OPTIMASI WAKTU PRODUKSI KUE LANJI MENGGUNAKAN ALJABAR MAX-PLUS

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika dalam Ilmu Matematika

Oleh: **MUSTHOFA ABDILLAH**

NIM : 1908046017

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG

2023

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Musthofa Abdillah
NIM	: 19080056028
Jurusan/Program Studi	: Matematika/Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul:

OPTIMASI WAKTU PRODUKSI KUE LANJI MENGGUNAKAN ALJABAR MAX-PLUS

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 19 Desember 2023

Pembuat pernyataan,

Musthofa Abdillah
NIM: 1908046017

KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul	:	**Optimasi Waktu Produksi Kue Lanji menggunakan Aljabar Max-Plus**
Penulis	:	Musthofa Abdillah
NIM	:	1908046017
Jurusan	:	Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 22 Desember 2023

DEWAN PENGUJI

Penguji I,	Penguji II,
Eva Khoirun Nisa, M.Si.	**Dinni Rahma Oktaviani, M.Si.**
NIP : 19870102 201903 2 010	NIP : 19941009 201903 2 017
Penguji III,	Penguji IV,
Any Muanalifah, M.Si., Ph.D.	**Dr. Budi Cahyono, S.Pd., M.Si.**
NIP : 19820113 201101 2 009	NIP : 19081215 200912 1 003
Pembimbing I,	Pembimbing II,
Prihadi Kurniawan, M.Sc.	**Dinni Rahma Oktaviani, M.Si.**
NIP : 19901226 201903 1 012	NIP : 19941009 201903 2 017

KEMENTERIAN AGAMA FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI UIN WALISONGO SEMARANG REPUBLIK INDONESIA

NOTA DINAS

Semarang, 18 Desember 2023

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	Optimasi Waktu Produksi Kue Lanji menggunakan Aljabar Max-Plus
Nama	:	Musthofa Abdillah
NIM	:	1908046017
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,

Prihadi Kurniawan, M.Sc.
NIP : 19901226 201903 1 012

NOTA DINAS

Semarang, 19 Desember 2023

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul	:	Optimasi Waktu Produksi Kue Lanji menggunakan Aljabar Max-Plus
Nama	:	Musthofa Abdillah
NIM	:	1908046017
Jurusan	:	Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing II,

Dinni Rahma Oktaviani, M.Si.
NIP : 19941009 201903 2 017

ABSTRAK

Judul : Optimasi Waktu Produksi Kue Lanji menggunakan Aljabar Max-Plus

Penulis: Musthofa Abdillah

NIM : 1908046017

Aljabar max-plus ($\mathbb{R}_{max}$) merupakan suatu struktur aljabar di mana himpunan gabungan semua bilangan real ($\mathbb{R}$) dengan $-\infty$, yang dilengkapi dengan operasi *maximum* ($\oplus$) dan operasi *plus* ($\otimes$). Aljabar ini dapat digunakan untuk memecahkan masalah yang berhubungan dengan teori graf, seperti sistem produksi perakitan, sistem jaringan telekomunikasi, sistem pemrosesan paralel pada komputer, sistem jaringan kereta, penjadwalan proyek dan sebagainya. Penelitian ini memanfaatkan aljabar max-plus untuk mencari waktu optimal produksi kue tradisional khas Kendal. Hasil yang di dapatkan, waktu optimal aktifitas produksi per 60 buah yaitu 199 menit atau 3 jam 19 menit. Diperoleh juga jalur kritis dan waktu mengambangnya.

Kata kunci: Aljabar Max-Plus, Waktu Optimal, Sistem Produksi

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT Tuhan semesta alam, yang senantiasa memberikan rohmat dan hidayahnya kepada kita semua umat manusia. Tanpa kehendak dan keridhoan Tuhan, skripsi ini tidak mungkin bisa terselesaikan. Sholawat serta salam selalu tercurahkan kepada Rasulullah SAW, yang merupakan *rahmatan lil alamin* dan nikmat terbesar yang Tuhan anugerahkan kepada alam semesta. Skripsi ini merupakan hasil dari pembelajaran dari perkuliahan yang telah diikuti, serta dapat diselesaikan sebab doa dan dukungan dari berbagai pihak. Dengan segala kerendahan hati, diucapkan terima kasih kepada:

1. Rektor Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
2. Dr. Ismail, M. Ag. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.
3. Ibu Emy Siswanah, M.Sc. selaku ketua Jurusan Matematika FST UIN Walisongo Semarang.
4. Ibu Any Muanalifah, M.Si., Ph.D. sebagai dosen bidang aljabar Jurusan Matematika.
5. Bapak Prihadi Kurniawan, M.Sc. selaku dosen pembimbing I dan Ibu Dinni Rahma Oktaviani selaku

dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan dan arahan dalam penyusunan skripsi ini.

6. Segenap dosen jurusan Matematika, pegawai, dan seluruh civitas akademik di lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang yang telah memberikan bekal ilmu pengetahuan kepada penulis.
7. Kedua orang tua beserta adik yang senantiasa memberikan kasih sayang, kesabaran, dukungan, semangat, dan motivasi serta do'a yang tak pernah surut.
8. Keluarga Ibu Mustafidah selaku pemilik produksi rumahan kue lanji di Desa Lanji, Patebon, Kendal.
9. Teman-teman jurusan Matematika khususnya kelas A angkatan 2019 dan teman teman UKM RISALAH yang selalu memberikan semangat dan dukungan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
10. Keluarga KKN MIT ke 15 UIN Walisongo Semarang posko 12 desa Lanji yang tercinta.
11. Keluarga besar pondok pesantren Daarun Najaah Jerakah, Tugu, Semarang.
12. Saudara-saudara PSHT Rayon Daarun Najaah, Ranting Tugu, Cabang Kota Semarang.
13. Semua pihak yang tak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu selama dilaksanakannya penelitian sampai selesainya penulisan skripsi ini.

Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam skripsi ini. Untuk itu dengan kerendahan hati penulis mengharapkan kritik dan saran untuk memperbaiki skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis pada khususnya dan bagi pembaca pada umumnya.

Semarang, 19 Desember 2023

Musthofa Abdillah

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Optimasi adalah usaha untuk memperoleh hasil yang lebih efisien dan efektif pada suatu masalah, biasanya diterapkan pada kendala dalam aktivitas produksi. Kendala yang ada biasanya berupa waktu produksi, sumber daya produksi dan pencapaian hasil produksi (Wati dan Rochman, 2013). Tujuan utama dari optimasi yaitu manajemen untuk mengembangkan kebijakan penjadwalan yang dapat meminimalkan total waktu produksi (Cristianta dan Sunarni, 2012). Berbagai cara ilmiah dapat dilakukan untuk mengoptimasi waktu produksi, salah satunya dengan aljabar dalam ilmu matematika.

Aljabar merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang sangat penting untuk dipelajari bagi setiap orang, karena di dalamnya terdapat pengetahuan dasar matematika. Menurut Booker, aljabar memiliki peranan penting sebagai alat menyelesaikan persoalan matematika, bisnis, perdagangan, ekonomi, sains, komputasi dan lain sebagainya. Krimanto juga berpendapat bahwa aljabar merupakan salah satu cabang di ilmu matematika yang berkaitan dengan analisis kuantitas, persamaan-persamaan, hubungan dan struktur yang terbentuk (Dede dkk, 2021).

Aljabar abstrak merupakan salah satu kajian di aljabar yang mempelajari struktur aljabar seperti grup, ring, field, modul, dan ruang vektor. Pada dasarnya aljabar abstrak juga membahas tentang himpunan dan operasinya, oleh karena itu dalam mempelajari materi ini selalu identik dengan sebuah himpunan tidak kosong yang mempunyai elemen-elemen yang dapat dikombinasikan dengan penjumlahan, perkalian, ataupun keduanya atau dapat dioperasikan dengan satu atau lebih operasi biner. Pembahasannya melibatkan objek-objek abstrak yang berupa simbol-simbol. Salah satu kajian di dalamnya adalah aljabar max-plus (Abdul Majid, 2012).

Aljabar max-plus merupakan suatu struktur aljabar berupa himpunan gabungan bilangan real dengan $\varepsilon = -\infty$ yang memuat operasi maksimum ($\oplus$) dan penjumlahan ($\otimes$). Dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max} = (\mathbb{R}_{\varepsilon}, \oplus, \otimes)$, dengan $\mathbb{R}_{\varepsilon} = \{\mathbb{R} \cup -\infty\}$. Aljabar max-plus muncul pada tahun 1970-an silam, tetapi baru berkembang dengan pesat sekitar tahun 1990-an. Permasalahan-permasalahan dalam jaringan (teori graf), terutama terkait dengan masalah sinkronasi dapat dimodelkan dan diselesaikan dengan baik menggunakan aljabar max-plus. Diantara permasalahan yang dapat dimodelkan dengan aljabar max-plus yaitu sistem produksi perakitan, sistem jaringan telekomunikasi, sistem pemrosesan paralel pada komputer, sistem jaringan kereta, jaringan proyek dan sebagainya (Andy, 2016).

Permasalahan terkait optimasi waktu dalam jaringan proyek akan menghasilkan jalur kritis yang memuat aktivitas-aktivitas kritis di dalam proyek. Hasil itu sangat penting untuk membuat waktu penyelesaian yang optimal, tanpa adanya keterlambatan. Waktu optimal merupakan waktu tercepat dalam menyelesaikan suatu proyek, dari mulainya aktivitas awal sampai selesainya aktivitas akhir. Sedangkan jalur kritis merupakan urutan aktivitas di dalam suatu proyek, sebagai penentu waktu tercepat penyelesaiannya.

