

PERTIDAKSAMAAN HADAMARD DAN ATURAN TRAPESIUM PADA INTEGRAL RIEMANN-STIELTJES

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika



Diajukan oleh :
ANNISA NUR LATIFAH
NIM : 1908046002

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2024**



KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus III) Ngaliyan Semarang
Telp. (024)760129, Fax. (024)7615387.

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **PERTIDAKSAMAAN HADAMARD DAN ATURAN
TRAPESIUM PADA INTEGRAL RIEMANN-
STIELTJES**

Penulis : Annisa Nur Latifah

NIM : 1908046002

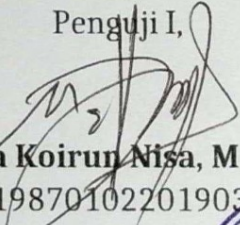
Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji
Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang dan dapat
diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam
Ilmu Matematika.

Semarang, Desember 2024

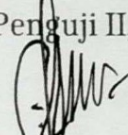
DEWAN PENGUJI

Penguji I,


Eva Koirun Nisa, M.Si.

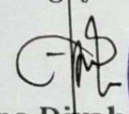
NIP : 1987010220190320060

Penguji II,


Emy Siswanah, M.Sc.

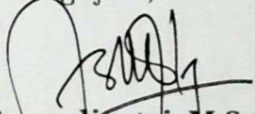
NIP : 198702022011012014

Penguji III,


Seftina Diiyah, M.Sc.

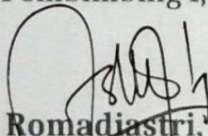
NIP : 1987092120190320060

Penguji IV,


Yulia Romadiastri, M.Sc.

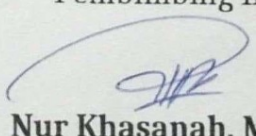
NIP : 198107152005012008

Pembimbing I,


Yulia Romadiastri, M.Sc.

NIP : 198107152005012008

Pembimbing II,


Nur Khasanah, M.Si.

NIP : 199111212019032017



NOTA DINAS

Semarang, 20 Desember 2024

Kepada
Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

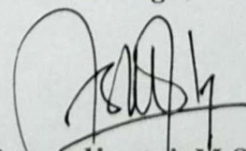
Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : PERTIDAKSAMAAN HADAMARD DAN ATURAN
TRAPESIUM PADA INTEGRAL RIEMANN-STIELTJES
Nama : Annisa Nur Latifah
NIM : 1908046002
Jurusan : Matematika
Program Studi : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,



Yulia Romadistri, M.Sc.

NIP : 198107152005012008

NOTA DINAS

Semarang, 20 Desember 2024

Kepada
Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

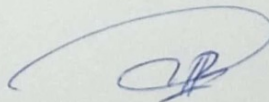
Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : PERTIDAKSAMAAN HADAMARD DAN ATURAN
TRAPESIUM PADA INTEGRAL RIEMANN-STIELTJES
Nama : Annisa Nur Latifah
NIM : 1908046002
Jurusan : Matematika
Program Studi : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing II,



Nur Khasanah, M.Si.

NIP : 199111212019032017

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN PENELITIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Annisa Nur Latifah
NIM : 1908046002
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa Skripsi yang telah saya buat dengan judul **“PERTIDAKSAMAAN HADAMARD DAN ATURAN TRAPESIUM PADA INTEGRAL RIEMANN-STIELTJES”**, adalah Asli (orisinil) atau tidak plagiat (menjiplak) dan belum pernah diterbitkan/dipublikasikan dimanapun dan dalam bentuk apapun.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya tanpa ada paksaan dari pihak manapun juga. Apabila dikemudian hari ternyata saya memberikan keterangan palsu atau ada pihak lain yang mengklaim bahwa Skripsi saya yang telah saya buat adalah hasil karya milik seseorang atau badan tertentu, saya bersedia diproses secara pidana maupun perdata dan kelulusan saya dari **Universitas Islam Negeri (UIN) Walisongo Semarang** dicabut/dibatalkan.

Semarang, 26 Februari 2025

Yang menyatakan



(Annisa Nur Latifah)

ABSTRAK

Integral Riemann-Stieltjes merupakan kajian yang berfokus pada generalisasi dari Integral Riemann, dimana karakteristik dasar dari Integral Riemann dapat diterapkan pada Integral Riemann-Stieltjes. Integral ini memiliki batas dan interval $[a, b]$, yang dapat diselesaikan menggunakan dua metode, yaitu Aturan Trapesium dan Aturan Titik Tengah, yang kemudian digeneralisasi menjadi Pertidaksamaan Hadamard dengan syarat yang cukup untuk pelaksanaannya. Berdasarkan hal tersebut, peneliti melakukan studi lebih mendalam mengenai Integral Riemann-Stieltjes, baik melalui Aturan Trapesium maupun Pertidaksamaan Hadamard. Penelitian ini bersifat studi literatur, yang dilakukan dengan cara menganalisis Aturan Trapesium dan Aturan Titik Tengah dalam konteks Integral Riemann-Stieltjes untuk menghasilkan generalisasi Pertidaksamaan Hadamard. Dalam tulisan ini, dibahas mengenai definisi, analisis, dan pembuktian teorema-teorema Pertidaksamaan Hadamard serta Aturan Trapesium dalam Integral Riemann-Stieltjes dengan mengintegrasikan kedua metode tersebut.

Kata kunci : Generalisasi, Aturan Titik Tengah, Syarat Cukup.

