FUNGSI PEMBANGKIT PADA POLINOMIAL CHEBYSHEV JENIS KEDUA

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat
Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains
dalam Ilmu Matematika

Oleh : **SAIFUL ROHMAN**
NIM : 1908046044

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG

2023

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	Saiful Rohman
NIM	:	1908046044
Jurusan	:	Matematika

Menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

FUNGSI PEMBANGKIT PADA POLINOMIAL CHEBSYSHEV JENIS KEDUA

Secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 18 Juli 2023

Penulis,

Saiful Rohman

NIM : 1908046044

KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang Telp.024-7601295 Fax.7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini:
Judul : FUNGSI PEMBANGKIT PADA POLINOMIAL CHEBYSHEV JENIS KEDUA
Penulis : Saiful Rohman
NIM : 1908046044
Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang *munaqasyah* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Pendidikan Matematika.

Semarang, 26 September 2023

DEWAN PENGUJI

Ketua/Penguji,	Sekretaris/Penguji,
Yulia Romadiastri, S.Si.,M.Sc.	**Minhayati Shaleh, S.Si.,M.Sc.**
NIP. 198107152005012008	NIP. 197604262006042001
Penguji Utama I	Penguji Utama II,
Any Muanalifah, M.Si	**Siti Maslihah, M.Si**
NIP. 198201132011012009	NIP. 197706112011012004
Pembimbing I	Pembimbing II
Nur Khasanah, M.Si.	**Yulia Romadiastri, S.Si.,M.Sc.**
NIP. 199111212019032017	NIP. 198107152005012008

KEMENTERIAN AGAMA FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI UIN WALISONGO SEMARANG REPUBLIK INDONESIA

NOTA DINAS

Semarang, 18 Juli 2023

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	**Fungsi Pembangkit Pada Polinomial Chebsyshev Jenis Kedua**
Nama	:	**Saiful Rohman**
NIM	:	1908046044
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,

Nur Khasanah, M.Si.
NIP : 199111212019032017

NOTA DINAS

Semarang, 18 Juli 2023

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	**Fungsi Pembangkit Pada Polinomial Chebsyshev Jenis Kedua**
Nama	:	**Saiful Rohman**
NIM	:	1908046044
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing II,

Yulia Romadiastri, M.Sc.
NIP : 198107152005012008

ABSTRAK

Polinomial Chebyshev adalah suatu polinomial orthogonal yang bersifat rekursif. Terdapat 4 jenis polinomial Chebyshev yaitu polinomial Chebyshev jenis pertama yang dinotasikan dengan T_n, kedua U_n, ketiga V_n dan yang keempat W_n. Salah satu penerapan polinomial Chebyshev jenis kedua dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan orde tinggi. Pada tugas akhir ini dibahas fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis kedua dengan tujuannya untuk mengetahui bentuk fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis kedua. Kemudian, fungsi pembangkit yang digunakan pada pembahasan tugas akhir ini yaitu fungsi pembangkit biasa dan fungsi pembangkit eksponensial. Selanjunya dibahas keterkaitan polinomial Chebyshev jenis pertama T_n dengan polinomial Chebyshev jenis kedua U_n. Terdapat bentuk dari keterkaitan polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua.

Kata kunci : Fungsi pembangkit biasa, Fungsi pembangkit eksponensial, polinomial Chebyshev jenis pertama.

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmanirrohim.

Alhamdulillah, puji dan syukur kita panjatkan kepada Allah SWT atas ridha-Nya penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini. Adapun judul skripsinya adalah “Fungsi Pembangkit Polinomial Chebyshev Jenis Kedua”. Shalawat dan salam kepada Rasulullah SAW. yang senantiasa menjadi sumber inspirasi dan teladan terbaik untuk umat manusia.

Skripsi ini diajukan untuk memenuhi syarat kelulusan mata kuliah Skripsi di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang. Tidak dapat disangkal bahwa butuh usaha yang keras dalam penyelesaian pengerjaan skripsi ini. Namun, karya ini tidak akan selesai tanpa orang-orang tercinta di sekeliling penulis yang mendukung dan membantu. Penulis menyadari banyak pihak yang memberikan dukungan dan bantuan selama menyelesaikan studi dan tugas akhir ini. Oleh karena itu, sudah sepantasnya penulis dengan penuh hormat mengucapkan terimakasih dan mendoakan semoga Allah SWT memberikan balasan terbaik kepada:

1. Dr. H. Ismail, M.Ag. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.

2. Ibu Emy Siswanah, M.Sc. selaku ketua program studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.

3. Nur Khasanah, M.Si. dan Yulia Romandiastri, S.Si.,M. Sc. selaku Dosen pembimbing yang telah memberikan

bimbingan dan berbagai pengalaman kepada penulis.

4. Segenap Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang yang telah mendidik dan memberikan ilmu selama kuliah dan seluruh staf yang selalu sabar melayani segala administrasi selama proses penelitian ini.

5. Ayah dan Ibu tercinta yang mau menjadi tempat curhat, tempat pulang dan selalu menyayangi, penulis mengucapkan banyak-banyak terima kasih.

6. Teruntuk teman-teman yang kuliah di UIN Walisongo terkhusus Dewi, Putri, dan Febriana terima kasih atas waktu yang diluangkan dan dukungannya.

7. Semua pihak yang telah membantu dan tidak dapat disebutkan satu persatu.

Semoga segala kebaikan dan pertolongan semuanya mendapat berkah dari Allah SWT dan akhirnya penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna, karena keterbatasan ilmu yang penulis miliki. Untuk itu penulis dengan kerendahan hati mengharapkan saran dan kritik yang sifatnya membangun dari semua pihak. Terima kasih.

Penulis,

Saiful Rohman

NIM : 1908046044

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Salah satu agama yang sangat empatik dalam menyuruh umatnya untuk menuntut ilmu adalah Islam. Al-Qur’an yang merupakan sumber dari segala ilmu seperti ilmu sains dan teknologi yang memiliki banyak sekali konsep-konsep yang digunakan dalam sains, ilmu pengetahuan dan teknologi. Al-Qur’an juga akan meninggikan derajat serta memberikan pujian dari orang-orang yang berilmu (Qutub, S, 2011). Hal ini terdapat dalam QS. Al-Mujaadilah ayat 11 (Al-Qur’an Kemenag Online), Allah SWT berfirman:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓا۟ إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا۟ فِى ٱلْمَجَٰلِسِ فَسَحُوا
يَفْسَحِ ٱللَّهُ لَكُمْ وَإِذَا قِيلَ ٱنشُزُوا۟ فَشزُوا يَرْفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ مِنكُمْ
وَذينَ أُوتُوا۟ ٱلْعِلْمَ دَرَجَٰت وَلَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ

"Wahai orang-orang yang beriman! Apabila dikatakan kepadamu, “Berilah kelapangan di dalam majelis-majelis,” maka lapangkanlah, niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan, “Berdirilah kamu,” maka berdirilah, niscaya Allah akan mengangkat (derajat) orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu beberapa derajat. Dan Allah Mahateliti apa yang kamu kerjakan."

