

**KONTROL OPTIMAL MODEL DINAMIKA PERCERAIAN
DENGAN EDUKASI PASCA NIKAH DAN PEMBERIAN
KONSELING**

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika



Oleh : **BUNGA NOER INTAN PERMATASARI**
NIM : 2108046002

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2025

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Bunga Noer Intan Permatasari
NIM : 2108046002
Jurusan/Program Studi : Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

KONTROL OPTIMAL MODEL DINAMIKA PERCERAIAN DENGAN EDUKASI PASCA NIKAH DAN PEMBERIAN KONSELING

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 20 Mei 2025
Pembuat pernyataan,



Bunga Noer Intan Permatasari
NIM : 2108046002



KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **KONTROL OPTIMAL MODEL DINAMIKA
PERCERAIAN DENGAN EDUKASI PASCA NIKAH
DAN PEMBERIAN KONSELING**

Penulis : Bunga Noer Intan Permatasari

NIM : 2108046002

Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji
Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima
sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu
Matematika.

Semarang, 13 Juni 2025

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

Aini Fitriyah, M.Sc.

NIP : 19890929 201903 2 021

Penguji II,

Zulaikha, M.Si.

NIP : 19920409 201930 2 027

Penguji III,

Eva Khoirun Nisa, M.Si.

NIP : 19870102 201903 2 010

Penguji IV,

Ariska K. Rachmawati, M.Sc.

NIP : 19890811 201903 2 019

Pembimbing I,

Zulaikha, M.Si.

NIP : 19920409 201930 2 027

NOTA DINAS

Semarang, 21 Mei 2025

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : KONTROL OPTIMAL MODEL DINAMIKA
PERCERAIAN DENGAN EDUKASI PASCA NIKAH
DAN PEMBERIAN KONSELING
Nama : Bunga Noer Intan Permatasari
NIM : 2108046002
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,



Zulaikha, M.Si.

NIP : 19920409 201930 2 027

ABSTRAK

Perceraian merupakan fenomena sosial yang kompleks dengan berbagai faktor penyebab, termasuk ketidakcocokan pasangan, komunikasi yang buruk, masalah ekonomi, dan perselingkuhan. Penelitian ini mengembangkan model matematika dinamika perceraian dengan memodifikasi model SMBD (*Single, Marriage, Broken, Divorce*) dengan penambahan subpopulasi *Healthy Marriage* (H) dan *Unhealthy Marriage* (U_h) yang diadaptasi dari model MHUCKD (*Marriage, Healthy Marriage, Unhealthy Marriage, Counselling, Complexity Life, Divorce*), serta mempertimbangkan kontrol berupa edukasi pasca nikah dan pemberian konseling, sehingga diperoleh model $SMHU_hD$ (*Single, Marriage, Healthy Marriage, Unhealthy Marriage, Divorce*). Kontrol optimal diterapkan untuk meminimumkan subpopulasi *Unhealthy Marriage* (U_h) dan *Divorce* (D). Simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dengan pendekatan Metode *Sweep Maju Mundur* menunjukkan bahwa intervensi edukasi pasca nikah dan pemberian konseling dapat menekan jumlah pernikahan tidak sehat dan perceraian.

Kata kunci : Perceraian, Model Matematika, Kontrol Optimal, Edukasi Pasca Nikah, Pemberian Konseling

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat, hidayah, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Kontrol Optimal Model Dinamika Perceraian dengan Edukasi Pasca Nikah dan Pemberian Konseling". Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.

Penyusunan skripsi ini merupakan bentuk implementasi dari ilmu yang telah diperoleh selama masa perkuliahan serta sebagai kontribusi akademik dalam upaya memahami dan mengoptimalkan langkah-langkah pencegahan dan pengurangan perceraian melalui pendekatan edukasi dan konseling berbasis model matematika.

Penulis menyadari bahwa penyusunan tugas akhir ini tidak terlepas dari bantuan, dukungan, dan bimbingan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Ibu Zulaikha, M.Si., selaku Dosen Pembimbing yang telah meluangkan waktu dan tenaga untuk membimbing penulis selama proses penulisan penuh kesabaran dan kebaikan hati.
2. Seluruh dosen di Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu dan wawasan selama masa perkuliahan, yang menjadi dasar dalam penyusunan skripsi ini.
3. Keluarga tercinta yang selalu memberikan doa, dukungan moral, dan motivasi tanpa henti, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.

4. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah memberikan kontribusi hingga selesainya skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis terbuka terhadap saran dan kritik yang membangun. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak dan menjadi kontribusi yang positif dalam pengembangan ilmu pengetahuan di bidang kontrol optimal serta dapat dikembangkan bagi peneliti-peneliti selanjutnya.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iii
NOTA PEMBIMBING I	iv
ABSTRAK	v
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR TABEL	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xv
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Rumusan Masalah	10
C. Tujuan Penelitian	11
D. Manfaat Penelitian	11
E. Batasan Masalah	13
BAB II LANDASAN PUSTAKA	14
A. Persamaan Diferensial	14
B. Sistem Persamaan Diferensial	18
C. Teori Kontrol Optimal	22
D. Metode Runge-Kutta	36
E. Metode <i>sweep</i> Maju Mundur	38
F. Model Matematika	40
G. Model Matematika Dinamika Perceraian	41
H. Perceraian	52
I. Kajian Penelitian Terdahulu	55
BAB III METODE PENELITIAN	61
A. Metode Penelitian	61
B. Prosedur Penelitian	61
C. Diagram Alur Penelitian	63
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	65

A.	Mengkontruksi Model Matematika Dinamika Perceraian .	65
B.	Analisis Kontrol Optimal	79
C.	Interpretasi Hasil Simulasi Numerik	86
BAB V	KESIMPULAN	118
A.	Kesimpulan	118
B.	Saran	120
DAFTAR PUSTAKA		121
Lampiran-lampiran.....		127

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul	Halaman
Tabel 2.1	Variabel Model Matematika SMBD (<i>Single - Marriage - Broken - Divorce</i>)	42
Tabel 2.2	Parameter Model Matematika SMBD (<i>Single - Marriage - Broken - Divorce</i>)	42
Tabel 2.3	Variabel Model Matematika MHUCKD (<i>Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Counselling - Complexity life - Divorced</i>)	46
Tabel 2.4	Parameter Model Matematika MHUCKD (<i>Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Counselling - Complexity life - Divorced</i>)	47
Tabel 2.5	Kajian Penelitian Terdahulu	56
Tabel 4.1	Variabel Model Matematika $SMHU_hD$ (<i>Single - Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Divorce</i>)	68
Tabel 4.2	Parameter Model Matematika $SMHU_hD$ (<i>Single - Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Divorce</i>)	68
Tabel 4.3	Nilai Awal Subpopulasi pada Model $SMHU_HD$ (<i>Single - Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Divorce</i>)	86

Tabel 4.4	Nilai Parameter pada Model $SMH U_H D$ (<i>Single - Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Divorce</i>)	87
-----------	--	----

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
Gambar 1.1	Diagram Batang Kasus Perceraian di Provinsi Jawa Tengah pada Tahun 2020-2022	2
Gambar 2.1	Diagram Kompartemen Model SMBD (<i>Single - Marriage - Broken - Divorce</i>)	41
Gambar 2.2	Diagram Kompartemen Model MHUCKD (<i>Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Counselling - Complexity life - Divorced</i>)	46
Gambar 3.1	Alur Metode Penelitian	64
Gambar 4.1	Diagram Kompartemen Model SMHU _h D (<i>Single - Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Divorce</i>)	67
Gambar 4.2	Grafik Subpopulasi <i>Single</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	88
Gambar 4.3	Grafik Subpopulasi <i>Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	89
Gambar 4.4	Grafik Subpopulasi <i>Healthy Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	91
Gambar 4.5	Grafik Subpopulasi <i>Unhealthy Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	92
Gambar 4.6	Grafik Subpopulasi <i>Divorce</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	93

Gambar 4.7	Grafik Simulasi Kontrol u_1 berupa Edukasi Pasca Nikah	94
Gambar 4.8	Grafik Simulasi Kontrol u_2 berupa Pemberian Konseling	95
Gambar 4.9	Grafik Subpopulasi <i>Single</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	96
Gambar 4.10	Grafik Subpopulasi <i>Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	97
Gambar 4.11	Grafik Subpopulasi <i>Healthy Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	98
Gambar 4.12	Grafik Subpopulasi <i>Unhealthy Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	99
Gambar 4.13	Grafik Subpopulasi <i>Divorce</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	100
Gambar 4.14	Grafik Simulasi Kontrol u_1 berupa Edukasi Pasca Nikah	101
Gambar 4.15	Grafik Simulasi Kontrol u_2 berupa Pemberian Konseling	102
Gambar 4.16	Grafik Subpopulasi <i>Single</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	103
Gambar 4.17	Grafik Subpopulasi <i>Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	104
Gambar 4.18	Grafik Subpopulasi <i>Healthy Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	105
Gambar 4.19	Grafik Subpopulasi <i>Unhealthy Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	106
Gambar 4.20	Grafik Subpopulasi <i>Divorce</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	107

Gambar 4.21	Grafik Simulasi Kontrol u_1 berupa Edukasi Pasca Nikah	108
Gambar 4.22	Grafik Simulasi Kontrol u_2 berupa Pemberian Konseling	109
Gambar 4.23	Grafik Subpopulasi <i>Single</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	110
Gambar 4.24	Grafik Subpopulasi <i>Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	111
Gambar 4.25	Grafik Subpopulasi <i>Healthy Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	112
Gambar 4.26	Grafik Subpopulasi <i>Unhealthy Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	113
Gambar 4.27	Grafik Subpopulasi <i>Divorce</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	114
Gambar 4.28	Grafik Simulasi Kontrol u_1 berupa Edukasi Pasca Nikah	115
Gambar 4.29	Grafik Simulasi Kontrol u_2 berupa Pemberian Konseling	116

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 Perhitungan dengan Matlab untuk Mencari <i>Costate</i>	127
Lampiran 2 Pengecekan Kontrol u_1 berupa Edukasi Pasca Nikah dan u_2 berupa Pemberian Konseling	129
Lampiran 3 Listing Program SMH U_h D	130
Lampiran 4 Daftar Riwayat Hidup	139

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Perceraian merupakan masalah kompleks yang memiliki keterkaitan erat dengan kehidupan sosial serta budaya dalam masyarakat. Perceraian tidak hanya berpengaruh pada individu yang bersangkutan, tetapi juga berdampak pada keluarga dan orang terdekat. Perceraian di Indonesia menunjukkan dinamika dalam hubungan suami istri serta gabungan antara agama, budaya, dan sistem hukum yang berlaku. Sebagai negara dengan mayoritas penduduk beragama Islam, hukum Islam berperan penting dalam mengendalikan perceraian. Oleh karena itu, penting untuk memahami hukum Islam tentang perceraian yang terjadi di Indonesia (Aulana, dkk., 2024).

Dalam hukum Islam, perceraian disebut *thalaq*, yang berarti memutuskan ikatan (*hall al-Qaid*), yaitu pemutusan hubungan pernikahan melalui kata-kata yang telah ditetapkan (Abdurrahman, 2011). Dalam Islam terdapat dua jenis perceraian, yaitu cerai gugat dan cerai talak. Cerai gugat adalah perceraian yang terjadi ketika istri (pemohon) mengajukan permohonan ke Pengadilan Agama, dan suami (termohon) memberikan persetujuannya, sehingga Pengadilan Agama memutuskan untuk mengabulkan permohonan yang diajukan oleh pemohon (istri) (Ali, 2006). Pada pasal 114 KHI menjelaskan bahwa cerai talak adalah putusnya ikatan perkawinan akibat talak atau melalui gugatan perceraian. Lebih lanjut, Pasal 117 KHI menyatakan bahwa talak merupakan ikrar suami di depan Pengadilan Agama

yang menjadi salah satu sebab berakhirnya perkawinan.

Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI), kata "cerai" diartikan sebagai perpisahan atau putusnya hubungan sebagai suami istri, atau talak. Sementara itu, "perceraian" bermakna perpisahan, perihal bercerai, baik antara suami istri maupun bentuk perpecahan lainnya. Hurlock (2011) menyatakan bahwa perceraian merupakan akhir suatu pernikahan ketika suami dan istri tidak lagi menemukan jalan keluar atas masalah-masalah mereka, sehingga pernikahan tersebut tidak lagi membawa kebahagiaan.

Dalam beberapa tahun terakhir, kasus perceraian di Indonesia cenderung mengalami peningkatan khususnya di Jawa Tengah. Berdasarkan data dari buku "Provinsi Jawa Tengah Dalam Angka 2023", jumlah kasus perceraian disajikan dalam bentuk diagram batang berikut.



Gambar 1.1: Diagram Batang Kasus Perceraian di Provinsi Jawa Tengah pada Tahun 2020-2022

Dinamika meningkatnya angka perceraian tidak dapat dipisahkan dari faktor-faktor internal maupun eksternal tiap

individu. Berdasarkan data dari Badan Pusat Statistik (BPS) Jawa Tengah yang bersumber dari Direktorat Jenderal Badan Peradilan Agama per 1 Februari 2023, terdapat beberapa faktor yang dapat memicu perceraian, diantaranya adalah zina, kebiasaan minum alkohol, narkoba, perjudian, meninggalkan salah satu pasangan, pidana penjara, poligami, Kekerasan Dalam Rumah Tangga (KDRT), cacat fisik, perselisihan atau pertengkaran secara terus menerus, nikah paksa, murtad, serta ketidakstabilan ekonomi. Sementara itu, para ahli seperti Nakamura (1989), Turner & Helms (1995), serta Sudarto & Wirawan (2001) mengemukakan bahwa beberapa faktor yang menyebabkan perceraian meliputi kekerasan verbal, masalah atau kekerasan ekonomi, keterlibatan dalam perjudian, penyalahgunaan minuman keras, dan perselingkuhan.

Meskipun perceraian itu diperbolehkan menurut syariat Islam, tetapi perceraian sangat dibenci Allah. Seperti dalam Hadist yang diriwayatkan oleh Abu Hurairah, Rasulullah saw. bersabda: *“Sesungguhnya Allah membenci perceraian, tetapi Allah tetap menghalalkan yang halal dan mengharamkan yang haram. Dan jika seseorang mengharamkan halal atau menghalalkan haram, maka sungguh dia telah kafir dengan apa yang telah diturunkan Allah.”* (HR. Abu Daud). Hadist ini mengingatkan umat Muslim akan pentingnya menjaga pernikahan kecuali dalam situasi yang terpaksa. Selanjutnya apabila dalam suatu hubungan perkawinan terjadi perselisihan, maka alangkah baiknya apabila ada penengahnya seperti yang dijelaskan dalam surat An-Nisa’ ayat 35 sebagai berikut:

Artinya: *“Jika kamu (para wali) khawatir terjadi persengketaan di antara keduanya, utuslah seorang juru damai dari keluarga laki-laki dan seorang juru damai dari keluarga perempuan. Jika*

وَأِنْ خِفْتُمْ شِقَاقَ بَيْنِهِمَا فَابْعَثُوا حَكَمًا مِّنْ أَهْلِهِ وَحَكَمًا مِّنْ أَهْلِهَا
إِنْ يُرِيدَا إِصْلَاحًا يُوَفِّقِ اللَّهُ بَيْنَهُمَا إِنَّ اللَّهَ كَانَ عَلِيمًا خَبِيرًا ﴿٣٥﴾

keduanya bermaksud melakukan islah (perdamaian), niscaya Allah memberi taufik kepada keduanya. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Maha Teliti.” (Q.S An-Nisa’ : 35)

Ayat ini menegaskan apabila terjadi suatu permasalahan atau perselisihan antara suami dan istri jangan sampai membuat keduanya memilih untuk bercerai. Akan tetapi utuslah seorang hakam (perantara, juru damai) dari masing-masing keluarga agar berdamai dan bisa kembali utuh sebagai suami istri (Haidar, 2016).

Apabila pasangan suami istri tetap memutuskan bercerai, maka sesungguhnya Allah Maha Mendengar dan Maha Mengetahui seperti dalam surat Al-Baqarah ayat 226-227 berikut:

لِّلَّذِينَ يُؤْلُونَ مِن نِّسَائِهِمْ تَرَبُّصُ أَرْبَعَةِ أَشْهُرٍ فَإِنْ فَاءُوا فَإِنَّ اللَّهَ
غَفُورٌ رَّحِيمٌ ﴿٢٢٦﴾ وَإِنْ عَزَمُوا الطَّلَاقَ فَإِنَّ اللَّهَ سَمِيعٌ عَلِيمٌ ﴿٢٢٧﴾

Artinya: “Orang yang meng-ila’ (bersumpah tidak mencampuri) istrinya diberi tenggang waktu empat bulan. Jika mereka kembali (mencampuri istrinya), sesungguhnya Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang. Jika mereka berketetapan hati untuk bercerai, sesungguhnya Allah Maha Mendengar lagi Maha Mengetahui.” (Q.S Al-Baqarah : 226-227)

Apabila seorang suami bersumpah tidak mencampuri urusan istrinya (berhubungan) maka perbuatan tersebut termasuk zalim dan tidak bisa dibiarkan berlarut-larut. Jika sudah mendekati

empat bulan sejak sumpah, maka suami harus mengambil keputusan untuk kembali bersama istrinya dengan membayar kafarat sumpah atau bercerai (Al Sofwa, 2009). Apabila suami memilih untuk bercerai, hendaklah cerai secara baik-baik, agar istri tidak merasa teraniaya, karena Allah Maha Mendengar dan Maha Mengetahui.

Kemajuan teknologi dan ilmu matematika memudahkan manusia untuk mensimulasikan masalah-masalah kompleks yang muncul dalam kehidupan sehari-hari, serta mengukur berbagai fenomena yang terjadi di alam semesta (Ndii, 2018). Model matematika adalah salah satu cabang ilmu matematika yang menyediakan solusi untuk permasalahan kehidupan sehari-hari (Aswan, 2018). Fenomena dunia nyata dapat direpresentasikan dalam bentuk matematis untuk memudahkan pemahaman terhadap permasalahan yang muncul (Kurniawati & Rosyidi, 2019). Model matematika dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang, termasuk fisika, biologi dan kedokteran, ilmu sosial dan politik, ekonomi, bisnis, keuangan, serta masalah jaringan komputer (Widowati, 2007). Salah satu contoh aplikasi permasalahan yang dapat dimodelkan secara matematis dalam bidang sosial adalah dinamika perceraian. Suatu perceraian dapat diminimumkan dengan penambahan kontrol sehingga didapatkan hasil yang optimal.

Kontrol optimal yang fokus pada ilmu teknik dan matematika merupakan pengoptimalan dalam suatu proses untuk mencapai hasil yang terbaik (Saraswati & Kamiran, 2017). Pengelolaan proses perceraian yang optimal penting dilakukan untuk meminimalkan dampak negatif yang ditimbulkan, termasuk menekan angka pernikahan tidak sehat dan perceraian. Melalui

penerapan kontrol optimal, diharapkan permasalahan tersebut dapat diminimalkan. Mengingat fokus penelitian ini adalah pada pasangan beragama Islam, maka pemberian edukasi pasca nikah kepada kedua pasangan menjadi langkah strategis dalam upaya pencegahan perceraian. Setelah menikah, suami dan istri memiliki hak dan kewajiban masing-masing (Jannah & Halim, 2022). Pendidikan pasca menikah penting, karena dengan mengikuti pendidikan pasca nikah maka pasangan mengetahui keistimewaan dan kewajibannya (Hasan, 2003).

Ng Pui Khim (2024) memaparkan ada beberapa tanda atau gejala dari pernikahan tidak sehat (*Unhealthy Marriage*) yang dapat memicu perceraian, diantaranya adalah susah melakukan komunikasi, keintiman antarindividu berkurang atau bahkan tidak ada, lebih memilih menghabiskan waktu di luar dibandingkan di rumah bersama pasangan, setiap tindakan yang dilakukan terasa menyebalkan, pasangan akan merasa jauh dan asing meskipun dalam satu ruangan, memiliki perbedaan nilai, kepercayaan, dan tujuan, ada sikap saling kritik, menghina, defensif, dan diam, serta ada kekerasan seksual, kecanduan judi maupun alkohol, dan perzinahan. Langkah yang paling efektif untuk mengatasi *Unhealthy Marriage* salah satunya adalah dengan dilakukannya konseling.

Konseling adalah proses di mana konselor memberikan bantuan kepada klien melalui wawancara konseling untuk membantu klien dalam memecahkan masalah dan mengambil keputusan secara mandiri, sehingga klien sehat, berkepribadian efektif, serta mengubah perilakunya menjadi lebih baik. Konseling dapat diberikan kepada siapa saja yang merasa kesulitan menghadapi suatu situasi atau tekanan emosional, termasuk dalam hubungan pernikahan. Konseling dalam pernikahan dapat

dikelompokkan ke dalam konseling fungsi pemahaman dan pencegahan di bidang kehidupan berkeluarga. Konseling dalam kehidupan berkeluarga diharapkan dapat membantu individu untuk mencari, menetapkan, dan mengambil keputusan tentang kehidupan keluarga yang sedang dijalani (Murtadho, 2009). Pada penelitian ini, konseling yang diberikan adalah konseling individual, yaitu proses penyediaan dukungan melalui wawancara konseling oleh seorang konselor kepada klien, dengan tujuan membantu klien mengatasi masalah yang dihadapinya. Bantuan konseling ini dilakukan secara *face to face relationship* (hubungan empat mata) (Amti, 1999).

Edukasi pasca nikah dan pemberian konseling individual merupakan dua bentuk intervensi yang berbeda dalam menjaga keutuhan rumah tangga. Edukasi pasca nikah bersifat preventif (pencegahan) dan diberikan kepada pasangan suami istri setelah pernikahan, dengan tujuan membekali mereka pengetahuan mengenai peran keluarga, komunikasi yang efektif, manajemen konflik, hingga pengasuhan anak (Nabila, dkk., 2024). Di sisi lain, pemberian konseling individual bersifat kuratif (penanganan) dan ditujukan kepada salah satu pihak yang mengalami masalah dalam pernikahan, seperti tekanan psikologis, ketidakharmonisan, atau konflik emosional. Konseling ini bersifat lebih personal dan berfokus pada pemulihan kondisi psikologis individu serta penyelesaian masalah rumah tangga secara bertahap (Andriyani, 2018). Dengan demikian, intervensi edukasi pasca nikah dan pemberian konseling ini diharapkan dapat meminimalkan jumlah perceraian.

Penelitian mengenai dinamika perceraian telah banyak dilakukan oleh para ilmuwan. Pada tahun 2021, Alfred Hugo

dan Eva M. Lusekelo melakukan penelitian model MHUCKD (*Marriage, Healthy Marriage, Unhealthy Marriage, Counselling, Complexity Life, Divorce*) dengan membagi populasi menjadi enam kompartemen, yaitu individu yang telah menikah (M), individu yang pernikahannya sehat (H), individu yang pernikahannya tidak sehat (U), individu yang pernikahannya banyak perselisihan memutuskan untuk melakukan konseling (C), individu yang stres dan mengalami kesulitan atau kompleksitas dalam kehidupan pernikahannya (K), dan individu yang memutuskan untuk bercerai (D). Dalam penelitian tersebut, perceraian dapat diminimalkan dengan memberikan konseling, sehingga jumlah pernikahan yang sehat akan meningkat sedangkan pernikahan yang tidak sehat dan kompleksitas akan turun.

Pada tahun 2022, Tessema, dkk. melakukan penelitian model SMBD (*Single, Marriage, Broken, Divorce*) dengan membagi populasi menjadi empat kompartemen, yaitu individu yang sudah mencapai umur untuk menikah (S), individu yang memutuskan untuk menikah (M), individu yang pisah ranjang, tapi tidak bercerai (B), dan individu yang memutuskan untuk bercerai (D). Pada penelitian Tassema, untuk mengurangi atau mengendalikan perceraian dalam suatu populasi baiknya dilakukan dengan mengurangi kontak antara individu yang menikah dengan yang bercerai serta mendidik individu yang pisah ranjang tapi tidak bercerai (*Broken*) untuk menahan diri dari perceraian dan memperbaiki perkawinannya.

Penelitian model dinamika perceraian dengan model kecanduan game online milik Guo dan Li ternyata memiliki kesamaan dalam pemberian kontrolnya, yaitu sama sama menerapkan kontrol edukasi. Pada tahun 2021, Youming Guo dan

Tingting Li melakukan penelitian tentang strategi kontrol optimal terhadap kecanduan game online dengan mempertimbangkan paparan risiko rendah dan tinggi. Penelitian ini membedakan populasi berdasarkan tingkat kerentanan terhadap kecanduan game online. Dalam artikel jurnal diaplikasikan tiga kontrol untuk meminimalkan individu yang kecanduan game online, yaitu dengan isolasi, edukasi, dan pengobatan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kecanduan game online dapat diminimalisir apabila tindakan isolasi dilakukan bersamaan dengan edukasi dan pengobatan. Selanjutnya pada tahun 2023, Amartya Fierzi dan Yusuf Fuad melakukan penelitian model SEARQ (*Susceptible, Exposed, Addicted, Recovered, Quit*) dengan penerapan kontrol pada permasalahan kecanduan media sosial. Dalam artikel jurnal, populasi dibagi menjadi lima kompartemen, yaitu subpopulasi rentan kecanduan media sosial (S), subpopulasi terpapar media sosial (E), subpopulasi kecanduan media sosial (A), subpopulasi pulih dari kecanduan media sosial (R), dan subpopulasi berhenti menggunakan media sosial (Q). Dalam penelitian ini diberikan kontrol berupa edukasi dan pengobatan. Setelah dilakukan penelitian, didapatkan kesimpulan bahwa kecanduan media sosial dapat diminimalisir dengan pemberian edukasi tentang efek negatif media sosial melalui sosialisasi dan dilakukan pengobatan seperti rehabilitasi dan pembatasan penggunaan media sosial dilakukan secara bersamaan.

Berdasarkan penelitian terdahulu, penulis tertarik untuk modifikasi model SMBD oleh Tessema, et al. dengan membagi subpopulasi menikah menjadi dua subpopulasi, yaitu *Healthy Marriage* dan *Unhealthy Marriage* seperti dalam artikel jurnal milik (Hugo & Lusekelo, 2021). Pada penelitian ini, penulis akan

membagi populasi menjadi lima kompartemen, yaitu subpopulasi yang belum pernah menikah dan berusia minimal 19 tahun (S), subpopulasi yang memutuskan menikah (M), subpopulasi yang pernikahan sehat yang ditandai dengan komunikasi yang baik dan saling menghormati serta menjaga kepercayaan (H), subpopulasi yang pernikahan tidak sehat ditandai dengan sering terjadi perselisihan dan sering menyakiti secara verbal (U_h), serta subpopulasi yang bercerai sebab dalam menjalani hubungan pernikahan tidak ditemukan solusi untuk permasalahan yang sedang dihadapi (D). Dalam penelitian ini penulis juga tertarik untuk menambahkan dua kontrol diantaranya yaitu pemberian edukasi pasca nikah untuk mengetahui keistimewaan dan kewajiban individu yang telah menikah dengan tujuan untuk menghindari adanya perselisihan antar pasangan (Hasan, 2003) dan pemberian konseling untuk membantu individu mencari, menetapkan, dan mengambil keputusan tentang kehidupan keluarga yang sedang dijalani (Mutardho, 2009).

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, didapatkan rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana kontruksi model dinamika perceraian dengan mempertimbangkan edukasi pasca nikah dan pemberian konseling?
2. Bagaimana penyelesaian masalah kontrol optimal model $SMHU_hD$ pada dinamika perceraian dengan mempertimbangkan edukasi pasca nikah dan pemberian konseling?

3. Bagaimana interpretasi hasil simulasi numerik sebelum dan sesudah kontrol optimal model dinamika perceraian dengan edukasi pasca nikah dan pemberian konseling?

C. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dipaparkan di atas, tujuan penelitian yang ingin dicapai adalah sebagai berikut:

1. Mengkontruksi model dinamika perceraian dengan mempertimbangkan edukasi pasca nikah dan pemberian konseling.
2. Menyelesaikan masalah kontrol optimal pada model $SMHU_hD$ pada dinamika perceraian dengan mempertimbangkan edukasi pasca nikah dan pemberian konseling.
3. Mengetahui interpretasi hasil simulasi numerik sebelum dan sesudah kontrol optimal model dinamika perceraian dengan edukasi pasca nikah dan pemberian konseling.

D. Manfaat Penelitian

1. Manfaat Praktis

Untuk memperoleh gambaran suatu fenomena dinamika perceraian dalam dunia nyata menjadi bentuk sederhana dalam bahasa matematika serta memprediksi bagaimana meminimalkan konflik dan memaksimalkan hubungan pernikahan yang sehat (*healthy relationship*) dengan

pemberian kontrol berupa edukasi pasca nikah dan pemberian konseling dengan perhitungan matematika.

2. Manfaat Keilmuan dan Akademis

Secara keilmuan (teori), penelitian ini dapat memberikan wawasan tentang model $SMH\mathcal{U}_hD$ pada dinamika perceraian dengan kontrol edukasi pasca nikah dan pemberian konseling. Secara akademis, penelitian ini memberikan khasanah bagi Fakultas Sains dan Teknologi khususnya di jurusan Matematika yang membahas tentang pemodelan dinamika perceraian.

3. Manfaat bagi Penulis

Sebagai proses memperdalam tentang pengetahuan model $SMH\mathcal{U}_hD$ pada dinamika perceraian dengan kontrol edukasi pasca nikah dan pemberian konseling.

4. Manfaat bagi Mahasiswa Matematika

Memperluas pemahaman bidang keilmuan yang telah dipelajari di ranah persamaan diferensial terutama dalam pemodelan dinamika perceraian dengan pemberian kontrol edukasi pasca nikah dan pemberian konseling.

5. Bagi Peneliti Selanjutnya

Diharapkan proposal ini dapat memperluas pengetahuan serta menyediakan informasi mengenai penerapan kontrol edukasi pasca nikah dan pemberian konseling pada model matematis dinamika perceraian.

E. Batasan Masalah

Batasan masalah dalam proposal ini mencakup objek yang akan dimodelkan dalam penelitian, yaitu:

1. Penelitian ini berfokus pada perceraian dalam agama Islam.
2. Model yang dipakai adalah model $SMH U_h D$ (*Single, Marriage, Healthy Marriage, Unhealthy Marriage, Divorce*) dengan kontrol edukasi pasca nikah dan pemberian konseling.
3. Populasi bersifat tertutup, sehingga tidak ada migrasi dan emigrasi.
4. Berdasarkan UU No. 16 Tahun 2019, subpopulasi *Single* (S) didefinisikan sebagai individu dengan usia minimal 19 tahun.
5. Subpopulasi *Healthy Marriage* (H) merupakan hubungan pernikahan yang stabil dan memuaskan yang dibangun di atas persahabatan kuat yang aman, tentram, penuh kasih sayang, penuh gairah, saling menghormati, dan saling percaya, ditandai dengan kemampuan menegosiasikan perbedaan dan menyelesaikan konflik tanpa adanya kekerasan dalam rumah tangga (Harris et al., 2008).
6. Subpopulasi *Unhealthy Marriage* (U_h) ditandai dengan susahny melakukan komunikasi, sehingga keintiman antarindividu berkurang yang menyebabkan hilangnya kepercayaan dan timbulnya berbagai perseteruan (Khim, 2024).

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

A. Persamaan Diferensial

Definisi 2.1.1 (*Differential Equation, e.g (Ross, 1984)*)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel terikat (y) terhadap satu atau lebih variabel bebas (x).

Salah satu contoh penerapan persamaan diferensial dalam kehidupan sehari-hari adalah laju pertumbuhan suatu populasi, seperti populasi dari manusia, binatang, dan bakteri karena tidak ada hambatan terhadap pertumbuhan. Contoh pengaplikasiannya adalah sebagai berikut. Apabila suatu populasi tumbuh pada waktu t ($x(t)$), maka $x'(t) = \frac{dx}{dt}$. Di mana laju perubahan pertumbuhan populasi dimisalkan dengan $x'(t)$ yang merupakan turunan dari populasi $x(t)$ terhadap waktu t , maka model populasinya merupakan suatu persamaan diferensial, yaitu $x'(t) = x(t)$ dengan solusi dari persamaan diferensial adalah $x(t) = (ce^t)$, dengan c adalah konstanta. Solusi ini menunjukkan bahwa populasi $x(t)$ bertumbuh secara eksponensial seiring waktu t , dengan kecepatan yang semakin meningkat karena pangkat e^t . Artinya, jika populasinya kecil, maka kecepatan pertumbuhannya lambat namun jika populasinya bertambah, kecepatan pertumbuhan semakin besar (Maya, 2014).

Definisi 2.1.2 (*Ross, 1984*)

Orde atau pangkat suatu persamaan diferensial merujuk pada pangkat tertinggi dari turunan yang terdapat dalam persamaan

tersebut.

Penentuan pangkat suatu persamaan diferensial ditentukan oleh fungsi turunan pada persamaan diferensial tersebut. Apabila suatu persamaan memuat beberapa turunan, orde persamaan tersebut ditentukan oleh turunan yang mempunyai pangkat tertinggi.

Contoh 2.1.3 Berikut adalah contoh dari persamaan diferensial orde kedua:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Berdasarkan contoh di atas, turunan tertinggi adalah turunan kedua, yaitu $\frac{d^2y}{dx^2}$. Jadi, orde dari persamaan ini adalah 2 (orde kedua).

Dilihat dari jumlah variabel yang terlibat, persamaan diferensial dibedakan menjadi dua, yaitu PDB, yang melibatkan satu variabel, dan PDP, yang melibatkan lebih dari satu variabel. Berikut akan diuraikan secara detail mengenai Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Prasional (PDP).

1. Persamaan Diferensial Biasa

Definisi 2.1.4 (Ross, 1984)

Persamaan yang mencakup turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu variabel bebas disebut persamaan diferensial biasa. Berikut merupakan bentuk umum dari PDB:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad (2.1)$$

Contoh 2.1.5 Berikut adalah contoh dari Persamaan Diferensial Biasa (PDB).

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 7\frac{dy}{dt} - 4y = 0$$

Berdasarkan contoh di atas, variabel bebas adalah t , sementara variabel terikatnya adalah y .

a. Persamaan Diferensial Biasa Linear

Definisi 2.1.6 (PDB Linear, e.g (Ross, 1984))

Persamaan diferensial biasa linear berorde n yang melibatkan variabel terikat y dan variabel bebas x dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x) \quad (2.2)$$

dengan syarat $a_0 \neq 0$ dan n adalah bilangan bulat positif.

Contoh 2.1.7 Berikut adalah contoh dari persamaan diferensial biasa linear.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Contoh di atas dikatakan PDB linear karena hanya melibatkan turunan fungsi $y(x)$ terhadap satu variabel bebas x dan setiap suku dari y dan turunannya muncul secara linear.

b. Persamaan Diferensial Biasa Non Linear

Apabila suatu persamaan biasa memenuhi setidaknya salah satu dari kriteria berikut, maka persamaan dikatakan persamaan diferensial non linear (Ross, 1984):

- a. Terdapat variabel terikat (y) yang memiliki turunan berpangkat lebih dari satu. Misalnya pada persamaan $\frac{dy}{dx} = y^2 + 3$ menunjukkan bahwa variabel terikat y berada dalam pangkat lebih dari satu (kuadrat).
- b. Terdapat perkalian dari variabel terikat dan atau turunan-turunannya. Contohnya pada persamaan $\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{dy}{dx} = x$ menunjukkan adanya perkalian antara variabel terikat y dan turunannya.
- c. Terdapat fungsi transendental (fungsi yang tidak dapat dinyatakan sebagai solusi aljabar dari persamaan polinomial, seperti fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi trigonometri, dll) dari variabel terikat dan turunan-turunannya. Misalnya $\frac{dy}{dx} = e^y + x$, di mana dalam contoh ini, e^y adalah fungsi transendental yang menyebabkan ketidaklinieran.

Contoh 2.1.8 Berikut adalah contoh lain dari persamaan diferensial biasa non linear:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} - 6y^2 = 0$$

Berdasarkan contoh di atas, persamaan dikatakan sistem persamaan diferensial non linear karena memenuhi kriteria a, yaitu terdapat variabel terikat

y pada suku $-6y^2$ yang memuat bentuk kuadrat atau berpangkat lebih dari satu yaitu y^2 .

2. Persamaan Diferensial Parsial

Definisi 2.1.9 (PDP, (Ross, 1984))

Persamaan Diferensial Parsial (PDP) merupakan suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan parsial dari satu atau lebih variabel terikat terhadap lebih dari satu variabel bebas.

Contoh 2.1.10 Berikut merupakan contoh dari Persamaan Diferensial Parsial (PDP).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Berdasarkan contoh di atas, variabel terikat yang termuat adalah u dan variabel bebas yang termuat adalah x dan y dengan pangkat tertinggi dari turunannya adalah 2.

B. Sistem Persamaan Diferensial

Sistem Persamaan Diferensial (Sistem PD) adalah sekumpulan persamaan diferensial yang saling terkait dan biasanya melibatkan dua atau lebih variabel. Pada sistem ini, setiap persamaan dapat menggambarkan hubungan antara perubahan satu variabel terhadap variabel lainnya (Braun, 1993). Menurut (Boyce, et al., 2009), sistem persamaan diferensial dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (2.3)$$

Di mana t adalah variabel bebas dan (y_1, y_2, \dots, y_n) adalah variabel terikat, serta (f_1, f_2, \dots, f_n) adalah fungsi yang mendefinisikan laju perubahan setiap variabel terikat terhadap variabel bebas dan variabel terikat lainnya. Sistem persamaan diferensial sendiri terbagi menjadi dua, yaitu:

1. Sistem Persamaan Diferensial Linear

Definisi 2.2.1 (Ross, 1984)

Sistem persamaan diferensial linear merupakan sekumpulan dari persamaan diferensial yang dapat dinyatakan dalam bentuk linear.

Bentuk umum dari sistem persamaan diferensial linear adalah sebagai berikut (Ross, 1984):

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \dots + a_{1n}(t)y_n + f_1(t) \\ \frac{dy_2}{dt} = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \dots + a_{2n}(t)y_n + f_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \dots + a_{nn}(t)y_n + f_n(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

Masing-masing persamaan hanya mengandung kombinasi linear dari fungsi y_1, y_2, \dots, y_n serta tidak ada perkalian antar fungsi tak diketahui dan turunannya, sehingga sistem

persamaan diferensial ini disebut linear.

Persamaan (2.4) dapat diekspresikan dalam bentuk:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\vec{y} + \vec{f}(t) \quad (2.5)$$

Dari persamaan (2.5) dapat direpresentasikan ke dalam bentuk matriks sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Contoh 2.2.2 Berikut merupakan contoh dari SPD linear.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Contoh pada persamaan (2.7) dikatakan SPD linear karena turunan dari fungsi-fungsi tak diketahui $x(t)$ dan $y(t)$ berpangkat satu.

2. Sistem Persamaan Diferensial Non Linear

Definisi 2.2.3 (Boyce & DiPrima, 2017)

Sistem persamaan diferensial non linear adalah sistem yang terdiri dari beberapa persamaan diferensial dimana variabel yang tidak diketahui dan turunannya muncul dalam bentuk non linear yang melibatkan perkalian, pangkat, fungsi non linear (eksponensial, logaritma, atau trigonometri).

Menurut Strogatz (1994), bentuk umum dari sistem persamaan diferensial non linear dapat dituliskan sebagai:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t)$$

Di mana $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, yaitu variabel-variabel terikat yang tergantung pada waktu t dan f adalah fungsi non linear antara variabel terikat dan waktu. Berdasarkan bentuk umum di atas, dapat juga diuraikan sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \end{cases} \quad (2.8)$$

Di mana variabel y_1, y_2, \dots, y_n merupakan variabel terikat yang dipengaruhi oleh waktu, sedangkan variabel t merupakan variabel bebas. Setiap fungsi f_i , dimana $i = 1, 2, \dots, n$ mendefinisikan laju perubahan dari variabel y_i terhadap waktu. Bentuk umum ini mencakup berbagai variabel terikat yang saling mempengaruhi satu sama lain seiring waktu.

Contoh 2.2.4 Berikut merupakan contoh dari SPD non linear.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1^2 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 x_2 - 3x \end{cases} \quad (2.9)$$

Contoh pada persamaan (2.9) dikatakan SPD non linear karena pada persamaan pertama, terdapat suku x_1^2 yang

merupakan pangkat dua dari x_1 . Sedangkan pada persamaan kedua, terdapat perkalian dari dua fungsi yaitu suku x_1x_2 .

C. Teori Kontrol Optimal

Kontrol optimal merupakan metode optimasi yang diterapkan untuk memperoleh hasil yang optimal dalam suatu sistem. Kontrol optimal berfokus pada pencarian kebijakan kontrol yang meminimalkan atau memaksimalkan suatu fungsi tujuan dalam sistem yang dinamis (Saraswati, dkk., 2017). Kontrol optimal berkembang maju mulai dari era perang dunia II untuk pengelolaan sumber daya, baik dalam militer maupun industri. Pada tahun 1957, Richard Bellman mengembangkan metode *dynamic programming* untuk memecahkan masalah pengambilan keputusan yang melibatkan beberapa langkah dan pilihan. Selanjutnya, pada tahun 1962, Pontryagin melanjutkan penelitian dengan mengembangkan metode *maximum principle* untuk optimalitas dalam sistem kontrol yang mana untuk mencapai kontrol optimal harus ada kondisi tertentu yang dipenuhi, yaitu pengaturan variabel kontrol dan fungsi Hamiltonian yang terkait (Venkateswarlu, 1996).

Permasalahan kontrol optimal yang berbentuk persamaan diferensial umumnya dimisalkan dengan $u(t)$ sebagai variabel kontrol untuk mewakili suatu indeks dari perilaku dan $x(t)$ sebagai variabel *state*. Variabel *state* pada sistem bersifat kontinu terhadap waktu t atau dapat disebut sebagai fungsi kendala. Fungsi tujuan dalam masalah kontrol optimal bertujuan meminimumkan atau memaksimumkan sebuah persamaan dilambangkan dengan J , biasanya dioptimalkan melalui perubahan pada variabel kontrol

$u(t)$. Misalkan variabel *state* atau fungsi kendala kontinu dalam tiga variabel $((t, x(t), u(t)))$, maka *state* $(x(t))$ dapat dinyatakan dengan:

$$x(t) = g(t, x(t), u(t)) \quad (2.10)$$

Fungsi g pada persamaan (2.10) bergantung pada waktu t , *state* $x(t)$, dan variabel kontrol $u(t)$ yang menggambarkan bagaimana *state* berubah seiring waktu berdasarkan variabel kontrol yang digunakan. Fungsi ini biasanya bersifat kontinu, yang berarti perubahan kecil pada t atau $u(t)$ akan menghasilkan perubahan kecil pada $x(t)$. Dengan demikian, hubungan variabel kontrol dan *state* dapat ditulis $u(t) \rightarrow x = x(u)$ dengan x adalah fungsi dari variabel bebas t , ditulis $x(u)$ untuk mengingatkan ketergantungan pada $u(x(u))$ menunjukkan variabel x tidak bergantung pada t melainkan pada u . Masalah kontrol optimal mempunyai tujuan umum untuk menemukan kontrol yang kontinu $u(t)$ yang akan memaksimalkan atau meminimalkan fungsi tujuan (J) dengan variabel kontrol $u(t)$ dan variabel *state* $x(t)$ yang diberikan oleh fungsi g , yaitu:

$$\max_u \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.11)$$

dengan,

$$\begin{aligned} x'(t) &= g(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \quad \text{dan} \quad x(t_1) \quad \text{bebas} \end{aligned}$$

Seperti kontrol yang memaksimumkan nilai dari fungsi tujuan disebut sebagai kontrol optimal. Dengan $x(t_1)$ bebas, berarti nilai dari keadaan x pada waktu t_1 bebas atau tidak dibatasi. Dalam konteks ini, fungsi f dan g dianggap selalu memiliki turunan yang kontinu terhadap semua variabel yang terlibat, yaitu

$(t, x(t), u(t))$. Karena kontrol berupa $u(t)$ adalah fungsi yang selalu kontinu, maka keadaan-keadaan terkait akan selalu memiliki turunan sebagian demi sebagian. Sehingga fungsi tujuan dapat dirumuskan dengan:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.12)$$

di mana $x = x(u)$ adalah *state* yang sesuai.