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Wr. Wb. Saya panjatkan puja dan puji atas kehadiran Allah SWT atas nikmat, berkah dan hidayah-Nya menjadikan skripsi saya yang berjudul "*Pertidaksamaan Hadamard dan Aturan Trapesium pada Integral Riemann-Stieltjes*" ini bisa terselesaikan. Sholawat beserta salam senantiasa tercurahkan pada junjungan Nabi Muhammad SAW yang membawa kita dari zaman kegelapan ke zaman yang terang benerang.

Saya menyadari bahwasannya dalam penulisan skripsi ini tidak bisa berhasil tanpa adanya bimbingan dan dukungan serta doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu, saya ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

1. Prof. Dr. H. Musahadi, M.Ag., sebagai Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.
2. Any Muanalifah, M.Si, Ph.D., sebagai Ketua Prodi Matematika.
3. Yulia Romadiastri, M.Sc., sebagai dosen pembimbing pertama.
4. Nur Khasanah, M.Si., sebagai dosen pembimbing kedua.
5. Terima Kasih Kepada Allah SWT yang telah memberikan kesempatan berkuliah walau ada beberapa kendala.
6. Terima Kasih Kepada Ibu saya Nita Dwi Kurniawati. Mamah memang bukan manusia dan ibu yang sempurna tapi beliau ibu yang kuat, berani dan mensupport anak-anaknya.

7. Terima Kasih Kepada Papah saya, Supriyanto. Papah memang orang yang cuek dan satu sisi papah ingin anaknya berusaha, memiliki tujuan dan target untuk dirinya kedepannya menghadapi realita kehidupan.
8. Untuk calon pasangan saya yang saya sendiri tidak tahu dimana. Sehat-sehat dan bekerja keras karena saya banyak jajan dan banyak permintaan
9. Untuk keluarga kecil saya nanti nya, Mungkin saya bukan yang terbaik dan terunggul di segala aspek tapi saya akan terus berusaha.
10. Semua pihak yang tidak dapat saya sebutkan satu persatu yang telah memberikan kontribusi hingga selesainya skripsi ini.

Semoga kebaikan semuanya menjadi amal ibadah yang diterima dan mendapat pahala yang berlimpah dari Allah SWT. Aamiin.

Atas segala kekurangan dan kelemahan dalam skripsi ini saya mengharapkan saran dan kritik yang membangun. Semoga karya tulis yang sederhana ini dapat menjadi bacaan yang bermanfaat dan dapat dikembangkan bagi peneliti-peneliti selanjutnya.

Penulis,

Annisa Nur Latifah

MOTO

“Orang yang hebat adalah orang yang memiliki kemampuan menyembunyikan kesusahan, sehingga orang lain mengira bahwa ia selalu senang.” – Imam Syafi’i

“Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah keadaan suatu kaum, sebelum mereka mengubah keadaan diri mereka sendiri.” – QS Ar-Ra’d 11

“Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya.”

– QS Al-Baqarah 286

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING	ii
PENGESAHAN	iii
NOTA PEMBIMBING I	iv
NOTA PEMBIMBING II	v
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	ix
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Batasan Penelitian	5
1.5 Manfaat Penelitian	5
1.6 Sistematika Penulisan	6
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA	7
2.1 Fungsi	7
2.2 Integral	11
2.3 Integral Riemann-Stieltjes	17
2.4 Pertidaksamaan Hadamard	24
BAB 3 Metode Penelitian	26
BAB 4 Hasil dan Pembahasan	28
4.1 Fungsi Terintegralkan Riemann-Stieltjes	28
4.2 Aturan Trapesium dan Aturan Titik Tengah pada Pertidaksamaan Hadamard dengan Integral Riemann- Stieltjes	33
BAB 5 Kesimpulan dan Saran	58
5.1 Kesimpulan	58
5.2 Saran	58
Daftar Pustaka	58

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Ilmu pengetahuan begitu penting, baik ilmu agama maupun ilmu umum, seperti matematika. Allah SWT memberikan akal dan pikiran untuk menjadikan seorang muslim yang mempunyai derajat sehingga tidak hanya agama saja yang di ajarkan tetapi ilmu pengetahuan umum juga bisa dikembangkan. Bahkan dalam Al-Quran dijelaskan dalam surat Al-Mujadillah ayat 11 sebagai berikut :

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا فِي الْمَجَالِسِ فَافْسَحُوا
يَفْسَحِ اللَّهُ لَكُمْ وَإِذَا قِيلَ انشُرُوا فَانْشُرُوا يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ
وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ

Artinya :

"Hai orang-orang beriman apabila dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan."

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain dan selalu menghadapi fenomena yang semakin kompleks sehingga penting untuk dipelajari matematika sebagai disiplin ilmu dikenal sebagai dasar ilmu pengetahuan dan memiliki cabang-cabang keilmuan seperti ilmu analitik dan ilmu terapan (Daut, 2017) Persoalan yang

melibatkan model matematika banyak muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan, seperti dalam bidang fisika, kimia, ekonomi dan persoalan rekayasa (Muanalifah, 2013). Integral merupakan salah satu integral model matematika yang akan digunakan pada masa yang mendatang (Yafet, 2019).

Konsep integral ialah konsep ilmu matematika yang selalu berkembang seperti ilmu lainnya baik secara pengaplikasiannya maupun teoritis (Kamarullah, 2017). Konsep integral termasuk dalam konsep analisis yang dimana ilmu tersebut menganalisis sesuatu matematika dan mendefinisikan hal tersebut secara logis, sistematis, rasional dan objektif dengan melakukan suatu metodologi tertentu untuk mengkaji suatu konsep matematika yang dimana aplikasi konsep integral bisa digunakan untuk bidang ekonomi, fisika, hingga kedokteran (Lilis, 2009).

