* $f_t = d_t \oplus e_t = max(d_t, e_t)$ *dan* $w = max(u, v)$.

Berikut ini diberikan contoh operasi penjumlahan pada polinomial atas aljabar max-plus, dimana operasi yang semula pada aljabar biasa adalah operasi penjumlahan $(+)$ diganti dengan operasi pada aljabar max-plus yaitu operasi maksimum $(\oplus)$.

Contoh 3.1.3 *Misalkan dipunyai* $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$*, dimana:*

$f(x) = 2 \oplus (4 \otimes x) \oplus ((-4) \otimes x^{\otimes 2})$

$g(x) = -2 \oplus (5 \otimes x) \oplus (3 \otimes x^{\otimes 2})$

$h(x) = 1 \oplus (7 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus ((-2) \otimes x^{\otimes 3})$

maka penjumlahan polinomial-polinomial tersebut adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x) \oplus g(x) =& (2 \oplus (4 \otimes x) \oplus ((-4) \otimes x^{\otimes 2})) \\ & \oplus (-2 \oplus (5 \otimes x) \oplus (3 \otimes x^{\otimes 2})) \\ =& (2 \oplus (-2)) \oplus (4 \oplus 5) \otimes x \oplus (-4 \oplus 3) \otimes x^{\otimes 2} \\ =& max(2, (-2)) \oplus max(4, 5) \otimes x \oplus max(-4, 3) \otimes x^{\otimes 2} \\ =& 2 \oplus (5 \otimes x) \oplus (3 \otimes x^{\otimes 2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) \oplus h(x) =& (2 \oplus (4 \otimes x) \oplus ((-4) \otimes x^{\otimes 2})) \\ & \oplus (1 \oplus (7 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus ((-2) \otimes x^{\otimes 3})) \\ =& (2 \oplus 1) \oplus (4 \oplus -\infty) \otimes x \oplus ((-4) \oplus 7) \otimes x^{\otimes 2} \\ & \oplus ((-\infty) \oplus (-2)) \otimes x^{\otimes 3} \\ =& max(2, 1) \oplus max(4, (-\infty)) \otimes x \oplus max((-4), 7) \otimes x^{\otimes 2} \\ & \oplus max((-\infty), (-2)) \otimes x^{\otimes 2} \\ =& 2 \oplus (4 \otimes x) \oplus (7 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus ((-2) \otimes x^{\otimes 2}) \end{aligned}$$

Kemudian ada operasi perkalian $\mathbb{R}_{max}[X]$, perkalian ini sama halnya dengan perkalian polinomial pada aljabar biasa hanya saja pengoperasian kali $(\times)$ pada aljabar biasa diganti dengan operasi $\otimes$, yaitu operasi perkalian pada aljabar max-plus.

Definisi 3.1.4 ***(Perkalian pada $\mathbb{R}_{max}[X]$, e.g Suroto, 2012)***
Misalkan diberikan dua polinomial $d(x), e(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$, dimana $d(x) = \bigoplus_{t=0}^{u}(d_t \otimes x^{\otimes t}) = (d_0) \oplus (d_1 \otimes x) \oplus \cdots \oplus (d_u \otimes x^{\otimes u})$ dan $e(x) = \bigoplus_{t=0}^{v}(e_t \otimes x^{\otimes t}) = (e_0) \oplus (e_1 \otimes x) \oplus \cdots \oplus (e_v \otimes x^{\otimes v})$.
Nilai dari $d(x) \otimes e(x) = \bigoplus_{j=0}^{k}(f_j \otimes x^{\otimes j}) = (f_0) \oplus (f_1 \otimes x) \oplus \cdots \oplus (f_k \otimes x^{\otimes k})$, dengan $f_j = \bigoplus_{t=0}^{j}(d_t \otimes e_{j-t})$, untuk setiap $0 \leq j \leq k$ dan $k = u + v$, dan $d \otimes e = d + e$.

Berikut ini diberikan contoh operasi perkalian pada polinomial atas aljabar max-plus, dimana operasi yang semula pada aljabar biasa adalah operasi perkalian $(\times)$ diganti dengan operasi pada aljabar max-plus yaitu operasi $(\otimes)$.

Contoh 3.1.5 *Diberikan $d(x), e(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$ dengan,*
$d(x) = 3 \oplus (4 \otimes x) \oplus ((-3) \otimes x^{\otimes 2})$
$e(x) = 1 \oplus (2 \otimes x)$
nilai dari $g(x) \otimes h(x)$ adalah sebagai berikut:

$$d(x) \otimes e(x) = (3 \oplus (4 \otimes x) \oplus ((-3) \otimes x^{\otimes 2})) \otimes (1 \oplus (2 \otimes x))$$

dengan nilai

$$\begin{aligned}
f_0 &= 3 \otimes 1 \\
&= 4 \\
f_1 &= (3 \otimes 2) \oplus (4 \otimes 1) \\
&= 5 \oplus 5 \\
&= 5 \\
f_2 &= (3 \otimes (-\infty)) \oplus (4 \otimes 2) \oplus (-3 \otimes 1) \\
&= -\infty \oplus 6 \oplus -2 \\
&= 6 \\
f_3 &= (3 \otimes (-\infty)) \oplus (4 \otimes (-\infty)) \oplus (-3 \otimes 2) \oplus (-\infty \otimes 1) \\
&= -\infty \oplus -\infty \oplus -1 \oplus -\infty \\
&= -1
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
d(x) \otimes e(x) &= f_0 \oplus (f_1 \otimes x) \oplus (f_2 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (f_3 \otimes x^{\otimes 3}) \\
&= 4 \oplus (5 \otimes x) \oplus (6 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus ((-1) \otimes x^{\otimes 3})
\end{aligned}$$

3.2. Struktur Aljabar dari Polinomial atas $\mathbb{R}_{max}$

Pada bagian ini akan dijelaskan struktur-struktur aljabar yang terbentuk dari polinomial atas aljabar max-plus beserta dengan bukti dan contohnya.

1. $(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus)$ membentuk monoid komutatif idempoten.
   Polinomial atas aljabar maxplus $\mathbb{R}_{max}[X]$ dengan operasi $\oplus$ $(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus)$ membentuk monoid komutatif idempoten, sehingga memenuhi sifat-sifat berikut ini:

Proposisi 3.2.1 *(e.g Suroto, 2012)*
Operasi $\oplus$ *pada* $\mathbb{R}_{max}[X]$ *merupakan operasi biner/bersifat tertutup.*

Bukti. Akan dibuktikan bahwa operasi $\oplus$ pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ merupakan operasi biner/bersifat tertutup.
Misalkan diambil sembarang $r(x), s(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$, dengan $r(x) = (r_0) \oplus (r_1 \otimes x) \oplus \cdots \oplus (r_n \otimes x^{\otimes n})$ dan $s(x) = (s_0) \oplus (s_1 \otimes x) \oplus \cdots \oplus (s_m \otimes x^{\otimes m})$, untuk setiap $r_i, s_i \in \mathbb{R}_{max}$ maka,

$$\begin{aligned} r(x) \oplus s(x) =& ((r_0) \oplus (r_1 \otimes x) \oplus \cdots \oplus (r_n \otimes x^{\otimes n})) \\ & \oplus ((s_0) \oplus (s_1 \otimes x) \oplus \cdots \oplus (s_m \otimes x^{\otimes m})) \\ =& (r_0 \oplus s_0) \oplus ((r_1 \oplus s_1) \otimes x) \oplus \cdots \oplus \\ & ((r_k \oplus s_k) \otimes x^{\otimes k}) \\ =& (t_0) \oplus (t_1 \otimes x) \oplus \cdots \oplus (t_k \otimes x^{\otimes k}) \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $r_i, s_i \in \mathbb{R}_{max}$ maka $r_i \oplus s_i = t_i \in \mathbb{R}_{max}$. Artinya $r(x) \oplus s(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$, karena setiap koefisen polinomialnya elemen $\mathbb{R}_{max}$. Jadi Operasi $\oplus$ pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ merupakan operasi biner/bersifat tertutup. ∎

Proposisi 3.2.2 *(e.g Suroto, 2012)*
Operasi $\oplus$ *pada* $\mathbb{R}_{max}[X]$ *bersifat asiosiatif, sehingga untuk setiap* $r(x), s(x), t(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$ *berlaku*

$$(r(x) \oplus s(x)) \oplus t(x) = r(x) \oplus (s(x) \oplus t(x))$$

Bukti. Akan dibuktikan bahwa operasi $\oplus$ pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ bersifat asiosiatif.
Misalkan diambil sembarang $r(x), s(x), t(x) \in \mathbb{R}_{max}$, dengan

$r(x) = \bigoplus_{i=0}^{j}(a_i \otimes x^{\otimes i}), s(x) = \bigoplus_{i=0}^{k}(b_i \otimes x^{\otimes i}), t(x) = \bigoplus_{i=0}^{l}(c_i \otimes x^{\otimes i})$, perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
&(r(x) \oplus s(x)) \oplus t(x) \\
&= \left(\bigoplus_{i=0}^{j}(a_i \otimes x^{\otimes i}) \oplus \bigoplus_{i=0}^{k}(b_i \otimes x^{\otimes i})\right) \oplus \bigoplus_{i=0}^{l}(c_i \otimes x^{\otimes i}) \\
&= \bigoplus_{i=0}^{j}((a_i \oplus b_i) \otimes x^{\otimes i}) \oplus \bigoplus_{i=0}^{l}(c_i \otimes x^{\otimes i}) \\
&= \bigoplus_{i=0}^{j}((a_i \oplus b_i \oplus c_i) \otimes x^{\otimes i})
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
&(r(x) \oplus s(x)) \oplus t(x) \\
&= \bigoplus_{i=0}^{j}(a_i \otimes x^{\otimes i}) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{k}(b_i \otimes x^{\otimes i}) \oplus \bigoplus_{i=0}^{l}(c_i \otimes x^{\otimes i})\right) \\
&= \bigoplus_{i=0}^{j}(a_i \otimes x^{\otimes i}) \oplus \bigoplus_{i=0}^{k}((b_i \oplus c_i) \otimes x^{\otimes i}) \\
&= \bigoplus_{i=0}^{j}((a_i \oplus b_i \oplus c_i) \otimes x^{\otimes i})
\end{aligned}
$$

