BARISAN $\mathcal{I}$-CAUCHY YANG BERKAITAN DENGAN BARISAN $\mathcal{I}^*$-CAUCHY

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika

Oleh : **SINTIA AYU LESTARI**
NIM : 2008046045

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2024

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	Sintia Ayu Lestari
NIM	:	2008046045
Jurusan/Program Studi	:	Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

BARISAN $\mathcal{I}$-CAUCHY YANG BERKAITAN DENGAN BARISAN $\mathcal{I}^*$-CAUCHY

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 31 Juli 2024

Pembuat pernyataan,

Sintia Ayu Lestari

NIM : 2008046045

KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul	:	**Barisan $\mathcal{I}$-Cauchy yang Berkaitan dengan Barisan $\mathcal{I}^*$-Cauchy**
Penulis	:	Sintia Ayu Lestari
NIM	:	2008046045
Jurusan	:	Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 28 Agustus 2024

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

Eva Khoirun Nisa, M.Si.
NIP : 19870102 201903 2 010

Penguji II,

Yulia Romadiastri, S.Si., M.Sc.
NIP : 19810715 200501 2 008

Penguji III,

Yolanda Norasia, M.Si.
NIP : 19940923 201903 2 011

Penguji IV,

Ariska Kurnia Rachmawati, M.Sc.
NIP : 19890811 201903 2 019

Pembimbing,

Nur Khasanah M.Si.
NIP: 19911121 201903 2 017

NOTA DINAS

NOTA DINAS

Semarang, 31 Juli 2024

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	Barisan $\mathcal{I}$-Cauchy yang Berkaitan dengan Barisan $\mathcal{I}^*$-Cauchy
Nama	:	Sintia Ayu Lestari
NIM	:	2008046045
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing,

Nur Khasanah M.Si.
NIP : 19911121 201903 2 017

ABSTRAK

Barisan Cauchy merupakan alternatif untuk mengetahui kekonvergenan suatu barisan tanpa mencari limit barisannya. Konsep barisan $I-$Cauchy dan barisan I^*-Cauchy merupakan generalisasi dari barisan Cauchy. Dalam tugas akhir ini dibahas mengenai keterkaitan antara barisan $I-$Cauchy dengan barisan I^*-Cauchy. Kondisi I ideal digunakan sebagai syarat untuk merepresentasikan barisan I^*- Cauchy menjadi barisan $I-$Cauchy. Hasil dari penelitian ini adalah suatu barisan I^*-Cauchy dapat menjadi barisan $I-$Cauchy jika memenuhi kondisi I ideal.

Kata kunci : $I-$ *Convergence*, $I-$Cauchy, I^*-Cauchy

Daftar Simbol

Simbol	Keterangan
$=$	Sama dengan
$\neq$	Tidak sama dengan
$>$	Lebih dari
$\geq$	Lebih dari atau sama dengan
$<$	Kurang dari
$\leq$	Kurang dari atau sama dengan
$(\ldots)$	Menyatakan barisan
$\{\ldots\}$	Menyatakan himpunan
$\in$	Elemen dari
$\notin$	Bukan elemen dari
$\emptyset$	Himpunan kosong
$\subset$ & $\subseteq$	Subset ; himpunan bagian
$\cap$	Gabungan
$\cup$	Irisan
$\lvert \ldots \rvert$	Nilai mutlak
N	Himpunan bilangan asli
R	Himpunan bilangan real
$\triangle$	Himpunan tak hingga
$X = \{x_n\}$	Himpunan
$X = (x_n)$	Barisan
$M = (m_{nk})$	Barisan bagian
x	Anggota himpunan/barisan
y	Anggota himpunan /barisan
n	Suku barisan

α	Skalar
ρ	Metrik
ϑ	elemen tak nol
β_s	Kardinalitas minimal
β^s	Kardinalitas maksimal
$\underline{u}$	Densitas seragam bawah
$\overline{u}$	Densitas seragam atas
$\mathbf{I}$	Ideal
ξ	Titik limit
$A_i \triangle B_j$	Selisih simetri

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warrahmatullahi wabarakatuh.

Puji syukur penulis panjatkan atas kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Barisan $I-$Cauchy yang Berkaitan dengan Barisan I^*-Cauchy. Sholawat serta salam semoga tetap tercurah limpahkan kepada Baginda Nabi Muhammad SAW yang menjadi suri tauladan bagi seluruh umat manusia. Penyusunan skripsi ini bertujuan guna memenuhi syarat dalam menyelesaikan studi Strata 1 (S1) program studi Matematika di Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang. Proses penyusunan skripsi ini tidak lepas dari doa, bantuan, bimbingan, motivasi dan peran dari banyak pihak. Sehingga penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. Musadi, M.Ag. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
2. Ibu Any Muanalifah, P.h.D. selaku Kepala Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
3. Ibu Nur Khasanah, M.Si. selaku dosen pembimbing yang telah berkenan meluangkan waktu serta membimbing dan memberikan dorongan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi dengan baik.
4. Bapak Sukri dan Ibu Kasrumi selaku orangtua penulis yang selalu memberikan semangat, dukungan, nasehat dan doa-doanya yang tiada henti sehingga penulis termotivasi untuk mengerjakan skripsi ini dengan baik.

5. Shonia Adi selaku teman sebimbingan yang telah berjuang bersama dalam menyusun skripsi atas segala bantuan dan semangat yang telah diberikan.
6. Seluruh teman-teman mahasiswa program studi Matematika 2020 yang sudah menemani masa perkuliahan dan selalu memberikan semangat.
7. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah memberikan kontribusi hingga selesainya skripsi ini.

Semoga kebaikan semuanya menjadi amal ibadah yang diterima dan mendapat pahala yang berlimpah dari Allah SWT. Aamiin.

Atas segala kekurangan dan kelemahan dalam skripsi ini penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun. Semoga karya tulis yang sederhana ini dapat menjadi bacaan yang bermanfaat dan dapat dikembangkan bagi peneliti-peneliti selanjutnya.

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Pada barisan konvergen sering ditemui masalah terkait menentukan limit barisannya. Pada sistem bilangan real, barisan Cauchy merupakan salah satu alternatif untuk mencari konvergensi dari suatu barisan tanpa mencari limit barisannya. Adanya ekuivalensi antara barisan Cauchy dan barisan konvergen di R, sebagai cara untuk pembuktian barisan konvergen tanpa melalui limit barisannya. Barisan Cauchy merupakan barisan dengan menggunakan konsep jarak (metrik), selanjutnya konsep jarak tersebut digeneralisasi untuk sebarang ruang metrik. Pembahasan terkait barisan Cauchy dengan barisan konvergen menjadi komponen yang digunakan untuk penentuan kelengkapan suatu ruang metrik (Khusna, 2020).

