

**KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA
PREDATOR-PREY LESLIE-GOWER PADA TANAMAN PADI**

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika dalam
Ilmu Matematika



Oleh : **ATIKA DEWI ARDIYANTI NIM
2008046032**

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2024

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Atika Dewi Ardiyanti
NIM : 2008046032
Jurusan/Program Studi : Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

Kontrol Optimal Model Matematika Predator-Prey Leslie-Gower pada Tanaman Padi

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 07 Mei 2024

Pembuat pernyataan,



Atika Dewi Ardiyanti
NIM 2008046032



KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **Kontrol Optimal Model Matematika
Predator-Prey Leslie-Gower pada Tanaman
Padi**

Penulis : Atika Dewi Ardiyanti

NIM : 2008046032

Jurusan : Matematika

Telah ditujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji
Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima
sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu
Matematika.

Semarang, 22 Mei 2024

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

Zulaikha, M.Si

NIP 199204092019032027

Penguji II,

Sri Isnani S. S.Ag., M. Hum

NIP 199703302005012001

Penguji III,

Yolanda Norasifa, M.Si

NIP 1994092320190320032001

Penguji IV,

Atika Kurnia R, M.Sc

NIP 198908112019032019

Pembimbing I,

Siti Masliah, M.Si

NIP 197706112011012004

Pembimbing II,

Zulaikha, M.Si

NIP 199204092019032027



NOTA DINAS

Semarang, 07 Mei 2024

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : Kontrol Optimal Model Matematika Predator-Prey
Leslie-Gower pada Tanaman Padi
Nama : Atika Dewi Ardiyanti
NIM : 2008046032
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,



Siti Maslihah, M.Si

NIP 197706112011012004

NOTA DINAS

Semarang, 07 Mei 2024

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : Kontrol Optimal Model Matematika Predator-Prey
Leslie-Gower pada Tanaman Padi
Nama : Atika Dewi Ardiyanti
NIM : 2008046032
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing II,



Zulaikha, M.Si

NIP 199204092019032027

ABSTRAK

Lebih dari setengah penduduk dunia membutuhkan tanaman padi sebagai sumber bahan pangan. Namun, faktor organisme pengganggu tanaman (OPT) yaitu hama wereng menyebabkan kerusakan tanpa batas sehingga menyebabkan gagal panen petani. Upaya petani untuk menghindari gagal panen yaitu dengan pemberian pestisida, namun beberapa petani memberikan pestisida secara berlebihan menyebabkan kematian bagi *Predator* alami OPT. Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan permasalahan kontrol optimal model *Predator-Prey* pada tanaman padi menggunakan pestisida, dengan meminimumkan populasi *Predator* serta biaya kontrol pestisida. Model *Predator-Prey* adalah model yang mengasumsikan hubungan predasi antara *Predator* dengan *Prey*. Penelitian ini menggunakan Prinsip Minimum *Pontryagin* dilanjutkan secara numerik menggunakan metode *Sweep* Maju Mundur. Hasil penelitian menunjukkan konstruksi model dapat dilakukan dalam model *Predator-Prey* menggunakan kontrol pestisida, selanjutnya sistem yang optimal dapat diselesaikan menggunakan prinsip minimum *pontryagin* dengan langkah awal membentuk fungsi Hamiltonian. Berdasarkan simulasi numerik menunjukkan keefektifan pemberian pestisida apabila diberikan secara tepat, namun jika berlebihan akan mengakibatkan ledakan hama sekunder.

Kata kunci : Model *Predator-Prey*, Tanaman Padi, Hama Wereng, Kontrol Optimal, *Sweep* Maju Mundur.

KATA PENGANTAR

Puji syukur atas kehadiran Allah Yang Maha Esa yang telah memberikan rahmat, taufik, serta hidayat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "**Kontrol Optimal Model Matematika Predator-Prey Leslie-Gower pada Tanaman Padi**", sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan program Sarjana (S1) Prodi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak mungkin terselesaikan tanpa adanya doa, dukungan, bimbingan, bantuan, semangat, dan nasihat dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan kali ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Sukardi, Ibu Musti'ah, Kakak Febi Ardianti, Adik Revina Ardiyanti, serta seluruh keluarga yang telah mencurahkan semua kasih sayang, doa, nasihat, dan dukungan bagi penulis selama menempuh pendidikan S1
2. Prof. Dr. Nizar, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
3. Prof. Dr. H. Musahadi, M.Ag. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
4. Any Muanalifah, M.Si, Ph.D. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
5. Siti Maslihah, M.Si. selaku dosen pembimbing I yang

telah memberikan bimbingan, arahan, dan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

6. Zulaikha, M.Si. selaku dosen pembimbing II sekaligus dosen wali yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan semangat kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
7. Bapak dan Ibu Dosen matematika yang telah memberikan pengetahuan kepada penulis, serta seluruh staff dan karyawan atas bantuannya.
8. Teman-teman S1 Prodi Matematika angkatan 2020 yang telah membersamai penulis selama menimba ilmu di kampus tercinta.
9. Orang-orang terdekat penulis yang telah memberikan dukungan dan semangat tanpa henti.
10. Atika Dewi Ardiyanti yang sudah mampu berproses untuk menyelesaikan semua sampai saat ini. Terimakasih karena sudah memberikan yang terbaik.

Semoga kebaikan semuanya menjadi amal ibadah yang diterima dan mendapat pahala yang berlimpah dari Allah SWT. Aamiin.

Atas segala kekurangan dan kelemahan dalam skripsi ini penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun. Semoga karya tulis yang sederhana ini dapat menjadi bacaan yang bermanfaat dan dapat dikembangkan bagi peneliti-peneliti selanjutnya.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iii
NOTA PEMBIMBING I	iv
NOTA PEMBIMBING II	v
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xiii
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	6
1.4 Manfaat Penelitian	6
BAB 2 LANDASAN PUSTAKA	7
2.1 Tanaman Padi	7
2.2 Organisme Pengganggu Tanaman	8
2.3 Pestisida	9
2.4 Persamaan Diferensial	10
2.5 Sistem Persamaan Diferensial	10
2.6 Model Pertumbuhan Logistik	14
2.7 Model Predator-Prey	15
2.7.1 Model <i>Predator-Prey Lotka Volterra</i>	15
2.7.2 Model <i>Predator-Prey Leslie-Gower</i>	16
2.8 Fungsi Respon	17
2.9 Model <i>Predator-Prey Leslie-Gower</i> dengan Makanan Tambahan untuk <i>Predator</i>	20

2.10 Kontrol Optimal	21
2.10.1 Prinsip Minimum Pontryagin	22
2.10.2 Contoh Penyelesaian Masalah Kontrol Optimal Sederhana	25
2.11 Metode Runge Kutta	26
2.11.1 Metode Runge Kutta Orde 4	26
2.12 Metode <i>Sweep</i> Maju Mundur	27
2.13 Penelitian Terdahulu	28
BAB 3 Metode Penelitian	30
3.1 Alur Penelitian	30
BAB 4 PEMBAHASAN	32
4.1 Konstruksi Model <i>Predator-Prey</i> dengan Penambahan Variabel Kontrol	32
4.2 Penyelesaian Model <i>Predator-Prey</i> dengan Kontrol	35
4.2.1 Fungsi Hamiltonian	36
4.2.2 Kondisi Optimal	37
4.2.3 Persamaan State	37
4.2.4 Persamaan Costate	38
4.2.5 Sistem yang Optimal	38
4.3 Simulasi Numerik	39
4.4 Hasil Simulasi Numerik	41
4.4.1 Simulasi I	41
4.4.2 Simulasi II.	45
4.4.3 Simulasi III	48
BAB 5 Penutup	52
5.1 Kesimpulan	52
5.2 Saran	53
DAFTAR PUSTAKA	54
Lampiran-lampiran.	61

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul	Halaman
Tabel 2.1	Deskripsi Variabel	21
Tabel 2.2	Deskripsi Parameter	21
Tabel 2.3	Penelitian Terdahulu	28
Tabel 4.1	Deskripsi Variabel	34
Tabel 4.2	Deskripsi Parameter	35
Tabel 4.3	Nilai awal Populasi dalam Simulasi Numerik	40
Tabel 4.4	Nilai awal Parameter dalam Simulasi Numerik	41

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
Gambar 4.1	Populasi Padi Simulasi I	42
Gambar 4.2	Populasi Hama Wereng Simulasi I	43
Gambar 4.3	Kontrol Pestisida Simulasi I	44
Gambar 4.4	Populasi Padi Simulasi II	45
Gambar 4.5	Populasi Hama Wereng Simulasi II	46
Gambar 4.6	Kontrol Pestisida Simulasi II	47
Gambar 4.7	Populasi Padi Simulasi III	48
Gambar 4.8	Populasi Hama Wereng Simulasi III	49
Gambar 4.9	Kontrol Pestisida Simulasi III	51

DAFTAR LAMPIRAN

		Halaman
Lampiran 1	Program MATLAB 2013a	61
Lampiran 2	Daftar Riwayat Hidup	68

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan pusat semua ilmu di dunia yang mempunyai fungsi penting dalam kehidupan, karena dapat menuntaskan berbagai persoalan dalam kehidupan setiap harinya (Amir, 2015). Tanpa adanya konsep dasar ilmu matematika, tentunya manusia akan mengalami kesulitan. Salah satu cara memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari dapat disajikan dalam simbol matematika yang disebut model matematika (Tambunan, 2020).

Pemodelan matematika adalah sistem persamaan yang dapat menunjukkan suatu masalah kompleks yang sedang dialami (Ndi, 2022). Hasil pemodelan biasanya berbentuk persamaan diferensial atau berbentuk pertidaksamaan linear maupun nonlinear (Argo dan Prasetyo, 2021). Salah satu model matematika adalah model *predator-prey*.

Model *predator-prey* merupakan objek dari pemodelan matematika yang menarik untuk diteliti dalam bidang matematika ekologi karena berkaitan dengan satu spesies bahkan lebih. Model *predator-prey* sendiri pertama kali diteliti oleh A.J Lotka dan Vito Volterra pada tahun 1926, yang selanjutnya dikenal dengan model *Lotka-Volterra* (Murray, 1993). Model *Lotka-Volterra* dibagi menjadi 2 populasi yaitu *prey* dan *predator*, model *Lotka-Volterra* diteliti guna melihat laju perkembangan dan punahnya *prey* yang dimakan oleh *predator* (Murray, 1993). Hasil dari model *Lotka-Volterra* menunjukkan adanya interaksi antara *predator*

dan *prey* secara sederhana, yaitu ketika populasi *prey* meningkat maka pertumbuhan *predator* akan meningkat, ketika *predator* memangsa maka menyebabkan populasi *prey* menurun (Murray, 1993).

Model *Lotka-Volterra* dianggap kurang realistis karena adanya pertumbuhan tanpa batas pada populasi *prey* (Murray, 1993). Oleh karena itu, pada tahun 1948 *Leslie* dan *Gower* mengembangkan model *Predator-Prey Lotka-Volterra* yang kemudian dikenal dengan model *Leslie-Gower*. *Predator* yang awalnya tumbuh secara eksponensial atau tingkat pertumbuhan *prey* berbanding lurus terhadap tingkat pemangsaan oleh *predator* dan terjadi selamanya, kemudian dikembangkan menjadi tumbuh secara logistik atau pertumbuhan *prey* dengan memasukkan asumsi bahwa daya dukung populasi *predator* sesuai dengan jumlah populasi *prey* (Arsyad, Resmawan, & Achmad, 2020). Model *Leslie-Gower* dapat diaplikasikan salah satunya pada tanaman padi dengan hama wereng (Renny dan Reorita, 2021).

Tanaman padi dipilih karena merupakan tanaman pokok yang dibutuhkan oleh lebih dari setengah penduduk di dunia sebagai sumber bahan pangan (Utama dan Zulman, 2015). Terlihat pada tahun 2022 produksi padi di Indonesia diperkirakan menyentuh angka 55,67 juta ton/GKG (Gabah Kering Giling) (BPS, diakses pada 19 Mei 2023). Hal ini merupakan salah satu dari kuasa Allah SWT yang dapat menumbuhkan tanaman padi di bumi sesuai dengan Q.S Al-An'am ayat 95 berikut:

إِنَّ اللَّهَ فَالِقُ الْحَبِّ وَالنَّوَى يُخْرِجُ الْحَيَّ مِنَ الْمَيِّتِ وَمُخْرِجُ الْمَيِّتِ مِنَ الْحَيِّ

ذَٰلِكُمْ اللَّهُ فَالِقُ الْإِنۡشَاطِطِ ۝

Artinya: "Sungguh, Allah yang menumbuhkan butir tumbuh-tumbuhan dan biji buah-buahan. Dia mengeluarkan yang hidup dari yang mati dan mengeluarkan yang mati dari hidup. (Yang memiliki sifat-sifat) demikian ialah Allah, maka mengapa kamu masih berpaling?" (Taufiq, 2013)

Tafsir Al-Qur'an ini menjelaskan bahwa Allah yang menumbuhkan butir tumbuh-tumbuhan, padi-padian, dan biji kurma serta buah-buahan lainnya. Selain itu, tafsir menurut Ibnu Katsir ayat ini menjelaskan bahwa Allah SWT memberitahukan bahwa Dialah yang membelah biji-bijian dan semua bibit tanaman, yakni dia membelah di dalam tanah, lalu menumbuhkan dari biji-bijian berbagai macam tanaman, sedangkan dari bibit tanaman Dia keluarkan berbagai macam pohon yang menghasilkan buah-buahan yang berbeda-beda warna, bentuk, dan rasa.