Integral adalah salah satu kajian penting dalam matematika. Integral didefinisikan oleh Bernhard Riemann pada tahun 1882 - 1886 M dimana definisi tersebut mengenai Integral Tentu pada fungsi-fungsi terbatas dengan cara yang absolut yang sekarang disebut dengan Integral Riemann. Tidak jauh dari tahun Bernhard Riemann mendefinisikan Integral Riemann, Thomas Joannes Stieltjes melengkapi kembali definisi dari Integral Riemann dengan sebuah fungsi monoton naik dengan suatu batas tertentu yang dinamakan Integral Riemann-Stieltjes (Rumwalang, 2007).

Terdapat hubungan yang bermanfaat dan penting di antara Aturan Trapesium dan Aturan Titik Tengah ini dalam kondisi tertentu. Hal ini dicontohkan oleh Pertidaksamaan Hadamard, yang juga dikenal sebagai pertidaksamaan Hermit Hadamard. Apabila Integral dan Pertidaksamaan digunakan di dalam satu teorema memiliki keunikan dengan aturan tertentu (Mercer,

2008). Pertidaksamaan adalah salah satu cara dari suatu objek 2 atau lebih yang dimana biasanya digunakan untuk membandingkan suatu nilai pasti (Dunkel, 2006). Masalah-masalah ini, seperti yang diharapkan, termasuk dalam kasus paling sederhana yang muncul dalam penelitian tersebut dan contoh-contoh dalam kalkulus variasi yang dipertimbangkan bukanlah satu-satunya yang dapat ditangani oleh pertidaksamaan ini (Dunkel, 2006). Menurut Budak (2021) telah dikaji Pertidaksamaan Hermit-Hadamard yang dimana termasuk salah satu pertidaksamaan yang digunakan pada beberapa pendekatan di tahun-tahun mendatang, dalam teori fungsi konveks dengan menginterpretasikan geometri dan pengaplikasian lainnya. Menurut Budak (2021) mengatakan Pertidaksamaan Hermit-Hadamard dapat dianggap sebagai penyempurnaan konsep konveksitas dan dengan mudah mengikuti Pertidaksamaan Jensen dan penyelesaian yang memberikan beberapa notasi penting yang diperlukan untuk konsep q -kalkulus dan menggunakan pertidaksamaan tipe Trapezium dan Titik Tengah untuk integral q^b dan juga memeriksa antara keterkaitan antara definisi terbaru pada Quantum Integral yang memperoleh bahwa terdapat hubungan dalam pertidaksamaan tipe Trapezium dan Titik Tengah untuk integral q^b dan memiliki keterkaitan pada peniliti sebelumnya (Budak, 2021).

Pada tahun 1883, C. Hermit menyatakan Pertidaksamaan dikemukakan oleh D.S. Mitrinovic dan I.B. Lackovic tahun 1985 dalam jurnal "*Hermit and Convexity*" (Dragomir, 1992). Sepuluh tahun kemudian yaitu 1893, J. Hadamard melengkapi mengenai Pertidaksamaan, yang dikenal sekarang ke depan dengan Pertidaksamaan Hadamard. Secara nyata, beberapa tahun

kedepan banyak yang meneliti mengenai pertidaksamaan tersebut. Beberapa publikasi ilmiah mengenai pertidaksamaan Hadamard dengan berbagai asumsi untuk suatu fungsi dengan variasi tertentu, seperti terbatas, koveks, fungsi terdiferensial n dengan turunannya. Pada tahun 1997, Yang dan Hong melanjutkan penelitian S.S Dragomir dan membuktikan mengikuti teorema dimana suatu fungsi konvek dan monoton tidak menurun dan memiliki suatu batas tertentu, dan diperoleh gabungan integrasi numerik bahwa terdapat Aturan Titik Tengah dan Aturan Trapesium yang mana sangat mirip dengan kontruksi Pertidaksamaan Hadamard dengan fungsi konveks pada interval tertentu pada bilangan riil (Mohammad, 2021).

Beberapa tahun terakhir ini, masalah aproksimasi Integral Riemann-Stieltjes (RS) telah dikaji lebih dalam dengan teori modern pertidaksamaan dan batas-batas kesalahan tertentu menurut aturan yang telah diusulkan dan ditetapkan. Beberapa pendekatan yang akan digunakan di penelitian tahun selanjutnya menurut penulis ialah menggunakan Aturan Trapesium dan Aturan Titik Tengah.

Terkait pemaparan di atas, maka penulis sangat tertarik untuk mengkaji lebih dalam permasalahan ini dan membahasnya dengan judul **Pertidaksamaan Hadamard dan Aturan Trapesium pada Integral Riemann–Stieltjes**.

1.2 Rumusan Masalah

Bagaimana mengkontruksikan Pertidaksamaan Hadamard dengan Aturan Trapesium dan Aturan Titik Tengah pada Integral Riemann-Stieltjes ?

1.3 Tujuan Penelitian

Mengkontruksikan Pertidaksamaan Hadamard dengan Aturan Trapesium dan Aturan Titik Tengah pada Integral Riemann-Stieltjes

1.4 Batasan Penelitian

Ruang lingkup konsep dari mengkontruksikan Pertidaksamaan Hadamard dengan Aturan Trapesium dan Aturan Titik Tengah pada Integral Riemann-Stieltjes (RS), dalam hal ini penulis membatasi ruang lingkup permasalahan yaitu interval tertutup pada $[a, b]$ bilangan real.

1.5 Manfaat Penelitian

1. Manfaat Bagi Penulis

- a. Memperdalam dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari.
- b. Sebagai bentuk Partisipasi penulis dalam pengembangan keilmuan, khususnya bidang matematika.