Himpunan daerah yang merupakan hasil dari suatu barisan telah dilengkapi dengan fungsi jarak. Sebuah barisan dikatakan konvergen jika batasnya ada dan terhingga. Dengan kata lain, terdapat suatu nilai tetap yang menjadi batas barisan tersebut saat suku-suku barisan mendekati nilai tersebut. Syarat konvergensi barisan adalah bahwa barisan harus terbatas dan mendekati suatu nilai tertentu saat suku-suku barisan mendekati tak hingga. Suatu barisan dikatakan konvergen jika limit barisannya ada (Gunawan, 2017). Suatu barisan dikatakan $\mathbf{I} - \mathit{Convergence}$ yaitu ketika kekonvergenan suatu barisan dapat dievaluasi untuk metrik kurang dari nilai bilangan positif. Kemudian pengembangan dari $\mathbf{I} - \mathit{Convergence}$ yang dilakukan dengan menitikberatkan pada posisi barisan di luar metrik dapat dikatakan sebagai $I^* -$ *Convergence* (Arslan, 2018).

Dalam matematika, uji kekonvergenan dapat dilakukan dengan banyak metode salah satunya dengan uji kekonvergenan Cauchy. Hasil ekspansi dari ekuivalensi barisan cauchy dengan barisan konvergen adalah barisan I-Cauchy. Barisan I-Cauchy merupakan aplikasi dari barisan Cauchy yang nilai setiap metriknya lebih dari nol. Selanjutnya barisan I^*-Cauchy merupakan perkembangan dari barisan I-Cauchy dimana terdapat himpunan yang nilai ε nya diluar ruang metrik asal (Dems, 2005).

Konsep konvergensi statistik diperkenalkan oleh Steinhaus (1951). Pada penelitian ini membahas mengenai konvergensi statistik pada barisan bilangan real. Tujuan dalam penelitian tersebut adalah mengkaji sifat-sifat barisan fungsi yang konvergen secara statistik. Sifat-sifat tersebut selanjutnya diterapkan untuk membahas karakteristik limit superior secara statistik, limit inferior secara statistik, keterjumlahan Cesaro yang kuat, monotonisitas secara statistik, serta barisan Cauchy secara statistik (Agung, 2021).

Beberapa penelitian yang mengkaji tentang konvergen statistik diantara penelitian yang dilakukan oleh Salat (1980). Dalam penelitian ini memperkenalkan konsep konvergensi statistik dari barisan bilangan real. Selanjutnya hasil yang diperoleh dapat menunjukkan bahwa himpunan semua barisan konvergen secara statistik terbatas dari bilangan real adalah suatu himpunan bagian dari ruang bernorma linear m (dengan sup-norm) untuk semua barisan terbatas dari bilangan real. Berbeda dengan penelitian sebelumnya, Krishnamurthy (2014) melakukan penelitian yang mengkaji mengenai karateristik dari konvergen statistik dan barisan Cauchy statistik pada bidang Non-Archimedean. Peranan konvergensi statistik telah dibahas dalam teori analisis Fourier, teori ergodik, teori bilangan, teori ukuran, deret trigonometri, teori turnpike, dan ruang Banach (Das, dkk. 2014).

Nabiev (2004) menunjukkan bahwa barisan I Cauchy ekuivalen jika memenuhi kondisi barisan aritmatika dan syarat perlu dan cukup untuk ekuivalensi I Cauchy. Das (2010) dalam penelitiannya mengkaji kembali dari penelitian sebelumnya yaitu mengkonstruksi sebuah contoh dari Barisan I Cauchy yang bukan merupakan I^* Cauchy dan syarat perlu dan cukup untuk ekuivalensi keduanya. Kemudian, diperkenalkan juga ide dari I dan I^* divergen dalam suatu ruang metrik dan mempelajari sifat-sifatnya.

Penelitian selanjutnya dilakukan oleh Arslan (2018) yaitu menggeneralisasikan konsep I-Convergence, I^*-Convergence, I Cauchy dan I^* Cauchy dari barisan fungsi. Dalam artikel tersebut juga mengkaji tentang hubungan antara I-Convergence dan I^*-Convergence dan mengkaji beberapa sifat konvergen statistik di ruang bernorma-2.

Pengembangan dari konvergen statistik dan barisan Cauchy dilakukan Edely (2022), pada penelitiannya mengkaji tentang A konvergen statistik ekuivalen dengan A^* konvergen statistik. Selain itu, didefinisikan juga barisan A Cauchy dan barisan A^* Cauchy secara statistik dan menemukan hubungan yang ekuivalen dengan A konvergen statistik.

Berdasarkan uraian dan pemaparan beberapa penelitian terdahulu, maka pada tugas akhir ini ditunjukkan barisan $\mathsf{I}-$Cauchy yang berkaitan dengan barisan I^*-Cauchy.

1.2 Rumusan Masalah

Bagaimana keterkaitan barisan I-Cauchy dengan barisan I*-Cauchy?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari tugas akhir ini adalah memperoleh keterkaitan antara barisan I-Cauchy dengan barisan I*-Cauchy.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari tugas akhir ini adalah memberikan pengetahuan mengenai barisan I-Cauchy, barisan I*-Cauchy, kekonvergenan barisan I-Cauchy dalam ruang metrik. Tugas akhir ini juga diharapkan dapat menjadi referensi bagi peneliti lain yang akan mengangkat topik yang sama dengan pengembangan yang lebih sempurna.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam tugas akhir ini adalah studi kepustakaan atau *literatur review*.

1.6 Prosedur Penelitian

Langkah-langkah dalam menyusun tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji tentang definisi barisan dan deret.
2. Mengkaji tentang ruang metrik.

3. Mengkaji tentang konvergensi statistik.
4. Mengkaji tentang keterkaitan antara Barisan I-Cauchy dengan Barisan I^*-Cauchy.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan teori dasar yang digunakan pada pembahasan untuk bab selanjutnya, yaitu definisi barisan dan deret, ruang metrik, dan konvergen statistik.