Al-Qur'an merupakan firman Allah SWT yang menjadi sumber inspirasi bagi umat Islam di seluruh dunia yang sangat komperhensif. Sekarang dapat dilihat bahwa Islam sangatlah maju dalam ilmu pengetahuan dan Islam adalah agama yang *kaffah* (menyeluruh) yang bukan hanya membahas tentang ibadah saja.

Matematika merupakan salah satu ilmu dalam bidang sains yang memiliki berbagai cabang ilmu. Cabang ilmu matematika diantaranya ilmu komputasi, ilmu aljabar, ilmu terapan, ilmu statistika, ilmu keuangan, ilmu analisis. Salah satu cabang ilmu matematika yang berperan dalam perkembangan zaman modern saat ini yaitu cabang analisis. Cabang ilmu matemtika di bidang analisis sendiri terdiri dari teori integral, turunan, derat, ukuran, limit, dan analisis fungsional. Salah satu cabang ilmu matematika analisis yang banyak digunakan oleh bidang lainnya yaitu pembahasan mengenai polinomial.

Polinomial Chebyshev adalah suatu polinomial orthogonal yang bisa dipergunakan untuk menentukan aprokimasi fungsi (Etioko, 2013; Hoffman, 1988). Menurut Mason, (2002) polinomial Chebyshev memiliki pengaruh dalam bidang analisis numerik, diantaranya yaitu integrasi numerik, polinomial ortogonal dan metode spektral untuk persamaan diferensial parsial. Polinomial Chebyshev sendiri terdapat 4 jenis yaitu polinomial Chebyshev jenis pertama dinotasikan dengan $T_n(x)$, kedua dengan $U_n(x)$, yang ketiga dengan $V_n(x)$, dan yang keempat dengan $W_n(x)$ (Mason, 1993). Polinomial Chebyshev jenis kedua dapat direpresentasikan dalam kuantitas kompleks dengan pendefinisian oleh formula Moivre (Nastiti, 2012). Selanjutnya dalam kuantitas kompleks disebutkan polinomial Chebyshev jenis pertama dengan bagian real dan yang kedua dengan imajiner (Casserano, 2010).

Beberapa penelitian yang meneliti polinomial Chebyshev jenis kedua diantaranya ada yang menggunakan formula eksplisit, metode kolokasi, ekspansi binomial (Jacobs, 2011; Nastiti, 2012; Aziz, 2020). Formula eksplisist adalah formula yang digunakan untuk menghitung suatu urutan berdasarkan lokasinya. Selanjutnya metode Kolokasi adalah metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai batas dengan menggunakan fungsi bobot *(weighting functions)* yang menjadi dasar penyelesaiannya. Kemudian Metode ekspansi binomial yang sudah diteliti sebelumnya merupakan metode ekspansi binomial dalam bilangan kompleks yang diaplikasikan dalam deret Taylor, deret Maclaurin ,teori binomial, formula De Moivre's (Goenawan, 2011; Cho, 1998). Ekspansi binomial dalam bilangan kompleks polinomial Chebyshev jenis kedua merupakan syarat utama dalam fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis kedua.

Fungsi pembangkit merupakan suatu penemuan yang berguna dalam Matematika Diskrit. Fungsi pembangkit dapat mengubah permasalahan tentang barisan menjadi permasalahan yang berkaitan dengan fungsi. Dengan cara ini, fungsi pembangkit dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah penghitungan deret (Meyer, 2005). Fungsi pembangkit sendiri memiliki banyak kegunaan misalnya digunakan untuk menyelesaikan permasalahan rekurensi, membuktikan identitas kombinatorik, maupun untuk yang lainnya. Fungsi pembangkit ini diibaratkan seperti jembatan penghubung antara matematika diskrit dan kontinu yang utamanya terdapat pada teori variabel kompleks (Sunni, 2009).

Fungsi pembangkit adalah suatu bentuk ekspresi aljabar yang berasal dari suatu deret pangkat (Wilf, 2005). Konstruksi deret pangkat untuk diubah menjadi ekspansi aljabar membutuhkan proses yang cukup sulit. Tahap ini perlu memperhatikan konvergensi yang terdapat pada deret pangkat tersebut. Konvergensi deret pangkat yang berasal dari polinomial diperlukan proses yang tidak mudah. Oleh sebab itu, dalam penurunan dari fungsi pembangkit polinomial Chebyshev digunakan fungsi pembangkit dari kuantitas kompleks dengan cara mengambil bagian imajinernya (Utama, 2014).

Penelitian terkait fungsi pembangkit polinomial Chebyshev dilakukan oleh Casserano, (2006) dengan menggunakan teori klasik dari Polinomial Chebyshev yang dimulai dari definisi kuantitas kompleks, maka polinomial Chebyshev jenis pertama merupakan bagian real dan yang kedua menggunakan bagian imajiner dari kuantitas kompleks tersebut. Kemudian polinomial Chebyshev jenis pertama yang terkait dengan bagian real fungsi pembangkitnya menggunakan real sedangkan dari Polinomial Chebyshev jenis kedua yang berkaitan dengan bagian imajiner fungsi pembangkitnya menggunakan kuantitas kompleks. Kemudian dengan menurunkan fungsi pembangkit yang berhubungan dengan jenis polinomial Chebyshev sehingga memperoleh hubungan yang relevan dari produk Polinomial Chebyshev. Selain itu, dalam penelitian Casserano, (2006) juga mengevaluasi terkait produk polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua dengan menggunakan fungsi pembangkit biasa dan eksponensial.

Polinomial Chebyshev jenis pertama dan jenis kedua melalui rumus identitas trigonometri bisa digunakan untuk membantu memahami hubungan matematika dan sifat-sifat yang mendasarinya. Rumus identitas tersebut mengungkapkan bahwa polinomial Chebyshev jenis pertama yang dinyatakan kombinasi linier dari polinomial Chebyshev jenis kedua (Belbachir, 2008). Ini memberikan wawasan tentang struktur dan hubungan atau keterkaitan polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua.

Penelitian menegenai keterkaitan polinomial Chebyshev jenis pertama dan jenis kedua menurut Belbachir, (2008) dengan menggunakan T_n dan U_n menjadi polinomial Chebyshev ke-n dari jenis pertama dan kedua, maka terdapat sifat-sifat polinomial Chebyshev jenis pertama dan jenis kedua. Selain itu, terdapat keterkaitan polinomial Chebyshev jenis pertama dan jenis kedua.