Banyak penelitian yang telah dilakukan terkait dengan penjadwalan proyek menggunakan aljabar max-plus. Pertama, penelitian Arpi Median Lavandi Noor (2015) dengan hasil yang diperoleh yaitu waktu penyelesaian optimum beserta jalur kritis dari penjadwalan proyek PDAM.

Kedua, penelitian Lailany Yahya, Nurwan, dan Resmawan (2022) dengan hasil yang diperoleh yaitu waktu penyelesaian optimum 34,5 hari dan jalur kritis dari proses pembuatan kerajinan Sulaman Karawo sehingga dapat menunda proses pengirisan kain.

Ketiga, penelitian Eka Susilowati dan Bryan Pudji Hartono (2023) dengan hasil yang diperoleh yaitu waktu penyelesaian optimum selama 136 hari dan jalur kritis dari suatu proyek pembuatan rumah.

Keempat, penelitian Mitra Amalia, Siswanto dan Bowo Winarno (2017) dengan hasil waktu tempuh minimalnya yaitu 16 hari dan jalur kritisnya dari suatu proyek bangunan.

Mengacu kepada penelitian-penelitian sebelumnya, dalam penelitian ini akan dibahas mengenai optimasi waktu produksi. Objek yang dituju yaitu salah satu usaha rumahan jajanan tradisional khas Desa Lanji, Kecamatan Patebon, Kabupaten Kendal. Jajanan ini cukup diminati masyarakat, khususnya untuk kegiatan keagamaan seperti tahlilan dan selamatan, bisa juga buat dibagikan ke sanak keluarga ketika menjelang lebaran. Salah satu pelaku produksi kue ini adalah keluarga Ibu Mustafidah. Dalam produksinya, beliau masih menggunakan cara tradisional yang turun temurun dari zaman penjajahan untuk mempertahankan ciri khas rasa Kue Lanji itu. Beliau memproduksi Kue Lanji ketika menerima pesanan saja disamping profesi aslinya yaitu bertani. Pesanan paling banyak ketika menjelang lebaran, hampir seminggu terakhir bulan Ramadhan beliau memproduksi kue Lanji setiap malamnya. Pemodelan aljabar max-plus akan diterapkan pada sistem produksi Kue Lanji untuk memperoleh waktu optimal pada aktivitas produksi Kue Lanji.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah berapa waktu optimal aktivitas produksi Kue Lanji menggunakan aljabar max-plus.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menemukan waktu optimal aktivitas produksi Kue Lanji dengan aljabar max-plus.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini diantaranya:

1. Diketahui waktu optimal aktivitas produksi Kue Lanji dengan aljabar max-plus.
2. Diketahui manfaat penerapan petri aljabar max-plus dalam kehidupan sehari-hari, khususnya pada bidang produksi.
3. Dibuat sebagai tugas akhir untuk memperoleh gelar sarjana.

1.5 Metode Penelitian

Tahapan-tahapan yang runtut dan sistematis untuk mempermudah penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. **Studi literatur**, mempelajari penelitian-penelitian terdahulu yang membahas mengenai penjadwalan proyek dengan menggunakan aljabar max-plus.
2. **Menentukan lokasi penelitian**, lokasi yang digunakan untuk penelitian yaitu produksi rumahan Kue Lanji Ibu Mustafidah yang terletak di desa Lanji, kecamatan Patebon, kabupaten Kendal. Penelitian dilakukan pada tanggal 8 Juni 2023 pada jam 19.00-selesai.
3. **Mencari informasi pembuatan produk**, mengamati dan menuliskan tahapan-tahapan pembuatan Kue Lanji serta waktu yang diperlukan dalam setiap tahapannya.
4. **Mencari waktu optimal dengan aljabar max-plus**, menggunakan algoritma Critical Path Method (CPM) dengan pendekatan aljabar max-plus untuk menemukan waktu optimal dalam proses pembuatan Kue Lanji.
5. **Menyusun hasil penelitian dalam bentuk laporan**, hasil yang diperoleh disusun secara ilmiah dalam bentuk skripsi.

1.6 Sistematika Penulisan

Penyusunan penelitian ini memerlukan urutan yang sistematis guna memepermudah pemaknaan dari setiap bab-babnya. Penelitian ini terdiri dari empat bab:

1. **BAB I PENDAHULUAN**

   Bab ini membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metodologi, sistematika penulisan, dan batasan masalah.
2. **BAB II LANDASAN TEORI**

   Bab ini membahas tentang teori-teori yang mendukung penelitian ini, seperti Aljabar max-plus, matirks pada aljabar max-plus, matriks dan digraf, sistem persamaan linear iteratif, dan waktu optimal.
3. **BAB III PEMBAHASAN**

   Bab ini berisi hasil dan pembahasan mengenai aktivitas produksi Kue Lanji, kemudian dicari waktu optimalnya menggunakan aljabar max-plus.
4. **BAB IV PENUTUP**

   Bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan penelitian dan hasilnya, serta saran untuk penelitian selanjutnya.

1.7 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya terfokus pada waktu produksi setiap aktivitasnya saja, dengan mengabaikan berbagai kendala yang mungkin bisa terjadi.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

2.1 Aljabar Max-Plus

Sebelum membahas aljabar max-plus, kita perlu mengetahui semiring. Berikut definisi dari semiring.

Definisi 2.1.1 (Semiring, e.g. Jonathan, 1999)

Semiring $(S, +, \times)$ merupakan suatu himpunan tak kosong S yang dilengkapi dua operasi biner + dan ×, yang memenuhi aksioma berikut;

1. $(S, +)$ adalah semigrup komutatif dengan elemen identitas 0, yaitu $x, y, z \in S$ berlaku
   (a) Sifat assosiatif, $x + (y + z) = (x + y) + z$,
   (b) Sifat komutatif, $x + y = y + x$,
   (c) Elemen identitas 0, yang memenuhi $x + 0 = 0 + x = x$.
2. $(S, \times)$ adalah semigrup dengan elemen identitas 1, yaitu $x, y, z \in S$ berlaku
   (a) Sifat assosiatif, $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$
   (b) Elemen identitas 1, yang memenuhi $x \times 1 = 1 \times x = x$.
3. Operasi × distributif terhadap +, yaitu $x, y, z \in S$ berlaku
   (a) $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$

(b) $(x+y)\times z=(x\times z)+(y\times z)$

4. Mempunyai elemen penyerap 0 terhadap operasi ×, dimana x × 0 = 0 × x = 0.

Aljabar max-plus merupakan contoh semiring, yakni semiring max-plus dengan notasi $\mathbb{R}_{max}=(\mathbb{R}_{\epsilon},\oplus,\otimes)$ yang merupakan himpunan $\mathbb{R}_{\epsilon}=\{\mathbb{R}\cup-\infty\}$ dengan dua buah operasi $a\oplus b\ =\ max(a.b)$ dan $a\otimes\ b\ =\ a\ +\ b$. Dilengkapi dengan elemen identitas masing-masing operasi $\oplus$ dan $\otimes$ berturut-turut $\varepsilon\ =\ -\infty$ dan $e\ =\ 0$. Operasinya bersifat assosiatif, komutatif dan distributif seperti halnya semiring pada aljabar biasa (Kasie, G.F, 2009).

Sesuai kaidah yang berlaku pada operasi bilangan real, operasi perkalian dilakukan terlebih dahulu dibandingkan operasi penjumlahan. Oleh karena itu, pada aljabar max-plus operasi $\otimes$ dilakukan terlebih dahulu dibandingkan operasi $\oplus$.

Contoh 2.1.1 (Operasi pada Aljabar Max-Plus)

Tabel 2.1. Contoh operasi aljabar max-plus

Operasi	Artinya	Hasil
$5\oplus\ 3$	$max(5,3)$	5
$7\oplus\ \varepsilon$	$max(7,-\infty)$	7
$6\otimes\ 3$	$6\ +\ 3$	9
$8\otimes e$	$8\ +\ 0$	8

$6 \otimes \varepsilon$	$6 + (-\infty)$	$-\infty$
$9 \oplus 7 \otimes 6$	$max(9,7+6) = max(9,13)$	13

2.2 Matriks pada Aljabar Max-Plus

Aljabar max-plus mempunyai matriks yang elemen-elemennya berada di aljabar max-plus, seperti halnya pada matriks real yang elemennya berupa himpunan bilangan real. Himpunan matriks berordo $m \times n$ pada $\mathbb{R}_{max}$ dinotasikan dengan $R_{max}^{m\times n}$, untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$.

Definisi 2.2.1 (Matriks Aljabar Max-Plus, e.g. Heidergott, 2005)

Diberikan matriks $A \in R_{max}^{m\times n}$ untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$. Matriks A memiliki entri-entri pada baris i dan kolom j yang dinotasikan a_{ij}, untuk setiap $i \in m$ dan $j \in m$. Matriks A dapat ditulis sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Matriks dalam aljabar max-plus juga memiliki matriks identitas yang didefinisikan sebagai matriks $I \in R_{max}^{n\times n}$ yang elemen diagonal utamanya bernilai 0 dan elemen lainnya bernilai $-\infty$.