Dari hasil diatas diperoleh $(r(x) \oplus s(x)) \oplus t(x) = (r(x) \oplus s(x)) \oplus t(x)$. Jadi terbukti bahwa $\mathbb{R}_{max}[X]$ memiliki sifat asosiatif terhadap operasi $\oplus$. ■

Contoh 3.2.3 *Misalkan diberikan polinomial-polinomial pada* $\mathbb{R}_{max[X]}$ *sebagai berikut:*

$r(x) = 2 \oplus (3 \otimes x) \oplus ((-7) \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (5 \otimes x^{\otimes 3})$

$s(x) = 4 \oplus ((-2) \otimes x) \oplus (1 \otimes x^{\otimes 2})$
$t(x) = -5 \oplus (4 \otimes x)$
akan ditunjukan $(r(x) \oplus s(x)) \oplus t(x) = r(x) \oplus (s(x) \oplus t(x))$ *(bersifat asosiatif), perhatikan bahwa:*

$$\begin{aligned}
&(r(x) \oplus s(x)) \oplus t(x) \\
=&((2 \oplus (3 \otimes x) \oplus ((-7) \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (5 \otimes x^{\otimes 3})) \\
&\oplus (4 \oplus ((-2) \otimes x) \oplus (1 \otimes x^{\otimes 2}))) \oplus (-5 \oplus (4 \otimes x)) \\
=&(4 \oplus (3 \otimes x) \oplus (1 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (5 \otimes x^{\otimes 3})) \\
&\oplus (-5 \oplus (4 \otimes x)) \\
=&4 \oplus (4 \otimes x) \oplus (1 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (5 \otimes x^{\otimes 3})
\end{aligned}$$

dan nilai,

$$\begin{aligned}
&r(x) \oplus (s(x) \oplus t(x)) \\
=&(2 \oplus (3 \otimes x) \oplus ((-7) \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (5 \otimes x^{\otimes 3})) \\
&\oplus ((4 \oplus ((-2) \otimes x) \oplus (1 \otimes x^{\otimes 2})) \oplus (-5 \oplus (4 \otimes x))) \\
=&(2 \oplus (3 \otimes x) \oplus ((-7) \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (5 \otimes x^{\otimes 3})) \\
&\oplus (4 \oplus (4 \otimes x) \oplus (1 \otimes x^{\otimes 2})) \\
=&4 \oplus (4 \otimes x) \oplus (1 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (5 \otimes x^{\otimes 3})
\end{aligned}$$

Dari hasil diatas diperoleh nilai $(r(x) \oplus s(x)) \oplus t(x) = r(x) \oplus (s(x) \oplus t(x))$ *artinya operasi* $\oplus$ *bersifat asosiatif.*

Proposisi 3.2.4 *(e.g Suroto, 2012)*
$\mathbb{R}_{max}[X]$ *memiliki elemen netral yaitu* $\varepsilon(x) = \bigoplus_{i=0}^{n}(a_i \otimes x^{\otimes i})$, *dimana untuk setiap* i, $a_i = -\infty$. *Sehingga untuk semua*

$s(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$ ***berlaku:***

$$s(x) \oplus \varepsilon(x) = s(x) = \varepsilon(x) \oplus s(x)$$

Bukti. Akan dibuktikan $\mathbb{R}_{max}[X]$ memiliki elemen netral. Misalkan diambil sembarang $s(x) = \bigoplus_{i=0}^{n}(a_i \otimes x^{\otimes i})$ dan dipilih sembarang $t(x) = \bigoplus_{i=0}^{n}(-\infty \otimes x^{\otimes i}) \in \mathbb{R}_{max}[X]$, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
s(x) \oplus t(x) &= \left(\bigoplus_{i=0}^{n}(a_i \otimes x^{\otimes i})\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{n}(-\infty \otimes x^{\otimes i})\right) \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n}(a_i \oplus (-\infty)) \otimes x^{\otimes i} \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n} max(a_i, (-\infty)) \otimes x^{\otimes i} \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n}(a_i \otimes x^{\otimes i}) \\
&= s(x)
\end{aligned}$$

dan

$$
\begin{aligned}
t(x) \oplus s(x) &= \left(\bigoplus_{i=0}^{n}(-\infty \otimes x^{\otimes i})\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{n}(a_i \otimes x^{\otimes i})\right) \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n}((-\infty) \oplus a_i) \otimes x^{\otimes i} \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n} max((-\infty), a_i) \otimes x^{\otimes i} \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n}(a_i \otimes x^{\otimes i}) \\
&= s(x)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan hasil diatas $t(x)$ merupakan elemen netral pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ karena memenuhi $s(x) \oplus t(x) = s(x) = t(x) \oplus s(x)$. Elemen netral pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ bisa dituliskan dengan $\varepsilon(x)$, jadi pernyataan $\mathbb{R}_{max}[X]$ memiliki elemen netral yaitu $\varepsilon(x)$ terbukti benar. ■

Karena semua koefisen polinomial pada elemen netral adalah $-\infty$, jadi elemen ini cukup dituliskan dengan $\varepsilon(x) = -\infty$.

Contoh 3.2.5 *Misalkan diberikan* $f(x) = 6 \oplus (3 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus ((-5) \otimes x^{\otimes 3}) \in \mathbb{R}_{max}[X]$*, perhatikan bahwa:*

$$\begin{aligned} f(x) \oplus \varepsilon(x) =& (6 \oplus (3 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus ((-5) \otimes x^{\otimes 3})) \oplus (-\infty) \\ =& (6 \oplus (-\infty)) \oplus (3 \oplus (-\infty) \otimes x^{\otimes 2} \oplus ((-5) \\ & \oplus (-\infty) \otimes x^{\otimes 3} \\ =& 6 \oplus (3 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus ((-5) \otimes x^{\otimes 3}) \\ =& f(x) \end{aligned}$$

Proposisi 3.2.6 *(e.g Suroto, 2012)*

Operasi $\oplus$ pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ bersifat komutatif, sehingga untuk setiap $f(x), g(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$ berlaku

$$f(x) \oplus g(x) = g(x) \oplus f(x)$$

Bukti. Akan dibuktikan operasi $\oplus$ pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ bersifat komutatif.

Misalkan diambil sembarang $u(x), v(x) \in \mathbb{R}_{max}$, dengan $u(x) = \bigoplus_{i=0}^{n} (a_i \otimes x^{\otimes i}), v(x) = \bigoplus_{i=0}^{m} (b_i \otimes x^{\otimes i})$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} u(x) \oplus v(x) &= \bigoplus_{i=0}^{n} (a_i \otimes x^{\otimes i}) \oplus \bigoplus_{i=0}^{m} (b_i \otimes x^{\otimes i}) \\ &= \bigoplus_{i=0}^{max(n,m)} ((a_i \oplus b_i) \otimes x^{\otimes i}) \\ &= \bigoplus_{i=0}^{max(m,n)} ((b_i \oplus a_i) \otimes x^{\otimes i}) \\ &= \bigoplus_{i=0}^{m} (b_i \otimes x^{\otimes i}) \oplus \bigoplus_{i=0}^{n} (a_i \otimes x^{\otimes i}) \\ &= v(x) \oplus u(x) \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa operasi $\oplus$ pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ bersifat komutatif. $\blacksquare$

Contoh 3.2.7 *Misalkan diberikan polinomial-polinomial pada $\mathbb{R}_{max[X]}$ sebagai berikut:*
$u(x) = -3 \oplus (12 \otimes x) \oplus (4 \otimes x^{\otimes 2})$
$v(x) = 10 \oplus (2 \otimes x) \oplus ((-7) \otimes x^{\otimes 2})$
Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
& u(x) \oplus v(x) \\
=& (-3 \oplus (12 \otimes x) \oplus (4 \otimes x^{\otimes 2})) \oplus (10 \oplus (2 \otimes x) \oplus ((-7) \otimes x^{\otimes 2})) \\
=& (-3 \oplus 10) \oplus (12 \oplus 2) \otimes x \oplus (4 \oplus (-7)) \otimes x^{\otimes 2} \\
=& 10 \oplus (12 \otimes x) \oplus (4 \otimes x^{\otimes 2})
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
& v(x) \oplus u(x) \\
=& (10 \oplus (2 \otimes x) \oplus ((-7) \otimes x^{\otimes 2})) \oplus (-3 \oplus (12 \otimes x) \oplus (4 \otimes x^{\otimes 2})) \\
=& (10 \oplus (-3)) \oplus (2 \oplus 12) \otimes x \oplus ((-7) \oplus 4) \otimes x^{\otimes 2} \\
=& 10 \oplus (12 \otimes x) \oplus (4 \otimes x^{\otimes 2})
\end{aligned}$$

Dari hasil diatas diperoleh $u(x) \oplus v(x) = v(x) \oplus u(x)$ yang artinya operasi $\oplus$ tersebut bersifat komutatif.

Proposisi 3.2.8 *Operasi $\oplus$ pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ bersifat idempoten, sehingga untuk setiap $f(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$ berlaku*

$$f(x) \oplus f(x) = f(x).$$

Bukti. Akan dibuktikan Operasi $\oplus$ pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ bersifat idempoten.

