

**ANALISIS MODEL PREDATOR-PREY DENGAN
EFEK KETAKUTAN PADA PREY DAN
KERJASAMA BERBURU ANTAR PREDATOR
SERTA PEMANENAN**

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi sebagian Syarat Guna
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika dalam Ilmu
Matematika



Oleh:

Emamatul Qudsiyah

NIM. 1908046033

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2024**

**ANALISIS MODEL PREDATOR-PREY DENGAN
EFEK KETAKUTAN PADA PREY DAN
KERJASAMA BERBURU ANTAR PREDATOR
SERTA PEMANENAN**

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi sebagian Syarat Guna
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika dalam Ilmu
Matematika



Oleh:

Emamatul Qudsiyah

NIM. 1908046033

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2024**

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Emamatul Qudsiyah

NIM : 1908046033

Jurusan : Matematika

Menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

**ANALISIS MODEL PREDATOR-PREY DENGAN EFEK
KETAKUTAN PADA PREY DAN KERJASAMA BERBURU
ANTAR PREDATOR SERTA PEMANENAN**

Secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, Desember 2024

Pembuat Pernyataan



Emamatul Qudsiyah

NIM. 1908046033



KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO SEMARANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Alamat: Jl. Prof. Dr. Hamka Ngaliyan Semarang
Telp. 024 7601293

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini:

Judul : **Analisis Model Predator-Prey dengan Efek Ketakutan pada Prey dan Kerjasama Berburu antar Predator serta Pemanenan**

Penulis : **Emamatul Qudsiyah**

NIM : 1908046033

Jurusan: Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam ilmu Matematika.

Semarang, 27 Desember 2024

DEWAN PENGUJI

Ketua Sidang,

Aini Fitriyah, M. Sc.

NIP. 198909292019032021

Penguji Utama I,

Seftina Diyah Miasary, M. Sc.

NIP. 198709212019032010

Pembimbing I,

Aini Fitriyah, M. Sc.

NIP. 198909292019032021

Sekretaris Sidang,

Siti Masliah, M. Si.

NIP. 197706112011012004

Penguji Utama II,

Agus Wayan Yulianto, M. Sc.

NIP. 198907162019031007

Pembimbing II,

Zulaikha, M. Si.

NIP. 199204092019032027



NOTA DINAS

Semarang, 20 Desember 2024

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang
Assalamu'alaikum. Wr. Wb.

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan :

Judul : Analisis Model Predator-Prey dengan Efek Ketakutan pada Prey dan Kerjasama Berburu antar Predator serta Pemanenan
Nama : Emamatul Qudsiyah
Nim : 1908046033
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujicobakan dalam Sidang Munaqosyah.
Wassalamu'alaikum. Wr. Wb.

Pembimbing I



Aini Fitriyah, M. Sc.

NIP. 198909292019032021

NOTA DINAS

Semarang, 20 Desember 2024

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang
Assalamu'alaikum. Wr. Wb.

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan :

Judul : Analisis Model Predator-Prey dengan Efek Ketakutan pada Prey dan Kerjasama Berburu antar Predator serta Pemanenan
Nama : Emamatul Qudsiyah
Nim : 1908046033
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujicobakan dalam Sidang Munaqosyah.
Wassalamu'alaikum. Wr. Wb.

Pembimbing II



Zulaikha, M. Si.

NIP. 199204092019032027

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmanirrohim.

Alhamdulillahirabbil'alamin.

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah dan inayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul “**Analisis Model Predator-Prey dengan Efek Ketakutan pada Prey dan Kerjasama Berburu antar Predator serta Pemanenan**”. Sholawat serta salam senantiasa penulis curahkan kepada baginda Nabi Muhammad SAW yang selalu dinantikan syafaatnya di hari akhir kelak.

Skripsi ini disusun guna memenuhi sebagian syarat untuk memperoleh gelar (S1) matematika. Skripsi ini tidak akan terselesaikan tanpa adanya bimbingan, arahan, dan dukungan dari berbagai pihak. Maka dari itu penulis mengucapkan terimakasih kepada seluruh pihak yang telah membantu dalam proses penulisan skripsi ini. Ucapan terimakasih secara khusus penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Musahadi, M. Ag. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang beserta seluruh jajarannya.

2. Any Muanalifah, Ph.D. dan Prihadi Kurniawan, M. Sc. selaku Ketua dan Sekretaris Program Studi matematika UIN Walisongo Semarang yang telah memberikan motivasi selama penulisan skripsi.
3. Aini Fitriyah, M. Sc. sebagai dosen pembimbing I dan Zulaikha, M. Si. selaku dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktu, tenaga dan pikiran untuk memberikan waktu, bimbingan, arahan dan dukungan selama penulis menyusun skripsi.
4. Agus Wayan Yulianto, M. Sc. selaku dosen wali yang senantiasa memberikan bimbingan, arahan, dukungan dan motivasi kepada penulis selama belajar di UIN Walisongo Semarang.
5. Segenap dosen Program Studi Matematika dan Pendidikan Matematika yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk mengikuti pendidikan, pengajaran ilmu pengetahuan dan pelayanan yang lauk selama penulis melakukan studi. Semoga ilmu yang telah diajarkan menjadi keberkahan dan kemanfaatan di dunia dan akhirat.
6. Segenap dosen dan karyawan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang yang telah mengajarkan ilmu pengetahuan dan ilmu kehidupan kepada penulis selama belajar di UIN Walisongo Semarang.

7. Segenap Staf dan Tata Usaha UIN Walisongo Semarang yang telah membantu penulis selama perkuliahan dan penulisan skripsi.
8. Orang tua terhebat, Bapak Pursalin dan Ibu Nikmatun Nasiroh yang senantiasa memberikan doa, dukungan moril dan materil bagi penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Kedua adik penulis Ilham Dwi Setiawan dan Muhamad Arkan Al Fatih yang senantiasa membangkitkan semangat penulis.
10. Bapak Ibu guru penulis di TK Kartini, SD N 1 Lebak, MTsN 1 Jepara, *Islamic Boarding School* Al Mubarak, MAN 2 Kudus, Pondok Pesantren Putri Arofah Kudus yang telah membagikan ilmunya serta memotivasi penulis untuk menjadi pribadi yang senantiasa haus belajar.
11. Rekan-rekan organisasi penulis di HMJ Matematika, PMII Fakultas Sains dan Teknologi, UKM WEC (Walisongo English Club), Generasi Peduli Iklim, Griya Peradaban, American Corner UIN Walisongo Semarang dan GENBI (Generasi Baru Indonesia) tingkat UIN Walisongo, tingkat kota Semarang dan tingkat se-Jawa Tengah.
12. Teman-teman program studi matematika dan pendidikan matematika terkhusus angkatan 2019.

13. Sahabat penulis Safira, Fani, Lina, Pucan, Erlinda, Melly, Asyrof, Adi, Alfian, Nia, Vina, Winda, Putri Anjani, Dewi, Afwan yang senantiasa memberikan dukungan kepada penulis.
14. Segenap pihak yang telah membantu dan memberikan semangat yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak yang berkepentingan. Penulis juga menyadari dalam menyusun skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan baik isi maupun susunannya. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik demi penyempurnaan skripsi ini.

Semoga segala batuan, dukungan dan bimbingan yang telah diberikan kepada penulis untuk menyusun skripsi dinilai oleh Allah SWT sebagai amal shaleh dan dibalas dengan pahala berlipat ganda. Aamiin.

Semarang, 20 Desember 2024

Penulis

Emamatul Qudsiyah

1908046033

ABSTRAK

Penelitian ini membahas mengenai analisis model predator prey dengan efek ketakutan pada prey, kerjasama berburu antar predator serta pemanenan. Tujuan penelitian ini adalah memahami dinamika populasi predator prey dalam ekosistem yang dipengaruhi oleh ketiga faktor tersebut. Metode dalam penelitian ini adalah studi pustaka. Hasil penelitian menunjukkan bahwa model mempunyai tiga titik ekuilibrium yang bersifat stabil asimtotik lokal. Simulasi numerik pada beberapa variasi parameter menunjukkan bahwa efek pemanenan pada prey memengaruhi eksistensi predator, yakni jika pemanenan prey lebih dari satu populasi predator dan prey mengecil menuju kepunahan. Kemudian adanya kerjasama berburu antar predator dan efek ketakutan pada prey menyebabkan kedua populasi dapat berkoeksistensi.

Kata Kunci: Model predator prey, Efek pemanenan, Efek kerjasama berburu antar predator, Efek ketakutan pada prey, Titik ekuilibrium, Analisis kestabilan lokal.

TRANSLITERASI ARAB LATIN

Penulisan transliterasi huruf-huruf Arab Latin dalam skripsi ini berpedoman pada SKB Menteri Agama dan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan R.I Nomor : 158/1987 dan Nomor : 0543b/U/1987. Penyimpanan penulisan kata sandang [al-] disengaja secara konsisten supaya sesuai teks Arabnya.

ا	A	ط	t}
ب	B	ظ	z}
ت	T	ع	'
ث	s\	غ	g
ج	J	ف	f
ح	h}	ق	q
خ	kh	ك	k
د	D	ل	l
ذ	z\	م	m
ر	R	ن	n
ز	Z	و	w
س	S	ه	h
ش	sy	ء	'
ص	s}	ي	y
ض	d}		

Bacaan Madd :

a > = a panjang

I > = I panjang

u > = u panjang

Bacaan Diftong :

au = او

ai = اي

iv = اي

DAFTAR ISI

HALAMAN AWAL	I
RYNYATAAN KEASLIAN.....	ii
PENGESAHAN.....	iii
NOTA DINAS.....	iv
NOTA DINAS.....	v
KATA PENGANTAR	vi
ABSTRAK.....	x
TRANSLITERASI ARAB LATIN.....	xi
DAFTAR ISI.....	xii
DAFTAR TABEL	xv
DAFTAR GAMBAR	xvi
DAFTAR LAMPIRAN.....	xviii
BAB I.....	1
PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Rumusan Masalah	6
C. Tujuan Penelitian	7
D. Batasan Penelitian	8
E. Manfaat Penelitian	8
BAB II	10
LANDASAN PUSTAKA	10
A. Ekologi.....	10
B. Pemodelan Matematika	15

1.	Model Pertumbuhan Logistik.....	19
2.	Model Predator Prey Lotka Volterra	21
C.	Persamaan Diferensial	23
D.	Sistem Dinamik.....	27
E.	Analisis Dinamik.....	28
1.	Titik Ekuilibrium.....	29
2.	Kestabilan Titik Ekuilibrium	30
3.	Linierisasi.....	33
4.	Nilai Eigen dan Vektor Eigen	44
F.	Kriteria Routh-Hurwitz	46
G.	Fungsi Respon	50
H.	Aturan Tanda Descartes.....	53
I.	Metode Runge-Kutta	56
J.	Kajian Penelitian Terdahulu	58
BAB III.....		63
METODOLOGI PENELITIAN.....		63
BAB IV		65
HASIL DAN PEMBAHASAN.....		65
A.	Asumsi Model	65
B.	Variabel dan Parameter	66
C.	Konstruksi Model	68
D.	Analisis Model	73
E.	Titik Ekuilibrium Model.....	81
F.	Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium	91

G. Simulasi Numerik	118
1. Simulasi Titik Ekuilibrium Trivial	119
2. Simulasi Titik Ekuilibrium Aksial	124
3. Simulasi Titik Ekuilibrium Koeksistensi	135
BAB V.....	153
PENUTUP	153
A. Kesimpulan.....	153
B. Saran	155
Daftar Pustaka.....	156
Lampiran.....	161
<i>Lampiran 1</i>	<i>161</i>
<i>Lampiran 2</i>	<i>167</i>
<i>Lampiran 3</i>	<i>174</i>
<i>Lampiran 4</i>	<i>178</i>
<i>Lampiran 5</i>	<i>199</i>

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul	Halaman
Tabel 2.1	Jenis kestabilan titik ekuilibrium	38
Tabel 2.2	Tabel Routh	47
Tabel 4.1	Daftar variabel model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerja sama berburu antar predator serta pemanenan	66
Tabel 4.2	Daftar parameter model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerja sama berburu antar predator serta pemanenan	67
Tabel 4.3	Kemungkinan solusi sistem persamaan (4.4) berdasarkan aturan tanda Descartes	89
Tabel 4.4	Tabel routh untuk mencari akar polinomial (4.30)	110
Tabel 4.5	Syarat kestabilan titik ekuilibrium pada sistem persamaan (4.4)	116
Tabel 4.6	Nilai parameter titik ekuilibrium trivial	119
Tabel 4.7	Nilai parameter titik ekuilibrium aksial	124
Tabel 4.8	Nilai parameter titik ekuilibrium koeksistensi	135

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
Gambar 2.1	Alur konstruksi pemodelan matematika	16
Gambar 2.2	Visualisasi titik ekuilibrium stabil	32
Gambar 2.3	Visualisasi titik ekuilibrium stabil asimtotik	33
Gambar 2.4	Visualisasi titik ekuilibrium tidak stabil	33
Gambar 2.5	Bentuk kestabilan <i>node</i> atau simpul	39
Gambar 2.6	Bentuk kestabilan <i>saddle</i> atau pelana	40
Gambar 2.7	Bentuk kestabilan spiral	40
Gambar 2.8	Bentuk kestabilan <i>center</i> atau terpusat	41
Gambar 3.1	Diagram alur penelitian	64
Gambar 4.1	Diagram transfer model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerja sama berburu antar predator serta pemanenan	68
Gambar 4.2	Dinamika populasi predator prey pada saat $c_1 = 1,2$	120
Gambar 4.3	Dinamika populasi prey pada saat $c_1 = 1,2$	121
Gambar 4.4	Dinamika populasi predator prey pada saat $c_1 = 1,2$	121
Gambar 4.5	Dinamika populasi predator prey pada saat $c_1 = 2$	122
Gambar 4.6	Dinamika populasi prey pada saat $c_1 = 2$	123
Gambar 4.7	Dinamika populasi predator pada saat $c_1 = 2$	123

Gambar 4.8	Dinamika populasi predator prey pada saat $c_1 = 0,6$	128
Gambar 4.9	Dinamika populasi prey pada saat $c_1 = 0,6$	128
Gambar 4.10	Dinamika populasi predator pada saat $c_1 = 0,6$	129
Gambar 4.11	Dinamika populasi predator prey pada saat $c_1 = 0,7$	130
Gambar 4.12	Dinamika populasi prey pada saat $c_1 = 0,7$	131
Gambar 4.13	Dinamika populasi predator pada saat $c_1 = 0,7$	131
Gambar 4.14	Dinamika populasi predator prey pada saat $c_1 = 0,9$	133
Gambar 4.15	Dinamika populasi prey pada saat $c_1 = 0,9$	133
Gambar 4.16	Dinamika populasi predator pada saat $c_1 = 0,9$	134
Gambar 4.17	Dinamika populasi predator prey pada saat $\beta = 0,95$	148
Gambar 4.18	Dinamika populasi prey pada saat $\beta = 0,95$	148
Gambar 4.19	Dinamika populasi predator pada saat $\beta = 0,95$	149
Gambar 4.20	Dinamika populasi predator prey pada saat $\beta = 10$	150
Gambar 4.21	Dinamika populasi prey pada saat $\beta = 10$	151
Gambar 4.22	Dinamika populasi predator pada saat $\beta = 10$	151

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Judul	Halaman
Lampiran 1	Perhitungan manual untuk menemukan persamaan polinomial guna menentukan p_2	161
Lampiran 2	Perhitungan aturan tanda Descartes untuk mencari kemungkinan akar tunggal positif	167
Lampiran 3	Perhitungan manual untuk mencari nilai p_2 sesuai dengan kemungkinan yang diperoleh dari aturan tanda Descartes	174
Lampiran 4	Program MATLAB model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerja sama berburu antar predator serta pemanenan	178
Lampiran 5	Hasil iterasi sistem persamaan (4.4) menggunakan metode Runge-Kutta menggunakan <i>software</i> MATLAB	199

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Bumi menjadi tempat berinteraksi antar makhluk hidup serta memenuhi kebutuhan hidupnya. Suatu susunan organisme dan lingkungan fisik, yang berinteraksi melalui aliran energi satu arah dan peredaran nutrien didefinisikan sebagai ekosistem (Starr et al., 2013).

Pada ekosistem terdapat interaksi antar makhluk hidup yang diidentifikasi dengan adanya predator atau pemangsa dan prey atau mangsa. Interaksi ini disebut predasi. Hal ini menyebabkan terjadinya proses makan dan dimakan antara produsen dengan konsumen. Proses makan dan dimakan ini diketahui sebagai peristiwa rantai makanan (A. Yanwar, 2019). Hubungan predator dan prey sangat erat, sebab tanpa prey, predator tak bisa hidup. Sebagaimana firman Allah SWT dalam QS Al Anbiya ayat 16 yang berbunyi,

وَمَا خَلَقْنَا السَّمَاءَ وَالْأَرْضَ وَمَا بَيْنَهُمَا لِعَيْنٍ

Artinya:

“Kami tidak menciptakan langit dan bumi serta segala apa yang ada diantara keduanya dengan main-main”.

Pada saat hewan berkelompok, beberapa individu melindungi yang lain dari predator. Pemilihan pusat kelompok dapat menciptakan kawanan hewan (*selfish herd*), tempat satu individu bersembunyi diantara individu lain. Perilaku kawanan hewan terjadi pada ikan *bluegill sunfish*. Ikan jantan membentuk sarang dengan menggali turunan dalam lumpur di dasar danau. Ikan dan siput memangsa telurnya sehingga ikan betina meletakkan telur dalam sarang tersebut (Starr et al., 2013).

Predator pada spesies yang sama bersaing satu sama lain untuk mendapatkan sumber daya, namun karena proses perburuan yang unik mereka saling membantu untuk mendapatkan keuntungan dan menunjukkan perilaku kerja sama berburu. Para peneliti telah meneliti perilaku ini pada beberapa spesies predator seperti singa (Lausanne & Brook, 1989), anjing liar Afrika (Creel & Creel, 1995), simpanse (Christophe Boesch, 1994), rubah (David Mech, 2012), burung (Hector, 1986) dan masih banyak lagi.

Banyak mamalia termasuk serigala, singa, anjing liar dan simpanse hidup dalam kelompok sosial dan bekerja sama dalam perburuan. Starr (2009) mengamati singa soliter yang menangkap mangsa sekitar 15% sepanjang waktu. Dua singa bekerja sama dalam perburuan menangkap dua kali lebih sering namun harus membagi mangsanya sehingga jumlah makanan per singa seimbang. Kerja sama berburu meningkatkan keberhasilan dalam menangkap prey (Pal et al., 2018). Predator yang bekerja sama menyebabkan jarak pengejaran berkurang sehingga lebih efisien (Pal et al., 2019a). Kerja sama berburu bermanfaat bagi predator sebab meningkatkan tingkat serangan dalam berburu namun juga dapat merugikan predator ketika kepadatan populasi prey menurun akibat tingginya predasi (Teixeira Alves & Hilker, 2017).

Proses perburuan ini memberi efek ketakutan pada prey. Efek ketakutan mengakibatkan prey selalu waspada terhadap kemungkinan serangan dari predator (Panday et al., 2018). Munculnya perilaku ketakutan prey dapat mengurangi tingkat reproduksi populasi prey. Ketakutan prey terhadap predator dapat mengacaukan dinamika populasi (Elliott et al., 2017). Karena takut dimangsa, hewan mangsa atau prey dapat

mengubah zona penggembalaannya ke tempat yang lebih aman dan mengorbankan area tingkat asupan tertingginya (Ripple, 2014).

Ketakutan yang dialami oleh populasi prey tidak hanya berdampak pada perilaku mereka, tetapi juga dapat memicu perubahan dalam struktur ekosistem secara keseluruhan. Ketika prey berusaha menghindari predator, prey sering kali menghindari area yang kaya sumber daya, yang pada gilirannya dapat mempengaruhi kesehatan dan pertumbuhan populasi mereka. Hal ini menciptakan ketidakseimbangan yang dapat memperburuk situasi bagi predator, karena berkurangnya jumlah prey dapat mengarah pada kelangkaan makanan. Oleh karena itu, strategi pengelolaan yang efektif seperti pemanenan menjadi penting untuk memulihkan keseimbangan antara kedua populasi dan memastikan bahwa ekosistem tetap berfungsi dengan baik (Amara & Savitri, 2022).

Pemanenan pada predator dan prey merupakan proses pengelolaan jumlah individu dari kedua populasi untuk menjaga keseimbangan ekosistem (Putra et al., 2023). Pemanenan predator digunakan untuk mengendalikan populasi predator dan mencegah kepunahan populasi prey (Tao et al., 2011). Pemanenan

predator membantu menjaga keberlangsungan prey di alam dengan mengontrol jumlah predator sesuai dengan populasi yang tersedia. Pada situasi tertentu, jumlah populasi yang berbeda dapat saling memengaruhi satu sama lain.

Perkembangan teknologi dan ilmu matematika semakin signifikan sehingga berpengaruh pada manusia. Manusia dapat mensimulasikan masalah kompleks yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari dan menggunakannya untuk mengukur fenomena yang terjadi di alam semesta ini (Ndi & Cendana, 2019). Cabang ilmu pemodelan matematika turut mengalami perkembangan salah satunya adalah model predator prey. Model predator prey pertama kali diperkenalkan oleh Alfred J. Lotka dan Vito Volterra, sehingga disebut Model Lotka Volterra (Murray, 2001). Model matematika dapat memberikan penjelasan masalah dengan baik dan menghasilkan kesimpulan yang komprehensif. Model matematika menggambarkan fenomena dunia nyata dalam bahasa matematika sehingga memudahkan untuk memahami fenomena atau masalah tersebut (Kurniawati & Rosyidi, 2018). Pada model matematika tersebut selanjutnya dilakukan analisis dinamik sehingga diketahui perilaku solusi di persekitaran

sistem tersebut tanpa perlu menyelesaikan sistem terlebih dahulu melalui kestabilan titik ekuilibriumnya.

Banyak penelitian yang membahas mengenai dinamika kerjasama berburu dan ketakutan dalam interaksi predator prey. Diantaranya adalah penelitian oleh Saheb Pal (2019) yang merancang model matematika dari predator prey model Leslie Gower dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator. Berbeda dari penelitian Pal, Belew dan Melese (2022) melakukan pengembangan dengan mempelajari dampak dari efek ketakutan pada prey, kerjasama berburu pada predator dan pemanenan pada predator dan prey. Penulis tertarik untuk mengkaji lebih mendalam penelitian oleh Belew dan Melese (2022) karena mempertimbangkan efek ketakutan pada prey, kerja sama berburu antar predator dan pemanenan predator prey dari sistem predator prey dengan laju nonlinier dengan fungsi respon Holling tipe II.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan dalam subbab latar belakang maka penulis merumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator serta adanya pemanenan pada prey dan predator?
2. Bagaimana analisis dinamik model predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator serta adanya pemanenan pada prey dan predator?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik model predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator serta adanya pemanenan pada prey dan predator?

C. Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator serta adanya pemanenan pada prey dan predator.
2. Mengetahui analisis dinamik model predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator serta adanya pemanenan pada prey dan predator.

3. Mengetahui hasil simulasi numerik model predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator serta adanya pemanenan pada prey dan predator.

D. Batasan Penelitian

Adapun batasan masalah pada penelitian ini adalah objek yang akan dimodelkan dalam penelitian, yakni:

1. Populasi bersifat tertutup sehingga tidak terdapat populasi yang bermigrasi.
2. Analisis pada penelitian ini terbatas pada kestabilan lokal.

E. Manfaat Penelitian

1. Bagi Penulis

Hasil penelitian ini dapat menambah pengetahuan penulis tentang analisis dinamik model predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator serta pemanenan. Selain itu, penelitian ini menjadi pengalaman berharga bagi penulis dalam menerapkan ilmu yang diperoleh di perkuliahan.

2. Bagi Penelitian Selanjutnya

Hasil penelitian ini dapat dijadikan sumber referensi bagi penelitian selanjutnya, terutama yang berkaitan dengan analisis dinamik model predator prey.

3. Bagi Lembaga Kampus UIN Walisongo Semarang

Hasil penelitian ini dapat menjadi bahan informasi untuk menambah khazanah ilmu pengetahuan di Lembaga Kampus UIN Walisongo Semarang, khususnya Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi dan dapat digunakan referensi untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

Pada bab ini membahas mengenai teori-teori yang dibutuhkan dalam analisis dinamik model matematika predator prey. Teori tersebut diantaranya adalah ekologi, pemodelan matematika yang meliputi model pertumbuhan logistik dan model predator prey Lotka-Volterra, persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial, titik ekuilibrium, linierisasi, nilai eigen, kriteria routh-hurwitz, aturan tanda Descartes, metode Runge-Kutta serta fungsi respon. Selain itu, pada bab ini juga diuraikan mengenai kajian pustaka yang memuat penelitian sebelumnya yang sesuai dengan penelitian ini.

A. Ekologi

Ekosistem didefinisikan sebagai suatu susunan organisme dan lingkungan fisik, yang berinteraksi melalui aliran energi satu arah dan peredaran nutrien. Ekosistem memerlukan *supply* energi dan nutrien secara terus menerus untuk bisa bertahan hidup (Evers et al., 2013).

Semua organisme dalam suatu ekosistem berpartisipasi dalam hierarki hubungan trofik yang dikenal sebagai tingkat trofik. Pada saat suatu organisme memakan organisme lain, energi ditransfer dari

organisme yang dimakan tersebut ke organisme yang memakannya. Semua organisme pada tingkat trofik yang sama dalam suatu ekosistem melakukan jumlah transfer energi dan masukan energi yang sama ke dalam sistem.

Pada ekosistem terdapat interaksi antar makhluk hidup yang diidentifikasi dengan adanya predator atau pemangsa dan prey atau mangsa. Interaksi ini disebut predasi. Rantai makanan merupakan serangkaian proses di mana sebagian energi yang diperoleh produsen primer ditransfer ke organisme pada tingkat trofik yang lebih tinggi. Produsen berada pada tingkat ekosistem tropis pertama. Pada setiap tingkat trofik, organisme berinteraksi dengan kelompok predator (pemangsa), prey (mangsa), atau keduanya yang sama. Mengidentifikasi rantai makanan adalah cara sederhana untuk mulai memikirkan predator dan mangsanya di ekosistem. Pada penelitian ini dibahas proses interaksi antara predator prey dengan pengaruh efek ketakutan pada prey, kerjasama berburu antar predator serta pemanenan pada prey dan predator.

Pada saat hewan berkelompok, beberapa individu melindungi yang lain dari predator. Pemilihan pusat kelompok dapat menciptakan kawan-an hewan (*selfish herd*), tempat satu individu bersembunyi

diantara individu lain. Perilaku kawanan hewan terjadi pada ikan *bluegill sunfish*. Ikan jantan membentuk sarang dengan menggali turunan dalam lumpur di dasar danau. Ikan dan siput memangsa telurnya sehingga ikan betina meletakkan telur dalam sarang tersebut (Starr et al., 2013).

Predator pada spesies yang sama bersaing satu sama lain untuk mendapatkan sumber daya, namun karena proses perburuan yang unik mereka saling membantu untuk mendapatkan keuntungan dan menunjukkan perilaku kerja sama berburu. Para peneliti telah meneliti perilaku ini pada beberapa spesies predator seperti singa (Lausanne & Brook, 1989), anjing liar Afrika (Creel & Creel, 1995), simpanse (Christophe Boesch, 1994), rubah (David Mech, 2012), burung (Hector, 1986) dan masih banyak lagi.

Banyak mamalia termasuk serigala, singa, anjing liar dan simpanse hidup dalam kelompok sosial dan bekerja sama dalam perburuan. Starr (2009) mengamati singa soliter yang menangkap mangsa sekitar 15% sepanjang waktu. Dua singa bekerja sama dalam perburuan menangkap dua kali lebih sering namun harus membagi mangsanya sehingga jumlah makanan per singa seimbang. Kerja sama berburu meningkatkan

keberhasilan dalam menangkap prey (Pal et al., 2018). Predator yang bekerja sama menyebabkan jarak pengejaran berkurang sehingga lebih efisien (Pal et al., 2019a). Kerja sama berburu bermanfaat bagi predator sebab meningkatkan tingkat serangan dalam berburu namun juga dapat merugikan predator ketika kepadatan populasi prey menurun akibat tingginya predasi (Teixeira Alves & Hilker, 2017).

Proses perburuan ini memberi efek ketakutan pada prey. Efek ketakutan mengakibatkan prey selalu waspada terhadap kemungkinan serangan dari predator (Panday et al., 2018). Munculnya perilaku ketakutan prey dapat mengurangi tingkat reproduksi populasi prey. Ketakutan prey terhadap predator dapat mengacaukan dinamika populasi (Elliott et al., 2017). Karena takut dimangsa, hewan mangsa atau prey dapat mengubah zona penggembalaannya ke tempat yang lebih aman dan mengorbankan area tingkat asupan tertingginya (Ripple, 2014).

Ketakutan yang dialami oleh populasi prey tidak hanya berdampak pada perilaku mereka, tetapi juga dapat memicu perubahan dalam struktur ekosistem secara keseluruhan. Ketika prey berusaha menghindari predator, prey sering kali menghindari area yang kaya

sumber daya, yang pada gilirannya dapat mempengaruhi kesehatan dan pertumbuhan populasi mereka. Hal ini menciptakan ketidakseimbangan yang dapat memperburuk situasi bagi predator, karena berkurangnya jumlah prey dapat mengarah pada kelangkaan makanan. Oleh karena itu, strategi pengelolaan yang efektif seperti pemanenan menjadi penting untuk memulihkan keseimbangan antara kedua populasi dan memastikan bahwa ekosistem tetap berfungsi dengan baik (Amara & Savitri, 2022).

Pemanenan pada predator dan prey merupakan proses pengelolaan jumlah individu dari kedua populasi untuk menjaga keseimbangan ekosistem (Putra et al., 2023). Pemanenan predator digunakan untuk mengendalikan populasi predator dan mencegah kepunahan populasi prey (Tao et al., 2011). Pemanenan predator membantu menjaga keberlangsungan prey di alam dengan mengontrol jumlah predator sesuai dengan populasi yang tersedia. Pada situasi tertentu, jumlah populasi yang berbeda dapat saling memengaruhi satu sama lain.

Pada ekosistem terdapat daya dukung lingkungan. Daya dukung (*carrying capacity*) ialah jumlah maksimum individu dalam populasi yang dapat

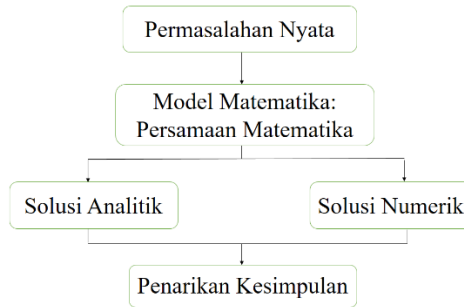
ditunjang oleh lingkungan secara tidak berhingga. Daya dukung berarti bahwa persediaan tetap sumber daya menentukan ukuran populasi.

B. Pemodelan Matematika

Kehidupan manusia tak lepas dengan adanya kehidupan berlogika (Saragih et al., 2019). Logika yang sistematis terkonsep dalam keilmuan matematika yang mana penerapannya luas dibanyak bidang seperti bidang fisika, biologi, teknik, sosial. Melalui pemodelan matematika fenomena alam dapat dipelajari dan dipahami dengan lebih mudah (Tjang Daniel Chandra, 2019).

Pemodelan matematika adalah representasi dari suatu fenomena berdasarkan asumsi yang digunakan (Edi Cahyono, 2013). Implementasi pemodelan matematika sudah diaplikasikan dalam berbagai disiplin ilmu. Tujuan pemodelan matematika adalah untuk merepresentasikan masalah kehidupan nyata dalam istilah matematika untuk mendapatkan pemahaman yang lebih baik tentang masalah tersebut (Widowati, 2007).

Alur konstruksi pemodelan matematika dapat digambarkan sebagai berikut (Edi Cahyono, 2013):



Gambar 2.1 Alur Konstruksi Pemodelan Matematika

Penjelasan alur konstruksi pemodelan matematika pada **gambar 2.1** sebagai berikut:

1. Perumusan masalah dan pemodelan matematika suatu fenomena.

Tujuan dari langkah ini adalah untuk menerjemahkan data dan informasi yang dikumpulkan mengenai permasalahan nyata ke dalam model matematika. Data maupun informasi tentang suatu fenomena bersumber dari eksperimen di laboratorium, pengamatan di industri ataupun dalam kehidupan sehari-hari.

Model matematika menyajikan suatu permasalahan nyata secara lebih terukur (kuantitatif) dengan menggunakan persamaan atau pertidaksamaan matematika dan ekspresi matematika. Namun begitu, model matematika memiliki keterbatasan dalam mengeneralisasikan interpretasinya sebab dalam prosesnya menggunakan asumsi-asumsi.

2. Pencarian solusi matematika.

Model matematika yang telah diperoleh dicari solusinya dengan menggunakan metode matematika yang sesuai dengan permasalahan yang ada. Fungsi matematika, angka, dan grafik sering digunakan untuk menyatakan solusi matematika ini.

3. Penarikan kesimpulan dari solusi matematika yang diperoleh.

Solusi yang berupa fungsi, angka-angka maupun grafik dikorelasikan dengan dunia nyata. Penarikan kesimpulan tersebut dilakukan untuk memperoleh pemahaman atas efek yang ditimbulkan terhadap fenomena awal masalah tersebut berasal.

Berikut diberikan contoh penentuan asumsi, parameter dan pemodelan matematika pada kasus predator prey.

Contoh 2.1 Model Predator Prey dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dan Efek Ketakutan (Amara & Savitri, 2022):

Pada penelitian **contoh 2.1** terdapat beberapa asumsi guna memodelkan predator prey dengan fungsi respon holling tipe II dan efek ketakutan:

1. Laju pertumbuhan populasi prey dipengaruhi oleh tingkat pertumbuhan populasi dan daya dukung lingkungan (*carrying capacity*).
2. Populasi prey berkurang karena adanya persaingan antar spesies dan predasi predator terhadap prey.
3. Laju pertumbuhan populasi predator dipengaruhi tingkat pertumbuhan populasi prey dan daya dukung lingkungan (*carrying capacity*).
4. Populasi predator berkurang karena kelangkaan makanan favoritnya (prey).

Keterangan variabel dan parameter:

$x(t)$ = Jumlah populasi prey pada waktu ke- t

$y(t)$ = Jumlah populasi predator pada waktu ke- t

r_1 = Pertumbuhan intrinsik prey

r_2 = Pertumbuhan intrinsik predator

F = Tingkat ketakutan prey terhadap predator

- B = Persaingan antar prey
 a_1 = Nilai maksimum yang dapat dicapai oleh tingkat pengurangan x karena y
 a_2 = Nilai maksimum yang dapat dicapai oleh tingkat pengurangan y karena x
 m = Waktu yang dihabiskan predator dalam memangsa
 k = Daya dukung lingkungan (*carrying capacity*)

Berdasarkan asumsi maka pemodelan **contoh 2.1** yakni pemodelan predator prey dengan fungsi respon holling tipe II dan efek ketakutan dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{r_1}{1 + fy} - bx - \frac{a_1 y}{x + m} \right) x$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(r_2 - \frac{a_2 y}{x + k} \right)$$

Pada penelitian ini model sistem yang dibentuk berdasarkan model pertumbuhan logistik dan model predator prey lotka volterra.

1. Model Pertumbuhan Logistik

Model pertumbuhan logistik merupakan model pertumbuhan populasi dengan sumber daya lingkungan yang terbatas. Jika populasi bertambah maka laju pertumbuhan akhirnya melemah dan

kemudian berhenti pada ukuran populasi tertentu. Besarnya populasi maksimal dimana pertumbuhan berhenti, secara umum disebut daya dukung (*carrying capacity*), yakni jumlah maksimal individu dalam suatu populasi yang dapat didukung oleh lingkungannya.