Pada tahun 1950-an, Pontryagin dan kawannya mengembangkan syarat perlu di Moskow (Pontryagin, 1962). Untuk mengintegrasikan persamaan diferensial ke dalam fungsi tujuan, Pontryagin memperkenalkan fungsi "*adjoint*". Fungsi *adjoint* (*costate*) berfungsi serupa dengan pengali Lagrange dalam kalkulus multivariat, yang menambahkan batasan pada fungsi dengan beberapa variabel untuk tujuan memaksimalkan atau meminimalkan. Fungsi *costate* membantu menemukan kontrol yang optimal (Lenhart & Workman, 2007). Di dalam teori kontrol optimal, terdapat syarat yang harus dipenuhi oleh suatu kontrol agar dapat disebut sebagai kontrol optimal, yaitu sebagai berikut.

1. Syarat Perlu Kontrol Optimal

Salah satu cara untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal adalah dengan menggunakan syarat perlu kontrol optimal, di mana u^* adalah kontrol dan x^* sebagai variabel *state* yaitu $J(u) \leq J(u^*) < \infty$ untuk semua kontrol u . Misalkan $h(t)$ adalah fungsi yang kontinu sebagian demi sebagian dan $\varepsilon \in \mathbb{R}$ adalah sebuah konstanta, sehingga:

$$u^\varepsilon(t) = u^*(t) + \varepsilon h(t) \quad (2.13)$$

Sistem persamaan di atas adalah fungsi kontrol yang terdiri dari beberapa bagian fungsi kontinu yang didefinisikan secara terpisah pada interval-interval tertentu. Misalkan x^ε adalah *state* yang bersesuaian dengan kontrol u^ε , maka x^ε memenuhi:

$$\frac{d}{dt}x^\varepsilon(t) = g(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) \quad (2.14)$$

Di mana u^ε adalah fungsi yang kontinu. Karena semua trayektori atau lintasan menuju ke *state* yang sama, maka diambil $x^\varepsilon(t_0) = x_0$. Diketahui $u^\varepsilon(t) \rightarrow u^*(t)$ untuk semua t , ketika $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\left. \frac{\partial u^\varepsilon(t)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = h(t) \quad (2.15)$$

Karena asumsi-asumsi yang dibuat pada fungsi g , maka dapat disimpulkan bahwa x^ε memenuhi sifat-sifat tertentu.

$$x^\varepsilon(t) \rightarrow x^*(t) \quad (2.16)$$

untuk setiap t tertentu.

Fungsi tujuan dari u^ε adalah sebagai berikut:

$$J(u^\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) dt \quad (2.17)$$

Misalkan $\lambda(t)$ adalah fungsi adjoint yang terdiferensiasi pada $[t_0, t_1]$ yang akan ditentukan dengan Teorema Dasar

Kalkulus,

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [\lambda(t)x^\varepsilon(t)] dt = \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) - \lambda(t_0)x^\varepsilon(t_0) = 0 \quad (2.18)$$

Tanpa mengubah nilai fungsi tujuan, $J(u^\varepsilon)$ dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} J(u^\varepsilon) &= \int_{t_0}^{t_1} \left[f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + \frac{d}{dt} (\lambda(t)x^\varepsilon(t)) \right] dt \\ &\quad + \lambda(t_0)x_0 - \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + \lambda'(t)x^\varepsilon(t) + \lambda(t)g(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))] dt \\ &\quad + \lambda(t_0)(x_0) - \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) \end{aligned}$$

Diketahui bahwa $\frac{d}{dt}x^\varepsilon = g(t, x^\varepsilon, u^\varepsilon)$, di mana nilai maksimum J terhadap kontrol u adalah u^* . Berdasarkan kondisi perlu nilai optimum suatu fungsi, maka turunan dari $J(u^\varepsilon)$ terhadap ε adalah 0, yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} J(u^\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(u^\varepsilon) - J(u^*)}{\varepsilon} \quad (2.19)$$

Persamaan di atas dapat dijabarkan, sehingga akan diperoleh

fungsi *costate* sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 0 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} J(u^\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} \\
 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} [f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + \lambda'(t)x^\varepsilon(t) + \lambda(t)g(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))] \right] dt \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &\quad - \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) \right|_{\varepsilon=0}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan aturan rantai untuk fungsi f dan g diperoleh

$$\begin{aligned}
 0 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} J(u^\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} \\
 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \left[f_x \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + f_u \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \lambda'(t) \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \lambda(t) \left(g_x \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + g_u \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) \right] dt \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &\quad - \lambda(t_1) \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t_1) \Big|_{\varepsilon=0} \\
 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \left[(f_x + \lambda(t)g_x + \lambda'(t)) \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t) \Big|_{\varepsilon=0} + (f_u + \lambda(t)g_u)h(t) \right] dt \\
 &\quad - \lambda(t_1) \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t_1) \Big|_{\varepsilon=0}
 \end{aligned}$$

Dari persamaan di atas akan disederhanakan dengan memilih fungsi adjoin, sehingga koefisien $\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t) \Big|_{\varepsilon=0}$ adalah 0. Selanjutnya akan dipilih fungsi adjoin atau *costate* $\lambda(t)$ yang memenuhi

$$\lambda'(t) = - [f_x(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_x(t, x^*(t), u^*(t))] dt \quad (2.20)$$

Diambil pula nilai batas atau kondisi transversal, yaitu

$$\lambda(t_1) = 0$$

Diketahui bahwa $h(t)$ adalah sembarang fungsi, yaitu

$$h(t) = f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_u(t, x^*(t), u^*(t)) \quad (2.21)$$

Sehingga berlaku,

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} (f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_u(t, x^*(t), u^*(t)))^2 dt$$

Diperoleh fungsi yang memenuhi kondisi optimal, yaitu

$$f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_u(t, x^*(t), u^*(t)) = 0$$

untuk semua $t_0 \leq t \leq t_1$.

Persamaan di atas adalah syarat perlu kontrol optimal, dimana kondisi optimal dan *state* harus memenuhi persamaan di atas. Syarat perlu dari fungsi Hamiltonian didefinisikan sebagai berikut:

$$H_a(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda(t)g(t, x, u), \quad (2.22)$$

dimana f adalah integrand, λ adalah *costate*, dan g adalah persamaan diferensial atau *state*. Fungsi Hamiltonian akan dioptimalkan terhadap u pada u^* . Kondisi di atas dapat dituliskan sebagai berikut.

a. Kondisi Optimal

$$\frac{\partial H_a}{\partial u} = 0 \rightarrow f_u + \lambda(t)g_u = 0$$

b. Persamaan Adjoint (*costate*)

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H_a}{\partial x} \rightarrow \lambda'(t) = -(f_x + \lambda(t)g_x)$$

c. Kondisi Transversal

$$\lambda(t_1) = 0$$

Didefinisikan persamaan *state* sebagai,

$$x' = g(t, x, u) = \frac{\partial H_a}{\partial \lambda}, \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.23)$$

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa Pontryagin mengusulkan bahwa syarat perlu untuk kontrol optimal dapat dinyatakan menggunakan fungsi adjoint $\lambda(t)$, yang ditambahkan ke persamaan *state* $x(t)$ dalam fungsi tujuan J , yang dapat dirumuskan melalui fungsi Hamiltonian $H(t, x, u, \lambda)$, sehingga solusi optimal memenuhi persamaan Hamiltonian dan kondisi optimalnya (Lenhart & Workman, 2007).

2. Prinsip Maksimum Pontryagin

Menurut Lenhart dan Workman (2007), Prinsip Maksimum Pontryagin (PMP) merupakan metode populer dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal karena memberikan kondisi perlu untuk optimalitas. Namun, terdapat pendekatan lain seperti pemrograman dinamis dan metode numerik langsung. Pemilihan metode penyelesaian kontrol optimal ini tergantung pada kompleksitas dan bentuk masalah. Pemrograman dinamis menghasilkan syarat cukup melalui persamaan Hamilton–Jacobi–Bellman, sedangkan metode langsung menyelesaikan masalah

dengan mengubahnya menjadi optimasi numerik tanpa perlu menghitung persamaan adjoint.

Penelitian ini menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin karena metode ini memberikan syarat perlu untuk menentukan kontrol optimal, seperti persamaan *state*, *costate*, kondisi hamiltonian maksimum, serta kondisi batasnya. PMP cocok diterapkan pada model berbasis persamaan diferensial, seperti model perceraian dalam penelitian ini, karena metode ini lebih sederhana secara komputasi dibanding pemrograman dinamis, dimana dapat diselesaikan dengan metode numerik seperti Runge-Kutta dan *sweep* maju mundur. Permasalahan ini dikembangkan oleh L.S. Pontryagin dan rekan kerjanya pada tahun 1950.

Teorema 2.3.1 (*Lenhart & Workman, 2007*)

Jika $u^(t)$ dan $x^*(t)$ merupakan solusi optimal untuk permasalahan kontrol optimal, dengan syarat perlu $\lambda(t)$ sedemikian rupa sehingga,*

$$H_a(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq H_a(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))$$

untuk semua kontrol u pada setiap waktu t , di mana Hamiltonian H yaitu:

$$H_a = f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t)),$$

dan,

$$\lambda'(t) = - \frac{\partial H_a(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))}{\partial x}$$

$$\lambda(t_1) = 0$$

Diketahui fungsi *adjoint* (*costate*) dan Hamiltonian, yaitu $H_u = 0$ pada u^* untuk semua t , sehingga, Hamiltonian memiliki titik kritis dalam variabel u , yaitu pada u^* untuk setiap t . Masalah dapat diselesaikan lebih sederhana menggunakan prinsip maksimum pontryagin.

Teorema 2.3.2 Fungsi Hamiltonian (Lenhart & Workman, 2007)

Misalkan $f(t, x, u)$ dan $g(t, x, u)$ adalah fungsi yang terdiferensialkan secara kontinu terhadap ketiga variabelnya dan konkaf terhadap variabel kontrol u . Misalkan u^* merupakan kontrol optimal yang bersesuaian dengan state x^* , dan λ adalah fungsi terdiferensiasi sebagian demi sebagian yang memenuhi $\lambda(t) \geq 0$ untuk setiap t . Misalkan untuk semua $t_0 \leq t \leq t_1$, maka akan diperoleh:

$$0 = H_u(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))$$

Selanjutnya, untuk setiap kontrol u pada interval $t_0 \leq t \leq t_1$, dipunyai:

$$H_a(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq H_a(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))$$

Bukti. Tetapkan kontrol u dan titik pada interval waktu $t_0 \leq t \leq t_1$, kemudian

$$\begin{aligned} & H_a(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) - H_a(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \\ &= [f(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g(t, x^*(t), u^*(t))] - \\ & \quad [f(t, x^*(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x^*(t), u(t))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [f(t, x^*(t), u^*(t)) - f(t, x^*(t), u(t))] + \lambda(t) \\
&\quad [g(t, x^*(t), u^*(t)) - g(t, x^*(t), u(t))] \\
&\geq (u^*(t) - u(t))f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)(u^*(t) \\
&\quad - u(t))g_u(t, x^*(t), u^*(t)) \\
&= (u^*(t) - u(t))H_u(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) = 0
\end{aligned}$$

Transisi dari baris ke-3 ke baris ke-4 menggunakan properti konkaf, yaitu bentuk:

$$\begin{aligned}
f(u) - f(u^*) &\leq \nabla_u f(u^*) \cdot (u - u^*) \\
&\Leftrightarrow f(u^*) - f(u) \geq \nabla_u f(u^*) \cdot (u^* - u)
\end{aligned}$$

serta karena $\lambda(t) \geq 0$, maka saat kita mengalikan dengan $\lambda(t)$, arah pertidaksamaan tetap, tidak berubah. ■

Hal ini juga berlaku untuk maksimum maupun minimum. Berikut merupakan perbedaan kontrol yang memaksimalkan dan kontrol yang meminimalkan fungsi tujuan untuk mendapatkan u^* ,

Pada permasalahan maksimum:

$$\frac{\partial^2 H_a}{\partial u^2} < 0 \quad (2.24)$$

Pada permasalahan minimum:

$$\frac{\partial^2 H_a}{\partial u^2} > 0 \quad (2.25)$$

Apabila terdapat masalah kontrol optimal dengan dua variabel yang tidak diketahui, yaitu u^* dan x^* dan variabel adjoin (*costate*), yaitu λ sebagai pengali *lagrange*. Berikut

adalah langkah-langkah untuk mencari maksimum atau minimum dari masalah kontrol optimal yang diberikan (Lenhart & Workman, 2007):

- a. Bentuk ke dalam persamaan Hamiltonian.
- b. Menentukan *costate*, kondisi transversal, serta kondisi optimal dari u^* , x^* , dan λ .
- c. Untuk mengeliminasi u^* dengan menggunakan kondisi optimal $H_u = 0$, maka dapat menyelesaikan u^* dalam kaitannya dengan variabel *state* x^* dan *costate* λ .
- d. Untuk menyelesaikan dua persamaan diferensial terkait x^* dan λ , pertama-tama tentukan persamaan Hamiltonian $H_a(t, x, u, \lambda)$, lalu turunkan kedua persamaan tersebut. Dengan dua kondisi batas, yaitu $\lambda(t_0)$ dan $\lambda(t_1)$. Substitusikan u^* ke dalam persamaan diferensial.
- e. Setelah ditemukan persamaan *state* dan *costate*, selesaikan untuk masalah kontrol optimal.

3. Contoh Masalah Kontrol Optimal

Berikut ini merupakan contoh dan penyelesaian dari suatu permasalahan kontrol optimal:

$$\min_u \int_0^1 u(t)^2 dt$$

dengan $x'(t) = x(t) + u(t)$, $x(0) = 1$, $x(1)$ bebas.

Permasalahan kontrol di atas bertujuan untuk meminimumkan. Berikut merupakan langkah-langkah untuk mendapatkan kondisi yang optimal.

- a. Membentuk persamaan Hamiltonian (fungsi yang menggabungkan fungsi objektif dan persamaan diferensial yang mengatur sistem) sebagai berikut.

$$H_a(t, x, u, \lambda) = L(t, x, u) + \lambda(t)f(t, x, u)$$

$$H_a(t, x, u, \lambda) = u(t)^2 + \lambda(t)(x(t) + u(t))$$

$$H_a = u^2 + \lambda(x + u)$$

- b. Menentukan kondisi optimal menggunakan metode Hamiltonian dan syarat perlu optimalitas. Untuk mendapatkan kontrol optimal u^* , maka ditetapkan turunan pertama dari Hamiltonian sama dengan nol.

$$\frac{\partial H_a}{\partial u} = 2u + \lambda$$

$$0 = 2u + \lambda$$

$$u^* = -\frac{1}{2}\lambda$$

Untuk memastikan bahwa kontrol yang telah ditemukan optimal, perlu dicek turunan kedua dari Hamiltonian terhadap u , yaitu:

$$\frac{\partial^2 H_a}{\partial u^2} = 2,$$

karena $\frac{\partial^2 H_a}{\partial u^2} = 2 > 0$, maka dapat disimpulkan bahwa kontrol u^* yang diperoleh adalah solusi minimum (optimal).

- c. Diperoleh persamaan *adjoint* atau kondisi *costate* dari

turunan Hamiltonian terhadap variabel *state* x , yaitu:

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H_a}{\partial x}$$

$$\lambda'(t) = -\lambda(t)$$

dari persamaan di atas, diperoleh solusi *costate* sebagai berikut:

$$\lambda(t) = ce^{-t}$$

- d. Dengan menggunakan kondisi transversal $\lambda(1) = 0$, maka akan ditentukan nilai konstanta c .

$$\lambda(t) = ce^{-t}$$

$$\lambda(1) = ce^{-1} = 0$$

$$c = 0$$

Dengan $c = 0$, maka fungsi adjoint (*costate*) menjadi:

$$\lambda(t) = 0$$

- e. Berdasarkan kondisi transversal yang kita dapatkan sebelumnya, yaitu $\lambda(t) = 0$, maka dapat menghitung solusi kontrol optimalnya. Diketahui bahwa kontrol optimal u^* dinyatakan sebagai:

$$u^* = \frac{-\lambda(t)}{2}$$

$$u^* = \frac{-0}{2}$$

$$u^* = 0$$

Dengan $u^* = 0$, persamaan *state* menjadi:

$$x' = x + u^*$$

$$x' = x$$

Dengan kondisi awal $x(0) = 1$, solusi dari persamaan diferensial $x' = x$ adalah:

$$x^*(t) = e^t$$

f. Solusi optimal untuk masalah kontrol optimal di atas adalah:

- Kontrol optimal : $u^* = 0$
- Fungsi *state* : $x^*(t) = e^t$
- Fungsi *costate* : $\lambda(t) = 0$

Hal ini berarti, untuk kontrol optimal $u^* = 0$, solusi *state* yang memenuhi persamaan diferensial adalah $x^*(t) = e^t$.

D. Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta adalah sebuah pendekatan numerik yang banyak digunakan untuk menghitung solusi perkiraan dari Persamaan Diferensial Biasa (PDB). Metode Runge-Kutta memberikan solusi yang lebih akurat dibandingkan metode Euler sederhana dengan memanfaatkan beberapa evaluasi fungsi pada setiap langkah. Metode Euler adalah cara paling sederhana untuk mendekati solusi masalah matematika yang melibatkan nilai awal (Burden & Faires, 1978).

Menurut Chapra & Canale (2015), bentuk umum dari metode Runge-Kutta dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \quad (2.26)$$

dimana $\phi(x_i, y_i, h)$ disebut *increment function* (fungsi kenaikan), yang dapat diartikan sebagai kemiringan representatif pada interval. Bentuk umum dari fungsi kenaikan adalah sebagai berikut.

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n \quad (2.27)$$

di mana a_i adalah konstanta dan k dihitung berdasarkan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h) \\ k_3 &= f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h) \\ &\vdots \\ k_n &= f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + \\ &\quad q_{n-1,2}k_2h + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h) \end{aligned}$$

Pada persamaan di atas, p dan q adalah konstanta dan k menunjukkan hubungan rekursif, di mana k_1 muncul pada persamaan k_2 , k_3 , dan seterusnya karena setiap k adalah evaluasi fungsional, yaitu langkah untuk menemukan nilai dari suatu fungsi berdasarkan input yang diberikan. Proses ini mencakup substitusi nilai input ke dalam fungsi dan menghitung hasilnya. Hubungan rekursif dalam metode Runge-Kutta inilah yang membuatnya efisien untuk perhitungan di komputer, karena memiliki nilai error

yang relatif kecil.

Dalam menyelesaikan permasalahan kontrol optimal, metode yang biasanya digunakan adalah metode Runge-Kutta orde 4 karena memberikan tingkat akurasi yang lebih baik dibandingkan metode Euler maupun metode Runge-Kutta dengan orde yang lebih rendah. Dengan metode Runge-Kutta orde 4, solusi yang diperoleh akan lebih mendekati nilai sebenarnya dari sistem yang dianalisis. Hasil yang diperoleh tersebut sangat penting dalam kontrol optimal di mana keputusan harus didasarkan pada prediksi yang akurat. Diberikan langkah h , $x(t)$, dan $x' = f(t, x(t))$, maka aproksimasi $x(t + h)$ dapat dihitung menggunakan rumus rekursi sebagai berikut: (Lenhart & Workman, 2007).

$$x(t + h) = x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.28)$$

dengan,

$$\begin{aligned} k_1 &= g(t, x(t)) \\ k_2 &= g\left(t + \frac{h}{2}, x(t), \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= g\left(t + \frac{h}{2}, x(t), \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= g(t + h, x(t), k_3h) \end{aligned}$$

E. Metode *sweep* Maju Mundur

Untuk mengatasi permasalahan kontrol optimal, salah satu pendekatan numerik yang diterapkan adalah metode *sweep* maju mundur. Metode *sweep* maju mundur digunakan karena dapat menyelesaikan sistem persamaan yang saling bergantung

secara iteratif untuk mencapai hasil yang konvergen. Dengan memanfaatkan arah waktu yang berbeda untuk masing-masing persamaan, metode ini mempermudah pencarian kontrol optimal yang memenuhi syarat-syarat dalam Prinsip Maksimum Pontryagin. Tahapan-tahapan dalam metode *sweep* maju mundur dapat dijelaskan sebagai berikut (Lenhart & Workman, 2007):

- a. Membuat dugaan nilai awal untuk variabel kontrol u .
- b. Untuk menyelesaikan persamaan *state*, digunakan kondisi awal $x(0) = x(t_0)$ dan nilai u dengan menerapkan metode Runge-Kutta orde 4 langkah maju.
- c. Untuk menyelesaikan persamaan *costate* λ , maka akan digunakan kondisi transversal $\lambda(t_f) = 0$ serta nilai u dan x yang telah diperoleh menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 langkah mundur.
- d. Untuk memperoleh kontrol optimal u perlu diperbarui nilai kontrol u dengan substitusi nilai x dan λ yang baru ke dalam persamaan karakteristik (yang menghubungkan variabel kontrol $u(t)$ dengan *state* $x(t)$ dan *costate* $\lambda(t)$, sehingga diperoleh u^* yaitu kontrol optimal yang meminimalkan Hamiltonian.
- e. Saat memeriksa konvergensi solusi, Apabila variabel menunjukkan *error* yang sangat kecil antara iterasi terkini dan sebelumnya, maka proses dianggap selesai dan mencetak nilai saat ini sebagai solusi. Namun, jika *error* masih besar, kembali ke langkah 2.

F. Model Matematika

Model matematika yaitu representasi skala kecil dari objek, deskripsi, atau analogi yang berfungsi untuk memvisualisasikan hal-hal yang sulit untuk diamati. Ekspresi matematis yang berasal dari suatu fenomena disebut sebagai model matematika dari fenomena tersebut. Dalam menurunkan model matematika, diperlukan dugaan, pendekatan, dan batasan yang didasarkan pada pengamatan terhadap kenyataan fenomena. Dalam rangka mempelajari fenomena tertentu secara sederhana, asumsi dan pendekatan diterapkan (Ndii, 2018). Pemodelan matematika merupakan jembatan yang paling efektif yang menghubungkan matematika dengan beberapa bidang ilmu, seperti fisika, biologi, ilmu komputer, teknik, dan ilmu sosial.

Definisi 2.6.1 (*Barnes & Fulford, 2009*))

Dalam pemodelan matematika, model digunakan untuk merepresentasikan dan mendeskripsikan masalah yang terkait dengan fenomena nyata ke dalam bentuk bahasa matematika, sehingga membantu dalam pemahaman masalah.

Secara umum, dalam memodelkan suatu masalah diperlukan beberapa tahapan untuk menghasilkan model yang baik. Kartono (2012) memaparkan penjelasan mengenai tahapan-tahapan dalam mengonstruksi model matematika yang diawali identifikasi masalah dengan mengenali apa yang akan dilakukan, merumuskan asumsi atau dugaan yang akan digunakan dalam pemodelan matematika, penyelesaian model matematika, memvalidasi model sebelum mencapai kesimpulan pada masalah nyata, dan interpretasi solusi matematis ke dalam fenomena nyata. Dengan demikian, akan diperoleh kesimpulan dalam menyelesaikan

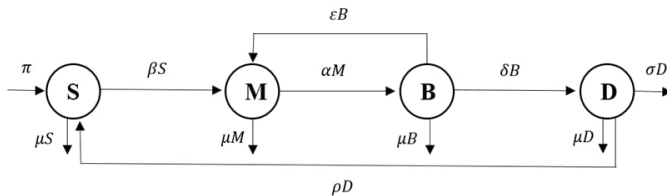
fenomena nyata.

G. Model Matematika Dinamika Perceraian

Model matematika dinamika perceraian mencakup berbagai jenis yang dirancang untuk menggambarkan dan menganalisis faktor-faktor yang memengaruhi proses perceraian dalam masyarakat. Model matematika yang digunakan dalam pemodelan ini berkaitan dengan dinamika perceraian yang telah dimodifikasi dari beberapa jurnal penelitian sebelumnya.

1. Model SMBD (*Single - Marriage - Broken - Divorce*)

Berdasarkan penelitian dari (Tessema, et al., 2022), pada model SMBD dinamika perceraian, populasi dibagi menjadi empat, diantaranya *Single* (S) yaitu individu yang belum menikah, *Marriage* (M) atau menikah yaitu individu *single* yang memutuskan untuk menikah, *Broken* (B) yaitu pasangan yang pisah ranjang tapi belum bercerai, dan *Divorce* (D) yaitu pasangan yang memutuskan untuk bercerai. Model tersebut dapat diilustrasikan pada gambar 2.1.



Gambar 2.1: Diagram Kompartemen Model SMBD (*Single - Marriage - Broken - Divorce*)

Berikut merupakan nilai subpopulasi dan nilai parameter

model SMBD (*Single - Marriage - Broken - Divorce*) dari penelitian milik Tessema, dkk (2022).

Tabel 2.1: Variabel Model Matematika SMBD (*Single - Marriage - Broken - Divorce*)

Variabel	Keterangan	Satuan	Syarat
<i>Single</i>	Subpopulasi yang belum menikah (<i>Single</i>).	Individu	$S(t) \geq 0$
<i>Marriage</i>	Subpopulasi yang memutuskan untuk menikah.	Individu	$M(t) \geq 0$
<i>Broken</i>	Subpopulasi yang pisah rumah tetapi belum bercerai.	Individu	$B(t) \geq 0$
<i>Divorce</i>	Subpopulasi yang memutuskan bercerai.	Individu	$D(t) \geq 0$

Tabel 2.2: Parameter Model Matematika SMBD (*Single - Marriage - Broken - Divorce*)

Parameter	Keterangan	Satuan	Syarat
π	Laju individu <i>single</i> yang telah siap untuk menikah.	Individu / tahun	$\pi > 0$
ρ	Laju individu yang telah bercerai menjadi <i>single</i> .	1 / tahun	$\rho > 0$
β	Laju individu yang memutuskan menikah.	1 / tahun	$\beta > 0$
δ	Laju individu yang pisah ranjang menjadi bercerai.	1 / tahun	$\delta > 0$

Parameter	Keterangan	Satuan	Syarat
α	Laju kontak antara individu yang telah bercerai dengan individu yang telah menikah.	1 / tahun	$\alpha > 0$
σ	Laju kematian karena bercerai.	1 / tahun	$\sigma > 0$
ε	Laju individu yang telah pisah ranjang memutuskan untuk memperbarui pernikahan sebelumnya.	1 / tahun	$\varepsilon > 0$
μ	Laju kematian alami.	1 / tahun	$\mu > 0$

Berdasarkan diagram kompartemen pada gambar (2.1), asumsi dalam model ini meliputi bahwa faktor-faktor seperti jenis kelamin, ras, dan status sosial tidak berpengaruh pada kemungkinan bercerai dan anggota mencampuradukkan secara homogen (memiliki interaksi yang sama dengan tingkat yang sama). Dari model SMBD, akan didapatkan persamaan diferensial dengan penjelasannya sebagai berikut.

Laju perubahan subpopulasi *Single* (S) bertambah dari individu baru sebesar πN dan dari individu bercerai sebesar ρD . Pengurangan terjadi akibat transisi ke subpopulasi *Marriage* sebesar βS dan kematian alami sebesar μS . Dengan demikian, diperoleh persamaan:

$$\frac{dS}{dt} = \pi N + \rho D - \beta S - \mu S \quad (2.29)$$

Laju perubahan subpopulasi *Marriage* bertambah dari subpopulasi *Single* dan *Broken* yang memutuskan untuk menikah kembali, masing-masing dengan laju βS dan εB . Pengurangan terjadi akibat transisi ke subpopulasi *Broken* sebesar αM dan kematian alami sebesar μM , sehingga diperoleh persamaan:

$$\frac{dM}{dt} = \beta S - \alpha M + \varepsilon B - \mu M \quad (2.30)$$

Laju perubahan subpopulasi *Broken* bertambah dari pasangan menikah yang hubungannya memburuk sebesar αM . Pengurangan terjadi akibat perceraian sebesar δB , perbaikan pernikahan sebesar εB , dan kematian alami sebesar μB , sehingga diperoleh persamaan:

$$\frac{dB}{dt} = \alpha M - \delta B - \varepsilon B - \mu B \quad (2.31)$$

Laju perubahan subpopulasi *Divorce* bertambah dari pasangan *Broken* yang bercerai sebesar δB . Pengurangan terjadi akibat transisi ke *Single* sebesar ρD , serta kematian alami dan kematian akibat perceraian masing-masing sebesar μD dan σD , sehingga didapat persamaan berikut:

$$\frac{dD}{dt} = \delta B - \rho D - \sigma D - \mu D \quad (2.32)$$

Berdasarkan uraian dan penjelasan yang telah disampaikan sebelumnya, akan dirumuskan sistem persamaan diferensial yang menggambarkan dinamika perubahan masing-masing

subpopulasi sebagai berikut:

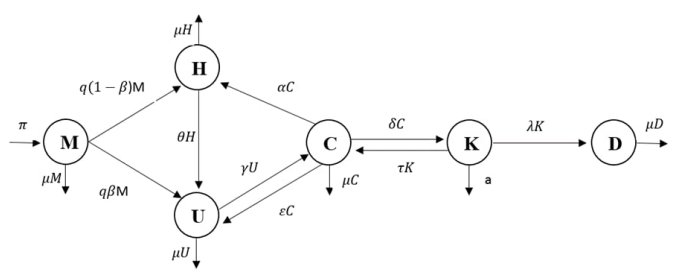
$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \pi N + \rho D - \beta S - \mu S \\ \frac{dM}{dt} = \beta S - \alpha M + \varepsilon B - \mu M \\ \frac{dB}{dt} = \alpha M - \delta B - \varepsilon B - \mu B \\ \frac{dD}{dt} = \delta B - \rho D - \sigma D - \mu D \end{cases} \quad (2.33)$$

Dengan toral populasi,

$$N(t) = S(t) + M(t) + B(t) + D(t)$$

2. Model MHUCKD (*Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Counselling - Complexity Life - Divorce*)

Pada model MHUCKD dinamika perceraian, populasi dibagi menjadi enam subpopulasi, diantaranya subpopulasi *Marriage* (M) yaitu individu yang telah menikah, subpopulasi *Healthy Marriage* (H) yaitu individu yang pernikahannya sehat, subpopulasi *Unhealthy Marriage* (U) yaitu individu yang pernikahannya sering terjadi masalah dan perdebatan dengan pasangannya, subpopulasi *Counselling* (C) yaitu individu kehidupannya tidak bahagia dan kesulitan terkait perkawinan melakukan konseling, subpopulasi *Complexity Life* (K) yaitu individu yang stres dan mengalami kesulitan (kompleksitas) dalam kehidupan pernikahan, dan subpopulasi *Divorce* (D) yaitu individu yang bercerai karena kompleksitas kehidupan pernikahan. Model tersebut dapat diilustrasikan pada gambar 2.2 (Hugo & Lusekelo, 2021).



Gambar 2.2: Diagram Kompartemen Model MHUCKD (*Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Counselling - Complexity life - Divorced*)

Pada tabel 2.3 dan tabel 2.4 di bawah ini menampilkan variabel dan parameter pada model MHUCKD berdasarkan penelitian milik Hugo Lusekelo pada tahun 2021.

Tabel 2.3: Variabel Model Matematika MHUCKD (*Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Counselling - Complexity life - Divorced*)

Variabel	Keterangan	Satuan	Syarat
<i>Marriage</i>	Subpopulasi telah menikah.	Individu	$M(t) \geq 0$
<i>Healthy Marriage</i>	Subpopulasi yang kehidupan pernikahannya stabil, sehat, dan jarang ada konflik.	Individu	$H(t) \geq 0$
<i>Unhealthy Marriage</i>	Subpopulasi yang kehidupan pernikahannya tidak sehat dan banyak perselisihan.	Individu	$U(t) \geq 0$

Variabel	Keterangan	Satuan	Syarat
<i>Counselling</i>	Subpopulasi yang pernikahannya banyak perselisihan memutuskan untuk melakukan konseling.	Individu	$C(t) \geq 0$
<i>Complexity Life</i>	Subpopulasi yang stres dan mengalami kesulitan (kompleksitas) dalam kehidupan pernikahan.	Individu	$K(t) \geq 0$
<i>Divorce</i>	Subpopulasi yang memutuskan bercerai.	Individu	$D(t) \geq 0$

Tabel 2.4: Parameter Model Matematika MHUCKD (*Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Counselling - Complexity life - Divorced*)

Parameter	Keterangan	Satuan	Syarat
μ	Laju kematian alami.	1 / tahun	$\mu > 0$
π	Laju penambahan individu yang menikah.	Individu / tahun	$\pi > 0$
q	Faktor individu yang mengalami <i>Unhealthy Marriage</i> .	-	$0 < q < 1$
β	Laju individu yang mengalami <i>Unhealthy Marriage</i> .	1 / tahun	$\beta > 0$

Parameter	Keterangan	Satuan	Syarat
θ	Laju individu dari subpopulasi <i>healthy marriage</i> menjadi <i>unhealthy marriage</i> .	1 / tahun	$\theta > 0$
γ	Laju individu yang memutuskan konseling karena kehidupan yang tidak bahagia dari kesulitan terkait perkawinan.	1 / tahun	$\gamma > 0$
a	Laju kematian karena stres akibat kehidupan pernikahan yang kompleks.	1 / tahun	$a > 0$
ε	Laju individu yang memutuskan untuk konseling tetapi tetap di bawah pernikahan yang tidak sehat.	1 / tahun	$\varepsilon > 0$
α	Laju individu yang menerima konseling dan menjadi individu dengan kehidupan pernikahan yang sehat (<i>healthy marriage</i>).	1 / tahun	$\alpha > 0$
λ	Laju individu yang bercerai karena kehidupan pernikahan yang kompleks.	1 / tahun	$\lambda > 0$

Parameter	Keterangan	Satuan	Syarat
δ	Laju individu yang stres (kehidupan pernikahannya kompleks) setelah mendapatkan konseling.	1 / tahun	$\delta > 0$
τ	Laju individu yang mencari konseling setelah stres dan kesulitan (kompleksitas) kehidupan pernikahan.	1 / tahun	$\tau > 0$

Mengacu gambar (2.2), populasi dalam model diasumsikan bersifat homogen (memiliki interaksi yang setara dan tingkat yang sama). Lebih lanjut, diasumsikan bahwa jenis kelamin, ras, dan status sosial tidak berkontribusi pada kemungkinan bercerai dan epidemi perceraian terjadi pada populasi tertutup. Dari model MHUCKD akan diperoleh persamaan diferensial dengan penjelasannya sebagai berikut.

Laju perubahan subpopulasi *Marriage* bertambah sebesar π dari individu yang menikah, dan berkurang akibat kematian alami sebesar μM , serta pengaruh pernikahan tidak sehat sebesar qM . Dengan demikian, diperoleh persamaan:

$$\frac{dM}{dt} = \pi - (q + \mu)M \quad (2.34)$$

Laju perubahan subpopulasi *Healthy Marriage* bertambah dari populasi *Marriage* sebesar $q(1 - \beta)M$ dan dari keberhasilan konseling sebesar αC . Pengurangan terjadi akibat kematian alami sebesar μH dan transisi

ke pernikahan tidak sehat sebesar θH , sehingga akan diperoleh persamaan:

$$\frac{dH}{dt} = q(1 - \beta)M + \alpha C - (\theta + \mu)H \quad (2.35)$$

Laju perubahan subpopulasi *Unhealthy Marriage* bertambah dari populasi *Marriage* sebesar $q\beta M$, dari transisi *Healthy Marriage* sebesar θH , dan dari konseling yang tidak berhasil sebesar εC . Pengurangan terjadi akibat kematian alami sebesar μU dan individu yang mengikuti konseling sebesar γU . Dengan demikian, diperoleh persamaan:

$$\frac{dU}{dt} = q\beta M + \theta H + \varepsilon C - (\gamma + \mu)U \quad (2.36)$$

Laju perubahan subpopulasi *Counselling* bertambah dari subpopulasi *Unhealthy Marriage* sebesar γU dan dari subpopulasi *Complexity Life* sebesar τK . Pengurangan terjadi akibat kematian alami sebesar μC , transisi ke pernikahan sehat sebesar αC , ke pernikahan tidak sehat sebesar εC , serta yang mengalami stres kembali ke *Complexity Life* sebesar δC , sehingga didapat persamaan:

$$\frac{dC}{dt} = \gamma U + \tau K - (\varepsilon + \delta + \alpha + \mu)C \quad (2.37)$$

Laju perubahan subpopulasi *Complexity life* bertambah dari subpopulasi *Counselling* sebesar δC , dan berkurang akibat kematian karena stres sebesar aK , transisi ke subpopulasi *Divorce* sebesar λK , serta transisi ke *Counselling* sebesar τK ,

sehingga diperoleh persamaan:

$$\frac{dK}{dt} = \delta C - (\tau + \lambda + \alpha + \mu)C \quad (2.38)$$

Laju perubahan subpopulasi *Divorce* bertambah dari subpopulasi *Complexity Life* sebesar λK , dan berkurang akibat kematian alami sebesar μD , sehingga akan diperoleh persamaan:

$$\frac{dD}{dt} = \lambda K - \mu D \quad (2.39)$$

Berdasarkan uraian dan penjelasan yang telah disampaikan sebelumnya, akan dirumuskan sistem persamaan diferensial yang menggambarkan dinamika perubahan masing-masing subpopulasi sebagai berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM}{dt} = \pi - (q + \mu)M \\ \frac{dH}{dt} = q(1 - \beta)M + \alpha C - (\theta + \mu)H \\ \frac{dU}{dt} = q\beta M + \theta H + \varepsilon C - (\gamma + \mu)U \\ \frac{dC}{dt} = \gamma U + \tau K - (\varepsilon + \delta + \alpha + \mu)C \\ \frac{dK}{dt} = \delta C - (\tau + \lambda + \alpha + \mu)C \\ \frac{dD}{dt} = \lambda K - \mu D \end{array} \right. \quad (2.40)$$

Dengan total populasi,

$$N(t) = M(t) + H(t) + U(t) + C(t) + K(t) + D(t)$$

H. Perceraian

Perceraian adalah tindakan memutuskan ikatan yang disebabkan oleh alasan tertentu dalam suatu perkawinan. Ketidakmampuan menemukan solusi menyebabkan perceraian terjadi (*dissolution marriage*) (Wijaya, 2008). Perceraian merupakan suatu masalah kompleks yang tidak terjadi secara tiba-tiba. Berdasarkan beberapa kasus, terdapat beberapa faktor-faktor penyebab perceraian. Memahami faktor-faktor yang menyebabkan perceraian sangat penting untuk menganalisis dan memberikan wawasan yang lebih dalam mengenai pernikahan. Menurut Manna, Doriza, dan Oktaviani (2021), terdapat beberapa faktor-faktor penyebab perceraian diantaranya sebagai berikut.

1. Perasaan ketidakcocokan dalam tujuan, nilai, atau minat antarindividu. Ketidakcocokan sering disebabkan karena pasangan memiliki pandangan hidup dan tujuan yang berbeda atau tidak sejalan.
2. Komunikasi yang buruk dapat menyebabkan kesalahpahaman dan ketidakpuasan dalam suatu hubungan, misalnya, salah satu pasangan merasa kurang dihargai, kesulitan dalam berbagi, dan merasa diabaikan saat diperlukan.
3. Masalah ekonomi dapat menyebabkan perceraian. Penyebab perceraian karena ekonomi, yaitu kurangnya ekonomi dan pola hidup yang fokus pada kepuasan dan kesenangan. Istri mengajukan gugatan terhadap suaminya karena suami tidak mampu memenuhi kebutuhannya, sementara suami menggugat istri karena gaya hidup hedonis yang dijalani

istrinya.

4. Perselingkuhan menjadi faktor yang paling banyak menyebabkan perceraian. Perselingkuhan bermula karena ketidakharmonisan dalam rumah tangga, sehingga salah satu pasangan mencari ketenangan dan kenyamanan dari orang lain.

Salah satu upaya untuk meminimumkan perceraian dan pernikahan yang tidak sehat (*Unhealthy Marriage*) adalah dengan pemberian edukasi pasca nikah dan konseling yang akan dijelaskan lebih detail sebagai berikut.

1. Edukasi Pasca Nikah

Dalam UU No. 16 Tahun 2019 telah dipaparkan bahwa umur minimal yang diizinkan menikah adalah 19 tahun. Umur tidak hanya berkaitan dengan keadaan fisiologis tetapi juga berkaitan dengan keadaan psikologis seseorang. Dengan bertambahnya umur, diharapkan keadaan psikologisnya juga akan bertambah matang. Seseorang dikatakan telah siap menikah apabila telah siap secara fisiologis atau kejasmanian, psikologis, sosial-ekonomi, dan tinjauan masa depan atau jangkauan ke depan (Walgito, 2019). Dalam suatu pernikahan dibutuhkan edukasi pasca nikah untuk membangun dan membina rumah tangga agar sesuai ajaran agama Islam, sehingga terwujud keluarga yang sakinah, mawaddah, dan rahmah.

Edukasi pasca nikah diberikan untuk mengetahui keistimewaan dan kewajiban individu yang telah menikah untuk menghindari adanya perselisihan atau pertengkaran

di kemudian hari (Hasan, 2003). Berdasarkan kitab Qurratul Uyun, materi edukasi pasca nikah meliputi pemahaman tentang hak dan kewajiban suami istri, komunikasi efektif dalam rumah tangga, manajemen konflik, serta pendidikan anak. Selain itu, dengan menambahkan kontrol edukasi pasca nikah diharapkan dapat memberi dukungan dan pembinaan bagi pasangan yang telah menikah untuk menjaga keharmonisan. Untuk menghindari diri dari hal-hal yang tidak diinginkan, harus dibangun kesadaran akan tanggung jawab khususnya dalam aspek ibadah dan agama (Ulfatmi, 2011). Edukasi pasca nikah ini diselenggarakan oleh Kemenag melalui program konseling keluarga atau bimbingan pasca nikah, Lembaga Pemberdayaan Perempuan dan Anak melalui program penguatan keluarga. Melalui edukasi pasca nikah diharapkan mampu membina hubungan yang baik dengan pasangan, membangun rumah tangga yang baik dan penuh kasih sayang, melaksanakan ibadah, mendidik anak, dan membangun relasi sosial dalam keluarga maupun masyarakat secara luas dengan baik (Alfansuri, 2023).

2. **Konseling**

Menurut Nitria, P.W.A., dkk, (2024) *Unhealthy marriage* memiliki makna yang sama dengan *toxic relationship*. *Toxic relationship* adalah hubungan yang beracun, yang dapat diartikan bahwa hubungan tersebut tidak sehat (*unhealthy marriage*). *Toxic relationship* terlihat dari perilaku seperti kekerasan fisik, perselinghuan, perilaku seksual yang tidak pantas, tidak sopan, tidak jujur, dan cenderung untuk mengendalikan pasangan. Ada beberapa cara untuk

meninggalkan *toxic relationship*, diantaranya yaitu bangun dukungan sosial, belajar untuk menjadi mandiri, bersandar dan cerita pada keluarga, teman, dan orang terdekat, dapatkan bantuan dari para profesional, seperti terapis, pengacara, atau penegak hukum, hindari orang yang *toxic*, dan lebih jaga diri setelah keluar dari hubungan yang *toxic* (Feuerman, 2023). Bantuan dari profesional seperti dari seorang terapis dapat dilakukan dengan metode konseling.