2. Manfaat Bagi Pembaca

- a. Menambah wawasan dan pengetahuan terhadap integral.
- b. Stimulan kepada pembaca agar dapat mempelajari dan mengembangkan kembali ilmu terutama bidang matematika.

3. Manfaat Bagi Instansi

Menambah bacaan, informasi serta pengetahuan mengenai integral.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika permasalahan ialah runtutan dari beberapa penjelasan dalam sebuah karya ilmiah. Untuk mempermudah dalam membaca penulis meruntutkan penulisan ini sebagai berikut.

Pada bab pertama, dalam bab ini penulis memaparkan mengenai latar belakang integral, Integral Riemann-Stieltjes, rumusan masalah, tujuan, batasan masalah, manfaat penelitian dan juga metode penelitian yang akan dipakai.

Bab kedua, dalam bab ini penulis memaparkan mengenai berbagai teori yang akan dipakai untuk mengacu pembahasan. Memuat Aturan Trapesium, Aturan Titik Tengah, Integral, Integral Riemann-Stieltjes dan Pertidaksamaan Hadamard.

Bab tiga, dalam bab ini penulis memaparkan mengenai metode penelitian yang akan dipakai dan langkah-langkah dalam kepenulisan proposal.

Bab Empat, dalam bab ini penulis memaparkan hasil dari penelitian mengenai mengkontruksi Aturan Titik Tengah dan Aturan Trapesium pada Integral Riemann-Stieltjes untuk Pertidaksamaan Hadamard.

Bab Lima, dalam bab ini memaparkan kesimpulan dan saran kedepannya untuk peneliti yang akan membaca dan menjadi bahan kajian kedepannya.

BAB 2

KAJIAN PUSTAKA

Dalam menunjang kajian mendalam mengenai Pertidaksamaan Hadamard dan Aturan Trapesium untuk Integral Riemann–Stieltjes ada beberapa definisi dan teorema sebagai acuan peneliti untuk kajian ini, berikut definisi maupun teorema yang bisa peneliti lampirkan dalam kajian pustaka ini :

2.1 Fungsi

Definisi 2.1.1 *Fungsi (Bartle dan Sherbert, 2000).*

Diberikan A dan B ialah sebuah Himpunan.

Suatu fungsi dimana A dan B ialah Himpunan f dari pasangan terurut dalam $A \times B$, dimana ada $\forall a \in A$,

$\exists b \in B$ dengan $(a,b) \in f$.

Himpunan A elemen pertama pada fungsi f disebut domain atau daerah asal dari dinyatakan $D(f)$. Himpunan kedua semua di f disebut dengan range atau daerah hasil dari f dinyatakan $R(f)$.

Contoh 2.1.1 *Diberikan bahwa f suatu fungsi dari A ke B , sering dikatakan bahwa f suatu pemetaan dari A ke B atau suatu f memetakan A ke dalam B , bila $(a,b) \in f$ maka*

$$b = f(a)$$

dimana $(a,b) \in f$. Fungsi B merupakan nilai f di titik a , atau peta a terhadap f .

Definisi 2.1.2 Tipe Fungsi (Fahmi dan Soffi, 2018).

Misalkan $f: A \rightarrow B$ merupakan suatu fungsi dari A ke B .

- (a) Fungsi f dianggap injektif (satu-satu) jika untuk sembarang elemen $a_1, a_2 \in A$ dengan $a_1 \neq a_2$ dan $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2$, maka $b_1 \neq b_2$. Oleh Karena itu, f tergolong fungsi injektif.
- (b) Suatu fungsi f dianggap surjektif (onto), jika untuk setiap elemen b dalam himpunan B , terdapat elemen A sehingga $f(a) = b$. Dalam hal ini, fungsi f disebut sebagai fungsi surjektif.
- (c) Jika fungsi f dikatakan bijektif, maka fungsi f harus memiliki 2 sifat yaitu surjektif dan injektif.

Contoh 2.1.2 Diberikan fungsi $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$ dengan aturan berikut: $f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 6$.

Penyelesaian :

Akan ditunjukkan bahwa $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$ dengan syarat $f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 6$.

- (a) Injektif (Satu-ke-satu) Sebuah fungsi disebut injektif jika setiap elemen di kodomain hanya dipetakan oleh satu elemen di domain. Pada fungsi f , kita melihat bahwa: $f(1) = 4, f(2) = 5$ dan $f(3) = 6$. Semua elemen di kodomain $(4, 5, 6)$ hanya dipetakan oleh satu elemen di domain $(1, 2, 3)$.
- (b) Surjektif (Onto) Sebuah fungsi disebut surjektif jika setiap elemen di kodomain memiliki pasangan dari domain. Pada fungsi f , kodomain adalah $4, 5, 6$, dan semua elemen tersebut memiliki pasangan:

4 dipetakan oleh 1, 5 dipetakan oleh 2 dan 6 dipetakan oleh 3. Maka, f surjektif.

(c) *Bijektif (Injektif dan Surjektif)*

Sebuah fungsi disebut bijektif jika fungsi tersebut sekaligus injektif dan surjektif. Karena f sudah terbukti injektif dan surjektif, maka f bijektif.

Definisi 2.1.3 Fungsi Kontinu (Bartle dan Sherbert, 2000).