Tanaman padi memerlukan Nitrogen (N) dan Fosfor (P) yang merupakan unsur hara dalam jumlah besar yang sangat dibutuhkan oleh tanaman untuk menunjang pertumbuhannya. (Renny dan Reorita, 2021). Namun, tanaman padi masih dapat mengalami kenaikan maupun penurunan produksi karena dapat dipengaruhi oleh banyak faktor eksternal antara lain, luas lahan, pemakaian benih, penggunaan pupuk, pestisida, total tenaga kerja, banyaknya bimbingan pada petani, serta irigasi (Damayanti, 2013). Selain itu, terdapat faktor OPT (Organisme Pengganggu Tanaman) yaitu semua organisme yang mengganggu perkembangan tanaman pokok dan dapat menyebabkan kerusakan tanpa batas. Organisme ini dapat berupa hama, penyakit, dan gulma yang menyebabkan berkurangnya hasil produksi tanaman pokok (Renny dan Reorita, 2021).

Selain itu, dampak hama wereng juga dapat merusak tanaman padi yang menyebabkan gagal panen para petani (Istiani, Fitria, & Bramantha, 2019). Berbagai upaya telah dikerahkan petani untuk menghindari gagal panen, salah satunya dilakukan penyemprotan pestisida yang berjenis insektisida. Penggunaan pestisida dinilai lebih efektif untuk menurunkan serangan hama wereng, meskipun tanaman yang telah terserang tidak bisa pulih secara normal (Istiani, Fitria, & Bramantha, 2019). Terkadang, beberapa petani memberikan pestisida kimia secara berlebihan yang menyebabkan kematian bagi *predator* alami dari OPT sehingga menimbulkan ledakan hama sekunder bagi padi (Sarumaha, 2020). Sehingga berakhir dengan terganggunya keseimbangan ekosistem lingkungan, baik pada tanah maupun lingkungan hidup (Himmah dkk, 2021). Oleh karena itu, akan dilakukan kontrol optimal sebagai upaya untuk menurunkan serangan dari hama wereng menggunakan pestisida (Istiani, Fitria, & Bramantha, 2019). Kontrol optimal yaitu metode yang dilakukan dengan memilih fungsi masukan untuk mengoptimalkan baik memaksimalkan maupun meminimumkan fungsi tujuan sehingga mendapatkan solusi paling baik dari sebuah permasalahan (Luenberger, 1979).

Model *Predator-Prey* maupun masalah kontrol optimal beberapa kali telah diteliti sebelumnya. Studi awal tentang sistem persamaan diferensial otonomus dua dimensi dengan memodelkan sistem *predator-prey* merupakan hasil dari penelitian (Aziz-Alaoui dan Okiye, 2002). Selanjutnya, Penelitian Prasad (2013) menggunakan fungsi respon *Beddington-DeAngelis* dengan penambahan kontrol berupa pengendali hayati dan makanan tambahan pada model *Predator-Prey* yang menghasilkan dampak timbal balik dari hubungan *predator* dan

prey, yaitu meskipun dampak timbal balik yang tinggi mendukung koeksistensi stabil antara *predator* dan *prey*. Namun, ketika dampak timbal balik rendah yang dapat mendukung koeksistensi agar stabil adalah pemberian makanan tambahan sebagai kontrol agar *predator* dan *prey* dapat hidup berdampingan.

Sesuai pemaparan tersebut, pemanfaatan makanan tambahan bagi *predator* merupakan cara yang diakui untuk pengendalian hama, namun kualitas dan kuantitas juga perlu diperhatikan (Prasad, Banerjee, & Srinivasu, 2013). Selanjutnya, penelitian yang dilakukan Ulfa, Suryanto, & Darti (2017) yaitu mengembangkan model *predator-prey Leslie-Gower* dengan penambahan makanan tambahan yang menghasilkan sistem yang permanen, menunjukkan bahwa solusi sistem dibatasi. Penelitian ini akan mengembangkan model dari penelitian Ulfa, Suryanto, & Darti (2017) dengan pemberian kontrol berupa pestisida yang efektif untuk menurunkan serangan hama wereng yang diambil dari model (Renny dan Reorita, 2021), selanjutnya dilakukan simulasi numerik menggunakan metode *Sweep* maju-mundur.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, dapat rumusan masalah yaitu:

1. Bagaimana konstruksi Model Matematika *Predator-Prey Leslie Gower* pada Tanaman Padi Menggunakan Kontrol Optimal berupa Pestisida?

2. Bagaimana Penyelesaian Permasalahan Kontrol Optimal Model Matematika *Predator-Prey Leslie-Gower* pada Tanaman Padi Menggunakan Pestisida?
3. Bagaimana Hasil Simulasi Numerik Model Matematika *Predator-Prey* pada Tanaman Padi Tanpa dan dengan Pemberian Kontrol Optimal berupa Pestisida?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini antara lain:

1. Mengkonstruksi Model Matematika *Predator-Prey Leslie Gower* pada Tanaman Padi Menggunakan Kontrol Optimal berupa Pestisida.
2. Menyelesaikan Permasalahan Kontrol Optimal Model Matematika *Predator-Prey Leslie Gower* pada Tanaman Padi Menggunakan Pestisida.
3. Hasil Simulasi Numerik Kontrol Optimal pada Model Matematika *Predator-Prey* pada Tanaman Padi menggunakan Pestisida.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan memiliki manfaat bagi penulis maupun pembaca, antara lain:

1. Memberikan Ilmu dan Wawasan tentang Sistem *Predator-Prey* Terutama Terkait dengan Kontrol Optimal.
2. Memecahkan Permasalahan dalam Bidang Pertanian Khususnya pada Tanaman Padi.
3. Menjadi Rujukan Penelitian Tentang Kontrol Optimal pada Sistem *Predator-Prey*.

BAB 2

LANDASAN PUSTAKA

2.1 Tanaman Padi

Tanaman padi yaitu tanaman pokok yang dibudidayakan karena merupakan tanaman penting bagi lebih dari setengah populasi penduduk di dunia sebagai sumber pangan (Utama dan Zulman, 2015). Menurunnya produksi padi mengakibatkan masalah dalam banyak aspek yaitu, aspek sosial, kehidupan, politik, ekonomi, dll (Istiani, Fitria, & Bramantha, 2019). Nitrogen (N) dan Fosfor (P) adalah unsur hara yang sangat dibutuhkan dalam pertumbuhan padi (Renny dan Reorita, 2021). Pengetahuan tentang penggunaan nitrogen harus didapatkan dan dilakukan agar terciptanya hasil gabah yang meningkat serta berkurangnya polusi dampak dari pemakaian pupuk N yang terlalu banyak.

Tanam jarak legowo merupakan salah satu cara menanam tanaman padi yang diunggulkan guna mendapatkan hasil gabah yang tinggi. Teknik jarak legowo adalah cara yang dilakukan dengan mengatur jarak antar tanaman. Memanipulasi banyaknya padi juga merupakan cara yang dilakukan dalam teknik jarak legowo, hal ini dilakukan agar letak tanaman yang ditanam berada di pinggir. Tanaman yang berada di pinggir akan mempengaruhi kualitas gabah dan banyaknya jumlah gabah yang dipanen (Ningrat, Muall & Makabori, 2021).

2.2 Organisme Pengganggu Tanaman

Organisme Pengganggu Tanaman (OPT) adalah organisme penyerang tanaman yang menyebabkan kerusakan fisik ataupun biokimia sehingga berakibat terjadinya kompetisi zat hara (Pakpahan dan Doni, 2019). OPT dapat dibagi menjadi 3 kelompok berdasarkan jenis serangannya yakni, patogen, gulma, dan hama. Hama pada tanaman padi sawah menyebabkan penurunan produksi yang cukup penting baik langsung maupun tidak langsung (Sarumaha, 2020). Menurut Hadi, Rahadian, & Tarwotjo (2018) Penggerek batang padi merupakan salah satu jenis OPT yang sangat merugikan bagi tanaman padi di Indonesia serta beberapa negara di Asia.

Dilakukan berbagai upaya untuk mengendalikan OPT, pengendalian OPT merupakan upaya yang dilakukan manusia untuk mencegah berkembangnya OPT agar tidak menyebabkan kerusakan pada padi sehingga tidak mendatangkan kerugian bagi petani (Renny dan Reorita, 2021). Menurut penelitian A'yunin, Achdiyat, Saridewi (2020) Upaya penanganan yang kerap dilakukan oleh petani yaitu menggunakan pestisida kimia karena lebih efektif dan efisien. Para petani juga merasa bahwa petunjuk yang diberikan dalam kemasan pestisida memudahkan mereka dalam pengaplikasiannya. Terkadang, petani yang kurang bijaksana akan memberikan pestisida kimia secara berlebihan terhadap tanaman yang malah menyebabkan kematian bagi predator alami dari serangga hama, kematian predator alami tersebut menyebabkan ledakan hama sekunder padi (Sarumaha, 2020). Oleh karena itu, diperlukan perhitungan yang tepat agar tidak terjadi hal tersebut, perlu juga dilakukan penyuluhan pada para petani setelah melakukan perhitungan yang tepat.

2.3 Pestisida

Secara harfiah pestisida bisa diartikan sebagai pembunuh hama. Menurut Djojosumarto (2008) pestisida bisa diartikan sebagai seluruh zat kimia atau bahan lainnya dan bakteri atau virus yang dapat berfungsi sebagai berikut:

1. Mencegah dan memberantas hama maupun penyakit yang dapat merusak semua bagian tanaman maupun hasil hasil pertanian
2. Membasmi rumput liar
3. Mematikan daun maupun mencegah pertumbuhan yang tidak diinginkan
4. Merangsang bagian tanaman yang ingin ditumbuhkan (tetapi bukan termasuk golongan pupuk)
5. Mencegah hama luar pada hewan ternak
6. Membasmi hama air
7. Mencegah dan membasmi bakteri serta binatang dalam bangunan, rumah tangga, maupun dalam alat pengangkutan
8. Mencegah dan membasmi hewan yang bisa menyebabkan penyakit pada manusia.

2.4 Persamaan Diferensial

Persamaan yang memuat variabel tak bebas dan turunannya terhadap variabel bebas disebut persamaan diferensial. Terdapat 2 jenis persamaan diferensial yaitu, biasa dan parsial (Nugroho, 2011). Berikut bentuk umum persamaan diferensial:

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}, x^n) = 0 \quad (2.1)$$

dimana:

x^n : turunan ke-n dari x

Berikut merupakan contoh contoh dari persamaan diferensial:

1. $\frac{dy}{dx} = e^x + \sin(x)$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$
3. $3x^2 dx + 2y dy = 0$

Dalam pemodelan matematika, model *predator-prey* pada penelitian ini menggunakan solusi persamaan diferensial biasa. Selain persamaan diferensial biasa dan parsial, ada istilah tingkat (*order*) dan derajat (*degree*). Tingkat persamaan diferensial dilihat dari turunan paling tinggi yang ada dalam persamaan, sedangkan derajat persamaan diferensial dilihat dari pangkat tertinggi dalam persamaan diferensial (Purnomo, 2012).

2.5 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial yang memiliki orde n serta dikatakan sebagai sistem dari n persamaan

dengan orde satu (Olsder, 2003). Bentuk umumnya antara lain sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) \\
 \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) \\
 \frac{dx_3}{dt} &= f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) \\
 &\vdots \\
 \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sistem persamaan diferensial dapat menjadi dua jenis berdasarkan sifat kelinearannya, yakni sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial nonlinear.

1. Sistem Persamaan Diferensial Linear

Sistem persamaan diferensial dapat dikatakan linear apabila fungsi f_1, \dots, f_n dalam persamaan (2.2) merupakan fungsi linear dari variabel tak bebas x_1, \dots, x_n (Braun & Golubitsky, 1983). Secara umum, sistem persamaan linear orde pertama memiliki bentuk sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\
 &\vdots \\
 \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Jika setiap fungsi $g_1, \dots, g_n = 0$ maka sistem persamaan (2.3) dapat dikatakan homogen, jika tidak sama dengan 0 maka sistem persamaan (2.3) dikatakan nonhomogen. Berikut merupakan sistem homogen linear:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n\end{aligned}\tag{2.4}$$

Penyelesaian persoalan menggunakan sistem persamaan (2.4) akan cukup rumit diselesaikan, terutama jika n besar. Oleh karena itu, dapat digunakan konsep vektor dan matriks yang dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{dx}{dt} = A\vec{x}\tag{2.5}$$

Dengan A adalah matriks $n \times n$ dengan elemen a_{ij} dan \vec{x} adalah vektor dengan komponen x_1, \dots, x_n . Kita definisikan A dan \vec{x} dilambangkan oleh $A\vec{x}$ sebagai vektor yang komponen ke- i nya:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Maka, persamaan (2.5) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = A\vec{x},\tag{2.6}$$

dengan:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.5.1 Berikut adalah contoh sistem persamaan diferensial linear yakni.

$$\begin{aligned} k'1 &= -k_1 + 2k_2 \\ k'2 &= 4k_2 - k_3 \\ k'3 &= 2k_1 - k_2 + 3k_3 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Sistem persamaan (2.7) dapat dituliskan menjadi:

$$\dot{k} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

2. Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

Sistem persamaan diferensial dapat disebut nonlinear jika variabel *dependent* (tak bebas) atau memiliki turunan berpangkat lebih dari sama dengan dua, atau adanya perkalian antara variabel *independent* dan turunannya (Boyce & DiPrima, 2009). Berikut bentuk umum sistem persamaan diferensial nonlinear:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (2.8)$$

dengan:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, f(x, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{bmatrix}$$

Contoh 2.5.2 Berikut adalah contoh sistem persamaan diferensial nonlinear yakni.

$$k'1 = -k1 + 2k2 \tag{2.9}$$

$$k'2 = k12$$

2.6 Model Pertumbuhan Logistik

Pertumbuhan logistik yaitu model terkait dengan pertumbuhan populasi yang berhubungan dengan kepadatan sehingga menggambarkan efek dari kompetisi spesies (Fitriani & Purnomo, 2013). Model logistik diasumsikan terdapat batas waktu populasi mendekati titik tetap. Jumlah kelahiran dan kematian sama dititik ini, sehingga grafiknya mendekati konstan (Timuneno, Utomo, & Widowati, 2008). Model pertumbuhan logistik bisa diturunkan dengan asumsi sebagai berikut.