Definisi 2.2.2 (Operasi Matriks Aljabar Max-Plus, e.g. Heidergott, 2005)

1. Untuk $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in R_{max}^{m\times n}$, maka:

   $A \oplus B = (a_{ij} \oplus b_{ij}) = max(a_{ij}, b_{ij})$ untuk $i, j \in \mathbb{N}$
2. Untuk $A = (a_{ij}), \in R_{max}^{m\times p}$ dan $B = (b_{ij}) \in R_{max}^{p\times n}$, maka:

   $A \otimes B = C$ dimana $C = (c_{ij}) \in R_{max}^{m\times n}$ dan $c_{ij} = \max\limits_{k}(a_{ik} + b_{kj})$, untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.
3. Untuk sembarang matriks $A \in R_{max}^{m\times n}$ dan sembarang skalar $a \in R_{max}$ maka:

   $$a \otimes A = a \otimes (a_{ij}) = (a + a_{ij})$$

Contoh 2.2.1 (Operasi Materiks Aljabar Max-Plus)

Diketahui matriks $A, B \in R_{max}^{2\times 2}$ dimana $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \varepsilon & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} e & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ maka:

1. $A \oplus B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \varepsilon & -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} e & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \oplus e & 3 \oplus 3 \\ \varepsilon \oplus 2 & -1 \oplus 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
2. $A \otimes B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \varepsilon & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \oplus 5 & 5 \oplus 7 \\ \varepsilon \oplus 1 & \varepsilon \oplus 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

3. $2 \otimes A = 2 \otimes \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \varepsilon & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \otimes 2 & 2 \otimes 3 \\ 2 \otimes \varepsilon & 2 \otimes -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$

Definisi 2.2.3 (Perpangkatan Matriks Aljabar Max-Plus, e.g. Heidergott, 2005)

Perpangkatan pada matriks atas aljabar max-plus, didefinisikan matriks persegi atas aljabar max-plus ($A \in R_{max}^{n \times n}$), berlaku

$$A^{\otimes k} = \underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_{k}, \forall k \in \mathbb{N}$$

Definisi 2.2.4 (Kleene Star, e.g. Sergeev, 2009)

Diberikan matriks $A \in R_{max}^{n \times n}$

$$A^* \coloneqq I \oplus A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \dots$$

dengan I merupakan matriks identitas. Deret tersebut merupakan analog aljabar max dari $(I - A)^{-1}$, dan konvergen ke matriks dengan entri berhingga jika dan hanya jika $\lambda(A) \leq 1$. Yang dimaksud kleene star dari A adalah

$$A^* \coloneqq I \oplus A \oplus A^{\oplus 2} \oplus \dots \oplus A^{\oplus (n-1)}$$

2.3 Graf Berarah (Digraf) dan Matriks

Definisi 2.3.1 (Graf, e.g. Bacelli, 2001)

Graf didefinisikan sebagai suatu pasangan (V, E) di mana V merupakan himpunan tak kosong yang disebut titik (*vertex*) dan E merupakan himpunan pasangan titik-titik yang disebut sisi (*edge*).

Definisi 2.3.2 (Graf Berarah, e.g. Bacelli, 2001)

Graf berarah G didefinisikan sebagai suatu pasangan (V, A) dimana $V = \{1, 2, \dots, n\}$ merupakan himpunan titik dan A merupakan himpunan pasangan titik-titik yang berurutan, yaitu $i, j \in A$ dengan titik awal i dan titik akhir j.

Berikut ini akan dijelaskan mengenai istilah-istilah yang berhubungan dengan digraf:

- Lintasan, yaitu barisan sisi-sisi digraf, diawali dengan titik i_1 dan diakhiri titik i_n, $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{p-1}, i_p)$.
- Sirkuit (*cycle*), yaitu keadaan dimana titik awal dari suatu lintasan itu bertepatan dengan titik akhirnya, $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_p, i_1)$. Graf yang memuat sirkuit disebut graf siklik, sedangkan graf yang tidak memuat sirkuit disebut graf tak siklik.
- *Loop*, yaitu sirkuit yang hanya terdiri dari satu titik yang merangkap sebagai titik awal dan titik akhir.

Definisi 2.3.3 (Strongly Connected, e.g. Clark, 1995)

Suatu digraf dikatakan terhubung kuat (strongly connected), jika pada setiap titik yang berbeda terdapat sisi-sisi yang membentuk suatu lintasan.

Digraf $G = (V, A)$ memuat suatu bobot jika setiap sisi $j, i \in A$ dipasangkan dengan suatu bilangan riil A_{ij}, yang merupakan bobot sisi (j, i) dan dinotasikan dengan $w(j, i)$. Setiap matriks $A \in R_{max}^{n\times n}$ selalu dapat didefinisikan sebagai digraf berbobot, seperti definisi berikut.

Definisi 2.3.4 (Digraf berbobot, e.g. Bacelli, 2001)

Suatu matriks $A \in R_{max}^{n\times n}$bertepatan dengan digraf berbobot $G(A) = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, .., n\}$ dan $A = (j, i)$, dimana $w(j, i) = A_{ij} \neq -\infty$.

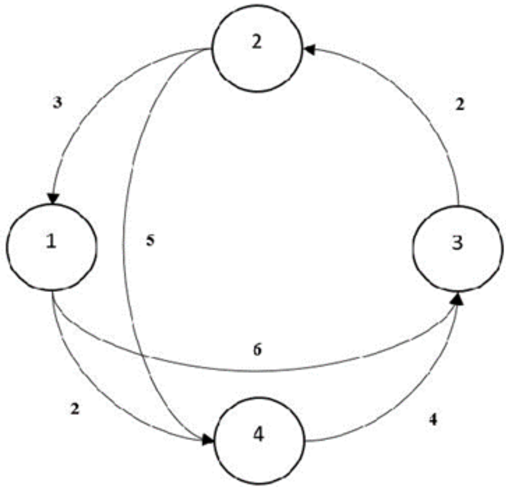
Sebaliknya, untuk setiap digraf berbobot $G(A) = (V, A)$ selalu dapat didefinisikan sebagai matriks $A \in R_{max}^{n\times n}$, yang merupakan matriks bobot dari $G(A)$, dengan:

$$A_{ij} = \begin{cases} w(j, i) & \text{jika } (j, i) \in A \\ -\infty & \text{jika } (j, i) \notin A \end{cases}$$

Contoh 2.3.1 Diberikan suatu matriks

$$A = \begin{bmatrix} -\infty & 3 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 2 & -\infty \\ 6 & -\infty & -\infty & 4 \\ 2 & 5 & -\infty & -\infty \end{bmatrix}$$

Digraf berbobot dari matriks A adalah $G(A) = (V, A)$ dengan $V = \{1,2,3,4\}$ dan $A = \{(2,1), (3,2), (1,3), (4,3), (1,4), (2,4)$ yang disajikan pada gambar 2.1.



Gambar 2.1. Representasi digraf dari matriks A

Definisi 2.3.5 (Maximum Cycle Mean, e.g. Sergeev, 2009)

Digraf berbobot $G(A)$ mempunyai maximum cycle mean yang dinotasikan $\lambda(A)$ dan didefinisikan:

$$\lambda(A) = \max_{\sigma}(\mu(\sigma, A))$$

dimana $\mu(\sigma, A)$ merupakan bobot rata-rata suatu sirkuit yang didefinisikan sebagai jumlah dari masing-masing bobot pada suatu sirkuit dibagi dengan panjang sirkuitnya.

2.4 Sistem Persamaan Linear Iteratif Max-Plus

Sebelum membahas sistem persamaan linear iteratif max-plus, diberikan teorema dan definisi-definisi berikut:

Definisi 2.4.1

Diberikan $A \in R_{max}^{n \times n}$ dengan semua sirkuit dalam $G(A)$ berbobot tak positif. Didefinisikan

$$A^* \coloneqq I \oplus A \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n} \oplus A^{\otimes (n+1)} \oplus \ldots$$

$$\text{dan } A^+ \coloneqq A \otimes A^*$$

Teorema 2.4.1 (Bacelli, 2001)

Diberikan matriks $A \in R_{max}^{n \times n}$. Jika semua sirkuit dalam $G(A)$ mempunyai bobot tak positif, maka untuk setiap $p \geq n$

$$A^{\otimes p} \leq_m I \oplus A \oplus \ldots \oplus A^{\otimes (n-1)}$$

Definisi 2.4.2

Suatu matriks $A \in R_{max}^{n \times n}$ dikatakan semi-definit jika semua sirkuit dalam $G(A)$ mempunyai bobot tak positif dan dikatakan definit jika semua sirkuit dalam $G(A)$ mempunyai bobot negatif.

Sistem persamaan linear iteratif max-plus mempunyai bentuk umum $x = A \otimes x \oplus b$ dengan $x, b \in R^{n}_{max}$ dan $A \in R^{n\times n}_{max}$. Dengan substitusi berulang diperoleh:

- Substitusi ke-1 :

$$x = A \otimes (A \otimes x \oplus b) \oplus b$$
$$= A^{\otimes 2} \otimes x \oplus A \otimes b \oplus b$$
$$= A^{\otimes 2} \otimes x \oplus (A \oplus I) \otimes b$$

- Substitusi ke-2:

$$x = A^{\otimes 3} \otimes x \oplus \left(A^{\otimes 2} \oplus A \oplus I\right) \otimes b$$

- Substitusi ke-n:

$$x = A^{\otimes n} \otimes x \oplus \left(A^{\otimes (n-1)} \oplus \ldots \oplus A \oplus I\right) \otimes b$$

Dengan demikian, jika jika A^{*} ada, maka $x^{*} = A^{*} \otimes b$ merupakan penyelesaian sistem di atas. Hal ini karena

$$A \otimes (A^{*} \otimes b) \oplus b = (I \oplus A \oplus A^{*}) \otimes b = A^{*} \otimes b$$

Teorema 2.4.2 (Baccelli, dkk, 2001)

Jika matriks A semi-definit, maka $x^{*} = A^{*} \otimes b$ merupakan suatu penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-plus $x = A \otimes x \otimes b$. Lebih lanjut jika A definit, maka sistem persamaan linear tersebut mempunyai penyelesaian tunggal.