Misalkan diambil sembarang $f(x) = \bigoplus_{i=0}^{n}(a_i \otimes x^{\otimes i}) \in \mathbb{R}_{max}[X]$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(x) \oplus f(x) &= \left(\bigoplus_{i=0}^{n}(a_i \otimes x^{\otimes i})\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{n}(a_i \otimes x^{\otimes i})\right) \\ &= \bigoplus_{i=0}^{n}(a_i \oplus a_i) \otimes x^{\otimes i} \\ &= \bigoplus_{i=0}^{n} max(a_i, a_i) \otimes x^{\otimes i} \\ &= \bigoplus_{i=0}^{n}(a_i \otimes x^{\otimes i}) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\mathbb{R}_{max}[X]$ memiliki sifat idempoten terhadap operasi $\oplus$. ■

Contoh 3.2.9 *Misalkan* $f(x) = 3 \oplus ((-5) \otimes x) \oplus (9 \otimes x^{\otimes 2})$*, perhatikan operasi* $f(x) \oplus f(x)$ *berikut*

$$\begin{aligned} f(x) \oplus f(x) =& (3 \oplus ((-5) \otimes x) \oplus (9 \otimes x^{\otimes 2})) \\ & \oplus (3 \oplus ((-5) \otimes x) \oplus (9 \otimes x^{\otimes 2})) \\ =& (3 \oplus 3) \oplus ((-5) \oplus (-5)) \otimes x \oplus (9 \oplus 9) \otimes x^{\otimes 2} \\ =& max(3,3) \oplus max((-5),(-5)) \otimes x \\ & \oplus max(9,9) \otimes x^{\otimes 2} \\ =& 3 \oplus ((-5) \otimes x) \oplus (9 \otimes x^{\otimes 2}) \\ =& f(x) \end{aligned}$$

Berdasarkan proposisi 3.2.1, 3.2.2, 3.2.4 terlihat bahwa

$(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus)$ bersifat tertutup, assosiatif, dan memiliki elemen netral artinya $(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus)$ membentuk suatu monoid. Selain itu, pada proposisi 3.2.6 dan 3.2.8 $(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus)$ memiliki sifat komutatif dan idempoten, jadi berdasarkan sifat sifat tersebut $(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus)$ membentuk suatu monoid komutatif idempoten.

2. $(\mathbb{R}_{max}[X], \otimes)$ membentuk monoid komutatif.
Polinomial atas aljabar max-plus $\mathbb{R}_{max}[X]$ dengan operasi $\otimes$ $(\mathbb{R}_{max}[X], \otimes)$ membentuk monoid komutatif, sehingga memenuhi sifat-sifat berikut ini:

Proposisi 3.2.10 *(e.g Suroto, 2012)*

Operasi $\otimes$ pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ merupakan operasi tertutup/operasi biner.

Bukti. Akan dibuktikan bahwa operasi $\otimes$ pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ merupakan operasi biner/ bersifat tertutup.
Diambil sembarang $f(x), g(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$, dengan $f(x) = (a_0) \oplus (a_1 \otimes x) \oplus \cdots \oplus (a_n \otimes x^{\otimes n})$ dan $g(x) = (b_0) \oplus (b_1 \otimes x) \oplus \cdots \oplus (b_m \otimes x^{\otimes m})$, untuk setiap $a_i, b_i \in \mathbb{R}_{max}$ perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
f(x) \otimes g(x) =& ((a_0) \oplus (a_1 \otimes x) \oplus \cdots \oplus (a_n \otimes x^{\otimes n}))\otimes \\
& (b_0) \oplus (b_1 \otimes x) \oplus \cdots \oplus (b_m \otimes x^{\otimes m}) \\
=& \left(\bigoplus_{i=0}^{n} (a_i \otimes x^{\otimes i}) \right) \otimes \left(\bigoplus_{i=0}^{m} (b_i \otimes x^{\otimes i}) \right) \\
=& \bigoplus_{i=0}^{n+m} \left(\bigoplus_{j=0}^{i} (a_j \otimes b_{i-j}) \right) x^i \\
=& c_0 \oplus c_1 \otimes x \oplus \cdots \oplus c_{n+m} \otimes x^{\otimes n+m}
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $a_i, b_i \in \mathbb{R}_{max}$ maka $a_i \otimes b_{j-i} = c_i \in \mathbb{R}_{max}$. Karena setiap koefisien $f(x) \otimes g(x) \in \mathbb{R}_{max}$ merupakan elemen $\mathbb{R}_{max}$ maka terbukti bahwa $f(x) \otimes g(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$. Jadi Operasi $\otimes$ pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ merupakan operasi biner/bersifat tertutup. ■

Proposisi 3.2.11 *(e.g Suroto, 2012)*

Operasi $\otimes$ pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ bersifat asosiatif, sehingga untuk setiap $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$ berlaku:

$$(f(x) \otimes g(x)) \otimes h(x) = f(x) \otimes (g(x) \otimes h(x))$$

Bukti. Akan dibuktikan operasi $\otimes$ pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ bersifat asosiatif.

Misalkan diambil sembarang $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}_{max}$, dengan $f(x) = \bigoplus_{i=0}^{n}(u_i \otimes x^{\otimes i}), g(x) = \bigoplus_{i=0}^{m}(v_i \otimes x^{\otimes i}), h(x) = \bigoplus_{i=0}^{k}(w_i \otimes x^{\otimes i})$, perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
&(f(x) \otimes g(x)) \otimes h(x) \\
&= \left(\bigoplus_{i=0}^{n} (u_i \otimes x^{\otimes i}) \otimes \bigoplus_{i=0}^{m} (v_i \otimes x^{\otimes i}) \right) \otimes \bigoplus_{i=0}^{k} (w_i \otimes x^{\otimes i}) \\
&= \left(\bigoplus_{i=0}^{n+m} \left(\bigoplus_{j=0}^{i} (u_j \otimes v_{i-j}) \right) \otimes x^{\otimes i} \right) \otimes \bigoplus_{i=0}^{k} (w_i \otimes x^{\otimes i}) \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n+m+k} \left(\bigoplus_{j=0}^{i} \left(\bigoplus_{p=0}^{j} (u_p \otimes v_{j-p}) \right) \otimes w_{i-j} \right) \otimes x^{\otimes i} \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n+m+k} \left(\bigoplus_{j+p+l=i} (u_j \otimes v_p \otimes w_l) \right) \otimes x^{\otimes i} \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n+m+k} \left(\bigoplus_{j=0}^{i} u_j \left(\bigoplus_{p=0}^{i-j} (v_p \otimes w_{i-j-p}) \right) \right) \otimes x^{\otimes i} \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n} (u_i \otimes x^{\otimes i}) \otimes \left(\bigoplus_{i=0}^{m+k} \left(\bigoplus_{j=0}^{i} (v_j \otimes w_{i-j}) \right) \right) \otimes x^{\otimes i} \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n} (u_i \otimes x^{\otimes i}) \otimes \left(\bigoplus_{i=0}^{m} (v_i \otimes x^{\otimes i}) \otimes \bigoplus_{i=0}^{k} (w_i \otimes x^{\otimes i}) \right) \\
&= f(x) \otimes (g(x) \otimes h(x))
\end{aligned}
$$

Berdasarkan hasil diatas terbukti bahwa operasi $\otimes$ pada $\mathbb{R}_{max[X]}$ bersifat asosiatif. ■

Contoh 3.2.12 *Misalkan diberikan polinomial-polinomial pada* $\mathbb{R}_{max[X]}$ *sebagai berikut:*

$f(x) = 5 \oplus (2 \otimes x) \oplus (3 \otimes x^{\otimes 2})$

$g(x) = 4 \oplus ((-5) \otimes x) \oplus (3 \otimes x^{\otimes 2})$

$h(x) = 7 \oplus ((-4) \otimes x)$
akan ditunjukan $(f(x) \otimes g(x)) \otimes h(x) = f(x) \otimes (g(x) \otimes h(x))$ *(bersifat asosiatif).*

$$\begin{aligned}
&(f(x) \otimes g(x)) \otimes h(x) \\
=&((5 \oplus (2 \otimes x) \oplus (3 \otimes x^{\otimes 2})) \otimes (4 \oplus ((-5) \otimes x) \oplus (3 \otimes x^{\otimes 2}))) \\
&\otimes (7 \oplus ((-4) \otimes x)) \\
=&(9 \oplus (6 \otimes x) \oplus (8 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (5 \otimes x^{\otimes 3}) \oplus 6 \otimes x^{\otimes 4}) \\
&\otimes (7 \oplus ((-4) \otimes x)) \\
=&16 \oplus (13 \otimes x) \oplus (15 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (12 \otimes x^{\otimes 3}) \oplus (13 \otimes x^{\otimes 4}) \\
&\oplus (2 \otimes x^{\otimes 5})
\end{aligned}$$

dan nilai,

$$\begin{aligned}
&f(x) \otimes (g(x) \otimes h(x)) \\
=&(5 \oplus (2 \otimes x) \oplus (3 \otimes x^{\otimes 2})) \otimes ((4 \oplus ((-5) \otimes x) \oplus (3 \otimes x^{\otimes 2})) \\
&\otimes (7 \oplus ((-4) \otimes x))) \\
=&(5 \oplus (2 \otimes x) \oplus (3 \otimes x^{\otimes 2})) \\
&\otimes (11 \oplus (0 \otimes x) \oplus (10 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus ((-1) \otimes x^{\otimes 3})) \\
=&16 \oplus (13 \otimes x) \oplus (15 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (12 \otimes x^{\otimes 3}) \oplus (13 \otimes x^{\otimes 4}) \\
&\oplus (2 \otimes x^{\otimes 5})
\end{aligned}$$