Dalam tugas akhir ini akan dicari fungsi pembangkit pada polinomial Chebyshev jenis kedua. Sehingga diketahui bentuk fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis kedua serta dipelajari keterkitan dari polinomial Chebyshev jenis pertama dengan kedua. Sehingga dapat diketahui keterkaitan dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam tugas akhir ini dapat dituliskan sebagai berikut

1. Bagaimana fungsi pembangkit pada polinomial Chebyshev jenis kedua?
2. Bagaimana keterkaitan polinomial Chebyshev jenis pertama dan jenis kedua?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah sebelumya, tujuan dari tugas akhir ini yaitu

1. Mengetahui bentuk fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis kedua.
2. Mengetahui keterkaitan polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua.

1.3.1 Batasan Masalah

Batasan dari permasalahan penelitian ini yakni dilakukan penelitian dari fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis kedua dengan fungsi pembangkit biasa dan eksponensial.

1.3.2 Manfaat Penelitian

Penelitian ini memiki manfaat yakni;

1. Manfaat Teoritis

   Dengan adanya penelitian ini diharapkan bisa menambah wawasan dan menambah ilmu dalam bidang matematika analisis tentang polinomial Chebyshev jenis kedua. Serta diharapkan bisa menjadi penghubung untuk berkembangnya ilmu pengetahuan terkhusus dalam bidang matematika.

2. Manfaat praktis

   (a) Penulis

   Menambah ilmu pengetahuan tentang polinomial Chebyshev jenis kedua.

   (b) Lembaga

   Meningkatnya reputasi dari lembaga khususnya pada perkembangan ilmu matematika sebagai tambahan sumber atau rujukan untuk penelitian yang mendalam dan bisa juga digunakan untuk bahan ajar terkhusus dalam bidang matematika analisis.

   (c) Pembaca

   Penelitian ini nantinya diharapkan bisa menambah pengetahuan mengenai polinomial Chebyshev jenis kedua, dan menambah sumber refrensi atau rujukan bagi pembaca, serta memberikan informasi yang sangat bermanfaat bagi pembaca.

1.3.3 Metode penelitian

Metode yang diguanakan dalam penelitian ini adalah studi literatur yakni dengan menelusuri sumber-sumber dari jurnal dan buku yang berkaitan dengan topik yang dibahas. Langkah-langkah yang dilakukan peneliti dalam menyusun sekripsi ini adalah;

1. Mencari jurnal yang sesuai dengan bidang matematika analisis.

2. Mengumpulkan semua pencarian dengan satu topik yang kemudian menentukan rumusan masalah yang akan nantinya akan dibahas oleh peneliti, setelah itu barulah dijadikan judul dari sekripsi.

3. Memperoleh tujuan dan manfaat pembahasan, kemudian mengumpulkan semua jurnal yang sesuai dengan judul yakni fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis kedua selanjutnya sebagai tambahan yakni keterkaitan polinomial Chebyshev jenis pertama dengan polinomial Chebyshev jenis kedua.

4. Memperoleh kajian pustaka yang memiliki kaitan dengan fungsi pembangkit, polinomial Chebyshev jenis pertama, polinomial Chebyshev jenis kedua.

5. Menelaah definisi dari fungsi pembangkit, polinomial Chebyshev jenis pertama, polinomial Chebyshev jenis kedua, formula Euler, formula Moivre selanjutnya menelaah contoh dari semua definisi tersebut.

6. Menelaah dari pembuktian teorema dari fungsi pembangkit biasa dan eksponen dari polinomial Chebyshev jenis kedua serta keterkaitan polinomial Chebyshev jenis pertama dengan yang kedua sehingga dapat diperoleh hasil dan kemudian menyimpulkannya.

BAB II

Kajian Pustaka

2.1 Teori

Pada bagian ini diberikan dasar teori yang digunakan dalam pembahasan fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis kedua serta keterkaitan polinomial Chebyshev jenis pertama dengan yang kedua.

2.1.1 Fungsi Pembangkit

Fungsi pembangkit merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah perhitungan barisan dan deret. Fungsi pembangkit sendiri memiliki beberapa bentuk akan tetapi dalam pembahasan tentang fungsi pembangkit biasa dan eksponensial. Maka pada sub bab ini akan disajikan definisi fungsi pembangkit biasa dan eksponensial.

Definisi 2.1.1 *Fungsi pembangkit biasa (Cohen, 1978)*
Fungsi pembangkit $G(\xi)$ dari deret $b_n(m)$ didefinisikan sebagai

$$G(\xi) = b_0(m) + b_1(m)\xi + b_2(m)\xi^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(m)\xi^n \quad (2.1)$$

dimana deret $b_n(m)$ merupakan koefisien dari fungsi pembangkit $G(\xi)$ dan ξ sebagai bilangan real.

Contoh 2.1.1 *Diberikan deret $G(\xi) = b_0(m) + b_1(m)\xi + b_2(m)\xi^2 + b_3(m)\xi^3 + b_4(m)\xi^4 + b_5(m)\xi^5$. Maka fungsi pembangkit dari deret tersebut dapat dituliskan dengan*

$$\sum_{n=0}^{5} b_n(m)\xi^n.$$

Setelah diberikan definisi fungsi pembangkit biasa, selanjutnya dibahas mengenai fungsi pembangkit yang lain sebagai dasar dalam pembahasan fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis kedua. Berikut ini dituliskan mengenai fungsi pembangkit eksponensial beserta contohnya.

Definisi 2.1.2 *Fungsi pembangkit eksponensial (Sunni, 2009)*
Fungsi pembangkit $F(\xi)$ dari deret $b_n(m)$ didefinisikan sebagai

$$F(\xi) = b_0(m) + b_1(m)\xi + b_2(m)\frac{\xi^2}{2!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(m)\frac{\xi^n}{n!} \quad (2.2)$$

Dimana deret $b_n(m)$ merupakan koefisien dari fungsi pembangkit $F(\xi)$ dan ξ sebagai bilangan real.

Contoh 2.1.2 *Diberikan deret* $F(\xi) = b_0(m) + b_1(m)\xi + b_2(m)\frac{\xi^2}{2!} + b_3(m)\frac{\xi^3}{3!} + b_4(m)\frac{\xi^4}{4!} + b_5(m)\frac{\xi^5}{5!}$. *Maka fungsi pembangkit dari deret tersebut dapat dituliskan dengan*

$$\sum_{n=0}^{5} b_n(m)\frac{\xi^n}{n!}.$$

Kedua fungsi pembangkit yaitu fungsi pembangkit biasa dan fungsi pembangkit eksponensial yang telah didefinisikan sebelumnya, merupakan fungsi pembangkit yang digunakan pada pembahasan selanjutnya pada tugas akhir ini.

2.1.2 Formula Moivre

Formula Moivre merupakan suatu rumus untuk menghitung hasil pangkat dari bilangan kompleks dalam bentuk trigonometri. Secara lebih terperinci definisi formula Moivre dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.3 *Formula Moivre (Cho, 1999)*
Formula Moivre secara umum dapat direpresentasikan dengan

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{2.3}$$

dimana n merupakan bilangan asli dan i merupakan imajiner $(i^2 = -1)$.