2.1 Barisan dan Deret

Pada bagian ini diberikan definisi barisan dan deret sebagai dasar dalam pembahasan selanjutnya. Barisan dalam himpunan S adalah sebuah fungsi yang memiliki domain yang terdiri dari himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$, dan range yang merupakan himpunan bagian dari himpunan S. Berikut ini adalah definisi dari barisan.

Definisi 2.1.1 *(Bartle, 2000) Barisan bilangan real (atau barisan di* $\mathbb{R}$*) adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada himpunan bilangan asli* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *yang rangenya terdapat dalam himpunan bilangan real* $\mathbb{R}$*.*

Contoh 2.1.1 *Jika* $b \in \mathbb{R}$*, maka* $B := (b^n)$*, di mana* $b = \frac{1}{2}$*. Urutannya adalah* $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ *.*

Barisan bagian merupakan barisan baru yang suku-sukunya adalah sebagian dari suku-suku barisan yang yang terbentuk dari barisan utama dengan tetap memperhatikan urutan yang ada. Berikut ini diberikan definisi dari barisan bagian.

Definisi 2.1.2 *(Wahidah, 2021) Diberikan barisan bilangan real* $X = (x_n)$ *dan diberikan barisan bilangan asli naik tegak*

$n_1 < n_2 < \cdot\cdot\cdot < n_k < \ldots$ *Barisan* $X' = (x_{n\,k})$ *dengan*

$$(x_{n_k}) = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk}, \ldots)$$

Contoh 2.1.2 *Diberikan* $X := (\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$

1. Barisan $X'_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots)$ merupakan barisan bagian dari X.
2. Barisan $X'_2 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots)$ merupakan barisan bagian dari X.
3. Barisan $X'_3 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots)$ bukan merupakan barisan bagian dari X karena $n_2 < n_1$.

Sedangkan untuk definisi dari deret dapat dituliskan sebagai berikut.

Definisi 2.1.3 *(Goldberg, 1964) Jika* $X := (x_n)$ *adalah sebuah barisan dalam* R*, maka deret tak hingga (atau secara sederhana deret) yang dihasilkan oleh* X *adalah deret* $S := (s_k)$ *yang didefinisikan oleh*

$$s_1 := x_1$$

$$s_2 := s_1 + x_2 (= x_1 + x_2)$$

$$\ldots$$

$$s_k := s_k - 1 + x_k (= x_1 + x_2 + \cdot\cdot\cdot + x_k)$$

Bilangan-bilangan x_n disebut suku-suku deret dan bilangan-bilangan s_k disebut jumlah parsial deret ini. Jika $lim S$ ada, maka deret ini konvergen dan disebut sebagai jumlah atau nilai dari deret ini. Apabila limit ini tidak ada, maka deret S adalah divergen.

Contoh 2.1.3 *Diberikan* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots$

Perhatikan bahwa untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ mempunyai

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Akibatnya, jumlah parsial ke-n dari deret di atas adalah

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Pada contoh ini $lim(s_n) = 1$. Jadi deret tersebut konvergen ke 1.

Setelah diberikan definisi barisan dan deret, selanjutnya diberikan definisi ruang metrik.

2.2 Ruang Metrik

Ruang metrik merupakan konsep penting dalam analisis. Ruang metrik adalah himpunan yang dilengkapi dengan suatu definisi jarak antara elemennya. Metrik pada himpunan X adalah sebuah fungsi yang mengukur jarak antara dua titik dalam pada X. Berikut ini adalah definisi dari ruang metrik.

Definisi 2.2.1 *(Bartle, 2000) Sebuah metrik pada sebuah himpunan S adalah sebuah fungsi* $d : S \times S \to \mathbb{R}$ *yang memenuhi sifat-sifat berikut:*

1. $d(x, y) \geq 0$ *untuk semua* $x, y \in S$ *(kepositifan).*
2. $d(x, y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$ *(ketunggalan).*
3. $d(x, y) = d(y, x)$ *untuk semua* $x, y \in S$ *(simetri).*

4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *untuk semua* $x, y, z \in S$ *(ketaksamaan segitiga).*

Contoh 2.2.1 *Diberikan* Q *adalah bilangan rasional dan fungsi* d : Q $\times$ Q $\rightarrow$ R *yang didefinisikan oleh* $d(x, y) = |x - y|$ *adalah metrik pada* Q *sehingga* (Q, d) *adalah ruang metrik.*

Bukti.

1. Ditunjukkan $d(x, y) \geq 0$ untuk semua $x, y \in$ Q.

   Ambil $x, y \in$ Q, maka $d(x, y) = |x - y| \geq 0$.

   Jadi, $d(x, y) = |x - y| \geq 0$, untuk setiap $x, y \in$ Q.

2. Ditunjukkan $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$.

   ($\Leftarrow$) Jika $d(x, y) = 0$ maka $x = y$.

   Ambil $x, y \in$ Q, berdasarkan definisi $d(x, y) = |x - y| \geq 0$ maka $x = y$.

   ($\Rightarrow$) Jika $x = y$ maka $d(x, y) = 0$.

   Ambil $x, y \in$ Q dengan $x = y$, maka $d(x, y) = |x - y| \geq 0$.

   Jadi, $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$.

3. Ditunjukkan $d(x, y) = d(y, x)$ untuk semua $x, y \in$ Q.

   Ambil $x, y \in$ Q, maka $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$.

   Jadi, $d(x, y) = d(y, x)$, untuk semua $x, y \in$ Q.

4. Ditunjukkan $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk semua $x, y, z \in$ Q.

Ambil $x, y \in$ Q, maka

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x - y| \\ &= |(x - z) + (z - y)| \\ &\leq |x - z| + |z - y| \\ &= d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

Berdasarkan (1), (2), (3) dan (4) terbukti bahwa (Q, d) adalah ruang metrik.

Selanjutnya akan diberikan teorema ketaksamaan segitiga yang berhubungan dengan ruang metrik.

Teorema 2.2.1 *(Hernadi, 2015)*

Jika $a, b \in$ R *maka* $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Bukti. Kita memiliki $-|a| \leq a \leq |a|$ dan $-|b| \leq b \leq |b|$. dengan menambahkan pertidaksamaan-pertidaksamaan ini, kita mendapatkan

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Oleh karena itu, diperoleh $|a + b| \leq |a| + |b|$. Dapat ditunjukkan bahwa kesetaraan terjadi pada ketaksamaan segitiga jika dan hanya jika $ab > 0$, yang sama dengan mengatakan bahwa a dan b memiliki tanda yang sama. Sebuah ruang metrik (S, d) adalah sebuah himpunan S bersama dengan sebuah metrik d pada S.