2.5 Waktu Optimal

Waktu optimal penyelesaian proyek adalah waktu minimal dalam menyelesaikan suatu proyek dari mulainya aktivitas awal sampai selesainya aktivitas akhir, tanpa terjadinya suatu keterlambatan pada aktivitas-aktivitasnya. Dalam mencari waktu optimal, diperlukan juga jalur kritis untuk mengetahui aktivitas yang tidak dapat dilakukan penundaan. Menurut Duncan (2013), jalur kritis merupakan urutan proses di dalam suatu proyek, yang menentukan durasi tercepat penyelesaian proyek tersebut. Jadi, kita dapat mempercepat atau bahkan menunda penyelesaian proyek dengan mempercepat atau menunda setiap proses yang termasuk jalur kritisnya.

Berdasarkan Rudhito (2016), waktu optimal dan jalur kritis bisa diperoleh menggunakan algoritma *Critical Path Method* (CPM) pada teknik perhitungan maju dan mundur, dengan pendekatan aljabar max-plus. Yang akan dibahas dalam metode ini yaitu waktu mulai paling awal (x^e) , waktu selesai paling lambat (x^l), waktu mengambang total (TF), waktu mengambang bebas (FF) dan jalur kritis.

Sebelum itu, kita perlu mengetahui tentang jaringan proyek yang akan dijelaskan dalam Definisi 2.4.1:

Definisi 2.5.1 (Jaringan Proyek, e.g. Chanas dan Zeilinski, 2001)

Diberikan suatu digraf $S = (V, A)$. S dinamakan jaringan proyek jika berbobot, terhubung kuat (*strongly connected*), dan tak siklik.

Dari definisi di atas diketahui bahwa jaringan proyek merupakan suatu graf berarah yang mempunyai bobot, terhubung kuat dan tidak membentuk sirkuit (tak siklik). Selanjutnya, akan dibahas secara runtut mengenai metode CPM dengan pendekatan aljabar max-plus, yang akan digunakan dalam menentukan waktu optimal dan jalur kritis suatu jaringan proyek.

Pertama, akan dibahas mengenai waktu mulai paling awal aktivitas titik i menggunakan tehnik perhitungan maju.

Misalkan x_i^e = waktu mulai paling awal proses i.

$$A_{ij} = \begin{cases} \text{waktu aktifitas dari titik } j \text{ ke } i, & \text{jika } (j, i) \in A \\ -\infty, & \text{jika } (j, i) \in A \end{cases}$$

Asumsikan bahwa aktivitas dimulai pada titik 1 ketika waktu sama dengan nol ($x_1^e = 0$), sehingga

$$x_i^e = \begin{cases} 0, & \text{jika } i = 1 \\ \max\limits_{1 \le j \le n} (A_{ij} + x_j^e), & \text{jika } i > 1 \end{cases}$$

Jika dituliskan dalam aljabar max-plus menjadi

$$x_i^e = \begin{cases} 0, \quad \text{jika } i = 1 \\ \bigoplus_{1 \le j \le n} (A_{ij} + x_j^e), \quad \text{jika } i > 1 \end{cases}$$

Untuk memperoleh x^e, digunakan Teorema berikut:

Teorema 2.5.1 (e.g. Rudhito, 2016)

Suatu jaringan proyek dengan n titik dan A sebagai matriks representasi dari digraf berbobot jaringan tersebut. Vektor waktu mulai paling cepat titik i dapat diperoleh dengan

$$x^e = A^* \otimes b^e \tag{2.1}$$

dengan A^* merupakan kleene star matriks A, $b^e = (0, \varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)^T$ dan $x^e = (x_1^e, x_2^e, \ldots, x_n^e)^T$. Lebih lanjut, x_n^e adalah waktu minimal selesainya proyek.

Bukti Teorema 2.4.2:

Diberikan A yang merupakan matriks bobot dari jaringan proyek S, $x^e = (x_1^e, x_2^e, \ldots, x_n^e)^T$ dan $b^e = (0, \varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)^T$. Persamaan 2.1 dapat dituliskan ke dalam suatu sistem persamaan linear iteratif max-plus berikut

$$x^e = A \otimes x^e \oplus b^e$$

Mengingat jaringan proyek merupakan graf berarah tak siklik, maka tidak terdapat sirkuit, sehingga semua sirkuit dalam jaringan mempunyai bobot negatif, yang berarti matriks A definit. Dengan demikian menurut Teorema 2.4.2,

$$x^e = A^* \otimes b^e$$

merupakan penyelesaian tunggal Persamaan 2.1 tersebut. Mengingat jumlah titik dalam jaringan proyek ini adalah n, maka panjang lintasannya tidak mungkin melebihi $n-1$. Dengan demikian, dalam hal ini Persamaan 2.1 dapat ditulis

$$x^e = A^* \otimes b^e = \left(I \oplus A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus A^{\otimes (n-1)}\right) \otimes b^e$$

yang merupakan vektor waktu mulai paling cepat titik i. Perhatikan bahwa $(A^*)_{n1}$ merupakan bobot maksimum lintasan dari titik awal hingga titik akhir, sehingga x_n^e merupakan waktu minimal penyelesaian proyek.

Kedua, akan dibahas mengenai waktu penyelesaian paling lambat untuk semua aktivitas yang datang ke titik i menggunakan tehnik perhitungan mundur.

Misalkan $x_i^l =$ waktu penyelesaian paling lambat semua kegiatan yang datang ke titik i.

$$B_{ij} = \begin{cases} \text{waktu aktivitas dari titik } i \text{ ke } j, & \text{jika } (i,j) \in A \\ -\infty, & \text{jika } (i,j) \notin A \end{cases}$$

Asumsikan $x_n^l = x_n^e$, sehingga:

$$x_i^l = \begin{cases} x_n^e, & \text{jika } i = n \\ \min\limits_{1 \le j \le n} \left(-B_{ij} + x_j^l\right), & \text{jika } i > n \end{cases}$$

Jika dituliskan dalam aljabar max-plus menjadi

$$-x_i^l = \begin{cases} -x_n^e, & \text{jika } i = n \\ \max\limits_{1 \le j \le n} \left(B_{ij} - x_j^l\right), & \text{jika } i > n \end{cases}$$

Perhatikan bahwa $B = A^T$, sehingga $B^* = (A^T)^*$ dan $(A^T)^* = (A^*)^T$. Dapat dibuktikan menggunakan sifat-sifat perpangkatan dan transpose matriks.

- $B^* = I \oplus B \oplus \ldots \oplus B^{\otimes(n-1)}$
  $= I \oplus A^T \oplus \ldots \oplus (A^T)^{\otimes(n-1)}$
  $= (A^T)^*$(Terbukti)
- $(A^T)^* = \; I \oplus A^T \oplus A^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus (A^T)^{\otimes(n-1)}$
  $= I \oplus A^T \oplus (A^T \otimes A^T) \oplus \ldots \oplus (A^T \otimes A^T \otimes \ldots)$
  $= I \oplus A^T \oplus (A \otimes A)^T \oplus \ldots \oplus (A \otimes A \otimes \ldots)^T$
  $= I \oplus A^T \oplus \left(A^{\otimes 2}\right)^T \oplus \ldots \oplus \left(A^{\otimes(n-1)}\right)^T$
  $= \left(I \oplus A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes(n-1)}\right)^T$
  $= (A^*)^T$(Terbukti)

Teorema 2.5.2 (e.g. Rudhito, 2016)

Suatu jaringan proyek dengan n titik dan waktu aktivitas tegas, dapat diperoleh suatu vektor penyelesaian paling lambat untuk semua aktivitas yang datang ke i sebagai berikut:

$$x^l = -((A^*)^T \otimes b^l) \tag{2.2}$$

untuk A merupakan matriks representasi dari digraf berbobot jaringan tersebut dan vector $b^l = (\varepsilon, \varepsilon, \dots, -x_n^e)^T$.