Contoh 2.1.3 *Misalkan* $m = (\cos 0^o + i\sin 90^o)^5$ *maka formula Moivre dari persamaan tersebut adalah*

$$\begin{aligned} m &= (\cos 0^o + i\sin 90^o)^5 \\ &= (5\cos 0^o + i5\sin 90^o) \\ &= (5.1 + i5.1) \\ &= (5 + i5). \end{aligned}$$

Selanjutnya dari definisi formula Moivre, maka dapat dituliskan teorema dengan konstruksi persamaannya sebagai berikut.

Teorema 2.1.1 *(Cho, 1999)*
Diberikan $q = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \in S^3$*, dimana* θ *adalah bilangan real dan* $\omega \in S^2$*, maka*

$$q^n = e^{in\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{2.4}$$

untuk semua n *adalah bilangan bulat, dimana* S^3 *adalah semua himpunan satuan (bagian) kuarternion, sedangkan* S^2

merupakan himpunan satuan (bagian) kuarternion murni yang dinotasikan dengan $S^3 = q : |q| = 1$ *dan* $S^2 = w : |w| = 1$.

Bukti

Dengan menggunakan bilangan bulat nonnegatif n, maka diperoleh

$$\begin{aligned} q^{n+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} \\ &= (\cos n\theta + i\sin n\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Rumus tersebut berlaku untuk semua bilangan bulat n, karena

$$\begin{aligned} q^{-1} &= \cos\theta - i\sin\theta \text{ dan} \\ q^{-n} &= \cos n\theta - i\sin n\theta. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Sehingga benar untuk q^{-1},q^{-n}, dan q^{n+1}. Oleh sebab itu terbukti bahwa

$$q^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.\blacksquare$$

Setelah diberikan deifinisi formula Moivre dan teorema formula Moivre, selanjutnya akan dibahas mengenai formula Euler. Rumus Moivre dan Euler adalah dua rumus matematika yang sangat erat hubungannya dengan trigonometri dan bilangan kompleks. Kedua rumus ini digunakan untuk menghubungkan bilangan kompleks dengan fungsi trigonometri eksponensial. Berikut ini dituliskan mengenai definisi formula Euler dan contohnya.

2.1.3 Formula Euler

Formula Euler merupakan rumus yang menghubungkan antara fungsi trigonometri dan eksponensial dalam analisis kompleks. Secara lebih terperinci definisi formula Euler dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.4 *Formula Euler (Woit, 2019)*
Untuk setiap bilangan real θ maka rumus Euler e dapat dinyatakan sebagai

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{2.7}$$

dimana e merupakan basis logaritma natural, i merupakan satuan dari imajiner serta $\sin$ dan $\cos$ merupakan fungsi trigonometri.
Kemudian untuk menjadi teori dasar agar bisa didapatkan fungsi pembangkit eksponensial polinomial Chebyshev jenis kedua yang dibahas pada Bab 3, maka dapat diformulasikan

$$e^{in\theta} = (\cos n\theta + i\sin n\theta). \tag{2.8}$$

Contoh 2.1.4 *Misalkan $e^{i\frac{\pi}{4}}$ maka formula Euler dari persamaan tersebut adalah*

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{4}} &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i \end{aligned}$$

dengan $\pi = 180^0$ jadi hasil dari $e^{i\frac{\pi}{4}}$ adalah $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$.
Formula Euler yang telah didefinisikan sebelumnya digunakan pada pembahasan tugas akhir ini. Sebagai fungsi pembangkit

polinomial Chebyshev jenis kedua.

Dalam pembahasan mengenai fungsi pembangkit pada polinomial Chebyshev jenis kedua erat kaitannya dengan formula $\arccos$. Berikut ini diberikan definisi dan contoh dari formula $\arccos$ dalam konstruksi fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis kedua.

2.1.4 Formula $\arccos(x)$

Definisi 2.1.5 *Untuk setiap bilangan real m maka $\arccos$ dari m didefinisikan sebagai $\cos^{-1}$ dari m untuk $-1 \leqslant m \leqslant 1$*

$$\cos(\arccos m) = m \tag{2.9}$$

Sifat dari formula $(\arccos(x))$ akan dibuktikan dengan $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$. Dengan mendefinisikan $\theta = \arccos(x)$ dan memperhatikan $\cos\theta = x$ kemudian diketahui $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta &= 1 - \cos^2\theta \\
\sin\theta &= \sqrt{1 - cos^2\theta} \\
\sin\theta &= \sqrt{1-x^2}.
\end{aligned}$$

Dari hasil yang diperoleh tersebut terbukti bahwa $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$. Formula $\arccos$ yang telah didefinisikan sebelumnya, merupakan sifat formula $\arccos$ yang selanjutnya digunakan pada tugas akhir ini. Khususnya dalam pembuktian fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis kedua.

2.1.5 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan fungsi dari suku-suku dari jumlahan deret tak terhingga dari penurunan fungsi. Secara lebih terperinci definisi deret Taylor dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.6 *Deret Taylor(Parmikanti, 2019)*
Untuk setiap fungsi $f(m)$ yang diferensiabel pada titik b maka definisi deret Taylor dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} f(m) &= f(b) + f'(b)(m-b) + \frac{f"(b)}{2!}(m-b)^2 + \frac{f'''(b)}{3!}(m-b)^3 + ... \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(m-a)^n \end{aligned} \tag{2.10}$$

dengan $n!$ merupakan faktorial n, sedangkan $f^{(n)}(b)$ merupakan turunan ke-n dari f dititik b.

Contoh 2.1.5 *Misalkan $f(m) = m^4 + m^3 + m^2$ jika $b = 2$ maka deret Taylor dari persamaan tersebut adalah*

$$\begin{aligned} f(m) &= m^4 + m^3 + m^2 \rightarrow f(2) = 2^4 + 2^3 + 2^2 = 28 \\ f'(m) &= 4m^3 + 3m^2 + 2x \rightarrow f'(2) = 4(2^3) + 3(2^2) + 2.(2) = 48 \\ f''(m) &= 12m^2 + 6m \rightarrow f''(2) = 12(2^2) + 6(2) + 2 = 62 \\ f'''(m) &= 24m + 6 \rightarrow f'''(2) = 24(2) + 6 = 54 \\ f^{(4)}(m) &= 24 \rightarrow f^{(4)}(2) = 24 \\ f^{(5)}(m) &= 0 \rightarrow f^{(5)}(2) = 0. \end{aligned}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $f^{(n)}(m) = 0$ untuk semua $n \geqslant 5$. Kemudian nilai deret Taylor nya berdasarkan definisi dapat dinotasikan dengan

$$
\begin{aligned}
f(m) &= f(b) + f'(b)(m-b) + \frac{f"(b)}{2!}(m-b)^2 + \frac{f'''(b)}{3!}(m-b)^3 + ... \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(m-b)^n
\end{aligned}
$$