Dari hasil diatas diperoleh nilai dari $(f(x) \otimes g(x)) \otimes h(x) = f(x) \otimes (g(x) \otimes h(x))$*, artinya operasi* $\otimes$ *bersifat asosiatif.*

Proposisi 3.2.13 *(e.g Suroto, 2012)*
$\mathbb{R}_{max}[X]$ *memiliki elemen satuan yaitu* $0(x) = \bigoplus_{i=0}^{n}(a_i \otimes x^{\otimes i})$*, dimana untuk* $i = 0$*,* $a_0 = 0$ *dan* $i \neq 0, a_i = -\infty$ *atau agar*

lebih jelas, $0(x) = 0 \oplus -\infty \otimes x \oplus \cdots \oplus -\infty \otimes x^{\otimes i}$*(cukup ditulis* $0(x) = 0$*). Sehingga untuk setiap* $f(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$ *berlaku*

$$f(x) \otimes 0(x) = f(x) = 0(x) \otimes f(x).$$

Bukti. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{R}_{max}[X]$ memiliki elemen satuan.
Misalkan diambil sembarang $f(x) = (a_0) \oplus (a_1 \otimes x^{\otimes 1}) \oplus \cdots \oplus (a_n \otimes x^{\otimes n}) \in \mathbb{R}_{max}[X]$ dan dipilih sembarang $g(x) = 0 \oplus ((-\infty) \otimes x^{\otimes 1}) \oplus \cdots \oplus ((-\infty) \otimes x^{\otimes m}) \in \mathbb{R}_{max}[X]$, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} f(x) \otimes g(x) =& ((a_0) \oplus (a_1 \otimes x^{\otimes 1}) \oplus \cdots \oplus (a_n \otimes x^{\otimes n})) \\ & \otimes (0 \oplus ((-\infty) \otimes x^{\otimes 1}) \oplus \cdots \oplus ((-\infty) \otimes x^{\otimes m})) \end{aligned}$$

dengan nilai

$$\begin{aligned} c_0 =& a_0 \otimes b_0 \\ =& a_0 \otimes 0 \\ =& a_0 \\ c_1 =& (a_0 \otimes b_1) \oplus (a_1 \otimes b_0) \\ =& (a_0 \otimes (-\infty)) \oplus (a_1 \otimes 0) \\ =& a_1 \\ & \vdots \\ c_{n+m} =& (a_0 \otimes b_m) \oplus \cdots \oplus (a_n \otimes b_0) \\ =& (a_0 \otimes (-\infty)) \oplus \cdots \oplus (a_n \otimes 0) \\ =& a_n \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
f(x) \otimes g(x) =& ((c_0) \oplus (c_1 \otimes x^{\otimes 1}) \oplus \cdots \oplus (c_{n+m} \otimes x^{\otimes n+m})) \\
f(x) \otimes g(x) =& ((a_0) \oplus (a_1 \otimes x^{\otimes 1}) \oplus \cdots \oplus (a_n \otimes x^{\otimes n})) \\
=& f(x)
\end{aligned}
$$

Kemudian,

$$
\begin{aligned}
g(x) \otimes f(x) =& (0 \oplus ((-\infty) \otimes x^{\otimes 1}) \oplus \cdots \oplus ((-\infty) \otimes x^{\otimes m})) \\
=& \otimes ((a_0) \oplus (a_1 \otimes x^{\otimes 1}) \oplus \cdots \oplus (a_n \otimes x^{\otimes n}))
\end{aligned}
$$

dengan nilai

$$
\begin{aligned}
c_0 =& b_0 \otimes a_0 \\
=& 0 \otimes a_0 \\
=& a_0 \\
c_1 =& (b_0 \otimes a_1) \oplus (b_1 \otimes a_0) \\
=& (0 \otimes a_1) \oplus ((-\infty) \otimes a_0) \\
=& a_1 \\
& \vdots \\
c_{n+m} =& (b_0 \otimes a_n) \oplus \cdots \oplus (b_n \otimes a_0) \\
=& (0 \otimes a_n) \oplus \cdots \oplus (-(\infty) \otimes a_0) \\
=& a_n
\end{aligned}
$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} g(x) \otimes f(x) =& ((c_0) \oplus (c_1 \otimes x^{\otimes 1}) \oplus \cdots \oplus (c_{n+m} \otimes x^{\otimes n+m})) \\ g(x) \otimes f(x) =& ((a_0) \oplus (a_1 \otimes x^{\otimes 1}) \oplus \cdots \oplus (a_n \otimes x^{\otimes n})) \\ =& f(x) \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil diatas dapat disimpulkan bahwa $g(x) = 0$ merupakan elemen satuan pada $\mathbb{R}_{max}[X]$, elemen satuan pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ bisa dituliskan dengan $0(x)$. Jadi $\mathbb{R}_{max}[X]$ memiliki elemen satuan yaitu $0(x)$ sedemikian sehingga $f(x) \otimes 0(x) = f(x) = 0(x) \otimes f(x)$ terbukti. ■

Contoh 3.2.14 *Diambil sembarang* $p(x) = 2 \oplus (5 \otimes x) \oplus ((-3) \otimes x^{\otimes 2}) \in \mathbb{R}_{max}[X]$*, perhatikan bahwa:*

$$\begin{aligned} p(x) \otimes 0_x =& (2 \oplus (5 \otimes x) \oplus ((-3) \otimes x^{\otimes 2})) \otimes 0 \\ =& (2 \otimes 0) \oplus ((5 \otimes 0) \otimes x) \oplus (((-3) \otimes 0) \otimes x^{\otimes 2}) \\ =& (2 + 0) \oplus ((5 + 0) \otimes x) \oplus (((-3) + 0) \otimes x^{\otimes 2}) \\ =& 2 \oplus (5 \otimes x) \oplus ((-3) \otimes x^{\otimes 2}) \\ =& p(x) \end{aligned}$$

Dari hasil diatas jelas bahwa 0_x *merupakan elemen satuan pada* $\mathbb{R}_{max}[X]$*.*

Proposisi 3.2.15 *operasi* $\otimes$ *pada* $\mathbb{R}_{max}[X]$ *bersifat komutatif, sehingga untuk setiap* $f(x), g(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$ *berlaku*

$$f(x) \otimes g(x) = g(x) \otimes f(x)$$

Bukti. Akan dibuktikan operasi $\otimes$ pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ bersifat komutatif.

Misalkan diambil sembarang $f(x), g(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$ dengan $f(x) = \bigoplus_{i=0}^{n}(a_i \otimes x^{\otimes i})$ dan $g(x) = \bigoplus_{i=0}^{m}(b_i \otimes x^{\otimes i})$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
f(x) \otimes g(x) &= \left(\bigoplus_{i=0}^{n}(a_i \otimes x^{\otimes i})\right) \otimes \left(\bigoplus_{i=0}^{m}(b_i \otimes x^{\otimes i})\right) \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n+m}\left(\bigoplus_{j=0}^{i}(a_j \otimes b_{i-j})\right) \otimes x^{\otimes i} \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n+m}\left(\bigoplus_{j=0}^{i}(b_j \otimes a_{i-j})\right) \otimes x^{\otimes i} \\
&= \left(\bigoplus_{i=0}^{m}(b_i \otimes x^{\otimes i})\right) \otimes \left(\bigoplus_{i=0}^{n}(a_i \otimes x^{\otimes i})\right) \\
&= g(x) \otimes f(x)
\end{aligned}$$

Dari hasil diatas terbukti bahwa operasi $\otimes$ pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ bersifat komutatif. ■

Contoh 3.2.16 *Diberikan* $r(x)$ *dan* $s(x)$ *elemen* $\mathbb{R}_{max}[X]$ *dimana,* $r(x) = 2 \oplus (3 \otimes x) \oplus (4 \otimes x^{\otimes 2})$ *dan* $s(x) = 3 \oplus (2 \otimes x)$*, perhatikan bahwa:*

$$\begin{aligned}
r(x) \otimes s(x) =& (2 \oplus (3 \otimes x) \oplus (4 \otimes x^{\otimes 2})) \otimes (3 \oplus (2 \otimes x)) \\
=& 5 \oplus (6 \otimes x) \oplus (12 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (8 \otimes x^{\otimes 3})
\end{aligned}$$

dan nilai dari,

$$\begin{aligned} s(x) \otimes r(x) =& (3 \oplus (2 \otimes x)) \otimes (2 \oplus (3 \otimes x) \oplus (4 \otimes x^{\otimes 2})) \\ =& 5 \oplus (6 \otimes x) \oplus (12 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (8 \otimes x^{\otimes 3}) \end{aligned}$$

Dari hasil contoh diatas terlihat bahwa operasi $\otimes$ bersifat komutatif.

Berdasarkan proposisi 3.2.10, 3.2.11, 3.2.13, 3.2.15 terlihat bahwa $(\mathbb{R}_{max}[X], \otimes)$ bersifat tertutup, assosiatif, memiliki elemen satuan dan komutatif artinya $(\mathbb{R}_{max}[X], \otimes)$ membentuk suatu monoid komutatif.

3. $(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus, \otimes)$ membentuk semiring komutatif idempoten. Sebelumnya telah dijelaskan bahwa $(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus)$ membentuk monoid komutatif idempoten dan $(\mathbb{R}_{max}[X], \otimes)$ membentuk monoid komutatif. Lebih lanjut $(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus, \otimes)$ dapat membentuk semiring komutatif idempoten, sehingga memenuhi sifat-sifat berikut ini:

Proposisi 3.2.17 $\mathbb{R}_{max}[X]$ *terhadap operasi* $\oplus$ *dan* $\otimes$ $(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus, \otimes)$ ***memiliki sifat distributif, sehingga untuk setiap*** $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$ ***berlaku***

$$f(x) \otimes (g(x) \oplus h(x)) = (f(x) \otimes g(x)) \oplus (f(x) \otimes h(x))$$

(distributif kiri)

$$((g(x) \oplus h(x)) \otimes f(x) = (g(x) \otimes f(x)) \oplus (h(x) \otimes f(x))$$

(distributif kanan)

Bukti. Akan dibuktikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbb{R}_{max}[X]$

berlaku distributif kiri dan kanan.