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $c \in A$. Dapat dikatakan bahwa fungsi f kontinu di c jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk $x \in A$ dengan $|x - c| < \delta$, berlaku bahwa $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Dari definisi tersebut kita bisa simpulkan bahwasannya terdapat tiga syarat agar suatu fungsi dikatakan kontinu terpenuhi, yaitu:

- (a) $f(c)$ ada.
- (b) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ada.
- (c) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Contoh 2.1.3 Diberikan suatu fungsi kontinu $f(x) = x^2$ di titik $c = 2$

Penyelesaian :

Misalkan $f(x) = x^2$, dimana $c = 2$

- (a) misalkan $c = 2$ maka $f(2) = 2^2 = 4$. Maka fungsi tersebut $f(x) = x^2$ terdefinisi untuk semua x , termasuk $x = 2$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ada. misalkan $x \rightarrow c$
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 4$, maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ada.

$$(c) \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 4, \text{ syarat ini juga terpenuhi.}$$

Karena ketiga syarat dipenuhi, fungsi $f(x) = x^2$ adalah fungsi kontinu di $c = 2$.

Definisi 2.1.4 Fungsi Konveks (Greenberg dan Pierskalla, 1970).

Suatu fungsi f dan S suatu himpunan ke $\mathbb{R}$ suatu bilangan riil dimana $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ dianggap konveks pada suatu himpunan $S \subseteq \mathbb{R}^n$ jika,

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

dimana untuk semua bilangan $\lambda \in [0, 1]$ dan $x, y \in S$.

Contoh 2.1.4 suatu fungsi f yang konveks pada $[a, b]$ asumsikan bahwa tidak berkesinambungan pada titik tersebut a .

Penyelesaian :

Berdasarkan definisi konveks, kita memiliki:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\iff \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + h(x) = \frac{f(b) - f(a)}{1}, \text{ dimana } h(b) = 0$$

$$h(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

selanjutnya

$$f(x) - f(a) = (x - a) \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - h(x) \right)$$

diambil kedua sisi $\lim_{x \rightarrow a^+}$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a^+} (x - a) \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} h(x) \right)$$

Batas $\lim_{x \rightarrow a^+}$ menunjukkan bahwa fungsi tersebut kontinu kanan di titik a . Dengan menerapkan argumen serupa, bahwa $f(x)$ kontinu kiri di titik b . Diamana jika f konveks pada interval $[a, b]$, maka pada interval $(a + h, b)$, di mana $h < b - a$ dan h mendekati $b - a$, menunjukkan bahwa adanya hubungan pada interval tersebut. Jadi, karena f adalah fungsi konveks pada $[a, b]$ dan konveks pada interval $(a, b - k)$ untuk $k > b - a$, dan saat k interval $b - a$, seluruh ruas kanan tetap kontinu. Mengingat bahwa $x_0 \in [a, b]$ dapat diekspresikan sebagai $x_0 = a + h = b - k$, dan mempertimbangkan bahwa f kontinu kanan di $a + h$ dan kontinu kiri di $b - k$, kita simpulkan bahwa f kontinu di titik $x_0 \in [a, b]$.

2.2 Integral

Definisi 2.2.1 *Integral Riemann (Bartle dan Sherbert, 2000)*

Suatu fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dan suatu fungsi $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan dapat diintegalkan Riemann pada interval $[a, b]$ jika terdapat bilangan riil $I \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta_\varepsilon > 0$ yang menjamin bahwa untuk setiap partisi P dari $[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta_\varepsilon$ dan setiap subinterval S , kondisi berikut berlaku:

$$|S(f; P) - I| < \varepsilon.$$

Fungsi g disebut sebagai integral Riemann dari f pada interval $[a, b]$ dan dapat dinyatakan sebagai $\int_a^b f(x) dx$. Sekumpulan

fungsi integral Riemann yang mengalami perubahan nilai fungsi pada sejumlah titik terbatas dalam domain masih dapat diintegrasikan Riemann, dengan mempertahankan nilai integral yang sama.

Contoh 2.2.1 Diberikan suatu fungsi $f(x) = x^2$ pada batas $[1, 3]$

Penyelesaian :

Dimisalkan $P = 1, 2, 3$, menggunakan titik tengah ssebagai titik evaluasi. batas $P = 1, 2, 3$ membagi menjadi 2 subinterval dimana interval pertama terdapat $[1, 2]$ dan interval kedua $[2, 3]$ dengan lebar subinterval ialah 1 akan mengevaluasi titik tengah terhadap 2 subinterval,

Titik Tengah untuk $[1, 2]$ adalah $\frac{1+2}{2} = 1,5$ dan Titik Tengah untuk $[2, 3]$ adalah $\frac{2+3}{2} = 2,5$.

Selanjutnya $f(1,5) = (1,5)^2 = 2,25$ dan

$f(2,5) = (2,5)^2 = 6,25$.

Menghitung Jumlah Riemann,

Jumlah Riemann = $f(1,5).1 + f(2,5).1 = 8,5$.

Teorema 2.2.1 (Bartle and Sherbet, 2011)

Jika $f \in \mathbb{R}[a, b]$ dan f terkontinu pada $c \in [a, b]$ maka integral tak tentu F dari f terturunkan pada c dan $F'(c) = f(c)$.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa **Teorema 2.2.1** terbukti, dengan menggunakan definisi turunan fungsi.

Diketahui $f \in \mathbb{R}[a, b]$: Fungsi f terdefinisi dan kontinu pada batas $[a, b]$. Definisi Integral Tak Tentu $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

pertama definisi Integral Tak Tentu, suatu fungsi $F(x)$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

dimana $a \leq x \leq b$.