1. Laju pertumbuhan populasi $\frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt}$ saat $N(t) = 0$

2. Laju pertumbuhan menurun secara linear serta nilainya 0 saat $N(t) = K$

Verhulst (1938) pertama kali memperkenalkan model pertumbuhan logistik yang persamaan umumnya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left[1 - \frac{N}{K} \right] \quad (2.10)$$

dimana:

$N(t)$: Jumlah populasi terhadap waktu (t)

r : Laju pertumbuhan intrinsik

K : *carrying capacity*/ daya dukung lingkungan

Nilai yang menunjukkan kecepatan tumbuh populasi adalah r , K adalah ukuran maksimal dari populasi. Jika diasumsikan $r > 0$ dengan melihat bahwa setiap populasi mempunyai potensi untuk berkembang biak, yang kemudian dapat digunakan dalam suatu model pertumbuhan logistik.

2.7 Model Predator-Prey

Model Predator-Prey adalah suatu model matematika yang mengasumsikan bahwa terdapat hubungan predasi antara *predator* sebagai pemangsa dan *prey* sebagai organisme dimangsa. Model *predator-prey* akan menyebabkan gangguan keseimbangan ekosistem jika terdapat perbedaan jumlah populasi (Anggraini, Helmi, & Kiftiah, 2021). Berikut merupakan beberapa jenis model *predator-prey*.

2.7.1 Model Predator-Prey Lotka Volterra

Model Predator-Prey pertama kali dikemukakan oleh Lotka Volterra (1926) yang meneliti bahwa *prey* menjadi satu satunya

makanan bagi *predator*, dan jika *predator* tidak bertemu *prey* maka *predator* akan berkurang. Berikut merupakan model

Lotka-Voltera.

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \alpha X - \beta XY \\ \frac{dY}{dt} = cXY - dY \end{cases} \quad (2.11)$$

Dimana X yakni populasi prey, Y yakni populasi predator, prey diasumsikan akan tumbuh secara eksponensial dengan ketersediaan makanan yang tak terbatas kecuali dimangsa oleh predator yang diwakili dengan persamaan αX , dengan laju pemangsaan predator pada prey diasumsikan berbanding lurus dengan laju pertemuan predator dengan prey yang diwakili dengan βxy (Anggraini, Helmi, & Kiftiah, 2021).

2.7.2 Model Predator-Prey Leslie-Gower

Dalam perkembangan, Leslie (1948) memodifikasi dari Lotka-Volterra (1926) dalam Model *Leslie Gower* dengan Fungsi Respon *Holling Tipe II*. Model *Leslie-Gower* mengembangkan model *Lotka-Volterra* yang awalnya populasi *predator* bertumbuh secara eksponensial dan dipengaruhi adanya predasi dikembangkan menjadi bertumbuh secara logistik dan terdapat pengaruh lingkungan *predator* sebanding dengan jumlah populasi *prey* (Arsyad, Resmawan, & Achmad, 2020). Berikut merupakan model leslie-gower.

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = X(r - \alpha X - c_1 Y) \\ \frac{dY}{dt} = sY \left(1 - \frac{c_2 Y}{X}\right) \end{cases} \quad (2.12)$$

Dimana X merupakan populasi prey, Y merupakan populasi predator, $-\alpha XX$ merupakan penurunan populasi prey karena adanya hubungan antar prey, $-c_1XY$ merupakan penurunan populasi prey karena terdapat hubungan antara prey dengan predator, $\frac{c_2YY}{X}$ merupakan penurunan populasi predator karena adanya interaksi antara predator dengan pengaruh prey (Anggraini, Helmi, & Kiftiah, 2021).

Sifat alami predator yang aktif bergerak membuat mereka mampu untuk menargetkan lebih dari satu prey atau dapat memilih sumber makanan yang berbeda. Sudah ada beberapa penelitian sebelumnya yang meneliti mengenai Model Predator-Prey dengan makanan tambahan yaitu (Srinivasu, Prasad, & Vankatesulu, 2007) yang mempelajari Lotka Volterra *Predator-Prey* dengan makanan tambahan pada predator.

2.8 Fungsi Respon

Fungsi respon merupakan keterkaitan jumlah konsumsi *predator* dengan kepadatan populasi *prey* setiap waktunya (Hunsicker dkk, 2011). Fungsi respon pertama kali dikembangkan oleh Holling (1959), yang berdasarkan jenis karakternya dibagi menjadi 3 tipe yakni, tipe pertama (linear), tipe kedua (mengalami perlambatan), tipe ketiga (sigmoid), kemudian ada pula fungsi *Beddington De-Angelis* yang merupakan pengembangan dari fungsi Holling tipe II.

1. Holling Tipe I

Holling tipe I mengasumsikan waktu untuk mencari dan memangsa oleh *predator* dapat diabaikan karena *pemangsa*

yang pasif sehingga lebih memilih mangsanya untuk mendekat (Holling, 1959). Hal tersebut mengakibatkan bertambahnya laju konsumsi *predator* secara linear dengan bertambahnya populasi *prey*, tetapi konstan saat *predator* berhenti memangsa *prey*. Secara umum Holling tipe I dapat dituliskan sebagai berikut.

$$p(X) = aX \quad (2.13)$$

dimana

p : Fungsi respon Holling tipe I

a : Tingkat penangkapan *prey* oleh *predator*

X : Populasi *prey*

2. Holling Tipe II

Holling tipe II menunjukkan rata-rata waktu yang diperlukan untuk mengkonsumsi *prey* oleh *predator* (Murray dkk, 2013). Penggunaan waktu yang mulai dipertimbangkan untuk mencari dan memangsa dengan sifat dari *predator* yang tidak mencari *prey* baru walaupun populasi *prey* telah musnah merupakan karakteristik dari Holling tipe II (Holling, 1959). Secara umum, Holling tipe II dapat dituliskan sebagai berikut.

$$p(X) = \frac{\beta x}{1 + \gamma X} \quad (2.14)$$

dimana

p : Fungsi respon Holling II

β : Tingkat penangkapan *prey* oleh *predator*

γ : Waktu yang dibutuhkan *predator* untuk mencari *prey*

X : Populasi *prey*

3. Holling Tipe III

Fungsi Holling tipe III merupakan pengembangan dari Holling tipe II, yakni *predator* mulai mencari *prey* lain diluar *prey* utama, hubungan antara tingkat penangkapan *prey* dan populasi *prey* bersifat sigmoid, yang mana saat populasi *prey* menipis, tingkat pemangsaan juga menjadi sedikit, tetapi ketika populasi *prey* meningkat maka tingkat pemangsaan juga *bertambah* (Holling, 1959). Secara umum, Holling tipe III dapat dituliskan sebagai berikut.

$$p(X) = \frac{\beta X^2}{n^2 + X^2} \quad (2.15)$$

dimana

p : Fungsi respon Holling tipe III

β : Tingkat penangkapan *prey* oleh *predator*

n : Tingkat kejenuhan

X : Populasi *prey*

4. Beddington De-Angelis

Fungsi respon Beddington De-Angelis memiliki ekstra ε y pada penyebutnya, yang menunjukkan inferensi timbal balik antara *predator*. Parameter ε mengukur besarnya inferensi timbal balik pada *predator* (Prasad, Banerjee, & Srinivasu, 2013). Beddington De-Angelis dengan hubungan timbal balik antara *predator* sebagai berikut.

$$\dot{N} = -\frac{cNP}{a + N + \rho P} \quad (2.16)$$

dimana

N : Kepadatan (*pest*) *prey*

P : Kepadatan *predator*

c : Tingkat maksimal predasi

a : Jumlah maksimal pengurangan populasi *prey* efek pemangsaan *predator*

ρ : Kekuatan gangguan timbal balik antara *predator* Model yang akan digunakan menggunakan fungsi respon beddington de-angelis.

2.9 Model *Predator-Prey Leslie-Gower* dengan Makanan Tambahan untuk *Predator*

Pada penelitian ini penulis akan mengembangkan model dari Ulfa, Suryanto, & Darti pada tahun (2017) yang telah mempertimbangkan dan memodifikasi model *Predator-Prey Leslie-Gower* dengan penambahan berupa makanan tambahan pada *predator*. Makanan tambahan terhadap *predator* merupakan salah satu cara yang diakui secara luas dalam pengendalian bidang biologi (Prasad, Banerjee, & Srinivasu, 2013). Pemanfaatan makanan tambahan dinilai mampu untuk mengendalikan keseimbangan ekologi. Pada model ini menggunakan fungsi respon beddington de-angelis yang ditunjukkan pada $\frac{\delta XY}{X+m+nA}$. Adapun model Ulfa, Suryanto, & Darti (2017) yaitu sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = (1 - X)X - \frac{\delta XY}{X + m + nA} \\ \frac{dY}{dt} = \beta \left(1 - \frac{Y}{X + e}\right)Y + \frac{\sigma nAY}{X + m + nA} \end{cases} \quad (2.17)$$

dimana:

Tabel 2.1. Deskripsi Variabel

Variabel	Deskripsi
$\frac{dX}{dt}$	Laju pertumbuhan populasi <i>prey</i> terhadap waktu
$\frac{dY}{dt}$	Laju pertumbuhan populasi <i>predator</i> terhadap waktu
X	Populasi Padi terhadap waktu
Y	Populasi Hama Wereng terhadap waktu

Tabel 2.2. Deskripsi Parameter

Parameter	Deskripsi
m	tingkat kematian hama wereng tanpa adanya tanaman padi
r	laju pertumbuhan intrinsik tanaman padi
b	tingkat pertumbuhan maksimum hama wereng
e	kemampuan efektif hama wereng untuk mendeteksi makanan tambahan relatif terhadap tanaman padi
σ	Kekuatan timbal balik antar predator
nA	jumlah makanan tambahan yang diberikan kepada hama wereng
δ	tingkat kematian hama wereng tanpa adanya tanaman padi dibagi laju pertumbuhan intrinsik tanaman padi
β	tingkat pertumbuhan maksimum hama wereng dibagi laju pertumbuhan intrinsik tanaman padi

2.10 Kontrol Optimal

Persamaan diferensial yang disebut variabel *state* merupakan permasalahan pokok kontrol optimal (Lenhart & Workman, 2007). Variabel *state* kemudian dikontrol menggunakan perlakuan spesial berupa fungsi kontrol. Misalkan dimiliki $u(t)$ merupakan variabel kontrol dan $x(t)$ merupakan *state*, maka masalah kontrol optimal sederhana yaitu mencari $u(t)$ dan $x(t)$ untuk menjadikan optimal fungsi objektif yang disusun. Kendala variabel *state* memenuhi persamaan diferensial yang bergantung pada variabel kontrol yakni.

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x(t), u(t)) \quad (2.18)$$

Masalah awal kontrol optimal yaitu meminimumkan fungsi tujuan yang diberikan, yakni:

$$\min_u \int_0^T f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt \quad (2.19)$$

dengan:

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x(t), u(t))$$

dengan nilai awal

$$x(0) = x_0$$

dengan kondisi transversal

$$x(T) \text{ bebas}$$

dimana fungsi tujuan dalam fungsi kontrol:

$$J(u) = \int_0^T f(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) dt \quad (2.20)$$

2.10.1 Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip minimum pontryagin diaplikasikan untuk memperoleh kontrol paling baik dalam sistem dari variabel *state* dari awal sampai akhir yang meminimumkan fungsi tujuan menggunakan kontrol $u(t)$. Akan dibangun fungsi Hamiltonian untuk mendapatkan kondisi tersebut, yaitu dengan menambahkan variabel baru yaitu *costate* yang dilambangkan dengan $\lambda(t)$, sehingga didapatkan:

$$H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \geq H(t, x^*, u^*(t), \lambda(t)) \quad (2.21)$$

Untuk semua kontrol u terhadap waktu t , dimana Hamiltonian H jika:

$$\begin{aligned} H &= f(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) g_i(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) \\ &= \text{fungsi tujuan} + \text{costate} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Kita dapat meminimumkan H dengan u di u^* , dari kondisi diatas kita dapat menuliskan ketentuan Hamiltonian:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \text{ di } u^* \longrightarrow f_u + \lambda g_u = 0 \text{ (Kondisi Optimal)} \\ \frac{dx}{dt} &= g(t, x, u) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, x(t_0) = x_0 \text{ (Persamaan State)} \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \longrightarrow \frac{d\lambda}{dt} = -(f_x + \lambda g_x) \text{ (Persamaan Costate)} \\ \lambda(T) &= 0 \text{ (Kondisi Transversal)} \end{aligned}$$

dimana f adalah fungsi tujuan, sedangkan g adalah persamaan *state*, dan $i = 1, 2, \dots, n$. Langkah berikutnya, menurunkan fungsi Hamiltonian pada $u(t)$ yaitu:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (2.23)$$

Cara mengetahui apakah kontrol yang didapatkan adalah maksimum atau minimum dilakukan dengan melihat turunan kedua dari fungsi Hamiltonian terhadap $u(t)$, ketika:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} > 0, \text{ pada } u^* \quad , \quad (2.24)$$

maka pemecahan masalah kontrol dilakukan dengan memaksimumkan. Namun, ketika kontrol $u(t) > 0$ diselesaikan dengan meminimumkan.

