PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA SISI PADA $A \otimes x = B \otimes y$ DALAM ALJABAR MAX-PLUS

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matemitaka

Oleh : **NUGROHO DWI SAPUTRO**
NIM : 2008046009

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG

2023

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	Nugroho Dwi Saputro
NIM	:	2008046009
Jurusan/Program Studi	:	Matematika/ Matemitaka

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA SISI PADA $A \otimes x = B \otimes y$ DALAM ALJABAR MAX-PLUS

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 13 Desember 2023
Pembuat pernyataan,

Nugroho Dwi Saputro
NIM : 2008046009

KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul	:	**PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA SISI PADA $A \otimes x = B \otimes y$ DALAM ALJABAR MAX-PLUS**
Penulis	:	Nugroho Dwi Saputro
NIM	:	2008046009
Jurusan	:	Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matemitaka.

Semarang, 14 Desember 2023

DEWAN PENGUJI

Penguji I,	Penguji II,
Prihadi Kurniawan M.Sc	**Ariska Kurnia Rachmawati,M.Sc**
NIP : 199012262019031010	NIP : 198908112019032019
Penguji III,	Penguji IV,
Emy Siswanah M.Sc	**Any Muanalifah, M.Si., Ph.D**
NIP : 198702022011012014	NIP : 198201132011012009
Pembimbing I,	Pembimbing II,
Any Muanalifah, M.Si., Ph.D	**Agus Wayan Yulianto M.Sc**
NIP : 198201132011012009	NIP : 198907162019031007

KEMENTERIAN AGAMA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UIN WALISONGO SEMARANG
REPUBLIK INDONESIA

NOTA DINAS

Semarang, 11 Desember 2023

Yth. Ketua Program Studi Matemitaka
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA SISI PADA $A \otimes x = B \otimes y$ DALAM ALJABAR MAX-PLUS
Nama	:	Nugroho Dwi Saputro
NIM	:	2008046009
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,

Any Muanalifah, M.Si., Ph.D.
NIP : 198201132011012009

NOTA DINAS

Semarang, 13 Desember 2023

Yth. Ketua Program Studi Matemitaka
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA SISI PADA $A \otimes x = B \otimes y$ DALAM ALJABAR MAX-PLUS
Nama	:	Nugroho Dwi Saputro
NIM	:	2008046009
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing II,

Agus Wayan Yulianto M.Sc.
NIP : 198907162019031007

ABSTRAK

Aljabar max-plus adalah contoh dari semiring. Aljabar max-plus itu sendiri ialah himpunan $\mathbb{R}_{\max}$ dengan operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$. Dimana $\mathbb{R}_{\max}$ adalah himpunan $\mathbb{R} \cup \{\epsilon\}$. $\mathbb{R}$ itu sendiri merupakan himpunan bilangan real sedangkan ϵ didefinisikan sebagai $\epsilon = -\infty$. Terdapat beberapa bentuk sistem persamaan linear dalam aljabar maxplus, salah satunya $A \otimes x = b$.Persamaan tersebut dapat diperluas kedalam bentuk sistem persamaan dua sisi $A \otimes x = B \otimes y$ atas aljabar max-plus. Untuk mencari solusi dari persamaan tersebut menggunakan metode alternating. Vektor x dan y dikatakan stabil jika $x = A^* \otimes' (B \otimes y)$ dan $y = B^* \otimes' (A \otimes x)$. Setiap pasangan (x, y) stabil merupakan solusi dari persamaan $A \otimes x = B \otimes y$.

Kata kunci : Aljabar max-plus, Metode alternating, solusi stabil

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahi rabbil alamin puji syukur kami panjatkan kehadirat Allah SWT atas semua nikmat dan karunianya yang tak terhingga sehingga penulis dapat menyelesaikan Skripsi yang berjudul **"PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA SISI PADA** $A \otimes x = B \otimes y$ **DALAM ALJABAR MAX-PLUS"**. Skripsi ini dapat terselesaikan karena bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu pada kesempatan ini Penulis dengan tulus mengucapkan terimakasih sebesar-besarnya kepada:

1. Dr. H. Ismail, M. Ag., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi

2. Emy Siswanah, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi

3. Any Muanalifah, Ph.D., selaku dosen pembimbing I yang sudah membimbing penulis dalam proses menyelesaikan skripsi ini

4. Agus Wayan Yulianto M.Sc., selaku dosen pembimbing II dan wali dosen yang telah membimbing penulis selama perkuliahan dan membimbing penulis dalam menyelesaikan skripsi ini

5. Teman-teman Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi angkatan 2020 yang sudah berjuang bersama selama perkuliahan

6. Bapak Sumarno dan Ibu Tuminem selaku orang tua penulis yang selalu memberikan motivasi serta doanya.

Penulis juga mengucapkan terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu serta memberi semangat dan doa sehingga Skripsi ini dapat diselesaikan. Penulis berharap Skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Atas segala kekurangan dan kelemahan dalam skripsi ini penulis mohon maaf sebesar-besarnya, oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun agar skripsi ini bisa menjadi lebih baik.

Semarang, 14 Desember 2023

Penulis,

Nugeroho Dwi Saputro

NIM : 2008046009

DAFTAR ISI

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam matematika terdapat beberapa bidang ilmu, salah satu bidang ilmu matematika adalah aljabar. Aljabar mempelajari tentang struktur dan aturan untuk memanipulasi simbol-simbol dalam matematika. Dalam aljabar itu sendiri terdapat topik-topik yang dapat dipelajari, antara lain aljabar abstrak dan aljabar linear.

Salah satu dari bidang matematika adalah aljabar linear. Aljabar linear sendiri memempelajari mengenai pemetaan, vektor, dan matriks. Suatu matriks disimbolkan dengan huruf kapital. Dalam matriks terdapat bilangan yang tersusun dalam bentuk dan kolom yang dinamakan dengan entri atau elemen dari matriks. Terdapat beberapa jenis matriks contohnya yaitu matriks identitas, matriks nol, dan matriks permutasi (Majid, 2012).