Berdasarkan contoh, untuk $b = 2$ maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
f(m) &= f(2) + f'(2)(m-2) + \frac{f''(2)}{2!}(m-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(m-2)^3 \\
&+ \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(m-2)^4 + 0 \\
&= 28 + 48(m-2) + \frac{62}{2!}(m-2)^2 + \frac{54}{3!}(m-2)^3 + \frac{24}{4!}(m-2)^4 \\
&+ 0 + 0 + ...
\end{aligned}
$$

Jadi deret Taylor dari $f(m) = m^4 + m^3 + m^2$ jika $b = 2$ adalah $28+48(m-2)+\frac{62}{2!}(m-2)^2+\frac{54}{3!}(m-2)^3+\frac{24}{4!}(m-2)^4+0+0....$ Setelah diberikan definisi dan contoh deret Taylor, selanjutnya dibahas deret khusus dari deret Taylor yaitu deret Maclaurin. Berikut ini dituliskan mengenai definisi deret Maclaurin dan contohnya.

2.1.6 Deret Maclaurin

Deret Maclaurin merupakan rumus khusus dari deret Taylor yang dinotasikan dengan $f(0)$.

Definisi 2.1.7 *Deret Maclaurin (Julaeha, 2017)*
Suatu fungsi yang berada di titik 0 *dari deret Taylor merupakan deret Maclaurin yang dinotasikan dengan*

$$
f(m) = f(0)+f'(0)(m)+\frac{f"(0)}{2!}m^2+\frac{f'''(0)}{3!}m^3+\frac{f''''(0)}{4!}m^4+.... \tag{2.11}
$$

Contoh 2.1.6 *Contoh deret Maclaurin*

1. *Dari Contoh* 2.1.5 *untuk* $m = 0$ *sebagai syarat dari deret Maclaurin maka dapat dituliskan dengan*

$$
\begin{aligned}
f(m) &= f(0) + f'(0)(m-0) + \frac{f''(0)}{2!}(m-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(m-0)^3 \\
&\quad + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(m-0)^4 + 0 + \ldots \\
&= f(0) + f'(0)m + \frac{f''(0)}{2!}m^2 + \frac{f'''(0)}{3!}m^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}m^4 + 0 + \ldots
\end{aligned}
$$

Dari Contoh 2.1.5 *untuk* $m = 0$ *sebagai syarat dari deret Maclaurin maka dapat dituliskan dengan*

$$
\begin{aligned}
f(m) &= f(0) + f'(0)(m-0) + \frac{f''(0)}{2!}(m-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(m-0)^3 \\
&\quad + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(m-0)^4 + 0 + \ldots \\
&= f(0) + f'(0)m + \frac{f''(0)}{2!}m^2 + \frac{f'''(0)}{3!}m^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}m^4 + 0 + \ldots
\end{aligned}
$$

2. *Untuk* $\sin x$ *sebagai syarat dari deret Maclaurin maka dapat dituliskan*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x \rightarrow f(0) = 0 \\
f'(x) &= \cos x \rightarrow f'(0) = 1 \\
f''(x) &= -\sin x \rightarrow f''(0) = 0 \\
f'''(x) &= -\cos x \rightarrow f'''(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) &= \sin x \rightarrow f^{(4)}(0) = 0
\end{aligned}
$$

Untuk $\sin x$ *maka diperoleh*

$$\sin x = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + 0 + \ldots.$$

Deret Maclaurin merupakan kasus khusus dari deret Taylor dengan fungsi yang diekspansi di sekitar $b = 0$. Deret Maclaurin yang telah didefinikan sebelumnya digunakan pada pembahasan tugas akhir ini. Sebagai fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis kedua.
Dalam pembahasan mengenai fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis kedua erat kaitannya dengan bilangan kompleks yang digunakan untuk menentukan kuantitas kompleks. Berikut ini diberikan definisi dan contoh dari bilangan kompleks.

2.1.7 Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks merupakan struktur dari bilangan real dan imajiner. Secara lebih terperinci definisi bilangan kompleks dapat direpresentasikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.8 *Bilangan kompleks (Kardi, 2016)*
Bilangan yang memiliki bentuk $(x + iy)$ *adalah suatu bilangan kompleks yang mana* x *dan* y *merupakan bilangan real* (Re) *dan* i *merupakan imajiner* (Im) *yang memiliki sifat* $i^2 = -1$.

Contoh 2.1.7
Diberikan bilangan kompleks $z = 3 + 0,9i$ *maka untuk bilangan real dapat dinotasikan* $Re(z) = 3$ *dan untuk bagian imajiner dapat dinotasikan* $lm(z) = 0,9$.

Definisi dan contoh bilangan kompleks pada bab ini digunakan sebagai dasar dalam menentukan fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis kedua dengan menggunakan fungsi pembangkit biasa dan eksponensial. Sebelum dibahas fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis kedua maka dikenalkan definisi polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua.

2.1.8 Polinomial Chebyshev

Berikut ini merupakan definisi dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua.

Definisi 2.1.9 *Polinomial Chebyshev Jenis Pertama (Mason, 2003)*
Misalkan polinomial Chebyshev jenis pertama dinotasikan dengan $T_n(x)$. Untuk nilai x adalah suatu variabel real dimana $x \in [-1, 1]$, polinomial Chebyshev jenis pertama memiliki derajat n. Maka polinomial Chebyshev jenis pertama dapat didefinisikan sebagai

$$T_n(x) = cos(narcos(x)), \textit{dimana } x = \cos\theta. \tag{2.12}$$

Contoh 2.1.8 *Misalkan T_0 sampai T_3 dengan memasukkan $x = \cos\theta$ maka polinomial Chebyshev jenis pertama dapat dinotasikan sebagai berikut*

$$\begin{aligned}
\cos 0\theta &= 1 \\
\cos 1\theta &= \cos\theta \\
\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1 \\
\cos 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,
\end{aligned}$$

kemudian dengan mensubstitusikan $\cos\theta = x$ *maka*

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x. \end{aligned}$$

Setelah dibahas mengenai definisi polinomial Chebyshev jenis pertama kemudian diberikan definisi yang menjadi topik permasalahan pada tugas akhir ini yaitu definisi polinomial Chebyshev jenis kedua.