Jones memberikan pendapatnya yang diambil dari pendapat Bordin, bahwa konseling adalah proses membantu seseorang untuk memecahkan permasalahannya melalui media wawancara (Jones, 1963). Secara umum konseling merupakan proses pemberian bantuan yang dilakukan oleh seorang konselor kepada seorang klien atau lebih yang dilakukan melalui wawancara konseling yang bermuara pada pemecahan masalah dan pengambilan keputusan oleh klien melalui dirinya sendiri, sehingga klien bermental sehat dan berkepribadian efektif yang dapat merubah perilakunya menjadi lebih baik dan terarah. Konseling bermanfaat untuk membantu individu mencari, menetapkan, dan mengambil keputusan tentang kehidupan keluarga yang sedang dijalani (Mutardho, 2009).

I. Kajian Penelitian Terdahulu

Sudah banyak dilakukan penelitian mengenai model dinamika perceraian. Berikut ini beberapa penelitian terdahulu mengenai dinamika perceraian yang menjadi rujukan peneliti dalam melakukan penelitian.

Tabel 2.5. Kajian Penelitian Terdahulu

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
1	<p>Penelitian dari Haileyeses Tessema, Issaka Haruna, Shaibu Osman, dan Endeshaw Kassa (2022) yang berjudul “A Mathematical Model Analysis of Marriage Divorce.”</p>	<p>Pada penelitian ini sama-sama menggunakan model dinamika perceraian dengan subpopulasi <i>Single, Marriage, dan Divorce</i>.</p>	<p>Populasi dalam artikel jurnal dibagi menjadi empat subpopulasi, yaitu SMBD (<i>Single, Marriage, Broken, dan Divorce</i>), sedangkan pada penelitian ini terdapat penambahan dalam kompartemen <i>Marriage</i> (M) dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu <i>Healthy marriage</i> (H) dan <i>Unhealthy marriage</i> (U_h).</p>

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
2	<p>Penelitian dari Alfred Hugo dan Eva M Lusekelo (2021) yang berjudul <i>"Mathematical Control of Divorce Stress Among Marriage."</i></p>	<p>Pada penelitian ini sama-sama menggunakan model dinamika perceraian dengan memberikan kontrol konseling serta membagi subpopulasi <i>Marriage</i> (M) menjadi dua subpopulasi, yaitu <i>Healthy marriage</i> (H) dan <i>Unhealthy marriage</i> (U_h).</p>	<p>Model dalam artikel jurnal ini populasi dibagi menjadi enam subpopulasi, yaitu $MH U_h CKD$ (<i>Marriage, Healthy marriage, Unhealthy marriage, Counselling, Complexity life, Divorce</i>) dengan memberikan kontrol konseling pada populasi <i>Unhealthy marriage</i> (U_h) dan <i>Complexity life</i> (K). Sedangkan pada penelitian ini, penulis hanya memberikan kontrol pada subpopulasi <i>Unhealthy marriage</i> (U_h).</p>

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
3	<p>Penelitian dari Youming Guo dan Tingting Li (2021) yang berjudul <i>“Optimal Control Strategies for an Online Game Addiction Model with Low and High Risk Exposure.”</i></p>	<p>Pada penelitian ini sama-sama menggunakan kontrol edukasi dan pada subpopulasi yang rentan dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu <i>Healthy marriage</i> (H) dan <i>Unhealthy marriage</i> (U_h).</p>	<p>Model dalam artikel jurnal merupakan model kecanduan game online, sedangkan pada penelitian ini merupakan model dinamika perceraian.</p>

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
4	<p>Penelitian dari Amartya Fierzi Al Addawiyah dan Yusuf Fuad (2023) yang berjudul “Model Dinamik SEARQ Penerapan Kontrol pada Permasalahan Kecanduan Media Sosial.”</p>	<p>Pada penelitian ini sama-sama menggunakan kontrol edukasi dan terdapat pemecahan subpopulasi yang terpapar menjadi dua kompartemen dengan memisalkan proporsi.</p>	<p>Model dalam artikel jurnal merupakan model kecanduan media sosial, sedangkan pada penelitian ini merupakan model dinamika perceraian. Pada penelitian ini subpopulasi yang terpapar (U_h) terbagi menjadi dua kompartemen, yaitu subpopulasi <i>Healthy marriage</i> (H) dan <i>Divorce</i> (D).</p>

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
5	<p>Penelitian dari Riha Nadhifah Minnuril Jannah dan Ardillah Halim (2022) yang berjudul “Edukasi Pra Nikah sebagai Upaya Pencegahan Perceraian Perspektif Hukum Islam dan Hukum Positif.”</p>	<p>Pada penelitian ini sama-sama menggunakan edukasi pranikah sebagai upaya pencegahan atau meminimalisir perceraian yang diterapkan dalam bentuk kontrol optimal.</p>	<p>Artikel jurnal ini merupakan salah satu jurnal psikologi, sedangkan dalam penelitian ini penulis tertarik untuk menggabungkan matematika dengan psikologi yang diaplikasikan dalam model matematika dengan penerapan kontrol optimal.</p>

BAB III

METODE PENELITIAN

Di dalam bab ini, akan diuraikan serangkaian tahapan yang akan dilaksanakan selama proses penelitian, termasuk studi pustaka, pemodelan analisis, dan penggambaran diagram alur penelitian.

A. Metode Penelitian

Studi pustaka, yang dikenal juga sebagai studi literatur, merupakan langkah awal bagi penulis untuk memahami serta mengumpulkan materi terkait model matematika dinamika perceraian. Pendekatan ini mencakup serangkaian aktivitas, mulai dari membaca, mengumpulkan informasi, hingga menganalisis dan menarik kesimpulan dari berbagai sumber penelitian. Dengan demikian, studi ini dilakukan melalui metode studi pustaka untuk dinamika perceraian dengan kontrol edukasi pasca nikah dan penerapan konseling. Selanjutnya, proses ini mencakup pengumpulan bahan referensi yang mendukung pelaksanaan penelitian.

B. Prosedur Penelitian

Untuk mengatasi permasalahan yang ada, adapun langkah-langkah yang digunakan dalam menyelesaikan penelitian ini yang akan dijelaskan secara terperinci dalam tahapan berikut.

1. Studi literatur

Tahap ini bertujuan untuk mengidentifikasi masalah dalam dinamika perceraian melalui pengumpulan teori dengan metode studi pustaka atau studi literatur. Untuk itu, referensi yang digunakan meliputi buku, artikel, jurnal, serta tugas akhir yang relevan dengan penelitian mengenai dinamika perceraian.

2. Mengkontruksi model matematika

Pada bagian kontruksi model matematika dinamika perceraian, penulis memodifikasi dari pemodelan sebelumnya oleh (Tessema, et al., 2022) dan (Hugo & Lusekelo, 2021). Dalam penelitian ini, model dimodifikasi dari SMBD (*Single, Marriage, Broken, Divorce*) mendapatkan tambahan pada kompartemen M (*Marriage*) terpecah menjadi dua kompartemen, yaitu *Healthy Marriage* dan *Unhealthy Marriage* dengan kontrol berupa edukasi pasca nikah dan pemberian konseling.

3. Menyelesaikan masalah kontrol optimal

Beberapa langkah diperlukan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal, yaitu mendefinisikan fungsi tujuan untuk meminimalkan, menetapkan model dinamik dengan mendefinisikan hubungan antara variabel kontrol, variabel *state*, dan waktu seperti yang dinyatakan dalam fungsi $g(t, x(t), u(t))$. Langkah selanjutnya adalah menerapkan metode kontrol optimal menggunakan prinsip-prinsip seperti metode Hamiltonian berdasarkan prinsip maksimum pontryagin untuk merumuskan syarat-syarat optimalitas seperti persamaan *state*, *costate*, dan syarat stasioner. Dengan menyelesaikan masalah kontrol optimal di

atas, akan dicari solusinya berupa kontrol optimal $u(t)$ dengan menyelesaikan persamaan *state* dan *costate*, serta meminimalkan fungsi Hamiltonian untuk mendapatkan sistem yang optimal berupa $\lambda(t)$ dan $u(t)$.

4. Melakukan simulasi numerik

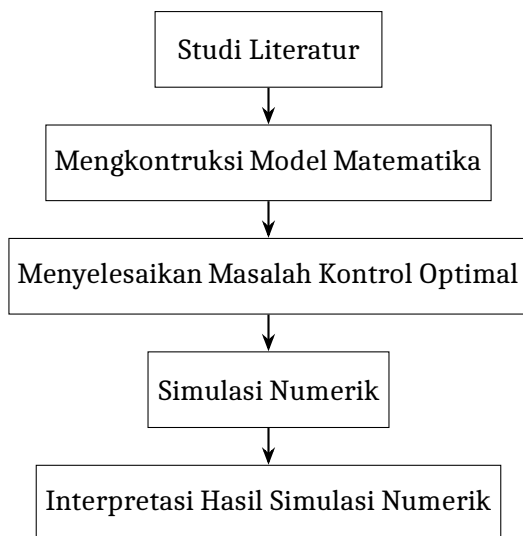
Setelah diperoleh sistem yang optimal, akan dicari penyelesaian simulasi numeriknya menggunakan *software* MATLAB R2013a. Langkah awal dalam menyelesaikan simulasi numerik adalah dengan menentukan variabel dan nilai parameter yang akan digunakan. Penyelesaian simulasi numerik dari suatu model matematika menggunakan metode *sweep* maju mundur, dimana *state* sebagai *forward* atau langkah maju dan *costate* sebagai *backward* atau langkah mundur dengan metode Runge Kutta Orde 4.

5. Menginterpretasi hasil simulasi numerik

Hasil dari simulasi numerik akan menghasilkan grafik yang akan diinterpretasikan ke dalam bahasa yang sederhana dan mudah dipahami untuk membandingkan pengaruh sebelum dan sesudah diberi kontrol.

C. Diagram Alur Penelitian

Berdasarkan tahapan-tahapan yang telah diuraikan di atas, akan disajikan diagram alur penelitian model dinamika perceraian sebagai berikut.



Gambar 3.1: Alur Metode Penelitian

**KONTROL OPTIMAL MODEL DINAMIKA PERCERAIAN
DENGAN EDUKASI PASCA NIKAH DAN PEMBERIAN
KONSELING**

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika



Oleh : **BUNGA NOER INTAN PERMATASARI**
NIM : 2108046002

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2025

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Bunga Noer Intan Permatasari
NIM : 2108046002
Jurusan/Program Studi : Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

KONTROL OPTIMAL MODEL DINAMIKA PERCERAIAN DENGAN EDUKASI PASCA NIKAH DAN PEMBERIAN KONSELING

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 20 Mei 2025
Pembuat pernyataan,



Bunga Noer Intan Permatasari
NIM : 2108046002



KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **KONTROL OPTIMAL MODEL DINAMIKA
PERCERAIAN DENGAN EDUKASI PASCA NIKAH
DAN PEMBERIAN KONSELING**

Penulis : Bunga Noer Intan Permatasari

NIM : 2108046002

Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 13 Juni 2025

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

Aini Fitriyah, M.Sc.

NIP : 19890929 201903 2 021

Penguji II,

Zulaikha, M.Si.

NIP : 19920409 201930 2 027

Penguji III,

Eva Khoirun Nisa, M.Si.

NIP : 19870102 201903 2 010

Penguji IV,

Ariska K. Rachmawati, M.Sc.

NIP : 19890811 201903 2 019

Pembimbing I,

Zulaikha, M.Si.

NIP : 19920409 201930 2 027

NOTA DINAS

Semarang, 21 Mei 2025

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : KONTROL OPTIMAL MODEL DINAMIKA
PERCERAIAN DENGAN EDUKASI PASCA NIKAH
DAN PEMBERIAN KONSELING
Nama : Bunga Noer Intan Permatasari
NIM : 2108046002
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,



Zulaikha, M.Si.

NIP : 19920409 201930 2 027

ABSTRAK

Perceraian merupakan fenomena sosial yang kompleks dengan berbagai faktor penyebab, termasuk ketidakcocokan pasangan, komunikasi yang buruk, masalah ekonomi, dan perselingkuhan. Penelitian ini mengembangkan model matematika dinamika perceraian dengan memodifikasi model SMBD (*Single, Marriage, Broken, Divorce*) dengan penambahan subpopulasi *Healthy Marriage* (H) dan *Unhealthy Marriage* (U_h) yang diadaptasi dari model MHUCKD (*Marriage, Healthy Marriage, Unhealthy Marriage, Counselling, Complexity Life, Divorce*), serta mempertimbangkan kontrol berupa edukasi pasca nikah dan pemberian konseling, sehingga diperoleh model $SMHU_hD$ (*Single, Marriage, Healthy Marriage, Unhealthy Marriage, Divorce*). Kontrol optimal diterapkan untuk meminimumkan subpopulasi *Unhealthy Marriage* (U_h) dan *Divorce* (D). Simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dengan pendekatan Metode *Sweep Maju Mundur* menunjukkan bahwa intervensi edukasi pasca nikah dan pemberian konseling dapat menekan jumlah pernikahan tidak sehat dan perceraian.

Kata kunci : Perceraian, Model Matematika, Kontrol Optimal, Edukasi Pasca Nikah, Pemberian Konseling

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat, hidayah, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Kontrol Optimal Model Dinamika Perceraian dengan Edukasi Pasca Nikah dan Pemberian Konseling". Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.

Penyusunan skripsi ini merupakan bentuk implementasi dari ilmu yang telah diperoleh selama masa perkuliahan serta sebagai kontribusi akademik dalam upaya memahami dan mengoptimalkan langkah-langkah pencegahan dan pengurangan perceraian melalui pendekatan edukasi dan konseling berbasis model matematika.

Penulis menyadari bahwa penyusunan tugas akhir ini tidak terlepas dari bantuan, dukungan, dan bimbingan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Ibu Zulaikha, M.Si., selaku Dosen Pembimbing yang telah meluangkan waktu dan tenaga untuk membimbing penulis selama proses penulisan penuh kesabaran dan kebaikan hati.
2. Seluruh dosen di Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu dan wawasan selama masa perkuliahan, yang menjadi dasar dalam penyusunan skripsi ini.
3. Keluarga tercinta yang selalu memberikan doa, dukungan moral, dan motivasi tanpa henti, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.

4. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah memberikan kontribusi hingga selesainya skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis terbuka terhadap saran dan kritik yang membangun. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak dan menjadi kontribusi yang positif dalam pengembangan ilmu pengetahuan di bidang kontrol optimal serta dapat dikembangkan bagi peneliti-peneliti selanjutnya.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iii
NOTA PEMBIMBING I	iv
ABSTRAK	v
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR TABEL	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xv
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Rumusan Masalah	10
C. Tujuan Penelitian	11
D. Manfaat Penelitian	11
E. Batasan Masalah	13
BAB II LANDASAN PUSTAKA	14
A. Persamaan Diferensial	14
B. Sistem Persamaan Diferensial	18
C. Teori Kontrol Optimal	22
D. Metode Runge-Kutta	36
E. Metode <i>sweep</i> Maju Mundur	38
F. Model Matematika	40
G. Model Matematika Dinamika Perceraian	41
H. Perceraian	52
I. Kajian Penelitian Terdahulu	55
BAB III METODE PENELITIAN	61
A. Metode Penelitian	61
B. Prosedur Penelitian	61
C. Diagram Alur Penelitian	63
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	65

A.	Mengkontruksi Model Matematika Dinamika Perceraian .	65
B.	Analisis Kontrol Optimal	79
C.	Interpretasi Hasil Simulasi Numerik	86
BAB V	KESIMPULAN	118
A.	Kesimpulan	118
B.	Saran	120
DAFTAR PUSTAKA		121
Lampiran-lampiran.....		127

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul	Halaman
Tabel 2.1	Variabel Model Matematika SMBD (<i>Single - Marriage - Broken - Divorce</i>)	42
Tabel 2.2	Parameter Model Matematika SMBD (<i>Single - Marriage - Broken - Divorce</i>)	42
Tabel 2.3	Variabel Model Matematika MHUCKD (<i>Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Counselling - Complexity life - Divorced</i>)	46
Tabel 2.4	Parameter Model Matematika MHUCKD (<i>Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Counselling - Complexity life - Divorced</i>)	47
Tabel 2.5	Kajian Penelitian Terdahulu	56
Tabel 4.1	Variabel Model Matematika $SMHU_hD$ (<i>Single - Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Divorce</i>)	68
Tabel 4.2	Parameter Model Matematika $SMHU_hD$ (<i>Single - Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Divorce</i>)	68
Tabel 4.3	Nilai Awal Subpopulasi pada Model $SMHU_HD$ (<i>Single - Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Divorce</i>)	86

Tabel 4.4	Nilai Parameter pada Model $SMH U_H D$ (<i>Single - Marriage - Healthy Marriage -</i> <i>Unhealthy Marriage - Divorce</i>)	87
-----------	--	----

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
Gambar 1.1	Diagram Batang Kasus Perceraian di Provinsi Jawa Tengah pada Tahun 2020-2022	2
Gambar 2.1	Diagram Kompartemen Model SMBD (<i>Single - Marriage - Broken - Divorce</i>)	41
Gambar 2.2	Diagram Kompartemen Model MHUCKD (<i>Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Counselling - Complexity life - Divorced</i>)	46
Gambar 3.1	Alur Metode Penelitian	64
Gambar 4.1	Diagram Kompartemen Model SMHU _h D (<i>Single - Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Divorce</i>)	67
Gambar 4.2	Grafik Subpopulasi <i>Single</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	88
Gambar 4.3	Grafik Subpopulasi <i>Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	89
Gambar 4.4	Grafik Subpopulasi <i>Healthy Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	91
Gambar 4.5	Grafik Subpopulasi <i>Unhealthy Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	92
Gambar 4.6	Grafik Subpopulasi <i>Divorce</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	93

Gambar 4.7	Grafik Simulasi Kontrol u_1 berupa Edukasi Pasca Nikah	94
Gambar 4.8	Grafik Simulasi Kontrol u_2 berupa Pemberian Konseling	95
Gambar 4.9	Grafik Subpopulasi <i>Single</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	96
Gambar 4.10	Grafik Subpopulasi <i>Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	97
Gambar 4.11	Grafik Subpopulasi <i>Healthy Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	98
Gambar 4.12	Grafik Subpopulasi <i>Unhealthy Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	99
Gambar 4.13	Grafik Subpopulasi <i>Divorce</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	100
Gambar 4.14	Grafik Simulasi Kontrol u_1 berupa Edukasi Pasca Nikah	101
Gambar 4.15	Grafik Simulasi Kontrol u_2 berupa Pemberian Konseling	102
Gambar 4.16	Grafik Subpopulasi <i>Single</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	103
Gambar 4.17	Grafik Subpopulasi <i>Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	104
Gambar 4.18	Grafik Subpopulasi <i>Healthy Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	105
Gambar 4.19	Grafik Subpopulasi <i>Unhealthy Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	106
Gambar 4.20	Grafik Subpopulasi <i>Divorce</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	107

Gambar 4.21	Grafik Simulasi Kontrol u_1 berupa Edukasi Pasca Nikah	108
Gambar 4.22	Grafik Simulasi Kontrol u_2 berupa Pemberian Konseling	109
Gambar 4.23	Grafik Subpopulasi <i>Single</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	110
Gambar 4.24	Grafik Subpopulasi <i>Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	111
Gambar 4.25	Grafik Subpopulasi <i>Healthy Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	112
Gambar 4.26	Grafik Subpopulasi <i>Unhealthy Marriage</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	113
Gambar 4.27	Grafik Subpopulasi <i>Divorce</i> Sebelum dan Sesudah Kontrol	114
Gambar 4.28	Grafik Simulasi Kontrol u_1 berupa Edukasi Pasca Nikah	115
Gambar 4.29	Grafik Simulasi Kontrol u_2 berupa Pemberian Konseling	116

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 Perhitungan dengan Matlab untuk Mencari <i>Costate</i>	127
Lampiran 2 Pengecekan Kontrol u_1 berupa Edukasi Pasca Nikah dan u_2 berupa Pemberian Konseling	129
Lampiran 3 Listing Program SMH U_h D	130
Lampiran 4 Daftar Riwayat Hidup	139

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Perceraian merupakan masalah kompleks yang memiliki keterkaitan erat dengan kehidupan sosial serta budaya dalam masyarakat. Perceraian tidak hanya berpengaruh pada individu yang bersangkutan, tetapi juga berdampak pada keluarga dan orang terdekat. Perceraian di Indonesia menunjukkan dinamika dalam hubungan suami istri serta gabungan antara agama, budaya, dan sistem hukum yang berlaku. Sebagai negara dengan mayoritas penduduk beragama Islam, hukum Islam berperan penting dalam mengendalikan perceraian. Oleh karena itu, penting untuk memahami hukum Islam tentang perceraian yang terjadi di Indonesia (Aulana, dkk., 2024).

Dalam hukum Islam, perceraian disebut *thalaq*, yang berarti memutuskan ikatan (*hall al-Qaid*), yaitu pemutusan hubungan pernikahan melalui kata-kata yang telah ditetapkan (Abdurrahman, 2011). Dalam Islam terdapat dua jenis perceraian, yaitu cerai gugat dan cerai talak. Cerai gugat adalah perceraian yang terjadi ketika istri (pemohon) mengajukan permohonan ke Pengadilan Agama, dan suami (termohon) memberikan persetujuannya, sehingga Pengadilan Agama memutuskan untuk mengabulkan permohonan yang diajukan oleh pemohon (istri) (Ali, 2006). Pada pasal 114 KHI menjelaskan bahwa cerai talak adalah putusnya ikatan perkawinan akibat talak atau melalui gugatan perceraian. Lebih lanjut, Pasal 117 KHI menyatakan bahwa talak merupakan ikrar suami di depan Pengadilan Agama

yang menjadi salah satu sebab berakhirnya perkawinan.

Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI), kata "cerai" diartikan sebagai perpisahan atau putusnya hubungan sebagai suami istri, atau talak. Sementara itu, "perceraian" bermakna perpisahan, perihal bercerai, baik antara suami istri maupun bentuk perpecahan lainnya. Hurlock (2011) menyatakan bahwa perceraian merupakan akhir suatu pernikahan ketika suami dan istri tidak lagi menemukan jalan keluar atas masalah-masalah mereka, sehingga pernikahan tersebut tidak lagi membawa kebahagiaan.

Dalam beberapa tahun terakhir, kasus perceraian di Indonesia cenderung mengalami peningkatan khususnya di Jawa Tengah. Berdasarkan data dari buku "Provinsi Jawa Tengah Dalam Angka 2023", jumlah kasus perceraian disajikan dalam bentuk diagram batang berikut.



Gambar 1.1: Diagram Batang Kasus Perceraian di Provinsi Jawa Tengah pada Tahun 2020-2022

Dinamika meningkatnya angka perceraian tidak dapat dipisahkan dari faktor-faktor internal maupun eksternal tiap

individu. Berdasarkan data dari Badan Pusat Statistik (BPS) Jawa Tengah yang bersumber dari Direktorat Jenderal Badan Peradilan Agama per 1 Februari 2023, terdapat beberapa faktor yang dapat memicu perceraian, diantaranya adalah zina, kebiasaan minum alkohol, narkoba, perjudian, meninggalkan salah satu pasangan, pidana penjara, poligami, Kekerasan Dalam Rumah Tangga (KDRT), cacat fisik, perselisihan atau pertengkaran secara terus menerus, nikah paksa, murtad, serta ketidakstabilan ekonomi. Sementara itu, para ahli seperti Nakamura (1989), Turner & Helms (1995), serta Sudarto & Wirawan (2001) mengemukakan bahwa beberapa faktor yang menyebabkan perceraian meliputi kekerasan verbal, masalah atau kekerasan ekonomi, keterlibatan dalam perjudian, penyalahgunaan minuman keras, dan perselingkuhan.

Meskipun perceraian itu diperbolehkan menurut syariat Islam, tetapi perceraian sangat dibenci Allah. Seperti dalam Hadist yang diriwayatkan oleh Abu Hurairah, Rasulullah saw. bersabda: *“Sesungguhnya Allah membenci perceraian, tetapi Allah tetap menghalalkan yang halal dan mengharamkan yang haram. Dan jika seseorang mengharamkan halal atau menghalalkan haram, maka sungguh dia telah kafir dengan apa yang telah diturunkan Allah.”* (HR. Abu Daud). Hadist ini mengingatkan umat Muslim akan pentingnya menjaga pernikahan kecuali dalam situasi yang terpaksa. Selanjutnya apabila dalam suatu hubungan perkawinan terjadi perselisihan, maka alangkah baiknya apabila ada penengahnya seperti yang dijelaskan dalam surat An-Nisa’ ayat 35 sebagai berikut:

Artinya: *“Jika kamu (para wali) khawatir terjadi persengketaan di antara keduanya, utuslah seorang juru damai dari keluarga laki-laki dan seorang juru damai dari keluarga perempuan. Jika*

وَأِنْ خِفْتُمْ شِقَاقَ بَيْنِهِمَا فَابْعَثُوا حَكَمًا مِّنْ أَهْلِهِ وَحَكَمًا مِّنْ أَهْلِهَا
إِنْ يُرِيدَا إِصْلَاحًا يُوَفِّقِ اللَّهُ بَيْنَهُمَا إِنَّ اللَّهَ كَانَ عَلِيمًا خَبِيرًا ﴿٣٥﴾

keduanya bermaksud melakukan islah (perdamaian), niscaya Allah memberi taufik kepada keduanya. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Maha Teliti.” (Q.S An-Nisa’ : 35)

Ayat ini menegaskan apabila terjadi suatu permasalahan atau perselisihan antara suami dan istri jangan sampai membuat keduanya memilih untuk bercerai. Akan tetapi utuslah seorang hakam (perantara, juru damai) dari masing-masing keluarga agar berdamai dan bisa kembali utuh sebagai suami istri (Haidar, 2016).

Apabila pasangan suami istri tetap memutuskan bercerai, maka sesungguhnya Allah Maha Mendengar dan Maha Mengetahui seperti dalam surat Al-Baqarah ayat 226-227 berikut:

لِّلَّذِينَ يُؤْلُونَ مِن نِّسَائِهِمْ تَرَبُّصُ أَرْبَعَةِ أَشْهُرٍ فَإِنْ فَاءُوا فَإِنَّ اللَّهَ
غَفُورٌ رَّحِيمٌ ﴿٢٢٦﴾ وَإِنْ عَزَمُوا الطَّلَاقَ فَإِنَّ اللَّهَ سَمِيعٌ عَلِيمٌ ﴿٢٢٧﴾

Artinya: “Orang yang meng-ila’ (bersumpah tidak mencampuri) istrinya diberi tenggang waktu empat bulan. Jika mereka kembali (mencampuri istrinya), sesungguhnya Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang. Jika mereka berketetapan hati untuk bercerai, sesungguhnya Allah Maha Mendengar lagi Maha Mengetahui.” (Q.S Al-Baqarah : 226-227)

Apabila seorang suami bersumpah tidak mencampuri urusan istrinya (berhubungan) maka perbuatan tersebut termasuk zalim dan tidak bisa dibiarkan berlarut-larut. Jika sudah mendekati

empat bulan sejak sumpah, maka suami harus mengambil keputusan untuk kembali bersama istrinya dengan membayar kafarat sumpah atau bercerai (Al Sofwa, 2009). Apabila suami memilih untuk bercerai, hendaklah cerai secara baik-baik, agar istri tidak merasa teraniaya, karena Allah Maha Mendengar dan Maha Mengetahui.

Kemajuan teknologi dan ilmu matematika memudahkan manusia untuk mensimulasikan masalah-masalah kompleks yang muncul dalam kehidupan sehari-hari, serta mengukur berbagai fenomena yang terjadi di alam semesta (Ndii, 2018). Model matematika adalah salah satu cabang ilmu matematika yang menyediakan solusi untuk permasalahan kehidupan sehari-hari (Aswan, 2018). Fenomena dunia nyata dapat direpresentasikan dalam bentuk matematis untuk memudahkan pemahaman terhadap permasalahan yang muncul (Kurniawati & Rosyidi, 2019). Model matematika dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang, termasuk fisika, biologi dan kedokteran, ilmu sosial dan politik, ekonomi, bisnis, keuangan, serta masalah jaringan komputer (Widowati, 2007). Salah satu contoh aplikasi permasalahan yang dapat dimodelkan secara matematis dalam bidang sosial adalah dinamika perceraian. Suatu perceraian dapat diminimumkan dengan penambahan kontrol sehingga didapatkan hasil yang optimal.

Kontrol optimal yang fokus pada ilmu teknik dan matematika merupakan pengoptimalan dalam suatu proses untuk mencapai hasil yang terbaik (Saraswati & Kamiran, 2017). Pengelolaan proses perceraian yang optimal penting dilakukan untuk meminimalkan dampak negatif yang ditimbulkan, termasuk menekan angka pernikahan tidak sehat dan perceraian. Melalui

penerapan kontrol optimal, diharapkan permasalahan tersebut dapat diminimalkan. Mengingat fokus penelitian ini adalah pada pasangan beragama Islam, maka pemberian edukasi pasca nikah kepada kedua pasangan menjadi langkah strategis dalam upaya pencegahan perceraian. Setelah menikah, suami dan istri memiliki hak dan kewajiban masing-masing (Jannah & Halim, 2022). Pendidikan pasca menikah penting, karena dengan mengikuti pendidikan pasca nikah maka pasangan mengetahui keistimewaan dan kewajibannya (Hasan, 2003).

Ng Pui Khim (2024) memaparkan ada beberapa tanda atau gejala dari pernikahan tidak sehat (*Unhealthy Marriage*) yang dapat memicu perceraian, diantaranya adalah susah melakukan komunikasi, keintiman antarindividu berkurang atau bahkan tidak ada, lebih memilih menghabiskan waktu di luar dibandingkan di rumah bersama pasangan, setiap tindakan yang dilakukan terasa menyebalkan, pasangan akan merasa jauh dan asing meskipun dalam satu ruangan, memiliki perbedaan nilai, kepercayaan, dan tujuan, ada sikap saling kritik, menghina, defensif, dan diam, serta ada kekerasan seksual, kecanduan judi maupun alkohol, dan perzinahan. Langkah yang paling efektif untuk mengatasi *Unhealthy Marriage* salah satunya adalah dengan dilakukannya konseling.

Konseling adalah proses di mana konselor memberikan bantuan kepada klien melalui wawancara konseling untuk membantu klien dalam memecahkan masalah dan mengambil keputusan secara mandiri, sehingga klien sehat, berkepribadian efektif, serta mengubah perilakunya menjadi lebih baik. Konseling dapat diberikan kepada siapa saja yang merasa kesulitan menghadapi suatu situasi atau tekanan emosional, termasuk dalam hubungan pernikahan. Konseling dalam pernikahan dapat

dikelompokkan ke dalam konseling fungsi pemahaman dan pencegahan di bidang kehidupan berkeluarga. Konseling dalam kehidupan berkeluarga diharapkan dapat membantu individu untuk mencari, menetapkan, dan mengambil keputusan tentang kehidupan keluarga yang sedang dijalani (Murtadho, 2009). Pada penelitian ini, konseling yang diberikan adalah konseling individual, yaitu proses penyediaan dukungan melalui wawancara konseling oleh seorang konselor kepada klien, dengan tujuan membantu klien mengatasi masalah yang dihadapinya. Bantuan konseling ini dilakukan secara *face to face relationship* (hubungan empat mata) (Amti, 1999).

Edukasi pasca nikah dan pemberian konseling individual merupakan dua bentuk intervensi yang berbeda dalam menjaga keutuhan rumah tangga. Edukasi pasca nikah bersifat preventif (pencegahan) dan diberikan kepada pasangan suami istri setelah pernikahan, dengan tujuan membekali mereka pengetahuan mengenai peran keluarga, komunikasi yang efektif, manajemen konflik, hingga pengasuhan anak (Nabila, dkk., 2024). Di sisi lain, pemberian konseling individual bersifat kuratif (penanganan) dan ditujukan kepada salah satu pihak yang mengalami masalah dalam pernikahan, seperti tekanan psikologis, ketidakharmonisan, atau konflik emosional. Konseling ini bersifat lebih personal dan berfokus pada pemulihan kondisi psikologis individu serta penyelesaian masalah rumah tangga secara bertahap (Andriyani, 2018). Dengan demikian, intervensi edukasi pasca nikah dan pemberian konseling ini diharapkan dapat meminimalkan jumlah perceraian.

Penelitian mengenai dinamika perceraian telah banyak dilakukan oleh para ilmuwan. Pada tahun 2021, Alfred Hugo

dan Eva M. Lusekelo melakukan penelitian model MHUCKD (*Marriage, Healthy Marriage, Unhealthy Marriage, Counselling, Complexity Life, Divorce*) dengan membagi populasi menjadi enam kompartemen, yaitu individu yang telah menikah (M), individu yang pernikahannya sehat (H), individu yang pernikahannya tidak sehat (U), individu yang pernikahannya banyak perselisihan memutuskan untuk melakukan konseling (C), individu yang stres dan mengalami kesulitan atau kompleksitas dalam kehidupan pernikahannya (K), dan individu yang memutuskan untuk bercerai (D). Dalam penelitian tersebut, perceraian dapat diminimalkan dengan memberikan konseling, sehingga jumlah pernikahan yang sehat akan meningkat sedangkan pernikahan yang tidak sehat dan kompleksitas akan turun.

Pada tahun 2022, Tessema, dkk. melakukan penelitian model SMBD (*Single, Marriage, Broken, Divorce*) dengan membagi populasi menjadi empat kompartemen, yaitu individu yang sudah mencapai umur untuk menikah (S), individu yang memutuskan untuk menikah (M), individu yang pisah ranjang, tapi tidak bercerai (B), dan individu yang memutuskan untuk bercerai (D). Pada penelitian Tassema, untuk mengurangi atau mengendalikan perceraian dalam suatu populasi baiknya dilakukan dengan mengurangi kontak antara individu yang menikah dengan yang bercerai serta mendidik individu yang pisah ranjang tapi tidak bercerai (*Broken*) untuk menahan diri dari perceraian dan memperbaiki perkawinannya.

Penelitian model dinamika perceraian dengan model kecanduan game online milik Guo dan Li ternyata memiliki kesamaan dalam pemberian kontrolnya, yaitu sama sama menerapkan kontrol edukasi. Pada tahun 2021, Youming Guo dan

Tingting Li melakukan penelitian tentang strategi kontrol optimal terhadap kecanduan game online dengan mempertimbangkan paparan risiko rendah dan tinggi. Penelitian ini membedakan populasi berdasarkan tingkat kerentanan terhadap kecanduan game online. Dalam artikel jurnal diaplikasikan tiga kontrol untuk meminimalkan individu yang kecanduan game online, yaitu dengan isolasi, edukasi, dan pengobatan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kecanduan game online dapat diminimalisir apabila tindakan isolasi dilakukan bersamaan dengan edukasi dan pengobatan. Selanjutnya pada tahun 2023, Amartya Fierzi dan Yusuf Fuad melakukan penelitian model SEARQ (*Susceptible, Exposed, Addicted, Recovered, Quit*) dengan penerapan kontrol pada permasalahan kecanduan media sosial. Dalam artikel jurnal, populasi dibagi menjadi lima kompartemen, yaitu subpopulasi rentan kecanduan media sosial (S), subpopulasi terpapar media sosial (E), subpopulasi kecanduan media sosial (A), subpopulasi pulih dari kecanduan media sosial (R), dan subpopulasi berhenti menggunakan media sosial (Q). Dalam penelitian ini diberikan kontrol berupa edukasi dan pengobatan. Setelah dilakukan penelitian, didapatkan kesimpulan bahwa kecanduan media sosial dapat diminimalisir dengan pemberian edukasi tentang efek negatif media sosial melalui sosialisasi dan dilakukan pengobatan seperti rehabilitasi dan pembatasan penggunaan media sosial dilakukan secara bersamaan.

Berdasarkan penelitian terdahulu, penulis tertarik untuk modifikasi model SMBD oleh Tessema, et al. dengan membagi subpopulasi menikah menjadi dua subpopulasi, yaitu *Healthy Marriage* dan *Unhealthy Marriage* seperti dalam artikel jurnal milik (Hugo & Lusekelo, 2021). Pada penelitian ini, penulis akan

membagi populasi menjadi lima kompartemen, yaitu subpopulasi yang belum pernah menikah dan berusia minimal 19 tahun (S), subpopulasi yang memutuskan menikah (M), subpopulasi yang pernikahan sehat yang ditandai dengan komunikasi yang baik dan saling menghormati serta menjaga kepercayaan (H), subpopulasi yang pernikahan tidak sehat ditandai dengan sering terjadi perselisihan dan sering menyakiti secara verbal (U_h), serta subpopulasi yang bercerai sebab dalam menjalani hubungan pernikahan tidak ditemukan solusi untuk permasalahan yang sedang dihadapi (D). Dalam penelitian ini penulis juga tertarik untuk menambahkan dua kontrol diantaranya yaitu pemberian edukasi pasca nikah untuk mengetahui keistimewaan dan kewajiban individu yang telah menikah dengan tujuan untuk menghindari adanya perselisihan antar pasangan (Hasan, 2003) dan pemberian konseling untuk membantu individu mencari, menetapkan, dan mengambil keputusan tentang kehidupan keluarga yang sedang dijalani (Mutardho, 2009).

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, didapatkan rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana kontruksi model dinamika perceraian dengan mempertimbangkan edukasi pasca nikah dan pemberian konseling?
2. Bagaimana penyelesaian masalah kontrol optimal model $SMHU_hD$ pada dinamika perceraian dengan mempertimbangkan edukasi pasca nikah dan pemberian konseling?

3. Bagaimana interpretasi hasil simulasi numerik sebelum dan sesudah kontrol optimal model dinamika perceraian dengan edukasi pasca nikah dan pemberian konseling?

C. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dipaparkan di atas, tujuan penelitian yang ingin dicapai adalah sebagai berikut:

1. Mengkontruksi model dinamika perceraian dengan mempertimbangkan edukasi pasca nikah dan pemberian konseling.
2. Menyelesaikan masalah kontrol optimal pada model $SMHU_hD$ pada dinamika perceraian dengan mempertimbangkan edukasi pasca nikah dan pemberian konseling.
3. Mengetahui interpretasi hasil simulasi numerik sebelum dan sesudah kontrol optimal model dinamika perceraian dengan edukasi pasca nikah dan pemberian konseling.

D. Manfaat Penelitian

1. Manfaat Praktis

Untuk memperoleh gambaran suatu fenomena dinamika perceraian dalam dunia nyata menjadi bentuk sederhana dalam bahasa matematika serta memprediksi bagaimana meminimalkan konflik dan memaksimalkan hubungan pernikahan yang sehat (*healthy relationship*) dengan

pemberian kontrol berupa edukasi pasca nikah dan pemberian konseling dengan perhitungan matematika.

2. Manfaat Keilmuan dan Akademis

Secara keilmuan (teori), penelitian ini dapat memberikan wawasan tentang model $SMHU_hD$ pada dinamika perceraian dengan kontrol edukasi pasca nikah dan pemberian konseling. Secara akademis, penelitian ini memberikan khasanah bagi Fakultas Sains dan Teknologi khususnya di jurusan Matematika yang membahas tentang pemodelan dinamika perceraian.

3. Manfaat bagi Penulis

Sebagai proses memperdalam tentang pengetahuan model $SMHU_hD$ pada dinamika perceraian dengan kontrol edukasi pasca nikah dan pemberian konseling.

4. Manfaat bagi Mahasiswa Matematika

Memperluas pemahaman bidang keilmuan yang telah dipelajari di ranah persamaan diferensial terutama dalam pemodelan dinamika perceraian dengan pemberian kontrol edukasi pasca nikah dan pemberian konseling.

5. Bagi Peneliti Selanjutnya

Diharapkan proposal ini dapat memperluas pengetahuan serta menyediakan informasi mengenai penerapan kontrol edukasi pasca nikah dan pemberian konseling pada model matematis dinamika perceraian.

E. Batasan Masalah

Batasan masalah dalam proposal ini mencakup objek yang akan dimodelkan dalam penelitian, yaitu:

1. Penelitian ini berfokus pada perceraian dalam agama Islam.
2. Model yang dipakai adalah model $SMH U_h D$ (*Single, Marriage, Healthy Marriage, Unhealthy Marriage, Divorce*) dengan kontrol edukasi pasca nikah dan pemberian konseling.
3. Populasi bersifat tertutup, sehingga tidak ada migrasi dan emigrasi.
4. Berdasarkan UU No. 16 Tahun 2019, subpopulasi *Single* (S) didefinisikan sebagai individu dengan usia minimal 19 tahun.
5. Subpopulasi *Healthy Marriage* (H) merupakan hubungan pernikahan yang stabil dan memuaskan yang dibangun di atas persahabatan kuat yang aman, tentram, penuh kasih sayang, penuh gairah, saling menghormati, dan saling percaya, ditandai dengan kemampuan menegosiasikan perbedaan dan menyelesaikan konflik tanpa adanya kekerasan dalam rumah tangga (Harris et al., 2008).
6. Subpopulasi *Unhealthy Marriage* (U_h) ditandai dengan susahny melakukan komunikasi, sehingga keintiman antarindividu berkurang yang menyebabkan hilangnya kepercayaan dan timbulnya berbagai perseteruan (Khim, 2024).

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

A. Persamaan Diferensial

Definisi 2.1.1 (*Differential Equation, e.g (Ross, 1984)*)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel terikat (y) terhadap satu atau lebih variabel bebas (x).

Salah satu contoh penerapan persamaan diferensial dalam kehidupan sehari-hari adalah laju pertumbuhan suatu populasi, seperti populasi dari manusia, binatang, dan bakteri karena tidak ada hambatan terhadap pertumbuhan. Contoh pengaplikasiannya adalah sebagai berikut. Apabila suatu populasi tumbuh pada waktu t ($x(t)$), maka $x'(t) = \frac{dx}{dt}$. Di mana laju perubahan pertumbuhan populasi dimisalkan dengan $x'(t)$ yang merupakan turunan dari populasi $x(t)$ terhadap waktu t , maka model populasinya merupakan suatu persamaan diferensial, yaitu $x'(t) = x(t)$ dengan solusi dari persamaan diferensial adalah $x(t) = (ce^t)$, dengan c adalah konstanta. Solusi ini menunjukkan bahwa populasi $x(t)$ bertumbuh secara eksponensial seiring waktu t , dengan kecepatan yang semakin meningkat karena pangkat e^t . Artinya, jika populasinya kecil, maka kecepatan pertumbuhannya lambat namun jika populasinya bertambah, kecepatan pertumbuhan semakin besar (Maya, 2014).

Definisi 2.1.2 (*Ross, 1984*)

Orde atau pangkat suatu persamaan diferensial merujuk pada pangkat tertinggi dari turunan yang terdapat dalam persamaan

tersebut.

Penentuan pangkat suatu persamaan diferensial ditentukan oleh fungsi turunan pada persamaan diferensial tersebut. Apabila suatu persamaan memuat beberapa turunan, orde persamaan tersebut ditentukan oleh turunan yang mempunyai pangkat tertinggi.

Contoh 2.1.3 Berikut adalah contoh dari persamaan diferensial orde kedua:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Berdasarkan contoh di atas, turunan tertinggi adalah turunan kedua, yaitu $\frac{d^2y}{dx^2}$. Jadi, orde dari persamaan ini adalah 2 (orde kedua).