Apabila pada laju pertumbuhan populasi terdapat batasan daya dukung lingkungan, maka secara matematis laju pertumbuhan populasi dapat dinyatakan sebagai persamaan diferensial yaitu

$$\frac{dN}{dt} = f(N) \quad (2.1)$$

dengan $f(N)$ merupakan fungsi dari ukuran populasi sehingga dapat dikatakan bahwa laju pertumbuhan populasi bergantung pada ukuran populasi. Apabila daya dukung lingkungan atau kapasitas maksimal suatu habitat adalah K maka lingkungan masih dapat mendukung $(K - N)$ individu untuk N individu dalam populasi tersebut sehingga masih terdapat bagian lingkungan yang ditempati yaitu sebesar

$$\frac{K - N}{K} \quad (2.2)$$

dengan persamaan (2.2) sebanding dengan pertumbuhan perkapita populasi.

Oleh karena itu persamaan logistik dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r \frac{K-N}{K} \text{ atau } \frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \text{ dengan } K, r \in \mathbb{R}^+.$$

Keterangan:

$$\frac{dN}{dt} = \text{Laju populasi prey terhadap waktu}$$

$$K = \text{Daya dukung lingkungan}$$

$$N = \text{Populasi prey}$$

$$r = \text{Laju pertumbuhan intrinsik prey}$$

Parameter r menyatakan laju pertumbuhan intrinsik populasi sehingga tingkat pertumbuhan untuk N sebanding dengan r . Tingkat kenaikan intrinsik dicapai ketika suatu spesies berada dalam kondisi lingkungan ideal dengan angka kelahiran, angka kematian dan struktur umur yang stabil (Sher & Molles Jr, 2022).

2. Model Predator Prey Lotka Volterra

Model predator prey menggambarkan interaksi antara populasi pemangsa (predator) dan mangsa (prey). Lotka (1925) dan Voltera (1926) adalah orang yang pertama kali memperkenalkan model ini sehingga model ini disebut model Lotka-Voltera.

Berturut-turut populasi prey dan predator dinotasikan dengan N dan P dengan waktu

t. Konstruksi model Lotka-Voltera dibangun dari beberapa asumsi diantaranya sebagai berikut (Boyce & DiPrima, 2001):

- a. Tanpa adanya predator pertumbuhan populasi prey meningkat cepat disebabkan pertumbuhan populasi prey sebanding dengan populasinya pada saat ini, sehingga

$$\frac{dN}{dt} = bN \quad (2.3)$$

dengan b adalah laju pertumbuhan prey ($b > 0$).

- b. Predator punah ketika populasi prey tidak ada. Sebab adanya asumsi bahwa pertumbuhan predator bergantung pada prey sebagai makanannya. Sehingga,

$$\frac{dP}{dt} = -cN \quad (2.4)$$

dengan c adalah laju kematian dari predator ($c > 0$).

- c. Adanya proses mangsa dan dimangsa antara predator dan prey mendorong pertumbuhan predator dan menghambat pertumbuhan prey. Dengan demikian laju pertumbuhan predator meningkat dituliskan dengan γNP dan laju pertumbuhan prey menurun dituliskan dengan

$-\gamma NP$ dimana γ merupakan koefisien interaksi antara prey dan predator. Sehingga dengan asumsi tersebut bentuk umum model Lotka-Volterra adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= bN - \gamma NP \\ \frac{dP}{dt} &= -cN + \gamma NP\end{aligned}\tag{2.5}$$

Keterangan:

N : jumlah populasi prey

P : jumlah populasi predator

b : laju pertumbuhan prey

c : laju kematian dari predator

γ : koefisien interaksi antara prey dan predator

C. Persamaan Diferensial

Persamaan dalam matematika yang memuat bentuk turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas disebut persamaan diferensial (Ross, 1984). Berdasarkan kebergantungan pada variabel bebas persamaan diferensial dapat diklasifikasikan menjadi dua yakni persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP).

1. Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

Persamaan yang melibatkan turunan dari satu variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas disebut Persamaan Diferensial Biasa.

Contoh 2.2:

$$\frac{dx}{dy} + 5y - 3 = 0 \quad (2.6)$$

2. Persamaan Diferensial Parsial (PDP)

Persamaan diferensial parsial melibatkan lebih dari satu variabel bebas.

Contoh 2.3:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (2.7)$$

Sekumpulan dari dua atau lebih persamaan diferensial disebut sistem persamaan diferensial (Boyce & DiPrima, 2001). Selanjutnya akan dibahas lebih lanjut mengenai sistem persamaan diferensial biasa. Persamaan umum sistem persamaan diferensial biasa dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.8)$$

dimana $x \in R^n$, dengan A adalah matriks berukuran $n \times n$ dan

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

dengan x_1, x_2, \dots, x_n merupakan variabel tak bebas dan t merupakan variabel bebas. Sistem persamaan (2.9) disebut sistem persamaan *autonomous* jika t tidak dinyatakan secara eksplisit. Secara matematis sistem persamaan autonomous dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.10)$$

dengan f fungsi yang tidak bergantung pada variabel bebas t , tetapi hanya bergantung pada variabel x .

Ditunjukkan bahwa solusi linier pada persamaan (2.6) sama dengan kondisi awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ diberikan oleh $\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0$ dimana e^{At} adalah fungsi matriks berukuran $n \times n$ yang didefinisikan menggunakan deret Taylor.

Berdasarkan linieritasnya sistem persamaan diferensial terbagi menjadi dua yakni:

a. Sistem Persamaan Diferensial Linier

Sistem persamaan diferensial dengan satu persamaan linier yang saling terkait disebut sistem

persamaan diferensial linier. Dipunyai persamaan diferensial biasa sebagai berikut:

$$F(t, y, y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.11)$$

dikatakan linier ketika F adalah fungsi linier terhadap variabel $y, y'', \dots, y^{(n)}$ dengan t menyatakan variabel bebas dan y menyatakan variabel tak bebas (Finizio & Ladas, 1982). Sehingga bentuk umum sistem persamaan diferensial linier berorde- n adalah

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t) \quad (2.12)$$

Contoh 2.4 Sistem persamaan diferensial linier:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 3x_1 - 4x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_1 - x_2 + 4 \end{aligned}$$

b. Sistem Persamaan Diferensial Non Linier

Apabila setiap fungsi f_1, f_2, \dots, f_n pada persamaan (2.9) adalah fungsi bukan linier dari variabel tak bebas x_1, x_2, \dots, x_n , maka sistem persamaan tersebut dikatakan sistem persamaan diferensial nonlinier (Boyce & DiPrima, 2001). Suatu persamaan diferensial dikatakan nonlinier jika:

- 1) Variabel bebas dan turunannya berpangkat lebih dari satu.

- 2) Terdapat perkalian antara variabel tak bebas dengan variabel tak bebas, turunan dengan turunan, atau variabel bebas dengan turunannya.
- 3) Terdapat fungsi transenden dari variabel tak bebas dan turunannya.

Sistem persamaan diferensial nonlinier orde satu dapat ditulis dalam bentuk:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\vdots \\
 \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Contoh 2.5 sistem persamaan diferensial nonlinier:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= x_1 - x_1x_2 + 3 \\
 \frac{dx_2}{dt} &= x_1^2 + x_1x_2 - 1
 \end{aligned}$$

D. Sistem Dinamik

Sistem dinamik merupakan sistem yang dapat berubah dari waktu ke waktu dan dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang apabila diketahui

kondisi saat ini atau kondisi di masa lalu (Alligood et al., 1996). Sistem dinamik dibagi menjadi sistem dinamik diskrit dan sistem dinamik kontinu (Boyce & DiPrima, 2001).

Sistem dinamik diskrit berubah secara diskrit dan dinyatakan dalam bentuk persamaan beda, yakni

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t) \text{ dengan } \mathbf{x}_t \in \mathbb{R} \quad (2.14)$$

Sistem kontinu berubah secara kontinu dan dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial, yakni

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \text{ dengan } \mathbf{x} \in \mathbb{R} \quad (2.15)$$

Penelitian ini membahas sistem dinamik kontinu. Pada sistem dinamik kontinu terdapat sistem *autonomous* dan sistem *nonautonomous*. Sistem *autonomous* merupakan sistem yang tidak bergantung pada t secara eksplisit sebaliknya sistem *nonautonomous* merupakan sistem yang bergantung pada t secara eksplisit.

E. Analisis Dinamik

Analisis dinamik diperlukan untuk mengetahui solusi dari sistem serta mengetahui perilaku dari solusinya. Pada penelitian ini perilaku solusi sistem diketahui melalui titik ekuilibriumnya.

1. Titik Ekuilibrium

Karena sulit menemukan solusi dari sistem persamaan diferensial nonlinier diperlukan solusi lain yakni dengan menemukan titik ekuilibriumnya. Titik ekuilibrium merupakan solusi khusus karena diperoleh ketika sistem tersebut sama dengan nol dengan kata lain konstan. Titik ekuilibrium tidak bergantung pada waktu sehingga titik tersebut tetap pada waktu berapapun.

Definisi 2.1 (Olsder & Woude, 2003):

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial orde satu yakni $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ yang mempunyai solusi dengan kondisi awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ yang kemudian ditunjukkan dengan $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ Suatu vektor $\hat{\mathbf{x}}$ yang memenuhi $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ disebut **titik ekuilibrium**.

Contoh 2.6 menentukan titik ekuilibrium:

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinier kemudian ditentukan titik ekuilibrium dari persamaan berikut:

$$\dot{x} = -5x + x^2 - xy$$

$$\dot{y} = -3y + xy$$

Berdasarkan definisi (2.1) maka $\dot{x} = \dot{y} = 0$ sehingga

$$\begin{aligned}
 -3\hat{y} + \hat{x}\hat{y} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \hat{y}(-3 + \hat{x}) &= 0 \\
 \hat{y} = 0 \text{ dan } \hat{x} &= 3
 \end{aligned}$$

Jika $\hat{y} = 0$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 -5\hat{x} + \hat{x}^2 - \hat{x}(0) &= 0 \\
 \Leftrightarrow -5\hat{x} + \hat{x}^2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \hat{x}(-5 + \hat{x}) &= 0 \\
 \hat{x} = 0 \text{ dan } \hat{x} &= 5
 \end{aligned}$$

Jika $\hat{x} = 3$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 -5(3) + 3^2 - 3\hat{y} &= 0 \\
 \Leftrightarrow -15 + 9 - 3\hat{y} &= 0 \\
 \Leftrightarrow -6 - 3\hat{y} &= 0 \\
 \Leftrightarrow -6 &= 3\hat{y} \\
 \Leftrightarrow \hat{y} &= -2
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium sistem persamaan tersebut adalah $(0,0)$; $(5,0)$; $(3,-2)$

2. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Kestabilan dari titik ekuilibrium perlu ditemukan sehingga kita bisa mempelajari perilaku dipersekitaran titik ekuilibrium.

Definisi 2.2 Kestabilan Titik Ekuilibrium (Olsder & Woude, 2003):

Diberikan suatu persamaan diferensial orde satu $\dot{x} = f(x)$ dengan $x \in \mathbb{R}^n$ yang memiliki solusi $x(t, x_0)$ dengan kondisi awal $x(0) = x_0$. Maka,

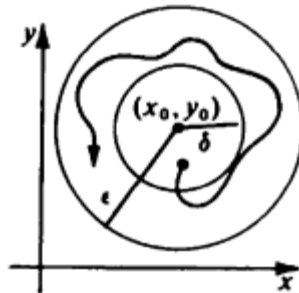
- a. Titik ekuilibrium disebut **stabil** jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \hat{x}\| < \delta$ maka $\|x(t, x_0) - \hat{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq 0$.
- b. Titik ekuilibrium disebut **stabil asimtotik** jika memenuhi syarat stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \hat{x}\| < \delta_1$, maka

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - \hat{x}\| = 0$$
- c. Titik ekuilibrium disebut **tidak stabil** ketika tidak memenuhi syarat pada poin a.

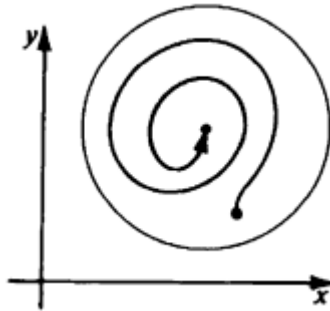
Berdasarkan **definisi (2.2)** apabila solusi dengan syarat awal berada di sekitar titik ekuilibrium dan tetap berada di sekitarnya untuk waktu yang cukup lama, maka titik ekuilibrium tersebut disebut **stabil**. Sebaliknya, jika tidak memenuhi kondisi tersebut, titik ekuilibrium dianggap **tidak stabil**. Selanjutnya, untuk titik ekuilibrium yang stabil, jika solusi dengan syarat awal dalam suatu lingkungan titik

ekuilibrium cenderung mendekati titik tersebut seiring waktu menuju tak hingga, maka titik tersebut disebut **stabil asimtotik**.

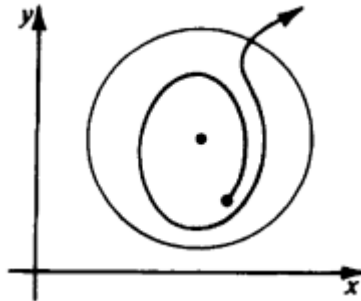
Perilaku solusi yang berada dipersekitaran titik ekuilibrium ini disebut kestabilan **lokal**. Selanjutnya apabila solusi didekati dari semua kondisi awal pada bidang fase maka disebut kestabilan titik ekuilibrium **global** (Strogatz, 1994). Kemudian visualisasi **definisi 2.2** disajikan dalam gambar berikut (Finizio & Ladas, 1982):



Gambar 2.2 Titik Ekuilibrium Stabil



Gambar 2.3 Titik Ekuilibrium Stabil Asimtotik



Gambar 2.4 Titik Ekuilibrium Tidak Stabil

3. Linierisasi

Linierisasi merupakan langkah yang dilakukan guna mengubah sistem persamaan diferensial tak linier menjadi bentuk sistem persamaan diferensial yang bersifat linier (Boyce & DiPrima, 2001). Metode linierisasi digunakan untuk

mengetahui perilaku sistem persamaan diferensial yang sulit ditentukan solusi eksaknya. Karena solusi yang diperoleh dari proses linierisasi merupakan penggambaran perilaku sistem dipersekitaran titik ekuilibriumnya maka kestabilan yang diperoleh disebut kestabilan lokal. Linearisasi dapat dilakukan pada titik ekuilibrium yang hiperbolik.

Definisi 2.3 (Perko, 2001):

Diberikan $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ merupakan titik ekuilibrium sistem persamaan diferensial nonlinier. Titik $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ disebut titik ekuilibrium **hiperbolik** jika bagian real dari semua nilai eigen $J_{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)}$ tidak nol. Titik $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ disebut titik ekuilibrium **nonhiperbolik** jika terdapat bagian real dari nilai eigen $J_{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)}$ bernilai nol. Selanjutnya $\dot{\mathbf{w}} = J_{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)} \mathbf{w}$ disebut **linearisasi** dari sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ pada $\hat{\mathbf{x}}$.

Linierisasi dari sistem persamaan diferensial nonlinier $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ dapat dilakukan dengan deret Taylor di sekitar titik ekuilibrium hiperbolik $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f_1(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1}(x_1 - \hat{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_1(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_n}(x_n - \hat{x}_n) \\
&\quad + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f_1(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1^2}(x_1 - \hat{x}_1)^2 + \dots \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f_2(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1}(x_1 - \hat{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_2(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_n}(x_n - \hat{x}_n) \\
&\quad + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f_2(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1^2}(x_1 - \hat{x}_1)^2 + \dots \\
&\quad \vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f_n(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1}(x_1 - \hat{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_n(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_n}(x_n - \hat{x}_n) \\
&\quad + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f_n(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1^2}(x_1 - \hat{x}_1)^2 + \dots
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Linierisasi sistem (2.17) dilakukan dengan mengabaikan suku-suku nonliniernya sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f_1(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1}(x_1 - \hat{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_1(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_n}(x_n - \hat{x}_n) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f_2(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1}(x_1 - \hat{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_2(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_n}(x_n - \hat{x}_n) \\
&\quad \vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f_n(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1}(x_1 - \hat{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_n(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_n}(x_n - \hat{x}_n)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Kemudian dimisalkan

$$u_1 = x_1 - \hat{x}_1 \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
 u_2 &= x_2 - \hat{x}_2 \\
 &\vdots \\
 u_n &= x_n - \hat{x}_n
 \end{aligned}$$

Sehingga derivatifnya diperoleh,

$$\begin{aligned}
 \frac{du_1}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} \\
 \frac{du_2}{dt} &= \frac{dx_2}{dt} \\
 &\vdots \\
 \frac{du_n}{dt} &= \frac{dx_n}{dt}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Dengan mensubstitusikan (2.19) dan (2.20) maka sistem (2.18) menjadi

$$\begin{aligned}
 \frac{du_1}{dt} &= f_1(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f_1(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial f_1(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_n} u_n \\
 \frac{du_2}{dt} &= f_2(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f_2(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial f_2(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_n} u_n \\
 &\vdots \\
 \frac{du_n}{dt} &= f_n(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f_n(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial f_n(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_n} u_n
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Sistem (2.21) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\hat{\mathbf{x}}) \\ \vdots \\ f_n(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Berdasarkan definisi (2.1) $f(\hat{x}) = 0$. Sehingga persamaan (2.22) menjadi

$$\begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\hat{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\hat{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\hat{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\hat{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

atau bisa dituliskan dengan

$$\dot{\mathbf{u}} = J_{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)} \mathbf{u} \quad (2.24)$$

$J_{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)}$ adalah matriks Jacobian disekitar titik ekuilibrium hiperbolik $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$. Berdasarkan **definisi (2.3)** persamaan (2.24) adalah linierisasi dari sistem persamaan diferensial nonlinier di sekitar titik ekuilibrium hiperbolik \hat{x} . Solusi yang diperoleh dari proses linierisasi adalah representasi dari perilaku sistem di persekitaran titik ekuilibriumnya. Selanjutnya dijelaskan penentuan kestabilan titik ekuilibrium berdasarkan nilai eigen.

Teorema 2.1(Olsder & Woude, 2003) :

Diberikan sebuah matriks Jacobian dengan λ_i adalah nilai eigen dari matriks Jacobian tersebut dan $\text{Re}(\lambda_i)$ adalah bagian real dari λ_i , sehingga:

1. Jika untuk setiap $\text{Re}(\lambda_i)$ matriks Jacobian adalah negatif, maka titik ekuilibrium (\hat{x}) stabil asimtotik.
2. Jika terdapat salah satu $\text{Re}(\lambda_i)$ matriks Jacobian adalah positif, maka titik ekuilibrium (\hat{x}) tidak stabil.

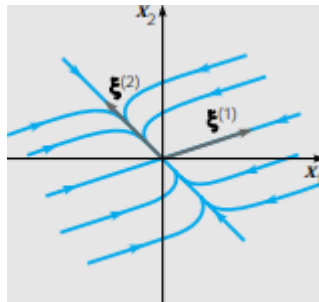
Berdasarkan nilai persamaan akar-akar karakteristik terdapat beberapa kemungkinan jenis kestabilan titik ekuilibrium. Jenis kestabilan lokal dari titik ekuilibrium berdasarkan nilai eigen dan bidang fasenya dapat digolongkan pada **tabel 2.1** (Boyce & DiPrima, 2001):

Tabel 2.1 Jenis Kestabilan Titik Ekuilibrium (Boyce & DiPrima, 2001)

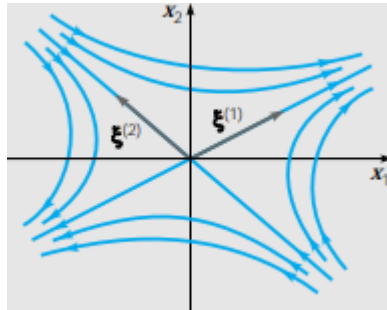
No.	Nilai Akar Persamaan Karakteristik	Kestabilan	Bentuk Kestabilan Berdasarkan Bidang Fase
	$\lambda_i \lambda_j \in R$		
1.	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tidak stabil	<i>Node/simpul</i>
2.	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil asimtotik	<i>Node/simpul</i>

3.	$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Tidak stabil	<i>Saddle</i> /pelana
4.	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak stabil	<i>Node</i> /simpul
5.	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil asimtotik	<i>Node</i> /simpul
	$\lambda_{1,2} = a + bi \in \mathbb{C}$		
6.	$a > 0$	Tidak stabil	Spiral
7.	$a < 0$	Stabil asimtotik	Spiral
8.	$a = 0$	Stabil	Terpusat

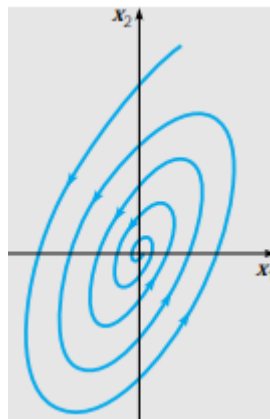
Bentuk kestabilan menggunakan nilai-nilai eigen divisualisasikan pada gambar bidang fase berikut (Boyce & DiPrima, 2001) :



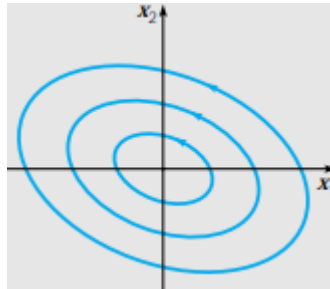
Gambar 2.5 Bentuk kestabilan *node* atau simpul



Gambar 2.6 Bentuk kestabilan *saddle* atau pelana



Gambar 2.7 Bentuk kestabilan spiral



Gambar 2.8 Bentuk kestabilan *center* atau terpusat

Selanjutnya diberikan contoh linearisasi dan menentukan kestabilan.

Contoh 2.7 Linierisasi dan menentukan kestabilan:

Diberikan sistem (2.16) pada **contoh (2.6)**, berdasarkan **definisi (2.1)** sistem (2.16) memperoleh titik ekuilibrium $(0,0)$; $(5,0)$; $(3,-2)$. Berikutnya dilakukan linierisasi untuk mengetahui kelinieran sistem (2.16) sebagai berikut,

Matriks Jacobian dari sistem (2.16) adalah

$$J_{(x^*,y^*)} = \begin{pmatrix} \frac{d\dot{x}}{dx} & \frac{d\dot{x}}{dy} \\ \frac{d\dot{y}}{dx} & \frac{d\dot{y}}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 2x - y & -x \\ y & -3 + x \end{pmatrix}$$

Linierisasi untuk titik ekuilibrium $(\hat{x}, \hat{y}) = (0,0)$

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = J_{(0,0)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dengan $J_{(0,0)}$ matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium $(\hat{x}, \hat{y}) = (0,0)$ yaitu

$$\begin{pmatrix} -5 + 2(0) - (0) & -(0) \\ (0) & -3 + (0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik $J_{(0,0)}$

$$\begin{aligned} |\lambda I - J_{(0,0)}| &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda + 5 & 0 \\ 0 & \lambda + 3 \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda + 5)(\lambda + 3) &= 0 \end{aligned}$$

Diperoleh nilai $\lambda_1 = -5$ dan $\lambda_2 = -3$. Berdasarkan **teorema (2.1)** karena nilai $\lambda_{1,2} < 0$ maka titik ekuilibrium $(0,0)$ stabil asimtotik lokal.

Linierisasi untuk titik ekuilibrium $(\hat{x}, \hat{y}) = (5,0)$

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = J_{(5,0)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dengan $J_{(5,0)}$ matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium $(\hat{x}, \hat{y}) = (5,0)$ yaitu

$$\begin{pmatrix} -5 + 2(5) - (0) & -(5) \\ (0) & -3 + (5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik $J_{(5,0)}$

$$\begin{aligned} |\lambda I - J_{(5,0)}| &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -5 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda - 5)(\lambda - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Diperoleh nilai $\lambda_1 = 5$ dan $\lambda_2 = 2$. Berdasarkan **teorema (2.1)** karena nilai $\lambda_{1,2} > 0$ maka titik ekuilibrium $(5,0)$ tidak stabil.

Linierisasi untuk titik ekuilibrium $(\hat{x}, \hat{y}) = (3, -2)$

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = J_{(3,-2)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dengan $J_{(3,-2)}$ matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium $(\hat{x}, \hat{y}) = (3, -2)$ yaitu

$$\begin{pmatrix} -5 + 2(3) - (-2) & -(3) \\ (2) & -3 + (3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik $J_{(3,-2)}$

$$\begin{aligned} |\lambda I - J_{(3,-2)}| &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -3 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda) - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

Diperoleh nilai $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{33}}{2} = 5,872$ dan $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{33}}{2} = 0,127$. Berdasarkan **teorema (2.1)** karena nilai $\lambda_{1,2} > 0$ maka titik ekuilibrium $(3, -2)$ tidak stabil.

4. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen dapat digunakan untuk mengetahui kestabilan dari suatu sistem persamaan diferensial. Secara umum nilai eigen dan vektor eigen didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen (Howard Anton, 2004):

Jika A adalah sebuah matriks berukuran $n \times n$ maka sebuah vektor tak nol \mathbf{x} pada R^n disebut **vektor eigen** dari A jika $A\mathbf{x}$ adalah sebuah kelipatan skalar dari \mathbf{x} . Lebih jelasnya,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (2.25)$$

untuk skalar sembarang λ . Skalar λ disebut **nilai eigen** dari A dan \mathbf{x} disebut sebagai **vektor eigen** dari A yang terkait dengan λ .

Kemudian langkah menemukan nilai eigen dari sebuah matriks A berukuran $n \times n$, dengan menuliskan kembali $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ sebagai $A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$ atau secara ekuivalen menjadi

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0 \quad (2.26)$$

dimana I merupakan matriks identitas. Supaya λ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat satu solusi tak nol dari persamaan (2.12) yang bisa diperoleh jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (2.27)$$

Persamaan yang terbentuk dari (2.27) disebut persamaan karakteristik matriks A , skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen A atau disimbolkan dengan λ .

Contoh 2.8 Ditunjukkan nilai eigen dari matriks berikut:

$$\begin{aligned} \text{Dipunyai matriks } A &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \det(\lambda I - A) &= 0 \\ \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Maka diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 3$. Oleh karena itu dapat diketahui bahwa nilai eigennya adalah 2 dan 3.

F. Kriteria Routh-Hurwitz

Perhitungan nilai eigen suatu polinomial terkadang sulit dilakukan. Alternatif yang dapat dilakukan adalah menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz memungkinkan pengecekan terhadap kestabilan berdasarkan koefisien polinomial tanpa memerlukan perhitungan akar-akar dari polinomial yang ada (Olsder & Woude, 2003). Selanjutnya diberikan definisi kriteria Routh-Hurwitz.

Definisi 2.5 (Gantmacher, 1959):

Diberikan polinomial

$$F(s) = a_0s^n + a_1s^{(n-1)} + \dots + a_{(n-1)}s + a_n \quad (2.28)$$

dengan $a_0 > 0$ dan a_k bilangan real, dengan $k = 1, 2, \dots, n$. Matriks Routh-Hurwitz untuk polinomial (2.28) didefinisikan dengan matriks berukuran $n \times n$, yaitu

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a(n-1) & a(n-2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Determinan matriks ke- k dinotasikan sebagai Δ_k untuk $k = 1, 2, \dots, n$ yang dibentuk dari matriks Routh-Hurwitz. Jika semua Δ_k bernilai positif, maka semua akar-akar karakteristik dari polinomial (2.28) mempunyai bagian real negatif.

Determinan matriks (2.29) didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= |a_1| \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} \\ &\vdots \\ \Delta_n &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Selanjutnya diberikan tabel Routh sebagai berikut:

Tabel 2.2 Tabel Routh (Olsder & Woude, 2003)

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\cdots	0
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\cdots	0
b_1	b_2	b_3	\cdots	0
c_1	c_2	c_3	\cdots	0
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	0
0	0	0	0	0

dimana koefisien b_i dan c_i dengan $i = 1, 2, \dots$ didefinisikan sebagai

$$b_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad c_1 = \frac{b_1 \cdot a_{n-3} - a_{n-1} \cdot b_2}{b_1}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}} \quad c_2 = \frac{b_1 \cdot a_{n-5} - a_{n-1} \cdot b_3}{b_1}$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

Skema tersebut terus berlanjut hingga ditemukan nilai nol baik ke arah kanan atau ke arah bawah.

Teorema 2.2 (Wiggins, 2003):

Semua akar polinomial memiliki bagian *real* yang benar-benar kurang dari nol jika dan hanya jika semua elemen $n + 1$ pada kolom pertama tabel routh bukan nol dan memiliki tanda sama.

Maka dari itu untuk mengecualikan kasus-kasus tunggal, diasumsikan bahwa $n+1$ elemen pertama dari kolom pertama dari tabel Routh adalah terdefinisi dengan baik dan bukan nol. Dengan asumsi ini, kriteria Routh menyatakan bahwa matriks H memiliki nilai eigen dengan bagian real negatif jika dan hanya jika elemen-elemen pada kolom pertama memiliki tanda yang sama (Olsder & Woude, 2003).

Contoh 2.9 Kriteria Routh-Hurwitz:

Diberikan polinomial pangkat dua:

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Persamaan $F(\lambda)$ pada **contoh 2.9** memiliki dua nilai eigen yakni $\lambda_1 = -2$ dan $\lambda_2 = -1$. Berikutnya akan dilakukan perhitungan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk mengetahui tanda bilangan real dari kedua nilai eigen tersebut yang berdasarkan perhitungan seharusnya bertanda negatif semua. Langkah pemeriksaan dengan kriteria routh-hurwitz disajikan sebagai berikut:

Berdasarkan persamaan $F(\lambda)$ pada **contoh 2.9** dapat dituliskan bahwa $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$.

Matriks Hurwitz dari persamaan $F(\lambda)$ pada **contoh 2.9** adalah

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinan matriks tingkat 1 dari matriks H adalah

$$\Delta_1 = |a_1| = |3| = 3 > 0$$

Determinan matriks tingkat 2 dari matriks H adalah

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6 > 0$$

Berdasarkan uraian tersebut karena diperoleh $\Delta_1 = 3 > 0$ dan $\Delta_2 = 6 > 0$ maka bagian real nilai eigen dari **contoh 2.9** bernilai negati. Berikutnya, Tabel Routh yang terbentuk dari persamaan $F(\lambda)$ pada **contoh 2.9** adalah:

λ^2	1	2
λ^1	3	0
λ^0	2	

Berdasarkan tabel routh tersebut dapat diketahui bahwa pada kolom pertama bilangan tidak nol dan bertanda sama maka persamaan polinomial pada **contoh 2.9** memiliki bagian real dan tidak nol.

G. Fungsi Respon

Fungsi respon holling menganalisis laju konsumsi predator terhadap kepadatan prey. Fungsi respon holling dibagi menjadi tiga tipe diantaranya adalah sebagai berikut (Holling, 1959):

1. Fungsi Respon Holling Tipe I

Pada tipe I laju konsumsi predator meningkat secara linier. Hal ini menunjukkan ketika populasi prey meningkat maka laju konsumsi predator terhadap prey meningkat. Namun, fungsi respon tipe I konstan ketika predator berhenti

memangsa. Adapun fungsi respon tipe I dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(N) = aN \quad (2.30)$$

Keterangan:

$f(N)$: Laju konsumsi predator

a : Koefisien interaksi antara prey dan predator

N : Jumlah kepadatan populasi prey

2. Fungsi Respon Holling Tipe II

Pada tipe II laju konsumsi meningkat tetapi terjadi penurunan terus menerus. Hal ini menunjukkan laju konsumsi predator meningkat seiring meningkatnya populasi prey tetapi menurun ketika predator mendekati kenyang. Sehingga tipe ini disebut juga Fungsi Respon Hiperbolik. Adapun fungsi respon tipe II dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(N) = \frac{aN}{d + N} \quad (2.31)$$

Keterangan:

$f(N)$: Laju konsumsi predator

a : Koefisien interaksi antara prey dan predator

N : Jumlah kepadatan populasi prey

d :Konstanta *half saturation*, yaitu jumlah populasi prey ketika laju konsumsi per-unit prey mencapai setengah dari nilai maksimum

3. Fungsi Respon Holling Tipe III

Fungsi respon tipe ini bersifat *sigmoid* yang apabila digambarkan kurvanya menyerupai huruf *S*. Laju konsumsi pada mulanya meningkat dengan meningkatnya kepadatan predator tetapi kemudian menurun. Laju konsumsi cenderung memuncak pada jenis kepadatan yang berbeda-beda sebab ketika kepadatan prey yang berbeda muncul dalam jumlah yang lebih besar dibanding kepadatan prey sebelumnya, kurva menurun dan pemangsaan predator berpindah pada kepadatan prey yang lebih besar. Adapun fungsi respon tipe III dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(N) = \frac{aN^2}{d^2 + N^2} \quad (2.32)$$

Keterangan:

$f(N)$: Laju konsumsi predator

a : Koefisien interaksi antara prey dan predator

N : Jumlah kepadatan populasi prey

d : Konstanta *half saturation*, yaitu jumlah populasi prey ketika laju konsumsi per-unit prey mencapai setengah dari nilai maksimum

Adapun pada penelitian ini populasi predator mengikuti kerja sama berburu dan dalam pemangsaan terhadap prey sesuai dengan fungsi respon holling tipe II sebab seiring berjalannya waktu, predator akan mencapai titik kenyang sehingga daya predator dalam memangsa prey menurun.

H. Aturan Tanda Descartes

Aturan tanda Descartes digunakan untuk menemukan akar real positif atau negatif dari suatu persamaan diferensial.

Teorema 2.3 (Wang, 2004):

Misalkan $p(x) = a_0x^{b_0} + a_1x^{b_1} + \dots + a_nx^{b_n}$ merupakan polinomial dengan koefisien real bukan nol a_i , dimana b_i adalah bilangan bulat yang memenuhi $0 \leq b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Maka jumlah akar real positif dari $p(x)$ sama dengan atau kurang dari jumlah variasi tanda dalam barisan a_0, \dots, a_n . Kemudian jumlah akar real negative dari $p(x)$ sama dengan atau kurang dari jumlah variasi tanda dalam koefisien $p(-x)$.

Dengan kata lain untuk mempermudah perhitungan dapat disimbolkan sebagai berikut:

- u : perubahan tanda (ketika $p(x)$)
- np : jumlah akar positif
- v : perubahan tanda (ketika $p(-x)$)
- nq : jumlah akar negatif

Teorema 2.4 (Wiggins, 2003):

Dipunyai polinomial dengan koefisien real yang dituliskan sebagai berikut:

$$p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$


$$a_i \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0$$

Dipunyai k menjadi jumlah total perubahan tanda dari satu koefisien ke koefisien berikutnya dalam urutan. Maka jumlah akar-akar real positif dari polinomial tersebut sama dengan k , atau k dikurangi sebuah bilangan bulat positif. (Catatan: jika $k = 1$, maka ada tepat satu akar real positif).


Berikut contoh penerapan aturan tanda Descartes.

Contoh 2.10:

Dipunyai polinomial $p(\lambda) = 2\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda + 1$, maka dapat diketahui bahwa

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda + 1$$


terjadi dua perubahan tanda dari $+5\lambda^2$ ke -2λ dan dari -2λ ke $+1$.

$$p(-\lambda) = -2\lambda^3 + 5\lambda^2 + 2\lambda + 1$$


terjadi satu perubahan tanda dari $-2\lambda^3$ ke $+5\lambda^2$.

Kemudian dapat dituliskan pada tabel berikut:

Kemungkinan	a_0	a_1	a_2	a_3	$\sum u$	np	nq
$p(\lambda)$	+	-	+	+	2	0,2	1
$p(-\lambda)$	+	+	+	-	1	1	1

dengan

Real		Imajiner	Total
+	-		
2	1	0	3
0	1	2	3

Sehingga pada polinomial tersebut dapat diketahui kemungkinan:

1. Terdapat dua akar real positif, satu akar real negatif dan tidak ada sama sekali akar imajiner.
2. Tidak terdapat akar real positif, terdapat satu akar real negatif dan dua akar imajiner.

I. Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta merupakan metode yang mencapai akurasi pendekatan Deret Taylor tanpa adanya

perhitungan turunan fungsi (Chapra & Chanale, 2010). Berikut bentuk umum metode Runge-Kutta dengan fungsi kenaikannya dapat dinyatakan dalam persamaan:

$$x_{i+1} = x_i + q_1 z_1 + q_2 z_2 + \dots + q_n z_n$$

dimana q adalah konstanta dan z,

$$z_1 = hf(t_i, x_i)$$

$$z_2 = hf(t_i + r_1 h, x_i + s_{11} m_1)$$

$$z_3 = hf(t_i + r_2 h, x_i + s_{21} m_1 + s_{22} m_2)$$

⋮

$$z_n = hf(t_i + r_{n-1} h, x_i + s_{n-1,1} m_1 + s_{n-1,2} m_2 + \dots + s_{n-1,n-1} m_{n-1})$$

dengan

h = panjang langkah

$f(t_i, x_i)$ = persamaan differensial orde pertama x terhadap t

r dan s = konstanta

Metode Runge-Kutta menjadi lebih efisien digunakan dalam perhitungan komputer karena adanya hubungan perulangan dari nilai m yang juga bersesuaian

dengan nilai konstanta yang digunakan untuk menghitung fungsi.

Metode Runge-Kutta orde empat merupakan salah satu metode Runge-Kutta yang paling sering digunakan dalam penelitian karena memiliki tingkat ketelitian yang lebih tinggi dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde sebelumnya. Metode Runge-Kutta orde empat memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(z_1 + 2z_2 + 2z_3 + z_4)h$$

dengan

$$z_1 = f(t_i, x_i)$$

$$z_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}z_1h\right)$$

$$z_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}z_2h\right)$$

$$z_4 = f(t_i + h, x_i + z_3h)$$

J. Kajian Penelitian Terdahulu

Pada penelitian ini, penulis terlebih dahulu meninjau karya ilmiah sebelumnya terkait dengan pembahasan yang diteliti. Adapun penelitian yang relevan mengenai pemodelan matematika pada kasus

predator-prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator dan pemanenan pada predator dan prey adalah sebagai berikut:

1. Penelitian mengenai kerjasama berburu disertai efek allee dilakukan oleh Alves dan Hilker pada 2017. Penelitian tersebut memaparkan bahwa kerjasama berburu dapat mengacaukan sistem dan mendorong penurunan populasi predator ketika kepadatan prey menurun drastis karena tekanan predator meningkat yang mana dapat menurunkan asupan predator.

Model penelitian Alves dan Hilker (Teixeira Alves & Hilker, 2017):

$$\frac{dn}{d\tau} = n \left[\sigma \left(1 - \frac{1}{K} n \right) - (1 + \alpha p) p \right]$$

$$\frac{dp}{d\tau} = p [(1 + \alpha p)n - 1]$$

Persamaan dalam penelitian ini adalah pembentukan persamaan dari populasi predator dan populasi prey dengan berlakunya kerja sama berburu pada populasi predator. Perbedaan dengan penelitian ini adalah tidak dikajinya efek allee yang ditimbulkan serta adanya efek ketakutan pada prey dan pemanenan.

2. Penelitian mengenai pengaruh kerja sama berburu pada waktu diskrit dalam sistem predator prey oleh Pal pada 2018. Penelitian ini menunjukkan bahwa tanpa adanya kerja sama berburu peningkatan laju pertumbuhan populasi prey akan menghasilkan dinamika yang kacau.

Model penelitian Pal (Pal et al., 2018):

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - (\mu + \alpha y)xy$$

$$\frac{dy}{dt} = e(\mu + \alpha y)xy - my$$

Persamaan dalam penelitian ini adalah mengkaji efek kerja sama berburu pada predator. Sedangkan perbedaan dengan penelitian ini adalah kajian efek ketakutan pada prey dan pemanenan guna menyeimbangkan sistem.

3. Penelitian mengenai pemodelan matematika pada predator prey dengan efek ketakutan dan kerjasama berburu dilakukan oleh Pal pada tahun 2019 yang menunjukkan bahwa peningkatan kerjasama berburu dapat meningkatkan rasa takut prey dan dapat mengacaukan sistem serta menghasilkan solusi periodik melalui Bifurkasi Hopf.

Model penelitian Pal (Pal et al., 2019a):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{r_0 x}{1 + e\alpha y} - dx - ax^2 - (p + \alpha y)xy$$

$$\frac{dy}{dt} = c(p + \alpha y)xy - my$$

Persamaan pada penelitian ini adalah mengkaji efek ketakutan dan kerjasama berburu antar populasi predator. Perbedaan pada penelitian ini adalah adanya penelitian efek pemanenan untuk menyeimbangkan sistem.

4. Penelitian efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator pada model Leslie Gower dilakukan oleh Pal pada tahun 2019 yang menunjukkan bahwa efek ketakutan memiliki efek yang lebih menstabilkan dibanding dengan kerjasama berburu dan membuat sistem lebih kuat.

Model penelitian Pal (Pal et al., 2019b):

$$\frac{dx}{dt} = x \left[\frac{b}{1 + \beta y} - d - x - \frac{(1 + \alpha y)y}{p + (1 + \alpha y)x} \right]$$

$$\frac{dy}{dt} = y \left[1 - \frac{qy}{r + (1 + \alpha y)x} \right]$$

Persamaan dalam penelitian ini adalah mengkaji efek ketakutan pada prey dan kerja sama berburu antar predator. Sedangkan perbedaan dalam penelitian ini adalah model yang digunakan adalah

model Lotka-Volterra serta adanya pemanenan dalam sistem.

5. Penelitian mengenai pemodelan dan analisis model predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator serta pemanenan oleh Belew dan Melese pada tahun 2022. Model matematika pada penelitian Belew (Belew & Melese, 2022):

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n(1-n)}{1+\beta p} - \frac{(1+\alpha p)np}{1+Hn(1+\alpha p)} - c_1 n$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\delta(1+\alpha p)np}{1+Hn(1+\alpha p)} - mp - c_2 p$$

Penulis tertarik untuk mengkaji penelitian ini lebih lanjut karena mempertimbangkan efek ketakutan pada prey, kerja sama berburu antar predator dan pemanenan predator prey dari sistem predator prey dengan laju nonlinier dengan fungsi respon Holling tipe II.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

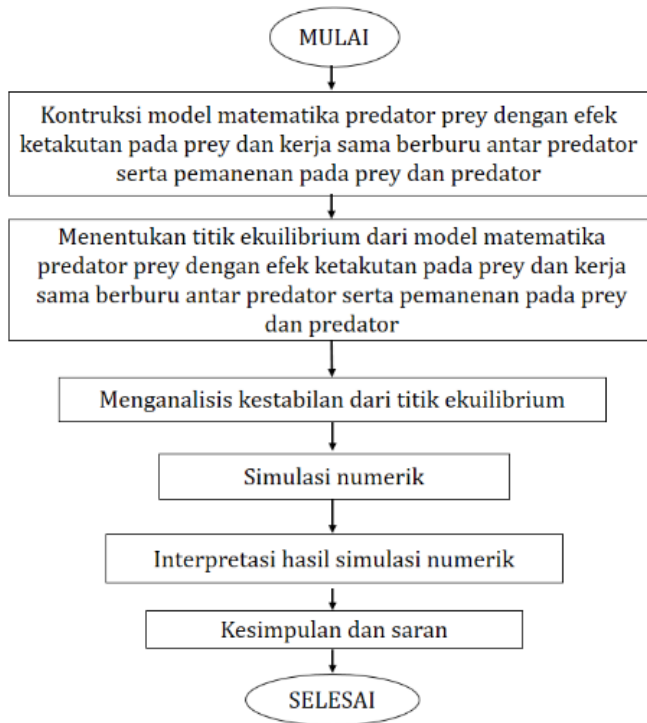
Metode penelitian dalam skripsi ini berupa studi pustaka dengan mengumpulkan informasi dari buku, jurnal ilmiah serta literatur lain yang relevan guna memperoleh suatu landasan teori. Penyelesaian analisis dinamik model predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator serta adanya pemanenan pada prey dan predator dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengkonstruksikan model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator serta adanya pemanenan pada prey dan predator.
2. Menentukan titik ekuilibrium dari model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator serta adanya pemanenan pada prey dan predator.
3. Menganalisis kestabilan titik ekuilibrium dari model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator serta adanya pemanenan pada prey dan predator.
4. Melakukan simulasi numerik pada titik ekuilibrium model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator serta adanya

pemanenan pada prey dan predator dengan software Matlab R2013a.

5. Menginterpretasikan hasil dari simulasi numerik.

Adapun prosedur penelitian yang dilakukan dalam penelitian ini disajikan dalam **gambar 3.1** berikut:



Gambar 3.1 Diagram Alur Penelitian

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Asumsi Model

Asumsi yang digunakan untuk mengkonstruksikan model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerja sama berburu antar predator serta pemanenan adalah dengan mengasumsikan populasi prey dengan $N(T)$ dan populasi predator dengan $P(T)$ sebagai berikut:

1. Jenis predator prey tertutup yakni terbentuk dari satu populasi predator dan satu populasi prey.
2. Populasi prey tumbuh dengan pertumbuhan logistik tanpa adanya predator dengan daya dukung (*carrying capacity*) K dan laju pertumbuhan intrinsik r .
3. Spesies predator memangsa prey sesuai dengan fungsi respon Holling tipe II.
4. Laju kelahiran populasi prey berkurang disebabkan oleh faktor ketakutan pada predator.
5. Populasi predator bekerja sama untuk berburu prey.
6. Kematian alami predator diasumsikan konstan sebesar m_1 .

7. Prey $N(T)$ dan predator $P(T)$ diasumsikan mengalami pemanenan sesuai dengan tipe yang linier dari pemanenan proporsional.
8. Sumber data yang digunakan dalam simulasi numerik adalah data dari penelitian (Belew & Melese, 2022).

B. Variabel dan Parameter

Variabel dan parameter untuk model asumsi yang digunakan untuk membentuk model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerja sama berburu antar predator serta pemanenan disajikan dalam **tabel 4.1** dan **tabel 4.2** berikut:

Tabel 4.1 Daftar variabel model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerja sama berburu antar predator serta pemanenan

No.	Variabel	Definisi	Syarat	Satuan
1.	$N(t)$	Jumlah populasi prey pada waktu ke- t	$N(t) \geq 0$	Ekor
2.	$P(t)$	Jumlah populasi predator pada waktu ke- t	$P(t) \geq 0$	Ekor

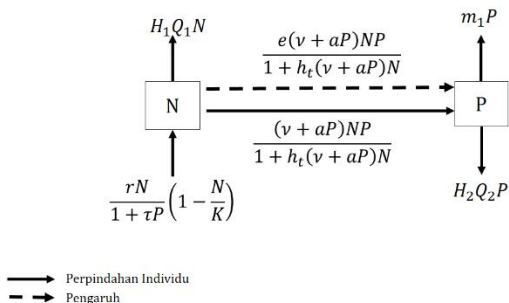
Tabel 4.2 Daftar parameter model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerja sama berburu antar predator serta pemanenan

No.	Parameter	Definisi	Syarat	Satuan
1.	r	Laju pertumbuhan intrinsik prey	$r > 0$	$\frac{1}{hari}$
2.	K	Daya dukung lingkungan	$K > 0$	<i>ekor</i>
3.	m_1	Laju kematian alami predator	$m_1 \geq 0$	$\frac{1}{hari}$
4.	e	Faktor konversi	$e \geq 0$	–
5.	τ	Parameter ketakutan	$\tau \geq 0$	$\frac{1}{ekor}$
6.	a	Kerja sama berburu antar predator	$a \geq 0$	$\frac{1}{ekor \cdot hari}$
7.	v	Laju serangan per predator dan prey	$v \geq 0$	$\frac{1}{hari}$
8.	h_t	Waktu penanganan	$h_t \geq 0$	–
9.	Q_1	Upaya eksternal gabungan yang dikhususkan untuk pemanenan nonselektif prey oleh pemanen eksternal (bukan oleh predator)	$Q_1 \geq 0$	$\frac{ekor}{hari}$
10.	Q_2	Upaya eksternal gabungan yang dikhususkan untuk	$Q_2 \geq 0$	$\frac{ekor}{hari}$

		pemanenan nonselektif predator oleh pemanen eksternal		
11.	H_1	Koefisien daya tangkap prey	$H_1 \geq 0$	$\frac{1}{ekor}$
12.	H_2	Koefisien daya tangkap predator	$H_2 \geq 0$	$\frac{1}{ekor}$

C. Konstruksi Model

Berdasarkan asumsi dapat dibentuk diagram transfer model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerja sama berburu antar predator serta pemanenan sebagai berikut:



Gambar 4.1 Diagram transfer model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerja sama berburu antar predator serta pemanenan

Berdasarkan **gambar 4.1** terdapat dua kompartemen berbeda yakni populasi predator (P) dan prey (N). Apabila tidak ada interaksi antara predator dan prey, maka pertumbuhan prey mengikuti laju pertumbuhan logistik. Adanya keterbatasan daya dukung lingkungan sebesar K dan tingkat pertumbuhan tanpa dipengaruhi lingkungan sebesar r , menyebabkan populasi prey bertambah sebesar $rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$.

Pada saat terjadi pemangsaan oleh predator pada prey akan timbul rasa takut pada prey yang mengurangi produktivitas prey sebesar $\frac{1}{1+\tau P}$ sehingga laju pertumbuhan prey sebesar $\frac{rN}{1+\tau P} \left(1 - \frac{N}{K}\right)$. Selanjutnya, diantara predator pada populasi yang sama ada kerja sama dalam perburuan prey sehingga jumlah populasi prey berkurang terhadap waktu sebesar $f_1(N)P$, dimana $f_1(N)$ bersesuaian dengan fungsi respon holling tipe II yakni $\frac{(v+aP)NP}{1+h_t(v+aP)N}$.

Pada populasi prey terdapat pemanenan dari faktor eksternal sehingga mengurangi jumlah populasi prey sebesar $H_1 Q_1 N$. Dengan demikian diperoleh laju perubahan jumlah populasi prey terhadap waktu adalah

$$\frac{dN}{dT} = \frac{rN}{1 + \tau P} \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{(v + aP)NP}{1 + h_t(v + aP)N} - H_1 Q_1 N \quad (4.1)$$

Jumlah populasi predator akan bertambah seiring dengan adanya pemangsaan prey oleh predator sebesar $ef(N)P$ dengan $f(N) = \frac{(v+aP)NP}{1+h_t(v+aP)N}$. e merupakan faktor konversi atau perubahan konsumsi prey ke kelahiran predator. Namun populasi predator dapat berkurang sebab kematian alami predator sebesar m_1P , dengan m_1 menunjukkan laju kematian alami predator. Selain itu, terjadi pemanenan pada populasi predator oleh faktor eksternal sebesar H_2Q_2P . Oleh karena itu, diperoleh laju perubahan jumlah sebesar

$$\frac{dP}{dT} = \frac{e(v+aP)NP}{1+h_t(v+aP)N} - m_1P - H_2Q_2P \quad (4.2)$$

Berdasarkan persamaan (4.1) dan (4.2) model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerja sama berburu antar predator serta pemanenan berupa sistem persamaan diferensial nonlinier adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dT} &= \frac{rN}{1 + \tau P} \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{(v + aP)NP}{1 + h_t(v + aP)N} - H_1 Q_1 N \\ \frac{dP}{dT} &= \frac{e(v + aP)NP}{1 + h_t(v + aP)N} - m_1 P - H_2 Q_2 P \end{aligned} \quad (4.3)$$

Parameter-parameter dalam persamaan (4.3) diasumsikan positif. Selanjutnya, akan dilakukan

penondimensionalan atau pembentukan sistem model tak berdimensi pada sistem persamaan (4.3) untuk menyederhanakan parameter pada sistem tersebut (Strogatz, 1994). Bentuk tak berdimensi dari sistem persamaan diferensial nonlinier (4.3) merujuk pada penelitian (Belew & Melese, 2022) dengan $n = \frac{N}{K}$, $p = \frac{vP}{r}$ dan $t = Tr$ sehingga sistem (4.3) menjadi

$$\begin{aligned}
 \text{i. } \quad & \frac{dN}{dT} = \frac{rN}{1 + \tau P} \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{(v + aP)NP}{1 + h_t(v + aP)N} - H_1 Q_1 N \\
 \Leftrightarrow & \frac{d(nK)}{d\left(\frac{t}{r}\right)} = \frac{rnK}{1 + \tau \frac{pr}{v}} \left(1 - \frac{nK}{K}\right) - \frac{(v + a\frac{pr}{v})nK\frac{pr}{v}}{1 + h_t(v + a\frac{pr}{v})nK} - H_1 Q_1 nK \\
 \Leftrightarrow & \frac{d(nKr)}{dt} = \frac{rKn(1 - n)}{1 + \tau \frac{pr}{v}} - \frac{\frac{Kr}{v}(v + a\frac{pr}{v})np}{1 + h_t nK(v + a\frac{pr}{v})} - H_1 Q_1 nK \\
 \Leftrightarrow & \frac{dn}{dt} = \frac{rKn(1 - n)}{Kr\left(1 + \tau \frac{pr}{v}\right)} - \frac{\frac{Kr}{v}(v + a\frac{pr}{v})np}{Kr\left(1 + h_t nK(v + a\frac{pr}{v})\right)} - \frac{H_1 Q_1 nK}{Kr} \\
 \Leftrightarrow & \frac{dn}{dt} = \frac{n(1 - n)}{\left(1 + \tau \frac{pr}{v}\right)} - \frac{\left(1 + a\frac{pr}{v^2}\right)np}{\left(1 + h_t nK(v + a\frac{pr}{v})\right)} - \frac{H_1 Q_1 n}{r} \\
 \Leftrightarrow & \frac{dn}{dt} = \frac{n(1 - n)}{\left(1 + \frac{\tau pr}{v}\right)} - \frac{\left(1 + \frac{apr}{v^2}\right)np}{\left(1 + h_t nK\lambda\left(1 + \frac{apr}{v^2}\right)\right)} - \frac{H_1 Q_1 n}{r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii. } \frac{dP}{dT} &= \frac{e(v + aP)NP}{1 + h_t(v + aP)N} - m_1P - H_2Q_2P \\
\Leftrightarrow \frac{d\left(\frac{pr}{v}\right)}{d\left(\frac{t}{r}\right)} &= \frac{e\left(v + \frac{apr}{v}\right)nK\frac{pr}{v}}{1 + h_t\left(v + \frac{apr}{v}\right)nK} - \frac{m_1pr}{v} - \frac{H_2Q_2pr}{v} \\
\Leftrightarrow \frac{d(pr^2)}{d(tv)} &= \frac{\frac{eKr}{v}\left(v + \frac{apr}{v}\right)np}{1 + h_t nK\left(v + \frac{apr}{v}\right)} - \frac{m_1pr}{v} - \frac{H_2Q_2pr}{v} \\
\Leftrightarrow \frac{dp}{dt} &= \frac{v\left[\frac{eKr}{v}\left(v + \frac{apr}{v}\right)np\right]}{r^2\left[1 + h_t nK\left(v + \frac{apr}{v}\right)\right]} - \frac{m_1pr}{v} - \frac{H_2Q_2pr}{v} \\
\Leftrightarrow \frac{dp}{dt} &= \frac{\frac{eKrv}{vr^2}\left(v + \frac{apr}{v}\right)np}{1 + h_t nK\left(v + \frac{apr}{v}\right)} - \frac{m_1p}{v} - \frac{H_2Q_2p}{v} \\
\Leftrightarrow \frac{dp}{dt} &= \frac{\frac{eK}{r}\left(v + \frac{apr}{v}\right)np}{1 + h_t nK\left(v + \frac{apr}{v}\right)} - \frac{m_1p}{v} - \frac{H_2Q_2p}{v} \\
\Leftrightarrow \frac{dp}{dt} &= \frac{\frac{eKv}{r}\left(1 + \frac{apr}{v^2}\right)np}{1 + h_t nKv\left(1 + \frac{apr}{v^2}\right)} - \frac{m_1p}{v} - \frac{H_2Q_2p}{v}
\end{aligned}$$

atau dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{dn}{dt} &= \frac{n(1-n)}{1+\beta p} - \frac{(1+\alpha p)np}{1+Hn(1+\alpha p)} - c_1n \\
\frac{dp}{dt} &= \frac{\delta(1+\alpha p)np}{1+Hn(1+\alpha p)} - mp - c_2p
\end{aligned} \tag{4.4}$$

dengan

$$\beta = \frac{\tau r}{v}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{h_t v K}{H_1 Q_1} \\ c_1 &= \frac{r}{evK} \\ \delta &= \frac{r}{m_1} \\ m &= \frac{r}{H_2 Q_2} \\ c_2 &= \frac{r}{r}\end{aligned}$$

dan

$$n(0) \geq 0$$

$$p(0) \geq 0$$

Pada tahap berikutnya dilakukan analisis kestabilan pada sistem persamaan (4.4).

D. Analisis Model

Interpretasi biologis diperlukan untuk membuat model lebih realistis maka solusi dari sistem persamaan (4.4) harus dijamin positif.

Teorema 4.1:

Solusi sistem (4.4) harus dijamin positif.

Bukti.

Jika $t > 0$, dipunyai $Y = (n(t), p(t))^T$ dan $F(Y) = (F_1(Y), F_2(Y))^T$, dimana $F_1(Y) = \left(\frac{n(1-n)}{(1+\beta p)} \right) -$

$\left(\frac{(1+\alpha p)pn}{1+Hn(1+\alpha p)}\right) - c_1 n$ dan $F_2(Y) = \left(\frac{(\delta(1+\alpha p)np)}{(1+Hn(1+\alpha p))}\right) - mp - c_2$. Selanjutnya sistem persamaan (4.4) dapat dituliskan dengan $\frac{dY}{dt} = F(Y)$, dimana $F: C_+ \rightarrow (R)_+^2$ dengan $Y(0) = Y_0 \in R_+^2$. $F_i \in C^\infty(R)$ untuk $i=1,2$ kemudian dilakukan pengintegralan pada $F_1(Y)$ dan $F_2(Y)$ untuk menunjukkan kepositifan $n(t)$ dan $p(t)$.

$$F_1(Y)$$

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \frac{n(1-n)}{1+\beta p} - \frac{(1+\alpha p)pn}{1+Hn(1+\alpha p)} - c_1 n \\ \Leftrightarrow \int \frac{dn}{dt} &= \int \frac{n(1-n)}{1+\beta p} - \int \frac{(1+\alpha p)pn}{1+Hn(1+\alpha p)} - \int c_1 n \\ \Leftrightarrow \int \frac{dn}{dt} &\geq n \left(\int \frac{(1-n)}{1+\beta p} - \int \frac{(1+\alpha p)p}{1+Hn(1+\alpha p)} - \int c_1 \right) \\ \Leftrightarrow \int \frac{dn}{n} &\geq dt \left(\int \frac{(1-n)}{1+\beta p} - \int \frac{(1+\alpha p)p}{1+Hn(1+\alpha p)} - \int c_1 \right) \\ \Leftrightarrow \int \frac{dn}{n} &\geq \int \frac{(1-n)}{1+\beta p} dt - \int \frac{(1+\alpha p)p}{1+Hn(1+\alpha p)} dt - \int c_1 dt \\ \Leftrightarrow \ln|n| &\geq \int \frac{(1-n)}{1+\beta p} dt - \int \frac{(1+\alpha p)p}{1+Hn(1+\alpha p)} dt - c_1 t + C \end{aligned}$$

Kedua ruas dieksponekan untuk mempermudah perhitungan

$$\Leftrightarrow e^{\ln|n|} \geq e^{\int \frac{(1-n)}{1+\beta p} dt - \int \frac{(1+\alpha p)p}{1+Hn(1+\alpha p)} dt - c_1 t + C}$$

Berdasarkan sifat logaritma natural, diperoleh

$$n \geq e^{\left(\int \frac{(1-n)}{1+\beta p} dt - \int \frac{(1+\alpha p)p}{1+Hn(1+\alpha p)} dt\right)} e^{c_1 t + c}$$

Misalkan $Z = e^c$, maka

$$n \geq e^{\left(\int \frac{(1-n)}{1+\beta p} dt - \int \frac{(1+\alpha p)p}{1+Hn(1+\alpha p)} dt\right)} e^{c_1 t} Z \quad (*)$$

Pada saat $t = 0$

$$n \geq e^{\left(\int \frac{(1-n)}{1+\beta p} dt - \int \frac{(1+\alpha p)p}{1+Hn(1+\alpha p)} dt\right)} e^{c_1(0)} \cdot Z$$

$$\Leftrightarrow n \geq e^{\left(\int \frac{(1-n)}{1+\beta p} dt - \int \frac{(1+\alpha p)p}{1+Hn(1+\alpha p)} dt\right)} \cdot Z$$

Kalikan kedua ruas dengan $e^{\left(-\left(\int \frac{(1-n)}{1+\beta p} dt - \int \frac{(1+\alpha p)p}{1+Hn(1+\alpha p)} dt\right)\right)}$

$$n \cdot e^{\left(-\left(\int \frac{(1-n)}{1+\beta p} dt - \int \frac{(1+\alpha p)p}{1+Hn(1+\alpha p)} dt\right)\right)} \geq Z e^{\left(\int \frac{(1-n)}{1+\beta p} dt - \int \frac{(1+\alpha p)p}{1+Hn(1+\alpha p)} dt\right)} \cdot \left(-\left(\int \frac{(1-n)}{1+\beta p} dt - \int \frac{(1+\alpha p)p}{1+Hn(1+\alpha p)} dt\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow n \cdot e^{\left(-\left(\int \frac{(1-n)}{1+\beta p} dt - \int \frac{(1+\alpha p)p}{1+Hn(1+\alpha p)} dt\right)\right)} \geq Z e^0$$

Maka

$$Z = n \cdot e^{\left(-\left(\int \frac{(1-n)}{1+\beta p} dt - \int \frac{(1+\alpha p)p}{1+Hn(1+\alpha p)} dt\right)\right)}$$

Selanjutnya, Z disubstitusikan ke (*)

$$n \geq e^{\left(\int \frac{(1-n)}{1+\beta p} dt - \int \frac{(1+\alpha p)p}{1+Hn(1+\alpha p)} dt\right)} e^{c_1 t} Z$$

$$\Leftrightarrow n \geq e^{\left(\int \frac{(1-n)}{1+\beta p} dt - \int \frac{(1+\alpha p)p}{1+Hn(1+\alpha p)} dt\right)} e^{c_1 t} \cdot n e^{\left(-\left(\int \frac{(1-n)}{1+\beta p} dt - \int \frac{(1+\alpha p)p}{1+Hn(1+\alpha p)} dt\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow n \geq n e^{c_1 t}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan limit pada $e^{c_1 t}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{c_1 t} = 0$$

Maka $\mathbf{n}(t) \geq \mathbf{0}$.

$F_2(Y)$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\delta(1 + \alpha p)pn}{1 + Hn(1 + \alpha p)} - p(m + c_2)$$

$$\int \frac{dp}{dt} = \int \frac{\delta(1 + \alpha p)pn}{1 + Hn(1 + \alpha p)} - \int p(m + c_2)$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dp}{dt} = p \left(\int \frac{\delta(1 + \alpha p)n}{1 + Hn(1 + \alpha p)} - \int (m + c_2) \right)$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dp}{p} \geq dt \left(\int \frac{\delta(1 + \alpha p)n}{1 + Hn(1 + \alpha p)} - \int (m + c_2) \right)$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dp}{p} \geq \int \frac{\delta(1 + \alpha p)n}{1 + Hn(1 + \alpha p)} dt - \int (m + c_2) dt$$

$$\Leftrightarrow \ln|p| \geq \int \frac{\delta(1+\alpha p)n}{1+Hn(1+\alpha p)} dt - mt - c_2 t + C$$

Kedua ruas dieksponekan untuk mempermudah perhitungan

$$e^{\ln|p|} \geq e^{\int \frac{\delta(1+\alpha p)n}{1+Hn(1+\alpha p)} dt - mt + c_2 t + C}$$

$$\Leftrightarrow p \geq e^{\int \frac{\delta(1+\alpha p)n}{1+Hn(1+\alpha p)} dt} \cdot e^{-(m+c_2)t+C}$$

Misalkan $Q = e^C$, maka

$$p \geq e^{\int \frac{\delta(1+\alpha p)n}{1+Hn(1+\alpha p)} dt} \cdot e^{-(m+c_2)t} \cdot e^C$$

$$\Leftrightarrow p \geq e^{\int \frac{\delta(1+\alpha p)n}{1+Hn(1+\alpha p)} dt} \cdot e^{-(m+c_2)t} \cdot Q \quad (**)$$

Pada saat $t = 0$

$$p \geq e^{\int \frac{\delta(1+\alpha p)n}{1+Hn(1+\alpha p)} dt} \cdot e^{-(m+c_2)(0)} \cdot Q$$

$$\Leftrightarrow p \geq e^{\int \frac{\delta(1+\alpha p)n}{1+Hn(1+\alpha p)} dt} \cdot Q$$

$$\Leftrightarrow p \cdot e^{-\int \frac{\delta(1+\alpha p)n}{1+Hn(1+\alpha p)} dt} \geq Q \cdot e^{\int \frac{\delta(1+\alpha p)n}{1+Hn(1+\alpha p)} dt} \cdot \left(-\int \frac{\delta(1+\alpha p)n}{1+Hn(1+\alpha p)} dt\right)$$

$$\Leftrightarrow p \cdot e^{-\int \frac{\delta(1+\alpha p)n}{1+Hn(1+\alpha p)} dt} \geq Q$$

Maka $Q = p \cdot e^{-\int \frac{\delta(1+\alpha p)n}{1+Hn(1+\alpha p)} dt}$

Selanjutnya, substitusikan Q ke (**)

$$p \geq e^{\int \frac{\delta(1+\alpha p)n}{1+Hn(1+\alpha p)} dt} \cdot e^{-(m+c_2)t} \cdot Q$$

$$\Leftrightarrow p \geq e^{\int \frac{\delta(1+\alpha p)n}{1+Hn(1+\alpha p)} dt} \cdot e^{-(m+c_2)t} \cdot p \cdot e^{-\int \frac{\delta(1+\alpha p)n}{1+Hn(1+\alpha p)} dt}$$

$$\Leftrightarrow p \geq p e^{-(m+c_2)t}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan limit pada $e^{-(m+c_2)t}$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} e^{-(m+c_2)t} = 0$$

Maka $p(t) \geq 0$, sehingga dapat diketahui bahwa $n(t) \geq 0$ dan $p(t) \geq 0$.

E. Titik Ekuilibrium Model

Model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerja sama berburu antar predator serta pemanenan merupakan sistem persamaan diferensial nonlinier. Sistem persamaan tersebut memiliki titik ekuilibrium yang didapatkan ketika kedua persamaan dari sistem persamaan (4.4) sama dengan nol atau bisa dituliskan jika $\frac{dn}{dt} = \frac{dp}{dt} = 0$.

Eksistensi titik ekuilibrium trivial dan aksial dijelaskan pada teorema berikut:

Teorema 4.2:

- a. Titik ekuilibrium trivial dari sistem persamaan (4.4) yang dapat dituliskan dengan $\widehat{E}_0(\widehat{n}_0, \widehat{p}_0)$ adalah $\widehat{E}_0(\widehat{n}_0, \widehat{p}_0) = (0,0)$. Titik ekuilibrium trivial menunjukkan populasi prey dan predator mengalami kepunahan.
- b. Titik ekuilibrium aksial dari sistem persamaan (4.4) yang dapat dituliskan dengan $\widehat{E}_1(\widehat{n}_1, \widehat{p}_1)$ adalah $\widehat{E}_1(\widehat{n}_1, \widehat{p}_1) = (1 - c_1, 0)$ jika dan hanya jika $c_1 < 1$. Titik ekuilibrium aksial menunjukkan salah satu populasi mengalami kepunahan.

Bukti.

Berdasarkan **definisi (2.1)** titik ekuilibrium pada model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerja sama berburu antar predator serta pemanenan dapat diperoleh jika $\frac{dn}{dt} = \frac{dp}{dt} = 0$.

Jika $\frac{dn}{dt} = 0$, maka

$$\frac{n(1-n)}{1+\beta p} - \frac{(1+\alpha p)np}{1+Hn(1+\alpha p)} - c_1 n = 0$$

$$n \left[\frac{(1-n)}{1+\beta p} - \frac{(1+\alpha p)p}{1+Hn(1+\alpha p)} - c_1 \right] = 0$$

Sehingga diperoleh $n = 0$ (4.6)

atau $\frac{(1-n)}{1+\beta p} - \frac{(1+\alpha p)p}{1+Hn(1+\alpha p)} - c_1 = 0$ (4.7)

Jika $\frac{dp}{dt} = 0$, maka

$$\frac{\delta(1+\alpha p)np}{1+Hn(1+\alpha p)} - mp - c_2 p = 0$$

$$p \left[\frac{\delta(1+\alpha p)n}{1+Hn(1+\alpha p)} - m - c_2 \right] = 0$$

Sehingga diperoleh $p = 0$ (4.8)

atau $\frac{\delta(1+\alpha p)n}{1+Hn(1+\alpha p)} - m - c_2 = 0$ (4.9)

Selanjutnya persamaan (4.6) disubstitusikan ke persamaan kedua pada sistem (4.4) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 & p \left[\frac{\delta(1 + \alpha p)n}{1 + Hn(1 + \alpha p)} - m - c_2 \right] = 0 \\
 \Leftrightarrow & p \left[\frac{\delta(1 + \alpha p)(0)}{1 + H(0)(1 + \alpha p)} - m - c_2 \right] = 0 \\
 \Leftrightarrow & p(-m - c_2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & p = 0
 \end{aligned}$$

Maka, dari persamaan (4.6) dan persamaan kedua pada sistem persamaan (4.4) diperoleh titik ekuilibrium \widehat{E}_0 yakni $\widehat{E}_0(\widehat{n}_0, \widehat{p}_0) = (0, 0)$. Oleh karena itu, berdasarkan **teorema 4.2** titik ekuilibrium \widehat{E}_0 disebut titik ekuilibrium **trivial** sebab populasi prey dan predator bernilai nol atau mengalami kepunahan ■.

Berikutnya, untuk mencari titik ekuilibrium lainnya disubstitusikan persamaan (4.8) ke persamaan pertama pada sistem persamaan (4.4) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 & \frac{n(1 - n)}{1 + \beta p} - \frac{(1 + \alpha p)np}{1 + Hn(1 + \alpha p)} - c_1 n = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{n(1 - n)}{1 + \beta(0)} - \frac{(1 + \alpha(0))n(0)}{1 + Hn(1 + \alpha(0))} - c_1 n = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{n(1 - n)}{1} - \frac{0}{1 + Hn} - c_1 n = 0
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow n(1 - n) - c_1 n = 0$$

$$\Leftrightarrow n(1 - n - c_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - n - c_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 1 - c_1$$

Maka, diperoleh titik ekuilibrium selanjutnya dari persamaan (4.8) dan persamaan pertama pada sistem persamaan (4.4) adalah $\widehat{E}_1(\widehat{n}_1, \widehat{p}_1) = (1 - c_1, 0)$. Oleh karena itu, berdasarkan **teorema 4.2** titik ekuilibrium E_1 disebut titik ekuilibrium **aksial** dengan populasi prey ada apabila $c_1 < 1$ dan populasi predator bernilai nol.

Eksistensi titik ekuilibrium koeksistensi dijelaskan pada teorema berikut:

Teorema 4.3:

Titik ekuilibrium koeksistensi dapat dituliskan dengan $\widehat{E}_2(\widehat{n}_2, \widehat{p}_2)$, \widehat{n}_2 ada apabila $\delta > H(c_2 + m)$ dan \widehat{p}_2 ada apabila memenuhi salah satu kemungkinan dalam aturan tanda descartes. Populasi prey dan predator dapat hidup berdampingan sehingga titik ekuilibrium $\widehat{E}_2(\widehat{n}_2, \widehat{p}_2)$ disebut titik ekuilibrium **koeksistensi**.

Bukti.