Definisi 2.1.10 *Polinomial Chebyshev Jenis Kedua (Mason, 2003)*
Misalkan polinomial Chebyshev jenis kedua dinotasikan dengan $U_n(x)$*. Untuk nilai* x *adalah suatu variabel real dimana* $x \in [-1, 1]$*, polinomial Chebyshev jenis pertama memiliki berderajat* n*. Maka polinomial Chebyshev jenis pertama dapat didefinisikan sebagai berikut*

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}, \textit{dimana } x = \cos\theta. \tag{2.13}$$

Contoh 2.1.9 *Misalkan* U_0 *sampai* U_3 *maka polinomial Chebyshev jenis kedua dapat dinotasikan dengan*

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1 \\ U_1(x) &= 2x \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1 \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan pendefisian dari formula Moivre dari Definisi 2.2.3, maka polinomial Chebyshev jenis pertama dapat direpresentasikan dalam kuantitas kompleks yakni

$$\begin{aligned} T_n(x) &= exp(in \arccos(x)) \\ &= \cos(n \arccos(x)) + i \sin(n \arccos(x)) \end{aligned} \tag{2.14}$$

dimana

$$\begin{aligned} Re(T_n(x)) &= \cos(n \arccos(x)) \\ Im(T_n(x)) &= \sin(n \arccos(x)). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Berdasarkan persamaan (2.15), dalam kuantitas kompleks $T_n(x)$ polinomial Chebyshev jenis pertama dengan yang kedua saling berelasi dimana yang pertama dibagian real $T_n(x)$dan yang kedua bagian imajiner $T_n(x)$. Polinomial Chebyshev jenis kedua dengan derajat $n-1$ dapat dinyatakan sebagai berikut;

$$U_{n-1}(x) = \frac{\sin(n \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2.16}$$

Dapat disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned} T_n(x) &= Re(T_n(x)) \\ U_{n-1} &= \frac{\sin(n \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Kuantitas kompleks polinomial Chebyshev jenis pertama dengan bagian real $T_n(x)$ dan yang kedua bagian imajiner $T_n(x)$ dengan polinomial Chebyshev jenis kedua berderajat $n-1$ yang dinotasikan sebelumnya, merupakan kuantitas kompleks yang digunakan pada tugas akhir ini.

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini difokuskan pada pembuktian mengenai fungsi pembangkit pada polinomial Chebyshev jenis kedua dengan fungsi pembangkit biasa dan eksponensial. Kemudian dibahas juga mengenai keterkaitan polinomial Chebyshev jenis pertama dengan yang kedua.

3.1 Penurunan Fungsi Pembangkit Polinomial Chebyshev jenis Kedua

Fungsi pembangkit pada polinomial Chebyshev jenis kedua menggunakan fungsi pembangkit biasa dan eksponensial kemudian dibahas pembuktian mengenai fungsi pembangkit biasa dan eksponensial yang berlaku pada polinomial Chebyshev jenis kedua. Pembahasan pertama difokuskan pada pembuktian fungsi pembangkit biasa polinomial Chebyshev jenis kedua dengan lemma sebagai berikut.

Lemma 3.1.1 *(Casserano, 2010) Suatu bilangan real x dimana* $-1 \leqslant x \leqslant 1$ *dan* $\psi = \arccos(x)$ *berlaku persamaan berikut*

$$\frac{1}{1-\xi e^{i\psi}} = \frac{1-\xi+i\xi\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi x+\xi^2}. \tag{3.1}$$

Bukti

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-\xi e^{i\psi}} &= \frac{1}{1-\xi(\cos\psi + i\sin\psi)} \\
&= \frac{1}{(1-\xi\cos\psi) - i\xi\sin\psi}\,\frac{(1-\xi\cos\psi) + i\xi\sin\psi}{(1-\xi\cos\psi) + i\xi\sin\psi} \\
&= \frac{(1-\xi\cos\psi) + i\xi\sin\psi}{(1-\xi\cos\psi)^2 - i^2\xi^2\sin^2\psi} \\
&= \frac{(1-\xi\cos\psi) + i\xi\sin\psi}{1-2\xi\cos\psi + \xi^2\cos^2\psi + \xi^2\sin^2\psi} \\
&= \frac{(1-\xi\cos\psi) + i\xi\sin\psi}{1-2\xi\cos\psi + \xi^2(\cos^2\psi + \sin^2\psi)} \\
&= \frac{(1-\xi\cos\psi) + i\xi\sin\psi}{1-2\xi\cos\psi + \xi^2} \\
&= \frac{(1-\xi\cos(\arccos(x))) + i\xi\sin(\arccos(x))}{1-2\xi\cos(\arccos(x)) + \xi^2} \\
&= \frac{1-\xi x + i\xi\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi x + \xi^2}.
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa

$$
\frac{1}{1-\xi e^{i\psi}} = \frac{1-\xi x + i\xi\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi x + \xi^2}.\blacksquare \tag{3.2}
$$

Berdasarkan Lemma 3.1.1 dapat ditunjukan fungsi pembangkit biasa dari kuantitas kompleks $T_n(x)$ yang digunakan untuk membahas teorema selanjutnya.

Teorema 3.1.1 *(Casserano, 2010) Suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga $|\xi| < 1$, maka fungsi pembangkit dari kuantitas kompleks $T_n(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut*

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n T_n(x) = \frac{1-\xi x + i\xi\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi x + \xi^2}, -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{3.3}
$$

Bukti

Dari definisi di persamaan (2.14), fungsi pembangkit dari $T_n(x)$ dapat diturunkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n T_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(\xi^n e^{in\arccos(x)}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(\xi e^{i\arccos(x)})^n \\ &= \xi e^{i\arccos(x)} + \xi^2 e^{i2\arccos(x)} + \dots \\ &= \frac{1}{1-\xi e^{i\arccos(x)}}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Agar deret persamaan (3.4) konvergen, maka rasio dari deret geometri tak hingga adalah $|\xi e^{i\arccos(x)}| < 1$. Berdasarkan Lemma $3.1.1$ dapat disimpulkan bahwa

$$\frac{1}{1-\xi e^{i\arccos(x)}} = \frac{1}{1-\xi e^{i\psi}} = \frac{1-\xi x + i\xi\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi x+\xi^2}. \tag{3.5}$$

Jadi, terbukti bahwa fumgsi pembangkit dari $T_n(x)$ adalah

$$\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n T_n(x) = \frac{1-\xi x + i\xi\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi x+\xi^2}.\blacksquare \tag{3.6}$$

Untuk menunjukkan penurunan fungsi pembangkit biasa dari polinomial Chebyshev jenis kedua maka dibutuhkan Teorema $3.1.2$ berikut ini yang merupakan akibat dari Teorema $3.1.1$.