Selain variabel kontrol, dalam fungsi hamiltonian terdapat pula variabel *state* $x(t)$ dan variabel *costate* $\lambda(t)$. Melihat persamaan (2.21) didapatkan persamaan *state* yakni:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = g_i(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) \quad (2.25)$$

Sedangkan untuk persamaan *costate* antara lain:

$$\dot{\lambda} = \frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial H\lambda(t)}{\partial x_i}$$

$$\lambda(T) = 0 \quad (2.26)$$

$$x(T) \text{ bebas}$$

Kondisi *transversal* adalah $\lambda(T) = 0$. Menurut persamaan (2.25) merupakan persamaan *state* dan persamaan (2.26) merupakan persamaan *costate* yang kemudian disubstitusikan ke persamaan (2.23) sehingga menghasilkan kontrol yang optimal (Lenhart & Workman, 2007).

2.10.2 Contoh Penyelesaian Masalah Kontrol Optimal Sederhana

$$f = \max_u \int_0^1 Ax(t) - Bu(t)^2 dt$$

bergantung terhadap: $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}x(t)^2 + Cu(t)$, $x(0) = x_0 > -2$, $A \geq 0$, $B > 0$

Penyelesaian

1. Menentukan fungsi Hamiltonian H: dibentuk berdasarkan fungsi tujuan diatas

$$H = Ax - Bu^2 - \frac{1}{2}\lambda x^2 + C\lambda u$$

2. Kondisi Optimal

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2Bu + C\lambda \text{ pada } u^* \quad \rightarrow u^* = \frac{C\lambda}{2B}$$

sehingga: $u^* = -\frac{C\lambda}{2B}$ dari masalah tersebut akan

dimaximumkan

dengan

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} < 0$$

3. Persamaan State

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}x^2 + Cu, \quad x(0) = x_0$$

4. Persamaan Costate $\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A + x\lambda$

dengan kondisi transversal $\lambda(1)$

$$= 0$$

5. Sistem yang Optimal

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}x^2 + Cu^*$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A + x\lambda$$

$$u^* = -\frac{C\lambda}{2B}$$

2.11 Metode Runge Kutta

Metode runge kutta yaitu metode yang membutuhkan satu nilai awal yang diselesaikan secara numerik, dimana metode ini hanya bisa menyelesaikan persamaan diferensial. Persamaan maupun sistem persamaan diferensial tersebut tidak bisa diselesaikan secara eksak. Metode ini dapat menyelesaikan fungsi itu sendiri tanpa memerlukan turunan fungsi orde tinggi (Zheng & Zhang, 2017).

2.11.1 Metode Runge Kutta Orde 4

Metode runge kutta orde 4 dipilih karena metode ini mempunyai tingkat keakuratan yang lebih tinggi dibandingkan dengan orde 1 dan 2, namun jika dengan orde 5 tingkat keakuratan metode ini hampir mirip, sehingga dipilih orde 4 agar perhitungan lebih efisien. Metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan atau sistem persamaan diferensial yakni metode runge kutta orde 4. Pada penelitian ini, digunakan metode sweep maju mundur runge kutta orde 4 karena menggunakan sistem persamaan diferensial dengan

nilai awal yang diketahui dan persamaan lain diketahui nilai akhirnya yakni λ . Metode runge kutta orde 4 yang dipakai untuk menyelesaikan persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ - yaitu:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.27)$$

dengan:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{aligned}$$

(Munir, 2012)

2.12 Metode Sweep Maju Mundur

Metode ini merupakan salah satu teknik numerik untuk memecahkan masalah kontrol optimal. Teknik ini merupakan contoh metode tidak langsung dimana persamaan diferensial dari prinsip maksimum diselesaikan secara numerik. Setelah metode dinilai secara singkat, 2 teorema konvergensi dibuktikan untuk melihat tipe nilai dasar untuk masalah kontrol optimal.

Langkah-langkah dalam metode *Sweep* maju mundur menurut Lenhart dan Workman (2007) yakni.

1. Buat asumsi awal untuk nilai u' pada interval
2. Gunakan kondisi awal $x_0 = x(0)$ dan nilai $u(t)$ untuk menyelesaikan persamaan state $\frac{dx}{dt}$ dengan metode runge kutta orde 4 langkah maju.

3. Gunakan kondisi transversal $\lambda_{N+1} = \lambda(t_1) = 0$ dan nilai $u(t)$ dan persamaan state $\frac{dx}{dt}$ untuk menyelesaikan persamaan costate $\frac{d\lambda}{dt}$ dengan metode runge kutta orde 4 langkah mundur.
4. Perbarui $u(t)$ dengan memasukkan persamaan state $\frac{dx}{dt}$ dan persamaan costate $\frac{d\lambda}{dt}$ dalam karakterisasi kontrol optimal.
5. Periksa konvergensi. Jika nilai error iterasi saat ini dengan iterasi terakhir sangat dekat, keluarkan nilai saat ini menjadi solusi. Jika nilai menjauh maka kembali ke langkah (2).

2.13 Penelitian Terdahulu

Penelitian terdahulu merupakan cara peneliti untuk memeriksa perbandingan dan referensi yang akan dikemudian, yang selanjutnya akan digunakan untuk mengembangkan penelitian selanjutnya. Selain itu, penelitian sebelumnya juga dapat membantu menempatkan penelitian serta menunjukkan keaslian dari penelitian. Pada subbab ini peneliti akan memaparkan beberapa penelitian terdahulu yang masih terkait dengan penelitian yang akan dilakukan. Berikut beberapa penelitian terdahulu yang akan peneliti cantumkan.

Tabel 2.3. Penelitian Terdahulu

Penelitian Terdahulu	Judul	Persamaan	Perbedaan
(Prasad, Banerjee, & Srinivasu, 2013)	Dynamics of Additional Food Provided Predator-Prey System with Mutually Interfering Predators	Model leslie-gower yang dikembangkan dengan menambahkan makanan tambahan	Tidak adanya penambahan kontrol berupa pestisida

(Mondal dan Samanta, 2019)	Dynamics of an Additional Food Provided Predator-Prey System with Prey Refuge Dependent on Both Species and Constant Harvest in Predator	Menggunakan model predator-prey dengan penambahan makanan tambahan	Tidak dilakukan kontrol optimal, hanya dicari sistem dinamik nya saja
(Arsyad, Resmawan, & Achmad, 2020)	Analisis Model Predator-Prey Leslie-Gower dengan Pemberian Racun Pada Predator	Penggunaan model predator-prey pengembangan leslie-gower	Hanya penyelesaian sistem dinamik nya saja tanpa adanya penambahan kontroloptimal.
(Ananth dan Vamsi, 2021)	An Optimal Control Study with Quantity of Additional Food as Control in Prey-Predator Systems involving Inhibitory Effect)	Model predator-prey dengan makanan tambahan	Penggunaan fungsi respon yang digunakan yaitu menggunakan Holling Tipe IV
(Renny dan Reorita, 2021)	Model Dinamik Kontrol Optimal Predator-Prey dengan Respon Fungsional Beddington De-Angelis pada Tanaman Padi	Penggunaan kontrol pestisida untuk menghambat populasi hama wereng	Menggunakan teori kontrol bang-bang dan kontrol singular

BAB 3

Metode Penelitian

Metode penelitian yang dipakai merupakan studi literatur, dilakukan dengan eksplorasi literatur baik internasional maupun nasional terkait model matematika *predator-prey* dan kontrol optimal.

3.1 Alur Penelitian

Alur penelitian merupakan tahapan yang akan dilakukan selama proses penelitian. Berikut akan dijelaskan mengenai alur penelitian yang digunakan:

1. Konstruksi Model

Konstruksi model yang dilakukan yaitu dengan mengembangkan model yang diteliti oleh (Ulfa, Suryanto, & Darti, 2017) dengan menambahkan kontrol optimal berupa pestisida (u) yang diteliti oleh (Renny dan Reorita, 2021).

2. Penyelesaian Masalah Kontrol Optimal

Penyelesaian masalah kontrol optimal dilakukan dengan menentukan kondisi yang optimal pada model yang dikembangkan menggunakan prinsip *minimum pontryagin*. Prinsip *minimum pontryagin* adalah suatu kondisi yang diaplikasikan untuk memperoleh kontrol terbaik dalam sistem dari variabel *state* dari awal sampai akhir dengan meminimumkan fungsi tujuan menggunakan kontrol $u(t)$ (Lenhart & Workman, 2007). Langkah yang harus dilakukan adalah menentukan fungsi Hamiltonian, mencari kondisi optimal dengan menurunkan fungsi Hamiltonian terhadap

variabel kontrol pestisida $u(t)$, mencari persamaan state dengan menurunkan fungsi Hamiltonian terhadap masing-masing λ_1, λ_2 , mencari persamaan costate dengan menurunkan masing-masing fungsi Hamiltonian terhadap variabel state (Lenhart & Workman, 2007).

3. Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan dengan memanfaatkan metode *sweep* maju mundur, metode *sweep* maju mundur merupakan salah satu teknik numerik untuk memecahkan masalah kontrol optimal dengan langkah awal mengasumsikan nilai u pada interval. Selanjutnya, menggunakan kondisi awal $x(0) = x_0$ pada nilai u untuk menyelesaikan persamaan *state* menggunakan metode *runge kutta* orde 4 langkah maju. Selanjutnya, menggunakan kondisi transversal $\lambda_{N+1} = \lambda(T) = 0$ dan nilai u pada persamaan *state* untuk menyelesaikan persamaan *costate* menggunakan metode *runge kutta* orde 4 langkah mundur. Kemudian, memperbarui nilai u dengan memasukkan persamaan *state* dan *costate* dalam karakterisasi u , terakhir periksa konvergensi (Lenhart & Workman, 2007)

4. Kesimpulan

Kesimpulan dilakukan dengan menginterpretasikan hasil numerik dengan memanfaatkan metode *sweep* maju mundur. Hasil simulasi numerik akan menunjukkan grafik perbandingan dari masing-masing populasi *Prey* (X), *Predator* (Y) tanpa dan dengan pemberian kontrol pestisida (u).

BAB 4

PEMBAHASAN

Pada bab ini, akan dilakukan konstruksi model *predator-prey* dengan menambahkan variabel kontrol. Pembahasan ini akan lebih fokus dengan memecahkan masalah kontrol optimal menggunakan prinsip *minimum Pontryagin*. Setelah itu, dilakukan simulasi numerik menggunakan metode *Sweep Maju Mundur* dengan bantuan software Matlab seri 2013 a.

4.1 Konstruksi Model *Predator-Prey* dengan Penambahan Variabel Kontrol

Konstruksi model ini akan dilakukan dengan mengembangkan model *predator-prey* (2.17) dengan menambahkan variabel kontrol pestisida. Pada model ini, kontrol pestisida $u(t)$ yang disesuaikan dari model Renny dan Reorita (2021) digunakan untuk mengurangi laju pertumbuhan *predator* $Y(t)$ menggunakan pestisida pada subpopulasi *prey* $X(t)$.

Tujuan dilakukan kontrol optimal pada model *predator prey* (2.17) agar menentukan cara yang efisien/optimal dalam meminimumkan subpopulasi *predator* $Y(t)$ serta meminimumkan biaya kontrol yang digunakan. Adapun model *predator-prey* (2.17) dengan penambahan variabel kontrol pestisida $u(t)$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} &= (1 - X)X - \frac{\delta XY}{X+m+nA} - \mu uX \\ \frac{dY}{dt} &\neq \beta \left(1 - \frac{Y}{X+e}\right)Y + \frac{\sigma nAY}{X+m+nA} \end{cases} \quad (4.1)$$

yaitu.