Titik ekuilibrium dari persamaan (4.7) dan (4.9) akan ditentukan. Titik n_2 dari persamaan (4.9) ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\delta(1 + \alpha p)n}{1 + Hn(1 + \alpha p)} - m - c_2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{\delta(1 + \alpha p)n}{1 + Hn(1 + \alpha p)} = m + c_2 \\
 \Leftrightarrow & \delta(1 + \alpha p)n = (m + c_2)(1 + Hn(1 + \alpha p)) \\
 \Leftrightarrow & \frac{\delta(1 + \alpha p)n}{m + c_2} = 1 + Hn(1 + \alpha p) \\
 \Leftrightarrow & \frac{\delta(1 + \alpha p)n}{m + c_2} - 1 = Hn(1 + \alpha p) \\
 \Leftrightarrow & \frac{\delta(1 + \alpha p)n - (m + c_2)}{m + c_2} = Hn(1 + \alpha p) \\
 \Leftrightarrow & \delta(1 + \alpha p)n - (m + c_2) = Hn(1 + \alpha p)(m + c_2) \\
 \Leftrightarrow & \frac{\delta(1 + \alpha p)n - (m + c_2)}{n} = H(1 + \alpha p)(m + c_2) \\
 \Leftrightarrow & \delta(1 + \alpha p) - H(1 + \alpha p)(m + c_2) = \frac{(m + c_2)}{n} \\
 \Leftrightarrow & n = \frac{(m + c_2)}{\delta(1 + \alpha p) - H(1 + \alpha p)(m + c_2)} \\
 \Leftrightarrow & n = \frac{(m + c_2)}{(1 + \alpha p)(\delta - H(m + c_2))}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\text{Maka } n_2 = \frac{(m+c_2)}{(1+\alpha p)(\delta-H(m+c_2))}$$

Karena $n_2 > 0$ maka n_2 ada jika $\delta > H(c_2 + m)$.

Kemudian n_2 disubstitusikan ke persamaan (4.7) diperoleh

$$\begin{aligned} p\delta - pH(m+c_2) + p^2\alpha\delta - p^2H\alpha(m+c_2) + p^2\delta(\alpha+\beta) \\ - p^2H(m+c_2)(\alpha+\beta) + p^3\alpha\delta(\alpha+\beta) \\ - p^3H\alpha(m+c_2)(\alpha+\beta) + p^3\alpha\beta\delta \\ - p^3H\alpha\beta(m+c_2) + p^4\alpha^2\beta\delta - p^4H\alpha^2\beta(m+c_2) \\ - \delta + H(m+c_2) - p\alpha\delta + pH\alpha(m+c_2) + m+c_2 \\ - Hm\delta - Hc_2\delta - pHm\alpha\delta - pHc_2\alpha\delta \\ + H^2m(m+c_2) + H^2c_2(m+c_2) \\ + pH^2m\alpha(m+c_2) + pH^2c_2\alpha(m+c_2) - pHm\alpha\delta \\ - pHc_2\alpha\delta - p^2Hm\alpha^2\delta - p^2Hc_2\alpha^2\delta \\ + pH^2m\alpha(m+c_2) + pH^2c_2\alpha(m+c_2) \\ + p^2H^2\alpha^2m(m+c_2) + p^2H^2\alpha^2c_2(m+c_2) + Hm^2 \\ + Hmc_2 + Hmc_2 + pHm^2\alpha + pHmc_2\alpha + Hmc_2 \\ + Hc_2^2 + pHm\alpha c_2 + pH\alpha c_2^2 + c_1\delta + pc_1\delta(\alpha+\beta) \\ + p^2c_1\delta\alpha\beta - Hc_1(m+c_2) - pHc_1(m+c_2)(\alpha+\beta) \\ - p^2\alpha\beta Hc_1(m+c_2) + Hc_1m + pHc_1m(\alpha+\beta) \\ + p^2Hc_1m\alpha\beta + Hc_1c_2 + pHc_1c_2(\alpha+\beta) \\ + p^2Hc_1c_2\alpha\beta = 0 \end{aligned}$$

atau bisa dituliskan dengan

$$a_4p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0 \quad (4.11)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_4 &= \beta\alpha^2(\delta - H(m + c_2)) \\ a_3 &= \alpha(\alpha + 2\beta)(\delta - H(m + c_2)) \\ a_2 &= \alpha\delta(1 + c_1\beta) + H^2\alpha^2(m + c_2)^2 + \delta(\alpha + \beta) \\ &\quad - H(m + c_2)(2\alpha + \beta) \\ &\quad - H\alpha(m + c_2)(\alpha\delta + \beta c_1) \\ &\quad + Hc_1\alpha\beta(m + c_2) \\ a_1 &= \delta - H(m + c_2) - \alpha\delta + H\alpha(m + c_2) - H\alpha\delta(m + c_2) \\ &\quad + H^2\alpha(m + c_2)^2 - H\alpha\delta(m + c_2) \\ &\quad + H^2\alpha(m + c_2)(m - c_2) + Hm^2\alpha \\ &\quad + 2Hmc_2\alpha + H\alpha c_2^2 + c_1\delta(\alpha + \beta) \\ a_0 &= (1 - c_1)(H(m + c_2) - \delta) + (m + c_2) \\ &\quad + H(m + c_2)(c_1 - \delta) + H(m^2 + c_2^2) \\ &\quad + H^2(m + c_2)^2 + Hmc_2 + Hmc_2 \\ &\quad + Hmc_2 \end{aligned}$$

Nilai p_2 yang diperoleh dari persamaan (4.11) merupakan akar tunggal. Akar-akar p_2 dari persamaan (4.11) sulit ditunjukkan secara eksplisit. Namun eksistensinya dapat ditunjukkan dengan menggunakan aturan tanda *Descartes* yakni untuk mendapatkan

setidaknya satu akar positif dengan memperhatikan jumlah perubahan tanda koefisien setidaknya terdapat satu perubahan tanda dalam persamaan tersebut. Diperhatikan bahwa,

$$a_4 = \beta\alpha^2(\delta - H(m + c_2)) \quad (4.12)$$

Dari persamaan (4.12) terlihat bahwa a_4 bernilai positif. Kemudian persamaan selanjutnya,

$$a_3 = \alpha(\alpha + 2\beta)(\delta - H(m + c_2)) \quad (4.13)$$

Dari persamaan (4.13) terlihat bahwa a_3 bernilai positif, kemudian persamaan selanjutnya

$$\begin{aligned} a_2 = & \alpha\delta(1 + c_1\beta) + H^2\alpha^2(m + c_2)^2 + \delta(\alpha + \beta) - \\ & H(m + c_2)(2\alpha + \beta) - H\alpha(m + c_2)(\alpha\delta + \beta c_1) + \\ & Hc_1\alpha\beta(m + c_2) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dari persamaan (4.14) terlihat bahwa terdapat dua kemungkinan yakni a_2 dapat bernilai positif atau negatif, lalu persamaan selanjutnya

$$\begin{aligned} a_1 = & \delta - H(m + c_2) - \alpha\delta + H\alpha(m + c_2) - H\alpha\delta(m + \\ & c_2) + H^2\alpha(m + c_2)^2 - H\alpha\delta(m + c_2) + H^2\alpha(m + \\ & c_2)(m - c_2) + Hm^2\alpha + 2Hmc_2\alpha + H\alpha c_2^2 + c_1\delta(\alpha + \beta) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dari persamaan (4.15) terlihat bahwa terdapat dua kemungkinan yakni a_1 dapat bernilai positif atau negatif, lalu persamaan selanjutnya

$$a_0 = (1 - c_1)(H(m + c_2) - \delta) + (m + c_2) + H(m + c_2)(c_1 - \delta) + H(m^2 + c_2^2) + H^2(m + c_2)^2 + Hmc_2 + Hmc_2 + Hmc_2 \quad (4.16)$$

Dari persamaan (4.16) terlihat bahwa terdapat dua kemungkinan yakni a_0 dapat bernilai positif atau negatif.

Oleh karena itu, diketahui bahwa a_4 dan a_3 bernilai positif, lalu a_2, a_1, a_0 dapat bernilai positif atau negatif. Berdasarkan aturan tanda Descartes diperoleh beberapa kemungkinan solusi untuk persamaan (4.11) yang disajikan pada tabel berikut:

Tabel 4.3 Kemungkinan solusi persamaan (4.11) berdasarkan aturan tanda *Descartes*

Kemungkinan	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	$\sum u$	$\sum np$
1	+	+	+	+	+	0	0
2	+	+	-	+	+	2	0,2
3	+	+	+	-	+	2	0,2
4	+	+	-	-	+	2	0,2
5	+	+	+	+	-	1	1
6	+	+	-	+	-	2	0,2
7	+	+	+	-	-	1	1
8	+	+	-	-	-	1	1

Keterangan:

u : perubahan tanda ketika (p)

np : banyaknya akar positif

v : perubahan tanda ketika ($-p$)

nq : banyaknya akar negatif

Karena solusi persamaan (4.11) bernilai tunggal dan positif maka kemungkinan solusi yang memenuhi adalah kemungkinan 5, 7 dan 8.

Maka titik ekuilibrium dari sistem (4.4) adalah:

1. Titik ekuilibrium trivial $E_0(\widehat{n}_0, \widehat{p}_0) = (0, 0)$.
2. Titik ekuilibrium axial $E_1(\widehat{n}_1, \widehat{p}_1) = (1 - c_1, 0)$.
3. Titik ekuilibrium koeksistensi $E_2(\widehat{n}_2, \widehat{p}_2)$, \widehat{n}_2 ada apabila $\delta > H(m + c_2)$ dan \widehat{p}_2 ada apabila memenuhi salah satu kemungkinan pada **tabel 4.3** aturan tanda Descartes yakni:
 - a) Kemungkinan 5 dengan a_4, a_3, a_2, a_1 positif dan a_0 negatif.
 - b) Kemungkinan 7 dengan a_4, a_3, a_2 positif dan a_1, a_0 negatif.
 - c) Kemungkinan 8 dengan a_4, a_3 positif dan a_2, a_1, a_0 negatif.

Perhitungan rinci untuk persamaan 4.11 dapat ditemukan pada **lampiran 1**, sementara perhitungan lengkap untuk **tabel 4.3** mengenai aturan tanda descartes terdapat pada **lampiran 2**.

F. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium

Model matematika predator prey pada sistem (4.4) merupakan sistem nonlinier maka perlu dilakukan linierisasi. Kestabilan titik ekuilibrium diselidiki dari hasil linierisasi pada sistem persamaan (4.4) disekitar titik ekuilibriumnya. Sebelum melakukan linierisasi terlebih dahulu dibentuk matriks Jacobian dari sistem (4.4) di sekitar titik ekuilibrium $\hat{E} = (\hat{n}, \hat{p})$. Matriks Jacobian hasil linierisasi model predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator serta pemanenan disekitar titik ekuilibrium $\hat{E} = (\hat{n}, \hat{p})$ adalah

$$J(E) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \left(\frac{dn}{dt}\right)}{\partial n} & \frac{\partial \left(\frac{dn}{dt}\right)}{\partial p} \\ \frac{\partial \left(\frac{dp}{dt}\right)}{\partial n} & \frac{\partial \left(\frac{dp}{dt}\right)}{\partial p} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Elemen-elemen pada matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium $\hat{E} = (\hat{n}, \hat{p})$ diperoleh dengan cara menurunkan persamaan-persamaan pada sistem (4.4) sebagai berikut:

1. Jika $\frac{dn}{dt} = \frac{n(1-n)}{1+\beta p} - \frac{(1+\alpha p)pn}{1+Hn(1+\alpha p)} - c_1 n$, maka

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n(1-n)}{1+\beta p} - \frac{(1+\alpha p)pn}{1+Hn(1+\alpha p)} - c_1 n$$

$$\Leftrightarrow \frac{dn}{dt} = \frac{n-n^2}{1+\beta p} - \frac{pn+p^2\alpha n}{1+Hn(1+\alpha p)} - c_1 n$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dn}{dt} \right)}{\partial n} = -c_1 + \left[\frac{(1-2n)(1+\beta p) - (n-n^2)(0)}{(1+\beta p)^2} \right] - \left[\frac{(1+\alpha p)p(1+Hn(1+\alpha p)) - (1+\alpha p)pn(1+\alpha p)H}{(1+Hn(1+\alpha p))^2} \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dn}{dt} \right)}{\partial n} = -c_1 + \left[\frac{(1-2n)}{(1+\beta p)} \right] - \left[\frac{(1+\alpha p)p + Hpn(1+\alpha p)^2}{(1+Hn(1+\alpha p))^2} \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dn}{dt} \right)}{\partial n} = -c_1 + \left[\frac{(1-2n)}{(1+\beta p)} \right] - \left[\frac{(1+\alpha p)p}{(1+Hn(1+\alpha p))^2} \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dn}{dt} \right)}{\partial n} = -c_1 + \left[\frac{(1-2n)}{(1+\beta p)} \right] - \left[\frac{(1+\alpha p)p}{(1+Hn(1+\alpha p))^2} \right]$$

$$\Leftrightarrow a_{11} = -c_1 + \left[\frac{(1-2n)}{(1+\beta p)} \right] - \left[\frac{(1+\alpha p)p}{(1+Hn(1+\alpha p))^2} \right]$$

2. Jika $\frac{dp}{dt} = \frac{\delta np(1+\alpha p)}{1+Hn(1+\alpha p)} - mp - c_2 p$, maka

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\delta np(1+\alpha p)}{1+Hn(1+\alpha p)} - mp - c_2 p$$

$$\Leftrightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{\delta np + \delta \alpha np^2}{1+Hn+Hn\alpha p} - mp - c_2 p$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dp}{dt} \right)}{\partial n} = \frac{(\delta p + \delta p^2 \alpha)(1+Hn+Hn\alpha p) - (\delta np + \delta \alpha np^2)(H+H\alpha p)}{(1+Hn+Hn\alpha p)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dp}{dt} \right)}{\partial n} = \frac{\delta p + Hn\delta p + Hn\delta p^2\alpha + \delta p^2\alpha + Hn\delta p^2\alpha + Hn\delta p^3 - H\delta np - H\alpha p^2\delta n - H\delta\alpha np^2 - H\delta n\alpha^2 p^3}{(1 + Hn + Hn\alpha p)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dp}{dt} \right)}{\partial n} = \frac{\delta p + \delta p^2\alpha}{(1 + H(n + n\alpha p))^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dp}{dt} \right)}{\partial n} = \frac{\delta p + \delta p^2\alpha}{(1 + H(n + n\alpha p))^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dp}{dt} \right)}{\partial n} = \frac{\delta p(1 + \alpha p)}{(1 + H(n + n\alpha p))^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dp}{dt} \right)}{\partial n} = \frac{\delta p(1 + \alpha p)}{(1 + H(n + n\alpha p))^2}$$

$$\Leftrightarrow a_{21} = \frac{\delta p(1 + \alpha p)}{(1 + H(n + n\alpha p))^2}$$

3. Jika $\frac{dn}{dt} = \frac{n(1-n)}{1+\beta p} - \frac{(1+\alpha p)pn}{1+Hn(1+\alpha p)} - c_1 n$, maka

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n(1-n)}{1+\beta p} - \frac{(1+\alpha p)pn}{1+Hn(1+\alpha p)} - c_1 n$$

$$\Leftrightarrow \frac{dn}{dt} = \frac{n-n^2}{1+\beta p} - \frac{pn+p^2\alpha n}{1+Hn(1+\alpha p)} - c_1 n$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dn}{dt} \right)}{\partial p} = \frac{(0)(1+\beta p) - \beta(n-n^2)}{(1+\beta p)^2} - \frac{(n+2p\alpha n)(1+Hn(1+\alpha p)) - (Hn\alpha)(pn+p^2\alpha n)}{(1+Hn(1+\alpha p))^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dn}{dt} \right)}{\partial p} = -\frac{\beta(n-n^2)}{(1+\beta p)^2} - \frac{n+2p\alpha n + Hn^2(1+\alpha p) + 2p\alpha nHn(1+\alpha p) - Hn\alpha pn - Hn\alpha p^2\alpha n}{(1+Hn(1+\alpha p))^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dn}{dt} \right)}{\partial p} = -\frac{\beta n(1-n)}{(1+\beta p)^2} - \frac{n(1+2p\alpha + Hn(1+\alpha p) + 2p\alpha nH(1+\alpha p) - Hn\alpha p - Hn\alpha^2 p^2)}{(1+Hn(1+\alpha p))^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dn}{dt} \right)}{\partial p} = -\frac{\beta n(1-n)}{(1+\beta p)^2} - \frac{n(1+2p\alpha + Hn(1+\alpha p)(1+2\alpha p) - Hn\alpha p(1+\alpha p))}{(1+Hn(1+\alpha p))^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dn}{dt} \right)}{\partial p} = -\frac{\beta n(1-n)}{(1+\beta p)^2} - \frac{n(Hn(1+\alpha p)((1+2\alpha p) - \alpha p) + 1 + 2p\alpha)}{(1+Hn(1+\alpha p))^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dn}{dt} \right)}{\partial p} = -\frac{\beta n(1-n)}{(1+\beta p)^2} - \frac{n(1+2p\alpha + Hn(1+\alpha p)(1+\alpha p))}{(1+Hn(1+\alpha p))^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dn}{dt} \right)}{\partial p} = -\frac{\beta n(1-n)}{(1+\beta p)^2} - \frac{n(1+2p\alpha + Hn(1+\alpha p)^2)}{(1+Hn(1+\alpha p))^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dn}{dt} \right)}{\partial p} = n \left(-\frac{\beta(1-n)}{(1+\beta p)^2} - \frac{(1+2p\alpha + Hn(1+\alpha p)^2)}{(1+Hn(1+\alpha p))^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dn}{dt} \right)}{\partial p} = n \left(-\frac{\beta(1-n)}{(1+\beta p)^2} - \frac{(1+2p\alpha + Hn(1+\alpha p)^2)}{(1+Hn(1+\alpha p))^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow a_{12} = n \left(-\frac{\beta(1-n)}{(1+\beta p)^2} - \frac{(1+2p\alpha + Hn(1+\alpha p)^2)}{(1+Hn(1+\alpha p))^2} \right)$$

4. Jika $\frac{dp}{dt} = \frac{\delta np(1+\alpha p)}{1+Hn(1+\alpha p)} - mp - c_2 p$, maka

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\delta np(1+\alpha p)}{1+Hn(1+\alpha p)} - mp - c_2 p$$

$$\Leftrightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{\delta np + \delta \alpha np^2}{1+Hn+Hn\alpha p} - mp - c_2 p$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dp}{dt} \right)}{\partial p} = \frac{(\delta n + 2\delta \alpha np)(1+Hn+Hn\alpha p) - (Hn\alpha)(\delta np + \delta \alpha np^2)}{(1+Hn+Hn\alpha p)^2} - m - c_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dp}{dt} \right)}{\partial p} = -m - c_2 + \frac{\delta n + 2\delta \alpha np + \delta n^2 H + 2\delta \alpha n^2 p H + \delta n^2 H \alpha p + 2\delta \alpha^2 n^2 p^2 H - Hn^2 \alpha \delta p - Hn^2 \alpha^2 p^2 \delta}{(1+Hn+Hn\alpha p)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dp}{dt} \right)}{\partial p} = -m - c_2 + \frac{\delta n(1 + 2\alpha p + Hn + 2\alpha npH + Hn\alpha p + 2\alpha^2 np^2 H - Hn\alpha p - Hn\alpha^2 p^2)}{(1 + Hn + Hn\alpha p)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dp}{dt} \right)}{\partial p} = -m - c_2 + \frac{\delta n(1 + 2\alpha p + Hn(1 + 2\alpha p + \alpha p + 2\alpha^2 p^2 - \alpha p - \alpha^2 p^2))}{(1 + Hn + Hn\alpha p)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dp}{dt} \right)}{\partial p} = -m - c_2 + \frac{\delta n(1 + 2\alpha p + Hn(1 + 2\alpha p + \alpha^2 p^2))}{(1 + Hn + Hn\alpha p)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dp}{dt} \right)}{\partial p} = -m - c_2 + \frac{\delta n(1 + 2\alpha p + Hn(1 + \alpha p)^2)}{(1 + Hn + Hn\alpha p)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{dp}{dt} \right)}{\partial p} = -m - c_2 + \frac{\delta n(1 + 2\alpha p + Hn(1 + \alpha p)^2)}{(1 + Hn + Hn\alpha p)^2}$$

$$\Leftrightarrow a_{22} = -m - c_2 + \frac{\delta n(1 + 2\alpha p + Hn(1 + \alpha p)^2)}{(1 + Hn + Hn\alpha p)^2}$$

Jadi diperoleh matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium yaitu

$$J(E) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} a_{11} &= -c_1 + \left[\frac{(1-2n)}{(1+\beta p)} \right] - \left[\frac{(1+\alpha p)p}{(1+Hn(1+\alpha p))^2} \right] \\ a_{21} &= \frac{\delta p(1+\alpha p)}{(1+H(n+n\alpha p))^2} \\ a_{12} &= n \left(-\frac{\beta(1-n)}{(1+\beta p)^2} - \frac{(1+2p\alpha+Hn(1+\alpha p)^2)}{(1+Hn(1+\alpha p))^2} \right) \\ a_{22} &= -m - c_2 + \frac{\delta n(1+2\alpha p+Hn(1+\alpha p)^2)}{(1+Hn+Hn\alpha p)^2} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Kestabilan titik ekuilibrium **trivial** dijelaskan pada teorema berikut:

Teorema 4.4:

Titik ekuilibrium **trivial** $\widehat{E}_0(\widehat{n}_0, \widehat{p}_0) = (0,0)$ **stabil asimtotik lokal** jika $c_1 > 1$.

Bukti. Nilai eigen matriks jacobian dari sistem (4.4) pada $\widehat{E}_0(\widehat{n}_0, \widehat{p}_0)$ adalah sebagai berikut:

Titik ekuilibrium $\widehat{E}_0(\widehat{n}_0, \widehat{p}_0) = (0,0)$ disubstitusikan pada matriks jacobian (4.17) diperoleh,

$$a_{11} = -c_1 + \left[\frac{(1-2n)}{(1+\beta p)} \right] - \left[\frac{(1+\alpha p)p}{(1+Hn(1+\alpha p))^2} \right]$$

$$\Leftrightarrow a_{11} = -c_1 + \left[\frac{(1-2(0))}{(1+\beta(0))} \right] - \left[\frac{(1+\alpha(0))(0)}{(1+H(0)(1+\alpha(0)))^2} \right]$$

$$\Leftrightarrow a_{11} = -c_1 + 1$$

$$\Leftrightarrow a_{11} = 1 - c_1$$

$$a_{12} = n \left(-\frac{\beta(1-n)}{(1+\beta p)^2} - \frac{(1+2p\alpha + Hn(1+\alpha p)^2)}{(1+Hn(1+\alpha p))^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow a_{12} = (0) \left(-\frac{\beta(1-0)}{(1+\beta(0))^2} - \frac{(1+2(0)\alpha + H(0)(1+\alpha(0))^2)}{(1+H(0)(1+\alpha(0)))^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow a_{12} = 0$$

$$a_{21} = \frac{\delta p(1+\alpha p)}{(1+H(n+n\alpha p))^2}$$

$$\Leftrightarrow a_{21} = \frac{\delta(0)(1+\alpha(0))}{(1+H((0)+(0)\alpha(0)))^2}$$

$$\Leftrightarrow a_{21} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\begin{aligned}
a_{22} &= -m - c_2 + \frac{\delta n(1 + 2\alpha p + Hn(1 + \alpha p)^2)}{(1 + Hn + Hn\alpha p)^2} \\
\Leftrightarrow a_{22} &= -m - c_2 + \frac{\delta(0)(1 + 2\alpha(0) + H(0)(1 + \alpha(0))^2)}{(1 + H(0) + H(0)\alpha(0))^2} \\
\Leftrightarrow a_{22} &= -m - c_2 + \frac{0}{1} \\
\Leftrightarrow a_{22} &= -m - c_2
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Sehingga diperoleh matriks $J(E_0)$ sebagai berikut:

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} 1 - c_1 & 0 \\ 0 & -c_2 - m \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

Persamaan karakteristik untuk $J(E_0)$ adalah

$$\begin{aligned}
|\lambda I - J(E_0)| &= 0 \\
\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 - c_1 & 0 \\ 0 & -c_2 - m \end{pmatrix} \right| &= 0 \\
\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} \lambda - (1 - c_1) & 0 \\ 0 & \lambda - (-c_2 - m) \end{matrix} \right| &= 0 \\
\Leftrightarrow (\lambda - (1 - c_1))(\lambda - (-c_2 - m)) &= 0
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Maka dapat diketahui dari persamaan karakteristik (4.21) diperoleh nilai-nilai eigen yaitu $\lambda_1 = 1 - c_1$ dan $\lambda_2 = -c_2 - m$. Berdasarkan **tabel 2.1** titik ekuilibrium stabil ketika $\lambda < 0$ maka

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 < 0 \\
\Leftrightarrow &1 - c_1 < 0 \\
\Leftrightarrow &c_1 > 1
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \lambda_2 &< 0 \\ \Leftrightarrow -c_2 - m &< 0 \\ \Leftrightarrow c_2 &> m. \end{aligned}$$

Karena **teorema 4.4** terpenuhi maka dapat diketahui bahwa titik ekuilibrium trivial $\widehat{E}_0(\widehat{n}_0, \widehat{p}_0) = (0,0)$ pada sistem persamaan (4.4) adalah **stabil asimtotik lokal**. ■

Kestabilan titik ekuilibrium **aksial** dijelaskan pada teorema berikut:

Teorema 4.5:

Titik ekuilibrium **aksial** $\widehat{E}_1(\widehat{n}_1, \widehat{p}_1) = (1 - c_1, 0)$ pada sistem persamaan (4.4) **stabil asimtotik lokal** jika $c_1 < 1$ dan $c_2 + m > \frac{(c_1-1)\delta}{H(c_1-1)-1}$.

Bukti.

Nilai eigen matriks jacobian dari sistem persamaan (4.4) pada $\widehat{E}_1(\widehat{n}_1, \widehat{p}_1)$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -c_1 + \left[\frac{(1-2n)}{(1+\beta p)} \right] - \left[\frac{(1+\alpha p)p}{(1+Hn(1+\alpha p))^2} \right] \\
\Leftrightarrow a_{11} &= -c_1 + \left[\frac{(1-2(1-c_1))}{(1+\beta(0))} \right] - \left[\frac{(1+\alpha(0))(0)}{(1+H(1-c_1)(1+\alpha(0)))^2} \right] \\
\Leftrightarrow a_{11} &= -c_1 + 1 - 2(1-c_1) - 0 \\
\Leftrightarrow a_{11} &= -c_1 + 1 - 2 + 2c_1 \\
\Leftrightarrow a_{11} &= c_1 - 1
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
a_{12} &= n \left(-\frac{\beta(1-n)}{(1+\beta p)^2} - \frac{(1+2p\alpha + Hn(1+\alpha p)^2)}{(1+Hn(1+\alpha p))^2} \right) \\
\Leftrightarrow a_{12} &= (1-c_1) \left(-\frac{\beta(1-(1-c_1))}{(1+\beta(0))^2} - \frac{(1+2(0)\alpha + H(1-c_1)(1+\alpha(0))^2)}{(1+H(1-c_1)(1+\alpha(0)))^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow a_{12} &= (1 - c_1) \left(-\beta c_1 - \frac{(1 + H(1 - c_1))}{(1 + H(1 - c_1))^2} \right) \\
\Leftrightarrow a_{12} &= (1 - c_1) \left(-\beta c_1 - \frac{1}{(1 + H(1 - c_1))} \right) \\
\Leftrightarrow a_{12} &= -\beta c_1 + \beta c_1^2 - \frac{1}{(1 + H(1 - c_1))} + \frac{c_1}{(1 + H(1 - c_1))} \\
\Leftrightarrow a_{12} &= \beta(c_1^2 - c_1) + \frac{c_1 - 1}{(1 + H(1 - c_1))}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= \frac{\delta p(1 + \alpha p)}{(1 + H(n + n\alpha p))^2} \\
\Leftrightarrow a_{21} &= \frac{\delta(0)(1 + \alpha(0))}{(1 + H((1 - c_1) + (1 - c_1)\alpha(0)))^2} \\
\Leftrightarrow a_{21} &= 0
\end{aligned}$$

$$a_{22} = -m - c_2 + \frac{\delta n(1 + 2\alpha p + Hn(1 + \alpha p)^2)}{(1 + Hn + Hn\alpha p)^2}$$

$$\Leftrightarrow a_{22} = -m - c_2 + \frac{\delta(1 - c_1)(1 + 2\alpha(0) + H(1 - c_1)(1 + \alpha(0))^2)}{(1 + H(1 - c_1) + H(1 - c_1)\alpha(0))^2}$$

$$\Leftrightarrow a_{22} = -m - c_2 + \frac{\delta(1 - c_1)(1 + H(1 - c_1))}{(1 + H(1 - c_1))^2}$$

$$\Leftrightarrow a_{22} = -m - c_2 + \frac{\delta(1 - c_1)}{(1 + H(1 - c_1))}$$

Sehingga diperoleh matriks $J(E_1)$ sebagai berikut:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} c_1 - 1 & \beta(c_1^2 - c_1) + \frac{c_1 - 1}{(1 + H(1 - c_1))} \\ 0 & -c_2 - m + \frac{(1 - c_1)\delta}{(1 + H(1 - c_1))} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Persamaan karakteristik untuk $J(E_1)$ adalah

$$\begin{aligned} |\lambda I - J(E_1)| &= 0 \\ \Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (c_1 - 1) & \left(\beta(c_1^2 - c_1) + \frac{c_1 - 1}{(1 + H(1 - c_1))} \right) \\ 0 & \left(-c_2 - m + \frac{(1 - c_1)\delta}{(1 + H(1 - c_1))} \right) \end{pmatrix} \right| &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - (c_1 - 1) & -\left(\beta(c_1^2 - c_1) + \frac{c_1 - 1}{(1 + H(1 - c_1))} \right) \\ 0 & \lambda - \left(-c_2 - m + \frac{(1 - c_1)\delta}{(1 + H(1 - c_1))} \right) \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda - (c_1 - 1)) \left(\lambda - \left(-c_2 - m + \frac{(1 - c_1)\delta}{(1 + H(1 - c_1))} \right) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Maka dapat diketahui dari persamaan karakteristik (4.24) diperoleh nilai-nilai eigen yaitu yaitu $\lambda_1 = c_1 - 1$ dan $\lambda_2 = -c_2 - m + \frac{(1 - c_1)\delta}{(1 + H(1 - c_1))}$. Berdasarkan **tabel**

2.1 titik ekuilibrium stabil ketika $\lambda < 0$ maka

$$\begin{aligned}\lambda_1 &< 0 \\ \Leftrightarrow c_1 - 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow c_1 &< 1\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\lambda_2 &< 0 \\ \Leftrightarrow -c_2 - m + \frac{(1 - c_1)\delta}{(1 + H(1 - c_1))} &< 0 \\ \Leftrightarrow -c_2 - m &< -\frac{(1 - c_1)\delta}{(1 + H(1 - c_1))} \\ \Leftrightarrow -c_2 - m &< \frac{(-1 + c_1)\delta}{(1 + H(1 - c_1))} \\ \Leftrightarrow c_2 + m &> -\frac{(-1 + c_1)\delta}{(1 + H(1 - c_1))} \\ \Leftrightarrow c_2 + m &> \frac{(-1 + c_1)\delta}{(-1 - H(1 - c_1))} \\ \Leftrightarrow c_2 + m &> \frac{(-1 + c_1)\delta}{(-1 + H(-1 + c_1))}\end{aligned}$$

Karena **teorema 4.5** terpenuhi maka dapat diketahui bahwa titik ekuilibrium $\widehat{E}_1(\widehat{n}_1, \widehat{p}_1)$ pada sistem persamaan (4.4) adalah **stabil asimtotik lokal**. ■

Kestabilan titik ekuilibrium **koeksistensi** dijelaskan pada teorema berikut:

Teorema 4.6:

Titik ekuilibrium koeksistensi $\widehat{E}_2(\widehat{n}_2, \widehat{p}_2)$ **stabil asimtotik lokal** jika

$$c_1 + c_2 + m > \left(\frac{1 - 2n_2}{1 + p_2\beta} + \frac{-p_2(1 + p_2\alpha) + n_2\delta(1 + 2p_2\alpha + Hn_2(1 + p_2\alpha)^2)}{(1 + Hn_2(1 + p_2\alpha))^2} \right) \quad (4.25)$$

dengan
 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$

$$a_{11} = -c_1 + \left[\frac{(1 - 2n_2)}{(1 + \beta p_2)} \right] - \left[\frac{(1 + \alpha p_2)p_2}{(1 + Hn_2(1 + \alpha p_2))^2} \right] \quad (4.26)$$

$$a_{12} = n_2 \left(-\frac{\beta(1 - n_2)}{(1 + \beta p_2)^2} - \frac{(1 + 2p_2\alpha + Hn_2(1 + \alpha p_2)^2)}{(1 + Hn_2(1 + \alpha p_2))^2} \right) \quad (4.27)$$

$$a_{21} = \frac{\delta p_2(1 + \alpha p_2)}{(1 + Hn_2(1 + \alpha p_2))^2} \quad (4.28)$$

$$a_{22} = -m - c_2 + \frac{\delta n_2(1 + 2\alpha p_2 + Hn_2(1 + \alpha p_2)^2)}{(1 + Hn_2(1 + \alpha p_2))^2} \quad (4.29)$$

Bukti.

Matriks Jacobi $J(E_2)$ dari sistem persamaan (4.4) pada titik ekuilibrium $\widehat{E}_2(\widehat{n}_2, \widehat{p}_2)$ diberikan oleh J_{ij} ($i, j = 1, 2$) dimana a_{ij} diberikan oleh persamaan (4.25–4.29). Pandang λ_i , ($i = 1, 2$) menjadi akar persamaan karakteristik $J(E_2)$ yang diberikan oleh

$$\begin{aligned}
 |\lambda I - J(E_2)| &= \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| \\
 &= \left| \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} \right| \\
 &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - (-a_{12})(-a_{21}) \\
 &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - (a_{12}a_{21}) \\
 &= \lambda^2 - \lambda a_{22} - \lambda a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\
 &= \lambda^2 + \lambda(-a_{22} - a_{11}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
 \end{aligned}$$

atau bisa dituliskan dengan

$$\lambda^2 + A_1\lambda + A_2 = 0 \quad (4.30)$$

dimana

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -a_{22} - a_{11} \\
 A_2 &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Karena sulit menemukan nilai eigen dari polinomial tersebut dengan perhitungan biasa maka dilakukan penyelesaian dengan mencari tanda dari bagian real nilai pembuat nol dari persamaan tersebut

menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Adapun langkah-langkah penyelesaian menggunakan kriteria Routh-Hurwitz sebagai berikut:

Tabel Routh untuk mencari akar persamaan (4.30) sebagai berikut:

Tabel 4.4 Tabel Routh untuk mencari akar persamaan (4.30)

Tabel Routh		
λ^2	1	A_2
λ^1	A_1	0
λ^0	$\frac{A_1 \cdot A_2 - 0}{A_1} = A_2$	0

Berdasarkan **tabel routh 4.4** dapat diketahui bahwa pada kolom pertama bilangan tidak nol dan bertanda sama maka persamaan (4.30) memiliki bagian real dan tidak nol. Selanjutnya matriks Hurwitz dari persamaan (4.30) adalah

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 1 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

Determinan matriks Hurwitz tingkat satu adalah

$$\Delta_1 = |a_1| = |A_1| = A_1$$

Perhatikan bahwa $A_1 = -a_{11} - a_{22}$

$$A_1 = -\left(-c_1 + \left[\frac{(1-2n_2)}{(1+\beta p_2)}\right] - \left[\frac{(1+\alpha p_2)p_2}{(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2}\right]\right) - \left(-m - c_2 + \frac{\delta n_2(1+2\alpha p_2 + Hn_2(1+\alpha p_2)^2)}{(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow A_1 = c_1 + \frac{(1+\alpha p_2)p_2}{(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2} - \frac{(1-2n_2)}{(1+\beta p_2)} + c_2 + m - \frac{\delta n_2(1+2\alpha p_2 + Hn_2(1+\alpha p_2)^2)}{(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2}$$

$$\Leftrightarrow A_1 = c_1 + c_2 + m - \frac{(1-2n_2)}{(1+\beta p_2)} + \frac{(1+\alpha p_2)p_2 - \delta n_2(1+2\alpha p_2 + Hn_2(1+\alpha p_2)^2)}{(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2}$$

Berdasarkan syarat kestabilan E_1 pada **teorema 4.4** diketahui bahwa $c_2 + m > \frac{\delta(-1+c_1)}{(-1+H(-1+c_1))}$

maka benar bahwa

$$c_1 + c_2 + m - \frac{(1-2n_2)}{(1+\beta p_2)} + \frac{(1+\alpha p_2)p_2 - \delta n_2(1+2\alpha p_2 + Hn_2(1+\alpha p_2)^2)}{(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2} > 0$$

$$\text{sehingga } c_1 + c_2 + m > \frac{(1-2n_2)}{(1+\beta p_2)} - \frac{(1+\alpha p_2)p_2 - \delta n_2(1+2\alpha p_2 + Hn_2(1+\alpha p_2)^2)}{(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2}$$

atau dapat dituliskan dengan

$$c_1 + c_2 + m > \frac{(1-2n_2)}{(1+\beta p_2)} + \frac{-(1+\alpha p_2)p_2 + \delta n_2(1+2\alpha p_2 + Hn_2(1+\alpha p_2)^2)}{(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2}.$$

Oleh karena itu terbukti bahwa $A_1 > 0$.