Selanjutnya diberikan definisi dari ruang metrik linear yang merupakan pengembangan dari ruang metrik. Definisi ruang metrik linear adalah sebagai berikut.

Definisi 2.2.2 *(Iswanti, 2010) Terdapat X merupakan ruang linear atas* $\mathbb{F}$, *dengan* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. *Ruang X disebut ruang linear metrik jika terdapat metrik ρ sehingga operasi* $(+, \times)$ *dengan memenuhi,*

a $f = (x, y) \rightarrow x + y$

b $g = (\alpha, x) \rightarrow \alpha x$

Maka X disebut ruang linear metrik.

Contoh 2.2.2 *Diberikan himpunan tak kosong* $Q = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. *Didefinisikan metrik* $d((x_1, x_2)(y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. *Berikut ditunjukkan Q dengan metrik d merupakan ruang linear metrik.*

1. Ditunjukkan $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0$ jika dan hanya jika $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. Karena metrik d memiliki komponen yang sama yaitu $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.

2. Ditunjukkan $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d((y_1, y_2), (x_1, x_2))$. Metrik d memenuhi karena $d((x_1, x_2)(y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.
3. Ditunjukkan $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d((x_1 + z, x_2), (y_1 + z, y_2))$ untuk semua $z \in \mathbb{R}$. Metrik d memenuhi karena $d((x_1, x_2)(y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ sama dengan $d((x_1 + z, x_2), y_1 + z, y_2))$ untuk semua $z \in \mathbb{R}$.

4. $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ((x_1, x_2) + (y_1, y_2))$ memenuhi karena misalkan $(x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}^2$ maka $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, atau $((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)) = ((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2))$.

5. $(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$ memenuhi karena misalkan $c \in$ R dimana $cx = (c_1, cx_2)$ maka $c(x) = c(\alpha x_1, \alpha x_2) = (c\alpha x_1, c\alpha x_2)$

   Dengan memeriksa kondisi-kondisi tersebut, dapat menunjukkan bahwa Q dengan d merupakan ruang linear metrik.

Setelah ditunjukkan definisi dari ruang metrik, selanjutnya diberikan definisi dari densitas.

Definisi 2.2.3 *(Barbarski, 2011) Misalkan $A \in$ N dan $n \in$ N dengan (kardinalitas dari sebuah himpunan X dilambangkan dengan $|X|$)*

$$s_n(A) = \min_{m \in \mathrm{N}} |A \cap \{m, m+1, ..., m+n-1\}|$$

$$S_n(A) = \max_{m \in \mathrm{N}} |A \cap \{m, m+1, ..., m+n-1\}|$$

Diketahui bahwa terdapat limit sebagai berikut ini,

$$\underline{u} = \lim_{n \to \infty} \frac{s_n(A)}{n}, \bar{u} = \lim_{n \to \infty} \frac{\underline{s_n}(A)}{n}$$

Keduanya disebut densitas seragam bawah dan atas dari A. Jika $\underline{u}(A) = \bar{u}(A)$ maka $u(A) = \underline{u}(A) = \bar{u}(A)$ disebut densitas seragam dari A.

2.3 Konvergen Statistik

Konvergen statistik diperkenalkan oleh A. Zygmund, seorang teoritis kritis dan sosiolog asal Polandia pada awal tahun 1935, selanjutnya diperkenalkan definisi dari konvergen statistik sebagai berikut.

Definisi 2.3.1 *(Salat, 1980) Misalkan* N *dinyatakan sebagai himpunan bilangan bulat positif dan* (X, ρ) *adalah sebuah ruang metrik linear. Barisan* $(x_n)_{n \in \mathrm{N}}$ *dari elemen-elemen* X *dikatakan konvergen secara statistik ke* $x \in X$ *jika himpunan* $A(\varepsilon) = \{n \in \mathrm{N} : \rho\,(x_n, x) \geq \varepsilon\}$ *memiliki densitas alami nol untuk setiap* $\varepsilon > 0$.

Contoh 2.3.1 *Densitas seragam dari sebuah himpunan* $A \subset \mathrm{N}$ *didefinisikan sebagai berikut. Untuk bilangan bulat* $t \geq 0$ *dan* $s \geq 1$, *diberikan* $A(t+1, t+s) = \{n \in A : t+1 \leq n \leq t+s\}$. *Dimana* $\beta_s = \lim inf_{t\to\infty} A(t+1, t+s)$, $\beta^s = \lim sup_{t\to\infty} A(t+1, t+s)$. *Dapat ditunjukkan bahwa batas-batas berikut ini terdapat:* $\underline{u}(A) = \lim_{s\to\infty} \frac{\beta_s}{s}$, $\bar{u}(A) = \lim_{s\to\infty} \frac{\beta_s}{s}$. *Jika* $\underline{u}(A) = \bar{u}(A)$ *maka* $u(A) = \bar{u}(A)$ *disebut densitas seragam dari himpunan A. Dimana* $\mathrm{I}_u = \{A \subset \mathrm{N} : u(A) = 0\}$. *Maka* I_u *adalah ideal non-trivial dan* I_u*-convergent dikatakan sebagai konvergen statistik yang seragam.*

Selanjutnya diberikan definisi dari barisan Cauchy. Kriteria yang penting untuk membuktikan suatu barisan konvergen tanpa mengetahui limitnya disebut kriteria Cauchy. Berikut merupakan definisi dari barisan Cauchy.

Definisi 2.3.2 *(Goldberg, 1964) Sebuah barisan* $X = (x_n)$ *dari bilangan-bilangan real dikatakan sebagai sebuah barisan Cauchy* *jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat sebuah bilangan asli $H(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk semua bilangan-bilangan asli $n, m \geq H(\varepsilon)$, suku-suku x_n, x_m memenuhi $|x_n - x_m| < \varepsilon$.*

Contoh 2.3.2 *Akan ditunjukkan bahwa barisan $\frac{1}{n}$ adalah barisan Cauchy.*

Penyelesaian:
Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 (bergantung pada ε) $\in \mathbf{N}$ sehingga ada dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ maka

$$||x_m - x_n|| < \varepsilon$$

Untuk dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ maka

$$\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0}, \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$$

Sehingga

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| + \left|-\frac{1}{n}\right| \text{ (ketaksamaan segitiga)}$$

$$\leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Karena $\frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \varepsilon$ maka, dapat disimpulkan bahwa barisan $\frac{1}{n}$ adalah barisan Cauchy.