Sedangkan aljabar abstrak mempelajari tentang grup, ring, semigrup, semiring, dan lainya. Dalam buku yang ditulis oleh Rudito (2016) dijelaskan bahwa aljabar max-plus merupakan salah satu contoh dari semiring. Aljabar max-plus itu sendiri adalah himpunan $\mathbb{R}_{\max}$ dengan operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$. Dimana $\mathbb{R}_{\max}$ merupakan himpunan $\mathbb{R} \cup \{\epsilon\}$. $\mathbb{R}$ itu sendiri merupakan himpunan bilangan real sedangkan ϵ didefinisikan $\epsilon = -\infty$ (Olsder dan Woude, 2005).

Dalam aljabar linear terdapat suatu sistem persamaan yang berbentuk $Ax + by = c$. Sama halnya dengan aljabar linear, di dalam aljabar max-plus juga terdapat suatu sistem persamaan linear. Dalam aljabar max-plus terdapat tiga persamaan linear, yaitu $A \otimes x = b$ kemudian $A \otimes x = B \otimes y$ dan persamaan yang terakhir adalah $A \otimes x = B \otimes x$ (Butkovic, P. 2010). Untuk menyelesaikan persamaan tersebut terdapat berbagai metode contohnya metode alternating yang dikenalkan oleh Cunninghame dan Butkovic (2003) dalam penelitiannya yang berjudul "*The equation* $A \otimes x = B \otimes y$ *over (max,+)*". Dalam penelitian lain yang ditulis oleh Aminu dan Butkovic (2008) dengan judul *"comparison of method for solving two sided system in max-algebra"*, dalam penelitian tersebut Aminu dan Butkovic membandingkan metode-metode yang dapat digunakan dalam penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi atas aljabar max-plus dan hasilnya adalah metode alternating lah yang lebih efektif.

Berdasarkan latar belakang masalah yang dijabarkan diatas, penulis akan mengkaji lebih dalam jurnal yang berjudul "*The equation* $A \otimes x = B \otimes y$ *over (max,+)*" yang ditulis oleh Cunninghame dan Butkovic (2003). Maka penulis melakukan kajian tersebut dengan judul "Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Sisi pada $A \otimes x = B \otimes y$ dalam Aljabar Max-plus".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang dijabarkan, diperoleh rumusan masalah yaitu bagaimana menyelesaikan sistem persamaan linear dua sisi pada $A \otimes x = B \otimes y$ dalam aljabar max-plus?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari kajian ini adalah mengetahui solusi penyelesaikan sistem persamaan linear dua sisi pada $A \otimes x = B \otimes y$ dalam aljabar max-plus.

1.4 Manfaat Penelitian

Harapan penulis dalam kajian dan pembahasan ini dapat membawa manfaat untuk kemudian hari mengenai penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi pada $A \otimes x = B \otimes y$ dalam aljabar max-plus. Serta diharapkan dapat menjadi pengetahuan mengenai metode alternating yang digunakan untuk penyelesaian sistem persamaan $A \otimes x = B \otimes y$ dalam aljabar max-plus.

1.5 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah metode studi literatur. Studi literatur dilakukan guna mencari informasi dan pengetahuan dalam penelitian melalui membaca buku-buku referensi, jurnal ilmiah dan bahan bacaan yang tersedia di perpustakaan (Ruslan, 2008). Langkah-langkah penulis dalam kajian ini sebagai berikut:

1. Mengkaji tentang definisi dan sifat-sifat aljabar max-plus. Pada tahap ini dikaji mengenai definisi dasar dan sifat-sifat yang ada pada aljabar max-plus.

2. Mengkaji tentang matriks atas aljabar max-plus. Pada tahap ini akan dipelajari tentang matriks atas aljabar max-plus dan operasi-operasi yang ada didalamnya.

3. Mengkaji tentang sistem persamaan dua sisi dalam aljabar max-plus. Pada tahap ini dipelajari mengenai sistem persamaan dua sisi dalam aljabar max-plus dan cara penyelesaiannya.

4. Mengkaji tentang metode alternating. Tahap selanjutnya adalah penulis mempelajari tentang metode alternating.

5. Menyelesaikan sistem persamaan linear dua sisi pada aljabar max-plus menggunakan metode alternating. Pada tahap ini akan dikaji tentang bagaimana cara menyelesaikan sistem persamaan linear dua sisi pada aljabar max-plus menggunakan metode alternating.

BAB 2

LANDASAN PUSTAKA

2.1 Aljabar Max-plus

Definisi 2.1.1 *Semiring adalah suatu himpunan tak kosong* $\mathbb{R}$ *yang dilengkapi dengan dua operasi biner* $+$ *dan* $\times$ *dinotasikan dengan* $(\mathbb{R}, +, \times)$ *yang memenuhi aksioma-aksioma berikut.*

1. *(*$\mathbb{R}, +$*) merupakan monoid komutatif, yaitu* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ *bersifat*
   (a) *Asosiatif*
   $a + (b + c) = (a + b) + c$*,*
   (b) *Memiliki elemen identitas*
   ada $0 \in \mathbb{R}$ *sehingga* $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in \mathbb{R}$*,*
   (c) *Komutatif*
   $a + b = b + a$*.*
2. *(*$\mathbb{R}, \times$*) merupakan monoid, yaitu* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ *bersifat*
   (a) *Asosiatif*
   $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$*, dan*
   (b) *Memiliki elemen identitas*
   Ada $1 \in \mathbb{R}$ *sehingga* $a \times 1 = 1 \times a = a, \forall a \in \mathbb{R}$*.*
3. $(\mathbb{R}, +, \times)$ *Bersifat distributif, yaitu* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} a \times (b + c) &= (a \times b) + (a \times c), \\ (a + b) \times c &= (a \times c) + (b \times c). \end{aligned}$$

4. *Elemen penyerap, yaitu* $\forall a \in \mathbb{R}$
   ada $0 \in \mathbb{R}$ *sehingga* $0 \times a = a \times 0 = 0, a \in \mathbb{R}$*.*