Teorema 3.1.2 *(Casserano, 2010) Suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga $|\xi| < 1$, sehingga fungsi pembangkit dari* *polinomial Chebyshev* $U_{n-1}(x)$ *dapat dinyatakan dengan*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n U_{n-1}(x) = \frac{\xi}{1 - 2\xi x + \xi^2}, -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{3.7}$$

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa fungsi pembangkit biasa dari polinomial Chebyshev jenis kedua $U_{n-1}(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n U_{n-1}(x) = \frac{\xi}{1 - 2\xi x + \xi^2}.$$

Berdasarkan persamaan (2.17) polinomial Chebyshev $(U_{n-1})(x)$ dan Lemma 3.1.1, maka fungsi pembangkitnya dapat diturunkan dengan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n U_{n-1}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \frac{Im(T_n(x))}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n Im(T_n(x) \right) \\
&= \frac{1}{1-x^2} \left(Im \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n T_n(x) \right) \\
&= \frac{1}{1-x^2} Im \left(\frac{1 - \xi x + i\xi\sqrt{1-x^2}}{1 - 2\xi x + \xi^2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\xi\sqrt{1-x^2}}{1 - 2\xi x + \xi^2} \\
&= \frac{\xi}{1 - 2\xi x + \xi^2}.
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n U_{n-1}(x) = \frac{\xi}{1 - 2\xi x + \xi^2}. \blacksquare \tag{3.8}$$

Selanjutnya kaitan antara polinomial Chebyshev $U_{n-1}(x)$ terhadap kuantitas kompleks $T_n(x)$ yang terdapat pada persamaan (2.17) dapat digunakan dalam penurunan fungsi pembangkit eksponensial polinomial Chebyshev U_{n-1}. Oleh karena itu, dibutuhkan lemma berikut.

Lemma 3.1.2 *(Casserano, 2010) Untuk suatu bilangan real x dimana $-1 \leqslant x \leqslant 1$ dengan $\psi = \arccos(x)$, berlaku;*

$$exp(\xi e^{i\psi}) = e^{\xi x}(\cos(\xi\sqrt{1 - x^2} + i\sin(\xi\sqrt{1 - x^2})). \tag{3.9}$$

Bukti

$$\begin{aligned} exp(\xi e^{i\psi}) &= e^{\xi(\cos\psi + i\sin\psi)} = e^{\xi\cos\psi} e^{i\xi\sin\psi} \\ &= e^{\xi\cos\psi}(\cos(\xi\sin\psi) + i\sin(\xi\sin\psi)) \\ &= e^{\xi\cos(\arccos(x))}(\cos(\xi\sin(\arccos(x))) + i\sin(\xi\sin(\arccos(x))) \\ &= e^{\xi x}(\cos(\xi\sqrt{1 - x^2}) + i\sin(\sqrt{1 - x^2})). \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa

$$exp(\xi e^{i\psi}) = e^{\xi x}(\cos(\xi\sqrt{1 - x^2}) + i\sin(\sqrt{1 - x^2})). \blacksquare \tag{3.10}$$

Berdasarkan Lemma 3.1.2 dapat ditunjukkan penurunan fungsi pembangkit eksponensial dari $T_n(x)$ yang dinyatakan pada Teorema 3.1.3 berikut ini.

Teorema 3.1.3 *(Casserano, 2010) Untuk suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga $|\xi| < 1$, maka fungsi pembangkit* *eksponensial dari $T_n(x)$ dapat dinyatakan dengan*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi}{n!}T_n(x) &= exp(\xi e^{i\arccos(x)}) \\ &= e^{\xi x}(\cos(\xi\sqrt{1-x^2}+i\sin(\xi\sqrt{1-x^2})), -1\leqslant x\leqslant .\end{aligned} \tag{3.11}$$

Bukti

Berdasarkan definisi $T_n(x)$ pada persamaan sebelumnya, fungsi eksponensial $T_n(x)$ dapat diturunkan menjadi sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi}{n!}T_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(\xi e^{i\arccos(x)}) \\ &= \xi e^{i\arccos(x)}+\frac{1}{2!}(\xi e^{i\arccos(x)})^2+.....\end{aligned} \tag{3.12}$$

Misal $\xi e^{i\arccos(x)} = y$, maka persamaan (3.12) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\xi e^{i\arccos(x)}+\frac{1}{2!}(\xi e^{i\arccos(x)})^2+.... &= y+\frac{1}{2!}y^2+.... \\ &= e^0y+\frac{e^0}{2!}y^2+....\end{aligned} \tag{3.13}$$

Karena ruas kanan dari persamaan (3.13) ekspansi fungsi e^y dalam deret MacLaurin maka diperoleh

$$\xi e^{i\arccos(x)}+\frac{1}{2!}(\xi e^{i\arccos(x)})^2+.... = exp(\xi e^{i\arccos(x)}). \tag{3.14}$$

Berdasarkan persamaan (3.12), (3.13), (3.14) dan Lemma 3.1.2

dapat disimpulkan bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} T_n(x) = exp(\xi e^{i \arccos(x)})$$
$$= e^{\xi x}(\cos(\xi\sqrt{1-x^2}) + i\sin(\xi\sqrt{1-x^2})).$$

Dengan demikian terbukti bahwa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} T_n(x) = exp(\xi e^{i \arccos(x)})$$
$$= e^{\xi x}(\cos(\xi\sqrt{1-x^2}) + i\sin(\xi\sqrt{1-x^2})).\blacksquare \tag{3.15}$$

Berdasarkan Lemma 3.1.2 dan Teorema 3.1.3 dapat digunakan untuk membuktikan penurunan fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev $U_{n-1}(x)$. Teorema 3.1.4 adalah akibat dari Teorema 3.1.3.

Teorema 3.1.4 *(Casserano, 2010) Untuk suatu bilangan real ξ sedemikian sehigga $|\xi| < 1$, maka fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev $U_{n-1}(x)$ dapat dinyatakan sebagai*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} U_{n-1}(x) = e^{\xi x}\frac{\sin(\xi\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}, -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{3.16}$$

Bukti

Berdasarkan Teorema 3.1.3 didapatkan penurunan fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev $U_{n-1}(x)$ sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} U_{n-1}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \frac{Im(T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(Im \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} T_n(x) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} Im(e^{\xi x}(\cos(\xi\sqrt{1-x^2}) + i\sin(\xi\sqrt{1-x^2}))) \\
&= \frac{e^{\xi x}}{1-x^2} \sin(\xi\sqrt{1-x^2}) \\
&= e^{\xi x} \left(\frac{\sin(\xi\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}} \right).
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} U_{n-1}(x) = e^{\xi x} \left(\frac{\sin(\xi\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}} \right). \blacksquare \qquad (3.17)
$$

Dengan menggunakan Lemma 3.1.2 maka Teorema 3.1.4 dapat terbukti. Sehingga, terdapat fungsi pembangkit eksponensial polinomial Chebyshev jenis kedua.

3.2 Keterkaitan Polinomial Chebyshev jenis Pertama dan Kedua

Polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua tentunya memiliki keterkaitan satu sama lain. Maka dari itu pada sub bab ini dibahas bukti keterkaitan polinomial Chebyshev jenis pertama dengan yang kedua. Sebelum itu maka dibahas lemma berikut.