Bukti Teorema di 2.5.2:

Misalkan $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T = -x^l = \left(-x_1^l, -x_2^l, \dots, -x_n^l\right)^T$ dan $b^l = (\varepsilon, \varepsilon, \dots, -x_n^e)^T$, Persamaan 2.2 dapat dituliskan menjadi:

$$z = A^T \otimes z \oplus b^l$$

di mana menurut Teorema 2.4.2, penyelesaiaannya adalah:

$$z = (A^T)^* \otimes b^l$$

Dikarenakan $z = -x^l$, maka $-z = x^l$, sehingga diperoleh vektor waktu penyelesaian paling cepat, yaitu:

$$-z = -((A^T)^* \otimes b^l$$

$$x^l = -((A^T)^* \otimes b^l$$

Dengan melihat bukti bahwa $(A^T)^* = (A^*)^T$, maka untuk mempermudah perhitungan, ditulis:

$$x^l = -((A^*)^T \otimes b^l$$

Ketiga, akan dibahas mengenai waktu mengambang atau bisa disebut juga waktu toleransi. Waktu mengambang sendiri ada dua macam, yaitu waktu mengambang total dan waktu mengambang bebas. **Waktu mengambang total** (*Total Float Time*) merupakan besarnya toleransi waktu yang memungkinkan terjadinya keterlambatan selesainya aktivitas, tanpa mempengaruhi waktu minimal penyelesaian proyek. Secara matematis, didefinisikan sebagai selisih antara waktu maksimum yang tersedia untuk melakukan suatu aktivitas dengan waktu aktivitasnya.

$$TF_{ij} = \left(x_j^l - x_i^e\right) - A_{ij} \tag{2.3}$$

dengan $TF_{ij} =$ waktu mengambang total untuk aktivitas $(i, j) \in A$. Sedangkan **waktu mengambang bebas** (*Free Float Time*) merupakan besarnya toleransi waktu yang memungkinkan penundaan suatu aktivitas tanpa mempengaruhi waktu dimulainya aktivitas selanjutnya. Secara matematis, dengan mengasumsikan semua aktivitas dimulai sedini mungkin, waktu mengambang bebas didefinisikan sebagai kelebihan waktu yang tersedia di sepanjang aktivitas tersebut.

$$FF_{ij} = \left(x_j^e - x_i^e\right) - A_{ij} \tag{2.4}$$

dengan $FF_{ij} =$ waktu mengambang bebas untuk aktivitas $(i, j) \in A$.

Keempat, menentukan lintasan kritis yang dijelaskan dalam definisi-definisi di bawah ini.

Definisi 2.5.2 (aktivitas kritis, e.g, Chanas dan Zielinski , 2001)

Suatu aktivitas kritis $(i, j) \in A$ dalam jaringan proyek S disebut aktivitas kritis jika $TF_{ij} = 0$.

Definisi 2.5.3 (Lintasan kritis, e.g, Chanas dan Zielinski , 2001) Suatu lintasan $p \in P$ dalam jaringan proyek S disebut lintasan kritis jika semua aktivitas yang terletak didalamnya merupakan aktivitas kritis.

Dari dua definisi tersebut dapat diketahui bahwa lintasan kritis atau jalur kritis bisa diperoleh dengan melihat waktu mengambang totalnya (TF). Jika suatu aktivitas $(i, j) \in A$ mempunyai $TF_{ij} = 0$, maka aktivitas tersebut termasuk dalam jalur kritis. Akibatnya, waktu mulainya harus tepat waktu dan tidak dapat dilakukan penundaan, jika tidak ingin terjadi keterlambatan.

2.6 Algoritma Mencari Waktu Optimal

Berdasarkan Subbab 2.5, diperoleh suatu algoritma atau tahapan untuk mencari waktu optimal dalam sebuah jaringan proyek.

1. Membuat jaringan proyek dari awal dimulainya proyek sampai akhir selesainya proyek.
2. Membuat matriks aljabar max-plus (A) sebagai representasi digraf berbobot dari jaringan proyek tersebut.
3. Mencari klene star A, yaitu $A^* = I \oplus A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes (n-1)}$ dengan memperhatikan banyak titik (n).
4. Mencari waktu mulai paling awal untuk setiap titik i dengan Persamaan (2.1) berikut:

   $$x^e = A^* \otimes b^e$$

   dan waktu selesai paling lambat semua aktivitas yang datang ke titik I dengan Persamaan (2.2) berikut:

   $$x^l = -\left((A^*)^T \otimes b^l\right)$$

5. Menentukan waktu optimal penyelesaian proyek, yaitu x_n^e.
6. Mencari waktu mengambang bebas dan waktu mengambang total dengan Persamaan (2.3) dan (2.4):

   $$TF_{ij} = \left(x_j^l - x_i^e\right) - A_{ij}$$

   $$FF_{ij} = \left(x_j^e - x_i^e\right) - A_{ij}$$

7. Menentukan jalur kritis dan waktu toleransinya.

2.7 Contoh Mencari Waktu Optimal

Perusahaan Setia Bakery merupakan salah satu perusahaan yang bergerak di bidang kuliner, khususnya roti. Produk yang paling diminati konsumen adalah roti isi coklat yang diberi nama Roti Cok. Aktivitas pembuatannya terdiri dari 6 proses, yaitu penyiapan bahan A, B dan C, pencampuran dan pengembangan bahan A, penghalusan bahan B, pelelehan bahan C, pencampuran bahan B dan C, dan pemanggangan. Simbol setiap aktivitasnya berturut-turut 1, 2, 3, 4, 5 dan 6 Akan dicari waktu optimalnya dengan menggunakan aljabar max-plus.

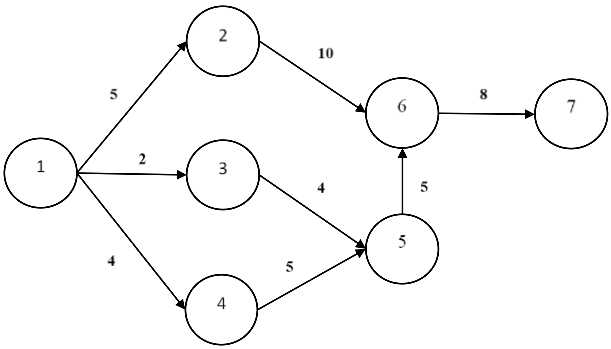
Berikut runtutan langkah dalam mencari waktu optimal:

1. Membuat tabel dan jaringan proyek aktivitas produksi Kue Cok, dengan menambahkan aktivitas 7 sebagai selesainya produksi. Berikut disajikan pada Tabel 2.2 dan Gambar 2.2

Tabel 2.2. Aktivitas produksi contoh

Aktivitas	Waktu	Sebelumnya	Sesudahnya
1	5,2,4 menit	-	2,3,dan 4
2	10 menit	1	6
3	4 menit	1	5
4	5 menit	1	5
5	5 menit	3 dan 4	6

6	8 menit	2 dan 5	7
7	-	6	-



Gambar 2.2. Jaringan proyek contoh

2. Merepresentasikan jaringan proyek Gambar 2.2 ke dalam matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ terlebih dahulu, diperoleh:

$$A = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 5 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 2 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 4 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 4 & 5 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 10 & -\infty & -\infty & 5 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 8 & -\infty \end{bmatrix}$$

3. Mencari $A^* = I \oplus A \oplus^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes 6}$, karena $n = 7$

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 5 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 2 & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 4 & -\infty & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 9 & -\infty & 4 & 5 & 0 & -\infty & -\infty \\ 15 & 10 & 9 & 10 & 5 & 0 & -\infty \\ 23 & 18 & 17 & 18 & 13 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Mencari x^e dan x^l dengan menggunakan Persamaan (2.2) dan (2.4) dengan
   - $b^e = [0, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty]^T$
   - $b^l = [-\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -23]^T$

   sehingga diperoleh:

$$x^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \\ 9 \\ 15 \\ 23 \end{bmatrix} \text{ dan } x^l = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 10 \\ 15 \\ 23 \end{bmatrix}$$

5. Menentukan waktu optimalnya, bisa dilihat pada $x_n^e = x_7^e = 23$. Artinya, waktu untuk memulai aktivitas terakhir adalah 23 menit, sehingga seluruh aktivitas proyek dapat diselesaikan tidak lebiih dari kurun waktu tersebut.

6. Mencari waktu mengambang total (TF_{ij}) dan waktu mengambang bebasnya (FF_{ij}).

$$TF_{ij} = \left(x_j^l - x_i^e\right) - A_{ij}$$

- $TF_{12} = \left(x_2^l - x_1^e\right) - A_{12} = (5-0) - 5 = 0$
- $TF_{13} = \left(x_3^l - x_1^e\right) - A_{13} = (6-0) - 2 = 4$
- $TF_{14} = \left(x_4^l - x_1^e\right) - A_{14} = (5-0) - 4 = 1$
- $TF_{26} = \left(x_6^l - x_2^e\right) - A_{26} = (15-5) - 10 = 0$
- $TF_{35} = \left(x_5^l - x_3^e\right) - A_{35} = (10-2) - 4 = 4$
- $TF_{45} = \left(x_5^l - x_4^e\right) - A_{45} = (10-4) - 5 = 1$
- $TF_{56} = \left(x_6^l - x_5^e\right) - A_{56} = (15-9) - 5 = 1$
- $TF_{67} = \left(x_7^l - x_6^e\right) - A_{67} = (23-15) - 8 = 0$

$$FF_{ij} = \left(x_j^e - x_i^e\right) - A_{ij}$$

- $FF_{12} = (x_2^e - x_1^e) - A_{12} = (5-0) - 5 = 0$
- $FF_{13} = (x_3^e - x_1^e) - A_{13} = (2-0) - 2 = 0$
- $FF_{14} = (x_4^e - x_1^e) - A_{14} = (4-0) - 4 = 0$
- $FF_{26} = (x_6^e - x_2^e) - A_{26} = (15-5) - 10 = 0$
- $FF_{35} = (x_5^e - x_3^e) - A_{35} = (9-2) - 4 = 3$
- $FF_{45} = (x_5^e - x_4^e) - A_{45} = (9-4) - 5 = 0$
- $FF_{56} = (x_6^e - x_5^e) - A_{56} = (15-9) - 5 = 1$

Kemudian hasil tersebut dimasukkan dalam Tabel 2.3, dengan tujuan untuk mempermudah dalam memahami setiap perhitungannya.