Dilihat dari jumlah variabel yang terlibat, persamaan diferensial dibedakan menjadi dua, yaitu PDB, yang melibatkan satu variabel, dan PDP, yang melibatkan lebih dari satu variabel. Berikut akan diuraikan secara detail mengenai Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Prasional (PDP).

1. Persamaan Diferensial Biasa

Definisi 2.1.4 (Ross, 1984)

Persamaan yang mencakup turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu variabel bebas disebut persamaan diferensial biasa. Berikut merupakan bentuk umum dari PDB:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad (2.1)$$

Contoh 2.1.5 Berikut adalah contoh dari Persamaan Diferensial Biasa (PDB).

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 7\frac{dy}{dt} - 4y = 0$$

Berdasarkan contoh di atas, variabel bebas adalah t , sementara variabel terikatnya adalah y .

a. Persamaan Diferensial Biasa Linear

Definisi 2.1.6 (PDB Linear, e.g (Ross, 1984))

Persamaan diferensial biasa linear berorde n yang melibatkan variabel terikat y dan variabel bebas x dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x) \quad (2.2)$$

dengan syarat $a_0 \neq 0$ dan n adalah bilangan bulat positif.

Contoh 2.1.7 Berikut adalah contoh dari persamaan diferensial biasa linear.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Contoh di atas dikatakan PDB linear karena hanya melibatkan turunan fungsi $y(x)$ terhadap satu variabel bebas x dan setiap suku dari y dan turunannya muncul secara linear.

b. Persamaan Diferensial Biasa Non Linear

Apabila suatu persamaan biasa memenuhi setidaknya salah satu dari kriteria berikut, maka persamaan dikatakan persamaan diferensial non linear (Ross, 1984):

- a. Terdapat variabel terikat (y) yang memiliki turunan berpangkat lebih dari satu. Misalnya pada persamaan $\frac{dy}{dx} = y^2 + 3$ menunjukkan bahwa variabel terikat y berada dalam pangkat lebih dari satu (kuadrat).
- b. Terdapat perkalian dari variabel terikat dan atau turunan-turunannya. Contohnya pada persamaan $\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{dy}{dx} = x$ menunjukkan adanya perkalian antara variabel terikat y dan turunannya.
- c. Terdapat fungsi transendental (fungsi yang tidak dapat dinyatakan sebagai solusi aljabar dari persamaan polinomial, seperti fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi trigonometri, dll) dari variabel terikat dan turunan-turunannya. Misalnya $\frac{dy}{dx} = e^y + x$, di mana dalam contoh ini, e^y adalah fungsi transendental yang menyebabkan ketidaklinieran.

Contoh 2.1.8 Berikut adalah contoh lain dari persamaan diferensial biasa non linear:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} - 6y^2 = 0$$

Berdasarkan contoh di atas, persamaan dikatakan sistem persamaan diferensial non linear karena memenuhi kriteria a, yaitu terdapat variabel terikat

y pada suku $-6y^2$ yang memuat bentuk kuadrat atau berpangkat lebih dari satu yaitu y^2 .

2. Persamaan Diferensial Parsial

Definisi 2.1.9 (PDP, (Ross, 1984))

Persamaan Diferensial Parsial (PDP) merupakan suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan parsial dari satu atau lebih variabel terikat terhadap lebih dari satu variabel bebas.

Contoh 2.1.10 Berikut merupakan contoh dari Persamaan Diferensial Parsial (PDP).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Berdasarkan contoh di atas, variabel terikat yang termuat adalah u dan variabel bebas yang termuat adalah x dan y dengan pangkat tertinggi dari turunannya adalah 2.

B. Sistem Persamaan Diferensial

Sistem Persamaan Diferensial (Sistem PD) adalah sekumpulan persamaan diferensial yang saling terkait dan biasanya melibatkan dua atau lebih variabel. Pada sistem ini, setiap persamaan dapat menggambarkan hubungan antara perubahan satu variabel terhadap variabel lainnya (Braun, 1993). Menurut (Boyce, et al., 2009), sistem persamaan diferensial dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (2.3)$$

Di mana t adalah variabel bebas dan (y_1, y_2, \dots, y_n) adalah variabel terikat, serta (f_1, f_2, \dots, f_n) adalah fungsi yang mendefinisikan laju perubahan setiap variabel terikat terhadap variabel bebas dan variabel terikat lainnya. Sistem persamaan diferensial sendiri terbagi menjadi dua, yaitu:

1. Sistem Persamaan Diferensial Linear

Definisi 2.2.1 (Ross, 1984)

Sistem persamaan diferensial linear merupakan sekumpulan dari persamaan diferensial yang dapat dinyatakan dalam bentuk linear.

Bentuk umum dari sistem persamaan diferensial linear adalah sebagai berikut (Ross, 1984):

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \dots + a_{1n}(t)y_n + f_1(t) \\ \frac{dy_2}{dt} = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \dots + a_{2n}(t)y_n + f_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \dots + a_{nn}(t)y_n + f_n(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

Masing-masing persamaan hanya mengandung kombinasi linear dari fungsi y_1, y_2, \dots, y_n serta tidak ada perkalian antar fungsi tak diketahui dan turunannya, sehingga sistem

persamaan diferensial ini disebut linear.

Persamaan (2.4) dapat diekspresikan dalam bentuk:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\vec{y} + \vec{f}(t) \quad (2.5)$$

Dari persamaan (2.5) dapat direpresentasikan ke dalam bentuk matriks sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Contoh 2.2.2 Berikut merupakan contoh dari SPD linear.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Contoh pada persamaan (2.7) dikatakan SPD linear karena turunan dari fungsi-fungsi tak diketahui $x(t)$ dan $y(t)$ berpangkat satu.

2. Sistem Persamaan Diferensial Non Linear

Definisi 2.2.3 (Boyce & DiPrima, 2017)

Sistem persamaan diferensial non linear adalah sistem yang terdiri dari beberapa persamaan diferensial dimana variabel yang tidak diketahui dan turunannya muncul dalam bentuk non linear yang melibatkan perkalian, pangkat, fungsi non linear (eksponensial, logaritma, atau trigonometri).

Menurut Strogatz (1994), bentuk umum dari sistem persamaan diferensial non linear dapat dituliskan sebagai:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t)$$

Di mana $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, yaitu variabel-variabel terikat yang tergantung pada waktu t dan f adalah fungsi non linear antara variabel terikat dan waktu. Berdasarkan bentuk umum di atas, dapat juga diuraikan sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \end{cases} \quad (2.8)$$

Di mana variabel y_1, y_2, \dots, y_n merupakan variabel terikat yang dipengaruhi oleh waktu, sedangkan variabel t merupakan variabel bebas. Setiap fungsi f_i , dimana $i = 1, 2, \dots, n$ mendefinisikan laju perubahan dari variabel y_i terhadap waktu. Bentuk umum ini mencakup berbagai variabel terikat yang saling mempengaruhi satu sama lain seiring waktu.

Contoh 2.2.4 Berikut merupakan contoh dari SPD non linear.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1^2 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 x_2 - 3x \end{cases} \quad (2.9)$$

Contoh pada persamaan (2.9) dikatakan SPD non linear karena pada persamaan pertama, terdapat suku x_1^2 yang

merupakan pangkat dua dari x_1 . Sedangkan pada persamaan kedua, terdapat perkalian dari dua fungsi yaitu suku x_1x_2 .

C. Teori Kontrol Optimal

Kontrol optimal merupakan metode optimasi yang diterapkan untuk memperoleh hasil yang optimal dalam suatu sistem. Kontrol optimal berfokus pada pencarian kebijakan kontrol yang meminimalkan atau memaksimalkan suatu fungsi tujuan dalam sistem yang dinamis (Saraswati, dkk., 2017). Kontrol optimal berkembang maju mulai dari era perang dunia II untuk pengelolaan sumber daya, baik dalam militer maupun industri. Pada tahun 1957, Richard Bellman mengembangkan metode *dynamic programming* untuk memecahkan masalah pengambilan keputusan yang melibatkan beberapa langkah dan pilihan. Selanjutnya, pada tahun 1962, Pontryagin melanjutkan penelitian dengan mengembangkan metode *maximum principle* untuk optimalitas dalam sistem kontrol yang mana untuk mencapai kontrol optimal harus ada kondisi tertentu yang dipenuhi, yaitu pengaturan variabel kontrol dan fungsi Hamiltonian yang terkait (Venkateswarlu, 1996).

Permasalahan kontrol optimal yang berbentuk persamaan diferensial umumnya dimisalkan dengan $u(t)$ sebagai variabel kontrol untuk mewakili suatu indeks dari perilaku dan $x(t)$ sebagai variabel *state*. Variabel *state* pada sistem bersifat kontinu terhadap waktu t atau dapat disebut sebagai fungsi kendala. Fungsi tujuan dalam masalah kontrol optimal bertujuan meminimumkan atau memaksimumkan sebuah persamaan dilambangkan dengan J , biasanya dioptimalkan melalui perubahan pada variabel kontrol

$u(t)$. Misalkan variabel *state* atau fungsi kendala kontinu dalam tiga variabel $((t, x(t), u(t)))$, maka *state* $(x(t))$ dapat dinyatakan dengan:

$$x(t) = g(t, x(t), u(t)) \quad (2.10)$$

Fungsi g pada persamaan (2.10) bergantung pada waktu t , *state* $x(t)$, dan variabel kontrol $u(t)$ yang menggambarkan bagaimana *state* berubah seiring waktu berdasarkan variabel kontrol yang digunakan. Fungsi ini biasanya bersifat kontinu, yang berarti perubahan kecil pada t atau $u(t)$ akan menghasilkan perubahan kecil pada $x(t)$. Dengan demikian, hubungan variabel kontrol dan *state* dapat ditulis $u(t) \rightarrow x = x(u)$ dengan x adalah fungsi dari variabel bebas t , ditulis $x(u)$ untuk mengingatkan ketergantungan pada $u(x(u))$ menunjukkan variabel x tidak bergantung pada t melainkan pada u . Masalah kontrol optimal mempunyai tujuan umum untuk menemukan kontrol yang kontinu $u(t)$ yang akan memaksimalkan atau meminimalkan fungsi tujuan (J) dengan variabel kontrol $u(t)$ dan variabel *state* $x(t)$ yang diberikan oleh fungsi g , yaitu:

$$\max_u \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.11)$$

dengan,

$$\begin{aligned} x'(t) &= g(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \quad \text{dan} \quad x(t_1) \quad \text{bebas} \end{aligned}$$

Seperti kontrol yang memaksimumkan nilai dari fungsi tujuan disebut sebagai kontrol optimal. Dengan $x(t_1)$ bebas, berarti nilai dari keadaan x pada waktu t_1 bebas atau tidak dibatasi. Dalam konteks ini, fungsi f dan g dianggap selalu memiliki turunan yang kontinu terhadap semua variabel yang terlibat, yaitu

$(t, x(t), u(t))$. Karena kontrol berupa $u(t)$ adalah fungsi yang selalu kontinu, maka keadaan-keadaan terkait akan selalu memiliki turunan sebagian demi sebagian. Sehingga fungsi tujuan dapat dirumuskan dengan:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.12)$$

di mana $x = x(u)$ adalah *state* yang sesuai.

Pada tahun 1950-an, Pontryagin dan kawannya mengembangkan syarat perlu di Moskow (Pontryagin, 1962). Untuk mengintegrasikan persamaan diferensial ke dalam fungsi tujuan, Pontryagin memperkenalkan fungsi "*adjoint*". Fungsi *adjoint* (*costate*) berfungsi serupa dengan pengali Lagrange dalam kalkulus multivariat, yang menambahkan batasan pada fungsi dengan beberapa variabel untuk tujuan memaksimalkan atau meminimalkan. Fungsi *costate* membantu menemukan kontrol yang optimal (Lenhart & Workman, 2007). Di dalam teori kontrol optimal, terdapat syarat yang harus dipenuhi oleh suatu kontrol agar dapat disebut sebagai kontrol optimal, yaitu sebagai berikut.

1. Syarat Perlu Kontrol Optimal

Salah satu cara untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal adalah dengan menggunakan syarat perlu kontrol optimal, di mana u^* adalah kontrol dan x^* sebagai variabel *state* yaitu $J(u) \leq J(u^*) < \infty$ untuk semua kontrol u . Misalkan $h(t)$ adalah fungsi yang kontinu sebagian demi sebagian dan $\varepsilon \in \mathbb{R}$ adalah sebuah konstanta, sehingga:

$$u^\varepsilon(t) = u^*(t) + \varepsilon h(t) \quad (2.13)$$

Sistem persamaan di atas adalah fungsi kontrol yang terdiri dari beberapa bagian fungsi kontinu yang didefinisikan secara terpisah pada interval-interval tertentu. Misalkan x^ε adalah *state* yang bersesuaian dengan kontrol u^ε , maka x^ε memenuhi:

$$\frac{d}{dt}x^\varepsilon(t) = g(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) \quad (2.14)$$

Di mana u^ε adalah fungsi yang kontinu. Karena semua trayektori atau lintasan menuju ke *state* yang sama, maka diambil $x^\varepsilon(t_0) = x_0$. Diketahui $u^\varepsilon(t) \rightarrow u^*(t)$ untuk semua t , ketika $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\left. \frac{\partial u^\varepsilon(t)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = h(t) \quad (2.15)$$

Karena asumsi-asumsi yang dibuat pada fungsi g , maka dapat disimpulkan bahwa x^ε memenuhi sifat-sifat tertentu.

$$x^\varepsilon(t) \rightarrow x^*(t) \quad (2.16)$$

untuk setiap t tertentu.

Fungsi tujuan dari u^ε adalah sebagai berikut:

$$J(u^\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) dt \quad (2.17)$$

Misalkan $\lambda(t)$ adalah fungsi adjoint yang terdiferensiasi pada $[t_0, t_1]$ yang akan ditentukan dengan Teorema Dasar

Kalkulus,

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [\lambda(t)x^\varepsilon(t)] dt = \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) - \lambda(t_0)x^\varepsilon(t_0) = 0 \quad (2.18)$$

Tanpa mengubah nilai fungsi tujuan, $J(u^\varepsilon)$ dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} J(u^\varepsilon) &= \int_{t_0}^{t_1} \left[f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + \frac{d}{dt} (\lambda(t)x^\varepsilon(t)) \right] dt \\ &\quad + \lambda(t_0)x_0 - \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + \lambda'(t)x^\varepsilon(t) + \lambda(t)g(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))] dt \\ &\quad + \lambda(t_0)(x_0) - \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) \end{aligned}$$

Diketahui bahwa $\frac{d}{dt}x^\varepsilon = g(t, x^\varepsilon, u^\varepsilon)$, di mana nilai maksimum J terhadap kontrol u adalah u^* . Berdasarkan kondisi perlu nilai optimum suatu fungsi, maka turunan dari $J(u^\varepsilon)$ terhadap ε adalah 0, yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} J(u^\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(u^\varepsilon) - J(u^*)}{\varepsilon} \quad (2.19)$$

Persamaan di atas dapat dijabarkan, sehingga akan diperoleh

fungsi *costate* sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 0 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} J(u^\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} \\
 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + \lambda'(t)x^\varepsilon(t) + \lambda(t)g(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))] \right|_{\varepsilon=0} dt \\
 &\quad - \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) \right|_{\varepsilon=0}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan aturan rantai untuk fungsi f dan g diperoleh

$$\begin{aligned}
 0 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} J(u^\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} \\
 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \left[f_x \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + f_u \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \lambda'(t) \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \lambda(t) \left(g_x \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + g_u \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) \right] \Big|_{\varepsilon=0} dt \\
 &\quad - \lambda(t_1) \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t_1) \Big|_{\varepsilon=0} \\
 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \left[(f_x + \lambda(t)g_x + \lambda'(t)) \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t) \Big|_{\varepsilon=0} + (f_u + \lambda(t)g_u)h(t) \right] dt \\
 &\quad - \lambda(t_1) \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t_1) \Big|_{\varepsilon=0}
 \end{aligned}$$

Dari persamaan di atas akan disederhanakan dengan memilih fungsi adjoin, sehingga koefisien $\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t) \Big|_{\varepsilon=0}$ adalah 0. Selanjutnya akan dipilih fungsi adjoin atau *costate* $\lambda(t)$ yang memenuhi

$$\lambda'(t) = - [f_x(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_x(t, x^*(t), u^*(t))] dt \quad (2.20)$$

Diambil pula nilai batas atau kondisi transversal, yaitu

$$\lambda(t_1) = 0$$

Diketahui bahwa $h(t)$ adalah sembarang fungsi, yaitu

$$h(t) = f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_u(t, x^*(t), u^*(t)) \quad (2.21)$$

Sehingga berlaku,

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} (f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_u(t, x^*(t), u^*(t)))^2 dt$$

Diperoleh fungsi yang memenuhi kondisi optimal, yaitu

$$f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_u(t, x^*(t), u^*(t)) = 0$$

untuk semua $t_0 \leq t \leq t_1$.

Persamaan di atas adalah syarat perlu kontrol optimal, dimana kondisi optimal dan *state* harus memenuhi persamaan di atas. Syarat perlu dari fungsi Hamiltonian didefinisikan sebagai berikut:

$$H_a(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda(t)g(t, x, u), \quad (2.22)$$

dimana f adalah integrand, λ adalah *costate*, dan g adalah persamaan diferensial atau *state*. Fungsi Hamiltonian akan dioptimalkan terhadap u pada u^* . Kondisi di atas dapat dituliskan sebagai berikut.

a. Kondisi Optimal

$$\frac{\partial H_a}{\partial u} = 0 \rightarrow f_u + \lambda(t)g_u = 0$$

b. Persamaan Adjoint (*costate*)

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H_a}{\partial x} \rightarrow \lambda'(t) = -(f_x + \lambda(t)g_x)$$

c. Kondisi Transversal

$$\lambda(t_1) = 0$$

Didefinisikan persamaan *state* sebagai,

$$x' = g(t, x, u) = \frac{\partial H_a}{\partial \lambda}, \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.23)$$

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa Pontryagin mengusulkan bahwa syarat perlu untuk kontrol optimal dapat dinyatakan menggunakan fungsi adjoint $\lambda(t)$, yang ditambahkan ke persamaan *state* $x(t)$ dalam fungsi tujuan J , yang dapat dirumuskan melalui fungsi Hamiltonian $H(t, x, u, \lambda)$, sehingga solusi optimal memenuhi persamaan Hamiltonian dan kondisi optimalnya (Lenhart & Workman, 2007).

2. Prinsip Maksimum Pontryagin

Menurut Lenhart dan Workman (2007), Prinsip Maksimum Pontryagin (PMP) merupakan metode populer dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal karena memberikan kondisi perlu untuk optimalitas. Namun, terdapat pendekatan lain seperti pemrograman dinamis dan metode numerik langsung. Pemilihan metode penyelesaian kontrol optimal ini tergantung pada kompleksitas dan bentuk masalah. Pemrograman dinamis menghasilkan syarat cukup melalui persamaan Hamilton–Jacobi–Bellman, sedangkan metode langsung menyelesaikan masalah

dengan mengubahnya menjadi optimasi numerik tanpa perlu menghitung persamaan adjoint.

Penelitian ini menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin karena metode ini memberikan syarat perlu untuk menentukan kontrol optimal, seperti persamaan *state*, *costate*, kondisi hamiltonian maksimum, serta kondisi batasnya. PMP cocok diterapkan pada model berbasis persamaan diferensial, seperti model perceraian dalam penelitian ini, karena metode ini lebih sederhana secara komputasi dibanding pemrograman dinamis, dimana dapat diselesaikan dengan metode numerik seperti Runge-Kutta dan *sweep* maju mundur. Permasalahan ini dikembangkan oleh L.S. Pontryagin dan rekan kerjanya pada tahun 1950.

Teorema 2.3.1 (*Lenhart & Workman, 2007*)

Jika $u^(t)$ dan $x^*(t)$ merupakan solusi optimal untuk permasalahan kontrol optimal, dengan syarat perlu $\lambda(t)$ sedemikian rupa sehingga,*

$$H_a(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq H_a(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))$$

untuk semua kontrol u pada setiap waktu t , di mana Hamiltonian H yaitu:

$$H_a = f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t)),$$

dan,

$$\lambda'(t) = - \frac{\partial H_a(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))}{\partial x}$$

$$\lambda(t_1) = 0$$

Diketahui fungsi *adjoint* (*costate*) dan Hamiltonian, yaitu $H_u = 0$ pada u^* untuk semua t , sehingga, Hamiltonian memiliki titik kritis dalam variabel u , yaitu pada u^* untuk setiap t . Masalah dapat diselesaikan lebih sederhana menggunakan prinsip maksimum pontryagin.

Teorema 2.3.2 Fungsi Hamiltonian (Lenhart & Workman, 2007)

Misalkan $f(t, x, u)$ dan $g(t, x, u)$ adalah fungsi yang terdiferensialkan secara kontinu terhadap ketiga variabelnya dan konkaf terhadap variabel kontrol u . Misalkan u^* merupakan kontrol optimal yang bersesuaian dengan state x^* , dan λ adalah fungsi terdiferensiasi sebagian demi sebagian yang memenuhi $\lambda(t) \geq 0$ untuk setiap t . Misalkan untuk semua $t_0 \leq t \leq t_1$, maka akan diperoleh:

$$0 = H_u(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))$$

Selanjutnya, untuk setiap kontrol u pada interval $t_0 \leq t \leq t_1$, dipunyai:

$$H_a(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq H_a(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))$$

Bukti. Tetapkan kontrol u dan titik pada interval waktu $t_0 \leq t \leq t_1$, kemudian

$$\begin{aligned} & H_a(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) - H_a(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \\ &= [f(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g(t, x^*(t), u^*(t))] - \\ & \quad [f(t, x^*(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x^*(t), u(t))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [f(t, x^*(t), u^*(t)) - f(t, x^*(t), u(t))] + \lambda(t) \\
&\quad [g(t, x^*(t), u^*(t)) - g(t, x^*(t), u(t))] \\
&\geq (u^*(t) - u(t))f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)(u^*(t) \\
&\quad - u(t))g_u(t, x^*(t), u^*(t)) \\
&= (u^*(t) - u(t))H_u(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) = 0
\end{aligned}$$

Transisi dari baris ke-3 ke baris ke-4 menggunakan properti konkaf, yaitu bentuk:

$$\begin{aligned}
f(u) - f(u^*) &\leq \nabla_u f(u^*) \cdot (u - u^*) \\
&\Leftrightarrow f(u^*) - f(u) \geq \nabla_u f(u^*) \cdot (u^* - u)
\end{aligned}$$

serta karena $\lambda(t) \geq 0$, maka saat kita mengalikan dengan $\lambda(t)$, arah pertidaksamaan tetap, tidak berubah. ■

Hal ini juga berlaku untuk maksimum maupun minimum. Berikut merupakan perbedaan kontrol yang memaksimalkan dan kontrol yang meminimalkan fungsi tujuan untuk mendapatkan u^* ,

Pada permasalahan maksimum:

$$\frac{\partial^2 H_a}{\partial u^2} < 0 \quad (2.24)$$

Pada permasalahan minimum:

$$\frac{\partial^2 H_a}{\partial u^2} > 0 \quad (2.25)$$

Apabila terdapat masalah kontrol optimal dengan dua variabel yang tidak diketahui, yaitu u^* dan x^* dan variabel adjoin (*costate*), yaitu λ sebagai pengali *lagrange*. Berikut

adalah langkah-langkah untuk mencari maksimum atau minimum dari masalah kontrol optimal yang diberikan (Lenhart & Workman, 2007):

- a. Bentuk ke dalam persamaan Hamiltonian.
- b. Menentukan *costate*, kondisi transversal, serta kondisi optimal dari u^* , x^* , dan λ .
- c. Untuk mengeliminasi u^* dengan menggunakan kondisi optimal $H_u = 0$, maka dapat menyelesaikan u^* dalam kaitannya dengan variabel *state* x^* dan *costate* λ .
- d. Untuk menyelesaikan dua persamaan diferensial terkait x^* dan λ , pertama-tama tentukan persamaan Hamiltonian $H_a(t, x, u, \lambda)$, lalu turunkan kedua persamaan tersebut. Dengan dua kondisi batas, yaitu $\lambda(t_0)$ dan $\lambda(t_1)$. Substitusikan u^* ke dalam persamaan diferensial.
- e. Setelah ditemukan persamaan *state* dan *costate*, selesaikan untuk masalah kontrol optimal.

3. Contoh Masalah Kontrol Optimal

Berikut ini merupakan contoh dan penyelesaian dari suatu permasalahan kontrol optimal:

$$\min_u \int_0^1 u(t)^2 dt$$

dengan $x'(t) = x(t) + u(t)$, $x(0) = 1$, $x(1)$ bebas.

Permasalahan kontrol di atas bertujuan untuk meminimumkan. Berikut merupakan langkah-langkah untuk mendapatkan kondisi yang optimal.

- a. Membentuk persamaan Hamiltonian (fungsi yang menggabungkan fungsi objektif dan persamaan diferensial yang mengatur sistem) sebagai berikut.

$$H_a(t, x, u, \lambda) = L(t, x, u) + \lambda(t)f(t, x, u)$$

$$H_a(t, x, u, \lambda) = u(t)^2 + \lambda(t)(x(t) + u(t))$$

$$H_a = u^2 + \lambda(x + u)$$

- b. Menentukan kondisi optimal menggunakan metode Hamiltonian dan syarat perlu optimalitas. Untuk mendapatkan kontrol optimal u^* , maka ditetapkan turunan pertama dari Hamiltonian sama dengan nol.

$$\frac{\partial H_a}{\partial u} = 2u + \lambda$$

$$0 = 2u + \lambda$$

$$u^* = -\frac{1}{2}\lambda$$

Untuk memastikan bahwa kontrol yang telah ditemukan optimal, perlu dicek turunan kedua dari Hamiltonian terhadap u , yaitu:

$$\frac{\partial^2 H_a}{\partial u^2} = 2,$$

karena $\frac{\partial^2 H_a}{\partial u^2} = 2 > 0$, maka dapat disimpulkan bahwa kontrol u^* yang diperoleh adalah solusi minimum (optimal).

- c. Diperoleh persamaan *adjoint* atau kondisi *costate* dari

turunan Hamiltonian terhadap variabel *state* x , yaitu:

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H_a}{\partial x}$$

$$\lambda'(t) = -\lambda(t)$$

dari persamaan di atas, diperoleh solusi *costate* sebagai berikut:

$$\lambda(t) = ce^{-t}$$

- d. Dengan menggunakan kondisi transversal $\lambda(1) = 0$, maka akan ditentukan nilai konstanta c .

$$\lambda(t) = ce^{-t}$$

$$\lambda(1) = ce^{-1} = 0$$

$$c = 0$$

Dengan $c = 0$, maka fungsi adjoint (*costate*) menjadi:

$$\lambda(t) = 0$$

- e. Berdasarkan kondisi transversal yang kita dapatkan sebelumnya, yaitu $\lambda(t) = 0$, maka dapat menghitung solusi kontrol optimalnya. Diketahui bahwa kontrol optimal u^* dinyatakan sebagai:

$$u^* = \frac{-\lambda(t)}{2}$$

$$u^* = \frac{-0}{2}$$

$$u^* = 0$$

Dengan $u^* = 0$, persamaan *state* menjadi:

$$x' = x + u^*$$

$$x' = x$$

Dengan kondisi awal $x(0) = 1$, solusi dari persamaan diferensial $x' = x$ adalah:

$$x^*(t) = e^t$$

f. Solusi optimal untuk masalah kontrol optimal di atas adalah:

- Kontrol optimal : $u^* = 0$
- Fungsi *state* : $x^*(t) = e^t$
- Fungsi *costate* : $\lambda(t) = 0$

Hal ini berarti, untuk kontrol optimal $u^* = 0$, solusi *state* yang memenuhi persamaan diferensial adalah $x^*(t) = e^t$.

D. Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta adalah sebuah pendekatan numerik yang banyak digunakan untuk menghitung solusi perkiraan dari Persamaan Diferensial Biasa (PDB). Metode Runge-Kutta memberikan solusi yang lebih akurat dibandingkan metode Euler sederhana dengan memanfaatkan beberapa evaluasi fungsi pada setiap langkah. Metode Euler adalah cara paling sederhana untuk mendekati solusi masalah matematika yang melibatkan nilai awal (Burden & Faires, 1978).

Menurut Chapra & Canale (2015), bentuk umum dari metode Runge-Kutta dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \quad (2.26)$$

dimana $\phi(x_i, y_i, h)$ disebut *increment function* (fungsi kenaikan), yang dapat diartikan sebagai kemiringan representatif pada interval. Bentuk umum dari fungsi kenaikan adalah sebagai berikut.

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n \quad (2.27)$$

di mana a_i adalah konstanta dan k dihitung berdasarkan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h) \\ k_3 &= f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h) \\ &\vdots \\ k_n &= f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + \\ &\quad q_{n-1,2}k_2h + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h) \end{aligned}$$

Pada persamaan di atas, p dan q adalah konstanta dan k menunjukkan hubungan rekursif, di mana k_1 muncul pada persamaan k_2 , k_3 , dan seterusnya karena setiap k adalah evaluasi fungsional, yaitu langkah untuk menemukan nilai dari suatu fungsi berdasarkan input yang diberikan. Proses ini mencakup substitusi nilai input ke dalam fungsi dan menghitung hasilnya. Hubungan rekursif dalam metode Runge-Kutta inilah yang membuatnya efisien untuk perhitungan di komputer, karena memiliki nilai error

yang relatif kecil.

Dalam menyelesaikan permasalahan kontrol optimal, metode yang biasanya digunakan adalah metode Runge-Kutta orde 4 karena memberikan tingkat akurasi yang lebih baik dibandingkan metode Euler maupun metode Runge-Kutta dengan orde yang lebih rendah. Dengan metode Runge-Kutta orde 4, solusi yang diperoleh akan lebih mendekati nilai sebenarnya dari sistem yang dianalisis. Hasil yang diperoleh tersebut sangat penting dalam kontrol optimal di mana keputusan harus didasarkan pada prediksi yang akurat. Diberikan langkah h , $x(t)$, dan $x' = f(t, x(t))$, maka aproksimasi $x(t + h)$ dapat dihitung menggunakan rumus rekursi sebagai berikut: (Lenhart & Workman, 2007).

$$x(t + h) = x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.28)$$

dengan,

$$\begin{aligned} k_1 &= g(t, x(t)) \\ k_2 &= g\left(t + \frac{h}{2}, x(t), \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= g\left(t + \frac{h}{2}, x(t), \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= g(t + h, x(t), k_3h) \end{aligned}$$

E. Metode *sweep* Maju Mundur

Untuk mengatasi permasalahan kontrol optimal, salah satu pendekatan numerik yang diterapkan adalah metode *sweep* maju mundur. Metode *sweep* maju mundur digunakan karena dapat menyelesaikan sistem persamaan yang saling bergantung

secara iteratif untuk mencapai hasil yang konvergen. Dengan memanfaatkan arah waktu yang berbeda untuk masing-masing persamaan, metode ini mempermudah pencarian kontrol optimal yang memenuhi syarat-syarat dalam Prinsip Maksimum Pontryagin. Tahapan-tahapan dalam metode *sweep* maju mundur dapat dijelaskan sebagai berikut (Lenhart & Workman, 2007):

- a. Membuat dugaan nilai awal untuk variabel kontrol u .
- b. Untuk menyelesaikan persamaan *state*, digunakan kondisi awal $x(0) = x(t_0)$ dan nilai u dengan menerapkan metode Runge-Kutta orde 4 langkah maju.
- c. Untuk menyelesaikan persamaan *costate* λ , maka akan digunakan kondisi transversal $\lambda(t_f) = 0$ serta nilai u dan x yang telah diperoleh menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 langkah mundur.
- d. Untuk memperoleh kontrol optimal u perlu diperbarui nilai kontrol u dengan substitusi nilai x dan λ yang baru ke dalam persamaan karakteristik (yang menghubungkan variabel kontrol $u(t)$ dengan *state* $x(t)$ dan *costate* $\lambda(t)$, sehingga diperoleh u^* yaitu kontrol optimal yang meminimalkan Hamiltonian.
- e. Saat memeriksa konvergensi solusi, Apabila variabel menunjukkan *error* yang sangat kecil antara iterasi terkini dan sebelumnya, maka proses dianggap selesai dan mencetak nilai saat ini sebagai solusi. Namun, jika *error* masih besar, kembali ke langkah 2.

F. Model Matematika

Model matematika yaitu representasi skala kecil dari objek, deskripsi, atau analogi yang berfungsi untuk memvisualisasikan hal-hal yang sulit untuk diamati. Ekspresi matematis yang berasal dari suatu fenomena disebut sebagai model matematika dari fenomena tersebut. Dalam menurunkan model matematika, diperlukan dugaan, pendekatan, dan batasan yang didasarkan pada pengamatan terhadap kenyataan fenomena. Dalam rangka mempelajari fenomena tertentu secara sederhana, asumsi dan pendekatan diterapkan (Ndii, 2018). Pemodelan matematika merupakan jembatan yang paling efektif yang menghubungkan matematika dengan beberapa bidang ilmu, seperti fisika, biologi, ilmu komputer, teknik, dan ilmu sosial.

Definisi 2.6.1 (*Barnes & Fulford, 2009*))

Dalam pemodelan matematika, model digunakan untuk merepresentasikan dan mendeskripsikan masalah yang terkait dengan fenomena nyata ke dalam bentuk bahasa matematika, sehingga membantu dalam pemahaman masalah.

Secara umum, dalam memodelkan suatu masalah diperlukan beberapa tahapan untuk menghasilkan model yang baik. Kartono (2012) memaparkan penjelasan mengenai tahapan-tahapan dalam mengonstruksi model matematika yang diawali identifikasi masalah dengan mengenali apa yang akan dilakukan, merumuskan asumsi atau dugaan yang akan digunakan dalam pemodelan matematika, penyelesaian model matematika, memvalidasi model sebelum mencapai kesimpulan pada masalah nyata, dan interpretasi solusi matematis ke dalam fenomena nyata. Dengan demikian, akan diperoleh kesimpulan dalam menyelesaikan

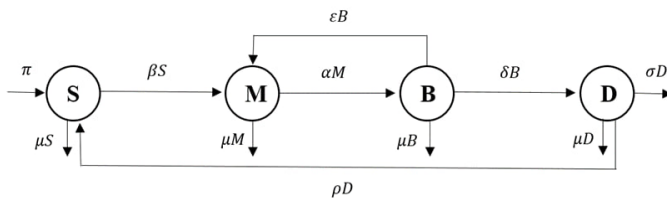
fenomena nyata.

G. Model Matematika Dinamika Perceraian

Model matematika dinamika perceraian mencakup berbagai jenis yang dirancang untuk menggambarkan dan menganalisis faktor-faktor yang memengaruhi proses perceraian dalam masyarakat. Model matematika yang digunakan dalam pemodelan ini berkaitan dengan dinamika perceraian yang telah dimodifikasi dari beberapa jurnal penelitian sebelumnya.

1. Model SMBD (*Single - Marriage - Broken - Divorce*)

Berdasarkan penelitian dari (Tessema, et al., 2022), pada model SMBD dinamika perceraian, populasi dibagi menjadi empat, diantaranya *Single* (S) yaitu individu yang belum menikah, *Marriage* (M) atau menikah yaitu individu *single* yang memutuskan untuk menikah, *Broken* (B) yaitu pasangan yang pisah ranjang tapi belum bercerai, dan *Divorce* (D) yaitu pasangan yang memutuskan untuk bercerai. Model tersebut dapat diilustrasikan pada gambar 2.1.



Gambar 2.1: Diagram Kompartemen Model SMBD (*Single - Marriage - Broken - Divorce*)

Berikut merupakan nilai subpopulasi dan nilai parameter

model SMBD (*Single - Marriage - Broken - Divorce*) dari penelitian milik Tessema, dkk (2022).

Tabel 2.1: Variabel Model Matematika SMBD (*Single - Marriage - Broken - Divorce*)

Variabel	Keterangan	Satuan	Syarat
<i>Single</i>	Subpopulasi yang belum menikah (<i>Single</i>).	Individu	$S(t) \geq 0$
<i>Marriage</i>	Subpopulasi yang memutuskan untuk menikah.	Individu	$M(t) \geq 0$
<i>Broken</i>	Subpopulasi yang pisah rumah tetapi belum bercerai.	Individu	$B(t) \geq 0$
<i>Divorce</i>	Subpopulasi yang memutuskan bercerai.	Individu	$D(t) \geq 0$

Tabel 2.2: Parameter Model Matematika SMBD (*Single - Marriage - Broken - Divorce*)

Parameter	Keterangan	Satuan	Syarat
π	Laju individu <i>single</i> yang telah siap untuk menikah.	Individu / tahun	$\pi > 0$
ρ	Laju individu yang telah bercerai menjadi <i>single</i> .	1 / tahun	$\rho > 0$
β	Laju individu yang memutuskan menikah.	1 / tahun	$\beta > 0$
δ	Laju individu yang pisah ranjang menjadi bercerai.	1 / tahun	$\delta > 0$

Parameter	Keterangan	Satuan	Syarat
α	Laju kontak antara individu yang telah bercerai dengan individu yang telah menikah.	1 / tahun	$\alpha > 0$
σ	Laju kematian karena bercerai.	1 / tahun	$\sigma > 0$
ε	Laju individu yang telah pisah ranjang memutuskan untuk memperbarui pernikahan sebelumnya.	1 / tahun	$\varepsilon > 0$
μ	Laju kematian alami.	1 / tahun	$\mu > 0$

Berdasarkan diagram kompartemen pada gambar (2.1), asumsi dalam model ini meliputi bahwa faktor-faktor seperti jenis kelamin, ras, dan status sosial tidak berpengaruh pada kemungkinan bercerai dan anggota mencampuradukkan secara homogen (memiliki interaksi yang sama dengan tingkat yang sama). Dari model SMBD, akan didapatkan persamaan diferensial dengan penjelasannya sebagai berikut.

Laju perubahan subpopulasi *Single* (S) bertambah dari individu baru sebesar πN dan dari individu bercerai sebesar ρD . Pengurangan terjadi akibat transisi ke subpopulasi *Marriage* sebesar βS dan kematian alami sebesar μS . Dengan demikian, diperoleh persamaan:

$$\frac{dS}{dt} = \pi N + \rho D - \beta S - \mu S \quad (2.29)$$

Laju perubahan subpopulasi *Marriage* bertambah dari subpopulasi *Single* dan *Broken* yang memutuskan untuk menikah kembali, masing-masing dengan laju βS dan εB . Pengurangan terjadi akibat transisi ke subpopulasi *Broken* sebesar αM dan kematian alami sebesar μM , sehingga diperoleh persamaan:

$$\frac{dM}{dt} = \beta S - \alpha M + \varepsilon B - \mu M \quad (2.30)$$

Laju perubahan subpopulasi *Broken* bertambah dari pasangan menikah yang hubungannya memburuk sebesar αM . Pengurangan terjadi akibat perceraian sebesar δB , perbaikan pernikahan sebesar εB , dan kematian alami sebesar μB , sehingga diperoleh persamaan:

$$\frac{dB}{dt} = \alpha M - \delta B - \varepsilon B - \mu B \quad (2.31)$$

Laju perubahan subpopulasi *Divorce* bertambah dari pasangan *Broken* yang bercerai sebesar δB . Pengurangan terjadi akibat transisi ke *Single* sebesar ρD , serta kematian alami dan kematian akibat perceraian masing-masing sebesar μD dan σD , sehingga didapat persamaan berikut:

$$\frac{dD}{dt} = \delta B - \rho D - \sigma D - \mu D \quad (2.32)$$

Berdasarkan uraian dan penjelasan yang telah disampaikan sebelumnya, akan dirumuskan sistem persamaan diferensial yang menggambarkan dinamika perubahan masing-masing

subpopulasi sebagai berikut:

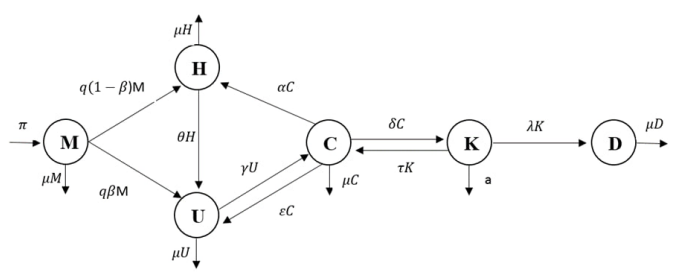
$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \pi N + \rho D - \beta S - \mu S \\ \frac{dM}{dt} = \beta S - \alpha M + \varepsilon B - \mu M \\ \frac{dB}{dt} = \alpha M - \delta B - \varepsilon B - \mu B \\ \frac{dD}{dt} = \delta B - \rho D - \sigma D - \mu D \end{cases} \quad (2.33)$$

Dengan toral populasi,

$$N(t) = S(t) + M(t) + B(t) + D(t)$$

2. Model MHUCKD (*Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Counselling - Complexity Life - Divorce*)

Pada model MHUCKD dinamika perceraian, populasi dibagi menjadi enam subpopulasi, diantaranya subpopulasi *Marriage* (M) yaitu individu yang telah menikah, subpopulasi *Healthy Marriage* (H) yaitu individu yang pernikahannya sehat, subpopulasi *Unhealthy Marriage* (U) yaitu individu yang pernikahannya sering terjadi masalah dan perdebatan dengan pasangannya, subpopulasi *Counselling* (C) yaitu individu kehidupannya tidak bahagia dan kesulitan terkait perkawinan melakukan konseling, subpopulasi *Complexity Life* (K) yaitu individu yang stres dan mengalami kesulitan (kompleksitas) dalam kehidupan pernikahan, dan subpopulasi *Divorce* (D) yaitu individu yang bercerai karena kompleksitas kehidupan pernikahan. Model tersebut dapat diilustrasikan pada gambar 2.2 (Hugo & Lusekelo, 2021).



Gambar 2.2: Diagram Kompartemen Model MHUCKD (*Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Counselling - Complexity life - Divorced*)

Pada tabel 2.3 dan tabel 2.4 di bawah ini menampilkan variabel dan parameter pada model MHUCKD berdasarkan penelitian milik Hugo Lusekelo pada tahun 2021.