Lemma 3.2.1 *(Belbachir, 2008) Misalkan x merupakan suatu* *bilangan real dengan* $W_n = 0$ *maka;*

$$T_n = U_n - XU_{n-1}. \tag{3.1}$$

Bukti

$$W_n = T_n - U_n + XU_{n-1}$$
$$0 = T_n - U_n + XU_{n-1}$$
$$T_n = U_n - XU_{n-1}.$$

Berdasarkan pembuktian tersebut, terbukti bahwa

$$T_n = U_n - XU_{n-1}.\blacksquare$$

Berdasarkan Lemma 3.2.1 dapat ditunjukkan keterkaitan dari polinomial Chebyshev jenis pertama dengan yang kedua dapat digunakan diteorema berikut.

Teorema 3.2.1 *(Belbachir, 2008) Untuk semua bilangan real* n *sedemikian sehingga* $n \geqslant 0$*, maka keterkaitan polinomial Chebyshev jenis pertama dengan yang kedua dapat dinyatakan sebagai berikut*

$$T_{2n} = U_{2n} - XU_{2n-1}, n \geqslant 1. \tag{3.2}$$

Bukti

Akan ditunjukkan keterkaitan dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua, yang dapat dinyatakan

$$T_{2n} = U_{2n} - XU_{2n-1}.$$

Berdasarkan Lemma $3.2.1$, maka keterkaitan polinomial Chebyshev jenis pertama dengan yang kedua dapat diturunkan sebagai berikut.

$$T_n = U_n - XU_{n-1}$$

yang kemudian dengan mensubstitusikan $n = 2n$ maka diperoleh

$$T_{2n} = U_{2n} - XU_{2n-1}.$$

Jadi, terbukti bahwa

$$T_{2n} = U_{2n} - XU_{2n-1}. \blacksquare$$

Berdasarkan Lemma $3.2.1$ maka Teorema $3.2.1$ terbukti terdapat keterkaitan antara polinomial Chebyshev jenis pertama dengan yang kedua.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Hasil dari penelitian bisa ditarik kesimpulan yakni;

1. Terdapat dua buah jenis fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis kedua yaitu fungsi pembangkit biasa dan fungsi pembangkit eksponensial. Fungsi pembangkit biasa dari polinomial Chebyshev jenis kedua yaitu;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n U_{n-1}(x) = \frac{\xi}{1 - 2\xi x + \xi^2}.$$

   Sedangkan fungsi pembangkit ekponensial dari polinomial Chebyshev jenis kedua yaitu;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} U_{n-1}(x) = e^{\xi x} \left(\frac{\sin(\xi\sqrt{1 - x^2})}{\sqrt{1 - x^2}} \right).$$

2. Terdapat keterkaitan anatara polinomial Chebyshev jenis pertama dan jenis kedua dengan persamaan

$$T_{2n} = U_{2n} - XU_{2n-1}.$$

4.2 Saran

Berdasarkan tugas akhir penulis memiliki saran yakni;

1. Penelitian selanjutnya diharapkan bisa membahas fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis ketiga dan

seterusnya;

2. Penelitian selanjutnya dapat dilakukan dengan mengevaluasi fungsi pembangkit lainnya selain fungsi pembangkit biasa, dan fungsi pembangkit eksponensial seperti fungsi pembangkit poisson, fungsi pembangkit momen, fungsi pembangkit permutasi, dan fungsi pembangkit lainnya.

3. Penelitian selanjutnya bisa membahas keterkaitan polinomial Chebyshev jenis yang pertama dengan yang kedua selain yang penulis sudah bahas.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Qur'an, Kemenag Online. Qur'an Dan Terjemahan. https://quran.kemenag.go.id/, diakses 11 juli 2023 pukul 10.40

Andrew, Paul (2013). Polynomials. Australia :University of Adelaide

Aswir, Misbah, H. (2018). Aproksimasi Luas Daerah Elips Dengan Menggunakan Metode Clenshaw-Curtis. Skripsi. Makassar : Uin Alauddin Makassar

Aziz, Semaa Hasan, Rasheed, Mohammed, Shihab, Suha (2020). New Properties of Modified Second Kind Chebyshev Polinomial, China : Journal of Soutwest Jiaotong University

Belbachir, Hacene, Farid Bencherif. (2008). On Some Propertities of Chebyshev Polynomials. Algaria : USTHB, faculty of matehmatics.

Cesarano, C. (2010). Identities And Generating Functions On Chebyshev Polynomials. Georgian Mathematical Journal, 19(3), 427–440. Italy : International Telematic University UNINETTUNO Corso Vittorio Emanuele II.

Cho, Eungchun. (1999). Euler's formula and de moivre's formula for quaternions. Missouri journal of mathematical science. Frankfort, KY 40601 :Kentucky State University.

Cohen, Daniel I. A (1978). "Basic Techniques Of Combinatorial Theory", John Wiley and Sons, Etioko, Irvan Agus, Farikhin, Widowati. (2013). Fungsi Rasional Chebyshev dan Aplikasinya pada Aproximasi Fungsi. Semarang : Universitas Diponegoro.

Goenawan, Stephanus Ivan. (2011). Deret Umum taylor. Jakarta : Universitas Atmajaya.

Hoffan, Michael E, William Douglas Withers. (1998). Generalized Chebyshev Polynomials Associated With Affine Wely Groups. Amerika : United States Naval Academy.

Jacobs, D. P., Rayes, M. O., dan Trevisan, V. (2011). The Resultant Of Chebyshev Polynomials. Canadian Mathematical Bulletin, 54(2), 288–296. Canada : Cambridge University Press.

Julaiha, Siti, putri, Arini Soesatyo. (2017). Reperesentasi Deret ke dalam Bentuk Integral Lipat dua. Bandung : UIN SGD Bandung.

Kadir. (2016). Fungsi Peubah Kompleks. Jakarta : Uin Jakarta.

Mason, J. C. Handscomb, D. C. (2003). Chevyshev Polynomials. In New York : CRC Press LLC.

Meyer, Albert R. , Rubinfeld, Ronitt (2005). Generating Functions. Massachusetts Institute of Technologi.

Nastiti, Ayu. (2012). Fungsi Pembangkit Dari Polinomial Chebyshev Berdasarkan Ekspansi Binomial. Skripsi. Jakarta. Universitas Indonesia, Parmakanti, Kankan, Rusyaman, Endang. (2019). Turunan Fraksional Fungsi Polinom Menggunakan Deret Kuasa. Bandung : Universitas Padjadjaran Bandung.

Sunni, I. (2009). Fungsi Pembangkit. Bandung : Institude Teknologi Bandung.

Qutub, S. (2011). Sumber-Sumber Ilmu Pengetahuan Dalam Al Qur'an Dan Hadits. Humaniora, 2(2). Jakarta Barat : BINUS University.

Utama, Surasih. (2014). Penurunan Fungsi Pembangkit Eksponensial Dari Polinomial Chebyshev Jenis Ketiga DAN Keempat. Jakarta : Universitas Indonesia.

Woit, Peter. (2019). Euler's Formula and Trigonometry. Columbia : Columbia University