Selanjutnya, menggunakan definisi turunan. Suatu turunan $F'(x)$ di $x = c$ didefinisikan sebagai:

$$F'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}.$$

Dengan substitusi $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, bisa dituliskan:

$$F(c+h) = \int_a^{c+h} f(t) dt$$

dan bisa dituliskan

$$F(c) = \int_a^c f(t) dt.$$

sehingga, selisih dari $F(c+h) - F(c)$,

$$F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f(t) dt - \int_a^c f(t) dt.$$

Dari sifat integral, dapat ditulis kembali:

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t) dt.$$

Substitusikan ke dalam definisi turunan:

$$F'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_c^{c+h} f(t) dt}{h}.$$

Menurut sifat kontinu suatu fungsi f di c , maka $\forall \epsilon > 0$, ada $\delta > 0$ sehingga jika $|t - c| < \delta$, maka $|f(t) - f(c)| < \epsilon$. Suatu Integral $\int_c^{c+h} f(t) dt$, untuk $h \rightarrow 0$, dengan batas $|c, c+h|$ menuju c . Oleh sifat kontinu, $f(t)$ mendekati $f(c)$ disebut batas.

Suatu fungsi f dengan konstanta c dibuktikan dengan integral:

$$\int_c^{c+h} f(t) dt \approx f(c).h$$

Sehingga

$$\frac{\int_c^{c+h} f(t) dt}{h} \approx \frac{f(c).h}{h} = f(c).$$

Dimisalkan limit $h \rightarrow 0$, kesalahan dari pembuktian $f(t) \approx f(c)$ menjadi nol karena sifat kontinu fungsi f .

Akhirnya didapatkan:

$$F'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_c^{c+h} f(t) dt}{h} = f(c).$$

Kesimpulannya Integral Tak Tentu $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ terdiferensiasi $\forall c \in [a, b]$ dan turunannya adalah $F'(c) = f(c)$.

□

Definisi 2.2.2 Aturan Titik Tengah (Peter R. Mercer, 2008)
Diberikan suatu fungsi f kontinu pada $[a, b]$.

$$\int_a^b f(t) dt \cong f\left(\frac{a+b}{2}\right) [b-a]. \quad (2.2.1)$$

Contoh 2.2.2 Suatu fungsi $f(x) = x^3$ dengan batas $[0, 12]$ dan $n=4$. Akan dicari suatu fungsi $f(x) = x^3$ dengan batas $[0, 12]$

Penyelesaian : Melakukan pendekatan di bawah kurva pada fungsi tersebut.

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah mencari luas persegi dibawah kurva, dengan cara $\frac{b-a}{n}$,

$$\frac{b-a}{n} = \frac{12-0}{4} = 3.$$

Langkah kedua yaitu menghitung panjang persegi $f(x)$ dimana $x = m_i$, karena luas yang diperoleh ialah 4 maka untuk $m_i = m_1, m_2, m_3, m_4$. panjang a ke b ialah 12 kita partisi dengan hasil perhitungan luas persegi didapat

4, dengan (x_i, y_i) diawali dari $x_i = 0, y_i = 0$, maka $(x_i, y_i) = (0, 0), (3, 0), (6, 0), (12, 0)$.

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{x_0+x_1}{2} = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}. & m_3 &= \frac{x_3+x_2}{2} = \frac{9+6}{2} = \frac{15}{2}. \\ m_2 &= \frac{x_2+x_1}{2} = \frac{6+3}{2} = \frac{9}{2}. & m_4 &= \frac{x_4+x_3}{2} = \frac{12+9}{2} = \frac{21}{2}. \end{aligned}$$

di substitusikan hasil tersebut ke dalam fungsi $f(x) = x^3$, maka

$$f(m_1) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}.$$

$$f(m_2) = f\left(\frac{9}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}\right)^3 = \frac{729}{8}.$$

$$f(m_3) = f\left(\frac{15}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}\right)^3 = \frac{3375}{8}.$$

$$f(m_4) = f\left(\frac{21}{2}\right) = \left(\frac{21}{2}\right)^3 = \frac{9261}{8}.$$

Maka sesuai definisi, hasil dari $f(m_i)$ dioperasikan perkalian dengan luas persegi maka,

$$A_1 = \frac{27}{8} \times 3 = \frac{81}{8}.$$

$$A_2 = \frac{729}{8} \times 3 = \frac{2187}{8}.$$

$$A_3 = \frac{3375}{8} \times 3 = \frac{10125}{8}.$$

$$A_4 = \frac{9261}{8} \times 3 = \frac{27783}{8}.$$

Jadi pendekatan dibawah kurva fungsi tersebut

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{81}{8} + \frac{2187}{8} + \frac{10125}{8} + \frac{27783}{8} = 5022.$$

Definisi 2.2.3 Aturan Trapesium (Peter R. Mercer, 2008)

Diberikan suatu fungsi f kontinu pada $[a, b]$.

$$\int_a^b f(t)dt \cong \frac{f(a) + f(b)}{2} [b - a]. \quad (2.2.2)$$

Contoh 2.2.3 suatu fungsi $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 4$. Lakukan pendekatan dibawah kurva dengan Aturan Trapesium.