1. Laju populasi padi (X) terhadap waktu (t) yaitu $\frac{dX}{dt}$ didapatkan dari jumlah populasi tanaman padi (X) dikurangi populasi tanaman padi pangkat dua (X^2), kemudian dikurangi jumlah tingkat kematian hama wereng tanpa adanya tanaman padi dibagi laju pertumbuhan intrinsik pada tanaman padi (δ) terhadap laju subpopulasi tanaman padi (X) terhadap laju subpopulasi hama wereng (Y) dibagi dengan jumlah laju subpopulasi tanaman padi (X) terhadap tingkat kematian hama wereng tanpa adanya tanaman padi (m) terhadap jumlah makanan tambahan yang diberikan kepada hama wereng (nA), kemudian dikurangi dengan jumlah besaran presentase pemberian (μ) terhadap kontrol pestisida (u) terhadap subpopulasi tanaman padi (X). Sehingga didapatkan persamaan.

$$\frac{dX}{dt} = (1 - X)X - \frac{\delta XY}{X+m+nA} - \mu uX$$

2. Laju populasi hama wereng (Y) terhadap waktu (t) yaitu $\frac{dY}{dt}$ didapatkan dari jumlah tingkat pertumbuhan maksimum hama wereng dibagi laju pertumbuhan intrinsik tanaman padi (β) terhadap subpopulasi hama wereng (Y) dikurangi dengan subpopulasi hama wereng pangkat dua (Y^2) dibagi dengan jumlah subpopulasi tanaman padi (X) ditambah dengan kemampuan efektif hama wereng untuk mendeteksi makanan tambahan relatif terhadap padi (e), kemudian ditambah dengan jumlah kekuatan timbal balik antar predator (σ) terhadap jumlah makanan tambahan yang diberikan kepada hama wereng (nA) terhadap subpopulasi hama wereng (Y) dibagi dengan jumlah subpopulasi

tanaman padi (X) ditambah dengan tingkat kematian hama wereng tanpa adanya tanaman padi (m) ditambah dengan jumlah makanan tambahan yang diberikan kepada hama wereng (nA). Sehingga didapatkan persamaan.

$$\frac{dY}{dt} = \beta \left(1 - \frac{Y}{X+e}\right)Y + \frac{\sigma nAY}{X+m+nA}$$

dimana.

Tabel 4.1. Deskripsi Variabel

Variabel	Deskripsi
$\frac{dX}{dt}$	Laju Populasi Prey terhadap Waktu
$\frac{dY}{dt}$	Laju Populasi Predator terhadap Waktu
X(t)	Populasi Padi terhadap waktu
Y(t)	Populasi Hama Wereng terhadap waktu
u(t)	Kontrol upaya pengendalian Hama Wereng terhadap waktu

Tabel 4.2. Deskripsi Parameter

Parameter	Deskripsi
m	Tingkat kematian hama wereng tanpa adanya tanaman padi
r	Laju pertumbuhan intrinsik tanaman padi
b	Tingkat pertumbuhan maksimum hama wereng
e	Kemampuan efektif hama wereng untuk mendeteksi makanan tambahan relatif terhadap tanaman padi
σ	Kekuatan timbal balik antar predator
nA	Jumlah makanan tambahan yang diberikan kepada hama wereng
δ	Tingkat kematian hama wereng tanpa adanya tanaman padi dibagi laju pertumbuhan intrinsik tanaman padi
β	Tingkat pertumbuhan maksimum hama wereng dibagi laju pertumbuhan intrinsik tanaman padi
μ	Besaran presentasi pemberian

4.2 Penyelesaian Model *Predator-Prey* dengan Kontrol

Solusi dari masalah kontrol optimal untuk mengurangi/meminimumkan jumlah hama wereng dengan memberikan variabel kontrol berupa pestisida dapat dilakukan dengan membentuk fungsi tujuan. Adapun fungsi tujuan yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$J(u) = \int_0^T Y(t) + \frac{1}{2} Au^2(t) dt \quad (4.2)$$

Dengan A merupakan bobot yang berhubungan dengan kontrol pestisida $u(t)$, serta $u(t)$ merupakan kontrol pestisida yang akan

diminimumkan dengan fungsi kendala dalam sistem persamaan (4.1). Setelah masalah kontrol optimal memenuhi syarat Prinsip Minimum Pontryagin, maka masalah tersebut dapat diselesaikan (Zulaikha, Trisilowati, & Fadhilah, 2017). Berikut merupakan langkah-langkah Prinsip Minimum Pontryagin untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal:

4.2.1 Fungsi Hamiltonian

Langkah awal yang harus dilakukan untuk menyelesaikan masalah kontrol adalah menentukan fungsi Hamiltonian yang dibentuk berdasarkan persamaan (4.1) sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 H &= f(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) g_i(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) \\
 &= X(t) + Y(t) + \frac{1}{2} Au^2(t) + \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) g_i(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) \\
 &= X(t) + Y(t) + \frac{1}{2} Au^2(t) \\
 &\quad + \lambda_1 \left((X - X^2) - \frac{\delta XY}{X + m + nA} - \mu uX \right) \\
 &\quad + \lambda_2 \left(\beta Y - \frac{\beta Y^2}{X + e} + \frac{\sigma nAY}{X + m + nA} \right)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

dimana:

$$\vec{x}(t) = \{X, Y\}$$

$$\vec{u}(t) = \{u\}$$

4.2.2 Kondisi Optimal

Kontrol akan optimal apabila $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$. Kondisi tersebut dinamakan kondisi optimal. Kondisi optimal didapatkan dengan menurunkan fungsi Hamiltonian H terhadap variabel kontrol pestisida $u(t)$. Berikut cara mendapatkan kondisi optimal:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= \frac{1}{2}Au(t) - \lambda_1\mu X(t) = 0\end{aligned}\quad (4.4)$$

Sehingga:

$$u^* = \frac{\lambda_1\mu X(t)}{A}\quad (4.5)$$

Sehingga diperoleh bentuk kontrol optimal u^* untuk mengoptimalkan fungsi tujuan yaitu:

$$u^* = \min \left\{ 1, \max \left(0, \frac{\lambda_1\mu X(t)}{A} \right) \right\}\quad (4.6)$$

4.2.3 Persamaan State

Persamaan state didapatkan dengan cara menurunkan fungsi Hamiltonian pada persamaan (4.3) terhadap masing-masing λ_1, λ_2 , sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \frac{dX}{dt} = (X - X^2) - \frac{\delta XY}{X+m+nA} - \mu uX \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = \frac{dY}{dt} = \left(Y - \frac{\beta Y^2}{X+c} \right) + \frac{\sigma nAY}{X+m+nA} \end{cases}\quad (4.7)$$

dengan kondisi awal $X(0) = X_0$, dan $Y(0) = Y_0$

4.2.4 Persamaan Costate

Persamaan costate diperoleh dengan cara menurunkan masing-masing fungsi Hamiltonian (4.3) terhadap variabel *state* (Norasia dkk, 2022), sehingga.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X} \\ = -1 + \lambda_1 \left(-1 + 2X + \left(\frac{\delta Y m + \delta Y n A}{(X+m+nA)^2} \right) + \mu u \right) \\ + \lambda_2 \left(\frac{\beta Y^2}{(X+e)^2} - \frac{\sigma n A Y}{X+m+nA} \right) \\ \frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Y} \\ = -1 + \lambda_1 \left(\frac{\delta X}{X+m+nA} \right) \\ + \lambda_2 \left(\beta + \frac{\delta Y}{X+e} - \frac{\sigma n A}{X+m+nA} \right) \end{array} \right. \quad (4.8)$$

dengan kondisi transversal $\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = 0$.

4.2.5 Sistem yang Optimal

Sistem yang optimal didapatkan dengan cara mensubstitusikan nilai dari kontrol optimal u^* ke persamaan *state* serta persamaan *costate*, sehingga didapatkan:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \frac{dX}{dt} = (X - X^2) - \frac{\delta XY}{X+m+nA} - \mu u^* X \\
 \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = \frac{dY}{dt} = \left(\beta Y - \frac{\beta Y^2}{X+e} \right) + \frac{\sigma n AY}{X+m+nA} \\
 \frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X} \\
 \quad = -1 + \lambda_1 \left(-1 + 2X + \left(\frac{\delta Y m + \delta Y n A}{(X+m+nA)^2} \right) + \mu u^* \right) \\
 \quad + \lambda_2 \left(\frac{\beta Y^2}{(X+e)^2} - \frac{\sigma n AY}{X+m+nA} \right) \\
 \frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Y} \\
 \quad = -1 + \lambda_1 \left(\frac{\delta X}{X+m+nA} \right) \\
 \quad + \lambda_2 \left(\beta + \frac{\beta Y}{X+e} - \frac{\sigma n A}{X+m+nA} \right) \\
 u^* = \min \left\{ 1, \max \left(0, \frac{\lambda_1 \mu X(t)}{A} \right) \right\}
 \end{array} \right. \quad (4.9)$$

4.3 Simulasi Numerik

Masalah kontrol optimal dalam penelitian ini dapat diselesaikan menggunakan metode *sweep* maju mundur. Pada metode ini, akan dilakukan langkah diskritisasi interval $[0, T]$ pada titik $t_i = 0 + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$) dengan h adalah ukuran langkah waktu sehingga $t_n = T$. Adapun variabel yang digunakan yaitu $u, X, Y, \lambda_1, \lambda_2$ dan dinyatakan sebagai $u(i), X(i), Y(i), \lambda_1(i), \lambda_2(i)$.

Variabel state X , dan Y kemudian didekati menggunakan metode Runge Kutta orde 4 langkah maju menggunakan nilai awal $X(0) = X_0$, $Y(0) = Y_0$, sedangkan untuk variabel costate λ_1, λ_2 didekati menggunakan metode Runge Kutta orde 4 dengan langkah mundur dengan nilai awal $\lambda_1(n) = \lambda_2(n) = 0$. Berikut langkah-langkah algoritma *sweep* maju mundur:

1. Menentukan nilai awal untuk nilai-nilai $X(0), Y(0), \lambda_1(n), \lambda_2(n)$, dan *error* toleransi.

2. Menentukan tebakan awal $u(t)$ untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$.
3. Hitung nilai $X(i + 1), Y(i + 1)$ menggunakan nilai awal langkah 1 menggunakan metode Runge Kutta orde 4 langkah maju untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.
4. Hitung nilai $\lambda_1(k - 1), \lambda_2(k - 1)$ menggunakan kondisi trasversal dengan metode Runge Kutta langkah mundur untuk $k = n$.
5. Untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$, hitunglah nilai kontrol
$$u(i) = \min \left(1, \max \left(0, \frac{\lambda_1 \mu X(i)}{A} \right) \right)$$
.
6. Hitung nilai *error* dari variabel $u(i), X(i), Y(i), \lambda_1(i), \lambda_2(i)$ menurut nilai iterasi sekarang dan nilai iterasi sebelumnya. Ketika nilai *error* lebih bear dari toleransi yang ditetapkan maka kembali ke langkah 3.
7. Cetak $X^* = X, Y^* = Y, u^* = u$

Kontrol yang digunakan yaitu u yang menyatakan pemberian pestisida. Simulasi dilakukan saat waktu $t_0 = 0$ sampai waktu $T = 60$ (minggu) dengan $h = 0.5$. Kondisi awal yang digunakan adalah sebagai berikut.

Tabel 4.3. Nilai awal Populasi dalam Simulasi Numerik

Populasi Awal	Nilai Awal	Sumber
X_0	0.35	Renny dan Reorita (2021)
Y_0	0.37	Renny dan Reorita (2021)

Tabel 4.4. Nilai awal Parameter dalam Simulasi Numerik

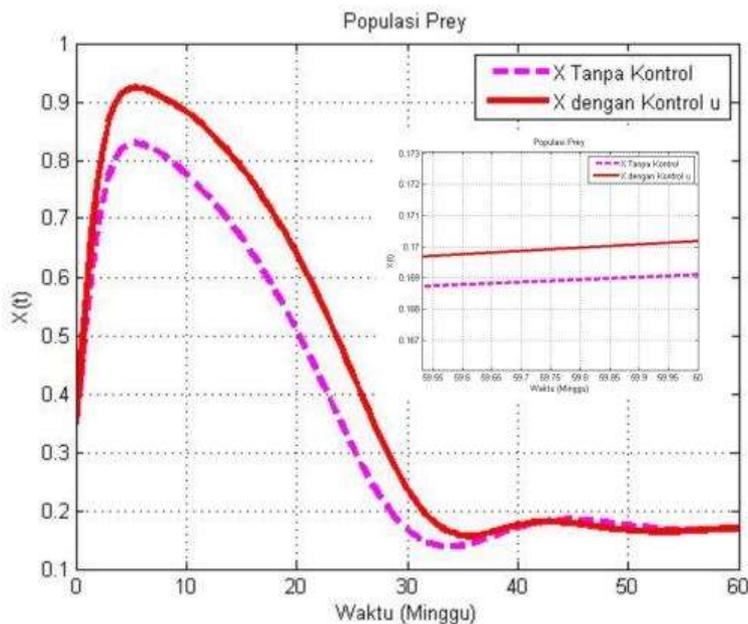
Parameter Awal	Nilai Awal	Sumber
m	1.5	Asumsi
e	0.008	Safitri dan Mardlijah (2019)
n_A	0.01	Asumsi
δ	0.7	Suryono dan Darti (2017)
β	0.01	Asumsi
σ	17	Asumsi
μ	0.1	Asumsi

4.4 Hasil Simulasi Numerik

Pada penelitian ini akan dilakukan 3 kali simulasi, yaitu terdapat perbedaan tiga nilai parameter yakni δ, β, σ pada setiap simulasi selebihnya untuk nilai populasi dan parameter lain tetap disamakan, simulasi pertama menggunakan nilai populasi dan parameter awal, pada simulasi kedua menggunakan nilai parameter yaitu $\delta = 1.5, \beta = 0.09, \sigma = 25$, sedangkan pada simulasi ketiga menggunakan nilai parameter $\delta = 0.4, \beta = 0.001, \sigma = 15$. Adapun untuk hasil ketiga simulasi dapat dilihat sebagai berikut.