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini ditunjukkan teorema keterkaitan antara barisan $\mathbf{I}$-Cauchy dengan barisan $\mathbf{I}^*$-Cauchy. Sebelum membahas mengenai teorema keterkaitan antara barisan $\mathbf{I}$-Cauchy dengan barisan $\mathbf{I}^*$-Cauchy, diberikan definisi dari ideal dan filter. Berikut ini adalah definisi dari ideal dan filter.

3.1 Ideal dan Filter

Pada bagian ini dikaji mengenai notasi $\mathbf{I}$ sebagai ideal. Berikut ini adalah definisi dari ideal.

Definisi 3.1.1 *(Kuratowski, 1966) Misalkan $Y \neq \emptyset$. Suatu himpunan $\mathbf{I} \subset 2^Y$ dari himpunan-himpunan bagian dari Y dikatakan sebuah ideal di Y dengan memenuhi kondisi-kondisi berikut ini berlaku:*

(a) $\emptyset \in \mathbf{I}$

(b) $A, B \in \mathbf{I}$ *mengimplikasikan* $A \cup B \in \mathbf{I}$

(c) $A \in \mathbf{I}, B \subset A$ *mengimplikasikan* $B \in \mathbf{I}$.

Contoh 3.1.1 *Asumsikan X adalah himpunan bilangan bulat positif dan $\mathbf{I}$ adalah koleksi dari semua himpunan bilangan positif yang terbatas. Jika $\mathbf{I}$ didefinisikan sebagai $\mathbf{I} = \{A \subseteq X : |A| < \infty\}$ dengan $|A|$ memiliki jumlah anggota A yang terbatas, maka $\mathbf{I}$ adalah sebuah ideal di X.*

Akan dibuktikan bahwa $\mathbf{I}$ memenuhi kondisi-kondisi sesuai dengan Definisi 3.1.1.

1. Misalkan $A, B \in \mathsf{I}$. Akibatnya $A, B \subseteq X$ dengan $|A|, |B| < \infty$. Karena $A \cup B \subseteq X$ dan $|A| \cup |B| \subseteq |A| + |B| < \infty$, maka $A \cup B \in \mathsf{I}$.

2. Misalkan $A \in \mathsf{I}$ dan $B \subseteq A$. Karena $A \subseteq X$ dan $B \subseteq A \subseteq X$, maka misalkan $A = a_1, a_2, \ldots, a_n$, maka $B \subseteq X$ dengan $|B| < \infty$ sehingga $B \in \mathsf{I}$.

Karena I memenuhi kondisi-kondisi di atas, maka I ideal di X.

Berikut ini adalah definisi filter yang digunakan untuk pembuktian teorema kaitan antara barisan I-Cauchy dengan barisan I^*-Cauchy.

Definisi 3.1.2 *(Das dan Ghosal, 2006) Misalkan $Y \neq \emptyset$. Sebuah himpunan tak kosong $\mathsf{F} \subset 2^Y$ dari himpunan bagian dari Y dikatakan sebuah filter pada Y jika yang berikut ini terpenuhi:*

(a) $\emptyset \notin \mathsf{F}$
(b) $A, B \in \mathsf{F}$ *mengimplikasikan* $A \cap B \in \mathsf{F}$
(c) $A \in \mathsf{F}, B \subset A \subset Y$ *mengimplikasikan* $B \in \mathsf{F}$.

Contoh 3.1.2 *Misalkan* $X = \{1, 2, 3\}$ *dan* $\mathsf{F} = \{X, \{1\}, \{1, 2\}\}$. I *adalah suatu koleksi himpunan di* X.

1. $\emptyset \notin \mathsf{F}$, kondisi pertama terpenuhi.

2. Jika $A = X$ dan $B = \{1\}$, maka $A \cap B = \{1\} = B \in \mathsf{F}$
   Jika $A = X$ dan $B = \{1, 2\}$, maka $A \cap B = \{1, 2\} = B \in \mathsf{F}$
   Jika $A = \{1\}$ dan $B = \{1, 2\}$, maka $A \cap B = \{1\} = A \in \mathsf{F}$
   Jika $A, B \in \mathsf{F}$ dan $A = B$, maka $A \cap B \in \mathsf{F}$. Kondisi kedua terpenuhi.

3. Jika $A = \{1\}$ dan $B = \{1, 2\}$, $A \subset B$ maka $B \in \mathsf{F}$
   Jika $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$, $A \subset B = X$ maka $B \in \mathsf{F}$.

Kondisi ketiga juga terpenuhi.

Lemma 3.1.1 *(Nabiev dkk, 2007) Misalkan* $\mathbf{I}$ *adalah sebuah ideal di* Y *(yaitu* $Y \notin \mathbf{I}$ *)* $Y \neq \emptyset$*. Maka keluarga himpunan*

$$\mathrm{F}(\mathbf{I}) = \{M \subset Y : \exists A \in \mathbf{I} : M = Y \setminus A\} \tag{3.1}$$

adalah filter dalam Y*. Ini disebut filter yang berkaitan dengan* $\mathbf{I}$ *yang ideal.*

Bukti.

1. Karena $\mathbf{I}$ ideal di Y, maka setidaknya ada satu himpunan $A \in \mathbf{I}$ sedemikian sehingga $A \neq Y$. Oleh karena itu, dipilih $M = Y \setminus A$ sehigga $M \in \mathrm{F}(\mathbf{I})$. Maka $\mathrm{F}(\mathbf{I})$ bukanlah himpunan kosong.

2. Misalkan $M, N \in \mathrm{F}(\mathbf{I})$ yang berarti ada $A_1, A_2 \in \mathbf{I}$ sehingga $M = Y \setminus A_1$ dan $N = Y \setminus A_2$. maka

$$M \cap N = (Y \setminus A_1) \cap (Y \setminus A_2) \tag{3.2}$$

Pada ruas kanan persamaan (3.2) dapat direpresentasikan dalam bentuk lain untuk menunjang pembuktian lemma ini. Seperti ditunjukkan pada pembuktian berikut ini.

$$\begin{aligned}
&(Y \setminus A_1) \cap (Y \setminus A_2) \\
&= \{y \in Y \mid y \notin A_1\} \cap \{y \in Y \mid y \notin A_2\} \\
&= \{y \in Y \mid y \notin A_1 \text{dan} y \notin A_2\} \\
&= \{y \in Y \mid y \notin A_1 \cup A_2\} \\
&= Y \setminus (A_1 \cup A_2) \in \mathrm{F}(\mathbf{I})
\end{aligned}$$

3. Misalkan $M \in \mathsf{F}(\mathsf{I})$ dan $M \subset N \subset Y$ dengan $M = Y/A_1 dan N = Y/A_2$. Karena I ideal maka memenuhi sifat untuk $A_1 \in \mathsf{I} dan A_2 \subset A$ mengimplikasikan $A_2 \in \mathsf{I}$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa $Y/A_2 = N \in \mathsf{F}(\mathsf{I})$.