Penyelesaian :

$$\int_0^4 x^2 dx \approx \frac{f(0)+f(4)}{2} + f(1) + f(2) + f(3) = 8 + 1 + 4 + 9 = 22.$$

dengan nilai aktualnya $\frac{4^3}{3} = \frac{64}{3}$. maka,

$$\int_0^4 x^2 dx \approx \frac{4}{N} \left(\frac{f(0)+f(4)}{2} + f\left(\frac{4}{N}\right) + f\left(\frac{8}{N}\right) + \dots + f\left(\frac{4-N}{N}\right) \right).$$

$$\int_0^4 x^2 dx \approx \frac{4}{N} \left(8 + \frac{16}{N^2} + (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) \right).$$

$$\int_0^4 x^2 dx \approx \frac{4}{N} \left(8 + \frac{16}{N^2} \frac{(N-1)N(2N-1)}{6} \right).$$

$$\int_0^4 x^2 dx \approx \frac{16}{3N^2} (6N + 2(N-1)(2N-1)).$$

$$\int_0^4 x^2 dx \approx \frac{64}{3} + \frac{32}{3N^2}.$$

2.3 Integral Riemann-Stieltjes

Definisi 2.3.1 Fungsi Integral Riemann-Stieltjes bilangan real (Hutahaean, 1989)

Diasumsikan f fungsi bilangan real terbatas dan tertutup $I = [a, b]$ dan a ialah sebuah fungsi monoton naik pada interval I . jika $\int_a^{-b} f da = \int_{-a}^b f da$, sehingga dikatakan terintegral dan dikatakan sebagai : $\int_a^b f da$.

Perbedaan besar antara Integral Riemann dan Integral Riemann Stieltjes sendiri terletak pada bentuk fungsi turunannya (Rumlawang, 2007). Misalkan pada fungsi

umum Integral Riemann-Stieltjes $\int_a^b f(x)dg(x)$ maka Integral Riemann $\int_a^b f(x)dx$. Untuk interpretasi, Integral Riemann digunakan untuk mencari luas sebuah daerah kurva, maka Integral Riemann-Stieltjes(RS) digunakan untuk hal pada bidang tingkat lanjut seperti pada proses stokastik dan di dalam fungsi $g(x)$ memiliki fungsi non-linear.

Contoh 2.3.1 Diketahui fungsi f konstan, $a \geq x \geq b$ dan fungsi α monoton naik pada $[a, b]$. selidiki apakah f terintegral Riemann-Stieltjes terhadap α pada $[a, b]$!

Penyelesaian :

Misalkan $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ partisi sembarang dari $[a, b]$. misal fungsi $f(x) = 1, a \geq x \geq b$, maka $m = \inf(f(x)) = 1 = M = \sup(f(x))$ jadi,

$$\begin{aligned} L(P, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^n m(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \\ &= \alpha(x_n) - \alpha(x_0) \\ &= \alpha(b) - \alpha(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(P, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^n m(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \\
&= \sum_{i=1}^n (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \\
&= \alpha(x_n) - \alpha(x_0) \\
&= \alpha(b) - \alpha(a)
\end{aligned}$$

sehingga

$$\int_a^{-b} f da = \sup(L(P, f, \alpha)) \text{ dan } \int_{-a}^b f da = \inf(U(P, f, \alpha)).$$

Teorema 2.3.1 (Randolph, 1968)

Jika f kontinu dan g monoton pada $[a, b]$ maka $f \in \mathbb{RS}(g)$

Bukti. Untuk menunjukkan bahwa jika f kontinu dan g monoton pada $[a, b]$, maka $f \in \mathbb{RS}(g)$ (yaitu, f Riemann-Stieltjes terintegral terhadap g), kita dapat menggunakan definisi dan sifat dasar dari integral Riemann-Stieltjes. pertama suatu fungsi f dikatakan terintegral Riemann-Stieltjes terhadap fungsi g pada batas $[a, b]$ jika:

$$\int_a^b f(x) dg(x)$$

fungsi f dikatakan terintegral Riemann-Stieltjes terhadap fungsi g pada batas $[a, b]$ ada. Integral didefinisikan sebagai limit dari jumlah Riemann-stieltjes:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta g_i,$$

dengan $\Delta g_i = g(x_i) - g(x_{i-1})$,

ketika partisi $\{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$.

Syarat cukup suatu fungsi $f \in \mathbb{R}\mathbb{S}(g)$ ada dua ;

dimana suatu fungsi f kontinu pada $[a, b]$ dan

fungsi g monoton (baik monoton turun maupun monoton naik) pada $[a, b]$.

(a) Memastikan bahwa suatu fungsi nilai f tidak berubah secara tiba-tiba pada batas $[a, b]$. Hal yang terpenting untuk keberadaan limit jumlah Integral Riemann-Stieltjes diperkecil atau diperhalus batas yang ada di dalam fungsi f .

(b) Jika fungsi g monoton naik maka

$\Delta g_i = g(x_i) - g(x_{i-1}) \geq 0$. Jika fungsi g monoton turun, maka $\Delta g_i \leq 0$. Dalam dua kasus, fungsi g memiliki variasi total terbatas pada $[a, b]$, sehingga jumlah Riemann-Stieltjes:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta g_i$$

memiliki batas limit yang terdefinisi dengan baik.

(c) Kombinasi dari fungsi f kontinu dan fungsi g monoton memastikan bahwa semua fungsi yang berderet dari fungsi f batas diperkecil terintegrasi dengan kontribusi yang bervariasi Δg_i menjadikan Integral Riemann-Stieltjes dapat dihitung.