4.4.1 Simulasi I

Pada simulasi 1 ini akan ditunjukkan pengaruh dilakukan kontrol pada model *predator-prey* menggunakan nilai awal pada tabel (4.3) serta parameter pada tabel (4.4). Pada simulasi ini, digunakan waktu awal yaitu $t = 0$ sampai dengan waktu akhir $t = 60$. Bobot yang digunakan pada pemberian pestisida adalah $A = 10$.

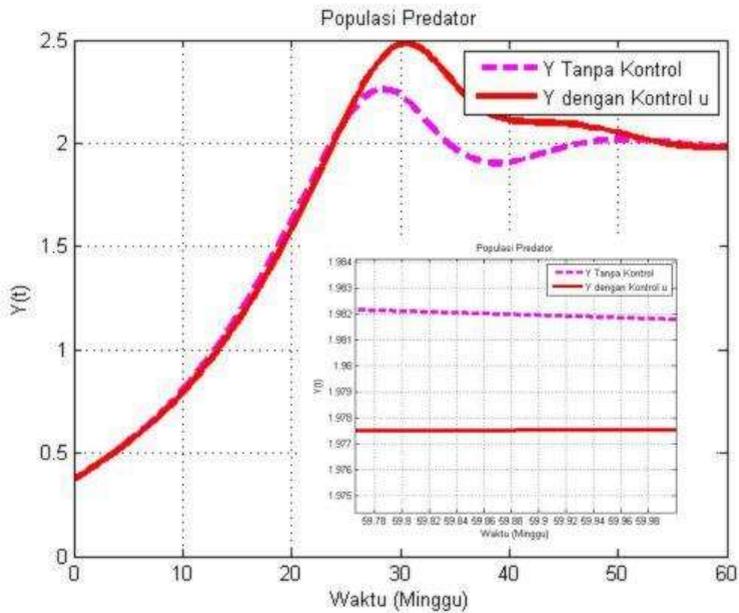


Gambar 4.1. Populasi Padi Simulasi I

Gambar (4.1) memperlihatkan grafik populasi padi. Populasi padi sebelum diberikan kontrol, jumlah populasi padi meningkat hingga 0.829 pada waktu $t = 5$ (minggu). Kemudian turun sampai 0.14 pada waktu $t = 34$ (minggu), lalu perlahan naik sampai 0.169 pada waktu $t = 60$ (minggu). Setelah diberikan kontrol pestisida, jumlah populasi padi meningkat hingga 0.923 pada waktu $t = 5$ (minggu). Kemudian turun sampai 0.161 pada waktu $t = 34$ (minggu), dan sedikit demi sedikit meningkat hingga mencapai 0.1701 pada waktu $t = 60$ (minggu).

Pemberian kontrol pestisida yang dilakukan memberikan kenaikan jumlah padi lebih besar pada waktu $t = 5$ (minggu) daripada sebelum diberikan kontrol, pada saat $t = 34$ (minggu) jumlah

populasi padi pada saat diberikan kontrol masih lebih banyak dibanding sebelum diberikan kontrol. Selanjutnya pada saat $t = 60$ (minggu) jumlah populasi padi juga lebih banyak saat sudah diberikan kontrol, hal tersebut dikarenakan populasi padi akan lebih terlindungi dari hama wereng.



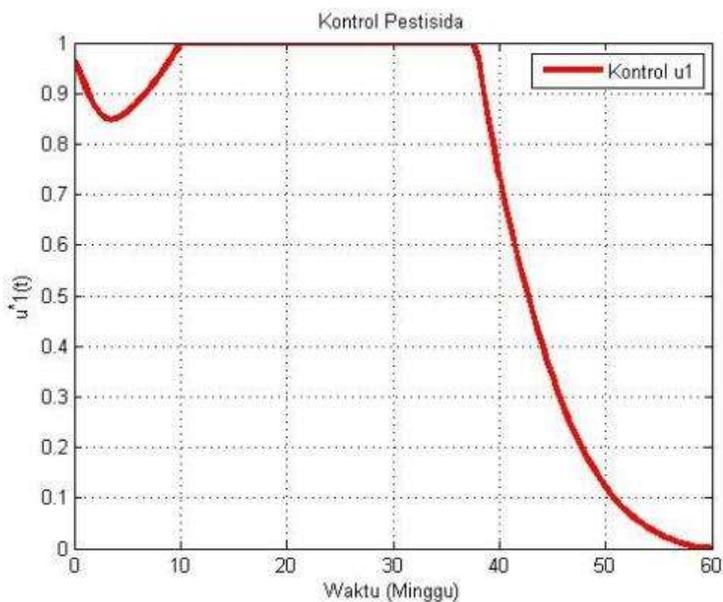
Gambar 4.2. Populasi Hama Wereng Simulasi I

Grafik populasi hama wereng ditunjukkan pada gambar (4.2). Sebelum diberi kontrol pestisida, populasi hama wereng akan meningkat hingga $Y = 2.25$ pada waktu $t = 28$ (minggu). Kemudian pada waktu $t = 40$ (minggu) populasi hama wereng akan turun hingga $Y = 1.9$, lalu akan naik lagi mencapai 1.982 pada saat $t = 60$ (minggu). Setelah diberikan kontrol, populasi hama wereng akan selalu

dibawah populasi sebelum diberikan kontrol dari $t = 1$ (minggu) hingga $t = 24$ (minggu).

Namun, saat $t = 25$ (minggu) sampai $t = 53$ (minggu) populasi hama wereng setelah dikontrol akan lebih banyak daripada sebelum dikontrol. Pada saat $t = 30$ (minggu) populasi hama wereng yaitu 2.5, hal ini dikarenakan terjadi ledakan hama wereng yang salah satunya diakibatkan oleh penggunaan pestisida yang tidak sesuai takaran oleh lebih dari 90% petani (Baehaki dan Mejaya, 2014). Pada saat $t = 54$ hingga $t = 60$ minggu populasi hama wereng setelah dikontrol akan kembali dibawah sebelum diberi kontrol. Populasi hama wereng saat $t = 60$ (minggu) adalah

1.976.



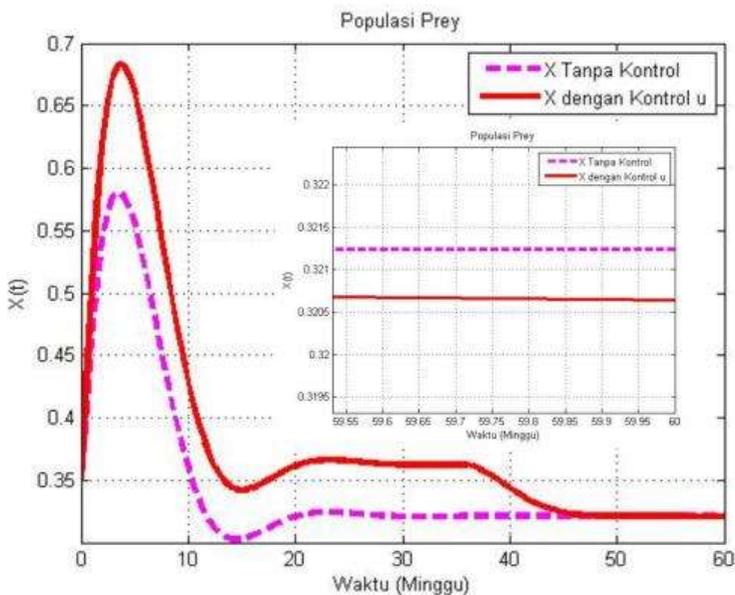
Gambar 4.3. Kontrol Pestisida Simulasi I

Gambar (4.3) menunjukkan kontrol pestisida yang diberikan selama 60 minggu. Dari grafik tersebut menunjukkan bahwa pestisida diberikan $t = 1$ sampai $t = 2$ akan menurun, lalu saat $t = 10$ sampai $t = 37$ pemberian pestisida diberikan secara maksimum. Kemudian saat $t = 38$ akan menurun hingga $t = 58$.

Pada saat $t = 59$ sudah tidak perlu diberikan pestisida lagi.

4.4.2 Simulasi II

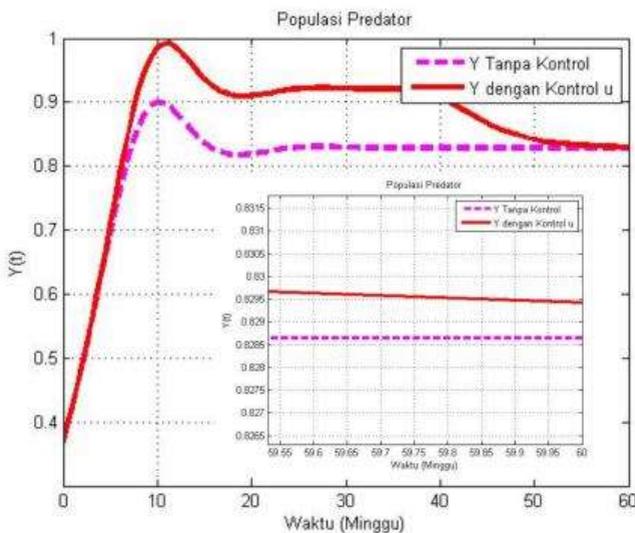
Pada simulasi II ini menggunakan nilai parameter $\delta = 1.5, \beta = 0.09, \sigma = 25$, dengan nilai awal, parameter lainnya, dan bobot sama dengan simulasi I.



Gambar 4.4. Populasi Padi Simulasi II

Gambar (4.4) menunjukkan grafik populasi padi Sebelum diberi kotrol, populasi padi bertambah hingga 0.58 pada waktu $t = 4$

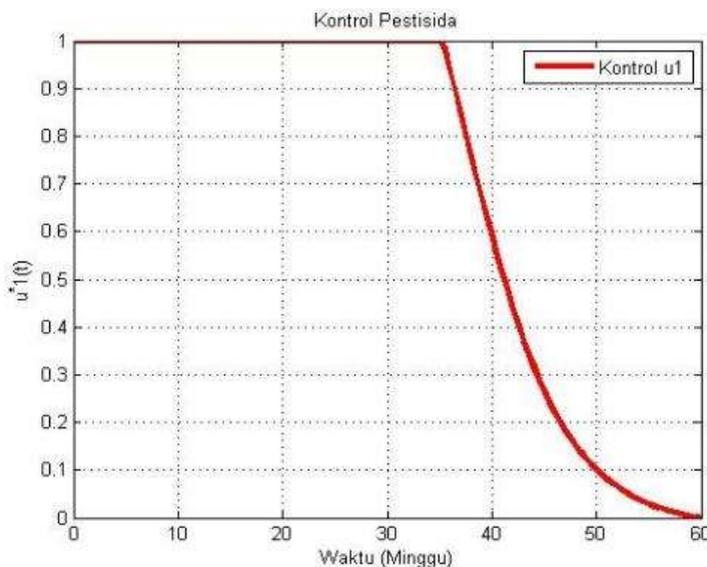
minggu. Kemudian pada waktu $t = 14$ minggu menurun hingga menyisakan 0.302 populasi padi. Populasi padi stabil diangka 0.321 pada waktu $t = 22$ hingga $t = 60$ minggu. Setelah dikontrol, populasi padii meningkat hingga 0.684 pada waktu $t = 4$ minggu. Populasi padi menurun hingga 0.342 pada waktu $t = 15$ minggu, namun angka tersebut masih lebih tinggi dibandingkan sebelum diberi pestisida. Kemudian sedikit meningkat hingga saat $t = 22$ sampai $t = 36$ minggu stabil diangka 0.361. Populasi padi kemudian menurun menyisakan 0.3206 saat $t = 60$ minggu. Populasi padi setelah dikontrol selalu lebih besar dibandingkan sebelum diberi kontrol dari $t = 1$ hingga $t = 55$ minggu, namun saat $t = 56$ hingga $t = 60$ minggu populasi padi setelah dikontrol lebih sedikit dibanding sebelum diberi kontrol,



Gambar 4.5. Populasi Hama Wereng Simulasi II

Gambar (4.5) menunjukkan grafik populasi hama wereng.

Sebelum diberi kontrol, populasi hama wereng dari $t = 1$ hingga $t = 10$ minggu naik hingga mencapai 0.9. Kemudian turun dan stabil dari waktu $t = 22$ hingga $t = 60$ diangka 0.825. Setelah diberi Kontrol, populasi hama wereng mencapai 0.992 pada waktu $t = 10$ minggu. Populasi hama wereng turun dan stabil pada waktu $t = 32$ sampai $t = 40$ minggu diangka 0.92. Kemudian, turun lagi pada waktu $t = 41$ menyisakan 0.829 populasi hama wereng saat $t = 60$ minggu. Pada simulasi ke II ini, populasi hama wereng setelah diberi kontrol selalu lebih besar dibandingkan sebelum diberi kontrol. Hal ini menunjukkan bahwa kontrol pestisida yang dilakukan belum efektif di simulasi ini.