Determinan matriks Hurwitz tingkat dua adalah

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & 1 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = A_1 A_2 - 0 = A_1 A_2$$

Perhatikan bahwa $A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$\begin{aligned}
A_2 = & \left(-c_1 + \left(\frac{(1-2n_2)}{(1+\beta p_2)} \right) - \left(\frac{(1+\alpha p_2)p_2}{(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2} \right) \right) \\
& \cdot \left(-m - c_2 + \frac{\delta n_2(1+2\alpha p_2+Hn_2(1+\alpha p_2)^2)}{(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2} \right) \\
& - \left(n_2 \left(-\frac{\beta(1-n_2)}{(1+\beta p_2)^2} - \frac{(1+2p_2\alpha+Hn_2(1+\alpha p_2)^2)}{(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2} \right) \right) \\
& \cdot \left(\frac{\delta p_2(1+\alpha p_2)}{(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow A_2 = & mc_1 - \frac{m(1-2n_2)}{(1+\beta p_2)} + \frac{(1+\alpha p_2)mp_2}{(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2} + c_1c_2 - \frac{(1-2n_2)c_2}{(1+\beta p_2)} + \frac{(1+\alpha p_2)p_2c_2}{(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2} \\
& - \frac{\delta n_2c_1(1+2\alpha p_2+Hn_2(1+\alpha p_2)^2)}{(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2} + \frac{\delta n_2(1-2n_2)(1+2\alpha p_2+Hn_2(1+\alpha p_2)^2)}{(1+\beta p_2)(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2} \\
& - \frac{\delta n_2p_2(1+\alpha p_2)(1+2\alpha p_2+Hn_2(1+\alpha p_2)^2)}{(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^4} + \frac{\beta n_2\delta p_2(1-n_2)(1+\alpha p_2)}{(1+\beta p_2)^2(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2} \\
& + \frac{\delta n_2p_2(1+\alpha p_2)(1+2\alpha p_2+Hn_2(1+\alpha p_2)^2)}{(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow A_2 = & mc_1 + c_1c_2 - \frac{m(1-2n_2) - (1-2n_2)c_2}{(1+\beta p_2)} \\
& + \frac{(1+\alpha p_2)mp_2 + (1+\alpha p_2)p_2c_2 - \delta n_2c_1(1+2\alpha p_2+Hn_2(1+\alpha p_2)^2)}{(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2} \\
& + \frac{\beta n_2\delta p_2(1-n_2)(1+\alpha p_2)}{(1+\beta p_2)^2(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2} + \frac{\delta n_2(1-2n_2)(1+2\alpha p_2+Hn_2(1+\alpha p_2)^2)}{(1+\beta p_2)(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow A_2 = & c_1(m + c_2) - \frac{(m + c_2)(1 - 2n_2)}{(1 + \beta p_2)} \\
& + \frac{p_2(1 + \alpha p_2)(m + c_2) - \delta n_2 c_1(1 + 2\alpha p_2 + Hn_2(1 + \alpha p_2)^2)}{(1 + Hn_2(1 + \alpha p_2))^2} \\
& + \frac{\beta n_2 \delta p_2(1 - n_2)(1 + \alpha p_2)}{(1 + \beta p_2)^2(1 + Hn_2(1 + \alpha p_2))^2} + \frac{\delta n_2(1 - 2n_2)(1 + 2\alpha p_2 + Hn_2(1 + \alpha p_2)^2)}{(1 + \beta p_2)(1 + Hn_2(1 + \alpha p_2))^2}
\end{aligned}$$

Karena $A_1 > 0$ maka $A_2 > 0$ sehingga $\Delta_2 > 0$.

Maka dapat disimpulkan bahwa semua bagian real nilai eigen dari persamaan (4.30) bernilai negatif. Oleh karena itu, **teorema 4.6** terbukti dan dapat diketahui bahwa titik ekuilibrium koeksistensi $\widehat{E}_2(\widehat{n}_2, \widehat{p}_2)$ **stabil asimtotik lokal** jika dan hanya jika $c_1 + c_2 + m > \frac{(1-2n_2)}{(1+\beta p_2)} + \frac{-(1+\alpha p_2)p_2 + \delta n_2(1+2\alpha p_2 + Hn_2(1+\alpha p_2)^2)}{(1+Hn_2(1+\alpha p_2))^2}$ dan $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$ ■.

Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh maka syarat kestabilan dari titik ekuilibrium disajikan pada **tabel 4.5** berikut:

Tabel 4.5 Syarat Kestabilan Titik Ekuilibrium Sistem Persamaan (4.4)

Titik Ekuilibrium	Syarat Eksis	Keterangan	Syarat Stabil
$\widehat{E}_0(\widehat{n}_0, \widehat{p}_0) = (0,0)$	$c_1 > 1$	Stabil asimtotik lokal	Memenuhi teorema 4.4
$\widehat{E}_1(\widehat{n}_1, \widehat{p}_1) = (1 - c_1, 0)$	$c_1 < 1$	Stabil asimtotik lokal	Memenuhi teorema 4.5
$\widehat{E}_2(\widehat{n}_2, \widehat{p}_2)$	a. Syarat n_2 adalah $\delta > H(m + c_2)$ b. Syarat p_2 adalah memenuhi salah satu kemungkinan solusi	Stabil asimtotik lokal	Memenuhi teorema 4.6

	berdasarkan aturan tanda Descartes seperti pada tabel 4.3		
--	---	--	--

G. Simulasi Numerik

Pada tahap ini, model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator serta pemanenan yang terbentuk seperti dalam sistem persamaan (4.4) akan disimulasikan. Hal ini dilakukan untuk memastikan bahwa hasil perhitungan manual sesuai dengan hasil simulasi yang diperoleh serta mengetahui perilaku sistem persamaan (4.4). Aplikasi pemrograman matlab R2013a digunakan untuk simulasi penentuan penyelesaian sistem persamaan (4.4) dan hasilnya disajikan dalam bentuk grafik.

Pada simulasi ini akan dilakukan pengujian atas beberapa efek yakni efek pemanenan pada prey (c_1), efek pemanenan pada predator (c_2), efek kerjasama berburu antar predator (α) dan efek ketakutan pada prey (β) untuk mengetahui dampaknya pada titik ekuilibrium sistem persamaan (4.4). Nilai parameter yang digunakan dalam model matematika predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator serta pemanenan diperoleh dari penelitian sebelumnya.

1. Simulasi Titik Ekuilibrium Trivial

Pada bagian ini disajikan dua simulasi dengan nilai parameter c_1 yang berbeda. Selain nilai parameter c_1 , parameter lain bernilai sama. Pengambilan nilai parameter pada penelitian ini berpedoman pada penelitian sebelumnya yang kemudian disajikan dalam **Tabel 4.6** berikut:

Tabel 4.6 Nilai Parameter Titik Ekuilibrium Trivial

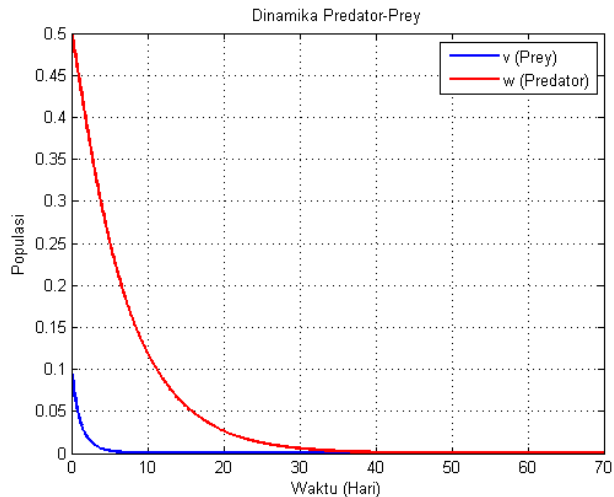
Parameter	Nilai	Sumber
H	0,9	(Belew & Melese, 2022)
δ	0,5	
m	0,1	
c_1	1,2	
	2	
c_2	0,05	
α	0,25	
β	0,2	

Berdasarkan nilai parameter pada **Tabel 4.6** dengan dua variasi nilai c_1 yakni 1,2 dan 2. Kedua nilai parameter tersebut memenuhi syarat stabil titik ekuilibrium $E_0(0,0)$ yakni $c_1 > 1$ ■.

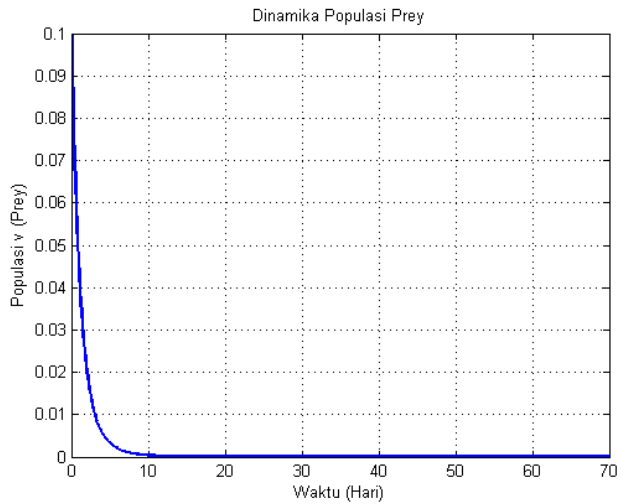
Selanjutnya akan ditunjukkan hasil simulasi titik ekuilibrium E_0 dengan menggunakan MATLAB R2013a yang disajikan dalam gambar berikut:

- a. Pada saat $c_1 = 1,2$

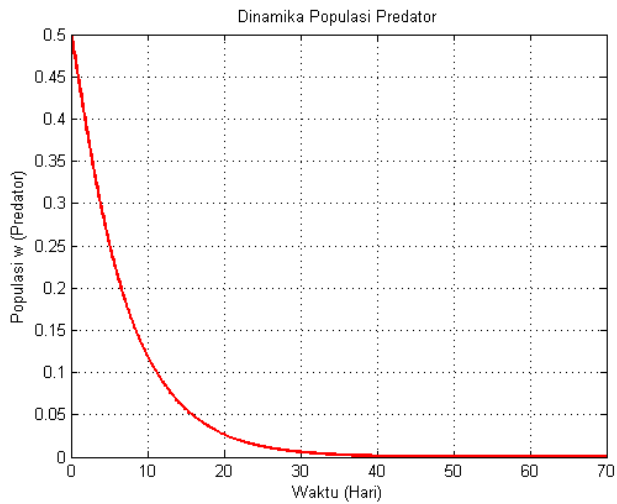
Berdasarkan hasil iterasi dengan metode Runge-Kutta pada sistem persamaan (4.11) menggunakan MATLAB R2013a diketahui bahwa solusi populasi prey menuju 0,0000 dan populasi predator menuju 0,0000. Hasil iterasi secara lengkap dapat dilihat pada **lampiran 5**. Selanjutnya, ditunjukkan hasil simulasi MATLAB R2013a dalam rentang waktu 70 hari pada gambar berikut:



Gambar 4.2 Dinamika populasi predator prey pada saat $c_1 = 1,2$



Gambar 4.3 Dinamika populasi prey pada saat $c_1 = 1,2$

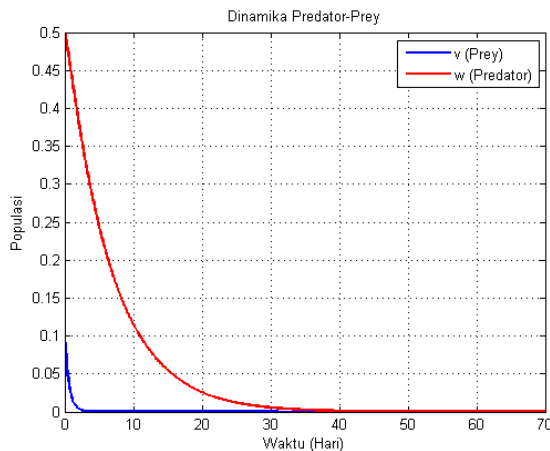


Gambar 4.4 Dinamika populasi predator pada saat $c_1 = 1,2$

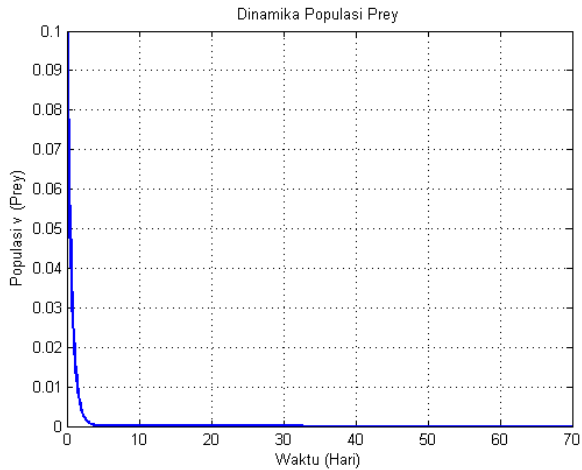
Gambar (4.2)-(4.4) menunjukkan bahwa solusi sistem selalu mengarah pada titik ekuilibrium $\widehat{E}_0 = (0,0)$. Hal ini menunjukkan bahwa titik ekuilibrium \widehat{E}_0 bersifat **stabil asimtotik lokal**.

b. Pada saat $c_1 = 2$

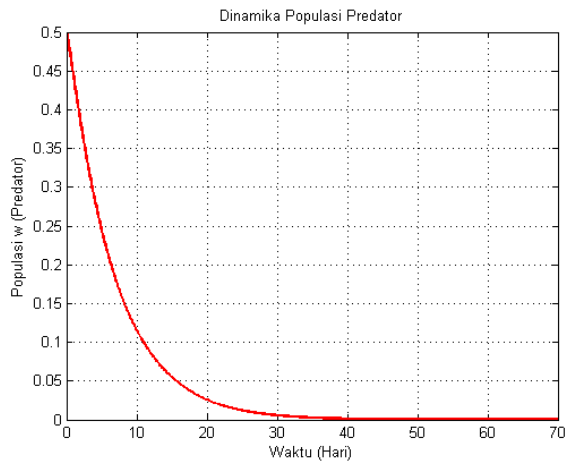
Berdasarkan hasil iterasi dengan metode Runge-Kutta pada sistem persamaan (4.11) menggunakan MATLAB R2013a diketahui bahwa solusi populasi prey menuju 0,0000 dan populasi predator menuju 0,0000. Hasil iterasi secara lengkap dapat dilihat pada **lampiran 5**. Selanjutnya, ditunjukkan hasil simulasi MATLAB R2013a dalam rentang waktu 70 hari pada gambar berikut:



Gambar 4.5 Dinamika populasi predator prey pada saat $c_1 = 2$



Gambar 4.6 Dinamika populasi prey pada saat $c_1 = 2$



Gambar 4.7 Dinamika populasi predator pada saat $c_1 = 2$

Gambar (4.5)-(4.7) menunjukkan bahwa solusi sistem selalu mengarah pada titik ekuilibrium $\widehat{E}_0 = (0,0)$. Hal ini menunjukkan bahwa titik ekuilibrium \widehat{E}_0 bersifat **stabil asimtotik lokal**.

Gambar (4.2)-(4.7) menunjukkan bahwa pada saat parameter $c_1 > 1$ solusi sistem selalu menuju pada titik ekuilibrium \widehat{E}_0 . Hal ini sesuai dengan **teorema 4.4** yang menyatakan bahwa titik ekuilibrium \widehat{E}_0 **stabil asimtotik lokal**. Titik ekuilibrium \widehat{E}_0 disebut trivial yang menunjukkan bahwa populasi predator dan prey mengalami kepunahan.

2. Simulasi Titik Ekuilibrium Aksial

Pada bagian ini disajikan tiga simulasi dengan nilai parameter c_1 yang berbeda. Selain nilai parameter c_1 , parameter lain bernilai sama. Pengambilan nilai parameter pada penelitian ini berpedoman pada penelitian sebelumnya yang kemudian disajikan dalam **tabel 4.7** berikut:

Tabel 4.7 Nilai Parameter Titik Ekuilibrium Aksial

Parameter	Nilai	Sumber
H	0,9	(Belew & Melese, 2022)
δ	0,5	

m	0,1	
c_1	0,6	
	0,7	
	0,9	
c_2	0,1	
α	0,25	
β	0,2	

Berdasarkan nilai parameter pada **tabel 4.7** dengan ketiga variasi nilai c_1 yakni 0,6; 0,7; 0,9 dan ketiga nilai parameter tersebut memenuhi syarat eksis titik ekuilibrium E_1 pada **teorema 4.2** yakni $c_1 < 1$. Selanjutnya ketiga variasi nilai parameter tersebut akan dianalisis kestabilannya berdasarkan teorema 4.5 sebagai berikut:

a. Pada saat $c_1 = 0,6$

Titik ekuilibrium $E_1 = (1 - c_1; \mathbf{0}) = (0,4; \mathbf{0})$ dikatakan **stabil** karena memenuhi kedua syarat pada **teorema 4.5** yakni:

- 1) Karena $c_1 = 0,6$ kurang dari 1, maka syarat pertama terpenuhi ■.
- 2) Karena $c_2 + m = (0,1 + 0,1) = 0,2$ lebih besar dari

$$\begin{aligned}\frac{(-1 + c_1)\delta}{(-1 + H(-1 + c_1))} &= \frac{(-1 + 0,6) \times 0,5}{(-1 + 0,9 \times (-1 + 0,6))} \\ &= \frac{-0,2}{-1,36} = 0,1471\end{aligned}$$

maka syarat kedua terpenuhi ■.

b. Pada saat $c_1 = 0,7$

Titik ekuilibrium $E_1 = (1 - c_1; \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \mathbf{3}; \mathbf{0})$ dikatakan **stabil** karena memenuhi kedua syarat pada **teorema 4.5** yakni:

- 1) Karena $c_1 = 0,7$ kurang dari 1, maka syarat pertama terpenuhi ■.
- 2) Karena $c_2 + m = (0,1 + 0,1) = 0,2$ lebih besar dari

$$\begin{aligned}\frac{(-1 + c_1)\delta}{(-1 + H(-1 + c_1))} &= \frac{(-1 + 0,7) \times 0,5}{(-1 + 0,9 \times (-1 + 0,7))} \\ &= \frac{-0,15}{-1,27} = 0,1181 \blacksquare\end{aligned}$$

maka syarat kedua terpenuhi ■.

c. Pada saat $c_1 = 0,9$

Titik ekuilibrium $E_1 = (1 - c_1; \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}; \mathbf{0})$ dikatakan **stabil** karena memenuhi kedua syarat pada **teorema 4.5** yakni:

- 1) Karena $c_1 = 0,9$ kurang dari 1, maka syarat pertama terpenuhi ■.
- 2) Karena $c_2 + m = (0,1 + 0,1) = 0,2$ lebih besar dari

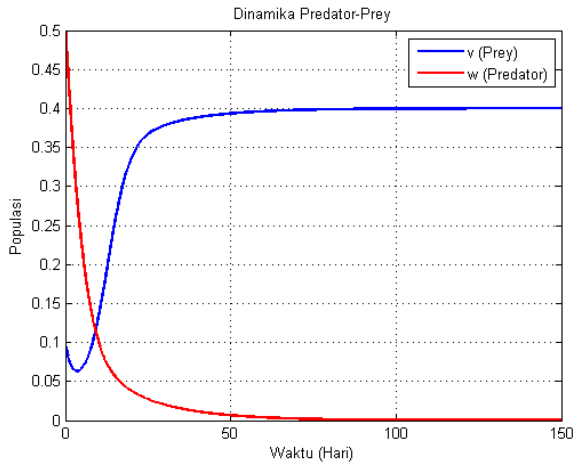
$$\begin{aligned} \frac{(-1 + c_1)\delta}{(-1 + H(-1 + c_1))} &= \frac{(-1 + 0,9) \times 0,5}{(-1 + 0,9 \times (-1 + 0,9))} \\ &= \frac{-0,05}{-1,09} = 0,0458 \end{aligned}$$

maka syarat kedua terpenuhi ■.

Selanjutnya akan ditunjukkan hasil simulasi titik ekuilibrium E_1 dengan menggunakan MATLAB R2013a yang disajikan dalam gambar berikut:

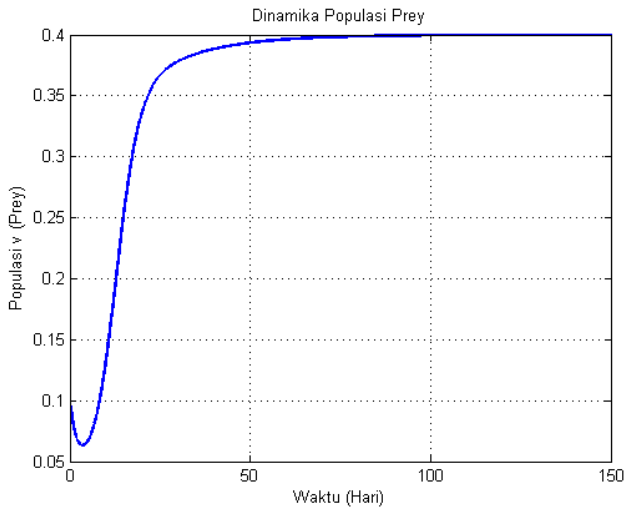
- a. Pada saat $c_1 = 0,6$

Berdasarkan hasil iterasi dengan metode Runge-Kutta pada sistem persamaan (4.11) menggunakan MATLAB R2013a diketahui bahwa solusi populasi prey menuju 0,4000 dan populasi predator menuju 0,0000. Hasil iterasi secara lengkap dapat dilihat pada **lampiran 5**. Selanjutnya, ditunjukkan hasil simulasi MATLAB R2013a dalam rentang waktu 150 hari pada gambar berikut:

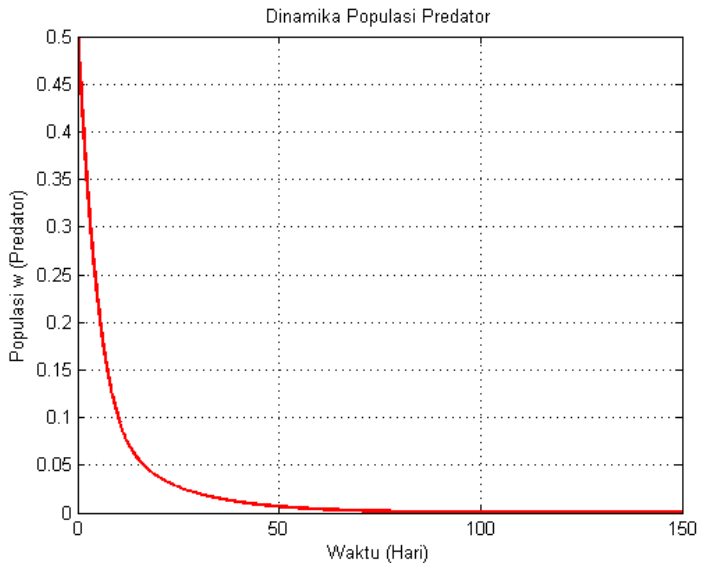


Gambar 4.8 Dinamika populasi predator prey pada saat

$$c_1 = 0,6$$



Gambar 4.9 Dinamika populasi prey pada saat $c_1 = 0,6$



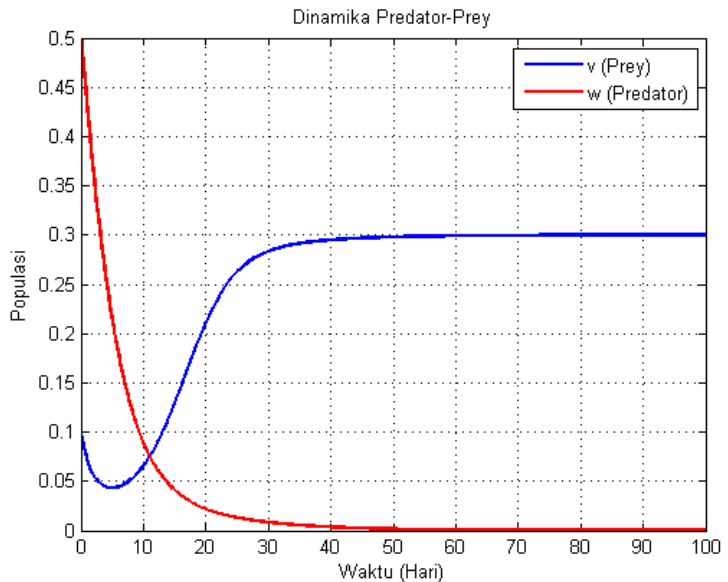
Gambar 4.10 Dinamika populasi predator pada saat $c_1 = 0,6$

Gambar (4.8)-(4.10) menunjukkan bahwa pada saat $c_1 = 0,6$ solusi selalu mengarah ke titik ekuilibrium $E_1 = (0, 4; 0)$. Hal ini menunjukkan kesesuaian antara hasil perhitungan dan simulasi dengan **teorema 4.5** yang menyatakan bahwa titik ekuilibrium E_1 **stabil asimtotik lokal**.

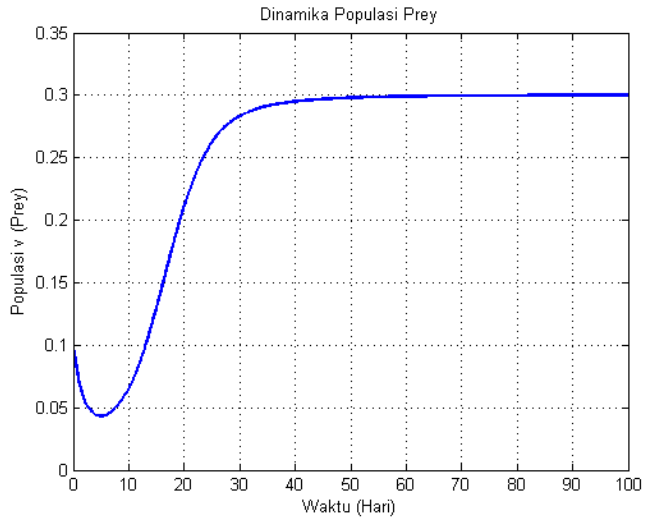
b. Pada saat $c_1 = 0,7$

Berdasarkan hasil iterasi dengan metode Runge-Kutta pada sistem persamaan (4.11) menggunakan MATLAB R2013a diketahui bahwa

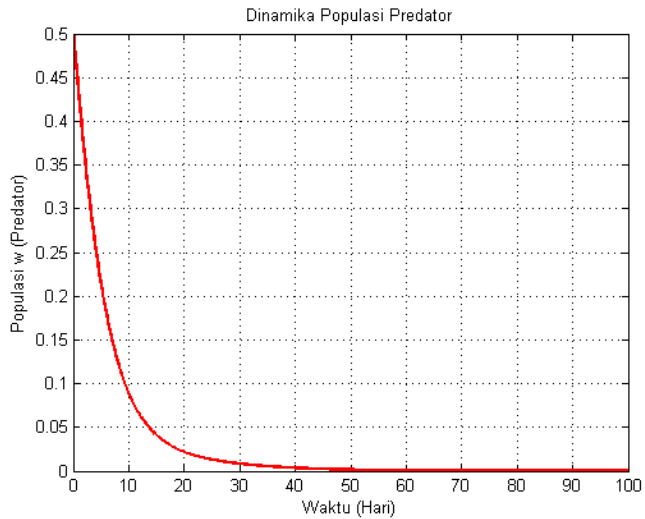
solusi populasi prey menuju 0,3000 dan populasi predator menuju 0,0000. Hasil iterasi secara lengkap dapat dilihat pada **lampiran 5**. Selanjutnya, ditunjukkan hasil simulasi MATLAB R2013a dalam rentang waktu 100 hari pada gambar berikut:



Gambar 4.11 Dinamika populasi predator prey pada saat $c_1 = 0,7$



Gambar 4.12 Dinamika populasi prey pada saat $c_1 = 0,7$



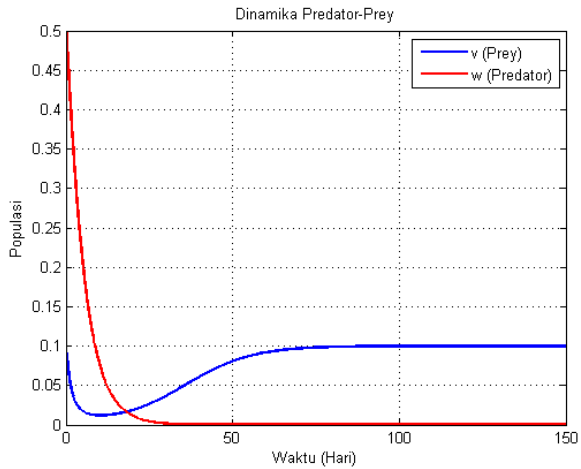
Gambar 4.13 Dinamika populasi predator pada saat $c_1 =$

0,7

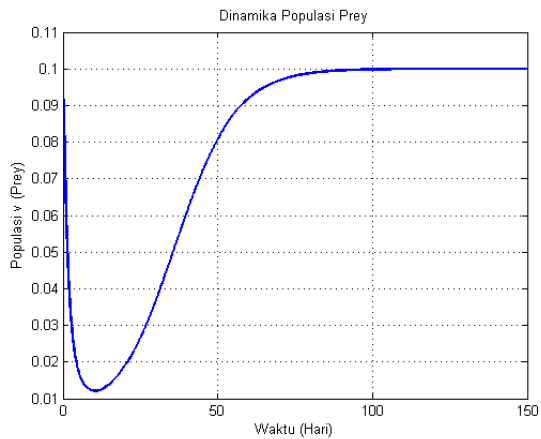
Gambar (4.11)-(4.13) menunjukkan bahwa pada saat $c_1 = 0,7$ solusi selalu mengarah ke titik ekuilibrium $E_1 = (0, 3; 0)$. Hal ini menunjukkan kesesuaian antara hasil perhitungan dan simulasi dengan **teorema 4.5** yang menyatakan bahwa titik ekuilibrium E_1 **stabil asimtotik lokal**.

- c. Pada saat $c_1 = 0,9$

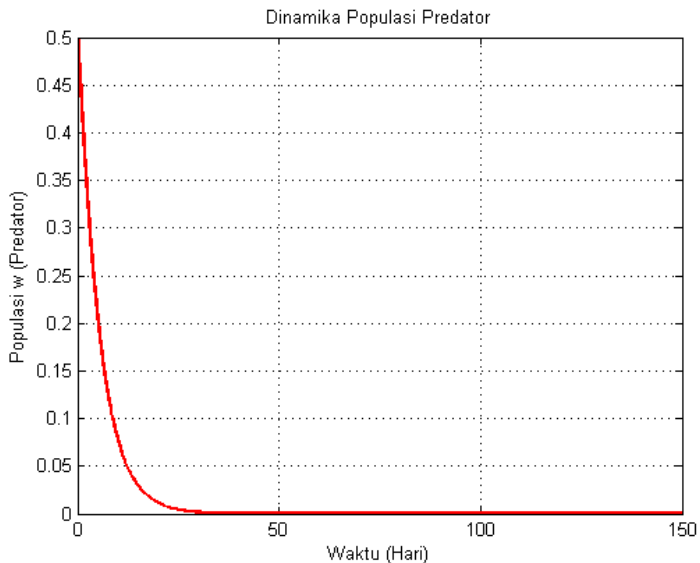
Berdasarkan hasil iterasi dengan metode Runge-Kutta pada sistem persamaan (4.11) menggunakan MATLAB R2013a diketahui bahwa solusi populasi prey menuju 0,1000 dan populasi predator menuju 0,0000. Hasil iterasi secara lengkap dapat dilihat pada **lampiran 5**. Selanjutnya, ditunjukkan hasil simulasi MATLAB R2013a dalam rentang waktu 150 hari pada gambar berikut:



Gambar 4.14 Dinamika populasi predator prey pada saat $c_1 = 0,9$



Gambar 4.15 Dinamika populasi predator prey pada saat $c_1 = 0,9$



Gambar 4.16 Dinamika populasi predator prey pada saat $c_1 = 0,9$

Gambar (4.14)-(4.16) menunjukkan bahwa pada saat $c_1 = 0,9$ solusi selalu mengarah ke titik ekuilibrium $E_1 = (0, 1; 0)$. Hal ini menunjukkan kesesuaian antara hasil perhitungan dan simulasi dengan **teorema 4.5** yang menyatakan bahwa titik ekuilibrium E_1 **stabil asimtotik lokal**.

Gambar (4.8)-(4.16) menunjukkan bahwa pada saat parameter $c_1 < 1$ solusi sistem selalu menuju

pada titik ekuilibrium \widehat{E}_1 . Hal ini sesuai dengan **teorema 4.5** yang menyatakan bahwa titik ekuilibrium \widehat{E}_1 **stabil asimtotik lokal**. Titik ekuilibrium \widehat{E}_1 disebut **aksial** yang menunjukkan bahwa populasi prey tetap hidup dalam ekosistem dan predator mengalami kepunahan.

3. Simulasi Titik Ekuilibrium Koeksistensi

Pada bagian ini disajikan dua simulasi dengan nilai parameter β yang berbeda. Selain nilai parameter β , parameter lain bernilai sama. Pengambilan nilai parameter pada penelitian ini berpedoman pada jurnal yang kemudian disajikan dalam **tabel 4.8** berikut:

Tabel 4.8 Nilai Parameter Titik Ekuilibrium Koeksistensi

Parameter	Nilai	Sumber
H	0,5	(Belew & Melese, 2022)
δ	0,5	
m	0,1	
c_1	0,35	
c_2	0,1	
α	0,5	
β	0,95	
	10	

Berdasarkan **tabel 4.8** dianalisis eksistensi titik ekuilibrium E_2 berdasarkan **teorema 4.3** sebagai berikut:

a. Pada saat $\beta = 0,95$

Eksistensi titik ekuilibrium E_2 berdasarkan parameter pada tabel 4.8 akan ditemukan berdasarkan **teorema 4.3** sebagai berikut:

\hat{p}_2 diketahui menggunakan aturan tanda descartes sehingga diperoleh,

$$0,095p^4 + 0,48p^3 + 0,853125p^2 + 0,318775p - 0,04 = 0$$

Persamaan tersebut sesuai dengan kemungkinan 5 pada tabel 4.3. Lalu diperoleh empat solusi p yakni $p = -2,2476 + 1,2195i; -2,2476 - 1,2195i; -0,6556; 0,0982$

Maka solusi p yang memenuhi aturan tanda descartes yang tunggal dan positif adalah 0,0982 sehingga nilai \hat{p}_2 adalah 0,0982. Kemudian \hat{n}_2 ada sebab memenuhi syarat yakni $\delta = 0,5$ lebih dari $H(m + c_2) = 0,5(0,1 + 0,1) = 0,1$ ■

Sehingga dapat diketahui bahwa,

$$\begin{aligned}
 n_2 &= \frac{(m + c_2)}{(1 + \alpha p)(\delta - H(m + c_2))} \\
 \Leftrightarrow n_2 &= \frac{(0,1 + 0,1)}{(1 + (0,5 \times 0,0982))(0,4)} \\
 \Leftrightarrow n_2 &= \frac{0,2}{0,41964} \\
 \Leftrightarrow n_2 &= 0,4765989896
 \end{aligned}$$

Karena syarat terpenuhi maka dapat diketahui bahwa titik ekuilibrium E_2 **eksis** dengan nilai titik ekuilibrium $E_2 = (\hat{n}_2, \hat{p}_2) = (0,4765989896; 0,0982)$.