Dengan memenuhi ketiga kriteria tersebut, maka terbukti bahwa $\mathsf{F}(\mathsf{I}) = \{M \subset Y : \exists A \in \mathsf{I} : M = Y \setminus A\}$ merupakan filter di Y.

Selanjutakan diberikan definisi dari ideal proper sebagai berikut.

Definisi 3.1.3 *(Nabiev dkk, 2007) Suatu ideal* I *yang tepat dapat dikatakan admissible jika* $\{x\} \in \mathsf{I}$ *untuk setiap* $x \in Y$.

Contoh 3.1.3 *Misalkan* $Y = \mathbb{N}$ *dan* $\mathsf{I} = \{A \subseteq Y : |A| < \infty\}$. *Berdasarkan Contoh 3.1.1 sudah dibuktikan bahwa* I *memenuhi aksioma dari definisi ideal. Berikutnya Dibuktikan bahwa* I *adalah ideal admissible. Karena* $\mathsf{I} = \{\emptyset\}$ *dan* $Y = \mathbb{N}$ *dengan* $|Y| = \infty$ *sehingga* $Y \notin \mathsf{I}$, *maka* I *adalah ideal nontrivial. Sementara untuk setiap* $y \in Y$ *dengan* $|\{y\}| = 1$ *maka* $\{y\} \in \mathsf{I}$. *Oleh karena itu,* I *adalah ideal admissible di Y.*

3.2 Kaitan Barisan I-Cauchy dengan Barisan I^*-Cauchy

Sebelum membahas tentang teorema barisan I-Cauchy yang berkaitan dengan barisan I^*-Cauchy diberikan definisi dari $\mathsf{I} -$ *Convergence.*

Konsep $\mathsf{I} -$ *Convergence* adalah generalisasi dari konvergensi statistik dan didasarkan pada gagasan ideal I dari himpunan bagian dari himpunan $\mathbb{N}$ bilangan bulat positif. Selanjutnya diberikan definisi dari $\mathsf{I} -$ *Convergence* sebagai berikut.

Definisi 3.2.1 *(Arslan dan Dundar, 2018) Sebuah barisan* (f_n) *dikatakan* $\mathrm{I} - Convergence$ *ke* f *pada* $X \subseteq \mathbb{R}$ *jika dan hanya jika untuk setiap* $\epsilon > 0$ *dan setiap* $x \in X$ *berlaku* $\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \in \mathrm{I}$.

Contoh 3.2.1 *Misalkan* v *adalah sebuah ukuran ternormalisasi aditif berhingga sembarang yang didefinisikan pada sebuah lapangan* $\mathrm{U} \subset 2^{\mathbb{N}}$. *Misalkan* U *berisi semua* $\{n\}$, $n \in \mathbb{N}$. *Maka* $\mathrm{I}_v = \{A \subset \mathbb{N} : v(A) = 0\}$ *adalah sebuah ideal non-trivial di* $\mathbb{N}$ *yang menghasilkan kekonvergenan* I_v.

Selanjutnya diberikan definisi dari $\mathrm{I}^* - Convergence$. $\mathrm{I}^* - Convergence$ merupakan pengembangan dari $\mathrm{I} - Convergence$. Berikut ini adalah definisi dari $\mathrm{I}^* - Convergence$.

Definisi 3.2.2 *(Arslan dan Dundar, 2018) Sebuah barisan* (f_n) *dikatakan* $\mathrm{I}^* - Convergence$ *ke* f *pada* $X \subseteq \mathbb{R}$ *jika dan hanya jika* $\forall \epsilon > 0$ *dan* $\forall x \in X, \exists K_x \not\in \mathrm{I}$ *dan* $\exists n_0 = n_0(\epsilon, x) \in K_x : \forall n \geq n_0$ *dan* $n \in K_x$ *sedemikian hingga* $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Contoh 3.2.2 *Diberikan* I *merupakan ideal dari semua subhimpunan berhingga* $\mathbb{N}$. *Misalkan* $(\mathbb{R}, G)$ *ruang metrik dan* $(x_n) = \frac{1}{n^2+1}$ *dalam ruang metrik* $(\mathbb{R}, G)$ *dengan* $G(x_n, x_n, x) = |x - y| + |x - z| - |y - z|$. *Dipilih* M *himpunan bilangan genap sehingga* $M = |2, 4, 6, \ldots|$. *Maka* (x_n) *merupakan* $\mathrm{I}^* - Convergence$ *ke* $x = 0$.

Perhatikan bahwa $M = |2, 4, 6, \ldots|$ merupakan filter $\mathrm{F(I)}$, karena $M = \mathbb{N} \backslash \{1, 3, 5, \ldots\}$ dan $\{1, 3, 5, \ldots\} \in \mathrm{I}$. Kemudian ditunjukkan

$lim_{k\to\infty} G(x_n, x_n, x) = 0$. Perhatikan bahwa $k \in M$ dan

$$
\begin{aligned}
G(x_n, x_n, x) &= G\left(\frac{1}{k^2+1}, \frac{1}{k^2+1}, x\right) \\
&= G\left(\frac{1}{k^2+1}, \frac{1}{k^2+1}, 0\right) \\
&= \left|\frac{1}{k^2+1} - \frac{1}{k^2+1}\right| + \left|\frac{1}{k^2+1} - 0\right| - \left|\frac{1}{k^2+1} - 0\right| \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Ini menunjukkan bahwa $(x_n) = \frac{1}{n^2+1}$ $I^* - Convergence$ ke $x = 0$ dengan dipilih $M = \{2, 4, 6, \ldots\}$.

Selanjutnya diberikan definisi dari Barisan I-Cauchy. Barisan I-Cauchy merupakan generalisasi dari barisan Cauchy yang selisih suku-sukunya lebih dari ε. Berikut ini merupakan definisi dari barisan I-Cauchy.