Contoh 2.1.1 *Diberikan himpunan* $\mathbb{R}_{\max}$ *dengan operasi* $\oplus$ *dan* $\otimes$*. Dimana* $\mathbb{R}_{\max}$ *adalah himpunan* $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$*. Sedangkan* $\mathbb{R}$ *merupakan himpunan bilangan real dan* ε *didefinisikan* $\varepsilon = -\infty$*. Operasi* $\oplus$ *dan* $\otimes$ *didefinisikan dengan*

$$a \oplus b = \max(a, b),$$

$$a \otimes b = a + b$$

Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_{\max}$*.*

Misalkan:

$$3 \oplus 2 = \max(3, 2) = 3,$$

$$3 \otimes 2 = 3 + 2 = 5.$$

2.2 Matriks di Aljabar Max-plus

Selanjutnya akan dipelajari mengenai vektor dan matriks di $\mathbb{R}_{\max}$. Didalam aljabar max-plus operasi $\oplus$ dan $\otimes$ bisa diperluas untuk mengoperasikan matriks atas aljabar max-plus. Dalam sub bab kali ini akan dijabarkan tentang matriks atas $\mathbb{R}_{\max}$.

2.3 Operasi Matriks dalam Aljabar Max-plus

Definisi 2.3.1 ***Matriks dan Skalar***
Untuk setiap matriks $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ *dan setiap skalar* $c \in \mathbb{R}_{\max}$*, perkalian* $c \otimes A$ *didefinisikan sebagai*

$$[c \otimes A]_{ij} = c \otimes a_{ij}$$

dengan $i \in 1,2,3,...,m$ *dan* $j \in 1,2,3,...,n$ *(Farlow, 2009).*

Definisi 2.3.2 ***Penjumlahan Matriks***

Untuk setiap $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ *dan* $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ *didefinisikan* $A \oplus B$ *sebagai*

$$\begin{aligned} [A \oplus B]_{ij} &= a_{ij} \oplus b_{ij} \\ &= \max(a_{ij}, b_{ij}) \end{aligned}$$

dimana $i \in 1,2,3,...,m$ *dan* $j \in 1,2,3,...,n.$

Contoh 2.3.1 *Penjumlahan Matriks*

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ *dan* $B \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$*. Penjumlahan matriks* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -\infty & 0 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ *dan matriks* $B = \begin{bmatrix} -\infty & -2 & 2 \\ 5 & 6 & -3 \\ 4 & -2 & -\infty \end{bmatrix}$, *sebagai berikut*

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -\infty & 0 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -\infty & -2 & 2 \\ 5 & 6 & -3 \\ 4 & -2 & -\infty \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(3,-\infty) & \max(2,-2) & \max(1,2) \\ \max(-1,5) & \max(-\infty,6) & \max(0,-3) \\ \max(2,4) & \max(-4,-2) & \max(5,-\infty) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Definisi 2.3.3 ***Perkalian Matriks***

Untuk setiap $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times p}$ *,* $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{p\times n}$ *didefinisikan* $A \otimes B$ *sebagai*

$$[A \otimes B]_{ij} = \bigoplus_{l=1}^{n} (a_{il} \otimes b_{lj})$$

untuk $i \in 1, 2, 3, ..., m$ *dan* $j \in 1, 2, 3, ..., n$.

Contoh 2.3.2 *Perkalian Matriks*
Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times p}$ *dan matriks* $B \in \mathbb{R}_{\max}^{p\times n}$. *Perkalian matriks* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -\infty & 0 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ *dan matriks* $B = \begin{bmatrix} -\infty & -2 & 2 \\ 5 & 6 & -3 \\ 4 & -2 & -\infty \end{bmatrix}$, *sebagai berikut*

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -\infty & 0 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty & -2 & 2 \\ 5 & 6 & -3 \\ 4 & -2 & -\infty \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(-\infty, 7, 5) & \max(1, 8, -1) & \max(5, -1, -\infty) \\ \max(-\infty, -\infty, 4) & \max(-3, -\infty, -2) & \max(1, -\infty, -\infty) \\ \max(-\infty, 1, 9) & \max(0, 2, 3) & \max(4, -7, -\infty) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \\ 9 & 3 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Definisi 2.3.4 ***Transpos Matriks***
Untuk setiap $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$, *transpos matriks didefinisikan* A^T *sebagai*

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$$

untuk $i \in 1, 2, 3, ..., m$ *dan* $j \in 1, 2, 3, ..., n$.

Definisi 2.3.5 ***Matriks Identitas***
Matriks identitas $n \times n$ *dalam aljabar max-plus dinotasikan* I, *dimana* $I \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ *yang elemen-elemennya:*

$$[I]_{ij} = \begin{cases} e = 0 & \textit{jika } i = j \\ \varepsilon & \textit{jika } i \neq j \end{cases}$$

untuk $i, j \in 1, 2, 3, ..., n$.
Dengan kata lain, semua elemen pada diagonal utamanya sama dengan 0*, sedangkan elemen non diagonal utama bernilai sama dengan* $\varepsilon = -\infty$*. Seperti*

$$[I]_{33} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.3.6 ***Perpangkatan Matriks***
Untuk setiap $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$*, perpangkatan matriks* A *didefinisikan* $A^{\otimes k}$ *sebagai*

$$A^{\otimes k} = \underbrace{A \otimes A \otimes A \otimes A \otimes ... \otimes A}_{\textit{sebanyak k}},$$

untuk $k \in \mathbb{N}$.
Dalam aljabar max-plus, perpangkatan 0 *matriks* A *didefinisikan* $A^{\otimes 0} = I$.

2.4 Operasi Ganda dan Konjugasi

Hal yang membantu dalam permasalahan aljabar max-plus yang disebabkan tidak adanya operasi pengurangan dan invers matriks yaitu adanya operasi ganda $(\oplus', \otimes')$ dan matriks konjugasi.