Misalkan diambil sembarang $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$, dengan $f(x) = \bigoplus_{i=0}^{n}(a_i \otimes x^{\otimes i}), g(x) = \bigoplus_{i=0}^{m}(b_i \otimes x^{\otimes i}), h(x) = \bigoplus_{i=0}^{k}(c_i \otimes x^{\otimes i})$, perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
& f(x) \otimes (g(x) \oplus h(x)) \\
&= \left(\bigoplus_{i=0}^{n}(a_i \otimes x^{\otimes i})\right) \otimes \left[\left(\bigoplus_{i=0}^{m}(b_i \otimes x^{\otimes i})\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{k}(c_i \otimes x^{\otimes i})\right)\right] \\
&= \left(\bigoplus_{i=0}^{n}(a_i \otimes x^{\otimes i})\right) \otimes \left(\bigoplus_{i=0}^{max(m,k)} (b_i \oplus c_i) \otimes x^{\otimes i}\right) \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n+max(m,k)} \bigoplus_{j=0}^{i}[a_j \otimes (b_{i-j} \oplus c_{i-j})] \otimes x^{\otimes i} \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n+max(m,k)} \bigoplus_{j=0}^{i}[(a_j \otimes b_{i-j}) \oplus (a_j \otimes c_{i-j})] \otimes x^{\otimes i} \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n+max(n,k)} \bigoplus_{j=0}^{i}[(a_j \otimes b_{i-j}) \otimes x^{\otimes i} \oplus (a_j \otimes c_{i-j}) \otimes x^{\otimes i}] \\
&= \left(\bigoplus_{i=0}^{n+m} \left(\bigoplus_{j=0}^{i}(a_j \otimes b_{i-j})\right) \otimes x^{\otimes i}\right) \\
&\quad \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{n+k} \left(\bigoplus_{j=0}^{i}(a_j \otimes c_{i-j})\right) \otimes x^{\otimes i}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\bigoplus_{i=0}^{n} (a_i \otimes x^{\otimes i}) \otimes \bigoplus_{i=0}^{m} (b_i \otimes x^{\otimes i}) \right) \oplus \\
&\quad \left(\bigoplus_{i=0}^{n} (a_i \otimes x^{\otimes i}) \otimes \bigoplus_{i=0}^{k} (c_i \otimes x^{\otimes i}) \right) \\
&= (f(x) \otimes g(x)) \oplus (f(x) \otimes h(x))
\end{aligned}
$$

(Distributif kiri)

$$
\begin{aligned}
& (g(x) \oplus h(x)) \otimes f(x) \\
&= \left[\left(\bigoplus_{i=0}^{m} (b_i \otimes x^{\otimes i}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{k} (c_i \otimes x^{\otimes i}) \right) \right] \otimes \left(\bigoplus_{i=0}^{n} (a_i \otimes x^{\otimes i}) \right) \\
&= \left(\bigoplus_{i=0}^{max(m,k)} (b_i \oplus c_i) \otimes x^{\otimes i} \right) \otimes \left(\bigoplus_{i=0}^{n} (a_i \otimes x^{\otimes i}) \right) \\
&= \bigoplus_{i=0}^{max(m,k)+n} \bigoplus_{j=0}^{i} [(b_j \oplus c_j) \otimes a_{i-j}] \otimes x^{\otimes i} \\
&= \bigoplus_{i=0}^{max(m,k)+n} \bigoplus_{i=0}^{k} [(b_j \otimes a_{i-j}) \oplus (c_j \otimes a_{i-j})] \otimes x^{\otimes i} \\
&= \bigoplus_{i=0}^{max(m,k)+n} \bigoplus_{i=0}^{k} [(b_j \otimes a_{i-j}) \otimes x^{\otimes i} \oplus (c_j \otimes a_{i-j}) \otimes x^{\otimes i}] \\
&= \left(\bigoplus_{i=0}^{m+n} \left(\bigoplus_{j=0}^{i} (b_j \otimes a_{i-j}) \right) \otimes x^{\otimes i} \right) \\
&\quad \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{k+n} \left(\bigoplus_{p=0}^{i} (c_j \otimes a_{i-j}) \right) \otimes x^{\otimes i} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\bigoplus_{i=0}^{m} (b_i \otimes x^{\otimes i}) \otimes \bigoplus_{i=0}^{n} (a_i \otimes x^{\otimes i}) \right) \oplus \\
&\quad \left(\bigoplus_{i=0}^{k} (c_i \otimes x^{\otimes i}) \otimes \bigoplus_{i=0}^{n} (a_i \otimes x^{\otimes i}) \right) \\
&= (g(x) \otimes f(x)) \oplus (h(x) \otimes f(x))
\end{aligned}
$$

(Distributif kanan).

Dari hasil diatas terbukti bahwa operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ berlaku distributif kiri dan distributif kanan. ■

Contoh 3.2.18 *Misalkan diberikan polinomial-polinomial pada* $\mathbb{R}_{max}[X]$ *sebagai berikut:*
$f(x) = 2 \oplus (3 \otimes x) \oplus (4 \otimes x^{\otimes 2})$
$g(x) = 4 \oplus ((-2) \otimes x)$
$h(x) = 5 \oplus (4 \otimes x) \oplus (3 \otimes x^{\otimes 2})$
akan ditunjukkan operasi $\oplus$ *dan* $\otimes$ *berlaku distributif kiri, yaitu* $f(x) \otimes (g(x) \oplus h(x)) = (f(x) \otimes g(x)) \oplus (f(x) \otimes h(x))$*. Perhatikan bahwa:*

$$
\begin{aligned}
&f(x) \otimes (g(x) \oplus h(x)) \\
=&(2 \oplus (3 \otimes x) \oplus (4 \otimes x^{\otimes 2})) \\
&\otimes ((4 \oplus ((-2) \otimes x)) \oplus (5 \oplus (4 \otimes x) \oplus (3 \otimes x^{\otimes 2}))) \\
=&(2 \oplus (3 \otimes x) \oplus (4 \otimes x^{\otimes 2})) \otimes (5 \oplus (4 \otimes x) \oplus (3 \otimes x^{\otimes 2})) \\
=&7 \oplus (8 \otimes x) \oplus (9 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (8 \otimes x^{\otimes 3}) \oplus (7 \otimes x^{\otimes 4})
\end{aligned}
$$

dan nilai dari,

$$
\begin{aligned}
&(f(x) \otimes g(x)) \oplus (f(x) \otimes h(x)) \\
=&((2 \oplus (3 \otimes x) \oplus (4 \otimes x^{\otimes 2})) \otimes (4 \oplus ((-2) \otimes x))) \\
&\oplus ((2 \oplus (3 \otimes x) \oplus (4 \otimes x^{\otimes 2})) \otimes (5 \oplus (4 \otimes x) \oplus (3 \otimes x^{\otimes 2}))) \\
=&(6 \oplus (7 \otimes x) \oplus (8 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (2 \otimes x^{\otimes 3})) \\
&\oplus (7 \oplus (8 \otimes x) \oplus (9 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (8 \otimes x^{\otimes 3}) \oplus (7 \otimes x^{\otimes 4})) \\
=&7 \oplus (8 \otimes x) \oplus (9 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (8 \otimes x^{\otimes 3}) \oplus (7 \otimes x^{\otimes 4})
\end{aligned}
$$

Terlihat bahwa nilai $f(x) \otimes (g(x) \oplus h(x)) = (f(x) \otimes g(x)) \oplus (f(x) \otimes h(x))$ *artinya operasi* $\oplus$ *dan* $\otimes$ *berlaku distributif kiri.*

Kemudian, misalkan diberikan polinomial-polinomial pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ *sebagai berikut:*
$q(x) = 4 \oplus (1 \otimes x) \oplus (2 \otimes x^{\otimes 2})$
$r(x) = 3 \oplus (5 \otimes x)$
$s(x) = 5 \oplus (2 \otimes x) \oplus (1 \otimes x^{\otimes 2})$
akan ditunjukkan operasi $\oplus$ *dan* $\otimes$ *distributif kanan, yaitu* $((r(x) \oplus s(x)) \otimes q(x) = (r(x) \otimes q(x)) \oplus (s(x) \otimes q(x))$*. Perhatikan bahwa:*

$$
\begin{aligned}
&((r(x) \oplus s(x)) \otimes q(x) \\
=&((3 \oplus (5 \otimes x)) \oplus (5 \oplus (2 \otimes x) \oplus (1 \otimes x^{\otimes 2}))) \\
=&(4 \oplus (1 \otimes x) \oplus (2 \otimes x^{\otimes 2})) \\
=&(5 \oplus (5 \otimes x) \oplus (1 \otimes x^{\otimes 2})) \otimes (4 \oplus (1 \otimes x) \oplus (2 \otimes x^{\otimes 2})) \\
=&9 \oplus (9 \otimes x) \oplus (7 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (7 \otimes x^{\otimes 3}) \oplus (3 \otimes x^{\otimes 4})
\end{aligned}
$$

dan nilai dari,

$$
\begin{aligned}
&(r(x) \otimes q(x)) \oplus (s(x) \otimes q(x))\\
=&((3 \oplus (5 \otimes x)) \otimes (4 \oplus (1 \otimes x) \oplus (2 \otimes x^{\otimes 2})))\\
&\oplus ((5 \oplus (2 \otimes x) \oplus (1 \otimes x^{\otimes 2})) \otimes (4 \oplus (1 \otimes x) \oplus (2 \otimes x^{\otimes 2})))\\
=&(7 \oplus (9 \otimes x) \oplus (6 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (7 \otimes x^{\otimes 3}))\\
&\oplus (9 \oplus (6 \otimes x) \oplus (7 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (4 \otimes x^{\otimes 3}) \oplus (3 \otimes x^{\otimes 4}))\\
=&9 \oplus (9 \otimes x) \oplus (7 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (7 \otimes x^{\otimes 3}) \oplus (3 \otimes x^{\otimes 4})
\end{aligned}
$$