Tabel 2.3: Variabel Model Matematika MHUCKD (*Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Counselling - Complexity life - Divorced*)

Variabel	Keterangan	Satuan	Syarat
<i>Marriage</i>	Subpopulasi telah menikah.	Individu	$M(t) \geq 0$
<i>Healthy Marriage</i>	Subpopulasi yang kehidupan pernikahannya stabil, sehat, dan jarang ada konflik.	Individu	$H(t) \geq 0$
<i>Unhealthy Marriage</i>	Subpopulasi yang kehidupan pernikahannya tidak sehat dan banyak perselisihan.	Individu	$U(t) \geq 0$

Variabel	Keterangan	Satuan	Syarat
<i>Counselling</i>	Subpopulasi yang pernikahannya banyak perselisihan memutuskan untuk melakukan konseling.	Individu	$C(t) \geq 0$
<i>Complexity Life</i>	Subpopulasi yang stres dan mengalami kesulitan (kompleksitas) dalam kehidupan pernikahan.	Individu	$K(t) \geq 0$
<i>Divorce</i>	Subpopulasi yang memutuskan bercerai.	Individu	$D(t) \geq 0$

Tabel 2.4: Parameter Model Matematika MHUCKD (*Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Counselling - Complexity life - Divorced*)

Parameter	Keterangan	Satuan	Syarat
μ	Laju kematian alami.	1 / tahun	$\mu > 0$
π	Laju penambahan individu yang menikah.	Individu / tahun	$\pi > 0$
q	Faktor individu yang mengalami <i>Unhealthy Marriage</i> .	-	$0 < q < 1$
β	Laju individu yang mengalami <i>Unhealthy Marriage</i> .	1 / tahun	$\beta > 0$

Parameter	Keterangan	Satuan	Syarat
θ	Laju individu dari subpopulasi <i>healthy marriage</i> menjadi <i>unhealthy marriage</i> .	1 / tahun	$\theta > 0$
γ	Laju individu yang memutuskan konseling karena kehidupan yang tidak bahagia dari kesulitan terkait perkawinan.	1 / tahun	$\gamma > 0$
a	Laju kematian karena stres akibat kehidupan pernikahan yang kompleks.	1 / tahun	$a > 0$
ε	Laju individu yang memutuskan untuk konseling tetapi tetap di bawah pernikahan yang tidak sehat.	1 / tahun	$\varepsilon > 0$
α	Laju individu yang menerima konseling dan menjadi individu dengan kehidupan pernikahan yang sehat (<i>healthy marriage</i>).	1 / tahun	$\alpha > 0$
λ	Laju individu yang bercerai karena kehidupan pernikahan yang kompleks.	1 / tahun	$\lambda > 0$

Parameter	Keterangan	Satuan	Syarat
δ	Laju individu yang stres (kehidupan pernikahannya kompleks) setelah mendapatkan konseling.	1 / tahun	$\delta > 0$
τ	Laju individu yang mencari konseling setelah stres dan kesulitan (kompleksitas) kehidupan pernikahan.	1 / tahun	$\tau > 0$

Mengacu gambar (2.2), populasi dalam model diasumsikan bersifat homogen (memiliki interaksi yang setara dan tingkat yang sama). Lebih lanjut, diasumsikan bahwa jenis kelamin, ras, dan status sosial tidak berkontribusi pada kemungkinan bercerai dan epidemi perceraian terjadi pada populasi tertutup. Dari model MHUCKD akan diperoleh persamaan diferensial dengan penjelasannya sebagai berikut.

Laju perubahan subpopulasi *Marriage* bertambah sebesar π dari individu yang menikah, dan berkurang akibat kematian alami sebesar μM , serta pengaruh pernikahan tidak sehat sebesar qM . Dengan demikian, diperoleh persamaan:

$$\frac{dM}{dt} = \pi - (q + \mu)M \quad (2.34)$$

Laju perubahan subpopulasi *Healthy Marriage* bertambah dari populasi *Marriage* sebesar $q(1 - \beta)M$ dan dari keberhasilan konseling sebesar αC . Pengurangan terjadi akibat kematian alami sebesar μH dan transisi

ke pernikahan tidak sehat sebesar θH , sehingga akan diperoleh persamaan:

$$\frac{dH}{dt} = q(1 - \beta)M + \alpha C - (\theta + \mu)H \quad (2.35)$$

Laju perubahan subpopulasi *Unhealthy Marriage* bertambah dari populasi *Marriage* sebesar $q\beta M$, dari transisi *Healthy Marriage* sebesar θH , dan dari konseling yang tidak berhasil sebesar εC . Pengurangan terjadi akibat kematian alami sebesar μU dan individu yang mengikuti konseling sebesar γU . Dengan demikian, diperoleh persamaan:

$$\frac{dU}{dt} = q\beta M + \theta H + \varepsilon C - (\gamma + \mu)U \quad (2.36)$$

Laju perubahan subpopulasi *Counselling* bertambah dari subpopulasi *Unhealthy Marriage* sebesar γU dan dari subpopulasi *Complexity Life* sebesar τK . Pengurangan terjadi akibat kematian alami sebesar μC , transisi ke pernikahan sehat sebesar αC , ke pernikahan tidak sehat sebesar εC , serta yang mengalami stres kembali ke *Complexity Life* sebesar δC , sehingga didapat persamaan:

$$\frac{dC}{dt} = \gamma U + \tau K - (\varepsilon + \delta + \alpha + \mu)C \quad (2.37)$$

Laju perubahan subpopulasi *Complexity life* bertambah dari subpopulasi *Counselling* sebesar δC , dan berkurang akibat kematian karena stres sebesar aK , transisi ke subpopulasi *Divorce* sebesar λK , serta transisi ke *Counselling* sebesar τK ,

sehingga diperoleh persamaan:

$$\frac{dK}{dt} = \delta C - (\tau + \lambda + \alpha + \mu)C \quad (2.38)$$

Laju perubahan subpopulasi *Divorce* bertambah dari subpopulasi *Complexity Life* sebesar λK , dan berkurang akibat kematian alami sebesar μD , sehingga akan diperoleh persamaan:

$$\frac{dD}{dt} = \lambda K - \mu D \quad (2.39)$$

Berdasarkan uraian dan penjelasan yang telah disampaikan sebelumnya, akan dirumuskan sistem persamaan diferensial yang menggambarkan dinamika perubahan masing-masing subpopulasi sebagai berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM}{dt} = \pi - (q + \mu)M \\ \frac{dH}{dt} = q(1 - \beta)M + \alpha C - (\theta + \mu)H \\ \frac{dU}{dt} = q\beta M + \theta H + \varepsilon C - (\gamma + \mu)U \\ \frac{dC}{dt} = \gamma U + \tau K - (\varepsilon + \delta + \alpha + \mu)C \\ \frac{dK}{dt} = \delta C - (\tau + \lambda + \alpha + \mu)C \\ \frac{dD}{dt} = \lambda K - \mu D \end{array} \right. \quad (2.40)$$

Dengan total populasi,

$$N(t) = M(t) + H(t) + U(t) + C(t) + K(t) + D(t)$$

H. Perceraian

Perceraian adalah tindakan memutuskan ikatan yang disebabkan oleh alasan tertentu dalam suatu perkawinan. Ketidakmampuan menemukan solusi menyebabkan perceraian terjadi (*dissolution marriage*) (Wijaya, 2008). Perceraian merupakan suatu masalah kompleks yang tidak terjadi secara tiba-tiba. Berdasarkan beberapa kasus, terdapat beberapa faktor-faktor penyebab perceraian. Memahami faktor-faktor yang menyebabkan perceraian sangat penting untuk menganalisis dan memberikan wawasan yang lebih dalam mengenai pernikahan. Menurut Manna, Doriza, dan Oktaviani (2021), terdapat beberapa faktor-faktor penyebab perceraian diantaranya sebagai berikut.

1. Perasaan ketidakcocokan dalam tujuan, nilai, atau minat antarindividu. Ketidakcocokan sering disebabkan karena pasangan memiliki pandangan hidup dan tujuan yang berbeda atau tidak sejalan.
2. Komunikasi yang buruk dapat menyebabkan kesalahpahaman dan ketidakpuasan dalam suatu hubungan, misalnya, salah satu pasangan merasa kurang dihargai, kesulitan dalam berbagi, dan merasa diabaikan saat diperlukan.
3. Masalah ekonomi dapat menyebabkan perceraian. Penyebab perceraian karena ekonomi, yaitu kurangnya ekonomi dan pola hidup yang fokus pada kepuasan dan kesenangan. Istri mengajukan gugatan terhadap suaminya karena suami tidak mampu memenuhi kebutuhannya, sementara suami menggugat istri karena gaya hidup hedonis yang dijalani

istrinya.

4. Perselingkuhan menjadi faktor yang paling banyak menyebabkan perceraian. Perselingkuhan bermula karena ketidakharmonisan dalam rumah tangga, sehingga salah satu pasangan mencari ketenangan dan kenyamanan dari orang lain.

Salah satu upaya untuk meminimumkan perceraian dan pernikahan yang tidak sehat (*Unhealthy Marriage*) adalah dengan pemberian edukasi pasca nikah dan konseling yang akan dijelaskan lebih detail sebagai berikut.

1. Edukasi Pasca Nikah

Dalam UU No. 16 Tahun 2019 telah dipaparkan bahwa umur minimal yang diizinkan menikah adalah 19 tahun. Umur tidak hanya berkaitan dengan keadaan fisiologis tetapi juga berkaitan dengan keadaan psikologis seseorang. Dengan bertambahnya umur, diharapkan keadaan psikologisnya juga akan bertambah matang. Seseorang dikatakan telah siap menikah apabila telah siap secara fisiologis atau kejasmanian, psikologis, sosial-ekonomi, dan tinjauan masa depan atau jangkauan ke depan (Walgito, 2019). Dalam suatu pernikahan dibutuhkan edukasi pasca nikah untuk membangun dan membina rumah tangga agar sesuai ajaran agama Islam, sehingga terwujud keluarga yang sakinah, mawaddah, dan rahmah.

Edukasi pasca nikah diberikan untuk mengetahui keistimewaan dan kewajiban individu yang telah menikah untuk menghindari adanya perselisihan atau pertengkaran

di kemudian hari (Hasan, 2003). Berdasarkan kitab Qurratul Uyun, materi edukasi pasca nikah meliputi pemahaman tentang hak dan kewajiban suami istri, komunikasi efektif dalam rumah tangga, manajemen konflik, serta pendidikan anak. Selain itu, dengan menambahkan kontrol edukasi pasca nikah diharapkan dapat memberi dukungan dan pembinaan bagi pasangan yang telah menikah untuk menjaga keharmonisan. Untuk menghindari diri dari hal-hal yang tidak diinginkan, harus dibangun kesadaran akan tanggung jawab khususnya dalam aspek ibadah dan agama (Ulfatmi, 2011). Edukasi pasca nikah ini diselenggarakan oleh Kemenag melalui program konseling keluarga atau bimbingan pasca nikah, Lembaga Pemberdayaan Perempuan dan Anak melalui program penguatan keluarga. Melalui edukasi pasca nikah diharapkan mampu membina hubungan yang baik dengan pasangan, membangun rumah tangga yang baik dan penuh kasih sayang, melaksanakan ibadah, mendidik anak, dan membangun relasi sosial dalam keluarga maupun masyarakat secara luas dengan baik (Alfansuri, 2023).

2. **Konseling**

Menurut Nitria, P.W.A., dkk, (2024) *Unhealthy marriage* memiliki makna yang sama dengan *toxic relationship*. *Toxic relationship* adalah hubungan yang beracun, yang dapat diartikan bahwa hubungan tersebut tidak sehat (*unhealthy marriage*). *Toxic relationship* terlihat dari perilaku seperti kekerasan fisik, perselinghuan, perilaku seksual yang tidak pantas, tidak sopan, tidak jujur, dan cenderung untuk mengendalikan pasangan. Ada beberapa cara untuk

meninggalkan *toxic relationship*, diantaranya yaitu bangun dukungan sosial, belajar untuk menjadi mandiri, bersandar dan cerita pada keluarga, teman, dan orang terdekat, dapatkan bantuan dari para profesional, seperti terapis, pengacara, atau penegak hukum, hindari orang yang *toxic*, dan lebih jaga diri setelah keluar dari hubungan yang *toxic* (Feuerman, 2023). Bantuan dari profesional seperti dari seorang terapis dapat dilakukan dengan metode konseling.

Jones memberikan pendapatnya yang diambil dari pendapat Bordin, bahwa konseling adalah proses membantu seseorang untuk memecahkan permasalahannya melalui media wawancara (Jones, 1963). Secara umum konseling merupakan proses pemberian bantuan yang dilakukan oleh seorang konselor kepada seorang klien atau lebih yang dilakukan melalui wawancara konseling yang bermuara pada pemecahan masalah dan pengambilan keputusan oleh klien melalui dirinya sendiri, sehingga klien bermental sehat dan berkepribadian efektif yang dapat merubah perilakunya menjadi lebih baik dan terarah. Konseling bermanfaat untuk membantu individu mencari, menetapkan, dan mengambil keputusan tentang kehidupan keluarga yang sedang dijalani (Mutardho, 2009).

I. Kajian Penelitian Terdahulu

Sudah banyak dilakukan penelitian mengenai model dinamika perceraian. Berikut ini beberapa penelitian terdahulu mengenai dinamika perceraian yang menjadi rujukan peneliti dalam melakukan penelitian.

Tabel 2.5. Kajian Penelitian Terdahulu

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
1	<p>Penelitian dari Haileyeses Tessema, Issaka Haruna, Shaibu Osman, dan Endeshaw Kassa (2022) yang berjudul “A Mathematical Model Analysis of Marriage Divorce.”</p>	<p>Pada penelitian ini sama-sama menggunakan model dinamika perceraian dengan subpopulasi <i>Single, Marriage, dan Divorce</i>.</p>	<p>Populasi dalam artikel jurnal dibagi menjadi empat subpopulasi, yaitu <i>SMBD (Single, Marriage, Broken, dan Divorce)</i>, sedangkan pada penelitian ini terdapat penambahan dalam kompartemen <i>Marriage (M)</i> dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu <i>Healthy marriage (H)</i> dan <i>Unhealthy marriage (U_h)</i>.</p>

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
2	<p>Penelitian dari Alfred Hugo dan Eva M Lusekelo (2021) yang berjudul <i>"Mathematical Control of Divorce Stress Among Marriage."</i></p>	<p>Pada penelitian ini sama-sama menggunakan model dinamika perceraian dengan memberikan kontrol konseling serta membagi subpopulasi <i>Marriage</i> (M) menjadi dua subpopulasi, yaitu <i>Healthy marriage</i> (H) dan <i>Unhealthy marriage</i> (U_h).</p>	<p>Model dalam artikel jurnal ini populasi dibagi menjadi enam subpopulasi, yaitu $MH U_h$ CKD (<i>Marriage, Healthy marriage, Unhealthy marriage, Counselling, Complexity life, Divorce</i>) dengan memberikan kontrol konseling pada populasi <i>Unhealthy marriage</i> (U_h) dan <i>Complexity life</i> (K). Sedangkan pada penelitian ini, penulis hanya memberikan kontrol pada subpopulasi <i>Unhealthy marriage</i> (U_h).</p>

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
3	<p>Penelitian dari Youming Guo dan Tingting Li (2021) yang berjudul <i>“Optimal Control Strategies for an Online Game Addiction Model with Low and High Risk Exposure.”</i></p>	<p>Pada penelitian ini sama-sama menggunakan kontrol edukasi dan pada subpopulasi yang rentan dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu <i>Healthy marriage</i> (H) dan <i>Unhealthy marriage</i> (U_h).</p>	<p>Model dalam artikel jurnal merupakan model kecanduan game online, sedangkan pada penelitian ini merupakan model dinamika perceraian.</p>

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
4	<p>Penelitian dari Amartya Fierzi Al Addawiyah dan Yusuf Fuad (2023) yang berjudul “Model Dinamik SEARQ Penerapan Kontrol pada Permasalahan Kecanduan Media Sosial.”</p>	<p>Pada penelitian ini sama-sama menggunakan kontrol edukasi dan terdapat pemecahan subpopulasi yang terpapar menjadi dua kompartemen dengan memisalkan proporsi.</p>	<p>Model dalam artikel jurnal merupakan model kecanduan media sosial, sedangkan pada penelitian ini merupakan model dinamika perceraian. Pada penelitian ini subpopulasi yang terpapar (U_h) terbagi menjadi dua kompartemen, yaitu subpopulasi <i>Healthy marriage</i> (H) dan <i>Divorce</i> (D).</p>

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
5	Penelitian dari Riha Nadhifah Minnuril Jannah dan Ardillah Halim (2022) yang berjudul “Edukasi Pra Nikah sebagai Upaya Pencegahan Perceraian Perspektif Hukum Islam dan Hukum Positif.”	Pada penelitian ini sama-sama menggunakan edukasi pranikah sebagai upaya pencegahan atau meminimalisir perceraian yang diterapkan dalam bentuk kontrol optimal.	Artikel jurnal ini merupakan salah satu jurnal psikologi, sedangkan dalam penelitian ini penulis tertarik untuk menggabungkan matematika dengan psikologi yang diaplikasikan dalam model matematika dengan penerapan kontrol optimal.

BAB III

METODE PENELITIAN

Di dalam bab ini, akan diuraikan serangkaian tahapan yang akan dilaksanakan selama proses penelitian, termasuk studi pustaka, pemodelan analisis, dan penggambaran diagram alur penelitian.

A. Metode Penelitian

Studi pustaka, yang dikenal juga sebagai studi literatur, merupakan langkah awal bagi penulis untuk memahami serta mengumpulkan materi terkait model matematika dinamika perceraian. Pendekatan ini mencakup serangkaian aktivitas, mulai dari membaca, mengumpulkan informasi, hingga menganalisis dan menarik kesimpulan dari berbagai sumber penelitian. Dengan demikian, studi ini dilakukan melalui metode studi pustaka untuk dinamika perceraian dengan kontrol edukasi pasca nikah dan penerapan konseling. Selanjutnya, proses ini mencakup pengumpulan bahan referensi yang mendukung pelaksanaan penelitian.

B. Prosedur Penelitian

Untuk mengatasi permasalahan yang ada, adapun langkah-langkah yang digunakan dalam menyelesaikan penelitian ini yang akan dijelaskan secara terperinci dalam tahapan berikut.

1. Studi literatur

Tahap ini bertujuan untuk mengidentifikasi masalah dalam dinamika perceraian melalui pengumpulan teori dengan metode studi pustaka atau studi literatur. Untuk itu, referensi yang digunakan meliputi buku, artikel, jurnal, serta tugas akhir yang relevan dengan penelitian mengenai dinamika perceraian.

2. Mengkontruksi model matematika

Pada bagian kontruksi model matematika dinamika perceraian, penulis memodifikasi dari pemodelan sebelumnya oleh (Tessema, et al., 2022) dan (Hugo & Lusekelo, 2021). Dalam penelitian ini, model dimodifikasi dari SMBD (*Single, Marriage, Broken, Divorce*) mendapatkan tambahan pada kompartemen M (*Marriage*) terpecah menjadi dua kompartemen, yaitu *Healthy Marriage* dan *Unhealthy Marriage* dengan kontrol berupa edukasi pasca nikah dan pemberian konseling.

3. Menyelesaikan masalah kontrol optimal

Beberapa langkah diperlukan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal, yaitu mendefinisikan fungsi tujuan untuk meminimalkan, menetapkan model dinamik dengan mendefinisikan hubungan antara variabel kontrol, variabel *state*, dan waktu seperti yang dinyatakan dalam fungsi $g(t, x(t), u(t))$. Langkah selanjutnya adalah menerapkan metode kontrol optimal menggunakan prinsip-prinsip seperti metode Hamiltonian berdasarkan prinsip maksimum pontryagin untuk merumuskan syarat-syarat optimalitas seperti persamaan *state*, *costate*, dan syarat stasioner. Dengan menyelesaikan masalah kontrol optimal di

atas, akan dicari solusinya berupa kontrol optimal $u(t)$ dengan menyelesaikan persamaan *state* dan *costate*, serta meminimalkan fungsi Hamiltonian untuk mendapatkan sistem yang optimal berupa $\lambda(t)$ dan $u(t)$.

4. Melakukan simulasi numerik

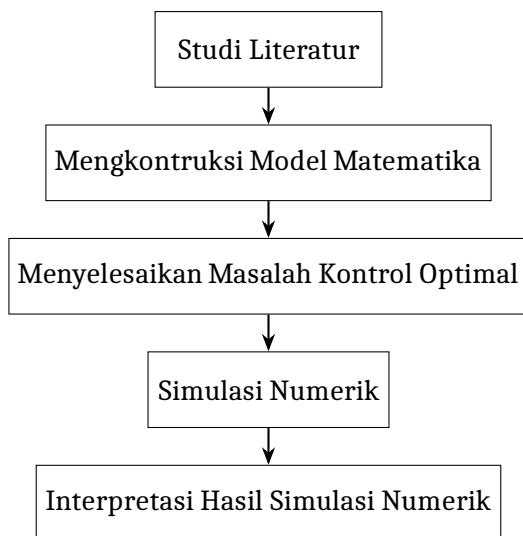
Setelah diperoleh sistem yang optimal, akan dicari penyelesaian simulasi numeriknya menggunakan *software* MATLAB R2013a. Langkah awal dalam menyelesaikan simulasi numerik adalah dengan menentukan variabel dan nilai parameter yang akan digunakan. Penyelesaian simulasi numerik dari suatu model matematika menggunakan metode *sweep* maju mundur, dimana *state* sebagai *forward* atau langkah maju dan *costate* sebagai *backward* atau langkah mundur dengan metode Runge Kutta Orde 4.

5. Menginterpretasi hasil simulasi numerik

Hasil dari simulasi numerik akan menghasilkan grafik yang akan diinterpretasikan ke dalam bahasa yang sederhana dan mudah dipahami untuk membandingkan pengaruh sebelum dan sesudah diberi kontrol.

C. Diagram Alur Penelitian

Berdasarkan tahapan-tahapan yang telah diuraikan di atas, akan disajikan diagram alur penelitian model dinamika perceraian sebagai berikut.



Gambar 3.1: Alur Metode Penelitian

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini membahas penerapan kontrol edukasi pasca nikah dan pemberian konseling untuk mengurangi tingkat perceraian. Untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal ini digunakan bantuan MATLAB R2013a.

A. Mengkontruksi Model Matematika Dinamika Perceraian

Pada model matematika dinamika perceraian yang dimodifikasi dari penelitian (Tessema, et al., 2019) dan (Hugo & Lusekelo, 2021), akan dibagi menjadi lima subpopulasi, yaitu *Single* atau individu yang siap untuk menikah (S), *Marriage* atau individu yang memutuskan menikah (M), *Healthy Marriage* atau individu yang hubungan pernikahannya sehat (H), *Unhealthy Marriage* atau individu yang hubungan pernikahannya tidak sehat (U_h), dan *Divorce* atau individu yang memutuskan bercerai (D). Untuk mempermudah representasi model yang akan dibangun, berikut adalah asumsi-asumsi yang diterapkan pada model dinamika perceraian SMH U_h D.

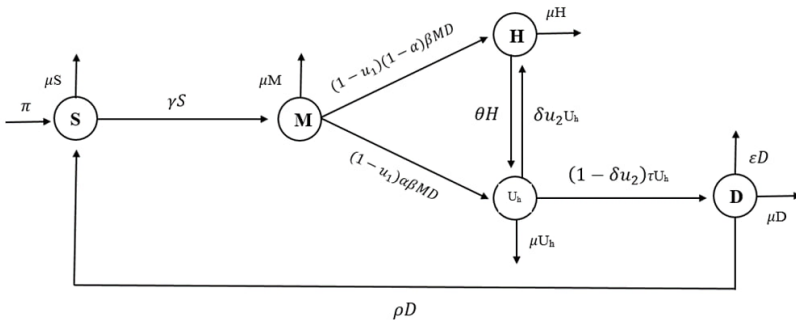
1. Model yang dibangun adalah perceraian dalam agama Islam yang diberikan kontrol berdasarkan kitab Qurratul Uyun, yaitu edukasi pasca nikah.
2. Faktor-faktor seperti jenis kelamin, ras, dan status sosial tidak berpengaruh pada keputusan untuk bercerai.
3. Setiap individu yang telah berusia 19 tahun diasumsikan

tidak pernah terlibat perceraian yang akan masuk ke subpopulasi *Single* (S) dengan laju π persatuan waktu.

4. Individu mengalami kematian alami dengan laju μ persatuan waktu dan kematian karena perceraian dengan laju ε persatuan waktu.
5. Merujuk pada artikel jurnal milik (Tessema, et al., 2022), penelitian ini memodifikasinya dengan mengubah subpopulasi *Broken* (B) menjadi *Healthy Marriage* (H) dan *Unhealthy Marriage* (U_h) sesuai dalam artikel milik Hugo & Lusekelo (2021).
6. Populasi dalam model dibagi menjadi lima kompartemen, yaitu subpopulasi *Single* (S), subpopulasi *Marriage* (M), subpopulasi *Healthy Marriage* (H), subpopulasi *Unhealthy Marriage* (U_h), dan subpopulasi *Divorce* (D).
7. Berdasarkan UU No. 16 Tahun 2019, individu *Single* didefinisikan sebagai individu yang berusia minimal 19 tahun.
8. Individu yang telah menikah akan dikelompokkan ke dalam dua kelompok, yaitu *Healthy Marriage* (H) dan *Unhealthy Marriage* (U_h).
9. Populasi *Divorce* (D) dapat mempengaruhi populasi *Marriage* (M) karena faktor lingkungan, yang disimbolkan dengan laju kontak β persatuan waktu.
10. Parameter α menunjukkan proporsi individu yang menjadi *Unhealthy Marriage* (U_h).

11. Dengan kontrol u_2 berupa pemberian konseling, populasi yang bercerai dapat ditekan dengan efektivitas δ .
12. Subpopulasi *Healthy Marriage* (H) diasumsikan sebagai pasangan yang mampu menyelesaikan konflik tanpa KDRT.
13. Subpopulasi *Unhealthy Marriage* (U_h) diasumsikan sebagai pasangan yang tidak dapat menyelesaikan konflik hingga menimbulkan perseteruan yang berujung pada KDRT.

Berdasarkan asumsi-asumsi yang telah dibuat, maka dapat dibentuk diagram kompartemen model $SMHU_hD$ dengan kontrol edukasi pasca nikah dan pemberian konseling sebagai berikut.



Gambar 4.1: Diagram Kompartemen Model $SMHU_hD$ (Single - Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Divorce)

Adapun variabel dan parameter yang digunakan dalam model matematika dinamika perceraian dalam penjelasan di atas yang dikutip dari penelitian miik Tessema (2022) dan Hugo Lusekelo (2021), yaitu sebagai berikut.

Tabel 4.1: Variabel Model Matematika $SMHU_hD$ (*Single - Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Divorce*)

Variabel	Keterangan	Satuan	Syarat
$N(t)$	Total populasi pada waktu t .	Individu	$N(t) \geq 0$
$S(t)$	Subpopulasi <i>Single</i> atau individu yang berusia 19 tahun.	Individu	$S(t) \geq 0$
$M(t)$	Subpopulasi <i>Marriage</i> atau individu yang memutuskan untuk menikah.	Individu	$M(t) \geq 0$
$H(t)$	Subpopulasi <i>Healthy Marriage</i> atau individu yang hubungan pernikahannya sehat.	Individu	$H(t) \geq 0$
$U_h(t)$	Subpopulasi <i>Unhealthy Marriage</i> atau individu yang hubungan pernikahannya tidak sehat.	Individu	$U_h(t) \geq 0$
$D(t)$	Subpopulasi <i>Divorce</i> atau individu yang memutuskan untuk bercerai.	Individu	$D(t) \geq 0$

Tabel 4.2: Parameter Model Matematika $SMHU_hD$ (*Single - Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Divorce*)

Parameter	Keterangan	Satuan	Syarat
π	Laju pertambahan individu yang berusia 19 tahun.	Individu / tahun	$\pi > 0$
μ	Laju kematian alami.	1/tahun	$\mu > 0$

Parameter	Keterangan	Satuan	Syarat
ρ	Laju transisi individu yang telah bercerai menjadi <i>Single</i> kembali.	1/tahun	$\rho > 0$
γ	Laju individu yang memutuskan untuk menikah.	1/tahun	$\gamma > 0$
α	Faktor individu yang hubungan pernikahannya tidak sehat.	-	$0 < \alpha < 1$
β	Laju interaksi antara subpopulasi <i>Marriage</i> (M) dan <i>Divorce</i> (D) karena beberapa faktor lingkungan.	1/tahun	$\beta > 0$
τ	Rata-rata banyaknya individu yang berpindah dari subpopulasi U_h ke subpopulasi D .	1/tahun	$\tau > 0$
θ	Laju transisi individu dari subpopulasi H ke subpopulasi U_h .	1/tahun	$\theta > 0$
δ	Efektivitas pemberian konseling.	-	$0 < \delta < 1$
ε	Laju kematian karena perceraian.	1/tahun	$\varepsilon > 0$
u_1	Proporsi efek pemberian edukasi pasca nikah.	-	$0 \leq u_1 \leq 1$
u_2	Proporsi efek penerapan pemberian konseling.	-	$0 \leq u_2 \leq 1$

Berdasarkan diagram kompartemen beserta variabel dan parameter dari model dinamika perceraian, didapatkan persamaan diferensial biasa dari model matematika dinamika perceraian dengan penjelasan sebagai berikut.

Laju perubahan subpopulasi *Single* (S) persatuan waktu, terdapat penambahan individu berusia 19 tahun yang tidak pernah terlibat perceraian namun rentan terhadap perilaku perceraian dengan laju π persatuan waktu. Selain itu terdapat penambahan dari individu yang telah bercerai dengan laju ρD persatuan waktu. Selanjutnya, ada pula pengurangan populasi akibat kematian alami sebesar μS , serta perpindahan individu *Single* yang memutuskan untuk menikah dengan laju γS , sehingga menghasilkan persamaan berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \pi N + \rho D - \gamma S - \mu S \quad (4.1)$$

Laju perubahan subpopulasi *Marriage* (M) bertambah karena adanya individu yang memutuskan untuk menikah dengan laju γS persatuan waktu, serta terdapat laju kontak antara individu yang telah menikah dengan individu yang bercerai karena faktor lingkungan dengan laju βMD persatuan waktu. Jumlah subpopulasi *Marriage* (M) akan berkurang karena kematian alami sebesar μ persatuan waktu, sehingga akan menghasilkan persamaan berikut.

$$\frac{dM}{dt} = \gamma S - (1 - u_1)\beta MD - \mu M \quad (4.2)$$

Laju perubahan subpopulasi *Healthy Marriage* (H) akan bertambah karena individu yang keluar dari subpopulasi M dengan proporsi $(1 - \alpha)$ akan masuk ke subpopulasi H yang diberikan kontrol u_1 berupa edukasi pasca nikah dengan laju

$(1 - u_1)(1 - \alpha)\beta MD$, serta ada penambahan dari subpopulasi U_h yang diberikan kontrol u_2 berupa pemberian konseling dengan laju $\delta u_2 U_h$. Selain itu, terdapat pengurangan dari laju θH dan kematian alami sebesar μH , sehingga akan menghasilkan persamaan berikut.

$$\frac{dH}{dt} = (1 - u_1)(1 - \alpha)\beta MD + \delta u_2 U_h - \theta H - \mu H \quad (4.3)$$

Laju perubahan subpopulasi *Unhealthy Marriage* (U_h) terdapat penambahan dari transisi H ke U_h dengan laju θH persatuan waktu dan penambahan dari proporsi yang masuk ke subpopulasi U_h dengan kontrol u_1 berupa edukasi pasca nikah dengan laju $(1 - u_1)\alpha\beta MD$. Selain itu, terdapat pengurangan dari efektivitas kontrol u_2 berupa pemberian konseling dengan laju $\delta u_2 U_h$ untuk transisi ke H dan $(1 - \delta u_2)\tau U_h$ untuk transisi ke D , sehingga akan diperoleh persamaan berikut.

$$\frac{dU_h}{dt} = (1 - u_1)\alpha\beta MD + \theta H - (1 - \delta u_2)\tau U_h - \delta u_2 U_h - \mu U_h \quad (4.4)$$

Laju perubahan subpopulasi *Divorce* (D), terdapat penambahan dari laju $(1 - \delta u_2)\tau U_h$ dimana $(1 - \delta)$ merupakan proporsi efektivitas kontrol u_2 berupa pemberian konseling dan τ persatuan waktu adalah laju transisi dari U_h ke D . Selain itu, terdapat pengurangan dari kematian alami sebesar μD persatuan waktu dan kematian karena perceraian sebesar εD persatuan waktu, serta transisi D ke S dengan laju ρD persatuan waktu, sehingga akan didapatkan persamaan berikut.

$$\frac{dD}{dt} = (1 - \delta u_2)\tau U_h - (\rho + \varepsilon + \mu)D \quad (4.5)$$

Berdasarkan keterangan di atas, modifikasi model matematika dinamika perceraian memiliki tujuan utama untuk meminimalkan subpopulasi *Unhealthy Marriage* (U_h) dan subpopulasi *Divorce* (D). Diberikan dua variabel kontrol yaitu u_1 berupa kontrol edukasi pasca nikah supaya pasangan mengetahui keistimewaan dan kewajibannya (Hasan, 2003) dan kontrol u_2 berupa pemberian konseling untuk membantu individu mencari, menetapkan, dan mengambil keputusan tentang kehidupan keluarga yang sedang dijalani (Murtadho, 2009). Berikut ini merupakan model matematika dinamika perceraian setelah pemberian kontrol u_1 berupa edukasi pasca nikah dan u_2 berupa pemberian konseling dalam bentuk sistem Persamaan Diferensial yaitu.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \pi N + \rho D - \gamma S - \mu S \\ \frac{dM}{dt} = \gamma S - (1 - u_1)\beta MD - \mu M \\ \frac{dH}{dt} = (1 - u_1)(1 - \alpha)\beta MD + \delta u_2 U_h - \theta H - \mu H \\ \frac{dU_h}{dt} = (1 - u_1)\alpha\beta MD + \theta H - (1 - \delta u_2)\tau U_h - \delta u_2 U_h - \mu U_h \\ \frac{dD}{dt} = (1 - \delta u_2)\tau U_h - (\rho + \varepsilon + \mu)D \end{cases} \quad (4.6)$$

Dengan total populasi $N(t)$ pada waktu t menyatakan jumlah dari semua kompartemen dalam model matematika dinamika perceraian, yaitu:

$$N(t) = S(t) + M(t) + H(t) + U_h(t) + D(t)$$

Teorema 4.1.1 Diberikan sistem persamaan (4.6) dengan $(S_0, M_0, H_0, U_{h0}, D_0) \geq (0, 0, 0, 0, 0)$ dan fungsi tujuan $J(u)$ dari sistem persamaan (4.6), sehingga eksistensi kontrol optimal (u_1, u_2) dan solusi state $(S^*, M^*, H^*, U_h^*, D^*)$ meminimumkan

fungsi tujuan $J(u)$ terhadap U , yaitu

$$J(u_1^*, u_2^*) = \min\{J(u_1, u_2) | (u_1, u_2) \in U\}$$

Bukti. Kontrol optimal dikatakan eksis jika memenuhi kondisi:

1. Himpunan kontrol dan variabel *state* tidak kosong.

Misalkan $U = \{(u_1, u_2) | 0 \leq u_i \leq u_{imax}, i = 1, 2 \text{ untuk } \forall t \in [0, t_f]\}$, maka jelas bahwa terdapat himpunan kontrol. Solusi dari sistem *state* bersifat kontinu dan terbatas untuk setiap fungsi kontrol dalam U . Misal persamaan *state* $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, $x(0) = x_0$. Asumsikan bahwa fungsi $f : [0, t] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ memenuhi kondisi kontinuitas dan kondisi Lipschitz terhadap variabel *state* x , yaitu terdapat konstanta $L > 0$ sehingga $\forall t \in [0, t], x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, u \in U$, $\|f(t, x_1, u) - f(t, x_2, u)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$. Artinya, perubahan nilai fungsi f terhadap perubahan x dibatasi oleh konstanta L , sehingga f tidak berubah terlalu tajam terhadap perubahan x , sehingga himpunan kontrol dan *state* tidak kosong.

2. Himpunan kontrol bersifat konveks dan tertutup.

- a. Himpunan kontrol U tertutup

Akan dibuktikan bahwa himpunan kontrol U tertutup, dimana $U = \{u \in \mathbb{R} | a \leq u \leq b\}$ dengan $0 \leq a \leq b \leq 0.9$. Ambil sembarang $u \notin [a, b]$, sehingga $u < a$ dan $u > b$. Ketika $u < a$ akan diambil lingkungan terbuka di sekitar u dengan jari-jari $\varepsilon_u = |u - a|$, maka diperoleh $V_{\varepsilon_u}(u) = (u - \varepsilon_u, u + \varepsilon_u)$. Karena $u + \varepsilon_u = a$, maka lingkungan tidak memotong interval $[a, b]$, sehingga $[a, b] \cap V_{\varepsilon_u}(u) = \emptyset$. Ketika $u > b$ akan diambil lingkungan terbuka di sekitar u dengan jari-jari $\varepsilon_u =$

$|u-b|$, maka $V_{\varepsilon_u}(u) = (u-\varepsilon_u, u+\varepsilon_u)$. Karena $u-\varepsilon_u = b$, maka $[a, b] \cap V_{\varepsilon_u}(u) = \emptyset$. Untuk $\forall u \notin [a, b]$, terdapat lingkungan terbuka yang tidak beririsan dengan $[a, b]$, maka komplemen dari $[a, b]$ adalah himpunan terbuka. Dengan demikian, karena semua nilai $u \in U$ memenuhi $a \leq u \leq b$ dengan $0 \leq a \leq b \leq 0.9$, maka terbukti bahwa himpunan kontrol U tertutup.

b. Himpunan kontrol U konveks

Misal diambil sembarang $u, u' \in U$, akan dibuktikan bahwa $z = \theta u + (1 - \theta)u' \in U$ dimana $U \in [0, 1]$. Dari $\theta u \leq \theta$ dan $(1 - \theta)u' \leq (1 - \theta)$, maka di dapatkan

$$0 \leq \theta u + (1 - \theta)u' \leq \theta + (1 - \theta) = 1.$$

Maka dari itu, $0 \leq \theta u + (1 - \theta)u' \leq 1$ untuk $\forall u, u' \in U$ dan $\theta \in [0, 1]$, maka himpunan kontrol U bersifat konveks.

3. Setiap ruas kanan dari sistem terbatas oleh fungsi linear terhadap variabel *state* dan kontrol.

Setiap ruas kanan dari sistem persamaan (4.6) bersifat kontinu. Semua variabel $SMHU_hD$ dan u terbatas pada interval $[0, t_f]$. Berdasarkan sistem persamaan *state* pada (4.6), diperoleh suatu matrik dari ruas kanan persamaan tersebut, sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 & 0 & 0 & \rho \\ \gamma & -(1 - u_1)\beta D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - u_1)(1 - \alpha)\beta D & -(\theta + \mu) & \delta u_2 & 0 \\ 0 & (1 - u_1)\alpha\beta D & \theta & -(1 - \delta u_2)\tau - \delta u_2 - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - \delta u_2)\tau & -(\rho + \varepsilon + \mu) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S \\ M \\ H \\ U_h \\ D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -(\gamma + \mu) \\ -(1 - u_1)\beta D \\ -(\theta + \mu) \\ -(1 - \delta u_2)\tau - \delta u_2 - \mu \\ -(\rho + \varepsilon + \mu) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - u_1)(1 - \alpha)\beta D & 0 & \delta u_2 & 0 \\ 0 & (1 - u_1)\alpha\beta D & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - \delta u_2)\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ M \\ H \\ U_H \\ D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga terlihat bahwa,

$$\begin{bmatrix} S' \\ M' \\ H' \\ U'_h \\ D' \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - u_1)(1 - \alpha)\beta D & 0 & \delta u_2 & 0 \\ 0 & (1 - u_1)\alpha\beta D & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - \delta u_2)\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ M \\ H \\ U_h \\ D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, nilai parameter dan nilai variabel selalu positif untuk setiap periode t , maka dijamin bahwa ruas kiri selalu lebih kecil atau sama dengan ruas kanan. Berdasarkan definisi bahwa $\left| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right| = \begin{bmatrix} |a| \\ |b| \end{bmatrix}$ adalah nilai absolut dari tiap elemen dalam matriks, dipeoleh

$$\begin{bmatrix} S' \\ M' \\ H' \\ U'_h \\ D' \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - u_1)(1 - \alpha)\beta D & 0 & \delta u_2 & 0 \\ 0 & (1 - u_1)\alpha\beta D & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - \delta u_2)\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ M \\ H \\ U_h \\ D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga akan didapatkan:

$$S' \leq |\rho D + \pi N|$$

$$M' \leq |\gamma S|$$

$$H' \leq |(1 - u_1)(1 - \alpha)\beta MD + \delta u_2 U_h|$$

$$U'_h \leq |(1 - u_1)\alpha\beta MD + \theta H|$$

$$D' \leq |(1 - \delta u_2)\tau U_h|$$

dengan u_1, u_2 memiliki batas yaitu $0 \leq u_1 \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 1$.

4. Integrand dari fungsi objektif (tujuan) bersifat konveks terhadap U.

Fungsi $J(u_i^*)$ dikatakan konveks pada interval $0 \leq u_i \leq 1$, maka berlaku

$$J(\theta u_1 + (1 - \theta)u_2) \leq (1 - \theta)J(u_2) + \theta J(u_1)$$

ambil sembarang $u, u' \in [0, 1], \forall \theta \in [0, 1]$, dengan

$$J(u_i^*) = A_1 U_h(t) + A_2 D(t) + \frac{1}{2} A_3 u_1^2(t) + \frac{1}{2} A_4 u_2^2(t)$$

akan dibuktikan bahwa

$$J(\theta u + (1 - \theta)u') \leq \theta J(u) + (1 - \theta)J(u'),$$

dimana

$$\begin{aligned} & J(\theta u + (1 - \theta)u') \\ &= A_1 U_h + A_2 D + \frac{A_3}{2} (\theta u + (1 - \theta)u')^2 + \frac{A_4}{2} (\theta u + (1 - \theta)u')^2 \\ &= A_1 U_h + A_2 D + \left(\frac{A_3}{2} + \frac{A_4}{2} \right) (\theta u + (1 - \theta)u')^2 \end{aligned} \tag{4.7}$$

dan

$$\begin{aligned} & \theta J(u) + (1 - \theta)J(u') \\ &= \theta \left(A_1 U_h + A_2 D + \frac{1}{2} A_3 u^2 + \frac{1}{2} A_4 u^2 \right) + (1 - \theta) \left(A_1 U_h + \right. \\ & \quad \left. A_2 D + \frac{1}{2} A_3 u'^2 + \frac{1}{2} A_4 u'^2 \right) \\ &= A_1 U_h + A_2 D + \left(\frac{A_3}{2} + \frac{A_4}{2} \right) (\theta u^2 + (1 - \theta)u'^2) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Pada persamaan (4.7) dan (4.8) dipengaruhi oleh nilai $(\theta u + (1 - \theta)u')^2$ dan $(\theta u^2 + (1 - \theta)u'^2)$. Sehingga untuk

membandingkan $J(\theta u + (1 - \theta)u') \leq \theta J(u) + (1 - \theta)J(u')$
dapat dibuktikan nilai dari

$$(\theta u + (1 - \theta)u')^2 \leq \theta u^2 + (1 - \theta)u'^2$$

dengan

$$\begin{aligned}
 (\theta u + (1 - \theta)u')^2 &= (u\theta)^2 + 2u\theta(1 - \theta)u' + (1 - \theta)^2u'^2 \\
 &= (u\theta)^2 + 2uu'\theta - 2uu'\theta^2 + (1 - 2\theta + \theta^2) \\
 &\quad u'^2 \\
 &= (u\theta)^2 + 2uu'\theta - 2uu'\theta^2 + u'^2 - 2u'^2\theta + \\
 &\quad u'^2\theta^2 \\
 &= ((u\theta)^2 - (u'\theta)^2) + 2uu'\theta - 2uu'\theta^2 + u'^2 \\
 &\quad - 2u'^2\theta \\
 &= (u\theta - u'\theta)^2 + 2uu'\theta^2 - 2uu'\theta^2 + 2uu'\theta \\
 &\quad + u'^2 - 2u'^2\theta \\
 &= (u\theta - u'\theta)^2 + 2uu'\theta + u'^2 - 2u'^2\theta \\
 &= (u\theta - u'\theta)^2 + u'^2 - (2u'^2\theta - 2uu'\theta) \\
 &= ((u - u')\theta)^2 + u'^2 - 2u'^2\theta \left(1 - \frac{u}{u'}\right)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

dan

$$\theta u^2 + (1 - \theta)u'^2 = \theta u^2 + u'^2 - \theta u'^2 \tag{4.10}$$

Dari persamaan (4.9) dan (4.10), diambil sebarang $\theta \in [0, 1]$
dan $u, u' \in [0, 1]$, dapat dilihat bahwa nilai $((u - u')\theta)^2 \leq$
 θu^2 dan nilai $(-2u'^2\theta (1 - \frac{u}{u'})) \leq (-\theta u'^2)$, sehingga akan

diperoleh

$$\begin{aligned}
 (\theta u + (1 - \theta)u')^2 &= ((u - u')\theta)^2 + u'^2 - 2u'^2\theta \left(1 - \frac{u}{u'}\right) \\
 &\leq \theta u^2 + u'^2 - \theta u'^2 \\
 &= \theta u^2 + (1 - \theta)u'^2
 \end{aligned}$$

Karena bagian kontrol dari fungsi objektif berupa kombinasi linier dari fungsi kuadrat u_1^2, u_2^2 , dan fungsi kuadrat bersifat konveks, maka integran dari fungsi objektif konveks terhadap U .