Definisi 2.4.1 *Diberikan* $\mathbb{R}_{\min}$ *dengan operasi* $\oplus', \otimes'$*, dimana* $\mathbb{R}_{\min}$ *himpunan bilangan* $\mathbb{R} \cup \infty$*. Diberikan* $a, b \in \mathbb{R}_{\min}$ *dengan operasi*

$(\oplus', \otimes')$ *yang didefinisikan sebagai*

$$a \oplus' b = \min(a, b),$$

$$a \otimes' b = a + b.$$

Operasi $(\oplus', \otimes')$ *diperluas ke operasi matriks dengan cara yang sama dengan operasi* $(\oplus, \otimes)$*.*

Untuk mempermudah dalam pembahasan selanjutnya, akan didefinisikan gabungan $\mathbb{R}_{\max}$ dengan $\mathbb{R}_{\min}$, dan definisi dari matriks konjugasi.

Definisi 2.4.2 *Diberikan himpunan* $\mathbb{R}_{\max} = (\{-\infty\} \cup \mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ *dan* $\mathbb{R}_{\min} = (\{\infty\} \cup \mathbb{R}, \oplus', \otimes')$*, maka akan didefinisikan* $\mathbb{T}$ *dimana* $\mathbb{T}$ *merupakan gabungan dari* $\mathbb{R}_{\max}$ *dan* $\mathbb{R}_{\min}$ *sebagai*

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= (\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \otimes, \oplus', \otimes') \\ &= (\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \max, +, \min, +). \end{aligned}.$$

Untuk operasi $\otimes$ *dan* $\otimes'$ *adalah operasi penjumlahan, yang membedakan dari keduanya adalah*

$$(-\infty) \otimes \infty = -\infty + \infty = -\infty$$

sedangkan

$$(-\infty) \otimes' \infty = -\infty + \infty = \infty.$$

Definisi 2.4.3 *Diberikan matriks* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{T}^{m \times n}$*. Didefinisikan matriks konjugasi dari matriks* A *sebagai*

$$\begin{aligned} A^* &= -A^T \in \mathbb{T}^{m \times n} \\ &= [-a_{ji}]. \end{aligned}$$

Dengan kata lain matriks konjugasi dari matriks A adalah negasi dari transpos matriks A.

2.5 Sistem Persamaan Linear Aljabar Max-plus

Dalam subbab ini akan dibahas mengenai sistem persamaan linear. Untuk mendefinisikan sistem tersebut dapat menggunakan notasi matriks. Terdapat dua jenis sistem persamaan linear dalam $\mathbb{R}_{\max}$ yang mana dapat dicari solusinya yaitu: $x = A \otimes x \oplus b$ dan $A \otimes x = b$ (bentuk umumnya menjadi $A \otimes x \oplus b = C \otimes x \oplus d$).

2.5.1. Solusi dari $A \otimes x \oplus b = C \otimes x \oplus d$

Definisi 2.5.1 *Sistem $A \otimes x \oplus b = C \otimes x \oplus d$ dikatakan dalam bentuk canonical jika $A, C, b,$ dan d memenuhi*

1. $C_{ij} = \varepsilon$ *jika* $A_{ij} > C_{ij}$, *dan* $A_{ij} = \varepsilon$ *jika* $A_{ij} < C_{ij}$,

2. $d_i = \varepsilon$ *jika* $b_i > d_i$, *dan* $b_i = \varepsilon$ *jika* $b_i < d_i$.

Contoh 2.5.1 *Diberikan matriks* $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ \varepsilon & 4 \end{bmatrix}$ *dan* $C = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ *vektor* $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ *dan* $d = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 5 \end{bmatrix}$. *Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $A \otimes x \oplus b = C \otimes x \oplus d$.*

Solusi:

$A \otimes x \oplus b = C \otimes x \oplus d$ *dapat ditulis sebagai*

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ \varepsilon & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 5 \end{bmatrix}$$

yang dapat disederhanakan menjadi :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 4 \\ \varepsilon & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 5 \end{bmatrix}$$

yang berarti :

$$\left.\begin{array}{ll} 4 \otimes x_2 \oplus 1 & = 6 \otimes x_1 \\ 4 \otimes x_2 & = 1 \otimes x_1 \oplus 5 \end{array}\right\} \rightarrow 6 \otimes x_1 = 1 \otimes x_1 \oplus 5$$

$$\rightarrow 6 \otimes x_1 = 5$$

$$\rightarrow x_1 = -1 \textit{ dan } x_2 = 1$$

Sistem ini mempunyai solusi. Secara umum, sistem linear mungkin saja tidak memiliki solusi. Selain itu, meskipun ada solusi, solusi tersebut mungkin tidak unik.

2.5.2. Solusi dari $A \otimes x = b$

Sistem persamaan linear dalam aljabar max-plus bentuk umumnya adalah $A \otimes x = b$ dimana $A \in \mathbb{R}^{m\times n}_{\max}, x \in \mathbb{R}^{n}_{\max}$ dan $b \in \mathbb{R}^{m}_{\max}$. Sistem persamaan linear ini tidak selalu mempunyai penyelesaian.

Contoh 2.5.2 *misal diberikan matriks* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}_{\max} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ *dan* $b \in \mathbb{R}^{m}_{\max} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ *selesaikan sistem persamaan linear* $A \otimes x = b$.

Solusi :

$$A \otimes x = b = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

sistem persamaan tersebut ekuivalen dengan

$$\begin{cases} 3 \otimes x_1 \oplus 5 \otimes x_2 & = 4 \\ 7 \otimes x_1 \oplus 9 \otimes x_2 & = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \otimes (3 \otimes x_1 \oplus 5 \otimes x_2) & = -3 \otimes 4 \\ -7 \otimes (7 \otimes x_1 \oplus 9 \otimes x_2) & = -7 \otimes 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \oplus 2 \otimes x_2 & = & 1 \\ x_1 \oplus 2 \otimes x_2 & = & -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max(x_1, 2 + x_2) & = & 1 \\ \max(x_1, 2 + x_2) & = & -2 \end{cases}$$

Terlihat bahwa $1 \neq -2$ artinya x_1 dan x_2 tidak ada nilai yang memenuhi persamaan diatas.

Oleh karena itu dengan mendefinisikan subpenyelesaian, masalah penyelesaian $A \otimes x = b$ dapat diperlemah.