Terlihat bahwa nilai $((r(x) \oplus s(x)) \otimes q(x) = (r(x) \otimes q(x)) \oplus (s(x) \otimes q(x))$ *artinya operasi* $\oplus$ *dan* $\otimes$ *berlaku distributif kanan.*

Proposisi 3.2.19 *Elemen netral* $\varepsilon(x)$ *menjadi elemen penyerap terhadap operasi* $\otimes$*, sehingga untuk setiap* $f(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$ *berlaku*

$$f(x) \otimes \varepsilon(x) = \varepsilon(x) = \varepsilon(x) \otimes f(x)$$

Bukti. Akan dibuktikan elemen netral $\varepsilon(x)$ menjadi elemen penyerap terhadap operasi $\otimes$.
Misalkan diambil sembarang $f(x) = \bigoplus_{i=0}^{n}(a_i \otimes x^{\otimes i}) \in \mathbb{R}_{max}[X]$ dan elemen netral $\varepsilon(x) = -\infty$, perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
f(x) \otimes \varepsilon(x) &= \left(\bigoplus_{i=0}^{n} (a_i \otimes x^{\otimes i}) \right) \otimes (-\infty) \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n} (a_i \otimes (-\infty)) \otimes x^{\otimes i}) \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n} (a_i + (-\infty)) \otimes x^{\otimes i}) \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n} (-\infty) \otimes x^{\otimes i}) \\
&= -\infty \\
&= \varepsilon(x)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan hasil diatas terbukti bahwa elemen netral $\varepsilon(x)$ menjadi elemen penyerap terhadap operasi $\otimes$. ■

Contoh 3.2.20 *Diambil sembarang* $k(x) = 4 \oplus (2 \otimes x) \oplus ((-3) \otimes x^{\otimes 2}) \in \mathbb{R}_{max}[X]$*, perhatikan bahwa:*

$$
\begin{aligned}
&p(x) \otimes \varepsilon(x) \\
=&(4 \oplus (2 \otimes x) \oplus ((-3) \otimes x^{\otimes 2})) \otimes (-\infty) \\
=&(4 \otimes (-\infty)) \oplus ((2 \otimes (-\infty)) \otimes x) \oplus (((-3) \otimes (-\infty)) \otimes x^{\otimes 2}) \\
=&(4 + (-\infty)) \oplus ((2 + (-\infty)) \otimes x) \oplus (((-3) + (-\infty)) \otimes x^{\otimes 2}) \\
=&-\infty \\
=&\varepsilon(x)
\end{aligned}
$$

Dari hasil diatas jelas bahwa $\varepsilon(x)$ *menjadi elemen penyerap terhadap operasi* $\otimes$ *di* $\mathbb{R}_{max}[X]$.

Dari beberapa sifat yang telah dibuktikan diketahui bahwa $(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus)$ membentuk monoid komutatif idempoten dan $(\mathbb{R}_{max}[X], \otimes)$ membentuk monoid komutatif. Selain itu pada proposisi 3.2.19 diketahui bahwa elemen netral pada $(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus)$ menjadi elemen penyerap tehadap operasi $\otimes$ serta pada proposisi 3.2.17 operasi $\oplus$ dan $\otimes$ berlaku distributif. Jadi dapat disimpulkan bahwa himpunan polinomial atas aljabar max-plus yang diikuti oleh operasi $\oplus$ dan $\otimes$ $(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus, \otimes)$ membentuk struktur semiring komutatif serta idempoten terhadap operasi $\oplus$.

4. $\mathbb{R}_{max}[X]$ semimodul kiri atas semiring $\mathbb{R}_{max}$
   Himpunan $\mathbb{R}_{max}[X]$ merupakan semimodul kiri atas semiring $\mathbb{R}_{max}$ karena memenuhi aksioma-aksioma semimodul kiri atas semiring. Perhatikan proposisi berikut ini:

   Proposisi 3.2.21 $\mathbb{R}_{max}[X]$ *merupakan semimodul kiri atas semiring* $\mathbb{R}_{max}$.

   Bukti. Akan dibuktikan $\mathbb{R}_{max}[X]$ merupakan semimodul kiri atas semiring $\mathbb{R}_{max}$.

   I. Akan ditunjukkan $(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus)$ merupakan monoid komutatif.
      Pada proposisi 3.2.1, 3.2.2, 3.2.4, 3.2.6 telah dibuktikan bahwa bahwa $(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus)$ memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen netral, dan komutatif. Jadi, $(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus)$ merupakan monoid komutatif.

II. Didefinisikan pemetaan

$$\mathbb{R}_{max} \times \mathbb{R}_{max}[X] \to \mathbb{R}_{max}[X]$$
$$(r, f(x)) \to r \otimes f(x)$$

Misalkan diambil sembarang $r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{max}$ dan $u(x), v(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$, dimana $u(x) = \bigoplus_{j=0}^{k}(u_j \otimes x^{\otimes j}), v(x) = \bigoplus_{j=0}^{l}(v_j \otimes x^{\otimes j})$
serta 0_r elemen satuan di $\mathbb{R}_{max}$, ε_r elemen netral di $\mathbb{R}_{max}$, dan $\varepsilon(x)$ elemen netral di $\mathbb{R}_{max}[X]$ sedemikian sehingga,

(i) Akan ditunjukkan $r \otimes [u(x) \oplus v(x)] = [r \otimes u(x)] \oplus [r \otimes v(x)]$, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
& r \otimes [u(x) \oplus v(x)] \\
=& r \otimes \left[\left(\bigoplus_{j=0}^{k}(u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=0}^{l}(v_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \right] \\
=& r \otimes \left(\bigoplus_{j=0}^{max(k,l)} (u_j \oplus v_i) \otimes x^{\otimes j} \right) \\
=& \left(\bigoplus_{j=0}^{max(k,l)} r \otimes (u_j \oplus v_j) \otimes x^{\otimes j} \right) \\
=& \left(\bigoplus_{j=0}^{max(k,l)} ((r \otimes u_j) \oplus (r \otimes v_j)) \otimes x^{\otimes j} \right)
\end{aligned}$$

$$= \left(\bigoplus_{j=0}^{max(k,l)} (r \otimes u_j) \otimes x^{\otimes j} \oplus (r \otimes v_j) \otimes x^{\otimes j} \right)$$

$$= \left(\bigoplus_{j=0}^{k} (r \otimes u_j) \otimes x^{\otimes j} \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=0}^{l} (r \otimes v_j) \otimes x^{\otimes j} \right)$$

$$= \left(\bigoplus_{j=0}^{k} r \otimes (u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=0}^{l} r \otimes (v_j \otimes x^{\otimes j}) \right)$$

$$= r \otimes \left(\bigoplus_{j=0}^{k} (u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \oplus r \otimes \left(\bigoplus_{j=0}^{l} (v_j \otimes x^{\otimes j}) \right)$$

$$= [r \otimes u(x)] \oplus [r \otimes v(x)]$$

Dari hasil diatas diperoleh $r \otimes [u(x) \oplus v(x)] = [r \otimes u(x)] \oplus [r \otimes v(x)]$

(ii) Akan ditunjukkan $(r_1 \oplus r_2) \otimes u(x) = (r_1 \otimes u(x)) \oplus (r_2 \otimes u(x))$, perhatikan bahwa:

$$(r_1 \oplus r_2) \otimes u(x)$$

$$= (r_1 \oplus r_2) \otimes \left(\bigoplus_{j=0}^{k} (u_j \otimes x^{\otimes j}) \right)$$

$$= \left(\bigoplus_{j=0}^{k} (r_1 \oplus r_2) \otimes (u_j \otimes x^{\otimes j}) \right)$$

$$= \left(\bigoplus_{j=0}^{k} ((r_1 \oplus r_2) \otimes u_j) \otimes x^{\otimes j} \right)$$

$$= \left(\bigoplus_{j=0}^{k} ((r_1 \otimes u_j) \oplus (r_2 \otimes u_j)) \otimes x^{\otimes j} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\bigoplus_{j=0}^{k} (r_1 \otimes u_j \otimes x^{\otimes j}) \oplus (r_2 \otimes u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \\
&= \left(\bigoplus_{j=0}^{k} (r_1 \otimes u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=0}^{k} (r_2 \otimes u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \\
&= \left(\bigoplus_{j=0}^{k} r_1 \otimes (u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=0}^{k} r_2 \otimes (u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \\
&= \left(r_1 \otimes \bigoplus_{j=0}^{k} (u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \oplus \left(r_2 \otimes \bigoplus_{j=0}^{k} (u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \\
&= (r_1 \otimes u(x)) \oplus (r_2 \otimes u(x))
\end{aligned}
$$

Dari hasil diatas diperoleh$(r_1 \oplus r_2) \otimes u(x) = (r_1 \otimes u(x)) \oplus (r_2 \otimes u(x))$.