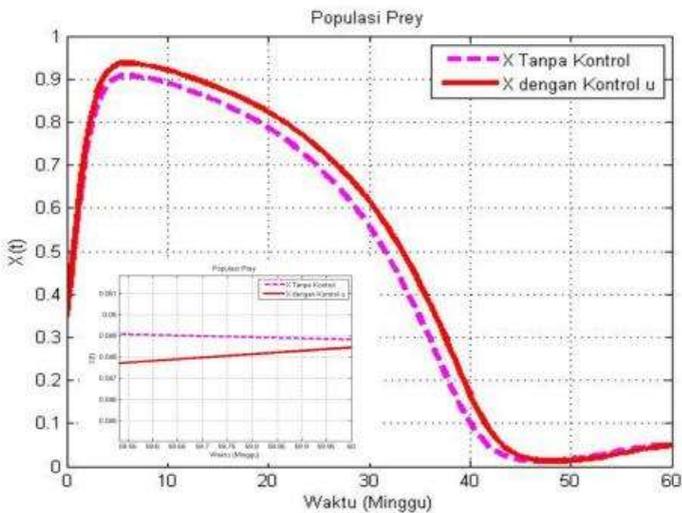
Gambar 4.6. Kontrol Pestisida Simulasi II

Gambar (4.6) menunjukkan kontrol pestisida yang diberikan selama 60 minggu. Melihat dari grafik tersebut menunjukkan bahwa

pestisida diberikan secara maksimal dari $t = 1$ hingga $t = 35$ minggu. Pada saat $t = 36$ sampai $t = 59$ minggu pemberian pestisida akan diturunkan secara bertahap. Pada waktu $t = 60$ minggu pestisida sudah tidak perlu diberikan lagi.

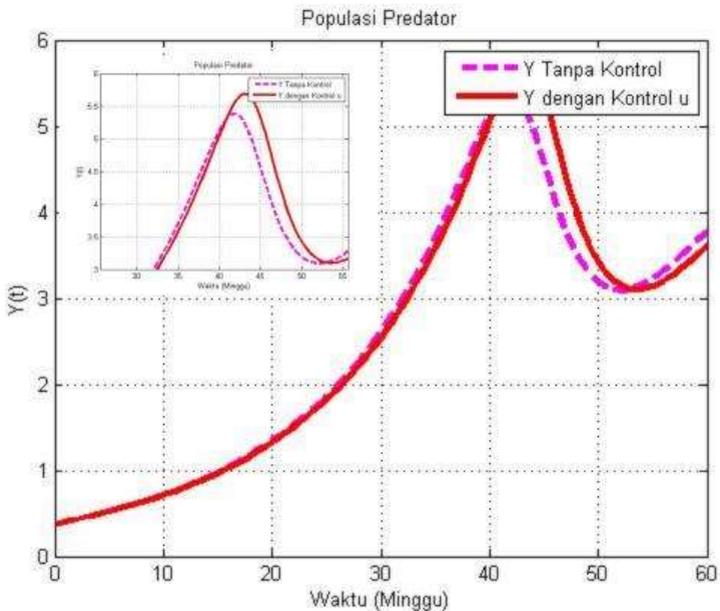
4.4.3 Simulasi III

Pada simulasi III ini akan dilakukan perubahan pada nilai parameter $\delta = 0.4, \beta = 0.001, \sigma = 15$, dengan nilai awal, parameter lainnya, dan bobot sama dengan simulasi I. Gambar pada simulasi II dapat dilihat pada gambar (4.7), (4.8), (4.9).



Gambar 4.7. Populasi Padi Simulasi III

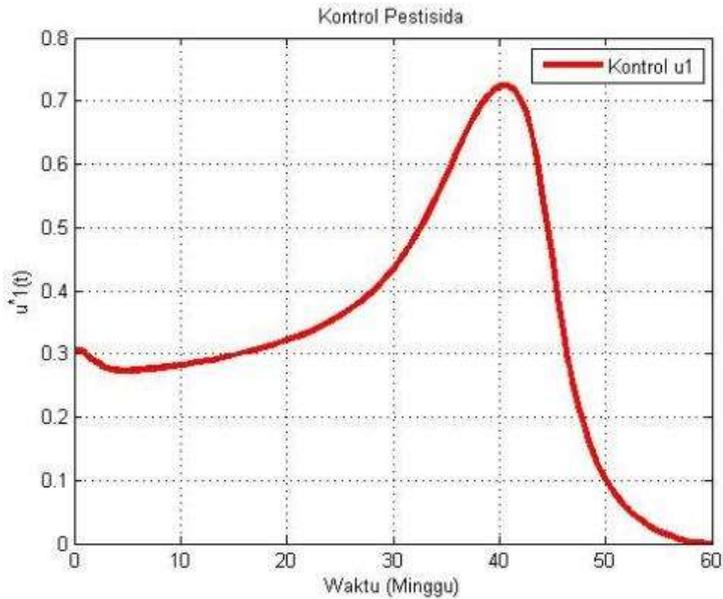
Gambar (4.7) menunjukkan grafik populasi padi. Sebelum diberi pestisida, populasi padi akan mengalami peningkatan hingga 0.9 saat $t = 6$ minggu. Kemudian mengalami penurunan hingga 0.015 saat $t = 46$ minggu, lalu pada $t = 47$ hingga $t = 60$ akan perlahan meningkat kembali sampai 0.049 saat $t = 60$ minggu. Setelah diberikan pestisida, populasi padi akan meningkat hingga 0.94 saat $t = 6$ minggu. Populasi padi setelah dikontrol akan selalu lebih besar daripada sebelum dikontrol pada saat $t = 1$ hingga $t = 47$ minggu. Namun, saat $t = 48$ hingga $t = 60$ minggu populasi padi setelah diberi kontrol lebih sedikit daripada sebelum dikontrol. Populasi padi hanya mencapai 0.0485 pada saat $t = 60$ minggu.



Gambar 4.8. Populasi Hama Wereng Simulasi III

Gambar (4.8) menunjukkan grafik populasi hama wereng.

Sebelum diberi kontrol, populasi hama wereng akan meningkat dari $t = 1$ hingga $t = 42$ minggu yaitu mencapai 5.4. Kemudian akan perlahan turun hingga hanya menyisakan 3.1 populasi hama wereng pada saat $t = 53$ minggu. Saat $t = 54$ sampai $t = 60$ minggu populasi hama wereng akan meningkat, hingga 0.38 saat $t = 60$ minggu. Setelah diberi kontrol, populasi hama wereng akan lebih sedikit dibanding sebelum diberi kontrol saat $t = 1$ hingga $t = 40$ minggu. Namun saat $t = 41$ hingga $t = 52$ minggu populasi hama wereng setelah dikontrol akan lebih banyak dibandingkan sebelum diberi kontrol, hal ini dikarenakan terjadi ledakan hama wereng yang salah satunya diakibatkan oleh penggunaan pestisida yang tidak sesuai takaran oleh lebih dari 90% petani (Baehaki dan Mejaya, 2014). Saat $t = 43$ minggu populasi hama wereng mencapai 5.6. Populasi hama wereng saat $t = 53$ minggu adalah 3.09, dan pada saat $t = 60$ minggu yaitu 3.6.



Gambar 4.9. Kontrol Pestisida Simulasi III

Gambar (4.9) menunjukkan kontrol pestisida yang diberikan selama 60 minggu. Dari grafik tersebut menunjukkan bahwa pestisida diberikan $t = 1$ sampai $t = 5$ minggu akan menurun, lalu saat $t = 6$ sampai $t = 40$ minggu pemberian pestisida akan dinaikkan hingga 0.72. Kemudian saat $t = 41$ akan kembali menurun hingga $t = 58$. Pada saat $t = 59$ sudah tidak perlu diberikan pestisida lagi.

BAB 5

Penutup

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang sudah diuraikan, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut.

1. Model matematika *Predator-Prey Leslie Gower* pada tanaman padi dengan penerapan kontrol pestisida (u) pada hama wereng diperoleh sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = (1 - X)X - \frac{\delta XY}{X+m+nA} - \mu uX \\ \frac{dY}{dt} = \beta \left(1 - \frac{Y}{X+e}\right)Y + \frac{\sigma nAY}{X+m+nA} \end{cases}$$

2. Bentuk sistem yang optimal didapatkan dengan penyelesaian menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \frac{dX}{dt} = (X - X^2) - \frac{\delta XY}{X+m+nA} - \mu u^* X \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = \frac{dY}{dt} = \left(\beta Y - \frac{\beta Y^2}{X+e} \right) + \frac{\sigma nAY}{X+m+nA} \\ \frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X} \\ = -1 + \lambda_1 \left(-1 + 2X + \left(\frac{\delta Y m + \delta Y n A}{(X+m+nA)^2} \right) + \mu u^* \right) \\ + \lambda_2 \left(\frac{\beta Y^2}{(X+e)^2} - \frac{\sigma nAY}{X+m+nA} \right) \\ \frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Y} \\ = -1 + \lambda_1 \left(\frac{\delta X}{X+m+nA} \right) \\ + \lambda_2 \left(\beta + \frac{\beta Y}{X+e} - \frac{\sigma nA}{X+m+nA} \right) \\ u^* = \min \left\{ 1, \max \left(0, \frac{\lambda_1 \mu X(t)}{A} \right) \right\} \end{cases}$$

3. Hasil simulasi numerik telah dilakukan menggunakan metode *Sweep Maju Mundur* memperlihatkan bahwa pemberian kontrol pestisida dapat mempengaruhi populasi padi, dan hama wereng. Hasil simulasi numerik juga menunjukkan keefektifan pemberian kontrol pestisida dapat mengurangi populasi hama wereng dan menambah populasi padi. Namun, saat pemberian pestisida dilakukan secara berlebihan akan berakibat ledakan hama wereng sehingga menurunkan populasi padi.

5.2 Saran

Pada penelitian yang akan datang, dapat dilakukan pengembangan dengan penambahan kontrol lain diluar pestisida agar hasil dari simulasi numerik lebih baik sehingga tidak akan menurunkan resiko ledakan hama wereng.

DAFTAR PUSTAKA

- Agarwal, M., & Pathak, R. 2012. Persistence and Optimal Harvesting of Prey-Predator Model with Holling Tipe III Functional Response. *International Journal of Engineering, Science, and Technology*. 4(3): 78-96.
- Amir, Zubaidah. 2015. Mengungkap Seni Bermatematika dalam Pembelajaran. *Journal of Mathematics Education*. 1 (1): 60-75.
- Ananth, V.S., & Vamsi, D.K.K. 2021. An Optimal Control Study with Quantity of Additional Food as Control in Prey-Predator Systems involving Inhibitory Effect. *De Gruyter*. 9 (2021). 114-145.
- Anggraini, Helmi, & Kiftiah, M. 2021. Kestabilan Model Predator-Prey dengan Leslie-Gower dan Holling tanpa adanya Perlindungan di Prey. *Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya*. 1 (2021): 145-150.
- Argo, B.D., Prasetyo, J. 2021. *Matematika Terapan*. Malang: Universitas Brawijaya Press (UB Press).
- Arsyad, S.H., Resmawan, & Achmad, N. 2020. Analisis Model Predator-Prey Leslie-Gower dengan Pemberian Racun pada Predator. *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika*. 4 (1): 1-16.
- A'yunin, N.Q., Achdiyat, & Saridewi, T.R. 2020. Preferensi Anggota Kelompok Tani terhadap Penerapan Prinsip Enam Tepat (6 T) dalam Aplikasi Pestisida. *Jurnal Inovasi Penelitian*. 1 (3): 253-264.

- Aziz-Alaoui, M.A., Okiye, M.D. 2002. Boundedness and Global Stability for a Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Holling Type II Schemes. *Mathematics Letters*. 16 (2003): 1069-1075.
- Baehaki., Mejaya, I.M.J. 2014. Wereng Coklat sebagai Hama Global Benilai Ekonomis Tinggi dan Strategi Pengendaliannya. *Iptek Tanaman Pangan*. 9 (1): 1-12.
- Boyce, W.E., & DiPrima, R.C. 2009. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem*. Edisi 9. USA: John Wiley and Sons Inc.
- Braun, M., & Golubitsky, M. 1983. *Differential Equations and Their Applications*. Edisi 2. New York: Springer-Verlag.
- Chiang, A.C., Wainwright, K. 2005. *Fundamental Method of Mathematical Economics*. Edisi 4. New York: The McGraw-Hill.
- Damayanti, Lien. 2013. Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Produksi, Pendapatan, dan Kesempatan Kerja pada Usaha Tani Padi Sawah di Daerah Irigasi Parigi Moutong. *SEPA*. 9 (2): 249-259.
- Djojosumarto, Panut. *Pestisida & Aplikasinya*. Edisi 1. Jakarta: ArgoMedia Pustaka.
- Fitriani, V.N. 2013. Estimasi Solusi Model Pertumbuhan Logistik dengan Metode Ensemble Kalman Filter. *Jurnal Ilmu Dasar*. 14 (2): 85-90.
- Hadi, M., Radadian, R., & Tarwotjo, U. 2018. Karakter Ekologi Serangga OPT dan Musuh Alaminya di Sawah Organik

- dan Sawah Anorganik Desa Mrentul Kecamatan Bonorowo Kabupaten Kebumen. *Agronomika*. 12 (2): 92-97.
- Himmah, A.A., Choiriyah, S.Z., Rohmah, A., & Fikri, A.A. 2021. Analisa Faktor Terjadinya Perubahan Ekosistem Sawah. *Florea: Jurnal Biologi dan Pembelajaran*. 8 (1): 48-51.
- Holling, C.S. 1959. The Components of Predation as Revealed by a Study of Small-Mammal Predation of the European Pine Sawfly. *Can Entomol.* 91 (1959): 293-320.
- Hunsicker, M.E., Cianelli, K., Bailey, K.M., Buckel, J.A., White, J.W., Link, J.S., Essington, T.E., Gaichas, S., Anderson, T.W., Brodeur, R.D., Chan, K.S., Chen, K., Englund, G., Frank, K.T., Freitas, V., Hixon, M.A., Hurst, T., Jhonson, D.W., Kitchell, J.F., Reese, D., Rose, G.A., Sjodin, H., Syedeman, W.J., Veer, H.W.V.D., Vollset, K., & Zador, S. 2011. Functional Responses and Scaling in Predator-Prey Interactions of Marine Fishes: Contemporary Issues and Emerging Concepts. *Ecology Letters*. 14 (12): 1288:1299.
- Istiani, S.A., Fitria, N.L., & Bramantha, G. 2019. Perubahan Sosial Masyarakat Akibat Serangan Hama Wereng. *Jurnal Pertanian*. 10 (1): 8-15.
- Jeschke, J.M., Kopp, M., & Tollrian, R. 2002. Predator Functional Responses: Discriminating Between Handling and Digesting Prey. *Ecological Monographs*. 72 (1): 95-112.
- Lenhart, S., & Workman, J.T. 2007. *Optimal Control Applied to Biological Models*. London: CRC Press.
- Luenberger, D.G. 1979. *Introduction to Dynamic System: Theory, Models, and Applications*. New York: John Wiley & Sons.