Definisi 3.2.3 *(Nabiev, 2007) Misalkan (X, ρ) adalah sebuah ruang metrik linear dan $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ menjadi sebuah ideal yang dapat diterima. Maka sebuah barisan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dalam X disebut sebuah barisan I-Cauchy dalam X jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $N = N(\varepsilon)$ sedemikian sehingga*

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, x_N) \geq \varepsilon\} \in I$$

Contoh 3.2.3 *Misalkan $\mathbb{R}$ adalah ruang bilangan real dengan metrik biasa d. Biarkan $\mathbb{N} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Delta_j$ menjadi dekomposisi dari $\mathbb{N}$ sedemikian rupa sehingga setiap Δ_j tak hingga dan $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$. Misalkan I adalah kelas dari semua himpunan bagian A dari $\mathbb{N}$ yang dapat memotong hanya sejumlah berhingga Δ_i. Maka*

$\mathbf{I}$ adalah sebuah ideal yang dapat diterima secara non-trivial dari $\mathbb{N}$.

Sekarang $\{\frac{1}{n}\}_{\{n\in\mathbb{N}\}}$ adalah Cauchy di $(\mathbb{R}, d)$. Tentukan barisan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dengan $x_n = \frac{1}{j}$ jika $n \in \Delta_j$. Misal $\epsilon > 0$ diberikan. Kemudian ada $k \in \mathbb{N}$ sedemikian rupa sehingga $d(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) < \frac{\epsilon}{2}$ kapanpun $n, m \geq k$. Sekarang $B = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_k \in \mathbf{I}$ dan dengan jelas $m, n \notin B \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$. Oleh karena itu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ adalah $\mathbf{I}$-Cauchy.

Teorema 3.2.1 *(Arslan, 2018) Jika $\{f_n\}$ adalah $\mathbf{I}$ − Convergence, maka itu adalah barisan $\mathbf{I}$–Cauchy.*

Bukti. Misalkan $\{f_n\}$ adalah $\mathbf{I}$-Convergence ke f. Kemudian, untuk $\varepsilon > 0$

$$A\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right) = \left\{n \in \mathbb{N} : ||f_n(x) - x(x), z|| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in \mathbf{I},$$

untuk setiap $x \in X$ dan setiap bukan nol $z \in Y$. Hal ini menyiratkan bahwa

$$A^c\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right) = \left\{n \in \mathbb{N} : ||f_n(x) - f(x), z|| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in F(\mathbf{I}),$$

untuk setiap $x \in X$ dan setiap bukan nol $z \in Y$ dan oleh karena itu $A^c\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right)$ tidak kosong. Jadi, dapat memilih interger positif k sedemikian rupa sehingga $k \notin A\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right)$ dan $||f_k(x) - f(x), z|| < \frac{\varepsilon}{2}$. Didefinisikan himpunan

$$B(\varepsilon, z) = \{||f_n(x) - f_k(x), z|| \geq \varepsilon\},$$

untuk setiap $x \in X$ dan setiap bukan nol $z \in Y$, sehingga dapat ditunjukkan bahwa $B(\varepsilon, z) \subset A\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right)$. Biarkan $n \in B(\varepsilon, z)$, maka dimiliki

$$\varepsilon \leq ||f_n(x) - f_k(x), z|| \leq ||f_n(x) - f(x), z|| + ||f_k(x) - f(x), z|| < ||f_n(x) - f(x), z|| + \frac{\varepsilon}{2}$$

untuk setiap $x \in X$ dan setiap bukan nol $z \in Y$. Hal ini menyiratkan bahwa

$$\frac{\varepsilon}{2} < ||f_n(x) - f(x), z||$$

sehingga, $n \in A\ \frac{\varepsilon}{2}, z$ dan $\{f_n\}$ adalah barisan I-Cauchy.

Selanjutnya, diberikan definisi mengenai barisan I*-Cauchy seperti ditunjukkan pada definisi berikut ini.

Definisi 3.2.4 *(Nabiev, 2007) Misalkan* (X, ρ) *adalah sebuah ruang metrik linear dan* $\mathrm{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ *menjadi sebuah ideal yang dapat diterima. Kemudian sebuah barisan* $x = (x_n)$ *dalam* X *disebut barisan I*-Cauchy jika ada sebuah himpunan* $M = \{m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots\} \subset \mathbb{N}$, $M \in F(\mathrm{I})$ *sedemikian hingga barisan* $x_M = (x_{m_k})$ *merupakan barisan Cauchy biasa dalam X, yaitu,*

$$\lim_{k,p\to\infty} \rho\ x_{m_k}, x_{m_p} = 0$$

Berdasarkan Contoh 3.2.3 dibuktikan barisan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bukan merupakan barisan I*-Cauchy.

Contoh 3.2.4 *Dibuktikan bahwa* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *bukanlah I* Cauchy. Jika memungkinkan, asumsikan bahwa* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *adalah I* Cauchy. Kemudian ada* $A \in F(\mathrm{I})$ *sedemikian rupa sehingga* $\{x_n\}_{n\in A}$ *adalah Cauchy. Karena* $\mathbb{N} \setminus A \in \mathrm{I}$ *sehingga ada* $\mathrm{l} \in \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga*

$\mathbb{N} \setminus A \subset \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_I$ *Tetapi kemudian* $\Delta_i \subset A$ *untuk semua* $i > I$. *Khususnya* $\Delta_{I+1}, \Delta_{I+2} \subset A$. *Dari konstruksi* Δ_j *jelaslah bahwa diberikan sebarang* $k \in \mathbb{N}$ *terdapat* $m \in \Delta_{I+1}$ *dan* $n \in \Delta_{I+2}$ *sedemikian sehingga* $m, n \geq k$. *Oleh karena itu, tidak ada* $k \in \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga setiap kali* $m, n \in A$ *dengan* $m, n \geq k$ *maka* $d(x_m, x_n) < \epsilon_0$ *di mana* $\epsilon_0 = \frac{1}{3(I+1)(I+2)} > 0$. *Ini bertentangan dengan fakta bahwa* $\{x_n\}_{n\in A}$ *adalah Cauchy.*

Definisi tersebut dapat digunakan untuk menjelaskan kaitan antara barisan I-Cauchy dengan I^*-Cauchy yang direpresentasikan pada teorema berikut ini.