(iii) Akan ditunjukkan $(r_1 \otimes r_2) \otimes u(x) = r_1 \otimes (r_2 \otimes u(x))$, perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
(r_1 \otimes r_2) \otimes u(x) &= (r_1 \otimes r_2) \otimes \left(\bigoplus_{j=0}^{k} (u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \\
&= \left(\bigoplus_{j=0}^{k} (r_1 \otimes r_2) \otimes (u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \\
&= \left(\bigoplus_{j=0}^{k} (r_1 \otimes r_2 \otimes u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \\
&= \left(\bigoplus_{j=0}^{k} r_1 \otimes (r_2 \otimes u_j \otimes x^{\otimes j}) \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= r_1 \otimes \left(\bigoplus_{j=0}^{k} (r_2 \otimes u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \\
&= r_1 \otimes \left(\bigoplus_{j=0}^{k} r_2 \otimes (u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \\
&= r_1 \otimes \left(r_2 \otimes \bigoplus_{j=0}^{k} (u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \\
&= r_1 \otimes (r_2 \otimes u(x))
\end{aligned}
$$

Dari hasil diatas diperoleh $(r_1 \otimes r_2) \otimes u(x) = r_1 \otimes (r_2 \otimes u(x))$.

(iv) Akan ditunjukkan $0_r \otimes u(x) = u(x)$, perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
0_r \otimes u(x) &= 0 \otimes \left(\bigoplus_{j=0}^{k} (u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \\
&= \left(\bigoplus_{j=0}^{n} 0 \otimes (u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \\
&= \left(\bigoplus_{j=0}^{k} (0 \otimes u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \\
&= \left(\bigoplus_{j=0}^{k} (0 + u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \\
&= \left(\bigoplus_{j=0}^{k} (u_j \otimes x^{\otimes j}) \right) \\
&= u(x)
\end{aligned}
$$

Dari hasil diatas diperoleh $0_r \otimes u(x) = u(x)$.

(v) Akan ditunjukkan $\varepsilon_r \otimes u(x) = \varepsilon(x) = u(x) \otimes \varepsilon(x)$, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r \otimes u(x) &= -\infty \otimes \left(\bigoplus_{j=0}^{k}(u_j \otimes x^{\otimes j})\right) \\
&= \left(\bigoplus_{j=0}^{k}(-\infty) \otimes (u_j \otimes x^{\otimes j})\right) \\
&= \left(\bigoplus_{j=0}^{k}((-\infty) \otimes u_j \otimes x^{\otimes j})\right) \\
&= \left(\bigoplus_{j=0}^{k}((-\infty) + u_j \otimes x^{\otimes j})\right) \\
&= \left(\bigoplus_{j=0}^{k}(-\infty \otimes x^{\otimes j})\right) \\
&= \varepsilon(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x) \otimes \varepsilon(x) &= \left(\bigoplus_{j=0}^{k}(u_j \otimes x^{\otimes j})\right) \otimes (-\infty) \\
&= \left(\bigoplus_{j=0}^{k}(u_j \otimes x^{\otimes j}) \otimes (-\infty)\right) \\
&= \left(\bigoplus_{j=0}^{k}(u_j \otimes x^{\otimes j} \otimes (-\infty))\right) \\
&= \left(\bigoplus_{j=0}^{k}(u_j \otimes (-\infty) \otimes x^{\otimes j})\right)
\end{aligned}$$

$$= \left(\bigoplus_{j=0}^{k} (u_j + (-\infty) \otimes x^{\otimes j}) \right)$$
$$= \left(\bigoplus_{j=0}^{k} (-\infty \otimes x^{\otimes j}) \right)$$
$$= \varepsilon(x)$$

Dari hasil diatas diperoleh $\varepsilon_r \otimes u(x) = \varepsilon(x) = u(x) \otimes \varepsilon(x)$.

Berdasarkan bukti I dan II terlihat bahwa $\mathbb{R}_{max}[X]$ memenuhi aksioma-aksioma semimodul kiri atas semiring. Jadi pernyataan $\mathbb{R}_{max}[X]$ merupakan semimodul kiri atas semiring $\mathbb{R}_{max}$ terbukti. ■

Berikut ini diberikan contoh operasi elemen-elemen pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ semimodul kiri atas semiring $\mathbb{R}_{max}$. Pengoperasian ini menunjukkan jika diambil sembarang elemen pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ dioperasikan dengan sembarang elemen pada $\mathbb{R}_{max}$ dari kiri maka hasil operasinya merupakan elemen dari $\mathbb{R}_{max}[X]$.

Contoh 3.2.22 *Diambil sembarang* $s(x) = s_0 \oplus (s_1 \otimes x) \otimes \cdots \oplus (s_j \otimes x^{\otimes j}) \in \mathbb{R}_{max}[X]$ *dan* $t \in \mathbb{R}_{max}$, *perhatikan bahwa:*

$$\begin{aligned}
&t \otimes s(x)\\
=&t \otimes (r_0 \oplus (r_1 \otimes x) \otimes \cdots \oplus (r_j \otimes x^{\otimes j}))\\
=&(t \otimes s_0) \oplus ((t \otimes s_1) \otimes x) \otimes \cdots \oplus ((t \otimes r_j) \otimes x^{\otimes j})\\
=&(t + s_0) \oplus ((t + s_1) \otimes x) \otimes \cdots \oplus ((t + r_j) \otimes x^{\otimes j})\\
=&u_0 \oplus (u_1 \otimes x) \otimes \cdots \oplus (u_j \otimes x^{\otimes j}) \in \mathbb{R}_{max}[X]
\end{aligned}$$

Diperoleh hasil operasi $\otimes$ elemen $\mathbb{R}_{max}[X]$ atas elemen $\mathbb{R}_{max}$ dari kiri merupakan elemen $\mathbb{R}_{max}[X]$.

5. $\mathbb{R}_{max}[X]$ semimodul kanan atas semiring $\mathbb{R}_{max}$.
   Himpunan $\mathbb{R}_{max}[X]$ merupakan semimodul kanan atas semiring $\mathbb{R}_{max}$ karena memenuhi aksioma-aksioma semimodul kanan atas semiring. Perhatikan proposisi berikut ini:

   Proposisi 3.2.23 *$\mathbb{R}_{max}[X]$ merupakan semimodul kanan atas semiring $\mathbb{R}_{max}$*

   Bukti.

   I. Akan ditunjukkan $(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus)$ merupakan monoid komutatif.
      Pada proposisi 3.2.1, 3.2.2, 3.2.4, 3.2.6 telah dibuktikan bahwa bahwa $(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus)$ memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen netral, dan komutatif. Jadi, $(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus)$ merupakan monoid komutatif.

   II. Didefinisikan pemetaan

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}_{max}[X] \times \mathbb{R}_{max} \rightarrow \mathbb{R}_{max}[X] \\ &(v(x), r) \rightarrow v(x) \otimes r \end{aligned}$$

   Misalkan diambil sembarang $r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{max}$ dan $v(x), w(x) \in \mathbb{R}_{max}[X]$ dengan, $v(x) = \bigoplus_{t=0}^{p}(v_t \otimes x^{\otimes t}), w(x) = \bigoplus_{t=0}^{q}(w_t \otimes x^{\otimes t})$, serta 0_r elemen satuan di $\mathbb{R}_{max}$, ε_r elemen netral di $\mathbb{R}_{max}$, dan $\varepsilon(x)$ elemen netral di $\mathbb{R}_{max}[X]$ sedemikian sehingga,

(i) Akan ditunjukkan $[v(x) \oplus w(x)] \otimes r = [v(x) \otimes r] \oplus [w(x) \otimes r]$, perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
&[v(x) \oplus w(x)] \otimes r \\
&= \left[\left(\bigoplus_{t=0}^{p}(v_t \otimes x^{\otimes t})\right) \oplus \left(\bigoplus_{t=0}^{q}(w_t \otimes x^{\otimes t})\right)\right] \otimes r \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{max(p,q)} (v_t \oplus w_t) \otimes x^{\otimes t}\right) \otimes r \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{max(p,q)} (v_i \oplus w_t) \otimes r \otimes x^{\otimes t}\right) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{max(p,q)} (v_t \otimes r \oplus w_t \otimes r) \otimes x^{\otimes t}\right) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{max(p,q)} (v_t \otimes r) \otimes x^{\otimes t} \oplus (w_t \otimes r) \otimes x^{\otimes t}\right) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p}(v_t \otimes r) \otimes x^{\otimes t}\right) \oplus \left(\bigoplus_{t=0}^{q}(w_t \otimes r) \otimes x^{\otimes t}\right) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p}(v_t \otimes x^{\otimes t})\right) \otimes r \oplus \left(\bigoplus_{t=0}^{q}(w_t \otimes x^{\otimes t})\right) \otimes r \\
&=[v(x) \otimes r] \oplus [w(x) \otimes r]
\end{aligned}
$$

Dari hasil diatas diperoleh $[v(x) \oplus w(x)] \otimes r = [v(x) \otimes r] \oplus [w(x) \otimes r]$.

(ii) Akan ditunjukkan $v(x) \otimes (r_1 \oplus r_2) = (v(x) \otimes r_1) \oplus (v(x) \otimes r_1)$, perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
& v(x) \otimes (r_1 \oplus r_2) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p} (v_t \otimes x^{\otimes t}) \right) \otimes (r_1 \oplus r_2) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p} (v_t \otimes x^{\otimes t}) \otimes (r_1 \oplus r_2) \right) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p} (v_t \otimes x^{\otimes t} \otimes r_1) \oplus (v_t \otimes x^{\otimes t} \otimes r_2) \right) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p} (v_t \otimes r_1 \otimes x^{\otimes t}) \oplus (v_t \otimes r_2 \otimes x^{\otimes t}) \right) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p} (v_t \otimes r_1 \otimes x^{\otimes t}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{t=0}^{p} (v_t \otimes r_2 \otimes x^{\otimes t}) \right) \\
&= \left[\left(\bigoplus_{t=0}^{p} (v_t \otimes x^{\otimes t}) \right) \otimes r_1 \right] \oplus \left[\left(\bigoplus_{t=0}^{p} (v_t \otimes x^{\otimes t}) \right) \otimes r_2 \right] \\
&= (v(x) \otimes r_1) \oplus (v(x) \otimes r_1)
\end{aligned}
$$

Dari hasil diatas diperoleh $v(x) \otimes (r_1 \oplus r_2) = (v(x) \otimes r_1) \oplus (v(x) \otimes r_1)$.