Tabel 2.3. Waktu mengambang contoh

(i,j)	A_{ij}	x_i^e	x_j^e	x_j^l	TF_{ij}	FF_{ij}
(1,2)	5	0	5	5	0	0
(1,3)	2	0	2	6	4	0
(1,4)	4	0	4	5	1	0
(2,6)	10	5	15	15	0	0
(3,5)	4	2	9	10	4	3
(4,5)	5	4	9	10	1	0
(5,6)	5	9	15	15	1	1
(6,7)	8	15	23	23	0	0

7. Menentukan jalur kritis dengan melihat aktivitas yang nilai $TF_{ij} = 0$, yaitu (1, 2), (2, 6) dan (6, 7). Diperoleh jalur kritisnya yaitu 1-2-6-7, sedangkan aktivitas yang lain bukan termasuk jalur kritis. Waktu toleransi diperoleh dengan melihat nilai $FF_{ij} \neq 0$, yaitu pada $FF_{35} = 3$ dan $FF_{56} = 1$. Artinya waktu toleransi aktivitas 3 dan aktivitas 5 masing-masing sebesar 3 menit dan 1 menit, yang mana dalam kurun waktu tersebut dapat dilakukan penundaan.

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Aktivitas Produksi Kue Lanji

Berdasarkan data yang telah diperoleh dari Ibu Mustafidah selaku pemilik usaha Kue Lanji, dalam sekali produksi bisa menghasilkan sekitar 60 buah Kue Lanji. Untuk aktivitas pembuatannya adalah sebagai berikut.

1. Nitik Telur

   Nitik telur adalah mengeluarkan telur dari cangkangnya. Telur yang digunakan berjumlah 45 butir terdiri dari 42 butir telur ayam dan 3 butir telur bebek. Satu per satu telur dikeluarkan isinya ke dalam sebuah ember berukuran sedang. Proses ini memakan waktu 8,5 menit.

2. Pengayakan Terigu

   Pengayakan atau penyaringan terigu ini bertujuan untuk mendapatkan tepung terigu yang halus sehingga akan sangat berpengaruh pada hasil dan kualitas produk yang akan didapatkan. Terigu yang akan diayak/disaring sudah dikeringkan terlebih dahulu sekitar 6 jam dibawah terik matahari. Terigu digunakan menggunakan merek segitiga biru sekitar 2,5 kg. Untuk alatnya menggunakan alat saring yang dibuat khusus. Proses ini memakan waktu 10,5 menit.

3. Pengocokan Telur

   Proses ini dilakukan sampai telur mengembang sekitar 4/5 dari wadah ember ukuran sedang. Sebelum dikocok, terlebih dahulu dimasukkan 1/2 kulit jeruk yang sudah dihaluskan, 2,5 kg gula, 3 bungkus panili dan 1/2 sendok teh garam. Alat pengocok yang digunakan berukuran besar untuk mempercepat proses. Proses ini memakan waktu 40,5 menit.

4. Pemanggangan

   Ada lima buah alat panggang dengan sumber panasnya menggunakan kayu bakar dan arang. Biasanya proses pemanasan alat panggang ini dilakukan bebarengan dengan proses awal produksi, sehingga panasnya mencapai stabil ketika bahan sudah siap untuk dipanggang. Untuk membuat 1 buah kue, dibutuhkan adonan telur dan terigu dengan perbandingan 1 centong sayur dan 2 sendok makan. Per 60 buah kue memakan waktu 135 menit.

5. Pengemasan

Adonan yang sudah matang akan dikemas menggunakan plastik, setelah didinginkan terlebih dahulu. Per 60 buah kue, pengemasannya memakan waktu 15 menit.

3.2 Optimasi Waktu Produksi Kue Lanji

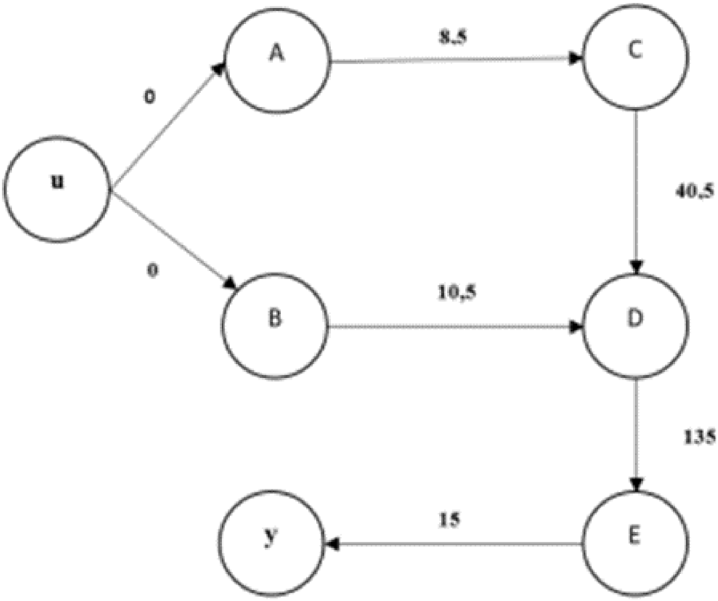
Sistem produksi Kue Lanji akan dimodelkan dan dianalisis dengan menggunakan *Critical Path Method* (CPM) dengan pendekatan aljabar max-plus seperti yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya. Tujuannya untuk memperoleh waktu optimal produksi, jalur kritis, dan waktu mengambangnya. Berikut terdapat 7 langkah algoritma penyelesaiannya sesuia Subbab 3.1, yang akan bahas secara runtut.

Langkah 1, yaitu membuat diagram aktivitas-aktivitas produksinya dengan menambahkan aktivitas u sebagai dimulainya produksi dan aktivitas y sebagai selesainya produksi. Diberikan simbol dari setiap proses pada Tabel 3.1, sehingga diperoleh jaringan proyek produksi Kue Lanji pada Gambar 3.1.

Tabel 3.1. Aktivitas Produksi Kue Lanji

Simbol	aktivitas	Waktu	Sebelumnya	Sesudahnya
u	Mulai produksi	0	–	A, B
A	Nitik telur	8,5	u	C
B	Pengayakan terigu	10,5	u	D

C	Pengocokan telur	40,5	A	D
D	Pemanggangan	135	B, C	E
E	Pengemasan	15	D	y
y	Selesai produksi	-	E	–



Gambar 3.1. Jaringan proyek produksi Kue Lanji

Langkah 2, akan ditentukan matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ sebagai representasi dari jaringan proyek Gambar 4.1.Untuk mempermudah, ditunjukkan terlebih dahulu elemen-elemen matriksnya, yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} a_{(uu)} & a_{(Au)} & a_{(Bu)} & a_{(Cu)} & a_{(Du)} & a_{(Eu)} & a_{(yu)} \\ a_{(uA)} & a_{(AA)} & a_{(BA)} & a_{(CA)} & a_{(DA)} & a_{(EA)} & a_{(yA)} \\ a_{(uB)} & a_{(AB)} & a_{(BB)} & a_{(CB)} & a_{(DB)} & a_{(EB)} & a_{(yB)} \\ a_{(uC)} & a_{(AC)} & a_{(BC)} & a_{(CC)} & a_{(DC)} & a_{(EC)} & a_{(yC)} \\ a_{(uD)} & a_{(AD)} & a_{(BD)} & a_{(CD)} & a_{(DD)} & a_{(ED)} & a_{(yD)} \\ a_{(uE)} & a_{(AE)} & a_{(BE)} & a_{(CE)} & a_{(DE)} & a_{(EE)} & a_{(yE)} \\ a_{(uy)} & a_{(Ay)} & a_{(By)} & a_{(Cy)} & a_{(Dy)} & a_{(Ey)} & a_{(yy)} \end{bmatrix}$$

Perlu diingat lagi, bobot matriks A merupakan waktu setiap aktivitas yang terhubung, apabila tidak ada hubungan maka bobotnya $-\infty$. Berdasarkan jaringan proyeknya, matriks A berubah menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 8,5 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 10,5 & 40,5 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 135 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 15 & -\infty \end{bmatrix}$$

Langkah 3, mencari kleene star(A^*). Untuk mempermudah perhitungan, kita dapat memanfaatkan software scilab dengan toolbox max-plus. Dapat diperhatikan pada jaringan proyek Gambar 3.1 terdapat 7 titik ($n = 7$), sehingga untuk menemukan A kita perlu mencari $A^{\otimes 2}$ sampai $A^{\otimes 6}$ terlebih dahulu.

$$A^{\otimes 4} = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 184 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 160,5 & 199 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes 5} = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 199 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 8,5 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 10,5 & 49 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 145,5 & 175,5 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 150 & -\infty & -\infty \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 49 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 145,5 & 184 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 160,5 & 190,5 & -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes 6} = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix}$$

Serta matriks identitasnya yaitu:

$$I = \begin{bmatrix} 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan rumus $A^* = I \oplus A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes 6}$, diperoleh:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 8,5 & 8,5 & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 49 & 49 & 10,5 & 40,5 & 0 & -\infty & -\infty \\ 184 & 184 & 145,5 & 175,5 & 135 & 0 & -\infty \\ 199 & 199 & 160,5 & 190,5 & 150 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