Perhitungan manual untuk memperoleh \hat{p}_2 menggunakan aturan tanda Descartes sesuai dengan nilai parameter pada tabel 4.8 dapat dilihat pada **lampiran 3**. Berdasarkan nilai titik ekuilibrium yang sudah diketahui, titik ekuilibrium tersebut akan diperiksa kestabilannya menggunakan **teorema 4.6**.

Berdasarkan **teorema 4.6** titik ekuilibrium $\widehat{E}_2 = (0,4765989896; 0,0982)$ dikatakan **stabil** sebab memenuhi semua syarat, yakni:

1) Syarat pertama terpenuhi sebab $A_1 > 0$

Diketahui $A_1 = c_1 + c_2 + m - \frac{1-2n_2}{(1+p_2\beta)} + \frac{p_2(1+\alpha p_2) - n_2(1+2p_2\alpha + Hn_2(1+\alpha p_2)^2)\delta}{(1+Hn_2+Hn_2\alpha p_2)^2}$ sehingga,

$$\begin{aligned} & c_1 + c_2 + m - \frac{1 - 2n_2}{(1 + p_2\beta)} + \frac{p_2(1 + \alpha p_2) - n_2(1 + 2p_2\alpha + Hn_2(1 + \alpha p_2)^2)\delta}{(1 + Hn_2 + Hn_2\alpha p_2)^2} \\ &= (0,35 + 0,1 + 0,1) - \frac{1 - 2(0,4765989896)}{(1 + (0,0982)(0,95))} + \\ & \quad 0,0982(1 + (0,0982)(0,5)) - \\ & \quad \frac{(0,4765989896)(0,5) \left(\frac{1 + (0,0982) \cdot 2(0,5) +}{((0,4765989896 \times 0,5)(1 + (0,0982)(0,5))^2)} \right)}{(1 + (0,4765989896 \times 0,5)(1 + (0,0982 \times 0,5)))^2} \end{aligned}$$

$$= 0,55 - 0,042808423 - 0,1415544865$$

$$A_1 = 0,3656370905 > 0$$

Maka benar bahwa $A_1 > 0$ ■

2) Syarat kedua terpenuhi sebab $A_2 > 0$

Diketahui

$$A_2 = c_1(c_2 + m) - \frac{(c_2+m)(1-2n_2)}{(1+p_2\beta)} - \frac{\beta(n_2-1)(p_2\delta(1+p_2\alpha))}{(1+p_2\beta)^2(1+Hn_2(1+p_2\alpha))^2} +$$

$$\frac{p_2(c_2+m)(1+p_2\alpha)c_1n_2\delta(1+2p_2\alpha+Hn_2(1+p_2\alpha)^2)}{(1+Hn_2(1+p_2\alpha))^2} - \frac{p_2\delta(n_2-1)(1+p_2\alpha)(1+2p_2\alpha+Hn_2(1+p_2\alpha)^2)}{(1+Hn_2(1+p_2\alpha))^4} \text{ sehingga,}$$

$$\begin{aligned}
& c_1(c_2 + m) - \frac{(c_2 + m)(1 - 2n_2)}{(1 + p_2\beta)} - \frac{\beta(n_2 - 1)(p_2\delta(1 + p_2\alpha))}{(1 + p_2\beta)^2(1 + Hn_2(1 + p_2\alpha))^2} \\
& \quad + \frac{p_2(c_2 + m)(1 + p_2\alpha)c_1n_2\delta(1 + 2p_2\alpha + Hn_2(1 + p_2\alpha)^2)}{(1 + Hn_2(1 + p_2\alpha))^2} \\
& \quad - \frac{p_2\delta(n_2 - 1)(1 + p_2\alpha)(1 + 2p_2\alpha + Hn_2(1 + p_2\alpha)^2)}{(1 + Hn_2(1 + p_2\alpha))^4} \\
& = 0,35(0,2) - \frac{(0,2)(1 - 2(0,4765989896))}{(1 + (0,0982)(0,95))} \\
& \quad - \frac{(0,95)(0,4765989896 - 1) \left((0,0982)(0,5)(1 + (0,0982)(0,5)) \right)}{(1 + (0,0982)(0,95))^2 \left(1 + (0,5)(0,4765989896)(1 + (0,0982)(0,5)) \right)^2} \\
& \quad + \frac{(0,0982)(0,2)(1,0491)(0,0834048232)}{(1,0982 + 0,262275)} - \frac{(-0,0256989896)(1,0491)(1,360475)}{1,5625}
\end{aligned}$$

$$= -0,0257478822 + 0,0171425639 + 0,001870381 + 0,023748851$$

$$A_2 = 0,0167399478 > 0$$

Maka benar bahwa $A_2 > 0$ ■.

b. Pada saat $\beta = 10$

Eksistensi titik ekuilibrium E_2 berdasarkan parameter **pada tabel 4.8** akan ditemukan berdasarkan **teorema 4.3** sebagai berikut:

\hat{p}_2 diketahui menggunakan aturan tanda descartes sehingga diperoleh,

$$1p^4 + 4,1p^3 + 5,265p^2 + 2,0225p - 0,04 = 0$$

Persamaan tersebut sesuai dengan kemungkinan 5 pada **tabel 4.3**. Lalu diperoleh empat solusi p yakni $p = -1,8615; -1,4938; -0,7635; 0,0188$.

Maka solusi p yang memenuhi aturan tanda descartes yang tunggal dan positif adalah adalah 0,0188 sehingga nilai \hat{p}_2 adalah 0,0188. Kemudian \hat{n}_2 ada sebab memenuhi syarat yakni $\delta = 0,5$ lebih dari $H(m + c_2) = 0,5(0,1 + 0,1) = 0,1$

Sehingga dapat diketahui bahwa,

$$\begin{aligned} n_2 &= \frac{(m + c_2)}{(1 + \alpha p)(\delta - H(m + c_2))} \\ \Leftrightarrow n_2 &= \frac{(0,1 + 0,1)}{(1 + (0,5 \times 0,0188))(0,4)} \\ \Leftrightarrow n_2 &= \frac{0,2}{(1,0094)(0,4)} \\ \Leftrightarrow n_2 &= 0,4953437686 \end{aligned}$$

Karena semua syarat terpenuhi maka dapat diketahui bahwa titik ekuilibrium E_2 dikatakan eksis dengan nilai titik ekuilibrium $\widehat{E}_2 = (\widehat{n}_2, \widehat{p}_2) = (0, 4953437686; 0, 0188)$ ■.

Perhitungan manual untuk memperoleh \widehat{p}_2 menggunakan aturan tanda Descartes sesuai dengan nilai parameter pada **tabel 4.8** dapat dilihat pada **lampiran 3**. Berdasarkan nilai titik ekuilibrium yang sudah diketahui, titik ekuilibrium tersebut akan diperiksa kestabilannya menggunakan **teorema 4.6**.

Berdasarkan **teorema 4.6** titik ekuilibrium $\widehat{E}_2(0, 4953437686; 0, 0188)$ dikatakan **stabil** sebab semua syarat terpenuhi sebagai berikut:

1) Syarat pertama terpenuhi sebab $A_1 > 0$

Diketahui $A_1 = c_1 + c_2 + m - \frac{1-2n_2}{(1+p_2\beta)} + \frac{p_2(1+\alpha p_2) - n_2(1+2p_2\alpha + Hn_2(1+\alpha p_2)^2)\delta}{(1+Hn_2+Hn_2\alpha p_2)^2}$ sehingga,

$$\begin{aligned} & c_1 + c_2 + m - \frac{1 - 2n_2}{(1 + p_2\beta)} + \frac{p_2(1 + \alpha p_2) - n_2(1 + 2p_2\alpha + Hn_2(1 + \alpha p_2)^2)\delta}{(1 + Hn_2 + Hn_2\alpha p_2)^2} \\ &= (0,35 + 0,1 + 0,1) - \frac{1 - 2(0,4953437686)}{(1 + (0,0188)(10))} + \\ & \quad \frac{0,0188(1 + (0,0188)(0,5)) -}{1,5625} \\ & \quad \frac{(0,4953437686)(0,5) \left(\frac{1 + (0,0188) \cdot 2(0,5) +}{0,5 \cdot 0,4953437686 \cdot (1,0094)^2} \right)}{1,5625} \\ &= 0,55 - \frac{0,0093124628}{1,188} + \frac{0,01897672 - 0,3148281157}{1,5625} \end{aligned}$$

$$= 0,55 - 0,0078387734 - 0,1893448932$$

$$A_1 = 0,352816334 > 0$$

Maka benar bahwa $A_1 > 0$ ■

2) Syarat kedua terpenuhi sebab $A_2 > 0$

Diketahui

$$A_2 = c_1(c_2 + m) - \frac{(c_2 + m)(1 - 2n_2)}{(1 + p_2\beta)} - \frac{\beta(n_2 - 1)(p_2\delta(1 + p_2\alpha))}{(1 + p_2\beta)^2(1 + Hn_2(1 + p_2\alpha))^2} +$$

$$\frac{p_2(c_2 + m)(1 + p_2\alpha)c_1n_2\delta(1 + 2p_2\alpha + Hn_2(1 + p_2\alpha)^2)}{(1 + Hn_2(1 + p_2\alpha))^2} - \frac{p_2\delta(n_2 - 1)(1 + p_2\alpha)(1 + 2p_2\alpha + Hn_2(1 + p_2\alpha)^2)}{(1 + Hn_2(1 + p_2\alpha))^4} \text{ sehingga,}$$

$$c_1(c_2 + m) - \frac{(c_2 + m)(1 - 2n_2)}{(1 + p_2\beta)} - \frac{\beta(n_2 - 1)(p_2\delta(1 + p_2\alpha))}{(1 + p_2\beta)^2(1 + Hn_2(1 + p_2\alpha))^2}$$

$$+ \frac{p_2(c_2 + m)(1 + p_2\alpha)c_1n_2\delta(1 + 2p_2\alpha + Hn_2(1 + p_2\alpha)^2)}{(1 + Hn_2(1 + p_2\alpha))^2}$$

$$- \frac{p_2\delta(n_2 - 1)(1 + p_2\alpha)(1 + 2p_2\alpha + Hn_2(1 + p_2\alpha)^2)}{(1 + Hn_2(1 + p_2\alpha))^4}$$

$$\begin{aligned}
&= 0,35 \cdot 0,2 - \frac{(0,2)(1 - 2 \cdot 0,4953437686)}{(1 + 0,0188 \cdot 10)} - \frac{10(0,4953437686 - 1)(0,0094(1,0094))}{(1,188)^2(1 + 0,5 \cdot 0,4953437686(1,0094))^2} \\
&+ \frac{0,0188(0,2)(1,0094)0,35 \cdot 0,4953437686 \cdot 0,5}{(1,0188 + 0,5 \cdot 0,4953437686(1,0094))^2} - \frac{0,0094 \cdot (0,4953437686 - 1)(1,0094)}{(1,0188 + 0,5 \cdot 0,4953437686(1,0094))^2} \\
&= 0,07 - \frac{0,0018624926}{1,188} - \frac{(-5,046562314)(0,00948836)}{2,205225} \\
&\quad + \frac{(0,003795344)(0,0866851595)(1,27115)}{1,5625} - \frac{(-0,00478836)(1,27115)}{2,44140625} \\
&= 0,07 - 0,0015677547 + 0,0217137027 + 0,0002676533 + 0,0249312207
\end{aligned}$$

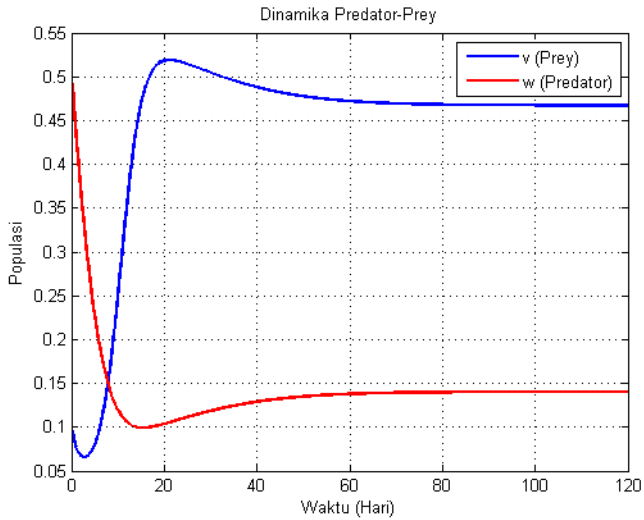
$$A_2 = 0,115344822 > 0$$

Maka benar bahwa $A_2 > 0$ ■.

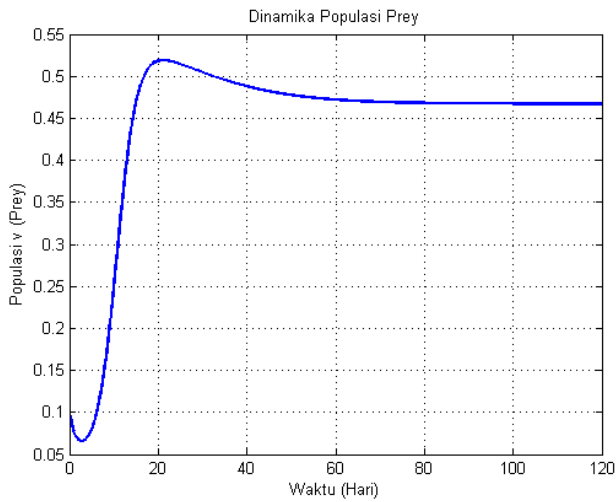
Selanjutnya akan ditunjukkan hasil simulasi titik ekuilibrium E_2 dengan menggunakan MATLAB R2013a yang disajikan dalam gambar berikut:

- a. Pada saat $\beta = 0,95$

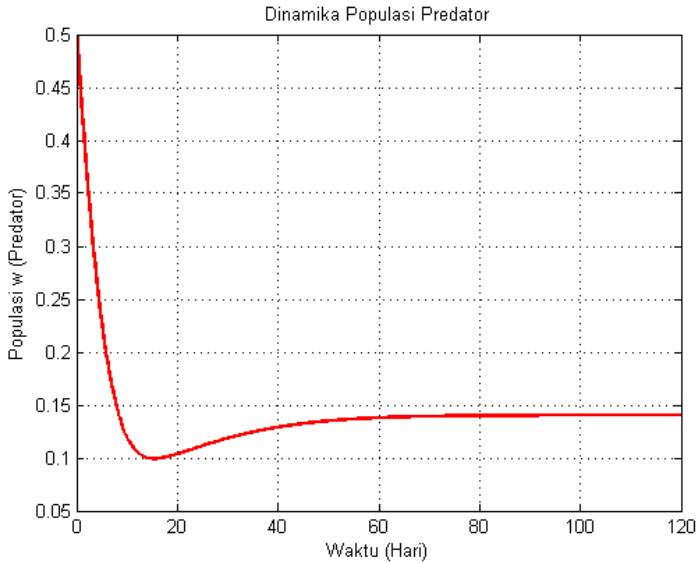
Berdasarkan hasil iterasi dengan metode Runge-Kutta pada sistem persamaan (4.11) menggunakan MATLAB R2013a diketahui bahwa solusi populasi prey menuju 0,4673 dan populasi predator menuju 0,1403. Hasil iterasi secara lengkap dapat dilihat pada **lampiran 5**. Selanjutnya, ditunjukkan hasil simulasi MATLAB R2013a dalam rentang waktu 120 hari pada gambar berikut:



Gambar 4.17 Dinamika populasi predator prey pada saat $\beta = 0,95$



Gambar 4.18 Dinamika populasi prey pada saat $\beta = 0,95$



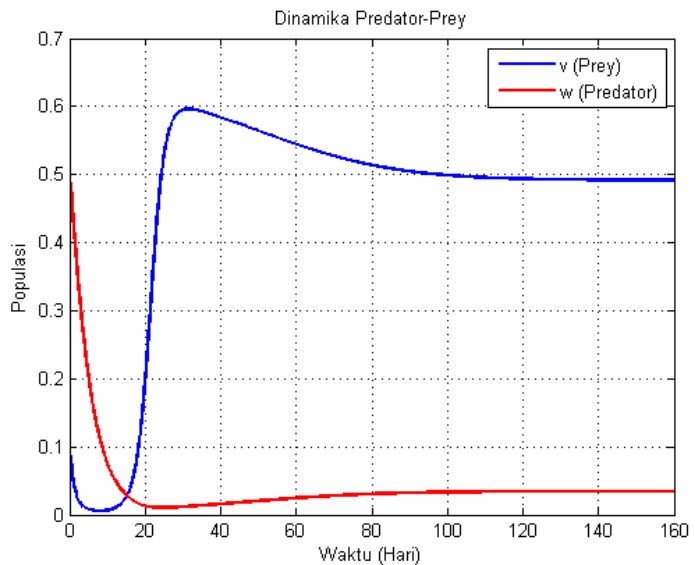
Gambar 4.19 Dinamika populasi predator pada saat $\beta = 0,95$

Gambar (4.17)-(4.19) menunjukkan bahwa solusi sistem menuju titik ekuilibrium $\widehat{E}_2 = (0,4673; 0,1403)$. Hal ini menunjukkan kesesuaian antara simulasi dengan **teorema 4.6** yang menyatakan bahwa titik ekuilibrium E_2 **stabil asimtotik lokal**.

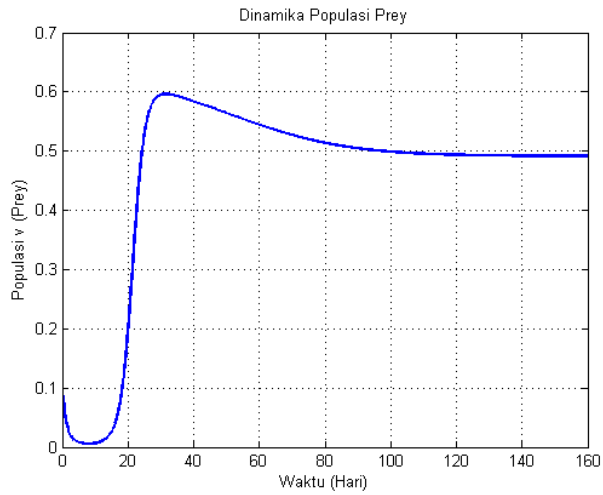
b. Pada saat $\beta = 10$

Berdasarkan hasil iterasi dengan metode Runge-Kutta pada sistem persamaan (4.11) menggunakan MATLAB

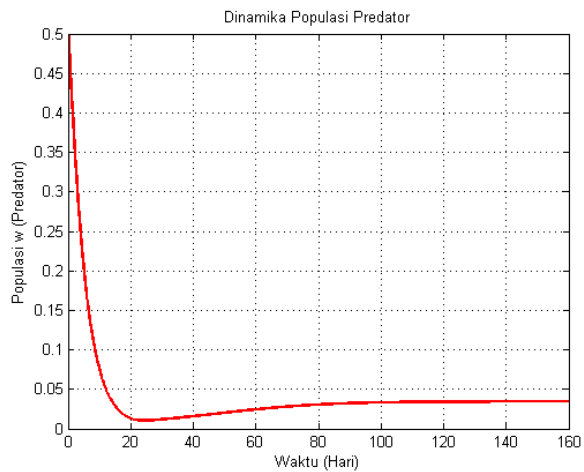
R2013a diketahui bahwa solusi populasi prey menuju 0,4917 dan populasi predator menuju 0,0345. Hasil iterasi secara lengkap dapat dilihat pada **lampiran 5**. Selanjutnya, ditunjukkan hasil simulasi MATLAB R2013a dalam rentang waktu 160 hari pada gambar berikut:



Gambar 4.20 Dinamika populasi predator prey pada saat $\beta = 10$



Gambar 4.21 Dinamika populasi prey pada saat $\beta = 10$



Gambar 4.22 Dinamika populasi predator pada saat $\beta = 10$

Gambar (4.20)-(4.22) menunjukkan bahwa solusi sistem menuju titik ekuilibrium $\widehat{E}_2 = (0, 4917; 0, 0345)$. Hal ini menunjukkan kesesuaian antara simulasi dengan **teorema 4.6** yang menyatakan bahwa titik ekuilibrium E_2 **stabil asimtotik lokal**.

Berdasarkan **Gambar (4.17)-(4.22)** dapat diketahui bahwa peningkatan kerjasama berburu antar predator (α) dari 0,25 menjadi 0,5 serta efek ketakutan pada prey (β) dari 0,5 menjadi 0,95 dan 10 menyebabkan populasi predator dan prey dapat mempertahankan eksistensinya di lingkungan dan bisa hidup bersama atau berkoeksistensi. Kemudian pada saat $\beta = 10$, populasi prey meningkat dan populasi predator menurun dibandingkan ketika $\beta = 0,95$.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dari model predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator serta pemanenan diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Berdasarkan asumsi-asumsi dalam penelitian ini, dibentuk model predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator serta pemanenan, yaitu

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n(1-n)}{1+\beta p} - \frac{(1+\alpha p)pn}{1+Hn(1+\alpha p)} - c_1 n$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\delta(1+\alpha p)np}{1+Hn(1+\alpha p)} - mp - c_2 p$$

2. Model predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator serta pemanenan yang disajikan dalam sistem persamaan (4.4) memiliki tiga titik ekuilibrium, yakni
 - a. Titik ekuilibrium trivial yang dituliskan dengan $\widehat{E}_0(\widehat{n}_0, \widehat{p}_0) = (0,0)$ bersifat stabil asimtotik lokal apabila $c_1 > 1$.

- b. Titik ekuilibrium aksial yang dituliskan dengan $\widehat{E}_1(\widehat{n}_1, \widehat{p}_1) = (1 - c_1, 0)$ bersifat stabil asimtotik lokal apabila $c_1 < 1$.
- c. Titik ekuilibrium koeksistensi yang dituliskan dengan $\widehat{E}_2(\widehat{n}_2, \widehat{p}_2)$ bersifat stabil asimtotik lokal dengan \widehat{n}_2 ada apabila $\delta > H(m + c_2)$ dan \widehat{p}_2 ada apabila memenuhi salah satu kemungkinan pada tabel kemungkinan solusi p_2 dengan aturan tanda Descartes.
3. Berdasarkan hasil simulasi numerik menggunakan *software* MATLAB R2013a dapat diketahui bahwa pada saat efek pemanenan pada populasi prey lebih dari satu, solusi sistem menuju titik ekuilibrium \widehat{E}_0 sehingga dapat diketahui bahwa titik ekuilibrium \widehat{E}_0 bersifat stabil asimtotik lokal. Hal ini menunjukkan bahwa untuk waktu yang cukup lama populasi predator dan prey akan punah. Kemudian pada saat efek pemanenan pada populasi prey kurang dari satu, solusi sistem menuju titik ekuilibrium \widehat{E}_1 sehingga titik ekuilibrium \widehat{E}_1 bersifat stabil asimtotik lokal. Hal ini menunjukkan bahwa populasi prey dapat mempertahankan eksistensinya di dalam ekosistem namun populasi predator akan punah.

Kemudian pada saat kerjasama berburu antar predator (α) dan efek ketakutan pada prey (β) ditingkatkan, solusi sistem menuju titik ekuilibrium \widehat{E}_2 sehingga titik ekuilibrium \widehat{E}_2 bersifat stabil asimtotik lokal. Hal ini menunjukkan bahwa untuk waktu yang lama populasi predator dan prey dapat berkoeksistensi.

B. Saran

Model predator prey dengan efek ketakutan pada prey dan kerjasama berburu antar predator serta pemanenan pada penelitian ini hanya dianalisis kestabilan lokalnya saja. Oleh karena itu, penulis menyarankan untuk dilakukan pengkajian lebih mendalam mengenai kestabilan globalnya sehingga berlaku secara umum.

Daftar Pustaka

- A. Yanwar. (2019). *Seri Sains Ekosistem* (Sari Kusumaningrum (ed.)). ALPRIN.
- Alligood, K. T., Sauer, T. D., & Yorke, J. A. (1996). *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*.
- Amara, A. D., & Savitri, D. (2022). Analisis Dinamik Model Predator Prey dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dan Efek Ketakutan. *10(01)*, 140–149.
- Belew, B., & Melese, D. (2022). Modeling and Analysis of Predator-Prey Model with Fear Effect in Prey and Hunting Cooperation among Predators and Harvesting. *Journal of Applied Mathematics*, 2022. <https://doi.org/10.1155/2022/2776698>
- Boyce, W. ., & DiPrima, R. . (2001). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (7th Editio). John Wiley & Sons, Inc.
- Chapra, S. C., & Chanale, R. P. (2010). Numerical Methods for Engineers. In *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math. <https://doi.org/10.1201/9781420010244>
- Christophe Boesch. (1994). Cooperative Hunting in Wild Chimpanze. *Animal Behaviour*.
- Creel, S., & Creel, N. M. (1995). Communal hunting and pack size in African wild dogs, *Lycaon pictus*. *Animal Behaviour*, 50(5), 1325–1339. [https://doi.org/10.1016/0003-3472\(95\)80048-4](https://doi.org/10.1016/0003-3472(95)80048-4)
- David Mech, L. (2012). Is science in danger of sanctifying the wolf? *Biological Conservation*, 150(1), 143–149. <https://doi.org/10.1016/j.biocon.2012.03.003>
- Edi Cahyono. (2013). *Pemodelan Matematika* (Cetakan Pe).

Graha Ilmu.

- Elliott, K. H., Betini, G. S., & Norris, D. R. (2017). Fear creates an Allee effect: Experimental evidence from seasonal populations. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, *284*(1857), 2–7. <https://doi.org/10.1098/rspb.2017.0878>
- Evers, C., Starr, L., Starr, C., & Ralph, T. (2013). *Biologi: Kesatuan dan Keragaman Makhluk Hidup* (Akliia Suslia (ed.); 12th ed.). Salemba Teknika.
- Finizio, N., & Ladas, G. (1982). *An Introduction to Differential Equations with Difference Equations, Fourier Series and Partial Difference Equations*. Wadsworth Publishing Company.
- Gantmacher, F. . (1959). The Theory of Matrices. In *The Theory of Matrices*. Chelsea Publishing Company. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-99234-6>
- Hector, D. P. (1986). Cooperative Hunting and its Relationship to Foraging Success and Prey Size in an Avian Predator. *Ethology*, *73*(3), 247–257. <https://doi.org/10.1111/j.1439-0310.1986.tb00915.x>
- Holling, C. S. (1959). The Components of Predation as Revealed by a Study of Small-Mammal Predation of the European Pine Sawfly. *The Canadian Entomologist*, *91*(5), 293–320. <https://doi.org/10.4039/Ent91293-5>
- Howard Anton, C. R. (2004). *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi* (Amalia Safitri (ed.); Kedelapan). Erlangga.
- Lausanne, U. De, & Brook, S. (1989). Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence. *Journal of Theoretical Biology*, *139*, 311–326.
- Murray, J. D. (2001). *Mathematical Biology I An Introduction*.

Springer.

- Ndii, M., & Cendana, U. N. (2019). *Pemodelan Matematika Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit: Teori , Aplikasi , dan Numerik. February.*
- Olsder, G. J., & Woude, J. van der. (2003). *Mathematical Systems Theory* (Second, Vol. 11). Delft University Press.
- Pal, S., Pal, N., & Chattopadhyay, J. (2018). Hunting Cooperation in a Discrete-Time Predator-Prey System. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 28(7). <https://doi.org/10.1142/S0218127418500839>
- Pal, S., Pal, N., Samanta, S., & Chattopadhyay, J. (2019a). Effect of hunting cooperation and fear in a predator-prey model. *Ecological Complexity*, 39(March), 100770. <https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2019.100770>
- Pal, S., Pal, N., Samanta, S., & Chattopadhyay, J. (2019b). Fear effect in prey and hunting cooperation among predators in a Leslie-Gower model. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 16(5), 5146–5179. <https://doi.org/10.3934/mbe.2019258>
- Panday, P., Pal, N., Samanta, S., & Chattopadhyay, J. (2018). Stability and Bifurcation Analysis of a Three-Species Food Chain Model with Fear. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 28(1), 1–20. <https://doi.org/10.1142/S0218127418500098>
- Perko, L. (2001). *Equations and Dynamical Systems.*
- Putra, M. A. . D., Firdaus, E. M., & Findasari. (2023). *Analisis Dinamik Model Predator-Prey dengan Pemanenan Linear pada Kedua Populasi.* 4(2), 52–56.
- Ripple, W. J. (2014). *Wolves and the Ecology of Fear: Can Predation Risk Structure Ecosystems?* 3568(January).

[https://doi.org/10.1641/0006-3568\(2004\)054](https://doi.org/10.1641/0006-3568(2004)054)

- Ross, S. L. (1984). *Differential equations 3rd edition Shepley L.Ross.pdf* (pp. 416–419). John Wiley & Sons, Inc.
- Saragih, M. J., Hidayat, D., & Tamba, K. P. (2019). Implikasi Pendidikan Yang Berpusat Pada Kristus Dalam Kelas Matematika [the Implications of Christ-Center Education for Mathematics Classes]. *JOHME: Journal of Holistic Mathematics Education*, 2(2), 97. <https://doi.org/10.19166/johme.v2i2.1695>
- Sher, A., & Molles Jr, M. C. (2022). Ecology: Concepts and Applications. In *Universitas Nusantara PGRI Kediri* (Ninth Edit, Vol. 01). Mc Graw Hill.
- Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Books Publishing.
- Tao, Y., Wang, X., & Song, X. (2011). Effect of prey refuge on a harvested predator-prey model with generalized functional response. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(2), 1052–1059. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.05.026>
- Teixeira Alves, M., & Hilker, F. M. (2017). Hunting cooperation and Allee effects in predators. *Journal of Theoretical Biology*, 419(February), 13–22. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2017.02.002>
- Tjang Daniel Chandra, R. R. (2019). *Metode dan Model Matematika*. FIP Universitas Muhammadiyah Jakarta.
- Wang, X. (2004). A simple proof of Descartes's rule of signs. *American Mathematical Monthly*, 111(6), 525–526. <https://doi.org/10.2307/4145072>
- Widowati, S. (2007). *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. FMIPA Univeristas Diponegoro.