Definisi 2.5.2 *Misalkan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ dan $b \in \mathbb{R}_{\max}^{m}$. Vektor x' disebut subpenyelesaian dari sistem persamaan linear $A \otimes x = b$ jika x' memenuhi $A \otimes x' \leq b$.*

Definisi 2.5.3 *Subpenyelesaian x'' dari sistem persamaan linear $A \otimes x = b$ disebut sebagai subpenyelesaian terbesar apabila untuk setiap x' merupakan subpenyelesaian dari persamaan $A \otimes x = b$ berlaku $x' \leq x''$.*

Teorema 2.5.1 *(Cunninghame, G. & Butkovic, P. 2003) Misalkan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ dengan elemen-elemen setiap kolomnya tak semuanya sama dengan $-\infty$ dan $b \in \mathbb{R}_{\max}^{m}$. Subpenyelesaian terbesar x'' dari $A \otimes x = b$ ada dan merupakan solusi sistem jika x'' memenuhi*

$$-x'' = \max_i\{-b_i; A_{ij}\},$$

$-x'' = A^T \otimes (-b)$

atau

$x'' = -(A^T \otimes -b).$

bukti :

$$\begin{aligned}\{A \otimes x'' \leq b\} \quad &\leftrightarrow \{\bigoplus_j A_{ij} \otimes x''_j \leq b_i, \forall i\} \\ &\leftrightarrow \{x''_j \leq b_i - A_{ij} \forall i, j\} \\ &\leftrightarrow \{x''_j \leq \min_i (b_i - A_{ij}), \forall j\} \\ &\leftrightarrow \{-x'' \geq \max_i (-b_i + A_{ij}), \forall j\}\end{aligned}$$

Sebaliknya, dapat diperiksa dengan cara yang sama bahwa vektor x didefinisikan oleh $-x = \max_i (-b_i + A_{ij})$, adalah subpenyelesaian. Oleh karena itu, x'' adalah yang terbesar.

Contoh 2.5.3 *Misal diberikan* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}_{\max} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -\infty \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$ *dan* $b \in \mathbb{R}^{m}_{\max} = \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$. *Tentukan penyelesaian sistem persamaan linear* $A \otimes x = b$.

solusi :

$$\begin{aligned} x'' &= -(A^T \otimes -b) \\ &= -\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -\infty & 12 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -13 \\ -9 \\ -12 \end{bmatrix} \right) \\ &= -\begin{bmatrix} -10 \oplus -10 \oplus -10 \\ -13 \oplus -\infty \oplus 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

substitusi : $x_1 = 10$ *dan* $x_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -\infty \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \oplus 0 \\ 9 \oplus -\infty \\ 12 \oplus 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Diperoleh subpenyelesaian terbesar dari sistem persamaan diatas adalah $\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Karena* $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -\infty \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$, *maka* $\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$ *merupakan solusi penyelesaian sistem persamaan tersebut.*

Contoh 2.5.4 *Misal diberikan* $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ *dan vektor* $b \in \mathbb{R}_{\max}^{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$. *Tentukan solusi penyelesaian sistem persamaan linear* $A \otimes x = b$.

solusi :

$$x'' = -(A^T \otimes -b)$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Karena $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$, *maka* $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ *bukan merupakan solusi dari penyelesaian sistem persamaan di atas. Tetapi sistem persamaan linear tersebut memiliki subpenyelesaian terbesar yang bukan merupakan penyelesaian.*

BAB 3

Solusi Sistem Persamaan Dua Sisi $A \otimes x = B \otimes y$

Dalam bab ini membahas tentang sistem persersamaan linear dua sisi atas aljabar max-plus dan metode alternating yang akan digunakan untuk mencari solusi dari sistem persamaan linear dua sisi $A \otimes x = B \otimes y$ atas aljabar max-plus, yang diperkenalkan oleh Cuningham-Green dan Butkovic (2003).

3.1 Sistem persamaan linear dua sisi

Sistem persamaan linear $A \otimes x = b$ juga dapat diperluas ke dalam bentuk sistem persamaan linear dua sisi, salah satu contohnya adalah $A \otimes x \oplus b = C \otimes x \oplus d$, dimana A dan C merupakan matriks persegi $n \times n$ dan b dan d merupakan vektor $n \times 1$ untuk menyelesaikan persamaannya sistem tersebut dapat dirubah dalam bentuk *canonical* sesuai dengan definisi (2.5.1).

Dari bentuk persamaan linear dua sisi $A \otimes x \oplus b = C \otimes x \oplus d$ dapat diubah dalam bentuk yang lain, contohnya $A \otimes x = B \otimes y$, diamana $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ dan $B \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times k}$. Sistem persamaan tersebut disebut dengan sistem persamaan dengan variabel terpisah.

3.2 Solusi Sistem Persamaan Linear Dua Sisi $A \otimes x = B \otimes y$

Perhatikan masalah penyelesaian sistem persamaan dengan variabel terpisah berikut.
Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ dan $B \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times k}$, tentukan $x \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^k$, yang memenuhi

$$A \otimes x = B \otimes y.$$

Metode aljabar untuk menyelesaikan sistem persamaan tersebut dapat menggunakan $A \otimes x \leq b$. Berdasarkan teorema (2.5.1) setiap $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}_{\max}^{m}$. Vektor $x'' = -(A^T \otimes -b)$ merupakan solusi terbesar dari $A \otimes x \leq b$, dan $A \otimes x = b$ memiliki solusi jika dan hanya jika x'' adalah solusi. Jadi ide yang dapat digunakan adalah sebagai berikut.

1. Dimulai dari mengambil sembarang vektor $x = x_r$, dimana $r \in \{0, 1, 2, ...\}$ sebagai iterasi,

2. Untuk mendapatkan solusi y_r dari persamaan linear dua sisi $A \otimes x_r = B \otimes y$ yaitu menggunakan teorema (2.5.1), diperoleh $y_0 = -(B^T \otimes -a_r)$, dimana a_r adalah hasil dari $A \otimes x_r$,

3. Kemudian untuk solusi x_{r+1} dari persamaan $A \otimes x = B \otimes y_r$ menggunakan teorema yang sama. Selanjutnya diperoleh nilai $x_{r+1} = -(A^T \otimes -b)$, dimana b adalah hasil dari $B \otimes y_r$, Begitu juga dengan y_{r+1} dan seterusnya.