Langkah 4, mencari waktu mulai paling awal untuk setiap titik (x^e)dan waktu selesai paling lambat semua aktivitas yang datang ke titik $\left(x^l\right)$. Menggunakan rumus $x^e = A^* \otimes b^e$ dan $x^l = -\left((A^*)^T \otimes b^l\right)$, dengan:

- $b^e = [0, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty]^T$
- $b^l = [-\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -199]^T$

Diperoleh:

$$x^e = A^* \otimes b^e$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 8,5 & 8,5 & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 49 & 49 & 10,5 & 40,5 & 0 & -\infty & -\infty \\ 184 & 184 & 145,5 & 175,5 & 135 & 0 & -\infty \\ 199 & 199 & 160,5 & 190,5 & 150 & 15 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ -\infty \\ -\infty \\ -\infty \\ -\infty \\ -\infty \\ -\infty \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} max(0 - \infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty) \\ max(0 - \infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty) \\ max(0 - \infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty) \\ max((8,5), -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty) \\ max(49, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty) \\ max(184, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty) \\ max(199, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8,5 \\ 49 \\ 184 \\ 199 \end{bmatrix}$$

$$x^l = -((A^T)^* \otimes b^l) = -((A^*)^T \otimes b^l) =$$

$$-\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8,5 & 49 & 184 & 199 \\ -\infty & 0 & -\infty & 8,5 & 49 & 184 & 199 \\ -\infty & -\infty & 0 & -\infty & 10,5 & 145,5 & 160,5 \\ -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 40,5 & 175,5 & 190,5 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 135 & 150 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 15 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\infty \\ -\infty \\ -\infty \\ -\infty \\ -\infty \\ -\infty \\ -199 \end{bmatrix}\right)$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} max(-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,0) \\ max(-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,0) \\ max(-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,(-38,5)) \\ max(-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,(-8,5)) \\ max(-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,-49) \\ max(-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,-184) \\ max(-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,-\infty,-199) \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 38,5 \\ 8,5 \\ 49 \\ 184 \\ 199 \end{bmatrix}$$

Dari hasil tersebut dapat dijelaskan secara terperinci sebagai berikut

- Hasil x^e menyatakan waktu mulai paling awal aktivitas di setiap aktivitasnya. Untuk aktivitas u, A, dan B merupakan awal dimulainya produksi, sehingga waktu mulainya pada saat 0 menit. aktivitas C dimulai setelah 8,5 menit, menunggu aktivitas u, dan A selesai. aktivitas D dimulai setelah 49 menit, menunggu aktivitas u, A, B, dan C selesai. aktivitas E dimulai setelah 184 menit, menunggu aktivitas dari u, A, B, C, dan D selesai. aktivitas y dimulai setelah 199 menit, menunggu semua aktivitas selesai dan menyatakan selesainya produksi.

- Hasil x^l menyatakan waktu penyelesaian paling lambat setiap aktivitas yang datang ke aktivitas selanjutnya atau lebih sederhananya waktu paling lambat dimulainya setiap aktivitas. aktivitas u dan A paling lambat dimulai setelah 0 menit. aktivitas B paling lambat dimulai setelah 38,5 menit, dikarenakan menunggu aktivitas u sampai C selesai untuk kemudian masuk bersamaan ke aktivitas D. aktivitas D paling lambat dimulai setelah 49 menit. aktivitas E paling lambat dimulai setelah 184 menit. aktivitas y paling lambat dimulai setelah 199 menit, artinya paling lambat selesainya produksi setelah waktu tersebut.

Langkah 5, waktu optimal dalam pembuatan kue lanji ini dapat dilihat pada elemen $x_n^e = x_7^e = 199$ yang artinya waktu paling cepat aktivitas y dimulai setelah 199 menit. aktivitas y merupakan selesainya produksi, sehingga waktu paling cepat atau waktu optimal pembuatan kue lanji adalah 199 menit atau 3 jam 19 menit.

Langkah 6, mencari waktu mengambang total TF_{ij} dan waktu mengambang bebas FF_{ij}menggunakan Persamaan (2.6) dan (2.7). Dengan perhitungan manual berikut ini:

$$TF_{ij} = (x_j^l - x_i^e) - A_{ij}$$

- $TF_{uA} = (x_A^l - x_u^e) - A_{uA} = (0 - 0) - 0 = 0$
- $TF_{uB} = (x_B^l - x_u^e) - A_{uB} = (38{,}5 - 0) - 0 = 38{,}5$
- $TF_{AC} = (x_C^l - x_A^e) - A_{AC} = (8,5 - 0) - 8,5 = 0$
- $TF_{BD} = (x_D^l - x_B^e) - A_{BD} = (49 - 10) - 10{,}5 = 38{,}5$
- $TF_{CD} = (x_D^l - x_C^e) - A_{CD} = (49 - 8{,}5) - 40{,}5 = 0$
- $TF_{DE} = (x_E^l - x_D^e) - A_{DE} = (184 - 49) - 135 = 0$
- $TF_{Ey} = (x_y^l - x_E^e) - A_{Ey} = (199 - 184) - 15 = 0$

$$FF_{ij} = (x_j^e - x_i^e) - A_{ij}$$

- $FF_{uA} = (x_A^e - x_u^e) - A_{uA} = (0 - 0) - 0 = 0$
- $FF_{uB} = (x_B^e - x_u^e) - A_{uB} = (0 - 0) - 0 = 0$
- $FF_{AC} = (x_C^e - x_A^e) - A_{AC} = (8{,}5 - 0) - 8{,}5 = 0$
- $FF_{BD} = (x_D^e - x_B^e) - A_{BD} = (49 - 0) - 10{,}5 = 38{,}5$
- $FF_{CD} = (x_D^e - x_C^e) - A_{DC} = (49 - 8{,}5) - 40{,}5 = 0$
- $FF_{DE} = (x_E^e - x_D^e) - A_{DE} = (184 - 49) - 135 = 0$
- $FF_{Ey} = (x_y^e - x_E^e) - A_{Ey} = (199 - 184) - 15 = 0$

Kemudian hasil tersebut dimasukkan dalam Tabel 3.2, dengan tujuan untuk mempermudah dalam memahami setiap perhitungannya.

Tabel 3.2. Waktu mengambang Kue Lanji

(i,j)	A_{ij}	x_i^e	x_j^e	x_j^l	TF_{ij}	FF_{ij}
(u, A)	0	0	0	0	0	0
(u, B)	0	0	0	38,5	38,5	0
(A, C)	8,5	0	8,5	8,5	0	0
(B, D)	10,5	0	49	49	38,5	38,5
(C, D)	40,5	8,5	49	49	0	0
(D, E)	135	49	184	184	0	0
(E, y)	15	184	199	199	0	0

Langkah 7, menentukan jalur kritis dengan melihat aktivitas yang nilai $TF_{ij} = 0$, yaitu (u,A), (A,C), (C,D), (D,E) dan (E,y). Diperoleh jalur kritisnya yaitu u-A-C-D-E-y sedangkan aktivitas B bukan termasuk jalur kritis. Waktu toleransi diperoleh dengan melihat nilai FF_{ij}-nya yang tidak sama dengan nol, yaitu TF_{BD} = 38,5. Artinya waktu toleransi proses B sebesar 38,5 menit yang mana dalam kurun waktu tersebut, aktivitas B dapat dilakukan penundaan.

Berdasarkan analisis yang dilakukan menggunakan aljabar max-plus, diperoleh waktu optimal dari aktivitas produksi Kue

Lanji yaitu 199 menit serta aktivitas-aktivitas yang termasuk jalur kritis adalah nitik telur, pengocokan telur, pemanggangan dan pengemasan. Sedangkan aktivitas pengayakan terigu bukan termasuk aktivitas kritis dan bisa dilakukan penundaan selama 38,5 menit. Dalam kurun waktu tersebut bisa dimanfaatkan untuk mempercepat aktivitas yang lain, sehingga aktivitas produksi akan lebih cepat selesai dibandingkan waktu optimalnya.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Simpulan

Berdasarkan pembahasan, dapat ditarik kesimpulan bahwa dengan menggunakan aljabar max-plus diperoleh waktu optimal dari aktivitas produksi Kue Lanji yaitu 199 menit atau 3 jam 19 menit, dan jalur kritisnya yaitu aktivitas nitik telur, pengocokan telur, pemanggangan dan pengemasan. Untuk aktivitas pengayakan terigu bisa dilakukan penundaan selama 38,5 menit.

4.2 Saran

Pemodelan yang dilakukan dalam penelitian ini hanya menggunakan CPM dengan aljabar max-plus, sedangkan masih banyak lagi pilihan metode yang dapat digunakan, khususnya untuk sistem produksi. Saran untuk penelitian selanjutnya, bisa menggunakan lebih dari satu metode supaya bisa membandingkan hasilnya, dan mendapatkan metode yang lebih efektif untuk diterapkan pada sistem produksi.

DAFTAR PUSTAKA

Amalia, Mitra, dkk. 2017. Penerapan Sistem Persaman Linear Itetratif Max-Plus pada Masalah Lintasan Terpanjang. Jurnal. Surakarta: UNS.

Adzkiya, Dieky. 2008. Membangun Model Petri Net Lampu Lalu Lintas dan Simulasinya. Skripsi. Surabaya: ITS.

Ariyanti, Gregoria. 2011. Aljabar Max-Plus: Suatu Kajian Teori dan Aplikasi Fundamentalnya. Jurnal Widya Warta (2).