Teorema 3.2.2 *(Nabiev dkk, 2007) Misalkan* I *adalah sebuah ideal. Jika* $x = (x_n)$ *adalah sebuah barisan* I^**-Cauchy maka ia adalah* I*-Cauchy.*

Bukti. Misalkan $x = (x_n)$ adalah sebuah barisan I^*-Cauchy, diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$. Maka menurut Definisi 3.1.5, ada sebuah himpunan $M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots : M_{k-1} < M_k\} \subset \mathbb{N}$, *sehingga*$M \in F(I)$ dan $\lim_{k,p\to\infty} \rho(x_{mk}, x_{mp}) = 0$. Karena $\lim_{k,p\to\infty} \rho(x_{mk}, x_{mp}) = 0$ maka untuk bilangan real $\varepsilon > 0$ tersebut, terdapat bilangan asli $k_0 = k_0(\varepsilon)$, sehingga untuk setiap $k, p > k_0 = k_0(\varepsilon)$ berlaku $\rho(x_{m_k}, x_{m_p}) < \varepsilon$.

Misalkan dipilih $N = N(\varepsilon) = m_{k0+1}$. Maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ tersebut, diperoleh

$$\rho(x_{mk}, x_N) < \varepsilon, k > k_0$$

Selanjutnya diberikan $H = \mathbb{N} \setminus M$ dengan $H \in I$ sehingga

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathrm{N} : \rho(x_n, x_N) \geq \varepsilon\} \subset H \cup \{m_1 < m_2 < \ldots < m_{k_0}\} \quad (3.3)$$

Maka himpunan dari (3.3) adalah milik dari $\mathbf{I}$. Oleh karena itu, untuk setiap $\varepsilon > 0$ dapat ditemukan sebuah bilangan asli $N = N(\varepsilon)$ sedemikian rupa sehingga $A(\varepsilon) \in \mathbf{I}$, maka barisan (x_n) adalah $\mathbf{I}$-Cauchy. Oleh karena itu pembuktiannya sudah selesai ■.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa suatu barisan (x_n) yang merupakan barisan $\mathbf{I}^*-$Cauchy, dapat direpresentasikan menjadi barisan $\mathbf{I}-$Cauchy jika memenuhi kondisi $\mathbf{I}$ sebagai suatu ideal. Syarat $\mathbf{I}$ ideal harus memenuhi tiga kriteria yang berlaku yaitu himpunan tak kosong merupakan elemen dari $\mathbf{I}$, himpunan pada $\mathbf{I}$ mengimplikasikan gabungan dua himpunan yang anggotanya elemen $\mathbf{I}$, dan jika suatu himpunan subset himpunan lain, maka himpunan tersebut harus termuat pada $\mathbf{I}$.

4.2 Saran

Pada skripsi ini hanya diberikan bukti keterkaitan antara barisan $\mathbf{I}-$Cauchy dengan $\mathbf{I}$ $-$ *Convergence* dan keterkaitan antara barisan $\mathbf{I}-$Cauchy dan barisan $\mathbf{I}^*-$Cauchy. Sebagai penelitian berikutnya disarankan untuk mengkaji keterhubungan barisan $\mathbf{I}-$Cauchy dan barisan $\mathbf{I}^*-$Cauchy dengan kondisi *Almost Periodicity*(*AP*), keterkaitan antara $\mathbf{I}$ $-$ *Convergence* dengan $\mathbf{I}^*-$Cauchy.

DAFTAR PUSTAKA

Alwi, Wahudah. 2021. Analisis Real. Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia. Jawa Barat.

Arslan, Mukaddes. Dundar, Erdinc. 2018. I Convergence and I Cauchy Sequence of Functions In 2-Normed Spaces. *Konuralp Journal of Mathematics*. 6(1)(2018) 57-62

Bartle, Robert G 2000. *Introduction To Real Analysis*. John Wiley and Sons, Inc, USA.

Das, Pratulananda. Savas, Ekrem. 2014. On I Statistically Pre-Cauchy Sequences. *Taiwanese Journal of Mathematics*. 2014. 115-126

Das. Pratulananda, Ghosa. Sanjoy Kr. 2010. Some further results on I-Cauchy sequences and condition (AP). *Computers and Mathematics with Applications*. 59 (2010) 2597–2600

H Fast. 1951. *Sur La Convergence Statistique*. Colloq. Math 2(1951), 241-244

H. I. Miller. 1819. A Measure Theoretical Subsequence Characterization of Statistically Convergent Subsequences. *Acta Math. Hungar*. 93(1-2)(2001) 135-151.

H. Steinhaus. 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. *Collaq. Math* 2(1951), 73-74

J. A. Fridy. 1993. Statistical limit points. *Proc. Amer. Math. Soc,.* 118(1993), 1187-1192

J. A. Fridy. 1993. On Statistical Convergence, *Analysis*, 5(1985)

J. Connor. 1990 *Two Valued Measures and Summability Analysis* 10(1990), 373-385

J. L. Kelley. 1955. *General Topology*. Springer-Verlag, New York. 1955

Jumwal, Rohini. Sharma, Shivani. J. Dalip Singh. 2017. Some More Results On **I** Convergence of Filters. *NTMSCI 5* No. 1. 2017. 190-195

K. Suja , V. Srinivasan . 2014. On Statistically Convergent and Statistically Cauchy Sequences in Non Archimedean Fields. 2014. 1038-1043

M. Gurdal. 2004. Some Types of Convergence. Doctoral Diss. S. Demirel Univ. Isparta. 2004

Anar Nabiev, Serpil Pehlivan and Mehmet Gurdal, On **I** Cauchy Sequences. *TAIWANESE JOURNAL OF MATHEMATICS* 569-576, 2007.

P Kostyrko, M. Macaj, T. Salat and M. Sleziak, **I** Convergence and Extremal **I** Limit Points. *Math. Slovaca*. 55(2005): 443-464

T. Salat, 1980. On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers. *Math. Slovaca* 30(1980) 139-150.

RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri
   1. Nama : Sintia Ayu Lestari
   2. Tempat, Tanggal Lahir : Jepara, 14 April 2002
   3. Alamat Rumah : Ds. Singorojo RT08/R01, Kec. Mayong, Kab. Jepara
   4. No. Hp : 085602317938
   5. Email : sintiaayu1404@gmail.com

B. Pendidikan Formal
   1. Pendidikan Formal
      a. TK Tunas Pertiwi 1
      b. SDN 1 Singorojo
      c. SMPN 1 Mayong
      d. SMAN 1 Mayong
      e. UIN Walisongo Semarang

Semarang, 31 Juli 2024

Sintia Ayu Lestari

NIM: 2008046045