5. Integrand dari fungsi objektif (tujuan) terbatas.

Diketahui bahwa $U_h(t)$ dan $D(t)$ adalah fungsi yang kontinu dan terbatas pada interval $[0, t_f]$. Maka, terdapat konstanta $c > 0$ sedemikian sehingga

$$U_h(t) + D(t) \geq -c \quad \text{untuk semua } t \in [0, t_f]$$

Selain itu, bagian kontrol dari fungsi objektif memiliki bentuk $\frac{\alpha}{2}(u_1^2(t) + u_2^2(t))$, yang selalu bernilai non-negatif untuk $u_1, u_2 \in [0, 1]$. Sehingga, keseluruhan integrand fungsi objektif

$$U_h(t) + D(t) + \frac{\alpha}{2}(u_1^2(t) + u_2^2(t))$$

memiliki batas bawah

$$U_h(t) + D(t) + \frac{\alpha}{2}\bar{u}^2 \geq -c + \frac{\alpha}{2}\bar{u}^2,$$

dengan $\bar{u}^2 = u_1^2 + u_2^2$. Dengan demikian, integrand dari fungsi objektif terbatas dari bawah.

Berdasarkan pembuktian yang telah dilakukan, terbukti bahwa

kontrol optimal pada model dinamika perceraian dapat dijamin eksistensinya karena terdapat kontrol yang dapat meminimalkan fungsi tujuan yang diinginkan. ■

B. Analisis Kontrol Optimal

Untuk memastikan bahwa model matematika yang dirumuskan memenuhi syarat tertentu, diperlukan pendekatan analisis kontrol optimal. Di bawah ini akan diuraikan langkah-langkah dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal, sehingga diperoleh sistem yang optimal.

1. Menentukan Fungsi Tujuan

Dalam penelitian ini bertujuan untuk meminimalkan subpopulasi *Unhealthy Marriage* (U_h) dan subpopulasi *Divorce* (D) dengan biaya kontrol berupa edukasi pasca nikah (u_1) dan biaya kontrol berupa pemberian konseling (u_2). Fungsi tujuan dari masalah kontrol optimal tersebut diformulasikan dalam rumus matematika berikut.

$$J(u_1, u_2) = \int_0^t U_h + D + \frac{1}{2}Au_1^2 + \frac{1}{2}Bu_2^2 \, dt \quad (4.11)$$

Dengan kendala pada sistem persamaan (4.13), dan A adalah bobot yang berkorelasi dengan biaya pencegahan interaksi antara populasi *Marriage* (M) dan populasi *Divorce* (D). Sedangkan B adalah bobot yang berkorelasi dengan biaya pemberian konseling. Selanjutnya yaitu menentukan kontrol

optimal u_1^* dan u_2^* sedemikian sehingga berlaku:

$$J(u_1^*, u_2^*) = \min\{J(u_1, u_2) \mid u_1, u_2 \in U\},$$

dengan $U = \{(u_1, u_2) \mid 0 \leq u_1 \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 1\}$.

Masalah kontrol optimal terpenuhi jika memenuhi kondisi pada prinsip maksimum Pontryagin.

2. Fungsi Hamiltonian

Prinsip maksimum Pontryagin diterapkan untuk menentukan kontrol optimal u_1^* dan u_2^* melalui pembentukan fungsi Hamiltonian dari masalah kontrol optimal. Sesuai dengan prinsip tersebut, langkah pertama dalam membentuk fungsi Hamiltonian adalah menyelesaikan fungsi tujuan dengan fungsi kendala (*state*) dengan $H_a(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda(t)g(t, x, u)$. Dengan demikian, fungsi tujuan akan menghasilkan:

$$f(t, x, u) = U_h(t) + D(t) + \frac{1}{2}Au_1^2(t) + \frac{1}{2}Bu_2^2(t) \quad (4.12)$$

Masalah kontrol optimal terpenuhi apabila memenuhi prinsip maksimum Pontryagin, dengan langkah awal menemukan fungsi hamiltonian yang bersesuaian dengan sistem persamaan (4.13), sehingga diperoleh:

$$H_a = U_h + D + \frac{1}{2}Au_1^2 + \frac{1}{2}Bu_2^2 + \sum_{\lambda=1}^5 \lambda_i g_i \quad (4.13)$$

Dimana, g_i adalah fungsi kendala (*state*) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 g_1 = \frac{dS}{dt} &= \pi N + \rho D - \gamma S - \mu S \\
 g_2 = \frac{dM}{dt} &= \gamma S - (1 - u_1)\beta MD - \mu M \\
 g_3 = \frac{dH}{dt} &= (1 - u_1)(1 - \alpha)\beta MD + \delta u_2 U_h - \theta H - \mu H \\
 g_4 = \frac{dU_h}{dt} &= (1 - u_1)\alpha\beta MD + \theta H - (1 - \delta u_2)\tau U_h - \\
 &\quad \delta u_2 U_h - \mu U_h \\
 g_5 = \frac{dD}{dt} &= (1 - \delta u_2)\tau U_h - (\rho + \varepsilon + \mu)D
 \end{aligned}$$

Sehingga akan menghasilkan persamaan Hamiltonian sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 H_a(t, x, u, \lambda) &= U_h + D + \frac{1}{2}Au_1^2 + \frac{1}{2}Bu_2^2 \\
 &\quad + \lambda_1[\pi N + \rho D - \gamma S - \mu S] \\
 &\quad + \lambda_2[\gamma S - (1 - u_1)\beta MD - \mu M] \\
 &\quad + \lambda_3[(1 - u_1)(1 - \alpha)\beta MD + \delta u_2 U_h - \theta H - \\
 &\quad \mu H] \\
 &\quad + \lambda_4[(1 - u_1)\alpha\beta MD + \theta H - (1 - \delta u_2)\tau U_h - \\
 &\quad \delta u_2 U_h - \mu U_h] \\
 &\quad + \lambda_5[(1 - \delta u_2)\tau U_h - (\rho + \varepsilon + \mu)D]
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Fungsi Hamiltonian akan mencapai solusi optimal apabila memenuhi kondisi stasioner, persamaan *state*, dan persamaan *costate*.

3. Kondisi Stasioner

Kondisi stasioner merupakan kondisi dimana kontrol u_1 dan u_2 harus dapat meminimumkan bentuk Hamiltonian pada setiap waktu, sehingga terdapat kondisi yang harus dipenuhi yaitu turunan pertama Hamiltonian terhadap u_1 dan turunan pertama Hamiltonian terhadap u_2 harus sama dengan nol.

$$\bullet \frac{\partial H_a}{\partial u_1^*} = 0$$

$$\Leftrightarrow Au_1 + \lambda_2\beta MD + \lambda_3(\alpha - 1)\beta MD - \lambda_4\alpha\beta MD = 0$$

$$\Leftrightarrow Au_1 = \alpha\beta MD\lambda_4 - \beta MD\lambda_2 - \lambda_3(\alpha - 1)\beta MD$$

$$\Leftrightarrow u_1^* = \frac{\beta MD(\alpha\lambda_4 - \lambda_2 - (\alpha - 1)\lambda_3)}{A}$$

$$\bullet \frac{\partial H_a}{\partial u_2^*} = 0$$

$$\Leftrightarrow Bu_2 - \lambda_4(\delta U_h - \tau\delta U_h) + \lambda_3\delta U_h - \lambda_5\tau\delta U_h = 0$$

$$\Leftrightarrow Bu_2 = \delta U_h\lambda_4 - \tau\delta U_h\lambda_4 - \delta U_h\lambda_3 + \lambda_5\tau\delta U_h$$

$$\Leftrightarrow u_2^* = \frac{\delta U_h(\lambda_4 - \lambda_3) - \tau\delta U_h(\lambda_4 - \lambda_5)}{B}$$

Sedemikian sehingga diperoleh nilai kontrol optimal u_1^* dan u_2^* sebagai berikut.

$$u_1^* = \min \left\{ \max \left(0, \frac{\beta MD(\alpha\lambda_4 - \lambda_2 - (\alpha - 1)\lambda_3)}{A} \right), 1 \right\}$$

$$u_2^* = \min \left\{ \max \left(0, \frac{\delta U_h(\lambda_4 - \lambda_3) - \tau\delta U_h(\lambda_4 - \lambda_5)}{B} \right), 1 \right\}$$

4. Persamaan State

Persamaan *state* merupakan persamaan yang menjadi fungsi kendala dalam masalah kontrol optimal.

Berdasarkan persamaan model dinamika perceraian di atas, maka diperoleh persamaan *state* sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H_a}{\partial \lambda_1} &= \frac{dS}{dt} = \pi N + \rho D - \gamma S - \mu S \\
 \frac{\partial H_a}{\partial \lambda_2} &= \frac{dM}{dt} = \gamma S - (1 - u_1)\beta MD - \mu M \\
 \frac{\partial H_a}{\partial \lambda_3} &= \frac{dH}{dt} = (1 - u_1)(1 - \alpha)\beta MD + \delta u_2 U_h - \theta H - \mu H \\
 \frac{\partial H_a}{\partial \lambda_4} &= \frac{dU_h}{dt} = (1 - u_1)\alpha\beta MD + \theta H - (1 - \delta u_2)\tau U_h - \\
 &\quad \delta u_2 U_h - \mu U_h \\
 \frac{\partial H_a}{\partial \lambda_5} &= \frac{dD}{dt} = (1 - \delta u_2)\tau U_h - (\rho + \varepsilon + \mu)D
 \end{aligned}$$

dengan kondisi awal, yaitu:

$$\begin{aligned}
 S(0) &= S_0, \quad M(0) = M_0, \quad H(0) = H_0, \quad U_h(0) = U_{h0}, \quad \text{dan} \\
 D(0) &= D_0.
 \end{aligned}$$

6. Persamaan *Costate*

Persamaan adjoin atau *costate* adalah nilai negatif dari fungsi Hamiltonian yang diturunkan terhadap variabel-variabel *state* berdasarkan persamaan (4.6). Berikut adalah persamaan *costate* yang diperoleh berdasarkan persamaan *state*.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial H_a}{\partial S} \\
 &= -(\lambda_1(-\gamma - \mu) + \lambda_2\gamma) \\
 &= \lambda_1(\gamma + \mu) - \lambda_2\gamma \\
 \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial H_a}{\partial M} \\
 &= -(\lambda_2(-\beta D + u_1\beta D - \mu) + \lambda_3(\beta D - \alpha\beta D - u_1\beta D \\
 &\quad + \alpha u_1\beta D) + \lambda_4(\alpha\beta D - u_1\alpha\beta D))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_2(\mu - \beta D(u_1 - 1)) - \lambda_3 \beta D(\alpha - 1)(u_1 - 1) \\
&\quad + \lambda_4 \alpha \beta D(u_1 - 1) \\
\frac{d\lambda_3}{dt} &= -\frac{\partial H_a}{\partial H} \\
&= -(\lambda_3(-\theta - \mu) + \lambda_4 \theta) \\
&= \lambda_3(\theta + \mu) - \lambda_4 \theta \\
\frac{d\lambda_4}{dt} &= -\frac{\partial H_a}{\partial U_h} \\
&= -(\lambda_3(\delta u_2) + \lambda_4(-\tau + \delta u_2 \tau - \delta u_2 - \mu) + \lambda_5(\tau - \delta u_2 \tau)) \\
&= \lambda_4(\mu + \delta u_2 - \tau(\delta u_2 - 1)) - \lambda_3 \delta u_2 + \lambda_5 \tau(\delta u_2 - 1) - 1 \\
\frac{d\lambda_5}{dt} &= -\frac{\partial H_a}{\partial D} \\
&= -(\lambda_1(\rho) + \lambda_2(-\beta M + u_1 \beta M) + \lambda_3(\beta M - \alpha \beta M - \\
&\quad u_1 \beta M + \alpha u_1 \beta M) + \lambda_4(\alpha \beta M - u_1 \alpha \beta M) + \lambda_5(-\rho - \\
&\quad \epsilon - \mu)) \\
&= \lambda_5(\rho + \epsilon + \mu) - \lambda_1 \rho - \lambda_2 \beta M(u_1 - 1) - \lambda_3 \beta M(\alpha - 1) \\
&\quad (u_1 - 1) + \lambda_4 \alpha \beta M(u_1 - 1) - 1
\end{aligned}$$

Dengan kondisi transversalnya, yaitu $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \lambda_3(t) = \lambda_4(t) = \lambda_5(t) = 0$.

7. Sistem yang Optimal

Untuk menyelesaikan permasalahan kontrol optimal, digunakan metode *sweep* maju mundur yang memerlukan sistem optimal, meliputi persamaan *state*, *costate*, dan kondisi stasioner sebagai berikut.

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\frac{\partial H_a}{\partial \lambda_1^*} = \frac{dS^*}{dt} & = \pi N + \rho D^* - \gamma S^* - \mu S^* \\
\frac{\partial H_a}{\partial \lambda_2^*} = \frac{dM^*}{dt} & = \gamma S^* - (1 - u_1^*)\beta M^* D^* - \mu M^* \\
\frac{\partial H_a}{\partial \lambda_3^*} = \frac{dH^*}{dt} & = (1 - u_1^*)(1 - \alpha)\beta M^* D^* + \delta u_2 U_h^* - \\
& \quad \theta H^* - \mu H^* \\
\frac{\partial H_a}{\partial \lambda_4^*} = \frac{dU_h^*}{dt} & = (1 - u_1^*)\alpha\beta M^* D^* + \theta H^* - (1 - \delta u_2^*) \\
& \quad \tau U_h^* - \delta u_2^* U_h^* - \mu U_h^* \\
\frac{\partial H_a}{\partial \lambda_5^*} = \frac{dD^*}{dt} & = (1 - \delta u_2^*)\tau U_h^* - (\rho + \varepsilon + \mu)D^* \\
\frac{d\lambda_1^*}{dt} = -\frac{\partial H_a}{\partial S^*} & = \lambda_1(\gamma + \mu) - \lambda_2\gamma \\
\frac{d\lambda_2^*}{dt} = -\frac{\partial H_a}{\partial M^*} & = \lambda_2(\mu - \beta D^*(u_1^* - 1)) - \lambda_3\beta D^*(\alpha - 1) \\
& \quad (u_1^* - 1) + \lambda_4\alpha\beta D^*(u_1^* - 1) \\
\frac{d\lambda_3^*}{dt} = -\frac{\partial H_a}{\partial H^*} & = \lambda_3(\theta + \mu) - \lambda_4\theta \\
\frac{d\lambda_4^*}{dt} = -\frac{\partial H_a}{\partial U_h^*} & = \lambda_4(\mu + \delta u_2^* - \tau(\delta u_2^* - 1)) - \lambda_3\delta u_2^* + \\
& \quad \lambda_5\tau(\delta u_2^* - 1) - 1 \\
\frac{d\lambda_5^*}{dt} = -\frac{\partial H_a}{\partial D^*} & = -1 + \lambda_5(\rho + \epsilon + \mu) - \lambda_1\rho - \lambda_2\beta M^* \\
& \quad (u_1^* - 1) - \lambda_3\beta M^*(\alpha - 1)(u_1^* - 1) + \\
& \quad \lambda_4\alpha\beta M^*(u_1^* - 1) - 1 \\
S^*(0) = S_0, & M^*(0) = M_0, H^*(0) = H_0, U_h^*(0) = U_{h0}, \\
D^*(0) = D_0 & \\
\lambda_1^*(t) = \lambda_2^*(t) & = \lambda_3^*(t) = \lambda_4^*(t) = \lambda_5^*(t) = 0
\end{array} \right. \quad (4.15)$$

$$\begin{cases} u_1^* = \min \left\{ \max \left(0, \frac{\beta MD(\alpha\lambda_4 - \lambda_2 - (\alpha - 1)\lambda_3)}{A} \right), 1 \right\} \\ u_2^* = \min \left\{ \max \left(0, \frac{\delta U_h(\lambda_4 - \lambda_3) - \tau \delta U_h(\lambda_4 - \lambda_5)}{B} \right), 1 \right\} \end{cases} \quad (4.16)$$

C. Interpretasi Hasil Simulasi Numerik

Selanjutnya sistem yang optimal diselesaikan secara numerik menggunakan metode *sweep* maju mundur. Dalam model dinamika perceraian ini mencakup dua kontrol, yaitu u_1 sebagai kontrol edukasi pasca nikah yang diterapkan pada subpopulasi *Marriage* (M) dan u_2 sebagai kontrol pemberian konseling yang diberikan kepada subpopulasi *Unhealthy Marriage*. Tahap awal dalam simulasi numerik melibatkan penentuan nilai awal untuk setiap subpopulasi yang terlibat. Beberapa nilai subpopulasi dan parameter diasumsikan agar model memiliki solusi yang optimal dan dapat dianalisis meskipun data empiris tidak tersedia secara lengkap.

Tabel 4.3: Nilai Awal Subpopulasi pada Model $SMHU_HD$ (*Single - Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Divorce*)

Populasi	Nilai	Sumber
S(t)	1000	[Tessema et al., 2022]
M(t)	20	[Tessema et al., 2022]
H(t)	200	[Asumsi]

Populasi	Nilai	Sumber
$U_h(t)$	100	[Tessema et al., 2022]
$D(t)$	30	[Asumsi]

Langkah berikutnya adalah menetapkan nilai untuk setiap parameter dalam model yang akan digunakan dalam simulasi numerik.

Tabel 4.4: Nilai Parameter pada Model $SMH U_H D$ (*Single - Marriage - Healthy Marriage - Unhealthy Marriage - Divorce*)

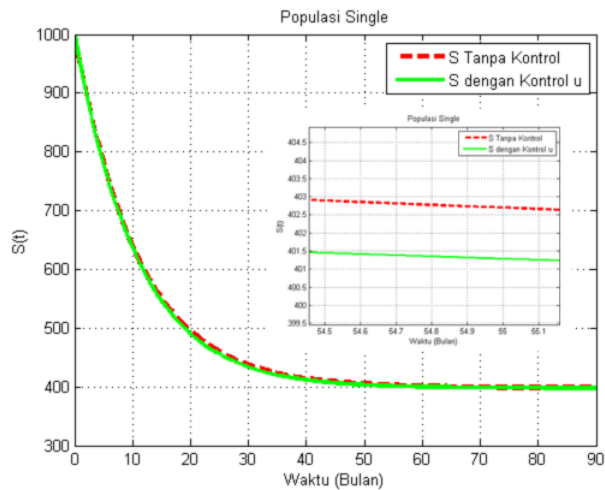
Parameter	Nilai Parameter	Sumber
π	0.028	[Asumsi]
μ	0.015	[Tessema et al., 2022]
γ	0.08	[Tessema et al., 2022]
α	0.1	[Hugo, A., 2021]
β	0.00004	[Asumsi]
θ	0.002	[Asumsi]
δ	0.3	[Tessema et al., 2022]
τ	0.05	[Tessema et al., 2022]
ε	0.3	[Tessema et al., 2022]
ρ	0.1	[Asumsi]

Dengan nilai awal subpopulasi dan nilai parameter di atas, akan dilakukan pengendalian dinamika pereraian melalui penerapan kontrol. Simulasi model ini menggunakan metode sweep maju-mundur dan dijalankan dengan bantuan aplikasi MATLAB R2013a sebagai berikut. Pada penelitian ini, akan dianalisis perubahan jumlah subpopulasi dalam model dinamika perceraian sebelum dan sesudah penerapan

kontrol berupa edukasi pasca nikah serta pemberian konseling untuk mengurangi individu yang pernikahannya tidak sehat dan yang bercerai, seperti yang dijelaskan berikut ini.

1. Simulasi 1

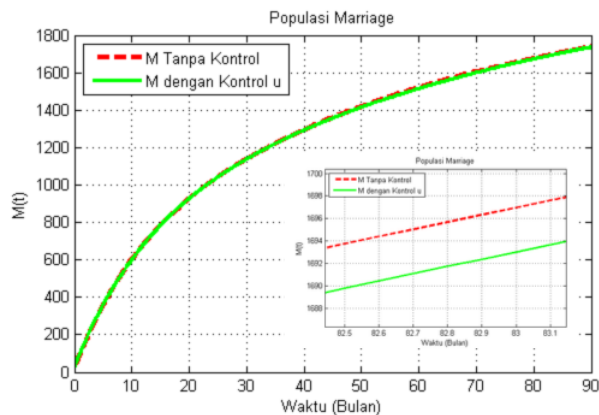
Pada simulasi 1, akan disimulasikan kontrol ketika $u_1 \neq 0$ dan $u_2 \neq 0$ dengan bobot u_1 berupa edukasi pasca nikah sebesar $A = 0.01$ dan bobot u_2 berupa pemberian konseling sebesar $B = 0.7$ serta nilai awal subpopulasi dan nilai parameter di atas. Hasil dari simulasi numerik yang diperoleh akan disajikan dalam bentuk grafik berikut ini.



Gambar 4.2: Grafik Subpopulasi *Single* Sebelum dan Sesudah Kontrol

Pada gambar 4.2 menampilkan grafik perubahan

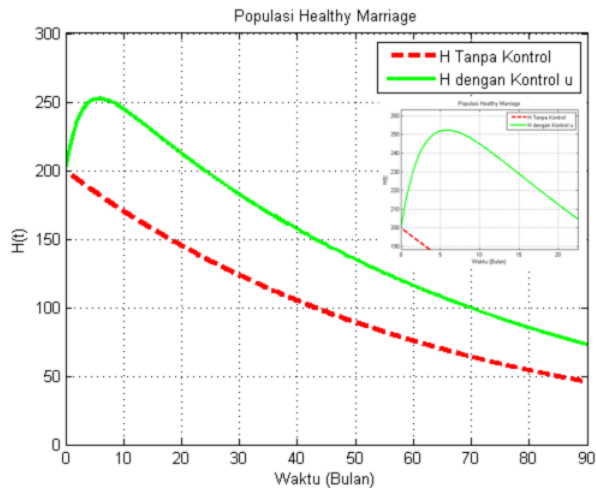
subpopulasi *Single* sebelum dan setelah dikontrol yang mengalami penurunan bertahap dari nilai awal $S(0) = 1000$ dan terus berkurang seiring waktu. Setelah diberikan kontrol, penurunan jumlah subpopulasi *Single* terjadi lebih cepat, terutama saat $t = 4$. Selanjutnya, jumlah individu dalam subpopulasi pada $t = 62$ sekitar 399 individu. Subpopulasi *Single* mengindikasikan bahwa subpopulasi ini tidak secara langsung dipengaruhi oleh penerapan kontrol. Hal ini disebabkan karena subpopulasi yang lebih rentan terhadap intervensi adalah subpopulasi *Marriage*. Dengan demikian, intervensi yang diberikan tidak memiliki dampak langsung terhadap subpopulasi *Single*.



Gambar 4.3: Grafik Subpopulasi *Marriage* Sebelum dan Sesudah Kontrol

Pada gambar 4.3 menampilkan grafik perubahan subpopulasi *Marriage* sebelum dan setelah diberikan

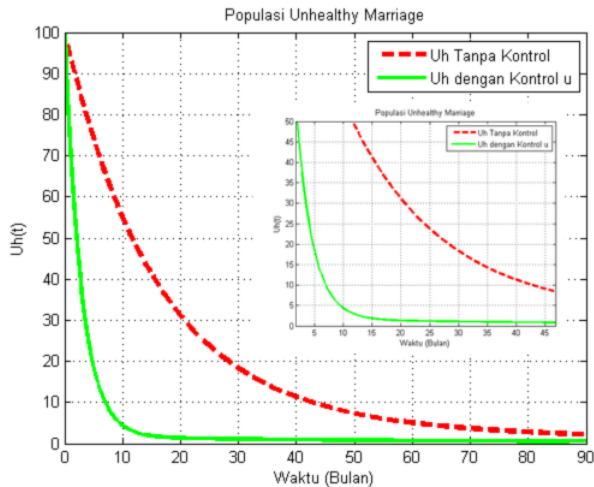
kontrol. Sebelum adanya kontrol, jumlah individu dalam subpopulasi *Marriage* mengalami peningkatan secara bertahap dari nilai awal $M(0) = 20$ dan terus bertambah seiring waktu, namun setelah diberikan kontrol tidak menunjukkan perubahan. Akan tetapi, jumlah populasi secara keseluruhan mengalami penurunan yang lebih stabil dibandingkan kondisi sebelum kontrol diterapkan. Penurunan jumlah individu dalam subpopulasi ini menjadi lebih jelas pada $t = 38$. Hal ini mengindikasikan bahwa penerapan kontrol memiliki dampak dalam mengendalikan jumlah individu dalam subpopulasi *Marriage*. Meskipun perubahan yang terjadi tidak drastis dalam waktu singkat, intervensi ini tetap berperan dalam menekan jumlah populasi dan mencegah peningkatan yang berlebihan dalam jangka waktu tertentu. Berdasarkan penelitian (Nabila, A., dkk, 2024) menunjukkan bahwa edukasi pasca nikah berperan penting dalam membantu pasangan menghadapi konflik rumah tangga dan mampu mengurangi angka perceraian. Penelitian ini menggunakan metode kualitatif dengan empat orang tua mahasiswa PJKR UPI sebagai informan, dengan teknik observasi, dokumentasi, dan wawancara.



Gambar 4.4: Grafik Subpopulasi *Healthy Marriage* Sebelum dan Sesudah Kontrol

Berdasarkan grafik, sebelum adanya kontrol jumlah individu dalam subpopulasi *Healthy Marriage* mengalami penurunan secara bertahap dari nilai awal $H(0) = 200$ hingga mencapai 48 individu pada saat $t = 90$. Namun, setelah diterapkan kontrol terjadi peningkatan pada $t = 5$ dengan kenaikan hingga 252 individu. Meskipun setelahnya jumlah subpopulasi *Healthy Marriage* kembali mengalami penurunan, namun jumlah individu dalam subpopulasi ini tetap lebih tinggi dibandingkan kondisi sebelum adanya kontrol. Hal ini menunjukkan bahwa intervensi dalam bentuk edukasi pasca pernikahan dapat memberikan dampak positif terhadap peningkatan

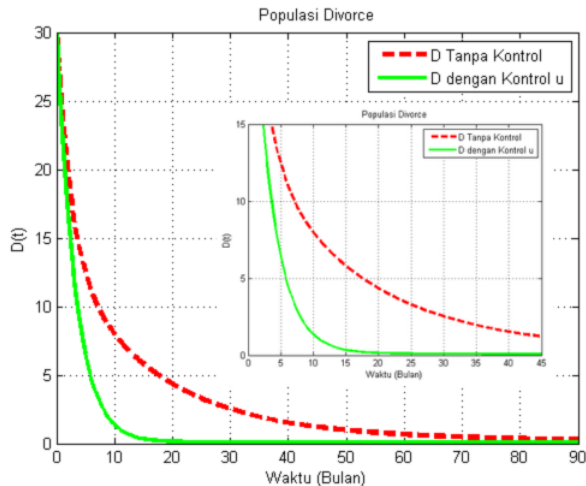
jumlah pasangan yang mempertahankan pernikahan yang sehat, meskipun efeknya bersifat dinamis seiring berjalannya waktu.



Gambar 4.5: Grafik Subpopulasi *Unhealthy Marriage* Sebelum dan Sesudah Kontrol

Gambar 4.5 mengindikasikan bahwa sebelum adanya kontrol, jumlah individu dalam subpopulasi ini mengalami penurunan secara bertahap dari nilai awal $U_h(0) = 100$, hingga akhirnya mencapai kondisi stabil pada $t = 83$. Namun, setelah diterapkan kontrol, jumlah individu dalam subpopulasi *Unhealthy Marriage* mengalami penurunan yang lebih banyak. Penurunan ini terjadi lebih cepat dibandingkan kondisi tanpa kontrol, dengan stabilisasi mulai terlihat sejak $t = 20$. Hasil ini menunjukkan bahwa penerapan strategi

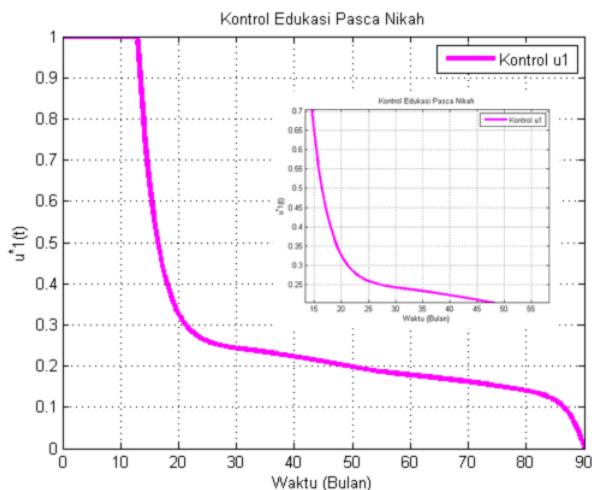
kontrol optimal yang digunakan dalam penelitian ini berhasil dalam menekan jumlah individu subpopulasi *Unhealthy Marriage*, sehingga mendukung tujuan utama dari penerapan kontrol optimal dalam model ini.



Gambar 4.6: Grafik Subpopulasi *Divorce* Sebelum dan Sesudah Kontrol

Berdasarkan gambar 4.6, sebelum diberikan kontrol, jumlah individu dalam subpopulasi *Divorce* mengalami penurunan yang cukup cepat dari nilai awal $D(0) = 30$. Selanjutnya, setelah diterapkan kontrol terjadi penurunan lebih banyak pada saat $t = 5$. Penurunan ini berlangsung dengan cepat hingga akhirnya mencapai kestabilan pada $t = 20$, di mana jumlah individu dalam subpopulasi *Divorce* tidak mengalami perubahan. Hasil ini menunjukkan bahwa strategi kontrol yang

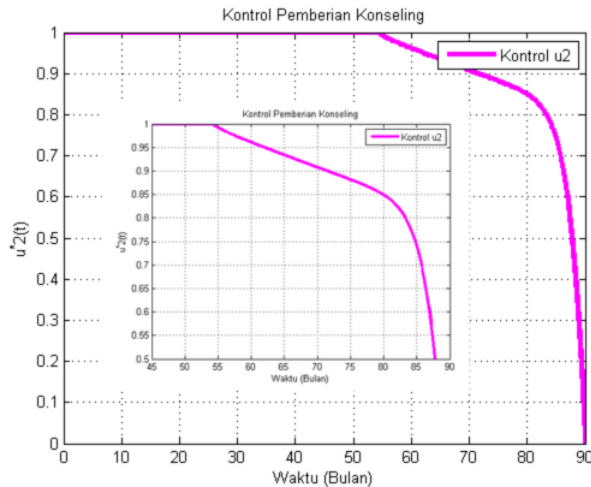
diterapkan efektif dalam mengurangi angka perceraian. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa fungsi tujuan dari masalah kontrol optimal dalam penelitian ini berhasil.



Gambar 4.7: Grafik Simulasi Kontrol u_1 berupa Edukasi Pasca Nikah

Berdasarkan grafik, dapat diamati bahwa pada awal periode, kontrol diberikan dengan intensitas penuh pada $t = 0$ hingga $t = 13$. Setelah periode awal tersebut, intensitas kontrol mulai mengalami penurunan secara bertahap hingga mencapai $t = 85$. Selanjutnya, terjadi penurunan dalam penerapan kontrol hingga $t = 90$. Hasil ini menunjukkan bahwa kontrol edukasi pasca nikah yang diterapkan memiliki efektivitas dalam mengendalikan jumlah subpopulasi *Divorce*.

Penurunan jumlah populasi ini mengindikasikan bahwa kontrol yang diberikan mampu memengaruhi dinamika perceraian dan mencapai tujuan yang diharapkan.



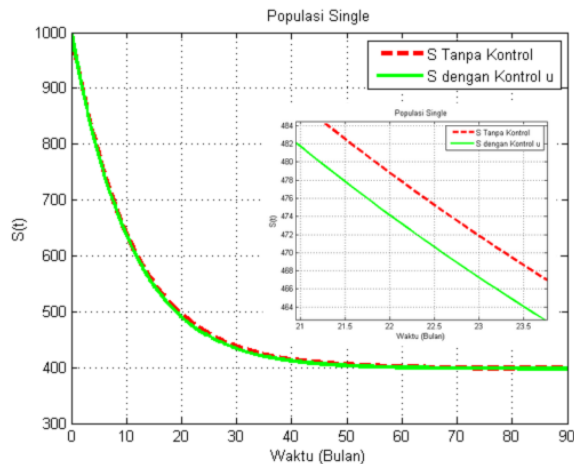
Gambar 4.8: Grafik Simulasi Kontrol u_2 berupa Pemberian Konseling

Berdasarkan gambar 4.8, dapat diamati bahwa pada awal periode pengendalian, kontrol diberikan dengan intensitas penuh 1, yaitu pada $t = 0$ hingga $t = 54$. Setelah periode tersebut, intensitas kontrol mulai berkurang secara bertahap hingga sekitar $t = 80$. Selanjutnya, pada rentang waktu $t = 80$ hingga $t = 90$, kontrol semakin menurun hingga mencapai 0, yang menunjukkan penghentian intervensi. Hasil ini menunjukkan bahwa penerapan kontrol konseling memiliki efektivitas dalam menekan angka pernikahan

tidak sehat, sehingga menciptakan keseimbangan dengan penurunan jumlah individu dalam subpopulasi *Divorce*. Dengan demikian, strategi kontrol optimal yang diterapkan terbukti berhasil dalam menurunkan jumlah individu dalam subpopulasi *Unhealthy Marriage* sekaligus mengurangi tingkat perceraian.

2. Simulasi 2

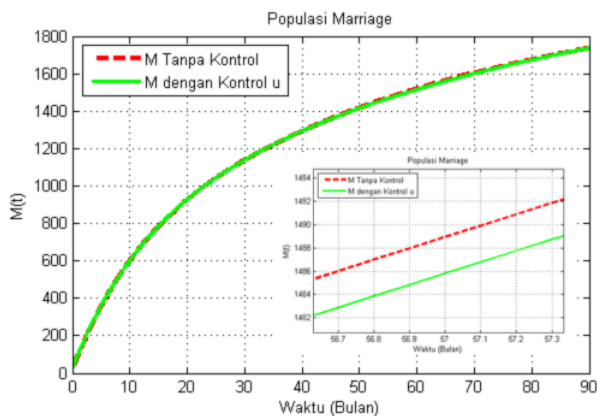
Pada simulasi 2, akan disimulasikan kontrol ketika $u_1 \neq 0$ dan $u_2 \neq 0$ dengan bobot u_1 berupa edukasi pasca nikah sebesar $A = 0.02$ dan bobot u_2 berupa pemberian konseling sebesar $B = 1$. Selain itu, parameter β juga diubah menjadi 0.0000565. Dengan konfigurasi ini, hasil simulasi numerik yang diperoleh akan disajikan dalam bentuk grafik berikut.



Gambar 4.9: Grafik Subpopulasi *Single* Sebelum dan Sesudah Kontrol

Pada gambar 4.9 subpopulasi *Single* sebelum dikontrol,

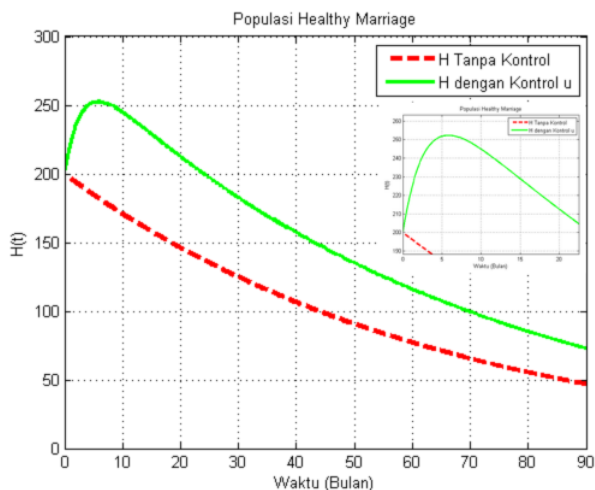
mengalami penurunan dari nilai awal $S(0) = 1000$ dan terus berkurang seiring waktu. Setelah diberikan kontrol, penurunan jumlah subpopulasi *Single* terjadi lebih cepat, terutama pada $t = 12$. Selanjutnya, jumlah individu dalam subpopulasi ini mencapai kestabilan pada $t = 57$. Tidak adanya peningkatan jumlah populasi *Single* mengindikasikan bahwa subpopulasi ini tidak secara langsung dipengaruhi oleh penerapan kontrol. Hal ini disebabkan karena subpopulasi yang lebih rentan terhadap intervensi adalah subpopulasi *Marriage*.



Gambar 4.10: Grafik Subpopulasi *Marriage* Sebelum dan Sesudah Kontrol

Pada gambar 4.10, sebelum diterapkan kontrol, jumlah individu dalam subpopulasi *Marriage* mengalami peningkatan secara bertahap dari nilai awal $M(0) = 20$ dan terus bertambah seiring waktu. Setelah diterapkan kontrol, jumlah individu dalam subpopulasi

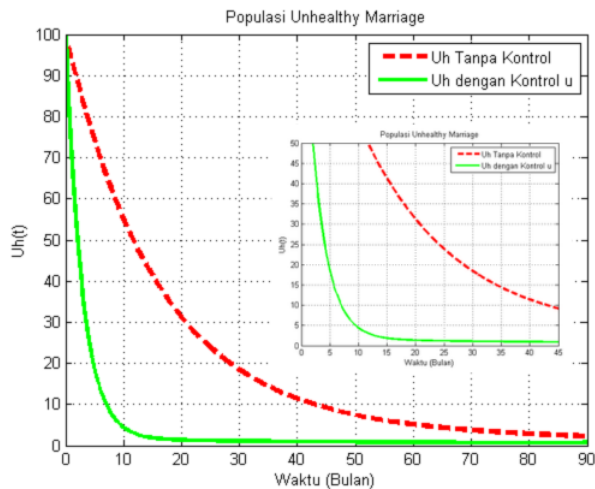
Marriage tidak langsung mengalami perubahan, namun seiring waktu laju pertumbuhan populasi ini mulai melambat dan menunjukkan penurunan jika dibandingkan dengan kondisi sebelum adanya kontrol. Penurunan jumlah individu dalam subpopulasi ini mulai terlihat lebih jelas pada $t = 42$, di mana populasi mulai mengalami penurunan. Meskipun perubahan yang terjadi berlangsung secara bertahap dan tidak langsung memberikan efek drastis dalam waktu singkat, kontrol ini tetap berkontribusi dalam mengurangi pertumbuhan populasi.



Gambar 4.11: Grafik Subpopulasi *Healthy Marriage* Sebelum dan Sesudah Kontrol

Berdasarkan gambar 4.11, sebelum diterapkan kontrol, jumlah individu dalam subpopulasi *Healthy Marriage*

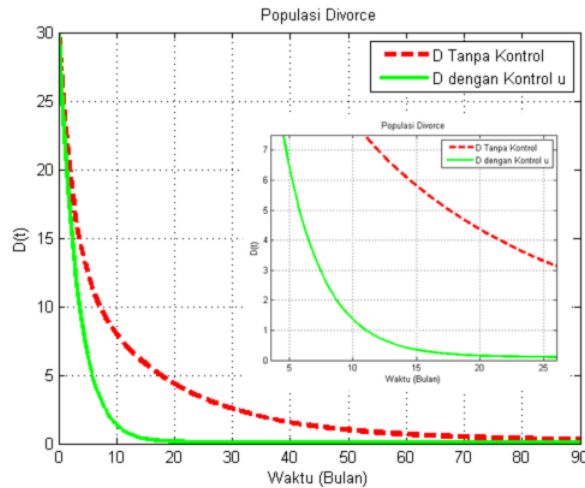
mengalami penurunan seiring waktu dari nilai awal $H(0) = 200$ menjadi 47 individu pada $t = 90$. Namun, setelah diterapkan kontrol terjadi lonjakan jumlah individu dalam subpopulasi *Healthy Marriage* pada $t = 5$ yaitu mencapai 252 individu. Meskipun setelah itu jumlah *Healthy Marriage* kembali mengalami penurunan, tetapi jumlah individu dalam subpopulasi ini tetap lebih tinggi dibandingkan kondisi sebelum adanya kontrol.



Gambar 4.12: Grafik Subpopulasi *Unhealthy Marriage* Sebelum dan Sesudah Kontrol

Pada gambar 4.12, subpopulasi *Unhealthy Marriage* sebelum diterapkan kontrol mengalami penurunan secara bertahap dari nilai awal $U_h(0) = 100$, hingga akhirnya mencapai titik stabil pada $t = 89$. Namun,

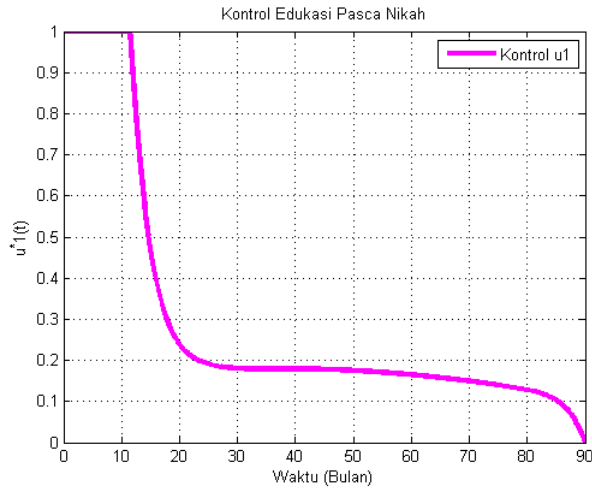
setelah diterapkan kontrol, jumlah individu dalam subpopulasi *Unhealthy Marriage* mengalami penurunan yang lebih drastis. Laju penurunan ini berlangsung lebih cepat, dengan kondisi stabil mulai tampak pada $t = 50$, sehingga kontrol yang diberikan berhasil dalam menekan angka pernikahan tidak sehat.



Gambar 4.13: Grafik Subpopulasi *Divorce* Sebelum dan Sesudah Kontrol

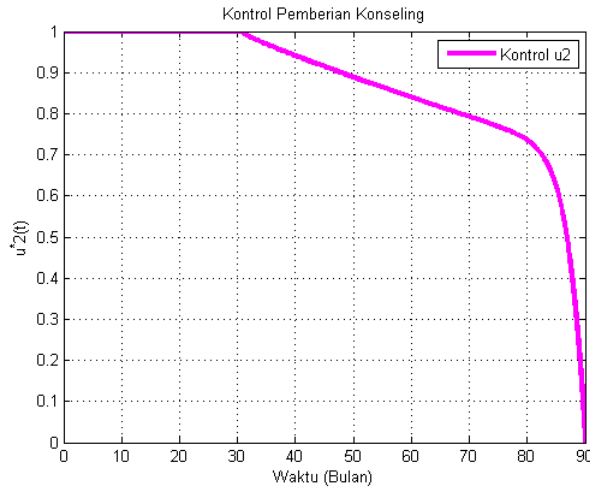
Pada gambar 4.13 menampilkan grafik dimana sebelum adanya kontrol, jumlah individu dalam subpopulasi *Divorce* mengalami penurunan yang cukup pesat dari nilai awal $D(0) = 30$. Setelah diterapkan kontrol u_2 berupa pemberian konseling, penurunan jumlah individu dalam subpopulasi *Divorce* menjadi lebih banyak, terutama pada $t = 13$. Laju penurunan ini

berlangsung dengan cepat hingga akhirnya mencapai kestabilan pada $t = 38$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa fungsi tujuan dalam masalah kontrol optimal pada penelitian ini telah berhasil dicapai.