(iii) Akan ditunjukkan $v(x) \otimes (r_1 \otimes r_2) = (v(x) \otimes r_1) \otimes r_2$, perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
v(x) \otimes (r_1 \otimes r_2) &= \left(\bigoplus_{t=0}^{p} (v_t \otimes x^{\otimes t}) \right) \otimes (r_1 \otimes r_2) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p} (v_t \otimes x^{\otimes t}) \otimes (r_1 \otimes r_2) \right) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p} (v_t \otimes r_1 \otimes r_2) \otimes x^{\otimes t} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p}(v_t \otimes r_1) \otimes r_2 \otimes x^{\otimes t}\right) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p}(v_t \otimes r_1) \otimes x^{\otimes t} \otimes r_2\right) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p}(v_t \otimes r_1 \otimes x^{\otimes t})\right) \otimes r_2 \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p}(v_t \otimes x^{\otimes t}) \otimes r_1\right) \otimes r_2 \\
&= \left[\left(\bigoplus_{t=0}^{p}(v_t \otimes x^{\otimes t})\right) \otimes r_1\right] \otimes r_2 \\
&= (v(x) \otimes r_1) \otimes r_2
\end{aligned}
$$

Dari hasil diatas diperoleh $v(x) \otimes (r_1 \otimes r_2) = (v(x) \otimes r_1) \otimes r_2$.

(iv) Akan ditunjukkan $v(x) \otimes 0_r = v(x)$, perhatikan:

$$
\begin{aligned}
v(x) \otimes 0_r &= \left(\bigoplus_{t=0}^{p}(v_t \otimes x^{\otimes t})\right) \otimes 0 \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p}(v_t \otimes x^{\otimes t}) \otimes 0\right) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p}(v_t \otimes 0 \otimes x^{\otimes t})\right) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p}(v_t + 0 \otimes x^{\otimes t})\right) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p}(v_t \otimes x^{\otimes t})\right) \\
&= v(x)
\end{aligned}
$$

Dari hasil diatas diperoleh $v(x) \otimes 0_r = v(x)$.

(v) Akan ditunjukkan $v(x) \otimes \varepsilon_r = \varepsilon(x) = \varepsilon(x) \otimes v(x)$, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
v(x) \otimes \varepsilon_r &= \left(\bigoplus_{t=0}^{p} (v_t \otimes x^{\otimes t}) \right) \otimes (-\infty) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p} (v_t \otimes x^{\otimes t})(-\infty) \right) \\
&= \left(\bigoplus^{p} t = 0 (v_t \otimes (-\infty) \otimes x^{\otimes t}) \right) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p} (v_t + (-\infty) \otimes x^{\otimes t}) \right) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p} (-\infty \otimes x^{\otimes t}) \right) \\
&= \varepsilon(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon(x) \otimes v(x) &= (-\infty) \otimes \left(\bigoplus_{t=0}^{p} (v_t \otimes x^{\otimes t}) \right) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p} (-\infty) \otimes (v_t \otimes x^{\otimes t}) \right) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p} ((-\infty) \otimes v_t) \otimes x^{\otimes t} \right) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p} ((-\infty) + v_t) \otimes x^{\otimes t} \right) \\
&= \left(\bigoplus_{t=0}^{p} (-\infty \otimes x^{\otimes t}) \right) \\
&= \varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Dari hasil diatas diperoleh $v(x) \otimes \varepsilon_r = \varepsilon(x) = \varepsilon(x) \otimes v(x)$.

Berdasarkan bukti I dan II terlihat bahwa $\mathbb{R}_{max}[X]$ memenuhi aksioma-aksioma semimodul kanan atas semiring. Jadi pernyataan $\mathbb{R}_{max}[X]$ merupakan semimodul kanan atas semiring $\mathbb{R}_{max}$ terbukti. ■

Berikut ini diberikan contoh operasi elemen-elemen pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ semimodul kanan atas semiring $\mathbb{R}_{max}$. Pengoperasian ini menunjukkan jika diambil sembarang elemen pada $\mathbb{R}_{max}[X]$ dioperasikan dengan sembarang elemen pada $\mathbb{R}_{max}$ dari kanan maka hasil operasinya merupakan elemen dari $\mathbb{R}_{max}[X]$.

Contoh 3.2.24 *Diambil sembarang* $r(x) = r_0 \oplus (r_1 \otimes x) \otimes \cdots \oplus (r_m \otimes x^{\otimes m}) \in \mathbb{R}_{max}[X]$ *dan* $k \in \mathbb{R}_{max}$*, perhatikan bahwa:*

$$
\begin{aligned}
&r(x) \otimes k \\
=&(r_0 \oplus (r_1 \otimes x) \otimes \cdots \oplus (r_m \otimes x^{\otimes m})) \otimes k \\
=&(r_0 \otimes k) \oplus ((r_1 \otimes k) \otimes x) \otimes \cdots \oplus ((r_m \otimes k) \otimes x^{\otimes m}) \\
=&(r_0 + k) \oplus ((r_1 + k) \otimes x) \otimes \cdots \oplus ((r_m + k) \otimes x^{\otimes m}) \\
=&s_0 \oplus (s_1 \otimes x) \otimes \cdots \oplus (s_m \otimes x^{\otimes m}) \in \mathbb{R}_{max}[X]
\end{aligned}
$$

Diperoleh hasil operasi $\otimes$ *elemen* $\mathbb{R}_{max}[X]$ *atas elemen* $\mathbb{R}_{max}$ *dari kanan merupakan elemen* $\mathbb{R}_{max}[X]$.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan yang telah diuraikan, himpunan polinomial atas aljabar max-plus $(\mathbb{R}_{max}[X])$ yang diikuti dengan operasi maksimum $(\oplus)$ dan operasi plus/penjumlahan $(\otimes)$ dapat membentuk beberapa struktur aljabar, diantaranya yaitu $(\mathbb{R}_{max}[X], \oplus, \otimes)$ membentuk semiring komutatif idempoten, $\mathbb{R}_{max}[X]$ merupakan semimodul kiri atas semiring $\mathbb{R}_{max}$, dan $\mathbb{R}_{max}[X]$ merupakan semimodul kanan atas semiring $\mathbb{R}_{max}$.

4.2. Saran

Dalam penelitian ini penulis hanya membahas struktur aljabar yang terbentuk dari polinomial atas aljabar max-plus, yaitu $\mathbb{R}_{max}[X]$ merupakan semiring komutatif idempoten, serta $\mathbb{R}_{max}[X]$ merupakan semimodul kiri dan kanan atas $\mathbb{R}_{max}$. Untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan penelitian yang lebih lanjut mengenai struktur semiring serta semimodul pada $\mathbb{R}_{max}[X]$.

DAFTAR PUSTAKA

Andari, A. 2015. *Teori Grup*. Malang: UB Press.

Andari, A. 2016. *Semimodul atas Semiring*. Malang: UB Press.

Baccelli, F., dkk. 2001. *Synchronization and Linearity*. Addison-Wesley Publising Company, Inc. New York.

Dummit, D.S. dan Foote,R.M. 2004. *Abstract Algebra*. John Wiley & Sons, Inc. United States of America.

Fraleigh, J. B. 1994. *A First Course in Abstract Algebra*. Pearson Education Limited. United States of America.

Golan, J.S., 2003. *Semirings and Affine Equations over Them: Theory and Applications*. Springer Science+Business Media Dordrecht.

Gondran, M. dan Minoux, M. 2008. *Graph, Dioids, and Semirings*. Springer Science+Business Media, LLC. New York.

Heidergott, B., dkk. 2006. *Max Plus at Work*. Amsterdam: Princeton University.

Hidayani, N. 2012. *Bentuk Aljabar*. Jakarta Timur: PT Balai Pustaka (Persero).

Kandasamy, W.B.V. 2002. *Smarandache Semirings, Semifields, and Semivector Spaces*. Rehoboth: American Research Press.

Mas'oed, F. 2013. *Struktur Aljabar*. Akademia Permata.

Nugroho, H., Marta, E.R., & Ari Wardayani, A. 2013. *Semiring Polinomial atas Aljabar Max-Plus Interval*. FMIPA UNY Yogyakarta.

Rosemann, A., Lehner, F. & Peperko, A. 2018. *Polynomial Convulation in Max-Plus Algebra*. Arxiv: 1802.07373v2.

Rudhito, M.A., dkk. 2008. *Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval*. Jurnal Natur Indonesia. 13(2): 94-99.

Subiono. 2013. *Aljabar Maxplus dan Terapannya*. Institus Teknologi Sepuluh November. Surabaya.

Suroto. 2012. *Semiring Polinomial atas Aljabar Max-Plus*. JMP. 4(2): 289-297.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

1. Nama Lengkap : Shahroji Setiawan
2. Tempat, Tanggal Lahir : Blora, 09 Maret 2001
3. Alamat Rumah : Desa Sambeng, RT 04/RW02, Kec. Todanan, Kab. Blora
4. HP 082312573638
5. E-mail : shahrojisetiawan@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. SD N Sambeng (2007-2013)
2. SMP N 1 Todanan (2013-2016)
3. SMA N 1 Tunjungan (2016-2019)

Semarang, 16 Juni 2023

Shahroji Setiawan
NIM: 1908046035