<https://www.slideshare.net/rukmonobudi/pemodelan-matematika-pendulum>

Wiggins, S. (2003). Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. In *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (Issue June). Springer New York Dordrecht Heidelberg London. <https://doi.org/10.1007/b97481>

Lampiran

Lampiran 1

Perhitungan Manual untuk Menemukan Persamaan Polinomial guna Menemukan p_2

$$p = \frac{(1 - n) - c_1(1 + \beta p) + (1 - n)Hn(1 + \alpha p) - Hnc_1(1 + \alpha p)(1 + \beta p)}{(1 + \alpha p)(1 + \beta p)}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{\left(1 - \frac{(m + c_2)}{(1 + \alpha p)(\delta - H(m + c_2))}\right) - c_1(1 + \beta p) - H \frac{(m + c_2)}{(1 + \alpha p)(\delta - H(m + c_2))} c_1(1 + \alpha p)(1 + \beta p) + \left(1 - \frac{(m + c_2)}{(1 + \alpha p)(\delta - H(m + c_2))}\right) H \frac{(m + c_2)}{(1 + \alpha p)(\delta - H(m + c_2))} (1 + \alpha p)}{(1 + \alpha p)(1 + \beta p)}$$

$$\Leftrightarrow p(1 + \alpha p) \cdot (1 + \beta p) = \frac{[(1 + \alpha p)(\delta - H(m + c_2)) - (m + c_2)] + H(1 + \alpha p)(m + c_2)[(1 + \alpha p)(\delta - H(m + c_2)) - (m + c_2)] - c_1(1 + \beta p)(1 + \alpha p)(\delta - H(m + c_2)) - Hc_1(1 + \beta p)(1 + \alpha p)(m + c_2)}{(1 + \alpha p)(\delta - H(m + c_2))}$$

$$\Leftrightarrow (p + \alpha p^2 + \beta p^2 + \alpha\beta p^3)(1 + \alpha p)(\delta - H(m + c_2)) =$$

$$\begin{aligned} & [(1 + \alpha p)(\delta - H(m + c_2)) - (m + c_2)] + H(1 + \alpha p)(m + c_2)[(1 + \alpha p)(\delta - H(m + c_2)) - (m + c_2)] \\ & - c_1(1 + \beta p)(1 + \alpha p)(\delta - H(m + c_2)) - Hc_1(1 + \beta p)(1 + \alpha p)(m + c_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & p\delta - pH(m + c_2) + p^2\alpha\delta - p^2H\alpha(m + c_2) + p^2\delta(\alpha + \beta) - p^2H(m + c_2)(\alpha + \beta) + p^3\alpha\delta(\alpha + \beta) \\ & - p^3H\alpha(m + c_2)(\alpha + \beta) + p^3\alpha\beta\delta - p^3H\alpha\beta(m + c_2) + p^4\alpha^2\beta\delta - p^4H\alpha^2\beta(m + c_2) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta - H(m + c_2) + p\alpha\delta - pH\alpha(m + c_2) - m - c_2 + Hm\delta + Hc_2\delta + pHm\alpha\delta + pHc_2\alpha\delta - H^2m(m + c_2) \\ & - H^2c_2(m + c_2) - pH^2m\alpha(m + c_2) - pH^2c_2\alpha(m + c_2) + pHm\alpha\delta + pHc_2\alpha\delta \\ & + p^2Hm\alpha^2\delta + p^2Hc_2\alpha^2\delta - pH^2m\alpha(m + c_2) - pH^2c_2\alpha(m + c_2) - p^2H^2\alpha^2m(m + c_2) \\ & - p^2H^2\alpha^2c_2(m + c_2) - Hm^2 - Hmc_2 - Hmc_2 - pHm^2\alpha - pHmc_2\alpha - Hmc_2 - Hc_2^2 \\ & - pHm\alpha c_2 - pH\alpha c_2^2 - c_1\delta - pc_1\delta(\alpha + \beta) - p^2c_1\delta\alpha\beta + Hc_1(m + c_2) \\ & + pHc_1(m + c_2)(\alpha + \beta) + p^2\alpha\beta Hc_1(m + c_2) - Hc_1m - pHc_1m(\alpha + \beta) - p^2Hc_1m\alpha\beta \\ & - Hc_1c_2 - pHc_1c_2(\alpha + \beta) - p^2Hc_1c_2\alpha\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow & p\delta - pH(m + c_2) + p^2\alpha\delta - p^2H\alpha(m + c_2) + p^2\delta(\alpha + \beta) - p^2H(m + c_2)(\alpha + \beta) + p^3\alpha\delta(\alpha + \beta) \\
& - p^3H\alpha(m + c_2)(\alpha + \beta) + p^3\alpha\beta\delta - p^3H\alpha\beta(m + c_2) + p^4\alpha^2\beta\delta - p^4H\alpha^2\beta(m + c_2) - \delta \\
& + H(m + c_2) - p\alpha\delta + pH\alpha(m + c_2) + m + c_2 - Hm\delta - Hc_2\delta - pHm\alpha\delta - pHc_2\alpha\delta \\
& + H^2m(m + c_2) + H^2c_2(m + c_2) + pH^2m\alpha(m + c_2) + pH^2c_2\alpha(m + c_2) - pHm\alpha\delta \\
& - pHc_2\alpha\delta - p^2Hm\alpha^2\delta - p^2Hc_2\alpha^2\delta + pH^2m\alpha(m + c_2) + pH^2c_2\alpha(m + c_2) \\
& + p^2H^2\alpha^2m(m + c_2) + p^2H^2\alpha^2c_2(m + c_2) + Hm^2 + Hmc_2 + Hmc_2 + pHm^2\alpha \\
& + pHmc_2\alpha + Hmc_2 + Hc_2^2 + pHm\alpha c_2 + pH\alpha c_2^2 + c_1\delta + pc_1\delta(\alpha + \beta) + p^2c_1\delta\alpha\beta \\
& - Hc_1(m + c_2) - pHc_1(m + c_2)(\alpha + \beta) - p^2\alpha\beta Hc_1(m + c_2) + Hc_1m + pHc_1m(\alpha + \beta) \\
& + p^2Hc_1m\alpha\beta + Hc_1c_2 + pHc_1c_2(\alpha + \beta) + p^2Hc_1c_2\alpha\beta = 0
\end{aligned}$$

Maka dapat diperoleh $a_4p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0$

dengan,

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\delta + H(m + c_2) + m + c_2 - Hm\delta - Hc_2\delta + H^2m(m + c_2) + H^2c_2(m + c_2) + H \\
&\quad + c_1\delta - Hc_1(m + c_2) + Hc_1m + Hc_1c_2 \\
\Leftrightarrow a_0 &= -\delta + H(m + c_2) + c_1\delta - Hc_1(m + c_2) + m + c_2 - Hm\delta - Hc_2\delta \\
&\quad + H^2m(m + c_2) + H^2c_2(m + c_2) + Hm^2 + Hmc_2 + Hmc_2 \\
&\quad + Hmc_2 + Hc_2^2 + Hc_1(m + c_2) \\
\Leftrightarrow a_0 &= (1 - c_1)(H(m + c_2) - \delta) + (m + c_2) - Hm\delta - Hc_2\delta + H^2m(m + c_2) \\
&\quad + H^2c_2(m + c_2) + Hm^2 + Hmc_2 + Hmc_2 + Hmc_2 + Hc_2^2 \\
&\quad + Hc_1(m + c_2) \\
\Leftrightarrow a_0 &= (1 - c_1)(H(m + c_2) - \delta) + (m + c_2) - H\delta(m + c_2) + H^2(m + c_2)^2 + Hm^2 \\
&\quad + Hmc_2 + Hmc_2 + Hmc_2 + Hc_2^2 + Hc_1(m + c_2) \\
\Leftrightarrow a_0 &= (1 - c_1)(H(m + c_2) - \delta) + (m + c_2) + Hm^2 + H^2(m + c_2)^2 + Hmc_2 + Hmc_2 \\
&\quad + Hmc_2 + Hc_2^2 + H(m + c_2)(c_1 - \delta) \\
\therefore a_0 &= (1 - c_1)(H(m + c_2) - \delta) + (m + c_2) + H(m + c_2)(c_1 - \delta) + H(m^2 + c_2^2) \\
&\quad + H^2(m + c_2)^2 + Hmc_2 + Hmc_2 + Hmc_2
\end{aligned}$$

$$a_1 = \delta - H(m + c_2) - \alpha\delta + H\alpha(m + c_2) - Hm\alpha\delta - Hc_2\alpha\delta + H^2m\alpha(m + c_2) + H^2c_2\alpha(m + c_2) - Hm\alpha\delta - Hc_2\alpha\delta + H^2m\alpha(m + c_2) - H^2c_2\alpha(m + c_2) + Hm^2\alpha + Hmc_2\alpha + Hmc_2\alpha + H\alpha c_2^2 + c_1\delta(\alpha + \beta) - Hc_1(m + c_2)(\alpha + \beta) + Hc_1m(\alpha + \beta) + Hc_1c_2(\alpha + \beta)$$

$$\Leftrightarrow a_1 = \delta - H(m + c_2) - \alpha\delta + H\alpha(m + c_2) - H\alpha\delta(m + c_2) + H^2\alpha(m + c_2)^2 - H\alpha\delta(m + c_2) + H^2m\alpha(m + c_2) - H^2c_2\alpha(m + c_2) + Hm^2\alpha + 2Hmc_2\alpha + H\alpha c_2^2 + c_1\delta(\alpha + \beta)$$

$$\therefore a_1 = \delta - H(m + c_2) - \alpha\delta + H\alpha(m + c_2) - H\alpha\delta(m + c_2) + H^2\alpha(m + c_2)^2 - H\alpha\delta(m + c_2) + H^2\alpha(m + c_2)(m - c_2) + Hm^2\alpha + 2Hmc_2\alpha + H\alpha c_2^2 + c_1\delta(\alpha + \beta)$$

$$a_2 = \alpha\delta - H\alpha(m + c_2) + \delta(\alpha + \beta) - H(m + c_2)(\alpha + \beta) - Hm\alpha^2\delta - Hc_2\alpha^2\delta + H^2\alpha^2m(m + c_2) + H^2\alpha^2c_2(m + c_2) + c_1\delta\alpha\beta - \alpha\beta Hc_1(m + c_2) + Hc_1m\alpha\beta + Hc_1c_2\alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow a_2 = \alpha\delta(1 + c_1\beta) - H\alpha(m + c_2) + \delta(\alpha + \beta) - H(m + c_2)(\alpha + \beta) - H\alpha^2\delta(m + c_2) + H^2\alpha^2(m + c_2)^2 - \alpha\beta Hc_1(m + c_2) + Hc_1m\alpha\beta + Hc_1c_2\alpha\beta$$

$$\begin{aligned} \therefore a_2 = & \alpha\delta(1 + c_1\beta) + H^2\alpha^2(m + c_2)^2 + \delta(\alpha + \beta) - H(m + c_2)(2\alpha + \beta) - H\alpha(m + c_2)(\alpha\delta + \beta c_1) \\ & + Hc_1\alpha\beta(m + c_2) \end{aligned}$$

$$a_3 = \alpha\delta(\alpha + \beta) - H\alpha(\alpha + \beta)(m + c_2) + \alpha\beta\delta - H\alpha\beta(m + c_2)$$

$$\Leftrightarrow a_3 = \alpha\delta(\beta + (\alpha + \beta)) - H\alpha(m + c_2)(\beta + (\alpha + \beta))$$

$$\therefore a_3 = \alpha(\alpha + 2\beta)(\delta - H(m + c_2))$$

$$a_4 = \beta\alpha^2\delta - H\alpha^2\beta(m + c_2)$$

$$\therefore a_4 = \beta\alpha^2(\delta - H(m + c_2))$$

Lampiran 2

Perhitungan Aturan Tanda Descartes untuk Mencari Kemungkinan Akar Tunggal Positif

Persamaan polinomial p_2

$$a_4p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0$$

Kemungkinan 1: $a_4p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0$

a. $f(p) = a_4p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0$

Dapat diketahui bahwa $u = 0$. Maka $u - np = 0 \Leftrightarrow np = 0$.

b. $f(-p) = a_4(-p)^4 + a_3(-p)^3 + a_2(-p)^2 + a_1(-p) + a_0 = 0$

$$f(-p) = a_4p^4 - a_3p^3 + a_2p^2 - a_1p + a_0 = 0$$

Dapat diketahui bahwa $v = 4$. Maka,

$$\begin{array}{lll} v - nq = 0 & v - nq = 2 & v - nq = 4 \\ 4 - nq = 0 & 4 - nq = 2 & 4 - nq = 4 \\ nq = 4 & nq = 2 & nq = 0 \end{array}$$

Sehingga,

Real		Imajiner	Total
+	-		
0	0	4	4
0	2	2	4
0	4	0	4

Kemungkinan 2: $a_4p^4 + a_3p^3 - a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0$

a. $f(p) = a_4p^4 + a_3p^3 - a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0$

Dapat diketahui bahwa $u = 2$. Maka,

$$\begin{array}{ll}
 u - np = 0 & u - np = 2 \\
 2 - np = 0 & 2 - np = 2 \\
 np = 2 & np = 0
 \end{array}$$

b. $f(-p) = a_4(-p)^4 + a_3(-p)^3 - a_2(-p)^2 + a_1(-p) + a_0 = 0$

$$f(-p) = a_4p^4 - a_3p^3 - a_2p^2 - a_1p + a_0 = 0$$

Dapat diketahui bahwa $v = 2$. Maka,

$$\begin{array}{ll}
 v - nq = 0 & v - nq = 2 \\
 2 - nq = 0 & 2 - nq = 2 \\
 nq = 2 & nq = 0
 \end{array}$$

Sehingga,

Real		Imajiner	Total
+	-		
2	0	2	4
2	2	0	4
0	2	2	4
0	0	4	4

Kemungkinan 3: $a_4p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 - a_1p + a_0 = 0$

a. $f(p) = a_4p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 - a_1p + a_0 = 0$

Dapat diketahui bahwa $u = 2$. Maka,

$$\begin{array}{ll}
 u - np = 0 & u - np = 2 \\
 2 - np = 0 & 2 - np = 2 \\
 np = 2 & np = 0
 \end{array}$$

b. $f(-p) = a_4(-p)^4 + a_3(-p)^3 + a_2(-p)^2 - a_1(-p) + a_0 = 0$

$$f(-p) = a_4p^4 - a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0$$

Dapat diketahui bahwa $v = 2$. Maka,

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 2 - nq = 0 & 2 - nq = 2 \\ nq = 2 & nq = 0 \end{array}$$

Sehingga,

Real		Imajiner	Total
+	-		
2	0	2	4
2	2	0	4
0	2	2	4
0	0	4	4

Kemungkinan 4: $a_4p^4 + a_3p^3 - a_2p^2 - a_1p + a_0 = 0$

a. $f(p) = a_4p^4 + a_3p^3 - a_2p^2 - a_1p + a_0 = 0$

Dapat diketahui bahwa $u = 2$. Maka,

$$\begin{array}{ll} u - np = 0 & u - np = 2 \\ 2 - np = 0 & 2 - np = 2 \\ np = 2 & np = 0 \end{array}$$

b. $f(-p) = a_4(-p)^4 + a_3(-p)^3 - a_2(-p)^2 - a_1(-p) + a_0 = 0$
 $f(-p) = a_4p^4 - a_3p^3 - a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0$

Dapat diketahui bahwa $v = 2$. Maka,

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 2 - nq = 0 & 2 - nq = 2 \\ nq = 2 & nq = 0 \end{array}$$

Sehingga,

Real		Imajiner	Total
+	-		
2	0	2	4
2	2	0	4
0	2	2	4
0	0	4	4

Kemungkinan 5: $a_4p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p - a_0 = 0$

a. $f(p) = a_4p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p - a_0 = 0$

Dapat diketahui bahwa $u = 1$. Maka,

$$u - np = 0$$

$$1 - np = 0$$

$$np = 1$$

b. $f(-p) = a_4(-p)^4 + a_3(-p)^3 + a_2(-p)^2 + a_1(-p) - a_0 = 0$

$$f(-p) = a_4p^4 - a_3p^3 + a_2p^2 - a_1p - a_0 = 0$$

Dapat diketahui bahwa $v = 3$. Maka,

$$v - nq = 0 \qquad v - nq = 2$$

$$3 - nq = 0 \qquad 3 - nq = 2$$

$$nq = 3 \qquad nq = 1$$

Sehingga,

Real		Imajiner	Total
+	-		
1	3	0	4
1	1	2	4

Kemungkinan 6: $a_4p^4 + a_3p^3 - a_2p^2 + a_1p - a_0 = 0$

a. $f(p) = a_4p^4 + a_3p^3 - a_2p^2 + a_1p - a_0 = 0$

Dapat diketahui bahwa $u = 3$. Maka,

$$\begin{array}{ll} u - np = 0 & u - np = 2 \\ 3 - np = 0 & 3 - np = 2 \\ np = 3 & np = 1 \end{array}$$

b. $f(-p) = a_4(-p)^4 + a_3(-p)^3 - a_2(-p)^2 + a_1(-p) - a_0 = 0$

$$f(-p) = a_4p^4 - a_3p^3 - a_2p^2 - a_1p - a_0$$

Dapat diketahui bahwa $v = 1$. Maka,

$$v - nq = 0$$

$$1 - nq = 0$$

$$nq = 1$$

Sehingga,

Real		Imajiner	Total
+	-		
3	1	0	4
1	1	2	4

Kemungkinan 7: $a_4p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 - a_1p - a_0 = 0$

a. $f(p) = a_4p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 - a_1p - a_0 = 0$

Dapat diketahui bahwa $u = 1$. Maka,

$$u - np = 0$$

$$1 - np = 0$$

$$np = 1$$

b. $f(-p) = a_4(-p)^4 + a_3(-p)^3 + a_2(-p)^2 - a_1(-p) - a_0 = 0$

$$f(-p) = a_4p^4 - a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p - a_0 = 0$$

Dapat diketahui bahwa $v = 3$. Maka,

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 3 - nq = 0 & 3 - nq = 2 \\ nq = 3 & nq = 1 \end{array}$$

Sehingga,

Real		Imajiner	Total
+	-		
1	3	0	4
1	1	2	4

Kemungkinan 8: $a_4p^4 + a_3p^3 - a_2p^2 - a_1p - a_0 = 0$

a. $f(p) = a_4p^4 + a_3p^3 - a_2p^2 - a_1p - a_0 = 0$

Dapat diketahui bahwa $u = 1$. Maka,

$$\begin{array}{l} u - np = 0 \\ 1 - np = 0 \\ np = 1 \end{array}$$

b. $f(-p) = a_4(-p)^4 + a_3(-p)^3 - a_2(-p)^2 - a_1(-p) - a_0 = 0$

$$f(-p) = a_4p^4 - a_3p^3 - a_2p^2 + a_1p - a_0 = 0$$

Dapat diketahui bahwa $v = 3$. Maka,

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 3 - nq = 0 & 3 - nq = 2 \\ nq = 3 & nq = 1 \end{array}$$

Sehingga,

Real		Imajiner	Total
+	-		
1	3	0	4
1	1	2	4

Maka dapat diketahui kemungkinan yang ada adalah

Kemungkinan	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	$\sum u$	$\sum np$
1	+	+	+	+	+	0	0
2	+	+	-	+	+	2	0,2
3	+	+	+	-	+	2	0,2
4	+	+	-	-	+	2	0,2
5	+	+	+	+	-	1	1
6	+	+	-	+	-	2	0,2
7	+	+	+	-	-	1	1
8	+	+	-	-	-	1	1

Keterangan:

u : perubahan tanda ketika (p)

np : banyaknya akar positif

v : perubahan tanda ketika ($-p$)

nq : banyaknya akar negatif

Lampiran 3

Perhitungan Manual untuk Mencari Nilai p_2 sesuai dengan Kemungkinan yang Diperoleh dari Aturan Tanda Descartes

Mencari akar positif dari polinomial, analisis kestabilan E_2

$$a_4p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0$$

1. Pada saat $\beta = 0,95$

$$\begin{aligned} a_0 &= -0,5 + 0,5 \cdot (0,2) + 0,2 - 0,5 \cdot 0,1 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot 0,1 \\ &\quad \cdot 0,5 + 0,5^2 \cdot 0,1 \cdot (0,2) + 0,5^2 \cdot 0,1 \\ &\quad \cdot (0,2) + 0,5 \cdot 0,1^2 + 3 \cdot 0,5 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \\ &\quad + 0,5 \cdot 0,1^2 + 0,35 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot 0,35 \\ &\quad \cdot (0,2) + 0,5 \cdot 0,35 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,35 \\ &\quad \cdot 0,1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow a_0 &= -0,5 + 0,1 + 0,2 - 0,025 - 0,025 + 0,005 + 0,005 \\ &\quad + 0,005 + 0,015 + 0,005 + 0,175 \\ &\quad - 0,035 + 0,0175 + 0,0175 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a_0 = -0,04$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,5 - 0,5 \cdot 0,2 - 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,2 - 0,5 \\ &\quad \cdot 0,1 \cdot 0,5 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot 0,1 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \\ &\quad + 0,5^2 \cdot 0,1 \cdot 0,5 \cdot 0,2 + 0,5^2 \cdot 0,1 \cdot 0,5 \\ &\quad \cdot 0,2 - 0,5 \cdot 0,1 \cdot 0,5 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot 0,1 \\ &\quad \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0,5^2 \cdot 0,1 \cdot 0,5 \cdot 0,2 + 0,5^2 \\ &\quad \cdot 0,1 \cdot 0,5 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,1^2 \cdot 0,5 + 2 \\ &\quad \cdot 0,5 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \\ &\quad \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,35 \cdot 1,45 - 0,5 \cdot 0,95 \\ &\quad \cdot 0,2 \cdot 1,45 + 0,5 \cdot 0,1^2 \cdot 1,45 + 0,5 \\ &\quad \cdot 0,35 \cdot 0,1 \cdot 1,45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow a_1 &= 0,5 - 0,1 - 0,25 + 0,05 - 0,0125 - 0,0125 \\ &\quad + 0,0025 + 0,0025 - 0,0125 \\ &\quad - 0,0125 + 0,0025 + 0,0025 \\ &\quad + 0,0025 + 0,0025 + 0,005 + 0,0025 \\ &\quad + 0,25375 - 0,13775 + 0,0074 \\ &\quad + 0,025375 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a_1 = 0,318775$$

$$\begin{aligned} a_2 &= 0,5 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 1,45 - 0,5 \cdot 0,2 \\ &\quad \cdot 1,45 - 0,1 \cdot 0,5^4 - 0,1 \cdot 0,5^4 \\ &\quad - 0,1 \cdot 0,5^4 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,5^4 \cdot 0,2 \\ &\quad + 0,5^2 \cdot 0,35 \cdot 0,95 - 0,5^2 \cdot 0,35 \\ &\quad \cdot 0,2 \cdot 0,95 - 0,12 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,95 \\ &\quad \cdot 0,15 + 0,5^2 \cdot 0,1 \cdot 0,35 \cdot 0,95 \\ &\quad + 0,5^2 \cdot 0,35 \cdot 0,1 \cdot 0,95 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow a_2 &= 0,25 - 0,05 + 0,725 - 0,145 - 0,00625 \\ &\quad - 0,00625 + 0,00125 + 0,00125 \\ &\quad + 0,083125 - 0,016625 \\ &\quad + 0,0083125 + 0,0083125 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a_2 = 0,853125$$

$$a_3 = 0,5 \cdot (0,5 + 2 \cdot 0,95)(0,4)$$

$$\Leftrightarrow a_3 = 48$$

$$a_4 = 0,95 \cdot 0,5^2(0,5 - 0,5 \cdot 0,2)$$

$$\Leftrightarrow a_4 = 0,95 \cdot 0,5^2 \cdot 0,4$$

$$\Leftrightarrow a_4 = 0,095$$

Maka diperoleh polinomial $0,095p^4 + 0,48p^3 + 0,853125p^2 + 0,318775p - 0,04 = 0$. Polinomial ini sesuai dengan kemungkinan 5 pada tabel aturan tanda Descartes. Berdasarkan polinomial tersebut diperoleh empat akar yakni

$$p = -2,2476 + 1,2195i; -2,2476 - 1,2195i; -0,6556; 0,0982.$$

2. Pada saat $\beta = 10$

$$a_0 = -0,5 + 0,5 \cdot (0,2) + 0,2 - 0,5 \cdot 0,1 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot 0,1 \cdot 0,5 + 0,5^2 \cdot 0,1 \cdot (0,2) + 0,5^2 \cdot 0,1 \cdot (0,2) + 0,5 \cdot 0,1^2 + 3 \cdot 0,5 \cdot 0,1 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,1^2 + 0,35 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot 0,35 \cdot (0,2) + 0,5 \cdot 0,35 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,35 \cdot 0,1$$

$$\Leftrightarrow a_0 = -0,5 + 0,1 + 0,2 - 0,025 - 0,025 + 0,005 + 0,005 + 0,005 + 0,015 + 0,005 + 0,175 - 0,035 + 0,0175 + 0,0175$$

$$\Leftrightarrow a_0 = -0,04$$

$$a_1 = 0,5 - 0,5 \cdot 0,2 - 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,2 - 0,5^3 \cdot 0,2 + 0,5^3 \cdot 0,2^2 - 0,5^3 \cdot 0,2 + 0,5^3 \cdot (0,1^2 - 0,1^2) + 0,5^2 \cdot 0,1^2 + 2 \cdot 0,5^2 \cdot 0,1^2 + 0,5^2 \cdot 0,1^2 + 0,35 \cdot 0,5 \cdot 10,5$$

$$\Leftrightarrow a_1 = 0,5 - 0,1 - 0,25 + 0,05 - 0,025 + 0,01 + 1,8375$$

$$\Leftrightarrow a_1 = 2,0225$$

$$a_2 = 0,5 \cdot 0,5(1 + 0,35 \cdot 10) + 0,5^4 \cdot 0,2^2 + 0,5 \cdot (0,5 + 10) - 0,5 \cdot 0,2 \cdot (2 \cdot 0,5 + 10) - 0,5^2 \cdot 0,2(0,5^2 + 10 \cdot 0,35) + 0,5 \cdot 0,35 \cdot 0,5 \cdot 10 \cdot 0,2$$

$$\Leftrightarrow a_2 = 1,125 + 0,0025 + 5,25 - 1,1 - 0,1875 + 0,175$$

$$\Leftrightarrow a_2 = 5,265$$

$$a_3 = 0,5 \cdot (0,5 + 20)(0,5 - 0,5 \cdot 0,2)$$

$$\Leftrightarrow a_3 = 0,5 \cdot 20,5 \cdot 0,4$$

$$\Leftrightarrow a_3 = 4,1$$

$$a_4 = 10 \cdot 0,5^2(0,5 - 0,5 \cdot 0,2)$$

$$\Leftrightarrow a_4 = 2,5 \cdot 0,4$$

$$\Leftrightarrow a_4 = 1$$

Maka diperoleh polinomial $1p^4 + 4,1p^3 + 5,265p^2 + 2,0225p - 0,04 = 0$. Polinomial ini sesuai dengan kemungkinan 5 pada tabel aturan tanda Descartes. Berdasarkan polinomial tersebut diperoleh empat akar yakni $p = -1,8615; -1,4938; -0,7635; 0,0188$.

Lampiran 4

Program Matlab Model Predator Prey dengan Efek Ketakutan pada Prey dan Kerjasama Berburu antar Predator serta Pemanenan

- a. Program matlab untuk titik ekuilibrium E_0
1. Pada saat $c_1 = 1,2$

```
clear all;
clc;

% Parameter

H = 0.9;
delta = 0.5;
m = 0.1;
c1 = 1.2;
c2 = 0.05;
alpha = 0.25;
beta = 0.2;

% Waktu Simulasi
t_start = 0;
t_end = 70;
dt = 0.1;
num_steps = round((t_end - t_start) / dt) + 1;
t = linspace(t_start, t_end, num_steps);

% Kondisi Awal
v0 = 0.1;
w0 = 0.5;
x = [v0; w0];

% Sistem persamaan diferensial
f = @(t, x) [
```

```

        (x(1)*(1-x(1))/(1+beta*x(2))) -
        ((1+alpha*x(2))*x(1)*x(2))/(1+H*x(1)*(1+alpha*x(
2)))) - c1*x(1);

        (delta*(1+alpha*x(2))*x(1)*x(2))/(1+H*x(1)*(1+al
pha*x(2))) - m*x(2) - c2*x(2)
    ];

% Menyimpan hasil simulasi
results = zeros(num_steps, 2);
results(1,:) = x';

% Header output tabel
fprintf('\nSimulasi Predator-Prey:\n');
fprintf('Waktu\t\tv (Prey)\t\tw (Predator)\n');

% Kondisi awal dicetak sebelum loop
fprintf('% .2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n', t(1), x(1),
x(2));

% Runge-Kutta Orde 4 (RK4)
for i = 1:num_steps-1
    k1 = f(t(i), x);
    k2 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k1);
    k3 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k2);
    k4 = f(t(i) + dt, x + dt * k3);

    % Update nilai x
    x = x + (dt/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    results(i+1,:) = x';

    % Menampilkan hasil setiap langkah waktu
    (contoh setiap 1 unit waktu)
    if mod(t(i+1), 1) == 0 % Hanya jika t
adalah bilangan bulat
        fprintf('% .2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n',
t(i+1), x(1), x(2));
    end
end
end

```

```

% Menyimpan hasil ke file CSV
filename = 'predator_prej_simulation.csv';
csvwrite(filename, [t' results]);
fprintf('\nHasil simulasi disimpan ke file:
%s\n', filename);

% Grafik Prey dan Predator Bersama
figure;
plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2,
'DisplayName', 'v (Prey)');
hold on;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2,
'DisplayName', 'w (Predator)');
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi');
title('Dinamika Predator-Prey');
legend('show');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Prey
figure;
plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi v (Prey)');
title('Dinamika Populasi Prey');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Predator
figure;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi w (Predator)');
title('Dinamika Populasi Predator');
grid on;

% Menampilkan tabel hasil akhir
fprintf('\nHasil Akhir Simulasi:\n');
fprintf('Populasi Mangsa (v): %.4f\n',
results(end, 1));

```

```
fprintf('Populasi Predator (w): %.4f\n',
results(end, 2));
```

2. Pada saat $c_1 = 2$

```
clear all;
clc;
```

```
% Parameter
```

```
H = 0.9;
delta = 0.5;
m = 0.1;
c1 = 2;
c2 = 0.05;
alpha = 0.25;
beta = 0.2;
```

```
% Waktu Simulasi
```

```
t_start = 0;
t_end = 70;
dt = 0.1;
num_steps = round((t_end - t_start) / dt) + 1;
t = linspace(t_start, t_end, num_steps);
```

```
% Kondisi Awal
```

```
v0 = 0.1;
w0 = 0.5;
x = [v0; w0];
```

```
% Sistem persamaan diferensial
```

```
f = @(t, x) [
    (x(1)*(1-x(1))/(1+beta*x(2))) -
    ((1+alpha*x(2))*x(1)*x(2))/(1+H*x(1)*(1+alpha*x(
    2))) - c1*x(1);

    (delta*(1+alpha*x(2))*x(1)*x(2))/(1+H*x(1)*(1+al
    pha*x(2))) - m*x(2) - c2*x(2)
```

```

];

% Menyimpan hasil simulasi
results = zeros(num_steps, 2);
results(1,:) = x';

% Header output tabel
fprintf('\nSimulasi Predator-Prey:\n');
fprintf('Waktu\t\tv (Prey)\t\tw (Predator)\n');

% Kondisi awal dicetak sebelum loop
fprintf('%.2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n', t(1), x(1),
x(2));

% Runge-Kutta Orde 4 (RK4)
for i = 1:num_steps-1
    k1 = f(t(i), x);
    k2 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k1);
    k3 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k2);
    k4 = f(t(i) + dt, x + dt * k3);

    % Update nilai x
    x = x + (dt/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    results(i+1,:) = x';

    % Menampilkan hasil setiap langkah waktu
    (contoh setiap 1 unit waktu)
    if mod(t(i+1), 1) == 0 % Hanya jika t
adalah bilangan bulat
        fprintf('%.2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n',
t(i+1), x(1), x(2));
    end
end

% Menyimpan hasil ke file CSV
filename = 'predator_prey_simulation.csv';
csvwrite(filename, [t' results]);
fprintf('\nHasil simulasi disimpan ke file:
%s\n', filename);

```

```

% Grafik Prey dan Predator Bersama
figure;
plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2,
'DisplayName', 'v (Prey)');
hold on;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2,
'DisplayName', 'w (Predator)');
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi');
title('Dinamika Predator-Prey');
legend('show');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Prey
figure;
plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi v (Prey)');
title('Dinamika Populasi Prey');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Predator
figure;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi w (Predator)');
title('Dinamika Populasi Predator');
grid on;

% Menampilkan tabel hasil akhir
fprintf('\nHasil Akhir Simulasi:\n');
fprintf('Populasi Mangsa (v): %.4f\n',
results(end, 1));
fprintf('Populasi Predator (w): %.4f\n',
results(end, 2));

```

b. Program matlab untuk titik ekuilibrium E_1

1. Pada saat $c_1 = 0,6$

```

clear all;
clc;

% Parameter

H = 0.9;
delta = 0.5;
m = 0.1;
c1 = 0.6;
c2 = 0.1;
alpha = 0.25;
beta = 0.2;

% Waktu Simulasi
t_start = 0;
t_end = 150;
dt = 0.1;
num_steps = round((t_end - t_start) / dt) + 1;
t = linspace(t_start, t_end, num_steps);

% Kondisi Awal
v0 = 0.1;
w0 = 0.5;
x = [v0; w0];

% Sistem persamaan diferensial
f = @(t, x) [
    (x(1)*(1-x(1))/(1+beta*x(2))) -
    ((1+alpha*x(2))*x(1)*x(2))/(1+H*x(1)*(1+alpha*x(
    2))) - c1*x(1);

    (delta*(1+alpha*x(2))*x(1)*x(2))/(1+H*x(1)*(1+al
    pha*x(2))) - m*x(2) - c2*x(2)
];

```

```

% Menyimpan hasil simulasi
results = zeros(num_steps, 2);
results(1,:) = x';

% Header output tabel
fprintf('\nSimulasi Predator-Prey:\n');
fprintf('Waktu\t\tv (Prey)\t\tw (Predator)\n');

% Kondisi awal dicetak sebelum loop
fprintf('%.2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n', t(1), x(1),
x(2));

% Runge-Kutta Orde 4 (RK4)
for i = 1:num_steps-1
    k1 = f(t(i), x);
    k2 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k1);
    k3 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k2);
    k4 = f(t(i) + dt, x + dt * k3);

    % Update nilai x
    x = x + (dt/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    results(i+1,:) = x';

    % Menampilkan hasil setiap langkah waktu
    (contoh setiap 1 unit waktu)
    if mod(t(i+1), 1) == 0 % Hanya jika t
adalah bilangan bulat
        fprintf('%.2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n',
t(i+1), x(1), x(2));
    end
end

% Menyimpan hasil ke file CSV
filename = 'predator_prey_simulation.csv';
csvwrite(filename, [t' results]);
fprintf('\nHasil simulasi disimpan ke file:
%s\n', filename);

```

```

% Grafik Prey dan Predator Bersama
figure;
plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2,
'DisplayName', 'v (Prey)');
hold on;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2,
'DisplayName', 'w (Predator)');
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi');
title('Dinamika Predator-Prey');
legend('show');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Prey
figure;
plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi v (Prey)');
title('Dinamika Populasi Prey');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Predator
figure;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi w (Predator)');
title('Dinamika Populasi Predator');
grid on;

% Menampilkan tabel hasil akhir
fprintf('\nHasil Akhir Simulasi:\n');
fprintf('Populasi Mangsa (v): %.4f\n',
results(end, 1));
fprintf('Populasi Predator (w): %.4f\n',
results(end, 2));

```

2. Pada saat $c_1 = 0,7$

```

clear all;
clc;

% Parameter

H = 0.9;
delta = 0.5;
m = 0.1;
c1 = 0.7;
c2 = 0.1;
alpha = 0.25;
beta = 0.2;

% Waktu Simulasi
t_start = 0;
t_end = 100;
dt = 0.1;
num_steps = round((t_end - t_start) / dt) + 1;
t = linspace(t_start, t_end, num_steps);

% Kondisi Awal
v0 = 0.1;
w0 = 0.5;
x = [v0; w0];

% Sistem persamaan diferensial
f = @(t, x) [
    (x(1)*(1-x(1))/(1+beta*x(2))) -
    ((1+alpha*x(2))*x(1)*x(2))/(1+H*x(1)*(1+alpha*x(
2)))) - c1*x(1);

    (delta*(1+alpha*x(2))*x(1)*x(2))/(1+H*x(1)*(1+al
pha*x(2))) - m*x(2) - c2*x(2)
];

```

```

% Menyimpan hasil simulasi
results = zeros(num_steps, 2);
results(1,:) = x';

% Header output tabel
fprintf('\nSimulasi Predator-Prey:\n');
fprintf('Waktu\t\tv (Prey)\t\tw (Predator)\n');

% Kondisi awal dicetak sebelum loop
fprintf('%.2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n', t(1), x(1),
x(2));

% Runge-Kutta Orde 4 (RK4)
for i = 1:num_steps-1
    k1 = f(t(i), x);
    k2 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k1);
    k3 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k2);
    k4 = f(t(i) + dt, x + dt * k3);

    % Update nilai x
    x = x + (dt/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    results(i+1,:) = x';

    % Menampilkan hasil setiap langkah waktu
    (contoh setiap 1 unit waktu)
    if mod(t(i+1), 1) == 0 % Hanya jika t
adalah bilangan bulat
        fprintf('%.2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n',
t(i+1), x(1), x(2));
    end
end

% Menyimpan hasil ke file CSV
filename = 'predator_prey_simulation.csv';
csvwrite(filename, [t' results]);
fprintf('\nHasil simulasi disimpan ke file:
%s\n', filename);

```

```

% Grafik Prey dan Predator Bersama
figure;
plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2,
'DisplayName', 'v (Prey)');
hold on;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2,
'DisplayName', 'w (Predator)');
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi');
title('Dinamika Predator-Prey');
legend('show');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Prey
figure;
plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi v (Prey)');
title('Dinamika Populasi Prey');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Predator
figure;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi w (Predator)');
title('Dinamika Populasi Predator');
grid on;

% Menampilkan tabel hasil akhir
fprintf('\nHasil Akhir Simulasi:\n');
fprintf('Populasi Mangsa (v): %.4f\n',
results(end, 1));
fprintf('Populasi Predator (w): %.4f\n',
results(end, 2));

```

3. Pada saat $c_1 = 0,9$

```

clear all;
clc;

% Parameter

H = 0.9;
delta = 0.5;
m = 0.1;
c1 = 0.9;
c2 = 0.1;
alpha = 0.25;
beta = 0.2;

% Waktu Simulasi
t_start = 0;
t_end = 150;
dt = 0.1;
num_steps = round((t_end - t_start) / dt) + 1;
t = linspace(t_start, t_end, num_steps);

% Kondisi Awal
v0 = 0.1;
w0 = 0.5;
x = [v0; w0];

% Sistem persamaan diferensial
f = @(t, x) [
    (x(1)*(1-x(1))/(1+beta*x(2))) -
    ((1+alpha*x(2))*x(1)*x(2))/(1+H*x(1)*(1+alpha*x(
2)))) - c1*x(1);

    (delta*(1+alpha*x(2))*x(1)*x(2))/(1+H*x(1)*(1+al
pha*x(2))) - m*x(2) - c2*x(2)
];

```

```

% Menyimpan hasil simulasi
results = zeros(num_steps, 2);
results(1,:) = x';

% Header output tabel
fprintf('\nSimulasi Predator-Prey:\n');
fprintf('Waktu\t\tv (Prey)\t\tw (Predator)\n');

% Kondisi awal dicetak sebelum loop
fprintf('%.2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n', t(1), x(1),
x(2));

% Runge-Kutta Orde 4 (RK4)
for i = 1:num_steps-1
    k1 = f(t(i), x);
    k2 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k1);
    k3 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k2);
    k4 = f(t(i) + dt, x + dt * k3);

    % Update nilai x
    x = x + (dt/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    results(i+1,:) = x';

    % Menampilkan hasil setiap langkah waktu
    (contoh setiap 1 unit waktu)
    if mod(t(i+1), 1) == 0 % Hanya jika t
adalah bilangan bulat
        fprintf('%.2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n',
t(i+1), x(1), x(2));
    end
end

% Menyimpan hasil ke file CSV
filename = 'predator_prey_simulation.csv';
csvwrite(filename, [t' results]);
fprintf('\nHasil simulasi disimpan ke file:
%s\n', filename);

% Grafik Prey dan Predator Bersama
figure;

```

```

plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2,
'DisplayName', 'v (Prey)');
hold on;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2,
'DisplayName', 'w (Predator)');
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi');
title('Dinamika Predator-Prey');
legend('show');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Prey
figure;
plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi v (Prey)');
title('Dinamika Populasi Prey');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Predator
figure;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi w (Predator)');
title('Dinamika Populasi Predator');
grid on;

% Menampilkan tabel hasil akhir
fprintf('\nHasil Akhir Simulasi:\n');
fprintf('Populasi Mangsa (v): %.4f\n',
results(end, 1));
fprintf('Populasi Predator (w): %.4f\n',
results(end, 2));