Gambar 4.14: Grafik Simulasi Kontrol u_1 berupa Edukasi Pasca Nikah

Pada gambar 4.14 menampilkan simulasi kontrol u_1 berupa edukasi pasca nikah bagi subpopulasi *Marriage*. Berdasarkan grafik, terlihat bahwa pada tahap awal pengendalian, kontrol diberikan dengan intensitas penuh dari $t = 0$ hingga $t = 11,4$. Setelah periode awal ini, intensitas kontrol secara bertahap mulai menurun hingga mencapai $t = 24$. Selanjutnya, kontrol berangsur - angsur mengalami penurunan hingga $t = 90$ menuju 0.



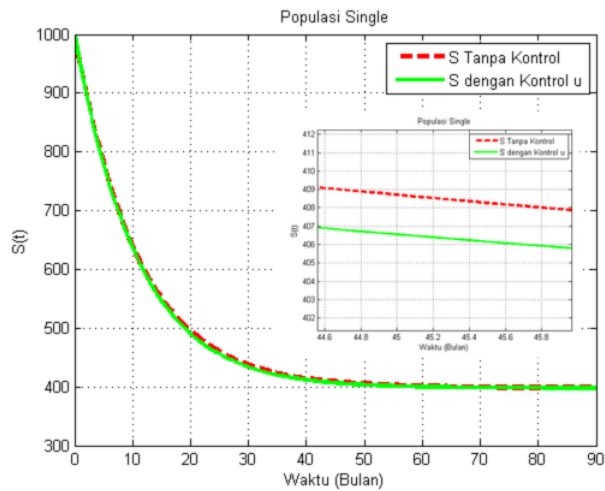
Gambar 4.15: Grafik Simulasi Kontrol u_2 berupa Pemberian Konseling

Berdasarkan gambar 4.15, dapat diamati bahwa pada tahap awal pengendalian, kontrol diberikan dengan intensitas penuh ($u_2 = 1$) mulai dari $t = 0$ hingga $t = 35$. Setelah periode tersebut, intensitas kontrol mulai menurun secara bertahap hingga sekitar $t = 82$, sebelum akhirnya mencapai 0 pada $t = 90$. Hasil simulasi ini mengindikasikan bahwa penerapan kontrol berupa konseling memiliki efektivitas yang tinggi dalam menekan jumlah individu yang bercerai. Pada penelitian yang dilakukan oleh Nurullita, dkk., (2021) menunjukkan bahwa pemberian konseling dapat membantu klien menghadapi permasalahan keluarga, sehingga dapat mengurangi pernikahan yang

tidak sehat dan menekan jumlah perceraian.

3 Simulasi 3

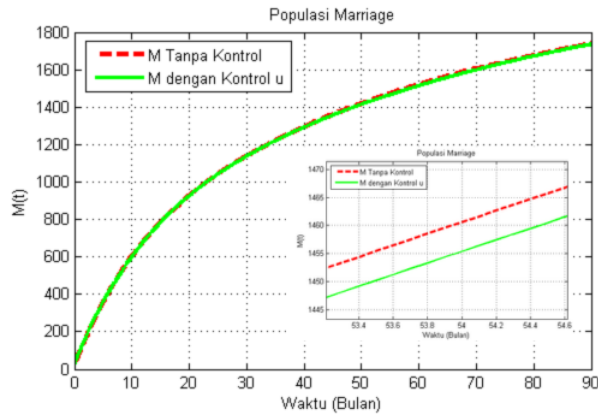
Ketika $u_1 = 0$ dan $u_2 \neq 0$, dengan menggunakan nilai awal subpopulasi serta parameter yang telah ditetapkan sebelumnya, diperoleh hasil simulasi sebagai berikut. Simulasi ini menunjukkan dinamika perubahan setiap subpopulasi tanpa adanya intervensi kontrol u_1 berupa edukasi pasca nikah. Hasil ini menjadi dasar perbandingan untuk mengevaluasi efektivitas penerapan kontrol edukasi pasca nikah dalam mengendalikan dinamika pernikahan dan perceraian.



Gambar 4.16: Grafik Subpopulasi *Single* Sebelum dan Sesudah Kontrol

Pada gambar 4.16, subpopulasi *Single* sebelum

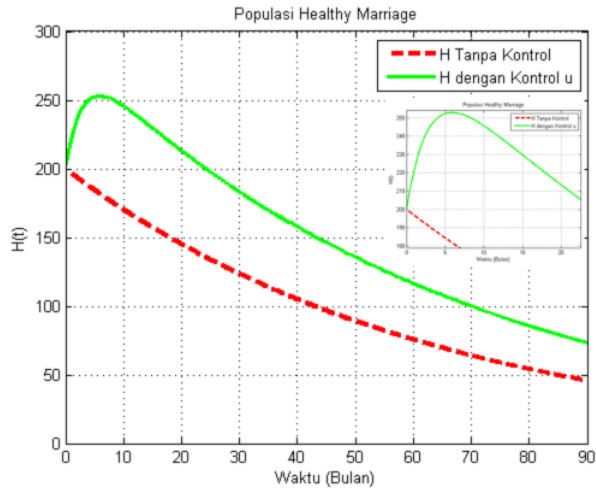
diberikan kontrol u_2 berupa pemberian konseling mengalami penurunan secara bertahap dari nilai awal $S(0) = 1000$, hingga akhirnya mencapai kestabilan pada $t = 59.4$. Setelah diterapkan kontrol u_2 , jumlah individu dalam subpopulasi *Single* tetap mengalami penurunan, namun perbedaannya tidak terlalu banyak dibandingkan dengan kondisi sebelum diberikan kontrol. Secara keseluruhan, kontrol u_2 tidak memberikan dampak terhadap subpopulasi *Single*.



Gambar 4.17: Grafik Subpopulasi *Marriage* Sebelum dan Sesudah Kontrol

Gambar 4.17 menampilkan perubahan jumlah individu dalam subpopulasi *Marriage* sebelum diberikan kontrol u_2 , dimana jumlah individu mengalami peningkatan secara bertahap dari nilai awal $M(0) = 20$. Setelah diterapkan kontrol u_2 , subpopulasi *Marriage* tetap mengalami kenaikan, namun jumlah individu yang bertambah lebih sedikit dibandingkan dengan kondisi

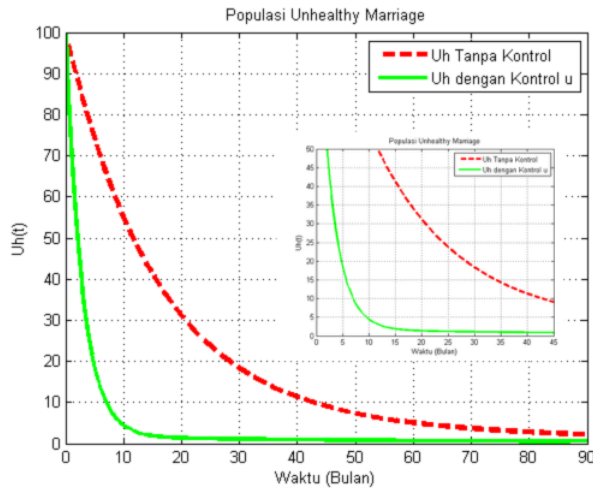
tanpa kontrol. Hal ini menunjukkan bahwa intervensi kontrol u_2 memiliki dampak terhadap dinamika subpopulasi *Marriage*, meskipun tidak secara langsung menurunkan jumlahnya, tetapi memperlambat laju pertumbuhannya.



Gambar 4.18: Grafik Subpopulasi *Healthy Marriage* Sebelum dan Sesudah Kontrol

Gambar 4.18 menampilkan perubahan jumlah individu dalam subpopulasi *Healthy Marriage* sebelum adanya kontrol, dimana jumlah individu mengalami penurunan secara konsisten dari nilai awal $H(0) = 200$ menjadi 46 individu. Namun, setelah diterapkan kontrol u_2 berupa pemberian konseling, terjadi peningkatan pada $t = 5$, dengan jumlah individu dalam subpopulasi ini mencapai 253 individu. Setelahnya, jumlah individu

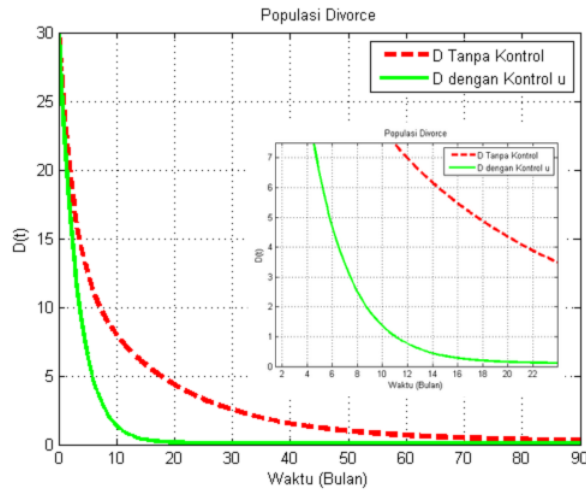
kembali mengalami penurunan secara bertahap hingga mencapai 73 individu. Hasil ini menunjukkan bahwa penerapan kontrol u_2 memiliki pengaruh terhadap subpopulasi *Healthy Marriage*, di mana intervensi kontrol konseling dapat meningkatkan jumlah individu dalam jangka waktu tertentu.



Gambar 4.19: Grafik Subpopulasi *Unhealthy Marriage* Sebelum dan Sesudah Kontrol

Gambar 4.19 menampilkan perubahan jumlah individu dalam subpopulasi *Unhealthy Marriage* sebelum diberikan kontrol u_2 mengalami penurunan secara bertahap dari nilai awal $U_h(0) = 100$ menjadi 3 individu. Setelah diterapkan kontrol u_2 , penurunan jumlah individu dalam subpopulasi ini menjadi lebih banyak, terutama pada $t = 12$, dan akhirnya mencapai

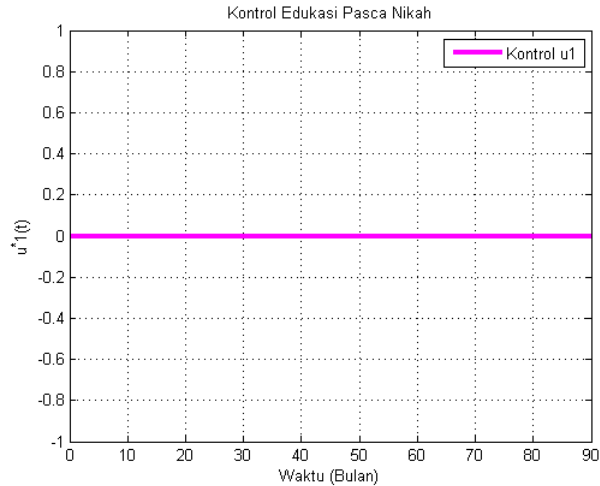
kondisi stabil pada $t = 48$. Hasil ini menunjukkan bahwa penerapan kontrol u_2 efektif dalam menekan jumlah individu dalam subpopulasi *Unhealthy Marriage*, sehingga membantu mengurangi pernikahan yang tidak sehat.



Gambar 4.20: Grafik Subpopulasi *Divorce* Sebelum dan Sesudah Kontrol

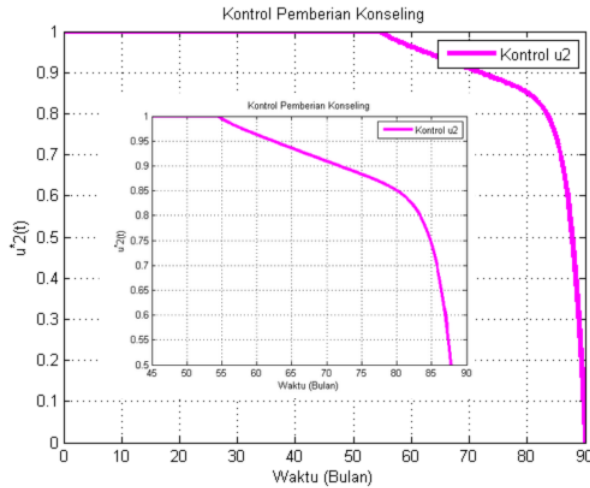
Pada gambar 4.20, sebelum diberikan kontrol u_2 , subpopulasi *Divorce* mengalami penurunan secara bertahap dari nilai awal $D(0) = 30$. Setelah diterapkan kontrol, penurunan jumlah individu dalam subpopulasi ini menjadi lebih banyak, terutama pada $t = 10$. Laju penurunan berlangsung lebih cepat dibandingkan kondisi tanpa kontrol hingga akhirnya mencapai kestabilan pada $t = 37$. Dengan adanya intervensi

berupa pemberian konseling, jumlah individu dalam subpopulasi *Divorce* dapat dikurangi lebih cepat, sehingga kestabilan dapat dicapai dalam waktu yang lebih singkat.



Gambar 4.21: Grafik Simulasi Kontrol u_1 berupa Edukasi Pasca Nikah

Gambar 4.21 di atas menunjukkan kontrol $u_1(t)$ berupa edukasi pasca nikah terhadap waktu. Dari grafik, terlihat bahwa nilai kontrol u_1 tetap konstan pada nol karena pada simulasi numerik nilai dari $u_1 = 0$, sehingga dalam simulasi 3 ini tidak ada intervensi dari kontrol u_1 .



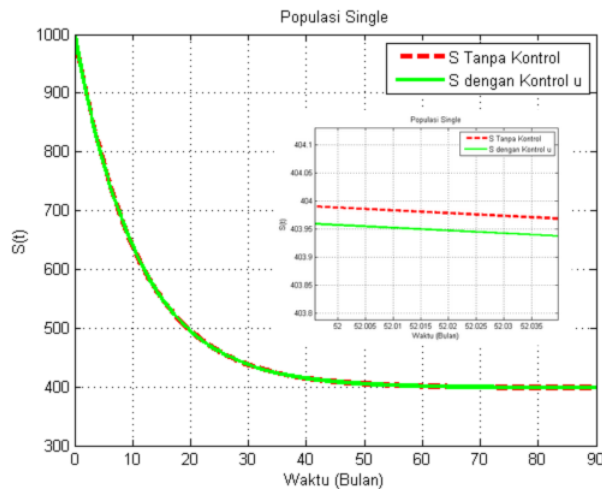
Gambar 4.22: Grafik Simulasi Kontrol u_2 berupa Pemberian Konseling

Gambar 4.22 menggambarkan dinamika kontrol u_2 berupa pemberian konseling. Dari grafik, terlihat bahwa pada periode awal, kontrol diterapkan dengan intensitas maksimal ($u_2 = 1$) dari $t=0$ hingga $t = 54,5$. Setelahnya, intensitas intervensi berangsur-angsur berkurang hingga $t=84$ kemudian menurun secara progresif hingga mencapai nilai nol pada $t=90$. Penurunan yang berlangsung bertahap menegaskan bahwa intervensi ini memiliki dampak positif dalam mengurangi jumlah pernikahan yang tidak sehat dan penurunan jumlah individu dalam subpopulasi *Divorce*.

4 Simulasi 4

Ketika $u_1 \neq 0$ dan $u_2 = 0$, dengan menggunakan

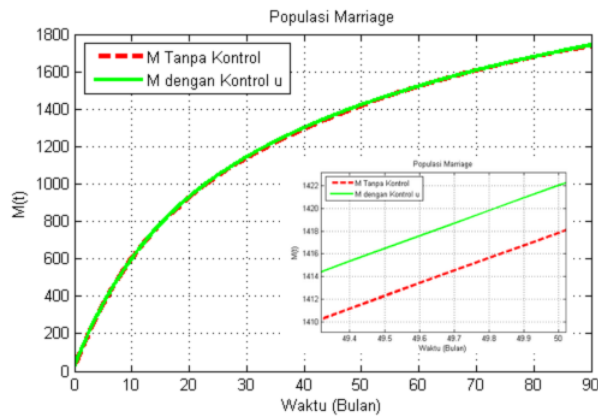
nilai awal subpopulasi serta parameter yang telah ditetapkan sebelumnya, diperoleh hasil simulasi sebagai berikut. Simulasi ini menunjukkan dinamika perubahan setiap subpopulasi dengan adanya intervensi kontrol u_1 berupa edukasi pasca nikah, namun tanpa adanya intervensi kontrol u_2 berupa pemberian konseling.



Gambar 4.23: Grafik Subpopulasi *Single* Sebelum dan Sesudah Kontrol

Pada gambar 4.23 ditunjukkan grafik subpopulasi *Single* sebelum dan setelah diberikan kontrol u_1 edukasi pasca nikah. Sebelum diberikan kontrol, populasi mengalami penurunan yang cukup pesat hingga akhirnya stabil pada $t = 56$. Setelah diberikan kontrol u_1 , populasi *Single* mengalami penurunan, tetapi

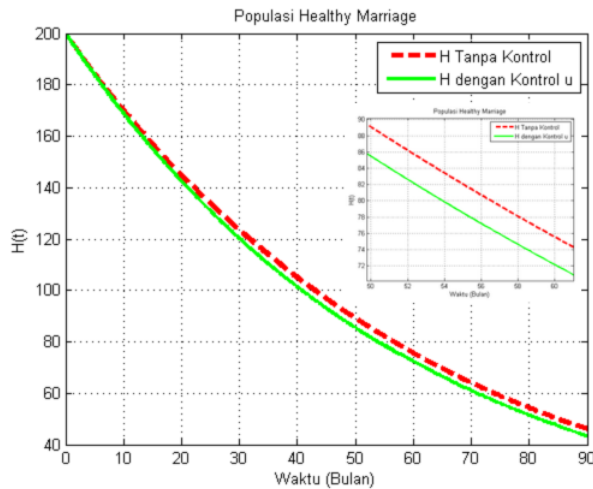
sangatlah sedikit hingga terlihat tidak ada perubahan sebelum dan setelah diberikan kontrolnya. secara keseluruhan, tanpa kontrol u_2 , subpopulasi *Single* tidak menunjukkan banyak perubahan. Sehingga dapat disimpulkan bahwa kontrol konseling memberikan pengaruh pada subpopulasi *Single* walaupun hanya sedikit.



Gambar 4.24: Grafik Subpopulasi *Marriage* Sebelum dan Sesudah Kontrol

Pada gambar 4.24 ditunjukkan grafik subpopulasi *Marriage* sebelum dan setelah diberikan kontrol u_1 berupa edukasi pasca nikah. Sebelum diberikan kontrol, subpopulasi *Marriage* terus mengalami kenaikan dari nilai awal $M(0) = 20$ seiring berjalannya waktu. Setelah diberikan kontrol edukasi pasca nikah, awalnya tidak menunjukkan perbedaan, tapi pada $t = 17$ grafik menunjukkan perubahan perlahan naik. Hal ini mengindikasikan bahwa tanpa kontrol u_2 , subpopulasi

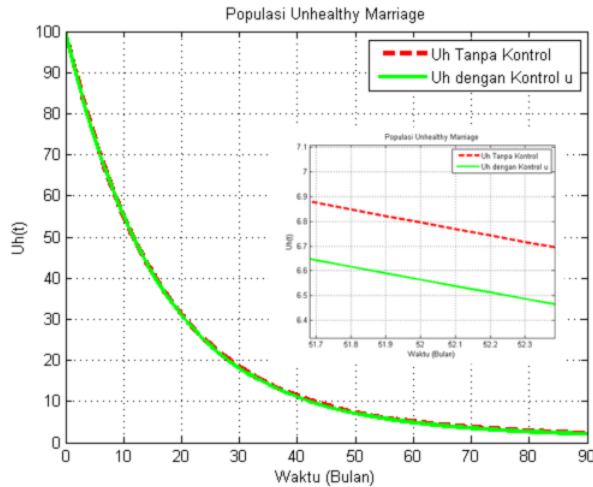
Marriage tidak dapat di tekan hanya menggunakan kontrol u_1 berupa edukasi pasca nikah.



Gambar 4.25: Grafik Subpopulasi *Healthy Marriage* Sebelum dan Sesudah Kontrol

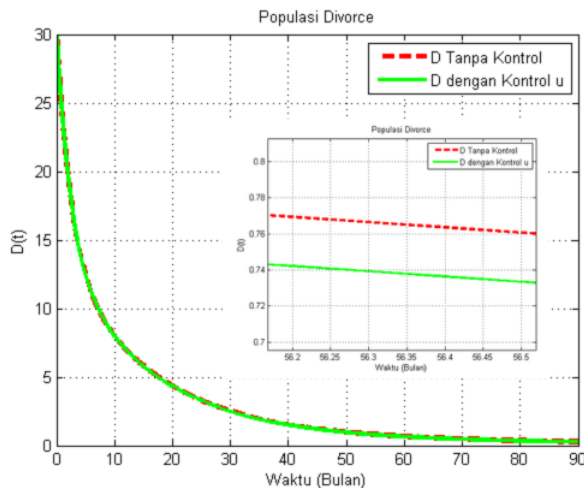
Pada gambar 4.25 ditunjukkan grafik subpopulasi *Healthy Marriage* sebelum dan setelah diberikan kontrol u_1 berupa edukasi pasca nikah. Sebelum diberikan kontrol, subpopulasi *Healthy Marriage* mengalami penurunan bertahap seiring waktu dari nilai awal $H(0) = 200$. Setelah diberikan kontrol, subpopulasi *Healthy Marriage* mengalami penurunan yang lebih banyak dibandingkan subpopulasi sebelum di kontrol. Hal ini menunjukkan bahwa kontrol u_2 sangatlah berpengaruh untuk meningkatkan subpopulasi *Healthy Marriage*. Sedangkan kontrol

u_1 hanya memberikan pengaruh sedikit, sehingga tidak menunjukkan perubahan yang drastis setelah di kontrol.



Gambar 4.26: Grafik Subpopulasi *Unhealthy Marriage* Sebelum dan Sesudah Kontrol

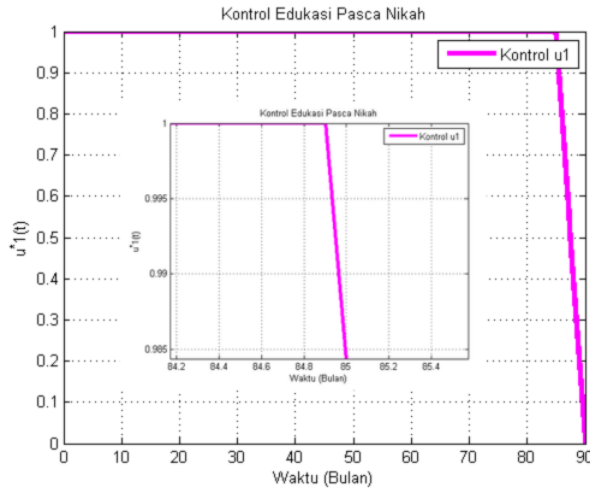
Pada gambar 4.26 ditunjukkan grafik subpopulasi *Unhealthy Marriage* sebelum dan setelah diberikan kontrol u_1 edukasi pasca nikah. Sebelum diberikan kontrol subpopulasi *Unhealthy Marriage* terus mengalami penurunan dari nilai awal $U_h = 100$ secara bertahap. Setelah diberikan kontrol u_1 , awalnya subpopulasi *Unhealthy Marriage* tidaklah menunjukkan perbedaan, sampai di selang waktu $t = 17.5$ yang mulai menunjukkan penurunan.



Gambar 4.27: Grafik Subpopulasi *Divorce* Sebelum dan Sesudah Kontrol

Pada gambar 4.27 ditunjukkan grafik subpopulasi *Divorce* sebelum dan setelah diberikan kontrol u_1 berupa edukasi pasca nikah. Sebelum diberikan kontrol subpopulasi *Divorce* mengalami penurunan dari nilai awal $D(0) = 30$ secara bertahap. Setelah diberikan kontrol u_1 , subpopulasi *Divorce* tidak menunjukkan perbedaan pada awalnya, sampai pada $t = 20$ perlahan-lahan menunjukkan penurunan pada awal periode. Hal ini menunjukkan bahwa pemberian konseling memberikan efek positif dalam mengurangi angka perceraian, meskipun dengan perubahan yang bertahap. Pernyataan ini di dukung oleh penelitian dari Ramadhani, N.M., (2022) di Kecamatan Wonosari

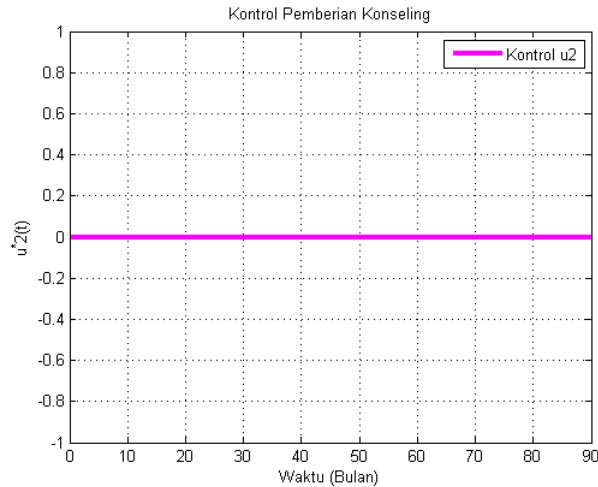
yang menunjukkan bahwa pemberian konseling dapat menangani permasalahan rumah tangga, khususnya pada pasangan yang mulai memiliki keinginan untuk bercerai.



Gambar 4.28: Grafik Simulasi Kontrol u_1 berupa Edukasi Pasca Nikah

Gambar 4.28 menggambarkan dinamika kontrol u_1 berupa edukasi pasca nikah. Dari hasil simulasi, terlihat bahwa pada periode awal, kontrol diterapkan dengan intensitas maksimal ($u_2 = 1$) dari $t=0$ hingga $t = 84,9$. Setelahnya, intensitas intervensi kontrol berkurang cepat menuju 0 di $t = 90$. Penurunan secara drastis ini menunjukkan bahwa kontrol edukasi pasca nikah diterapkan secara maksimal hampir sepanjang periode simulasi. Selain itu, hasil simulasi

juga memperlihatkan adanya keseimbangan dalam populasi, di mana berkurangnya angka *Unhealthy Marriage* juga diikuti dengan penurunan jumlah individu dalam subpopulasi *Divorce*.



Gambar 4.29: Grafik Simulasi Kontrol u_2 berupa Pemberian Konseling

Gambar 4.29 di atas menunjukkan kontrol $u_2(t)$ pemberian konseling terhadap waktu. Dari grafik, terlihat bahwa nilai kontrol u_2 tetap konstan pada nol selama periode waktu yang diamati. Hal ini karena pada simulasi numerik nilai dari $u_2 = 0$, sehingga dalam simulasi 4 ini tidak ada intervensi dari kontrol u_2 .

Berdasarkan simulasi yang telah dianalisis menunjukkan bahwa strategi optimal dalam mengurangi angka pernikahan tidak sehat dan perceraian adalah dengan menerapkan

kombinasi edukasi pasca nikah u_1 dan pemberian konseling u_2 . Ketika hanya u_1 diberikan, peningkatan pasangan dalam subpopulasi *Healthy Marriage* terjadi, tetapi kurang efektif dalam menekan subpopulasi *Unhealthy Marriage* dan *Divorce*. Sebaliknya, jika hanya u_2 diterapkan, konseling lebih efektif dalam mengurangi subpopulasi *Unhealthy Marriage* dan *Divorce*, tetapi tidak banyak meningkatkan jumlah pasangan *Healthy Marriage*.

Simulasi dengan kedua kontrol sekaligus $u_1 \neq 0$ dan $u_2 \neq 0$ memberikan hasil terbaik, terutama ketika bobot kontrol A dan B ditingkatkan. Pada simulasi 2, peningkatan A dari 0.01 ke 0.02 dan B dari 0.7 ke 1 menyebabkan penurunan lebih cepat dalam *Unhealthy Marriage* dan *Divorce*, sekaligus mempertahankan lebih banyak pasangan dalam subpopulasi *Healthy Marriage*. Berdasarkan simulasi numerik, penerapan edukasi pasca nikah dan pemberian konseling dapat mengurangi pernikahan yang tidak sehat dan menekan angka perceraian.

BAB V

KESIMPULAN

Bab ini menyajikan kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan serta memberikan saran sebagai rekomendasi bagi penelitian selanjutnya untuk mengembangkan penelitian ini lebih lanjut.

A. Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah diuraikan pada Bab IV adalah sebagai berikut:

1. Model SMBD oleh Tessema, et al., (2019) dimodifikasi menjadi model $SMHU_hD$ dengan menambahkan kompartemen H (*Healthy Marriage*) dan U_h (*Unhealthy Marriage*) serta diberikan dua kontrol, yaitu u_1 berupa edukasi pasca nikah dan u_2 berupa pemberian konseling. Berikut merupakan bentuk sistem PD dari model dinamika perceraian.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \pi N + \rho D - \gamma S - \mu S \\ \frac{dM}{dt} = \gamma S - (1 - u_1)\beta MD - \mu M \\ \frac{dH}{dt} = (1 - u_1)(1 - \alpha)\beta MD + \delta u_2 U_h - \theta H - \mu H \\ \frac{dU_h}{dt} = (1 - u_1)\alpha\beta MD + \theta H - (1 - \delta u_2)\tau U_h - \delta u_2 U_h - \mu U_h \\ \frac{dD}{dt} = (1 - \delta u_2)\tau U_h - (\rho + \varepsilon + \mu)D \end{array} \right.$$

2. Penyelesaian masalah kontrol pada dinamika perceraian dilakukan secara numerik menggunakan metode *sweep* maju mundur berdasarkan Prinsip Minimum Pontryagin. Dari metode tersebut akan didapatkan kontrol dan sistem yang optimal sebagai berikut.

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \frac{\partial H_a}{\partial \lambda_1^*} = \frac{dS^*}{dt} & = \pi N + \rho D^* - \gamma S^* - \mu S^* \\
 \frac{\partial H_a}{\partial \lambda_2^*} = \frac{dM^*}{dt} & = \gamma S^* - (1 - u_1^*)\beta M^* D^* - \mu M^* \\
 \frac{\partial H_a}{\partial \lambda_3^*} = \frac{dH^*}{dt} & = (1 - u_1^*)(1 - \alpha)\beta M^* D^* + \delta u_2 U_h^* - \\
 & \quad \theta H^* - \mu H^* \\
 \frac{\partial H_a}{\partial \lambda_4^*} = \frac{dU_h^*}{dt} & = (1 - u_1^*)\alpha\beta M^* D^* + \theta H^* - (1 - \delta u_2^*) \\
 & \quad \tau U_h^* - \delta u_2^* U_h^* - \mu U_h^* \\
 \frac{\partial H_a}{\partial \lambda_5^*} = \frac{dD^*}{dt} & = (1 - \delta u_2^*)\tau U_h^* - (\rho + \varepsilon + \mu)D^* \\
 \frac{d\lambda_1^*}{dt} = -\frac{\partial H_a}{\partial S^*} & = \lambda_1(\gamma + \mu) - \lambda_2\gamma \\
 \frac{d\lambda_2^*}{dt} = -\frac{\partial H_a}{\partial M^*} & = \lambda_2(\mu - \beta D^*(u_1^* - 1)) - \lambda_3\beta D^*(\alpha - 1) \\
 & \quad (u_1^* - 1) + \lambda_4\alpha\beta D^*(u_1^* - 1) \\
 \frac{d\lambda_3^*}{dt} = -\frac{\partial H_a}{\partial H^*} & = \lambda_3(\theta + \mu) - \lambda_4\theta \\
 \frac{d\lambda_4^*}{dt} = -\frac{\partial H_a}{\partial U_h^*} & = \lambda_4(\mu + \delta u_2^* - \tau(\delta u_2^* - 1)) - \lambda_3\delta u_2^* + \\
 & \quad \lambda_5\tau(\delta u_2^* - 1) - 1 \\
 \frac{d\lambda_5^*}{dt} = -\frac{\partial H_a}{\partial D^*} & = -1 + \lambda_5(\rho + \varepsilon + \mu) - \lambda_1\rho - \lambda_2\beta M^* \\
 & \quad (u_1^* - 1) - \lambda_3\beta M^*(\alpha - 1)(u_1^* - 1) + \\
 & \quad \lambda_4\alpha\beta M^*(u_1^* - 1) - 1 \\
 S^*(0) = S_0, & M^*(0) = M_0, H^*(0) = H_0, U_h^*(0) = U_{h0}, \\
 D^*(0) = D_0 & \\
 \lambda_1^*(t) = \lambda_2^*(t) & = \lambda_3^*(t) = \lambda_4^*(t) = \lambda_5^*(t) = 0
 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} u_1^* = \min \left\{ \max \left(0, \frac{\beta MD(\alpha\lambda_4 - \lambda_2 - (\alpha - 1)\lambda_3)}{A} \right), 1 \right\} \\ u_2^* = \min \left\{ \max \left(0, \frac{\delta U_h(\lambda_4 - \lambda_3) - \tau \delta U_h(\lambda_4 - \lambda_5)}{B} \right), 1 \right\} \end{cases}$$

3. Berdasarkan hasil simulasi menunjukkan bahwa kombinasi kontrol edukasi pasca nikah dan pemberian konseling dengan bobot optimal merupakan cara yang efektif dalam menekan individu dalam subpopulasi *Unhealthy Marriage* dan subpopulasi *Divorce*.

B. Saran

Saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis sensitivitas parameter dalam model untuk memahami sejauh mana perubahan parameter dapat memengaruhi hasil simulasi dan efektivitas kontrol.
2. Mengembangkan model dengan mempertimbangkan interaksi lebih kompleks antar subpopulasi, seperti efek psikologis atau kebijakan pemerintah dalam pengendalian pernikahan dan perceraian.

DAFTAR PUSTAKA

Abdurrahman, (2014). *Kompilasi Hukum Islam di Indonesia*. Jakarta: Akademika Press.

Addawiyah, A. F. A. & Fuad, Y. (2023). Model Dinamik SEARQ dan Penerapan Kontrol Optimal pada Permasalahan Kecanduan Media Sosial. *Jurnal Ilmiah Matematika*. 11(1), 67-81.

Alemneh, H. T., Kassa, A. S., & Godana, A. A. (2020). An optimal control model with cost effectiveness analysis of Maize streak virus disease in maize plant. *Infectious Disease Modelling Journal*. 6(2021), 169-182.

Alfansuri, M. R. (2023). *Materi Pendidikan Pra dan Pasca Nikah dalam Kitab Qurratul Uyun dan Relevansinya dengan Isu-Isu Pernikahan Kontemporer*. Tesis. Jakarta: UIN Syarif Hidayatullah.

Ali, Z. (2006). *Hukum Perdata Islam di Indonesia*. Jakarta: Sinar Grafika.

Al-Sofwa.(2009). *Tafsir Surat Al-Baqarah Ayat: 226-227 (Hukum 'Ilaa')*. Diakses tanggal 2 Juli 2025 dari <http://alsofwa.com/129-quran-tafsir-surat-al-baqarah-ayat-226-2>

Andriyani, J. (2018). Konsep Konseling Individual Dalam Proses Penyelesaian Perselisihan Keluarga. *Jurnal At-Taujih*. Vol. 1(1), 17-29.

Aulana, M. S., Rangga, C., Rakha, A., Nugrahimsyah, D. H., & Rofiq, N. (2024). Perceraian di Indonesia Ditinjau dalam Perspektif Hukum Islam yang Berlaku. *Jurnal Kajian Agama dan Dakwah*. 4(1), 1-8.

- Aswan (2018). Pembatasan Dinamika Merokok dengan Menggunakan Pendekatan Model Matematika. *Skripsi*, dipublikasikan: UIN Alauddin Makassar.
- Badan Pengembangan dan Pembinaan Bahasa. (2016). *Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) Edisi V*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia.
- Badan Pusat Statistik Jawa Tengah. (2023). *Provinsi Jawa Tengah dalam Angka (Jawa Tengah Province in Figures 2023)*. Jawa Tengah: Badan Pusat Statistik Jateng.
- Barnes, B., & Fulford, G. R. (2009). *Mathematical Modelling with Case Studies: A Differential Equation Approach Using Maple and MATLAB*(2nd ed.). Boca Raton: CRC Press (Taylor & Fransis Group).
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*(9th ed.). Unitted State of America: John Wiley & Sons
- Braun, M. (1993). *Differential Equations and Their Applications: An Introduction to Applied Mathematics*(4th ed.). New York: Springer.
- Burden, R. L., & Faires, J. D. (1978). *Numerical Analysis*(9th ed.). Boston: Cengage Learning.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *Numerical Methods for Engineers*(7th ed.). New York: McGraw-Hill Education.
- Gao, D. & Huang, N. (2017). Optimal Control Analysis of a Tuberculosis Model. *Applied Mathematical Modelling*. Vol.58, 47-64.

- Guo, Y. & Li, T. (2021). Optimal Control Strategies for An Online Game Addiction Model with Low and High Risk Exposure. *Discrete and Continous Dynamical System Series B*. 26(10), 5355-5380.
- Haidar, H. (2016). *Hukum Keluarga Islam*. Jakarta: Prenada Media.
- Harris, S. M., Glenn, N. D, Rappleyea, D. L., Diaz-Loving, R., Hawkins, A. J., Daire, A. P., Osborne, C., & Huston, T. L. (2008). *Together in Texas: Baseline report on marriage in the Lone Star State*, p. 5. Austin, TX: Health and Human Services Commission.
- Hasan, M. A., (2003). *Pedoman Hidup Berumah Tangga dalam Islam*. Jakarta: Prenada Media.
- Helmawati, (2014). *Pendidikan Teoretis dan Praktis*. Bandung: Remaja Rosdakarya.
- Hugo, A., & Lusekelo, E. M. (2021). Mathematical Control of Divorce Stress Among Marriages. *International Journal of Statistics and Applied Mathematics*. Vol. 6(5), 126-135.
- Indonesia. (1991). *Kompilasi Hukum Islam*. Jakarta: Departemen Agama Republik Indonesia.
- Indonesia. (2019). *Undang-Undang Nomor 16 Tahun 2019 tentang Perubahan atas Undang-Undang Nomor 1 Tahun 1974 tentang Perkawinan*. Lembaran Negara Republik Indonesia Tahun 2019 Nomor 186.
- Jannah, R. N., & Halim, A. (2022). Edukasi Pra Nikah Upaya Pencegahan Perceraian Perspektif Islam dan Hukum Positif. *Indonesian Journal of Community Research and Engagement*. 3(1), 167-178.

- Kartono, (2012). *Persamaan Diferensial Biasa*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Kementerian Agama Republik Indonesia, (2022). *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Diakses dari <https://quran.kemenag.go.id> tanggal 29 Mei 2024.
- Khim, N.P. (2024). *8 Sign of An Unhappy Marriage That Could Lead to Divorce*. Diakses dari <https://ilawyer.com.sg/divorce-101/8-signs-unhappy-marriage/> tanggal 27 Mei 2024
- Krik, D. E., (2004). *Optimal Control Theory: An Introduction*. Dover Publications.
- Kurniawati, I. & Rosyidi, A.H. (2019). Profil Pemodelan Matematika Siswa SMP dalam Menyelesaikan Masalah pada Fungsi Linear. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*. Vol. 8(2), 174-180.
- Lenhart, S., & Workman, J. T. (2007). *Optimal Control Applied to Biological Models*. New York: Taylor & Francis Group.
- Mahkamah Agung Republik Indonesia. (1976). *Putusan Nomor 477/K/Sip./1976*.
- Manna, N. S., Doriza, S., & Oktaviani, M. (2021). Cerai Gugat: Telaah Penyebab Perceraian pada Keluarga di Indonesia. *Jurnal AL-AZHAR INDONESIA SERI HUMANIORA*. 6(1), 11-19.
- Maya, R. (2014). *Persamaan Diferensial Biasa*. Diktat Kuliah. Bandung: UIN Sunan Gunung Djati Bandung.
- Murtadho, A. (2009). *Konseling Perkawinan (Perspektif Agama-Agama)*. Semarang: Walisongo Press.

- Nabila, A., Satryo, D., Maida, S., & Nadhira, S., (2024). Pembinaan Pasca Pernikahan dalam Meminimalisir Kasus Perceraian di Indonesia. *Indonesian Gender and Society Journal*. 5(1), 8-13.
- Ndii, M. Z. (2018). *Pemodelan Matematika Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit*. Yogyakarta: DEEPUBLISH.
- Nitria, P.W.A., Dyana, B., & Listyorini, I., (2024). Toxic Relationship Maintenance dalam Pernikahan untuk Mencegah KDRT Prespektif Mark Manson dan Mu'asyarah Bil Ma'ruf. *Jurnal Hukum Islam Indonesia*. 7(1), 2-20.
- Nurullita, D.A. & Prabowo, A.B., (2021). Pelaksanaan Bimbingan Konseling Keluarga dalam Membantu Mengatasi Perceraian. *PROSIDING Seminar Nasional "Bimbingan dan Konseling Islami"*. 1503-1510.
- Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., & Mishchenko, E. F. (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: Willey-Interscience.
- Ramadhani, N.M., (2022). *Pencegahan Perceraian Melalui Konseling Individu di Pusat Layanan Keluarga KUA Kecamatan Wonosari Kabupaten Gunungkidul Yogyakarta* . Universitas Islam Negeri Raden Mas Said Surakarta.
- Ross, S. L. (1984). *Differential Equations*(3rd ed.). New York: McGraw-Hill.
- Saraswati, P., Mardijah, & Kamiran, (2017). Analisis dan Kontrol Optimal Sistem Gerak Satelit Menggunakan

- Prinsip Minimum Pontryagin. *Jurnal Sains dan Seni ITS*. 6(2), 45-50.
- Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Application to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Boca Raton: Taylor & Francis Group.
- Sudarto, L., & Wirawan, H. E. (2001). *Psikologi Keluarga: Hubungan Suami-Istri dan Anak dalam Keluarga*. Jakarta: Penerbit Universitas Indonesia.
- Tessema, H., Haruna, I., Osman, S., & Kassa, E. (2022). A Mathematical Model Analysis od Marriage Divorce. *Journal Communications in Mathematical Biology and Neuroscience*. 2022(15), 1-18.
- Ulfatmi, (2011). *Keluarga Sakinah dalam Perspektif Islam*. Jakarta: Kementerian Agama RI.
- Widowati & Sutimin, (2007). *Pemodelan Matematika [Bahan Ajar]*.
- Wijaya, P. N. (2008). *Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Perceraian dalam Perkawinan* Skripsi. Semarang: Universitas Katolik Soegijapranata.