Akan tetapi tidak diketahui secara pasti $\{x_r\}_{r=0}^{\infty}$, $\{y_r\}_{r=0}^{\infty}$ yang tidak menghasilkan apapun.

3.3 Algoritma Alternating

Berikut ini akan dibahas mengenai salah satu metode untuk mencari solusi penyelesaian dari sistem persamaan dua sisi yang berbentuk $A \otimes x = B \otimes y$. Metode ini dikenalkan oleh Cunninghame dan Butkovic (2003). Metode tersebut dinamakan metode Alternating. Metode alternating ini menggunakan metode iterasi, yaitu sebagai berikut:

Input : matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$, vektor $x \in R^{n\times 1}$.
Output : Solusi (x, y) dari persamaan $A \otimes x = B \otimes y$.

Langkah-langkah untuk mencari solusi x dan y dari persamaan $A \otimes x = B \otimes y$ adalah sebagai berikut.

1. Ambil sembarang vektor berhingga $x \in R^{n\times 1}$
2. Tetapkan $x = x_r$ dimana $r \in \{0, 1, 2, ...\}$ sebagai iterasi,
3. Tetapkan iterasi pertama yaitu $r = 0$,
4. Hitung $a_r = A \otimes x_r$,
5. Hitung $y_r = -(B^T \otimes (-a_r))$,
6. Hitung $b_r = B \otimes y_r$,
7. Hitung $x_{r+1} = -(A^T \otimes (-b_r))$,
8. Ulangi langkah-langkah tersebut hingga persamaan linear $A \otimes x_{r+1} = B \otimes y_r$ konvergen.

Perhatikan contoh penggunakan metode alternating berikut.

Contoh 3.3.1 *Diberikan suatu matriks* $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *dan matriks* $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n} = \begin{bmatrix} -\infty & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. *Tentukan nilai* x *dan* y *yang memenuhi persamaan* $A \otimes x = B \otimes y$.
Solusi:

Langkah pertama ambil sembarang vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Selanjutnya Tetapkan $x = x_r$ *dimana* $r \in \{0, 1, 2, ...\}$ *sebagai iterasi.*

Hitung: $a_0 = A \otimes x_0$

$$\begin{aligned} a_0 &= A \otimes x_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Selanjutnya hitung: $y_0 = -(B^T \otimes (-a_0))$

$$\begin{aligned} y_0 &= -(B^T \otimes (-a_0)) \\ &= -\left(\begin{bmatrix} -\infty & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} \right) \\ &= -\left(\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hitung: $b_0 = B \otimes y_0$

$$\begin{aligned} b_0 &= B \otimes y_0 \\ &= \begin{bmatrix} -\infty & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Selanjutnya hitung: $x_1 = -(A^T \otimes (-b_0))$

$$\begin{aligned} x_1 &= -(A^T \otimes (-b_0)) \\ &= -\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} \right) \\ &= -\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hitung: $a_1 = A \otimes x_1$

$$\begin{aligned} a_1 &= A \otimes x_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $A \otimes x_1 = B \otimes y_0$. *Artinya pasangan* (x, y) *yang memenuhi persamaan* $A \otimes x = B \otimes y$ *adalah* $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *dan* $y = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Akan dilakukan perhitungan lagi untuk membuktikan apakah persamaan diatas memiliki penyelesaian tunggal atau banyak. Perhitungan akan menggunakan cara yang sama akan tetapi menggunakan vektor x *yang nilainya berbeda.*

Ambil sembarang vektor $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Selanjutnya Tetapkan $x = x_r$ *dimana* $r \in \{0, 1, 2, ...\}$ *sebagai iterasi.*

Hitung: $a_0 = A \otimes x_0$

$$\begin{aligned} a &= A \otimes x_r \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hitung: $y_0 = -(B^T \otimes (-a_0))$

$$\begin{aligned} y_0 &= -(B^T \otimes (-a_0)) \\ &= -\left(\begin{bmatrix} -\infty & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix}\right) \\ &= -\left(\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hitung: $b_0 = B \otimes y_0$

$$\begin{aligned} b_0 &= B \otimes y_0 \\ &= \begin{bmatrix} -\infty & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Selanjutnya hitung: $x_1 = -(A^T \otimes (-b_0))$

$$\begin{aligned} x_1 &= -(A^T \otimes (-b_0)) \\ &= -\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix}\right) \\ &= -\left(\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hitung: $a_1 = A \otimes x_1$

$$\begin{aligned} a_1 &= A \otimes x_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $A \otimes x_1 = B \otimes y_0$. *Artinya pasangan* (x, y) *yang memenuhi persamaan* $A \otimes x = B \otimes y$ *adalah* $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

dan $y = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ *dari dua percobaan perhitungan diatas diperoleh pasangan* (x, y) $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ *dan* $y = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$*. Dapat dilihat bahwa sistem persamaan diatas memiliki penyelesaian tak tunggal yaitu pasangan* $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *dan* $y = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$*. dan pasangan* $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ *dan* $y = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

Akan ditunjukkan bahwa barisan pasangan $(x_r; y_r)$ konvergen ke suatu solusi jika ada. Sebelum itu akan didefinisikan (x, y) stabil.