Bacelli, F, dkk. 2001. Shyncronization and Linearity. John Wiley and Sons. New York

Chanas, S dan Zielinski, P. 2001. Critical Path Analysis in the Network with Fuzzy Activity Time. Fuzzy Sets and System. 122: 195-204

Cassandras, C. G. 1993. Discrete even system: Modeling and Performance Analiysis. Boston: Aksen.

Cristianta, Y. dan Sunarni, T. 2012. Usulan Penjadwalan Produksi dengan Metode Campbell Dudek And Smith. Jurnal Semantik. 30-35.

Gumelar, A, dkk. 2018. Penerapan Sistem Linear Aljabar Max-Plus Interval Waktu Invariant pada Sistem Produksi. Buletin Ilmiah Math Stat dan Terapannya (Bimaster). 7(1): 15-22.

Heidergott, Bernd, dkk. 2005. Max Plus at Work. Amsterdam: Pricenton University Press.

Majid, Abdul. 2012. Aljabar Max-Plus dan Sifat-sifatnya. Skripsi. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim.

Muanalifah, Any. 2023. Komutatif Matriks Ordo 2×2 Atas Aljabar Max-Plus. Jurnal Fourier. 12(1): 33-40.

Noor, Arpi ML. 2015. Penjadwalan Proyek menggunakan Metode Aljabar Max-plus: Studi Kasus pada Pemasangan Pengolah PDAM Kota Semarang. Skripsi. Bogor: ITB.

Novrida, Rida. 2012. Nilai Eigen dan Vektor Eigen dalam Aljabar Max-Plus. Tesis. Depok: Universitas Indonesia.

Nurjanah, Dede, dkk. 2021. Kontribusi Sejarah Aljabar Babilonia dan Aljabar Arab terhadap Berpikir Aljabar. Jurnal Analisa. 7(2): 112-123.

Rudhito, M. A. 2016. Aljabar Max-Plus dan Penerapannya. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Sergeev, S. 2009. Max algebraic powers of Irreducible Matrices in the Periodic Regime: An Application of Cyclic Classes. Linear Algebra Appl.

Susilowati, Eka dan Bryan Pudji Hartono. 2023. Penjadwalan Proyek Rumah dengan menggunakan Metode CPM Pendekatan Aljabar Max-Plus. Jurnal Saintifik. 9(1): 7-17.

Wati, D.A., dan Rochman, Y.A. 2013 Model Penjadwalan Mata Kuliah Secara Otomatis berbasis Algoritma Swam Optimization. Jurnal Rekayasa Sistem Industri. 22-31.

Yahya, Layliny, dkk. 2022. *Menentukan Waktu Optimal untuk Pembuatan Kerajinan Sulaman Karawo menggunakan Aljabar Max-plus*. Jurnal Vygotsky. 4(1): 23-34.

Lampiran 1. Dokumentasi penelitian

Telur yang dipakai

Pengayakan terigu

Pengocokan telur

Adonan siap panggang

Alat panggang

Proses pemanggangan adonan

Kue sudah matang

Pengemasan kue

Lampiran 2. Perhitungan dengan scilab

```
-->A=
              column  1   to 6

  - Inf     - Inf   -  Inf       - Inf     - Inf     - Inf
    0.      - Inf   -  Inf       - Inf     - Inf     - Inf
    0.      - Inf   -  Inf       - Inf     - Inf     - Inf
  - Inf       8.5   -  Inf       - Inf     - Inf     - Inf
  - Inf     - Inf      10.5      40.5      - Inf     - Inf
  - Inf     - Inf   -  Inf       - Inf       135.    - Inf
  - Inf     - Inf   -  Inf       - Inf     - Inf       15.

              column  7

  - Inf
  - Inf
  - Inf
  - Inf
  - Inf
  - Inf
  - Inf


-->A2=maxplusotimes(A,A)
```

column 1 to 6

- Inf	- Inf	- Inf	- Inf	- Inf	- Inf
- Inf	- Inf	- Inf	- Inf	- Inf	- Inf
- Inf	- Inf	- Inf	- Inf	- Inf	- Inf
8.5	- Inf	- Inf	- Inf	- Inf	- Inf
10.5	49.	- Inf	- Inf	- Inf	- Inf
- Inf	- Inf	145.5	175.5	- Inf	- Inf
- Inf	- Inf	- Inf	- Inf	150.	- Inf

column 7

- Inf
- Inf
- Inf
- Inf
- Inf
- Inf
- Inf

```
-->A3=maxplusotimes(A2,A)
```

```
         column 1 to 5

  - Inf     - Inf    - Inf     - Inf     - Inf
  - Inf     - Inf    - Inf     - Inf     - Inf
  - Inf     - Inf    - Inf     - Inf     - Inf
  - Inf     - Inf    - Inf     - Inf     - Inf
    49.     - Inf    - Inf     - Inf     - Inf
    145.5     184.   - Inf     - Inf     - Inf
  - Inf     - Inf      160.5     190.5   - Inf

         column 6 to 7

  - Inf  - Inf
  - Inf  - Inf
  - Inf  - Inf
  - Inf  - Inf
  - Inf  - Inf
  - Inf  - Inf
  - Inf  - Inf

-->A4=maxplusotimes(A3,A)
```

```
      column 1 to 6

  - Inf    - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf
  - Inf    - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf
  - Inf    - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf
  - Inf    - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf
  - Inf    - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf
    184.   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf
    160.5    199.  - Inf   - Inf   - Inf   - Inf

         column  7

  - Inf
  - Inf
  - Inf
  - Inf
  - Inf
  - Inf
  - Inf

-->A5=maxplusotimes(A4,A)
```

```
         column 1 to 6

  - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf
  - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf
  - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf
  - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf
  - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf
  - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf
    199.  - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf

         column  7

  - Inf
  - Inf
  - Inf
  - Inf
  - Inf
  - Inf
  - Inf

-->A6=maxplusotimes(A5,A)

         column 1 to 6
```

```
  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf
  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf
  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf
  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf
  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf
  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf
  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf

         column 7

  - Inf
  - Inf
  - Inf
  - Inf
  - Inf
  - Inf
  - Inf

-->I=

         column 1 to 5
```

```
   0.    - Inf  - Inf  - Inf  - Inf
 - Inf    0.    - Inf  - Inf  - Inf
 - Inf  - Inf    0.    - Inf  - Inf
 - Inf  - Inf  - Inf    0.    - Inf
 - Inf  - Inf  - Inf  - Inf    0.
 - Inf  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf
 - Inf  - Inf  - Inf  - Inf  - Inf

           column 7

   - Inf   - Inf
   - Inf   - Inf
   - Inf   - Inf
   - Inf   - Inf
   - Inf   - Inf
     0.    - Inf
   - Inf     0.

-->be=

   0.
```

```
   - Inf

   - Inf

   - Inf

   - Inf

   - Inf

   - Inf


-->A_2=maxplusoplus(A,A2);

-->A_3=maxplusoplus(A_2,A3);

-->A_4=maxplusoplus(A_4,A4);

-->A_5=maxplusoplus(A_4,A5);

-->A_6=maxplusoplus(A_5,A6);

-->Astar=maxplusoplus(I,A_6)
 Astar  =


         column 1 to 5

   0.      - Inf     - Inf     - Inf     - Inf

   0.        0.      - Inf     - Inf     - Inf

   0.      - Inf       0.      - Inf     - Inf

   8.5       8.5     - Inf       0.      - Inf
```

```
    49.        49.        10.5        40.5        0.
    184.       184.       145.5       175.5       135.
    199.       199.       160.5       190.5       150.

           column 6 to 7

    - Inf    - Inf
    - Inf    - Inf
    - Inf    - Inf
    - Inf    - Inf
    - Inf    - Inf
    0.       - Inf
    15.      - Inf

-->x_e=maxplusotimes(Astar,be)
    0.
    0.
    0.
    8.5
    49.
    184.
```

```
    199.

-->Astar'=

             column 1 to 5

    0.      0.      0.      8.5     49.
  - Inf     0.    - Inf     8.5     49.
  - Inf   - Inf     0.    - Inf     10.5
  - Inf   - Inf   - Inf     0.      40.5
  - Inf   - Inf   - Inf   - Inf     0.
  - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf
  - Inf   - Inf   - Inf   - Inf   - Inf

             column 6 to 7

    184.    199.
    184.    199.
    145.5   160.5
    175.5   190.5
    135.    150.
    0.      15.
  - Inf     0.
```

```
-->bl=

  - Inf
  - Inf
  - Inf

  - Inf
  - Inf
  - Inf
  - 199.
-->xl=-maxplusotimes(Astar',bl)
    0.
    0.
    38.5
    8.5
    49.
    184.
    199.
```

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

Nama Lengkap	: Musthofa Abdillah
Tempat, Tanggal Lahir	: Tegal, 01 September 2001
Alamat Rumah	: Jl. Sunan Amangkurat 1 Rt. 31/Rw. 07 Pesarean, Kec. Adiwerna, Kab. Tegal
No. HP	: 0877717423962

B. Riwayat Pendidikan

Pendidikan Formal

1. SD N PESAREAN 01
2. MTs NU SUNAN KALIJAGA ADIWERNA
3. SMA N 1 BREBES
4. UIN WALISONGO SEMARANG

Pendidikan Non Formal

PP DAARUN NAJAAH SEMARANG

Semarang, 19 Desember 2023

Musthofa Abdillah
NIM. 1908046017