```

c. Program matlab titik ekuilibrium E_2 a. Pada saat $\beta = 0,95$

```

clear all;
clc;

% Parameter

H = 0.5;
delta = 0.5;
m = 0.1;
c1 = 0.35;
c2 = 0.1;
alpha = 0.5;
beta = 0.95;

% Waktu Simulasi
t_start = 0;
t_end = 120;
dt = 0.1;
num_steps = round((t_end - t_start) / dt) + 1;
t = linspace(t_start, t_end, num_steps);

% Kondisi Awal
v0 = 0.1;
w0 = 0.5;
x = [v0; w0];

% Sistem persamaan diferensial
f = @(t, x) [
    (x(1)*(1-x(1))/(1+beta*x(2))) -
    ((1+alpha*x(2))*x(1)*x(2))/(1+H*x(1)*(1+alpha*x(
    2))) - c1*x(1);

    (delta*(1+alpha*x(2))*x(1)*x(2))/(1+H*x(1)*(1+al
    pha*x(2))) - m*x(2) - c2*x(2)
];

```

```

% Menyimpan hasil simulasi
results = zeros(num_steps, 2);
results(1,:) = x';

% Header output tabel
fprintf('\nSimulasi Predator-Prey:\n');
fprintf('Waktu\t\tv (Prey)\t\tw (Predator)\n');

% Kondisi awal dicetak sebelum loop
fprintf('%.2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n', t(1), x(1),
x(2));

% Runge-Kutta Orde 4 (RK4)
for i = 1:num_steps-1
    k1 = f(t(i), x);
    k2 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k1);
    k3 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k2);
    k4 = f(t(i) + dt, x + dt * k3);

    % Update nilai x
    x = x + (dt/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    results(i+1,:) = x';

    % Menampilkan hasil setiap langkah waktu
    (contoh setiap 1 unit waktu)
    if mod(t(i+1), 1) == 0 % Hanya jika t
    adalah bilangan bulat
        fprintf('%.2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n',
t(i+1), x(1), x(2));
    end
end

% Menyimpan hasil ke file CSV
filename = 'predator_prey_simulation.csv';
csvwrite(filename, [t' results]);
fprintf('\nHasil simulasi disimpan ke file:
%s\n', filename);

```

```

% Grafik Prey dan Predator Bersama
figure;
plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2,
'DisplayName', 'v (Prey)');
hold on;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2,
'DisplayName', 'w (Predator)');
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi');
title('Dinamika Predator-Prey');
legend('show');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Prey
figure;
plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi v (Prey)');
title('Dinamika Populasi Prey');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Predator
figure;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi w (Predator)');
title('Dinamika Populasi Predator');
grid on;

% Menampilkan tabel hasil akhir
fprintf('\nHasil Akhir Simulasi:\n');
fprintf('Populasi Mangsa (v): %.4f\n',
results(end, 1));
fprintf('Populasi Predator (w): %.4f\n',
results(end, 2));

```

b. Pada saat $\beta = 10$

```

clear all;
clc;

% Parameter

H = 0.5;
delta = 0.5;
m = 0.1;
c1 = 0.35;
c2 = 0.1;
alpha = 0.5;
beta = 10;

% Waktu Simulasi
t_start = 0;
t_end = 160;
dt = 0.1;
num_steps = round((t_end - t_start) / dt) + 1;
t = linspace(t_start, t_end, num_steps);

% Kondisi Awal
v0 = 0.1;
w0 = 0.5;
x = [v0; w0];

% Sistem persamaan diferensial
f = @(t, x) [
    (x(1)*(1-x(1))/(1+beta*x(2))) -
    ((1+alpha*x(2))*x(1)*x(2))/(1+H*x(1)*(1+alpha*x(
2)))) - c1*x(1);

    (delta*(1+alpha*x(2))*x(1)*x(2))/(1+H*x(1)*(1+al
pha*x(2))) - m*x(2) - c2*x(2)
];

```

```

% Menyimpan hasil simulasi
results = zeros(num_steps, 2);
results(1,:) = x';

% Header output tabel
fprintf('\nSimulasi Predator-Prey:\n');
fprintf('Waktu\t\tv (Prey)\t\tw (Predator)\n');

% Kondisi awal dicetak sebelum loop
fprintf('%.2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n', t(1), x(1),
x(2));

% Runge-Kutta Orde 4 (RK4)
for i = 1:num_steps-1
    k1 = f(t(i), x);
    k2 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k1);
    k3 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k2);
    k4 = f(t(i) + dt, x + dt * k3);

    % Update nilai x
    x = x + (dt/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    results(i+1,:) = x';

    % Menampilkan hasil setiap langkah waktu
    (contoh setiap 1 unit waktu)
    if mod(t(i+1), 1) == 0 % Hanya jika t
adalah bilangan bulat
        fprintf('%.2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n',
t(i+1), x(1), x(2));
    end
end

% Menyimpan hasil ke file CSV
filename = 'predator_prey_simulation.csv';
csvwrite(filename, [t' results]);
fprintf('\nHasil simulasi disimpan ke file:
%s\n', filename);

% Grafik Prey dan Predator Bersama
figure;

```

```

plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2,
'DisplayName', 'v (Prey)');
hold on;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2,
'DisplayName', 'w (Predator)');
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi');
title('Dinamika Predator-Prey');
legend('show');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Prey
figure;
plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi v (Prey)');
title('Dinamika Populasi Prey');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Predator
figure;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi w (Predator)');
title('Dinamika Populasi Predator');
grid on;

% Menampilkan tabel hasil akhir
fprintf('\nHasil Akhir Simulasi:\n');
fprintf('Populasi Mangsa (v): %.4f\n',
results(end, 1));
fprintf('Populasi Predator (w): %.4f\n',
results(end, 2));

```

Lampiran 5

Hasil iterasi sistem persamaan (4.4) berdasarkan metode Runge-Kutta menggunakan MATLAB

- a. Tabel hasil iterasi pada titik ekuilibrium E_0
1. Pada saat $c_1 = 1,2$

Waktu	Prey	Predator
0.00	0.1000	0.5000
1.00	0.0430	0.4457
2.00	0.0203	0.3898
3.00	0.0103	0.3382
4.00	0.0057	0.2923
5.00	0.0033	0.2522
6.00	0.0020	0.2173
7.00	0.0013	0.1872
8.00	0.0008	0.1612
9.00	0.0006	0.1388
10.00	0.0004	0.1195
11.00	0.0003	0.1029
12.00	0.0002	0.0886
13.00	0.0002	0.0762
14.00	0.0001	0.0656
15.00	0.0001	0.0565
16.00	0.0001	0.0486
17.00	0.0001	0.0418
18.00	0.0000	0.0360
19.00	0.0000	0.0310
20.00	0.0000	0.0267
21.00	0.0000	0.0230
22.00	0.0000	0.0198
23.00	0.0000	0.0170

24.00	0.0000	0.0146
25.00	0.0000	0.0126
26.00	0.0000	0.0108
27.00	0.0000	0.0093
28.00	0.0000	0.0080
29.00	0.0000	0.0069
30.00	0.0000	0.0060
31.00	0.0000	0.0051
32.00	0.0000	0.0044
33.00	0.0000	0.0038
34.00	0.0000	0.0033
35.00	0.0000	0.0028
36.00	0.0000	0.0024
37.00	0.0000	0.0021
38.00	0.0000	0.0018
39.00	0.0000	0.0015
40.00	0.0000	0.0013
41.00	0.0000	0.0011
42.00	0.0000	0.0010
43.00	0.0000	0.0008
44.00	0.0000	0.0007
45.00	0.0000	0.0006
46.00	0.0000	0.0005
47.00	0.0000	0.0005
48.00	0.0000	0.0004
49.00	0.0000	0.0003
50.00	0.0000	0.0003
51.00	0.0000	0.0003
52.00	0.0000	0.0002
53.00	0.0000	0.0002
54.00	0.0000	0.0002
55.00	0.0000	0.0001
56.00	0.0000	0.0001
57.00	0.0000	0.0001
58.00	0.0000	0.0001
59.00	0.0000	0.0001

60.00	0.0000	0.0001
61.00	0.0000	0.0001
62.00	0.0000	0.0000
63.00	0.0000	0.0000
64.00	0.0000	0.0000
65.00	0.0000	0.0000
66.00	0.0000	0.0000
67.00	0.0000	0.0000
68.00	0.0000	0.0000
69.00	0.0000	0.0000
70.00	0.0000	0.0000

Hasil Akhir Simulasi:

Populasi Mangsa: 0.0000

Populasi Predator: 0.0000

2. Pada saat $c_1 = 2$

Waktu	Prey	Predator
0.00	0.1000	0.5000
1.00	0.0195	0.4416
2.00	0.0042	0.3822
3.00	0.0010	0.3293
4.00	0.0002	0.2835
5.00	0.0001	0.2441
6.00	0.0000	0.2101
7.00	0.0000	0.1808
8.00	0.0000	0.1556
9.00	0.0000	0.1339
10.00	0.0000	0.1153
11.00	0.0000	0.0992
12.00	0.0000	0.0854
13.00	0.0000	0.0735

14.00	0.0000	0.0633
15.00	0.0000	0.0545
16.00	0.0000	0.0469
17.00	0.0000	0.0403
18.00	0.0000	0.0347
19.00	0.0000	0.0299
20.00	0.0000	0.0257
21.00	0.0000	0.0221
22.00	0.0000	0.0191
23.00	0.0000	0.0164
24.00	0.0000	0.0141
25.00	0.0000	0.0122
26.00	0.0000	0.0105
27.00	0.0000	0.0090
28.00	0.0000	0.0077
29.00	0.0000	0.0067
30.00	0.0000	0.0057
31.00	0.0000	0.0049
32.00	0.0000	0.0043
33.00	0.0000	0.0037
34.00	0.0000	0.0032
35.00	0.0000	0.0027
36.00	0.0000	0.0023
37.00	0.0000	0.0020
38.00	0.0000	0.0017
39.00	0.0000	0.0015
40.00	0.0000	0.0013
41.00	0.0000	0.0011
42.00	0.0000	0.0009
43.00	0.0000	0.0008
44.00	0.0000	0.0007
45.00	0.0000	0.0006
46.00	0.0000	0.0005
47.00	0.0000	0.0004
48.00	0.0000	0.0004
49.00	0.0000	0.0003

50.00	0.0000	0.0003
51.00	0.0000	0.0002
52.00	0.0000	0.0002
53.00	0.0000	0.0002
54.00	0.0000	0.0002
55.00	0.0000	0.0001
56.00	0.0000	0.0001
57.00	0.0000	0.0001
58.00	0.0000	0.0001
59.00	0.0000	0.0001
60.00	0.0000	0.0001
61.00	0.0000	0.0001
62.00	0.0000	0.0000
63.00	0.0000	0.0000
64.00	0.0000	0.0000
65.00	0.0000	0.0000
66.00	0.0000	0.0000
67.00	0.0000	0.0000
68.00	0.0000	0.0000
69.00	0.0000	0.0000
70.00	0.0000	0.0000

Hasil Akhir Simulasi:

Populasi Mangsa: 0.0000

Populasi Predator: 0.0000

b. Tabel hasil iterasi pada titik ekuilibrium E_1

1. Pada saat $c_1 = 0,6$

Waktu	Prey	Predator
0.00	0.1000	0.5000
1.00	0.0786	0.4283
2.00	0.0679	0.3639

3.00	0.0636	0.3081
4.00	0.0636	0.2604
5.00	0.0671	0.2202
6.00	0.0737	0.1867
7.00	0.0833	0.1587
8.00	0.0963	0.1356
9.00	0.1125	0.1166
10.00	0.1319	0.1010
11.00	0.1541	0.0882
12.00	0.1785	0.0777
13.00	0.2040	0.0691
14.00	0.2294	0.0621
15.00	0.2537	0.0562
16.00	0.2758	0.0512
17.00	0.2951	0.0471
18.00	0.3116	0.0435
19.00	0.3253	0.0403
20.00	0.3364	0.0375
21.00	0.3454	0.0350
22.00	0.3525	0.0328
23.00	0.3583	0.0307
24.00	0.3629	0.0289
25.00	0.3667	0.0271
26.00	0.3699	0.0255
27.00	0.3725	0.0240
28.00	0.3747	0.0226
29.00	0.3766	0.0213
30.00	0.3783	0.0201
31.00	0.3798	0.0190
32.00	0.3811	0.0179
33.00	0.3823	0.0169
34.00	0.3834	0.0160
35.00	0.3844	0.0151
36.00	0.3853	0.0143
37.00	0.3862	0.0135
38.00	0.3870	0.0127

39.00	0.3877	0.0120
40.00	0.3884	0.0114
41.00	0.3891	0.0108
42.00	0.3897	0.0102
43.00	0.3903	0.0096
44.00	0.3908	0.0091
45.00	0.3913	0.0086
46.00	0.3918	0.0082
47.00	0.3922	0.0077
48.00	0.3926	0.0073
49.00	0.3930	0.0069
50.00	0.3934	0.0066
51.00	0.3938	0.0062
52.00	0.3941	0.0059
53.00	0.3944	0.0056
54.00	0.3947	0.0053
55.00	0.3950	0.0050
56.00	0.3953	0.0047
57.00	0.3955	0.0045
58.00	0.3958	0.0043
59.00	0.3960	0.0040
60.00	0.3962	0.0038
61.00	0.3964	0.0036
62.00	0.3966	0.0034
63.00	0.3968	0.0033
64.00	0.3969	0.0031
65.00	0.3971	0.0029
66.00	0.3973	0.0028
67.00	0.3974	0.0026
68.00	0.3975	0.0025
69.00	0.3977	0.0024
70.00	0.3978	0.0022
71.00	0.3979	0.0021
72.00	0.3980	0.0020
73.00	0.3981	0.0019
74.00	0.3982	0.0018

75.00	0.3983	0.0017
76.00	0.3984	0.0016
77.00	0.3985	0.0015
78.00	0.3986	0.0015
79.00	0.3986	0.0014
80.00	0.3987	0.0013
81.00	0.3988	0.0012
82.00	0.3988	0.0012
83.00	0.3989	0.0011
84.00	0.3990	0.0011
85.00	0.3990	0.0010
86.00	0.3991	0.0010
87.00	0.3991	0.0009
88.00	0.3992	0.0009
89.00	0.3992	0.0008
90.00	0.3992	0.0008
91.00	0.3993	0.0007
92.00	0.3993	0.0007
93.00	0.3994	0.0007
94.00	0.3994	0.0006
95.00	0.3994	0.0006
96.00	0.3994	0.0006
97.00	0.3995	0.0005
98.00	0.3995	0.0005
99.00	0.3995	0.0005
100.00	0.3996	0.0005
101.00	0.3996	0.0004
102.00	0.3996	0.0004
103.00	0.3996	0.0004
104.00	0.3996	0.0004
105.00	0.3997	0.0003
106.00	0.3997	0.0003
107.00	0.3997	0.0003
108.00	0.3997	0.0003
109.00	0.3997	0.0003
110.00	0.3997	0.0003

111.00	0.3998	0.0003
112.00	0.3998	0.0002
113.00	0.3998	0.0002
114.00	0.3998	0.0002
115.00	0.3998	0.0002
116.00	0.3998	0.0002
117.00	0.3998	0.0002
118.00	0.3998	0.0002
119.00	0.3998	0.0002
120.00	0.3998	0.0002
121.00	0.3999	0.0001
122.00	0.3999	0.0001
123.00	0.3999	0.0001
124.00	0.3999	0.0001
125.00	0.3999	0.0001
126.00	0.3999	0.0001
127.00	0.3999	0.0001
128.00	0.3999	0.0001
129.00	0.3999	0.0001
130.00	0.3999	0.0001
131.00	0.3999	0.0001
132.00	0.3999	0.0001
133.00	0.3999	0.0001
134.00	0.3999	0.0001
135.00	0.3999	0.0001
136.00	0.3999	0.0001
137.00	0.3999	0.0001
138.00	0.3999	0.0001
139.00	0.3999	0.0001
140.00	0.3999	0.0001
141.00	0.3999	0.0001
142.00	0.4000	0.0000
143.00	0.4000	0.0000
144.00	0.4000	0.0000
145.00	0.4000	0.0000
146.00	0.4000	0.0000

147.00	0.4000	0.0000
148.00	0.4000	0.0000
149.00	0.4000	0.0000
150.00	0.4000	0.0000

Hasil Akhir Simulasi:

Populasi Mangsa: 0.4000

Populasi Predator: 0.0000

2. Pada saat $c_1 = 0,7$

Waktu	Prey	Predator
0.00	0.1000	0.5000
1.00	0.0713	0.4275
2.00	0.0562	0.3615
3.00	0.0482	0.3040
4.00	0.0444	0.2548
5.00	0.0434	0.2133
6.00	0.0444	0.1785
7.00	0.0472	0.1495
8.00	0.0516	0.1255
9.00	0.0577	0.1055
10.00	0.0655	0.0890
11.00	0.0750	0.0753
12.00	0.0864	0.0641
13.00	0.0995	0.0548
14.00	0.1141	0.0471
15.00	0.1300	0.0408
16.00	0.1468	0.0355
17.00	0.1638	0.0312
18.00	0.1805	0.0275
19.00	0.1965	0.0244
20.00	0.2114	0.0218

21.00	0.2247	0.0196
22.00	0.2365	0.0176
23.00	0.2466	0.0159
24.00	0.2552	0.0145
25.00	0.2624	0.0132
26.00	0.2684	0.0120
27.00	0.2733	0.0109
28.00	0.2773	0.0100
29.00	0.2807	0.0092
30.00	0.2834	0.0084
31.00	0.2856	0.0077
32.00	0.2875	0.0071
33.00	0.2890	0.0065
34.00	0.2903	0.0060
35.00	0.2914	0.0055
36.00	0.2924	0.0050
37.00	0.2932	0.0046
38.00	0.2938	0.0043
39.00	0.2944	0.0039
40.00	0.2950	0.0036
41.00	0.2954	0.0033
42.00	0.2958	0.0030
43.00	0.2962	0.0028
44.00	0.2965	0.0026
45.00	0.2968	0.0024
46.00	0.2971	0.0022
47.00	0.2974	0.0020
48.00	0.2976	0.0019
49.00	0.2978	0.0017
50.00	0.2980	0.0016
51.00	0.2981	0.0014
52.00	0.2983	0.0013
53.00	0.2984	0.0012
54.00	0.2985	0.0011
55.00	0.2987	0.0010
56.00	0.2988	0.0010

57.00	0.2989	0.0009
58.00	0.2990	0.0008
59.00	0.2990	0.0007
60.00	0.2991	0.0007
61.00	0.2992	0.0006
62.00	0.2992	0.0006
63.00	0.2993	0.0005
64.00	0.2994	0.0005
65.00	0.2994	0.0005
66.00	0.2995	0.0004
67.00	0.2995	0.0004
68.00	0.2995	0.0004
69.00	0.2996	0.0003
70.00	0.2996	0.0003
71.00	0.2996	0.0003
72.00	0.2997	0.0003
73.00	0.2997	0.0002
74.00	0.2997	0.0002
75.00	0.2997	0.0002
76.00	0.2998	0.0002
77.00	0.2998	0.0002
78.00	0.2998	0.0002
79.00	0.2998	0.0001
80.00	0.2998	0.0001
81.00	0.2998	0.0001
82.00	0.2999	0.0001
83.00	0.2999	0.0001
84.00	0.2999	0.0001
85.00	0.2999	0.0001
86.00	0.2999	0.0001
87.00	0.2999	0.0001
88.00	0.2999	0.0001
89.00	0.2999	0.0001
90.00	0.2999	0.0001
91.00	0.2999	0.0001
92.00	0.2999	0.0001

93.00	0.2999	0.0000
94.00	0.2999	0.0000
95.00	0.2999	0.0000
96.00	0.3000	0.0000
97.00	0.3000	0.0000
98.00	0.3000	0.0000
99.00	0.3000	0.0000
100.00	0.3000	0.0000

Hasil Akhir Simulasi:

Populasi Mangsa: 0.3000

Populasi Predator: 0.0000

3. Pada saat $c_1 = 0,9$

Waktu	Prey	Predator
0.00	0.1000	0.5000
1.00	0.0586	0.4259
2.00	0.0383	0.3575
3.00	0.0274	0.2977
4.00	0.0212	0.2468
5.00	0.0174	0.2041
6.00	0.0151	0.1685
7.00	0.0137	0.1390
8.00	0.0128	0.1145
9.00	0.0123	0.0944
10.00	0.0121	0.0777
11.00	0.0121	0.0640
12.00	0.0124	0.0528
13.00	0.0127	0.0435
14.00	0.0133	0.0358
15.00	0.0139	0.0295
16.00	0.0147	0.0243

17.00	0.0156	0.0201
18.00	0.0166	0.0166
19.00	0.0177	0.0137
20.00	0.0189	0.0113
21.00	0.0202	0.0093
22.00	0.0217	0.0077
23.00	0.0232	0.0064
24.00	0.0249	0.0053
25.00	0.0267	0.0044
26.00	0.0285	0.0036
27.00	0.0305	0.0030
28.00	0.0326	0.0025
29.00	0.0347	0.0021
30.00	0.0369	0.0017
31.00	0.0392	0.0015
32.00	0.0416	0.0012
33.00	0.0439	0.0010
34.00	0.0464	0.0009
35.00	0.0488	0.0007
36.00	0.0513	0.0006
37.00	0.0537	0.0005
38.00	0.0562	0.0004
39.00	0.0586	0.0004
40.00	0.0610	0.0003
41.00	0.0633	0.0003
42.00	0.0656	0.0002
43.00	0.0678	0.0002
44.00	0.0699	0.0002
45.00	0.0720	0.0001
46.00	0.0739	0.0001
47.00	0.0758	0.0001
48.00	0.0776	0.0001
49.00	0.0793	0.0001
50.00	0.0809	0.0001
51.00	0.0824	0.0000
52.00	0.0838	0.0000

53.00	0.0851	0.0000
54.00	0.0863	0.0000
55.00	0.0874	0.0000
56.00	0.0885	0.0000
57.00	0.0895	0.0000
58.00	0.0904	0.0000
59.00	0.0912	0.0000
60.00	0.0920	0.0000
61.00	0.0927	0.0000
62.00	0.0933	0.0000
63.00	0.0939	0.0000
64.00	0.0945	0.0000
65.00	0.0950	0.0000
66.00	0.0954	0.0000
67.00	0.0958	0.0000
68.00	0.0962	0.0000
69.00	0.0966	0.0000
70.00	0.0969	0.0000
71.00	0.0972	0.0000
72.00	0.0974	0.0000
73.00	0.0977	0.0000
74.00	0.0979	0.0000
75.00	0.0981	0.0000
76.00	0.0983	0.0000
77.00	0.0984	0.0000
78.00	0.0986	0.0000
79.00	0.0987	0.0000
80.00	0.0988	0.0000
81.00	0.0989	0.0000
82.00	0.0990	0.0000
83.00	0.0991	0.0000
84.00	0.0992	0.0000
85.00	0.0993	0.0000
86.00	0.0994	0.0000
87.00	0.0994	0.0000
88.00	0.0995	0.0000

89.00	0.0995	0.0000
90.00	0.0996	0.0000
91.00	0.0996	0.0000
92.00	0.0996	0.0000
93.00	0.0997	0.0000
94.00	0.0997	0.0000
95.00	0.0997	0.0000
96.00	0.0998	0.0000
97.00	0.0998	0.0000
98.00	0.0998	0.0000
99.00	0.0998	0.0000
100.00	0.0998	0.0000
101.00	0.0999	0.0000
102.00	0.0999	0.0000
103.00	0.0999	0.0000
104.00	0.0999	0.0000
105.00	0.0999	0.0000
106.00	0.0999	0.0000
107.00	0.0999	0.0000
108.00	0.0999	0.0000
109.00	0.0999	0.0000
110.00	0.0999	0.0000
111.00	0.0999	0.0000
112.00	0.1000	0.0000
113.00	0.1000	0.0000
114.00	0.1000	0.0000
115.00	0.1000	0.0000
116.00	0.1000	0.0000
117.00	0.1000	0.0000
118.00	0.1000	0.0000
119.00	0.1000	0.0000
120.00	0.1000	0.0000
121.00	0.1000	0.0000
122.00	0.1000	0.0000
123.00	0.1000	0.0000
124.00	0.1000	0.0000

125.00	0.1000	0.0000
126.00	0.1000	0.0000
127.00	0.1000	0.0000
128.00	0.1000	0.0000
129.00	0.1000	0.0000
130.00	0.1000	0.0000
131.00	0.1000	0.0000
132.00	0.1000	0.0000
133.00	0.1000	0.0000
134.00	0.1000	0.0000
135.00	0.1000	0.0000
136.00	0.1000	0.0000
137.00	0.1000	0.0000
138.00	0.1000	0.0000
139.00	0.1000	0.0000
140.00	0.1000	0.0000
141.00	0.1000	0.0000
142.00	0.1000	0.0000
143.00	0.1000	0.0000
144.00	0.1000	0.0000
145.00	0.1000	0.0000
146.00	0.1000	0.0000
147.00	0.1000	0.0000
148.00	0.1000	0.0000
149.00	0.1000	0.0000
150.00	0.1000	0.0000

Hasil Akhir Simulasi:

Populasi Mangsa: 0.1000

Populasi Predator: 0.0000

c. Tabel hasil iterasi pada titik ekuilibrium E_2

1. Pada saat $\beta = 0,95$

Waktu	Prey	Predator
0.00	0.1000	0.5000
1.00	0.0771	0.4308
2.00	0.0673	0.3675
3.00	0.0657	0.3122
4.00	0.0700	0.2653
5.00	0.0803	0.2261
6.00	0.0971	0.1939
7.00	0.1216	0.1679
8.00	0.1550	0.1473
9.00	0.1975	0.1314
10.00	0.2476	0.1195
11.00	0.3018	0.1111
12.00	0.3548	0.1054
13.00	0.4019	0.1019
14.00	0.4401	0.1000
15.00	0.4689	0.0993
16.00	0.4891	0.0994
17.00	0.5025	0.1001
18.00	0.5109	0.1011
19.00	0.5157	0.1024
20.00	0.5181	0.1038
21.00	0.5189	0.1053
22.00	0.5186	0.1068
23.00	0.5176	0.1084
24.00	0.5162	0.1099
25.00	0.5144	0.1115
26.00	0.5126	0.1130
27.00	0.5106	0.1144
28.00	0.5086	0.1158
29.00	0.5066	0.1172
30.00	0.5047	0.1185
31.00	0.5027	0.1198

32.00	0.5008	0.1210
33.00	0.4990	0.1222
34.00	0.4972	0.1233
35.00	0.4955	0.1244
36.00	0.4939	0.1254
37.00	0.4923	0.1263
38.00	0.4908	0.1272
39.00	0.4893	0.1281
40.00	0.4879	0.1289
41.00	0.4866	0.1297
42.00	0.4854	0.1304
43.00	0.4842	0.1311
44.00	0.4831	0.1318
45.00	0.4820	0.1324
46.00	0.4810	0.1329
47.00	0.4801	0.1335
48.00	0.4792	0.1340
49.00	0.4783	0.1344
50.00	0.4776	0.1349
51.00	0.4768	0.1353
52.00	0.4761	0.1356
53.00	0.4755	0.1360
54.00	0.4749	0.1363
55.00	0.4743	0.1366
56.00	0.4738	0.1369
57.00	0.4733	0.1372
58.00	0.4728	0.1374
59.00	0.4724	0.1376
60.00	0.4720	0.1378
61.00	0.4717	0.1380
62.00	0.4713	0.1382
63.00	0.4710	0.1384
64.00	0.4707	0.1385
65.00	0.4704	0.1387
66.00	0.4702	0.1388
67.00	0.4700	0.1389

68.00	0.4697	0.1390
69.00	0.4695	0.1391
70.00	0.4694	0.1392
71.00	0.4692	0.1393
72.00	0.4690	0.1394
73.00	0.4689	0.1395
74.00	0.4688	0.1395
75.00	0.4686	0.1396
76.00	0.4685	0.1396
77.00	0.4684	0.1397
78.00	0.4683	0.1398
79.00	0.4682	0.1398
80.00	0.4681	0.1398
81.00	0.4681	0.1399
82.00	0.4680	0.1399
83.00	0.4679	0.1399
84.00	0.4679	0.1400
85.00	0.4678	0.1400
86.00	0.4678	0.1400
87.00	0.4677	0.1400
88.00	0.4677	0.1401
89.00	0.4677	0.1401
90.00	0.4676	0.1401
91.00	0.4676	0.1401
92.00	0.4676	0.1401
93.00	0.4675	0.1401
94.00	0.4675	0.1402
95.00	0.4675	0.1402
96.00	0.4675	0.1402
97.00	0.4674	0.1402
98.00	0.4674	0.1402
99.00	0.4674	0.1402
100.00	0.4674	0.1402
101.00	0.4674	0.1402
102.00	0.4674	0.1402
103.00	0.4674	0.1402

104.00	0.4673	0.1402
105.00	0.4673	0.1402
106.00	0.4673	0.1403
107.00	0.4673	0.1403
108.00	0.4673	0.1403
109.00	0.4673	0.1403
110.00	0.4673	0.1403
111.00	0.4673	0.1403
112.00	0.4673	0.1403
113.00	0.4673	0.1403
114.00	0.4673	0.1403
115.00	0.4673	0.1403
116.00	0.4673	0.1403
117.00	0.4673	0.1403
118.00	0.4673	0.1403
119.00	0.4673	0.1403
120.00	0.4673	0.1403

Hasil Akhir Simulasi:

Populasi Mangsa: 0.4673

Populasi Predator: 0.1403

2. Pada saat $\beta = 10$

Waktu	Prey	Predator
0.00	0.1000	0.5000
1.00	0.0481	0.4267
2.00	0.0261	0.3567
3.00	0.0159	0.2955
4.00	0.0108	0.2437
5.00	0.0081	0.2006
6.00	0.0067	0.1649
7.00	0.0060	0.1354

8.00	0.0058	0.1112
9.00	0.0060	0.0914
10.00	0.0067	0.0750
11.00	0.0080	0.0617
12.00	0.0100	0.0507
13.00	0.0132	0.0418
14.00	0.0183	0.0345
15.00	0.0263	0.0285
16.00	0.0389	0.0237
17.00	0.0587	0.0199
18.00	0.0889	0.0169
19.00	0.1333	0.0146
20.00	0.1938	0.0129
21.00	0.2682	0.0117
22.00	0.3485	0.0109
23.00	0.4234	0.0105
24.00	0.4844	0.0104
25.00	0.5287	0.0104
26.00	0.5580	0.0106
27.00	0.5762	0.0108
28.00	0.5868	0.0111
29.00	0.5925	0.0114
30.00	0.5953	0.0118
31.00	0.5963	0.0121
32.00	0.5962	0.0125
33.00	0.5954	0.0129
34.00	0.5942	0.0133
35.00	0.5928	0.0137
36.00	0.5912	0.0141
37.00	0.5895	0.0145
38.00	0.5877	0.0150
39.00	0.5859	0.0154
40.00	0.5840	0.0158
41.00	0.5821	0.0163
42.00	0.5802	0.0167
43.00	0.5783	0.0171

44.00	0.5763	0.0176
45.00	0.5743	0.0180
46.00	0.5723	0.0185
47.00	0.5703	0.0189
48.00	0.5683	0.0194
49.00	0.5663	0.0198
50.00	0.5643	0.0203
51.00	0.5622	0.0207
52.00	0.5602	0.0211
53.00	0.5582	0.0216
54.00	0.5562	0.0220
55.00	0.5542	0.0224
56.00	0.5522	0.0228
57.00	0.5503	0.0233
58.00	0.5483	0.0237
59.00	0.5464	0.0241
60.00	0.5445	0.0245
61.00	0.5426	0.0249
62.00	0.5408	0.0252
63.00	0.5390	0.0256
64.00	0.5372	0.0260
65.00	0.5354	0.0263
66.00	0.5337	0.0267
67.00	0.5320	0.0270
68.00	0.5304	0.0273
69.00	0.5288	0.0277
70.00	0.5272	0.0280
71.00	0.5257	0.0283
72.00	0.5242	0.0286
73.00	0.5227	0.0288
74.00	0.5213	0.0291
75.00	0.5200	0.0294
76.00	0.5187	0.0296
77.00	0.5174	0.0299
78.00	0.5162	0.0301
79.00	0.5150	0.0303

80.00	0.5138	0.0305
81.00	0.5127	0.0308
82.00	0.5117	0.0309
83.00	0.5106	0.0311
84.00	0.5097	0.0313
85.00	0.5087	0.0315
86.00	0.5078	0.0317
87.00	0.5070	0.0318
88.00	0.5062	0.0320
89.00	0.5054	0.0321
90.00	0.5046	0.0322
91.00	0.5039	0.0324
92.00	0.5032	0.0325
93.00	0.5026	0.0326
94.00	0.5020	0.0327
95.00	0.5014	0.0328
96.00	0.5008	0.0329
97.00	0.5003	0.0330
98.00	0.4998	0.0331
99.00	0.4993	0.0332
100.00	0.4989	0.0332
101.00	0.4984	0.0333
102.00	0.4980	0.0334
103.00	0.4977	0.0335
104.00	0.4973	0.0335
105.00	0.4970	0.0336
106.00	0.4966	0.0336
107.00	0.4963	0.0337
108.00	0.4960	0.0337
109.00	0.4958	0.0338
110.00	0.4955	0.0338
111.00	0.4953	0.0339
112.00	0.4951	0.0339
113.00	0.4948	0.0339
114.00	0.4946	0.0340
115.00	0.4944	0.0340

116.00	0.4943	0.0340
117.00	0.4941	0.0341
118.00	0.4939	0.0341
119.00	0.4938	0.0341
120.00	0.4937	0.0341
121.00	0.4935	0.0342
122.00	0.4934	0.0342
123.00	0.4933	0.0342
124.00	0.4932	0.0342
125.00	0.4931	0.0342
126.00	0.4930	0.0343
127.00	0.4929	0.0343
128.00	0.4928	0.0343
129.00	0.4927	0.0343
130.00	0.4926	0.0343
131.00	0.4926	0.0343
132.00	0.4925	0.0343
133.00	0.4924	0.0343
134.00	0.4924	0.0343
135.00	0.4923	0.0344
136.00	0.4923	0.0344
137.00	0.4922	0.0344
138.00	0.4922	0.0344
139.00	0.4921	0.0344
140.00	0.4921	0.0344
141.00	0.4921	0.0344
142.00	0.4920	0.0344
143.00	0.4920	0.0344
144.00	0.4920	0.0344
145.00	0.4919	0.0344
146.00	0.4919	0.0344
147.00	0.4919	0.0344
148.00	0.4919	0.0344
149.00	0.4919	0.0344
150.00	0.4918	0.0344
151.00	0.4918	0.0344

152.00	0.4918	0.0344
153.00	0.4918	0.0345
154.00	0.4918	0.0345
155.00	0.4917	0.0345
156.00	0.4917	0.0345
157.00	0.4917	0.0345
158.00	0.4917	0.0345
159.00	0.4917	0.0345
160.00	0.4917	0.0345

Hasil Akhir Simulasi:

Populasi Mangsa: 0.4917

Populasi Predator: 0.0345

DAFTAR RIWAYAT HIDUP**A. Identitas Diri**

Nama Lengkap : Emamatul Qudsiyah
Tempat, Tanggal Lahir : Jepara, 26 April 2001
Alamat : Desa Lebak RT 3 RW 2,
Kecamatan Pakis Aji,
Kabupaten Jepara
HP : 085257231090
E-mail :amazingemamatulq@gmail.
com

B. Riwayat Pendidikan

1. SD Negeri 1 Lebak lulus tahun 2013
2. MTs Negeri 1 Jepara lulus tahun 2016
3. MAN 2 Kudus lulus tahun 2019
4. UIN Walisongo Semarang

Semarang, 20 Desember 2024

Emamatul Qudsiyah
1908046033