Definisi 3.3.1 *vektor* x *dan* y *dari sistem persamaan linear dua sisi* $A \otimes x = B \otimes y$ *dikatakan stabil jika memenuhi*

$$x = A^* \otimes' (B \otimes y),$$

$$y = B^* \otimes' (A \otimes x).$$

Teorema 3.3.1 *(Cunninghame, G. & Butkovic, P. 2003) Setiap pasangan* (x, y) *stabil merupakan solusi stabil dari persamaan* $A \otimes x = B \otimes y$*.*

Bukti :

Diberikan pasangan (x, y) stabil, kemudian akan dibuktikan bahwa (x, y) merupakan solusi. Berdasarkan definisi stabil maka diperoleh:

$$x = A^* \otimes' (B \otimes y) \tag{3.1}$$

$$y = B^* \otimes' (A \otimes x) \tag{3.2}$$

Akan dibuktikan (x, y) merupakan solusi dari persamaan $A \otimes x = B \otimes y$ dengan kata lain akan dibuktikan
$A \otimes x \leq B \otimes y$.
berdasarkan persamaan (3.1) diperoleh

$$\begin{aligned} A \otimes x &= A \otimes x \\ &= A \otimes A^* \otimes (B \otimes y). \end{aligned}$$

Diketahui dalam persamaan $U \otimes (U^* \otimes' W) \leq W$, dengan kata lain $W = B \otimes y$, maka diperoleh

$$A \otimes A^* \otimes (B \otimes y) \leq B \otimes y. \tag{3.3}$$

Akan dibuktikan pula $B \otimes y \leq A \otimes y$. Berdasarkan persamaan (3.2) diperoleh

$$\begin{aligned} B \otimes y &= B \otimes y \\ &= B \otimes B^* \otimes (A \otimes x). \end{aligned}$$

Diketahui dalam persamaan $U \otimes (U^* \otimes' W) \leq W$, dengan kata lain $W = A \otimes x$. maka diperoleh

$$B \otimes B^* \otimes (A \otimes x) \leq A \otimes x. \tag{3.4}$$

Akan dibuktikan $A \otimes x = B \otimes y$. dari persamaan (3.3) dan (3.4) diperoleh

$$\begin{aligned} \underbrace{A \otimes A^* \otimes (B \otimes y) \leq B \otimes y}_{A \otimes x} &= \underbrace{B \otimes B^* \otimes (A \otimes x) \leq A \otimes x}_{B \otimes y} \\ A \otimes x &= B \otimes y. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa setiap pasangan (x, y) stabil merupakan solusi.

3.4 Contoh penerapan metode alternating

Berikut merupakan contoh penerapan dari metode alternating.

Contoh 3.4.1 *Diberikan matriks* $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n} = \begin{bmatrix} 4 & -\infty & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -\infty & 2 & 3 \end{bmatrix}$ *dan maatriks* $B \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$*. Tentukan nilai* x *dan* y *yang memenuhi persamaan* $A \otimes x = B \otimes y$*.*

Solusi :

Dengan menggunakan metode alternating maka langkah pertama yang dilakukan adalah ambil sembarang vektor berhingga x *kemudian tetapkan* $x = x_r$ *dimana* $r \in \{0, 1, 2, ...\}$ *sebagai iterasi.*

Diambil $x_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Kemudian hitung $a_0 = A \otimes x_0$

$$\begin{aligned} a_0 &= A \otimes x_0 \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -\infty & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -\infty & 2 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (4 \otimes 6) \oplus (-\infty \otimes 4) \oplus (1 \otimes 1) \\ (2 \otimes 6) \oplus (2 \otimes 4) \oplus (1 \otimes 1) \\ (-\infty \otimes 6) \oplus (2 \otimes 4) \oplus (3 \otimes 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 \oplus -\infty \oplus 2 \\ 8 \oplus 6 \oplus 2 \\ -\infty \oplus 6 \oplus 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kemudian hitung $y_0 = -(B^T \otimes (-a_0))$

$$
\begin{aligned}
y_0 &= -(B^T \otimes (-a_0)) \\
&= -\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -10 \\ -8 \\ -6 \end{bmatrix} \right) \\
&= -\left(\begin{bmatrix} (2 \otimes -10) \oplus (4 \otimes -8) \oplus (4 \otimes -6) \\ (2 \otimes -10) \oplus (3 \otimes -8) \oplus (2 \otimes -6) \end{bmatrix} \right) \\
&= -\left(\begin{bmatrix} -8 \oplus -4 \oplus -2 \\ -8 \oplus -5 \oplus -4 \end{bmatrix} \right) \\
&= -\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Kemudian hitung $b_0 = B \otimes y_0$

$$
\begin{aligned}
b_0 &= B \otimes y_0 \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (2 \otimes 2) \oplus (2 \otimes 4) \\ (4 \otimes 2) \oplus (3 \otimes 4) \\ (4 \otimes 2) \oplus (2 \otimes 4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 \oplus 6 \\ 6 \oplus 7 \\ 6 \oplus 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Selanjutnya hitung $x_1 = -(A^T \otimes (-b_0))$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -(A^T \otimes (-b_0)) \\
&= -\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & -\infty \\ -\infty & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -6 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix} \right) \\
&= -\left(\begin{bmatrix} (4 \otimes -6) \oplus (2 \otimes -7) \oplus (-\infty \otimes -6) \\ (-\infty \otimes -6) \oplus (2 \otimes -7) \oplus (2 \otimes -6) \\ (1 \otimes -6) \oplus (1 \otimes -7) \oplus (3 \otimes -6) \end{bmatrix} \right) \\
&= -\left(\begin{bmatrix} -2 \oplus -5 \oplus -\infty \\ -\infty \oplus -5 \oplus -4 \\ -5 \oplus -6 \oplus -3 \end{bmatrix} \right) \\
&= -\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

kemudian hitung $a_1 = A \otimes x_1$

$a_1 = A \otimes x_1$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= A \otimes x_1 \\
&= \begin{bmatrix} 4 & -\infty & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -\infty & 2 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (4 \otimes 2) \oplus (-\infty \otimes 4) \oplus (1 \otimes 3) \\ (2 \otimes 2) \oplus (2 \otimes 4) \oplus (1 \otimes 3) \\ (-\infty \otimes 2) \oplus (2 \otimes 4) \oplus (3 \otimes 3) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6 \oplus -\infty \oplus 4 \\ 4 \oplus 6 \oplus 4 \\ -\infty \oplus 6 \oplus 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Hitung $y_1 = -(B^T \otimes (-a_1))$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -(B^T \otimes (-a_1)) \\
&= -\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix} \right) \\
&= -\left(\begin{bmatrix} (2 \otimes -6) \oplus (4 \otimes -6) \oplus (4 \otimes -6) \\ (2 \otimes -6) \oplus (3 \otimes -6) \oplus (2 \otimes -6) \end{bmatrix} \right) \\
&= -\left(\begin{bmatrix} -4 \oplus -2 \oplus -2 \\ -4 \oplus -3 \oplus -4 \end{bmatrix} \right) \\
&= -\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