- Mondal, S., & Samanta, G.P. 2019. Dynamics of an Additional Food Provided Predator-Prey System with Prey Refuge Dependent on Both Species and Constant Harvest in Predator. *Department of Mathematics, Indian Institute of Engineering and Technology*. 534 (2019): 1-20.
- Munir, R. 2012. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.
- Murray, J.D. 1993. *Mathematical Biology: I An Introduction Third Edition*. New York: Springer Verlag.
- Murray, G.P.D., Stillman, R.A., Gozlan, R.E., & Britton, J.R. 2013. Experimental Predictions of the Functional Response of a Freshwater Fish. *Ethology*. 297: 92-114.
- Murtafi'ah, W., Apriandi, D. 2018. *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya*. Madiun: Unipma Press.
- Naidu, D.S. 2002. *Optimal Control Systems*. New York: CRC Press.
- Ndii, M.Z. 2022. *Pemodelan Matematika*. Edisi 1. Pekalongan: PT. Nasya Expanding Management (Penerbit NEM-Anggota IKAPI).
- Ningrat, M.A., Mual, C.D., Makabori, Y.Y. 2021. Pertumbuhan dan Hasil Tanaman Padi (*Oryza Sativa L.*) pada Berbagai Sistem Tanam di Kampung Desay, Distrik Prafi, Kabupaten Manokwari. *Prosding Seminar Nasional Pembangunan dan Pendidikan Vokasi Pertanian*. 325-332.
- Norasia, Y., Zulaikha, Tafrikan, M., Ghani, M., Mukama, D.S. 2022. Optimal Control of HIV-1 Spread in Combination with Nutritional Status and ARV-Treatment. *International Journal of Computing Science and Applied Mathematics*. 8 (2): 66-70.

- Nugroho, Didit Budi. 2011. *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya*. Edisi 1. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Oldser, G.J. 2003. *Mathematical System Theory*. Edisi 2. Netherland: Delft Uuniversity Press.
- Pakpahan, A.V., & Dono, D. 2019. Implementasi Metode Forward Chaining untuk Mendiagnosis Organisme Pengganggu Tanaman (OPT) Kopi. *Simetris: Jurnal Teknik Mesin, Elektro, dan Ilmu Komputer*. 10 (1): 117-126.
- Prasad, B.S.R.V., Banerjee, M., & Srinivasu, P.D.N. 2013. Dynamics of Additional Food Provided Predator-Prey System with Mutually Interfering Predators. *Mathematics Biosciences*. 246 (1): 176-190.
- Purnomo, Dwi. 2012. *Persamaan Diferensial*. Edisi 1. Malang: Media Nusa Creative.
- Purwanto, & Pujiwinarko, A. 2021. *Pemodelan Lingkungan: Teori dan Aplikasi*. Semarang: Sekolah Pascasarjana Universitas Diponegoro.
- Putra, M.A.J.D., Suryanto, A., & Shofianah, N. 2017. Stability Analysis and Hopf Bifurcation of Intraguild Predation Model with Holling Type II Functional Response. *International Journal of Ecology & Development*. 32 (4): 110-118.
- Renny, & Reorita, R. 2021. Model Dinamik Kontrol Optimal Predator-Prey dengan Respon Fungsional Beddington-De Angelis pada Tanaman Padi. *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*. 4 (1): 44-51.
- Safitri, O., & Mardlijah. 2019. Kontrol Optimum pada Model Prey-Predator dengan Pemanenan pada Ikan Prey dan Ikan Predator. *Journal of Mathematics and Its Applications*. 16 (1): 39-49.

- Sarumaha, M. 2020. Identifikasi Serangga Hama pada Tanaman Padi di Desa Bawolowalani. *Jurnal Education and Development Institut Pendidikan Tapanuli Selatan*. 8 (3): 89-91.
- Soleh, M., & Kholipah, S. 2013. Model Matematika Mangsa-Pemangsa dengan Sebagian Mangsa Sakit. *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*. 10 (2): 1-8.
- Srinivasu, P.D.N., Prasad, B.S.R.V., & Venkatesulu, M. 2007. Biological Control Through Provision of Additional Food to Predators: A Theoretical Study. *Theoretical Population Biology*. 72 (2003): 111-120.
- Taufiq, Mohammad. 2013. Al-Qur'an in word.
- Timuneno, H.M., Utomo, R.H.S., & Widowati. 2008. Model Pertumbuhan Logistik dengan Waktu Tunda. *Jurnal Matematika*. 11 (1): 43-51.
- Ulfa, H.M., Suryanto, A., & Darti, I. 2017. Dynamics of Leslie-Gower Predator-Prey Model with Additional Food for Predators. *International Jurnal of Pure and Applied Mathematics*. 115 (2): 199-209.
- Utama, M., & Zulman, H. 2015. *Budidaya Padi pada Lahan Marjinal*. Yogyakarta: CV. Andi Offset.
- Tambahan, Hardi. 2020. Pemodelan Matematika dalam Pendidikan. *Serpen: Journal of Mathematics Education and Applied*. 2 (1): 9-15.
- Verhulst, P.F., 1938. Notice Sur La Loi Que La Population Suit Dans Son Accroissement. *Correspondence Mathematique et Physique*. 10 (1938): 113-129.

- Yulistiyanto, B. 2017. *Metode Numerik Aplikasi untuk Teknik Sipil*. Edisi 2. Yogyakarta: Gajah Mada University Press.
- Zheng, L., & Zhang, X. 2017. *Modeling and Analysis of Modern Fluid Problems*. China: Academic Press.
- Zulaikha., & Norasia, Y. 2024. Optimal Control of Covid-19 in Jakarta and its Relationship with Unity of Cciences. *AIP Conference Proceedings*. 3046 (1).
- Zulaikha., Trisilowati., & Fadhilah, Intan. 2017. Kontrol Optimal pada Model Epidemi SEIQR dengan Tingkat Kejadian Standar. *Proding Si Manis (Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Isalami)*. 1 (1): 41-51.

Lampiran 1. Program MATLAB 2013 a

0.1 State Function

```
function dy=State(y,u1,ma,ea,nA,delta,beta,sigma,miu) x(1)=y(1)-y(1)*y(1)-
((delta*y(1)*y(2))/(y(1)+ma+nA)
-miu*u1*y(1));
```

```
x(2)=(beta*y(2)-(beta*( y(2)^2))/(y(1)+ea ))+
((sigma*nA*y(2))/(y(1)+ma+nA)); dy=[x(1) x(2)];
```

0.2 COSTATE FUNCTION

```
function dg=Costate(y,V,W,u1,ma,ea,nA,delta,beta, sigma,miu)
p1=y(1); p2=y(2);
```

```
x(1)=p1*(-1+2*V+(((delta*ma*W+delta*W*nA)/
(V+ma+nA)^2))+miu*u1)+p2*((-
(beta*W^2)/(V+ea)^2)(sigma*nA*W)/(V+ma+nA)^2);
```

```
x(2)=-1+p1*(-(delta*V)/(V+ma+nA))+p2* (-beta+((2*beta*W)/(V+ea))-
(sigma*nA)/(V+ma+nA));
```

```
dg=[x(1) x(2)];
```

0.3 MODEL PREY-PREDATOR LESLIE-GOWER PADA TANAMAN PADI TANPA DAN DENGAN ADANYA KONTROL

```
clc; clear all;
close all;
V0=0.35;

W0=0.37;

%Parameter2 ma=1.5;
ea=0.008; nA=0.01;
delta=0.7; beta=0.01;
sigma=17; miu=0.1;

A=10; u1max=1;
h=0.5; t=0:h:60;
Z=length(t);

z baris, 1 kolom
u1=zeros(Z,1); u1old=zeros(Z,1);

V=zeros(Z,1);
W=zeros(Z,1);

Vold=zeros(Z,1);
Wold=zeros(Z,1);
```

```

%p1 adalah lambda_1 dsb
p1=zeros(Z,1); p2=zeros(Z,1);

p1old=zeros(Z,1); p2old=zeros(Z,1);

%kontrol ada 2 pada u_1 dan u_1old
tes=1; it=0;

while tes >1 e -3
    u1old=u1;
    Vold=V; Wold=W; p1o=p1;
    p2o=p2;

    V(1)=V0; W(1)=W0; J(it+1)=0;

    for i=1:Z-1
        J(it+1)=J(it+1)+h*(W(i)+1/2*A*u1old(i)^2); y=[V(i) W(i)];

        %RungeKutta

        k1=h*State(y,u1old(i),ma,ea,nA,delta,beta,sigma,miu);

        k2=h*State(y+0.5*k1,u1old(i),ma,ea,nA,delta,beta, sigma,miu);

```

```
k3=h*State(y+0.5*k2,u1old(i),ma,ea,nA,delta,beta, sigma,miu);
```

```
k4=h*State(y+k3,u1old(i),ma,ea,nA,delta,beta, sigma,miu);
```

```
y=y+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
```

```
V(i+1)=y(1);
```

```
W(i+1)=y(2); end
```

```
J(it+1)=J(it+1)+h*(W(i)+1/2*A*u1old(i)^2);
```

```
%Plot populasi tanpa kontrol
```

```
if it == 0
```

```
figure(1) plot(t,V,'m--','LineWidth',3);
```

```
hold on;
```

```
figure(2) plot(t,W,'m--','LineWidth',3);
```

```
hold on;
```

```
end
```

```
p1(Z)=0; p2(Z)=0;
```

```
for i=1:Z-1 je=Z-i; y=[p1(je+1)
```

```
p2(je+1)];
```

```
k1=h*Costate(y,V(je+1),W(je+1),u1old(je+1),ma, ea,nA,delta,beta,sigma,miu);
```

```
k2=h*Costate(y+0.5*k1,V(je+1),W(je+1),u1old(je+1),
ma,ea,nA,delta,beta,sigma,miu);
```

```
k3=h*Costate(y+0.5*k2,V(je+1),W(je+1),u1old(je+1),
ma,ea,nA,delta,beta,sigma,miu);
```

```
k4=h*Costate(y+k3,V(je+1),W(je+1),u1old(je+1),
ma,ea,nA,delta,beta,sigma,miu); y=y-(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
p1(je)=y(1); p2(je)=y(2);
```

```
temp2=min([(1/A)*(p1(je)*miu*V(je)) u1max]);
u1(je)=max([temp2 0]) ; end
```

```
eV=sum(abs(V-Vold)); eW=sum(abs(W-Wold));
ep1=sum(abs(p1-p1o)); ep2=sum(abs(p2-p2o));
eu1=sum(abs(u1-u1old)); %error = sum dari error yang
lama dengan yang baru
```

```
tes=eV+eW+ep1+ep2+eu1; it=it+1;
u1=(0.5*u1+0.5*u1old); end
```

```
figure(1) plot(t,V,'r-','LineWidth',3); xlabel('Waktu (
Minggu)'); ylabel('X(t)');
```

```
grid on; legend('X Tanpa Kontrol','X dengan Kontrol u');  
title('Populasi Prey'); hold on;
```

```
figure(2) plot(t,W,'r-','LineWidth',3); xlabel('Waktu (  
Minggu)'); ylabel('Y(t)');
```

```
grid on; legend('Y Tanpa Kontrol','Y dengan Kontrol u');  
title('Populasi Predator'); hold on;
```

```
figure(3) plot(t,u1,'r-','LineWidth',3); xlabel('Waktu (  
Minggu)'); ylabel('u^1( t)');
```

```
grid on; legend('Kontrol u1');  
title('Kontrol Pestisida'); hold on;
```

Lampiran 2. Daftar Riwayat Hidup**DAFTAR RIWAYAT HIDUP****Identitas Diri**

Nama Lengkap : Atika Dewi Ardiyanti
Tempat, Tanggal Lahir : Kab. Semarang, 6 Juli 2001
Alamat : Jl. Bangka Timur RT 05/06, Gedanganak,
Ungaran Timur, Kab. Semarang
HP : 08995185672
E-mail : atikadewiardiyanti@gmail.com

Riwayat Pendidikan

1. MI Hidayatul Atfal (2007-2013)
2. SMP N 2 Ungaran (2013-2016)
3. SMK N 7 Semarang (2016-2020)

Ungaran, 07 Mei 2024



Atika Dewi Ardiyanti
NIM. 2008046032