Lampiran 1. Perhitungan dengan Matlab untuk Mencari Costate

```

clc;
clear;

% Definisikan simbol
syms S M H U_h D u1 u2 A B N pi rho gamma mu beta
delta theta tau alpha epsilon
syms lambda1 lambda2 lambda3 lambda4 lambda5

% Hamiltonian
h = U_h + D + 1/2*A*u1^2 + 1/2*B*u2^2 +
    lambda1*(pi*N + rho*D - gamma*S - mu*S) +
    lambda2*(gamma*S - (1-u1)*beta*M*D - mu*M) +
    lambda3*((1-u1)*(1-alpha)*beta*M*D + delta*u2*U_h
    - theta*H - mu*H) +
    lambda4*((1-u1)*alpha*beta*M*D + theta*H -
    (1-delta*u2)*tau*U_h - delta*u2*U_h - mu*U_h) +
    lambda5*((1-delta*u2)*tau*U_h - (rho + epsilon +
    mu)*D);

% Turunan parsial
neg_dh_dS = -diff(h, S);
neg_dh_dM = -diff(h, M);
neg_dh_dH = -diff(h, H);
neg_dh_dU_h = -diff(h, U_h);
neg_dh_dD = -diff(h, D);

% Tampilkan hasil turunan parsial
disp('Turunan_parsial_terhadap_S:');
disp(neg_dh_dS);
disp('Turunan_parsial_terhadap_M:');
disp(neg_dh_dM);

```



```
disp('Turunan_parsial_terhadap_H:');  
disp(neg_dh_dH);  
disp('Turunan_parsial_terhadap_U_h:');  
disp(neg_dh_dU_h);  
disp('Turunan_parsial_terhadap_D:');  
disp(neg_dh_dD);
```

Lampiran 2. Pengecekan Kontrol u_1 berupa Edukasi Pasca Nikah dan u_2 berupa Pemberian Konseling

```

clc;
clear;

syms u1 u2 A B D pi N rho gamma mu S M Uh H beta
alpha delta theta tau epsilon lambda1 lambda2
lambda3 lambda4 lambda5
syms lambda1 lambda2 lambda3 lambda4 lambda5

% Definisikan fungsi Hamiltonian Ha
Ha= Uh + D + 1/2*A*u1^2 + 1/2*B*u2^2 +
    lambda1*(pi*N + rho*D - gamma*S - mu*S) +
    lambda2*(gamma*S - (1-u1)*beta*M*D - mu*M) +
    lambda3*((1-u1)*(1-alpha)*beta*M*D + delta*u2*Uh
    - theta*H - mu*H) +
    lambda4*((1-u1)*alpha*beta*M*D + theta*H -
    (1-delta*u2)*tau*Uh - delta*u2*Uh - mu*Uh) +
    lambda5*((1-delta*u2)*tau*Uh -(rho + epsilon +
    mu)*D);

% Turunan parsial
dHa_du1 = diff(Ha, u1);
dHa_du2 = diff(Ha, u2);

% Tampilkan hasil turunan parsial
disp('Turunan_parsial_terhadap_u1:');
disp(dHa_du1);
disp('Turunan_parsial_terhadap_u2:');
disp(dHa_du2);

```

Lampiran 3. Listing Program SMU_hD

```
%Persamaan State
function dy=PST(y,N0,u1,u2,pi,rho,gamma,miu,beta,
alpha,delta,theta,tau,epsilon)
%N0=y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5);
x(1)=pi*N0+rho*y(5)-gamma*y(1)-miu*y(1);
x(2)=gamma*y(1)-(1-u1)*beta*y(2)*y(5)-miu*y(2);
x(3)=(1-u1)*(1-alpha)*beta*y(2)*y(5)+delta*u2*y(4)-
theta*y(3)-miu*y(3);
x(4)=(1-u1)*alpha*beta*y(2)*y(5)+theta*y(3)-(1-delta
*u2)*tau*y(4)-delta*u2*y(4)-miu*y(4);
x(5)=(1-delta*u2)*tau*y(4)-(rho+epsilon+miu)*y(5);
dy=[x(1) x(2) x(3) x(4) x(5)];
```

```
%Persamaan Costate
function dg=PCT(y,M,D,u1,u2,gamma,miu,beta,alpha,
theta,delta,tau,rho,epsilon)
p1=y(1);
p2=y(2);
p3=y(3);
p4=y(4);
p5=y(5);
%lambda1=p1;lambda2=p2;lambda3=p3;lambda4=p4;lambda5=p5;
x(1)=p1*(gamma+miu)-p2*gamma;
x(2)=p2*(miu-D*beta*(u1-1))-D*beta*p3*(alpha-1)*
(u1-1)+D*alpha*beta*p4*(u1-1);
x(3)=p3*(theta+miu)-p4*theta;
x(4)=p4*(miu+delta*u2-tau*(delta*u2-1))-delta*p3*u2+
p5*tau*(delta*u2-1)-1;
x(5)=p5*(rho+epsilon+miu)-p1*rho-M*beta*p2*(u1-1)-M*
beta*p3*(alpha-1)*(u1-1)+M*alpha*beta*p4*(u1-1)-1;
dg=[x(1) x(2) x(3) x(4) x(5)];
```

```

%function cc=UJB;
clc;
clear all;
close all;

%jumlah popopulasi pada t=0
S0 = 1000; %Single
M0 = 20; %Marriage
B0 = 200; %Healthy Marriage
C0 = 100; %Unhealthy Marriage
D0 = 30; %Divorce
N0 = 1350 %Total populasi

%Nilai Parameter
pi=0.028;
rho=0.1;
gamma=0.08;
alpha=0.1;
beta=0.00004;
theta=0.002;
delta=0.3;
tau=0.05;
epsilon=0.3;
miu=0.015; %Laju kematian alami

Q1=0.01; %bobot u1 edukasi pasca nikah
Q2=0.7; %bobot u2 emberian kontrol
u1max=1; %0<u1<1
u2max=1; %0<u2<1 %diubah menjadi lebih besar

h=0.1; %h=1/N misal: h=1/10=0.1
t=0:h:90; %selang dari 0 sampai 10 dipartisi dengan
jarak h=0.1
Z=length(t); %banyaknya t
%parameter e1

```

```

%membentuk matrik baris isinya nol dengan z baris, 1
kolom
u1=zeros(Z,1);
u1old=zeros(Z,1);
u2=zeros(Z,1);
u2old=zeros(Z,1);

S=zeros(Z,1);
M=zeros(Z,1);
B=zeros(Z,1);
C=zeros(Z,1);
D=zeros(Z,1);

Sold=zeros(Z,1);
Mold=zeros(Z,1);
Bold=zeros(Z,1);
Cold=zeros(Z,1);
Dold=zeros(Z,1);

%p1 adalah lambda_1 dsb
p1=zeros(Z,1);
p2=zeros(Z,1);
p3=zeros(Z,1);
p4=zeros(Z,1);
p5=zeros(Z,1);

p1old=zeros(Z,1);
p2old=zeros(Z,1);
p3old=zeros(Z,1);
p4old=zeros(Z,1);
p5old=zeros(Z,1);

tes=1;
it=0;
while tes > 1e-3
    u1old=u1;

```

```

u2old=u2;

Sold=S;
Mold=M;
Bold=B;
Cold=C;
Dold=D;

p1o=p1;
p2o=p2;
p3o=p3;
p4o=p4;
p5o=p5;

S(1)=S0;
M(1)=M0;
B(1)=B0;
C(1)=C0;
D(1)=D0;
J(it+1)=0;

for i=1:Z-1
    J(it+1)=J(it+1)+h*(C(i)+D(i)+1/2*Q1*u1old(i)^2+
    1/2*Q2*u2old(i)^2);
    y=[S(i) M(i) B(i) C(i) D(i)];

%RungeKutta
k1=h*PST(y,N0,u1old(i),u2old(i),pi,rho,gamma,miu,beta,
    alpha,delta,theta,tau,epsilon);
k2=h*PST(y+0.5*k1,N0,u1old(i),u2old(i),pi,rho,gamma,
    miu,beta,alpha,delta,theta,tau,epsilon);
k3=h*PST(y+0.5*k2,N0,u1old(i),u2old(i),pi,rho,gamma,
    miu,beta,alpha,delta,theta,tau,epsilon);
k4=h*PST(y+k3,N0,u1old(i),u2old(i),pi,rho,gamma,miu,
    beta,alpha,delta,theta,tau,epsilon);
y=y+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);

```

```

        S(i+1)=y(1);
        M(i+1)=y(2);
        B(i+1)=y(3);
        C(i+1)=y(4);
        D(i+1)=y(5);
    end
J(it+1)=J(it+1)+h*(C(i)+D(i)+1/2*Q1*u1old(i)^2+
    1/2*Q2*u2old(i)^2);
%Plot populasi tanpa kontrol
if it == 0
figure(1)
plot(t,S,'r--','LineWidth',3);
hold on;
figure(2)
plot(t,M,'r--','LineWidth',3);
hold on;
figure(3)
plot(t,B,'r--','LineWidth',3);
hold on;
figure(4)
plot(t,C,'r--','LineWidth',3);
hold on;
figure(5)
plot(t,D,'r--','LineWidth',3);
hold on;
end

p1(Z)=0;
p2(Z)=0;
p3(Z)=0;
p4(Z)=0;
p5(Z)=0;

for i=1:Z-1
    je=Z-i;

```

```

        y=[p1(je+1) p2(je+1) p3(je+1) p4(je+1) p5(je+1)];

k1=h*PCT(y,M(je+1),D(je+1),u1old(je+1),u2old(je+1),
        gamma,miu,beta,alpha,theta,delta,tau,rho,epsilon);
k2=h*PCT(y+0.5*k1,M(je+1),D(je+1),u1old(je+1),u2old
        (je+1),gamma,miu,beta,alpha,theta,delta,tau,rho,
        epsilon);
k3=h*PCT(y+0.5*k2,M(je+1),D(je+1),u1old(je+1),u2old
        (je+1),gamma,miu,beta,alpha,theta,delta,tau,rho,
        epsilon);
k4=h*PCT(y+k3,M(je+1),D(je+1),u1old(je+1),u2old(je+1),
        gamma,miu,beta,alpha,theta,delta,tau,rho,epsilon);
y=y-(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);

p1(je)=y(1);
p2(je)=y(2);
p3(je)=y(3);
p4(je)=y(4);
p5(je)=y(5);

%N0(je)=S(je)+E(je)+I(je)+P(je)+Q(je);
temp2=min([ (1/Q1)*(beta*M(je)*D(je)*(alpha*
        p4(je)-p2(je)-(alpha-1)*p3(je))) u1max]);
u1(je)=max([temp2 0]);

temp4=min([ (1/Q2)*((delta*C(je)*(p4(je)-p3(je)
        ))-(tau*delta*C(je)*(p4(je)-p5(je))))
        u2max]);
u2(je)=max([temp4 0]);
end

eS=sum(abs(S-Sold));
eM=sum(abs(M-Mold));
eB=sum(abs(B-Bold));
eC=sum(abs(C-Cold));

```



```

eD=sum(abs(D-Dold));

ep1=sum(abs(p1-p1o));
ep2=sum(abs(p2-p2o));
ep3=sum(abs(p3-p3o));
ep4=sum(abs(p4-p4o));
ep5=sum(abs(p5-p5o));

eu1=sum(abs(u1-u1old));
eu2=sum(abs(u2-u2old));
%error=sum dari error yang lama dengan yang baru

tes=eS+eM+eB+eC+eD+ep1+ep2+ep3+ep4+ep5+eu1+eu2;
it=it+1;
u1=(0.5*u1+0.5*u1old);
u2=(0.5*u2+0.5*u2old);
end

%plot populasi tanpa kontrol
%figure(9)
%plot(t, S, 'r-', 'LineWidth', 2);
%hold on;
%plot(t, M, 'b-', 'LineWidth', 2);
%plot(t, B, 'g-', 'LineWidth', 2);
%plot(t, C, 'm-', 'LineWidth', 2);
%plot(t, D, 'k-', 'LineWidth', 2);
%xlabel('Waktu (Bulan)');
%ylabel('Populasi');
%legend('Single (S)', 'Marriage (M)', 'Healthy Marriage
(H)', 'Unhealthy_Marriage_(Uh)', 'Divorce_(D)');
%title('Perkembangan Populasi Seiring Waktu');
%grid on;
%hold off;

%plot populasi dengan kontrol
figure(1)

```

```

plot(t,S,'g-','LineWidth',2.5);
xlabel('Waktu_(Bulan)');
ylabel('S(t)');
grid on;
legend('S_Tanpa_Kontrol','S_dengan_Kontrol_u');
title('Populasi_Single');
hold on;

figure(2)
plot(t,M,'g-','LineWidth',2.5);
xlabel('Waktu_(Bulan)');
ylabel('M(t)');
grid on;
legend('M_Tanpa_Kontrol','M_dengan_Kontrol_u');
title('Populasi_Marriage');
hold on;

figure(3)
plot(t,B,'g-','LineWidth',2.5);
xlabel('Waktu_(Bulan)');
ylabel('H(t)');
grid on;
legend('H_Tanpa_Kontrol','H_dengan_Kontrol_u');
title('Populasi_Healthy_Marriage');
hold on;

figure(4)
plot(t,C,'g-','LineWidth',2.5);
xlabel('Waktu_(Bulan)');
ylabel('U_h(t)');
grid on;
legend('U_h_Tanpa_Kontrol','U_h_dengan_Kontrol_u');
title('Populasi_Unhealthy_Marriage');
hold on;

figure(5)

```

```

plot(t,D,'g-','LineWidth',2.5);
xlabel('Waktu_(Bulan)');
ylabel('D(t)');
grid on;
legend('D_Tanpa_Kontrol','D_dengan_Kontrol_u');
title('Populasi_Divorce');
hold on;

figure(6)
plot(t,u1,'m-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu_(Bulan)');
ylabel('u^*1(t)');
grid on;
legend('Kontrol_u1');
title('Kontrol_Edukasi_Pasca_Nikah');
hold on;

figure(7)
plot(t,u2,'m-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu_(Bulan)');
ylabel('u^*2(t)');
grid on;
legend('Kontrol_u2');
title('Kontrol_Pemberian_Konseling');
hold on;

figure(8)
plot(t,u1,'m',t,u2,'g','linewidth',3);
legend('Kontrol_u_1*(t)','Kontrol_u_2*(t)');
xlabel('waktu');
ylabel('u(t)');
hold on;
grid on;

```

Lampiran 4. Daftar Riwayat Hidup

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

1. Nama Lengkap : Bunga Noer Intan Permatasari
2. Tempat, Tanggal Lahir : Kab. Semarang, 15 Juni 2003
3. Alamat : Desa Kandangan 05/01,
Kec. Bawen, Kab. Semarang
4. Nomor Telepon : 085645225318
5. Email : bunganoer85@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. RA Assholikhin : Lulus tahun 2009
2. SD Negeri Polosiri 01 : Lulus tahun 2015
3. SMP Negeri 2 Ambarawa : Lulus tahun 2018
4. SMA Negeri 1 Bergas : Lulus tahun 2021

BAB V

KESIMPULAN

Bab ini menyajikan kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan serta memberikan saran sebagai rekomendasi bagi penelitian selanjutnya untuk mengembangkan penelitian ini lebih lanjut.

A. Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah diuraikan pada Bab IV adalah sebagai berikut:

1. Model SMBD oleh Tessema, et al., (2019) dimodifikasi menjadi model $SMHU_hD$ dengan menambahkan kompartemen H (*Healthy Marriage*) dan U_h (*Unhealthy Marriage*) serta diberikan dua kontrol, yaitu u_1 berupa edukasi pasca nikah dan u_2 berupa pemberian konseling. Berikut merupakan bentuk sistem PD dari model dinamika perceraian.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \pi N + \rho D - \gamma S - \mu S \\ \frac{dM}{dt} = \gamma S - (1 - u_1)\beta MD - \mu M \\ \frac{dH}{dt} = (1 - u_1)(1 - \alpha)\beta MD + \delta u_2 U_h - \theta H - \mu H \\ \frac{dU_h}{dt} = (1 - u_1)\alpha\beta MD + \theta H - (1 - \delta u_2)\tau U_h - \delta u_2 U_h - \mu U_h \\ \frac{dD}{dt} = (1 - \delta u_2)\tau U_h - (\rho + \varepsilon + \mu)D \end{array} \right.$$

2. Penyelesaian masalah kontrol pada dinamika perceraian dilakukan secara numerik menggunakan metode *sweep* maju mundur berdasarkan Prinsip Minimum Pontryagin. Dari metode tersebut akan didapatkan kontrol dan sistem yang optimal sebagai berikut.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial H_a}{\partial \lambda_1^*} = \frac{dS^*}{dt} & = \pi N + \rho D^* - \gamma S^* - \mu S^* \\ \frac{\partial H_a}{\partial \lambda_2^*} = \frac{dM^*}{dt} & = \gamma S^* - (1 - u_1^*)\beta M^* D^* - \mu M^* \\ \frac{\partial H_a}{\partial \lambda_3^*} = \frac{dH^*}{dt} & = (1 - u_1^*)(1 - \alpha)\beta M^* D^* + \delta u_2 U_h^* - \\ & \quad \theta H^* - \mu H^* \\ \frac{\partial H_a}{\partial \lambda_4^*} = \frac{dU_h^*}{dt} & = (1 - u_1^*)\alpha\beta M^* D^* + \theta H^* - (1 - \delta u_2^*) \\ & \quad \tau U_h^* - \delta u_2^* U_h^* - \mu U_h^* \\ \frac{\partial H_a}{\partial \lambda_5^*} = \frac{dD^*}{dt} & = (1 - \delta u_2^*)\tau U_h^* - (\rho + \varepsilon + \mu)D^* \\ \frac{d\lambda_1^*}{dt} = -\frac{\partial H_a}{\partial S^*} & = \lambda_1(\gamma + \mu) - \lambda_2\gamma \\ \frac{d\lambda_2^*}{dt} = -\frac{\partial H_a}{\partial M^*} & = \lambda_2(\mu - \beta D^*(u_1^* - 1)) - \lambda_3\beta D^*(\alpha - 1) \\ & \quad (u_1^* - 1) + \lambda_4\alpha\beta D^*(u_1^* - 1) \\ \frac{d\lambda_3^*}{dt} = -\frac{\partial H_a}{\partial H^*} & = \lambda_3(\theta + \mu) - \lambda_4\theta \\ \frac{d\lambda_4^*}{dt} = -\frac{\partial H_a}{\partial U_h^*} & = \lambda_4(\mu + \delta u_2^* - \tau(\delta u_2^* - 1)) - \lambda_3\delta u_2^* + \\ & \quad \lambda_5\tau(\delta u_2^* - 1) - 1 \\ \frac{d\lambda_5^*}{dt} = -\frac{\partial H_a}{\partial D^*} & = -1 + \lambda_5(\rho + \varepsilon + \mu) - \lambda_1\rho - \lambda_2\beta M^* \\ & \quad (u_1^* - 1) - \lambda_3\beta M^*(\alpha - 1)(u_1^* - 1) + \\ & \quad \lambda_4\alpha\beta M^*(u_1^* - 1) - 1 \\ S^*(0) = S_0, & M^*(0) = M_0, H^*(0) = H_0, U_h^*(0) = U_{h0}, \\ D^*(0) = D_0 & \\ \lambda_1^*(t) = \lambda_2^*(t) & = \lambda_3^*(t) = \lambda_4^*(t) = \lambda_5^*(t) = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} u_1^* = \min \left\{ \max \left(0, \frac{\beta MD(\alpha\lambda_4 - \lambda_2 - (\alpha - 1)\lambda_3)}{A} \right), 1 \right\} \\ u_2^* = \min \left\{ \max \left(0, \frac{\delta U_h(\lambda_4 - \lambda_3) - \tau \delta U_h(\lambda_4 - \lambda_5)}{B} \right), 1 \right\} \end{cases}$$

3. Berdasarkan hasil simulasi menunjukkan bahwa kombinasi kontrol edukasi pasca nikah dan pemberian konseling dengan bobot optimal merupakan cara yang efektif dalam menekan individu dalam subpopulasi *Unhealthy Marriage* dan subpopulasi *Divorce*.

B. Saran

Saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis sensitivitas parameter dalam model untuk memahami sejauh mana perubahan parameter dapat memengaruhi hasil simulasi dan efektivitas kontrol.
2. Mengembangkan model dengan mempertimbangkan interaksi lebih kompleks antar subpopulasi, seperti efek psikologis atau kebijakan pemerintah dalam pengendalian pernikahan dan perceraian.

DAFTAR PUSTAKA

Abdurrahman, (2014). *Kompilasi Hukum Islam di Indonesia*. Jakarta: Akademika Press.

Addawiyah, A. F. A. & Fuad, Y. (2023). Model Dinamik SEARQ dan Penerapan Kontrol Optimal pada Permasalahan Kecanduan Media Sosial. *Jurnal Ilmiah Matematika*. 11(1), 67-81.

Alemneh, H. T., Kassa, A. S., & Godana, A. A. (2020). An optimal control model with cost effectiveness analysis of Maize streak virus disease in maize plant. *Infectious Disease Modelling Journal*. 6(2021), 169-182.

Alfansuri, M. R. (2023). *Materi Pendidikan Pra dan Pasca Nikah dalam Kitab Qurratul Uyun dan Relevansinya dengan Isu-Isu Pernikahan Kontemporer*. Tesis. Jakarta: UIN Syarif Hidayatullah.

Ali, Z. (2006). *Hukum Perdata Islam di Indonesia*. Jakarta: Sinar Grafika.

Al-Sofwa.(2009). *Tafsir Surat Al-Baqarah Ayat: 226-227 (Hukum 'Ilaa')*. Diakses tanggal 2 Juli 2025 dari <http://alsofwa.com/129-quran-tafsir-surat-al-baqarah-ayat-226-2>

Andriyani, J. (2018). Konsep Konseling Individual Dalam Proses Penyelesaian Perselisihan Keluarga. *Jurnal At-Taujih*. Vol. 1(1), 17-29.

Aulana, M. S., Rangga, C., Rakha, A., Nugrahimsyah, D. H., & Rofiq, N. (2024). Perceraian di Indonesia Ditinjau dalam Perspektif Hukum Islam yang Berlaku. *Jurnal Kajian Agama dan Dakwah*. 4(1), 1-8.

- Aswan (2018). Pembatasan Dinamika Merokok dengan Menggunakan Pendekatan Model Matematika. *Skripsi*, dipublikasikan: UIN Alauddin Makassar.
- Badan Pengembangan dan Pembinaan Bahasa. (2016). *Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) Edisi V*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia.
- Badan Pusat Statistik Jawa Tengah. (2023). *Provinsi Jawa Tengah dalam Angka (Jawa Tengah Province in Figures 2023)*. Jawa Tengah: Badan Pusat Statistik Jateng.
- Barnes, B., & Fulford, G. R. (2009). *Mathematical Modelling with Case Studies: A Differential Equation Approach Using Maple and MATLAB*(2nd ed.). Boca Raton: CRC Press (Taylor & Fransis Group).
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*(9th ed.). Unitted State of America: John Wiley & Sons
- Braun, M. (1993). *Differential Equations and Their Applications: An Introduction to Applied Mathematics*(4th ed.). New York: Springer.
- Burden, R. L., & Faires, J. D. (1978). *Numerical Analysis*(9th ed.). Boston: Cengage Learning.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *Numerical Methods for Engineers*(7th ed.). New York: McGraw-Hill Education.
- Gao, D. & Huang, N. (2017). Optimal Control Analysis of a Tuberculosis Model. *Applied Mathematical Modelling*. Vol.58, 47-64.

- Guo, Y. & Li, T. (2021). Optimal Control Strategies for An Online Game Addiction Model with Low and High Risk Exposure. *Discrete and Continous Dynamical System Series B*. 26(10), 5355-5380.
- Haidar, H. (2016). *Hukum Keluarga Islam*. Jakarta: Prenada Media.
- Harris, S. M., Glenn, N. D, Rappleyea, D. L., Diaz-Loving, R., Hawkins, A. J., Daire, A. P., Osborne, C., & Huston, T. L. (2008). *Together in Texas: Baseline report on marriage in the Lone Star State*, p. 5. Austin, TX: Health and Human Services Commission.
- Hasan, M. A., (2003). *Pedoman Hidup Berumah Tangga dalam Islam*. Jakarta: Prenada Media.
- Helmawati, (2014). *Pendidikan Teoretis dan Praktis*. Bandung: Remaja Rosdakarya.
- Hugo, A., & Lusekelo, E. M. (2021). Mathematical Control of Divorce Stress Among Marriages. *International Journal of Statistics and Applied Mathematics*. Vol. 6(5), 126-135.
- Indonesia. (1991). *Kompilasi Hukum Islam*. Jakarta: Departemen Agama Republik Indonesia.
- Indonesia. (2019). *Undang-Undang Nomor 16 Tahun 2019 tentang Perubahan atas Undang-Undang Nomor 1 Tahun 1974 tentang Perkawinan*. Lembaran Negara Republik Indonesia Tahun 2019 Nomor 186.
- Jannah, R. N., & Halim, A. (2022). Edukasi Pra Nikah Upaya Pencegahan Perceraian Perspektif Islam dan Hukum Positif. *Indonesian Journal of Community Research and Engagement*. 3(1), 167-178.

- Kartono, (2012). *Persamaan Diferensial Biasa*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Kementerian Agama Republik Indonesia, (2022). *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Diakses dari <https://quran.kemenag.go.id> tanggal 29 Mei 2024.
- Khim, N.P. (2024). *8 Sign of An Unhappy Marriage That Could Lead to Divorce*. Diakses dari <https://ilawyer.com.sg/divorce-101/8-signs-unhappy-marriage/> tanggal 27 Mei 2024
- Krik, D. E., (2004). *Optimal Control Theory: An Introduction*. Dover Publications.
- Kurniawati, I. & Rosyidi, A.H. (2019). Profil Pemodelan Matematika Siswa SMP dalam Menyelesaikan Masalah pada Fungsi Linear. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*. Vol. 8(2), 174-180.
- Lenhart, S., & Workman, J. T. (2007). *Optimal Control Applied to Biological Models*. New York: Taylor & Francis Group.
- Mahkamah Agung Republik Indonesia. (1976). *Putusan Nomor 477/K/Sip./1976*.
- Manna, N. S., Doriza, S., & Oktaviani, M. (2021). Cerai Gugat: Telaah Penyebab Perceraian pada Keluarga di Indonesia. *Jurnal AL-AZHAR INDONESIA SERI HUMANIORA*. 6(1), 11-19.
- Maya, R. (2014). *Persamaan Diferensial Biasa*. Diktat Kuliah. Bandung: UIN Sunan Gunung Djati Bandung.
- Murtadho, A. (2009). *Konseling Perkawinan (Perspektif Agama-Agama)*. Semarang: Walisongo Press.

- Nabila, A., Satryo, D., Maida, S., & Nadhira, S., (2024). Pembinaan Pasca Pernikahan dalam Meminimalisir Kasus Perceraian di Indonesia. *Indonesian Gender and Society Journal*. 5(1), 8-13.
- Ndii, M. Z. (2018). *Pemodelan Matematika Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit*. Yogyakarta: DEEPUBLISH.
- Nitria, P.W.A., Dyana, B., & Listyorini, I., (2024). Toxic Relationship Maintenance dalam Pernikahan untuk Mencegah KDRT Prespektif Mark Manson dan Mu'asyarah Bil Ma'ruf. *Jurnal Hukum Islam Indonesia*. 7(1), 2-20.
- Nurullita, D.A. & Prabowo, A.B., (2021). Pelaksanaan Bimbingan Konseling Keluarga dalam Membantu Mengatasi Perceraian. *PROSIDING Seminar Nasional "Bimbingan dan Konseling Islami"*. 1503-1510.
- Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., & Mishchenko, E. F. (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: Willey-Interscience.
- Ramadhani, N.M., (2022). *Pencegahan Perceraian Melalui Konseling Individu di Pusat Layanan Keluarga KUA Kecamatan Wonosari Kabupaten Gunungkidul Yogyakarta*. Universitas Islam Negeri Raden Mas Said Surakarta.
- Ross, S. L. (1984). *Differential Equations*(3rd ed.). New York: McGraw-Hill.
- Saraswati, P., Mardijah, & Kamiran, (2017). Analisis dan Kontrol Optimal Sistem Gerak Satelit Menggunakan

- Prinsip Minimum Pontryagin. *Jurnal Sains dan Seni ITS*. 6(2), 45-50.
- Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Application to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Boca Raton: Taylor & Francis Group.
- Sudarto, L., & Wirawan, H. E. (2001). *Psikologi Keluarga: Hubungan Suami-Istri dan Anak dalam Keluarga*. Jakarta: Penerbit Universitas Indonesia.
- Tessema, H., Haruna, I., Osman, S., & Kassa, E. (2022). A Mathematical Model Analysis od Marriage Divorce. *Journal Communications in Mathematical Biology and Neuroscience*. 2022(15), 1-18.
- Ulfatmi, (2011). *Keluarga Sakinah dalam Perspektif Islam*. Jakarta: Kementerian Agama RI.
- Widowati & Sutimin, (2007). *Pemodelan Matematika [Bahan Ajar]*.
- Wijaya, P. N. (2008). *Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Perceraian dalam Perkawinan* Skripsi. Semarang: Universitas Katolik Soegijapranata.

Lampiran 1. Perhitungan dengan Matlab untuk Mencari Costate

```

clc;
clear;

% Definisikan simbol
syms S M H U_h D u1 u2 A B N pi rho gamma mu beta
delta theta tau alpha epsilon
syms lambda1 lambda2 lambda3 lambda4 lambda5

% Hamiltonian
h = U_h + D + 1/2*A*u1^2 + 1/2*B*u2^2 +
    lambda1*(pi*N + rho*D - gamma*S - mu*S) +
    lambda2*(gamma*S - (1-u1)*beta*M*D - mu*M) +
    lambda3*((1-u1)*(1-alpha)*beta*M*D + delta*u2*U_h
    - theta*H - mu*H) +
    lambda4*((1-u1)*alpha*beta*M*D + theta*H -
    (1-delta*u2)*tau*U_h - delta*u2*U_h - mu*U_h) +
    lambda5*((1-delta*u2)*tau*U_h - (rho + epsilon +
    mu)*D);

% Turunan parsial
neg_dh_dS = -diff(h, S);
neg_dh_dM = -diff(h, M);
neg_dh_dH = -diff(h, H);
neg_dh_dU_h = -diff(h, U_h);
neg_dh_dD = -diff(h, D);

% Tampilkan hasil turunan parsial
disp('Turunan_parsial_terhadap_S:');
disp(neg_dh_dS);
disp('Turunan_parsial_terhadap_M:');
disp(neg_dh_dM);

```

```
disp('Turunan_parsial_terhadap_H:');  
disp(neg_dh_dH);  
disp('Turunan_parsial_terhadap_U_h:');  
disp(neg_dh_dU_h);  
disp('Turunan_parsial_terhadap_D:');  
disp(neg_dh_dD);
```

Lampiran 2. Pengecekan Kontrol u_1 berupa Edukasi Pasca Nikah dan u_2 berupa Pemberian Konseling

```

clc;
clear;

syms u1 u2 A B D pi N rho gamma mu S M Uh H beta
alpha delta theta tau epsilon lambda1 lambda2
lambda3 lambda4 lambda5
syms lambda1 lambda2 lambda3 lambda4 lambda5

% Definisikan fungsi Hamiltonian Ha
Ha= Uh + D + 1/2*A*u1^2 + 1/2*B*u2^2 +
    lambda1*(pi*N + rho*D - gamma*S - mu*S) +
    lambda2*(gamma*S - (1-u1)*beta*M*D - mu*M) +
    lambda3*((1-u1)*(1-alpha)*beta*M*D + delta*u2*Uh
    - theta*H - mu*H) +
    lambda4*((1-u1)*alpha*beta*M*D + theta*H -
    (1-delta*u2)*tau*Uh - delta*u2*Uh - mu*Uh) +
    lambda5*((1-delta*u2)*tau*Uh -(rho + epsilon +
    mu)*D);

% Turunan parsial
dHa_du1 = diff(Ha, u1);
dHa_du2 = diff(Ha, u2);

% Tampilkan hasil turunan parsial
disp('Turunan_parsial_terhadap_u1:');
disp(dHa_du1);
disp('Turunan_parsial_terhadap_u2:');
disp(dHa_du2);

```


Lampiran 3. Listing Program SMH U_h D

```
%Persamaan State
function dy=PST(y,N0,u1,u2,pi,rho,gamma,miu,beta,
alpha,delta,theta,tau,epsilon)
%N0=y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5);
x(1)=pi*N0+rho*y(5)-gamma*y(1)-miu*y(1);
x(2)=gamma*y(1)-(1-u1)*beta*y(2)*y(5)-miu*y(2);
x(3)=(1-u1)*(1-alpha)*beta*y(2)*y(5)+delta*u2*y(4)-
theta*y(3)-miu*y(3);
x(4)=(1-u1)*alpha*beta*y(2)*y(5)+theta*y(3)-(1-delta
*u2)*tau*y(4)-delta*u2*y(4)-miu*y(4);
x(5)=(1-delta*u2)*tau*y(4)-(rho+epsilon+miu)*y(5);
dy=[x(1) x(2) x(3) x(4) x(5)];
```

```
%Persamaan Costate
function dg=PCT(y,M,D,u1,u2,gamma,miu,beta,alpha,
theta,delta,tau,rho,epsilon)
p1=y(1);
p2=y(2);
p3=y(3);
p4=y(4);
p5=y(5);
%lambda1=p1;lambda2=p2;lambda3=p3;lambda4=p4;lambda5=p5;
x(1)=p1*(gamma+miu)-p2*gamma;
x(2)=p2*(miu-D*beta*(u1-1))-D*beta*p3*(alpha-1)*
(u1-1)+D*alpha*beta*p4*(u1-1);
x(3)=p3*(theta+miu)-p4*theta;
x(4)=p4*(miu+delta*u2-tau*(delta*u2-1))-delta*p3*u2+
p5*tau*(delta*u2-1)-1;
x(5)=p5*(rho+epsilon+miu)-p1*rho-M*beta*p2*(u1-1)-M*
beta*p3*(alpha-1)*(u1-1)+M*alpha*beta*p4*(u1-1)-1;
dg=[x(1) x(2) x(3) x(4) x(5)];
```

```

%function cc=UJB;
clc;
clear all;
close all;

%jumlah popopulasi pada t=0
S0 = 1000; %Single
M0 = 20; %Marriage
B0 = 200; %Healthy Marriage
C0 = 100; %Unhealthy Marriage
D0 = 30; %Divorce
N0 = 1350 %Total populasi

%Nilai Parameter
pi=0.028;
rho=0.1;
gamma=0.08;
alpha=0.1;
beta=0.00004;
theta=0.002;
delta=0.3;
tau=0.05;
epsilon=0.3;
miu=0.015; %Laju kematian alami

Q1=0.01; %bobot u1 edukasi pasca nikah
Q2=0.7; %bobot u2 emberian kontrol
u1max=1; %0<u1<1
u2max=1; %0<u2<1 %diubah menjadi lebih besar

h=0.1; %h=1/N misal: h=1/10=0.1
t=0:h:90; %selang dari 0 sampai 10 dipartisi dengan
jarak h=0.1
Z=length(t); %banyaknya t
%parameter e1

```

```

%membentuk matrik baris isinya nol dengan z baris, 1
kolom
u1=zeros (Z,1);
u1old=zeros (Z,1);
u2=zeros (Z,1);
u2old=zeros (Z,1);

S=zeros (Z,1);
M=zeros (Z,1);
B=zeros (Z,1);
C=zeros (Z,1);
D=zeros (Z,1);

Sold=zeros (Z,1);
Mold=zeros (Z,1);
Bold=zeros (Z,1);
Cold=zeros (Z,1);
Dold=zeros (Z,1);

%p1 adalah lambda_1 dsb
p1=zeros (Z,1);
p2=zeros (Z,1);
p3=zeros (Z,1);
p4=zeros (Z,1);
p5=zeros (Z,1);

p1old=zeros (Z,1);
p2old=zeros (Z,1);
p3old=zeros (Z,1);
p4old=zeros (Z,1);
p5old=zeros (Z,1);

tes=1;
it=0;
while tes > 1e-3
    u1old=u1;

```

```

u2old=u2;

Sold=S;
Mold=M;
Bold=B;
Cold=C;
Dold=D;

p1o=p1;
p2o=p2;
p3o=p3;
p4o=p4;
p5o=p5;

S(1)=S0;
M(1)=M0;
B(1)=B0;
C(1)=C0;
D(1)=D0;
J(it+1)=0;

for i=1:Z-1
    J(it+1)=J(it+1)+h*(C(i)+D(i)+1/2*Q1*u1old(i)^2+
    1/2*Q2*u2old(i)^2);
    y=[S(i) M(i) B(i) C(i) D(i)];

%RungeKutta
k1=h*PST(y,N0,u1old(i),u2old(i),pi,rho,gamma,miu,beta,
    alpha,delta,theta,tau,epsilon);
k2=h*PST(y+0.5*k1,N0,u1old(i),u2old(i),pi,rho,gamma,
    miu,beta,alpha,delta,theta,tau,epsilon);
k3=h*PST(y+0.5*k2,N0,u1old(i),u2old(i),pi,rho,gamma,
    miu,beta,alpha,delta,theta,tau,epsilon);
k4=h*PST(y+k3,N0,u1old(i),u2old(i),pi,rho,gamma,miu,
    beta,alpha,delta,theta,tau,epsilon);
y=y+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);

```

```

        S(i+1)=y(1);
        M(i+1)=y(2);
        B(i+1)=y(3);
        C(i+1)=y(4);
        D(i+1)=y(5);
    end
J(it+1)=J(it+1)+h*(C(i)+D(i)+1/2*Q1*u1old(i)^2+
    1/2*Q2*u2old(i)^2);
%Plot populasi tanpa kontrol
if it == 0
figure(1)
plot(t,S,'r--','LineWidth',3);
hold on;
figure(2)
plot(t,M,'r--','LineWidth',3);
hold on;
figure(3)
plot(t,B,'r--','LineWidth',3);
hold on;
figure(4)
plot(t,C,'r--','LineWidth',3);
hold on;
figure(5)
plot(t,D,'r--','LineWidth',3);
hold on;
end

p1(Z)=0;
p2(Z)=0;
p3(Z)=0;
p4(Z)=0;
p5(Z)=0;

for i=1:Z-1
    je=Z-i;

```

```

        y=[p1(je+1) p2(je+1) p3(je+1) p4(je+1) p5(je+1)];

k1=h*PCT(y,M(je+1),D(je+1),u1old(je+1),u2old(je+1),
        gamma,miu,beta,alpha,theta,delta,tau,rho,epsilon);
k2=h*PCT(y+0.5*k1,M(je+1),D(je+1),u1old(je+1),u2old
        (je+1),gamma,miu,beta,alpha,theta,delta,tau,rho,
        epsilon);
k3=h*PCT(y+0.5*k2,M(je+1),D(je+1),u1old(je+1),u2old
        (je+1),gamma,miu,beta,alpha,theta,delta,tau,rho,
        epsilon);
k4=h*PCT(y+k3,M(je+1),D(je+1),u1old(je+1),u2old(je+1),
        gamma,miu,beta,alpha,theta,delta,tau,rho,epsilon);
y=y-(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);

p1(je)=y(1);
p2(je)=y(2);
p3(je)=y(3);
p4(je)=y(4);
p5(je)=y(5);

%N0(je)=S(je)+E(je)+I(je)+P(je)+Q(je);
temp2=min([ (1/Q1)*(beta*M(je)*D(je)*(alpha*
        p4(je)-p2(je)-(alpha-1)*p3(je))) u1max]);
u1(je)=max([temp2 0]);

temp4=min([ (1/Q2)*((delta*C(je)*(p4(je)-p3(je)
        ))-(tau*delta*C(je)*(p4(je)-p5(je))))
        u2max]);
u2(je)=max([temp4 0]);
end

eS=sum(abs(S-Sold));
eM=sum(abs(M-Mold));
eB=sum(abs(B-Bold));
eC=sum(abs(C-Cold));

```

```

eD=sum(abs(D-Dold));

ep1=sum(abs(p1-p1o));
ep2=sum(abs(p2-p2o));
ep3=sum(abs(p3-p3o));
ep4=sum(abs(p4-p4o));
ep5=sum(abs(p5-p5o));

eu1=sum(abs(u1-u1old));
eu2=sum(abs(u2-u2old));
%error=sum dari error yang lama dengan yang baru

tes=eS+eM+eB+eC+eD+ep1+ep2+ep3+ep4+ep5+eu1+eu2;
it=it+1;
u1=(0.5*u1+0.5*u1old);
u2=(0.5*u2+0.5*u2old);
end

%plot populasi tanpa kontrol
%figure(9)
%plot(t, S, 'r-', 'LineWidth', 2);
%hold on;
%plot(t, M, 'b-', 'LineWidth', 2);
%plot(t, B, 'g-', 'LineWidth', 2);
%plot(t, C, 'm-', 'LineWidth', 2);
%plot(t, D, 'k-', 'LineWidth', 2);
%xlabel('Waktu (Bulan)');
%ylabel('Populasi');
%legend('Single (S)', 'Marriage (M)', 'Healthy Marriage
(H)', 'Unhealthy_Marriage_(Uh)', 'Divorce_(D)');
%title('Perkembangan Populasi Seiring Waktu');
%grid on;
%hold off;

%plot populasi dengan kontrol
figure(1)

```

```

plot(t,S,'g-','LineWidth',2.5);
xlabel('Waktu_(Bulan)');
ylabel('S(t)');
grid on;
legend('S_Tanpa_Kontrol','S_dengan_Kontrol_u');
title('Populasi_Single');
hold on;

figure(2)
plot(t,M,'g-','LineWidth',2.5);
xlabel('Waktu_(Bulan)');
ylabel('M(t)');
grid on;
legend('M_Tanpa_Kontrol','M_dengan_Kontrol_u');
title('Populasi_Marriage');
hold on;

figure(3)
plot(t,B,'g-','LineWidth',2.5);
xlabel('Waktu_(Bulan)');
ylabel('H(t)');
grid on;
legend('H_Tanpa_Kontrol','H_dengan_Kontrol_u');
title('Populasi_Healthy_Marriage');
hold on;

figure(4)
plot(t,C,'g-','LineWidth',2.5);
xlabel('Waktu_(Bulan)');
ylabel('U_h(t)');
grid on;
legend('U_h_Tanpa_Kontrol','U_h_dengan_Kontrol_u');
title('Populasi_Unhealthy_Marriage');
hold on;

figure(5)

```



```

plot(t,D,'g-','LineWidth',2.5);
xlabel('Waktu_(Bulan)');
ylabel('D(t)');
grid on;
legend('D_Tanpa_Kontrol','D_dengan_Kontrol_u');
title('Populasi_Divorce');
hold on;

figure(6)
plot(t,u1,'m-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu_(Bulan)');
ylabel('u^*1(t)');
grid on;
legend('Kontrol_u1');
title('Kontrol_Edukasi_Pasca_Nikah');
hold on;

figure(7)
plot(t,u2,'m-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu_(Bulan)');
ylabel('u^*2(t)');
grid on;
legend('Kontrol_u2');
title('Kontrol_Pemberian_Konseling');
hold on;

figure(8)
plot(t,u1,'m',t,u2,'g','linewidth',3);
legend('Kontrol_u_1*(t)','Kontrol_u_2*(t)');
xlabel('waktu');
ylabel('u(t)');
hold on;
grid on;

```

Lampiran 4. Daftar Riwayat Hidup

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

1. Nama Lengkap : Bunga Noer Intan Permatasari
2. Tempat, Tanggal Lahir : Kab. Semarang, 15 Juni 2003
3. Alamat : Desa Kandangan 05/01,
Kec. Bawen, Kab. Semarang
4. Nomor Telepon : 085645225318
5. Email : bunganoer85@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. RA Assholikhin : Lulus tahun 2009
2. SD Negeri Polosiri 01 : Lulus tahun 2015
3. SMP Negeri 2 Ambarawa : Lulus tahun 2018
4. SMA Negeri 1 Bergas : Lulus tahun 2021