kemudian hitung $b_1 = B \otimes y_1$

$$\begin{aligned}
b_1 &= B \otimes y_1 \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (2 \otimes 2) \oplus (2 \otimes 3) \\ (4 \otimes 2) \oplus (3 \otimes 3) \\ (4 \otimes 2) \oplus (2 \otimes 3) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 \oplus 5 \\ 6 \oplus 6 \\ 6 \oplus 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Selanjutnya hitung kembali $x_2 = -(A^T \otimes (-b_1))$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= -(A^T \otimes (-b_1)) \\
&= -\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & -\infty \\ -\infty & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix} \right) \\
&= -\left(\begin{bmatrix} (4 \otimes -5) \oplus (2 \otimes -6) \oplus (-\infty \otimes -6) \\ (-\infty \otimes -5) \oplus (2 \otimes -6) \oplus (2 \otimes -6) \\ (1 \otimes -5) \oplus (1 \otimes -6) \oplus (3 \otimes -6) \end{bmatrix} \right) \\
&= -\left(\begin{bmatrix} -1 \oplus -4 \oplus -\infty \\ -\infty \oplus -4 \oplus -4 \\ -4 \oplus -5 \oplus -3 \end{bmatrix} \right) \\
&= -\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Kemudian hitung $a_2 = A \otimes x_2$

$a_2 = A \otimes x_2$

$$
\begin{aligned}
a_2 &= A \otimes x_2 \\
&= \begin{bmatrix} 4 & -\infty & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -\infty & 2 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (4 \otimes 1) \oplus (-\infty \otimes 4) \oplus (1 \otimes 3) \\ (2 \otimes 1) \oplus (2 \otimes 4) \oplus (1 \otimes 3) \\ (-\infty \otimes 1) \oplus (2 \otimes 4) \oplus (3 \otimes 3) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 \oplus -\infty \oplus 4 \\ 3 \oplus 6 \oplus 4 \\ -\infty \oplus 6 \oplus 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Dapat dilihat bahwa $A \otimes x_2 = B \otimes y_1$. *Artinya pasangan* (x, y) *yang memenuhi persamaan* $A \otimes x = B \otimes y$ *adalah* $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ *dan* $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Akan dibuktikan bahwa setiap pasangan (x, y) stabil merupakan solusi stabil. (x, y) dikatakan stabil jika:

$$x = A^* \otimes' (B \otimes y)$$

$$y = B^* \otimes' (A \otimes x)$$

Bukti:

$$
\begin{aligned}
x &= A^* \otimes' (B \otimes y) \\
&= \begin{bmatrix} -4 & -2 & -\infty \\ -\infty & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \otimes' \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} -4 & -2 & -\infty \\ -\infty & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \otimes' \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-4 \otimes 5) \oplus' (-2 \otimes 6) \oplus' (-\infty \otimes 6) \\ (-\infty \otimes 5) \oplus' (-2 \otimes 6) \oplus' (-2 \otimes 6) \\ (-1 \otimes 5) \oplus' (-1 \otimes 6) \oplus' (3 \otimes 6) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \oplus' 4 \oplus' -\infty \\ -\infty \oplus' 4 \oplus' 4 \\ 4 \oplus' 5 \oplus' 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
y &= B^* \otimes' (A \otimes x) \\
&= \begin{bmatrix} -2 & -4 & -4 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \otimes' \left(\begin{bmatrix} 4 & -\infty & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -\infty & 2 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} -2 & -4 & -4 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \otimes' \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-2 \otimes 5) \oplus' (-4 \otimes 6) \oplus' (-4 \otimes 6) \\ (-2 \otimes 5) \oplus' (-3 \otimes 6) \oplus' (-2 \otimes 6) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 \oplus' 2 \oplus' 2 \\ 3 \oplus' 3 \oplus' 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa setiap pasangan (x, y) stabil adalah solusi

BAB 4

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Setelah mengkaji lebih dalam mengenai solusi persamaan dua sisi $A \otimes x = B \otimes y$ dalam aljabar max-plus dapat disimpulkan:

1. Solusi sistem persamaan linear dua sisi $A \otimes x = B \otimes y$ dapat dicari dengan menggunakan metode alternating.

2. Setiap pasangan (x, y) stabil merupakan solusi stabil.

3. Vektor x dan y dari sistem persamaan linear dua sisi $A \otimes x = B \otimes y$ dikatakan stabil jika memenuhi:

$$x = A^* \otimes' (B \otimes y)$$

$$y = B^* \otimes' (A \otimes x)$$

DAFTAR PUSTAKA

Aminu. Butkovic. 2008. *comparison of method for solving two sided system in max-algebra*. Journal of Management Mathematics.

Butkovic, P. .2010.*Max-linear system: Theory and Algorithms*. London: Springer

Cunninghame, G. & Butkovic, P. 2003. *The equation* $A \otimes x = B \otimes y$ *over (max,+)*. School of Mathematics and Statistics, The University of Birmingham, Edgbaston, B15 2TT Birmingham, UK

Farlow, K.G. . 2009. *Max-plus Algebra*. *Thesis.* Faculty of the Virginia Polytechhnic Institute and State University.

Heidergott, B. . 2007. *Max-plus Algebra and Queues.* Amsterdam: Vrijie University.

Majid, A. .2012. *Aljabar Max-plus dan Sifat-sifatnya*. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang.

Olsder, G. J & Woude, J. . 2005. *Max-plus at Work*. New Jersey: Princeton University Press.

Rudhito, A. 2016. *Aljabar Max-Plus dan Penerapanya*. Program Studi Pendidikan Matematika FKIP. Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Ruslan, Rosady. 2008. *Metodologi Penelitian Public Relations dan Komunikasi*, Jakarta: PT Raja Grafindo Persada.