□

Teorema 2.3.2 (Apostol, 2004)

Jika $h(x) = g'(x)$ kontinu pada $[a, b]$ dan $f \in \mathbb{RS}(g)$ di $[a, b]$,
Maka fh terintegralkan Riemann pada $[a, b]$ dan

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)h(x)dx.$$

Bukti. Asumsikan bahwa terdapat:

- (a) $f \in \mathbb{RS}(g)$ terdefinisi Integral Riemann-Stieltjes
 $\int_a^b f(x)dg(x).$
- (b) $h(x) = g'(x)$, dimana fungsi $g(x) = \int_a^b h(t)dt + g(a)$,
 karena $g'(x) = h(x)$ dan h kontinu pada batas $[a, b]$

Definisi Integral Riemann-Stieltjes dengan

$$\Delta gi = g(x_i) - g(x_{i-1})$$

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \lim_{\|P\| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta gi$$

Substitusikan Δgi ke dalam umlah Integral Riemann-Stieltjes

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta gi = \sum_{i=1}^n f(c_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} h(t) dt.$$

karena $h(x)$ kontinu dan $f(x) \in \mathbb{RS}(g)$, dimana bisa diubah urutan atau posisi dari jumlah dan integral

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(c_i)h(t)dt = \int_a^b f(x)h(x)dx,$$

dengan c_i mendekati x saat $\|P\| \rightarrow 0$.

Karena $h(x)$ kontinu dan $f(x)$ terintegralkan Riemann-Stieltjes terhadap $g(x)$, maka fh terintegralkan pada batas $[a, b]$ dan

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)h(x)dx.$$

□

Tabel 2.5.1 Tabel Perbandingan Integral Riemann dan Integral Riemann-Stieltjes

Aspek	Integral Riemann	Integral Riemann-Stieltjes ($\mathbb{RS}$)
Variabel Integral	Integral terhadap x (variabel independen)	Integral Riemann yang terintegralkan kembali pada fungsi $g(x)$
Bentuk Integral	$\int_a^b f(x) dx$	$\int_a^b f(x) d g(x)$
Intepretasi	Mewakili luas kurva dari $\int_a^b f(x) dx$	Mewakili akumulasi dari $f(x)$ berdasarkan perhitungan dari $g(x)$
Penerapan	Biasanya digunakan dalam masalah Integral Dasar seperti mencari luas	Digunakan pada bidang tingkat lanjut seperti proses stokastik dan dimana fungsi $g(x)$ mewakili suatu yang non-linear

Sumber : Integral Riemann-Stieltjes Pada Fungsi Bernilai Real (Mosal, 2017)

2.4 Pertidaksamaan Hadamard

Definisi 2.4.1 *Pertidaksamaan Hadamard (Constantin P. Niculescu, 2003)*

Dipunyai jika $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ adalah sebuah fungsi konveks dengan $f'' \geq 0$ maka,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}. \quad (2.4.1)$$

Contoh 2.4.1 *fungsi $f(x) = x^2$ memenuhi pertidaksamaan Hadamard pada interval $[0, 2]$.*

Penyelesaian :

Pertama, cek apakah fungsi tersebut konveks.

Untuk $f(x) = x^2$, turunan kedua adalah: $f''(x) = 2 > 0$, untuk semua x . Karena $f''(x) > 0$, maka $f(x) = x^2$ adalah fungsi konveks.

Kedua, hitung nilai-nilai dalam pertidaksamaan. Nilai di titik tengah:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{0+2}{2}\right) = f(1) = 1^2 = 1.$$

Rata-rata Integral :

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &= \frac{1}{2-0} \int_0^2 x^2 dx. \\ &= \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Maka

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

selanjutnya, rata-rata di ujung interval

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = \frac{f(0) + f(2)}{2} = \frac{0^2 + 2^2}{2}.$$

Maka jika di substitusi hasil nilai

$$1 \leq \frac{4}{3} \leq 2.$$

fungsi $f(x) = x^2$ memenuhi Pertidaksamaan Hadamard pada interval $[0, 2]$

BAB 3

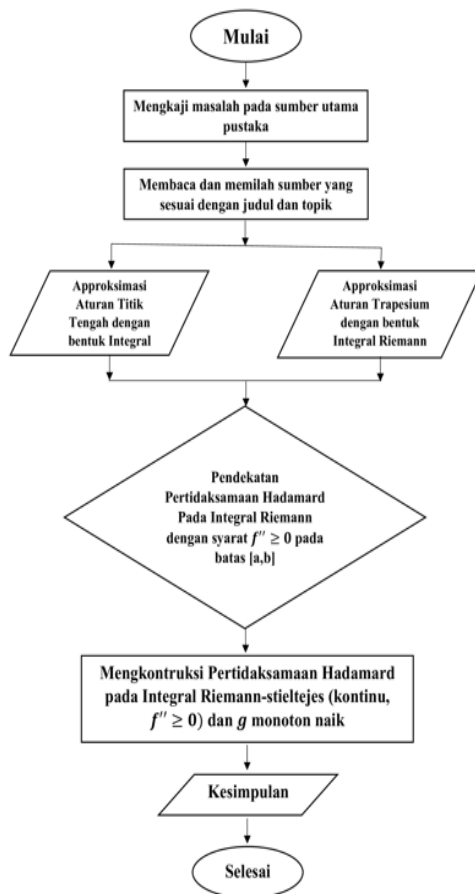
Metode Penelitian

Kajian literatur adalah kajian mengenai pengumpulan kembali pada penelitian dengan membaca berbagai buku, jurnal dan publikasi lain yang berhubungan dengan topik penelitian, untuk menghasilkan sebuah artikel tentang topik atau isu tertentu. (Marzali, Amri 2016)

Mengenai langkah-langkah umum dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Melakukan rancangan terlebih dahulu mengenai permasalahan yang akan dibahas.
2. Menemukan judul dan topik pembahasan yang akan dibahas.
3. Mengumpulkan dan memilih sumber yang sesuai dengan topik
4. Mengumpulkan definisi maupun teorema, dimana penulis mengumpulkan kajian literatur ilmiah dari berbagai sumber mengenai Integral Riemann-Stieltjes, Pertidaksamaan Hadamard, Aturan Trapesium dan Aturan Titik Tengah.
5. Mengkaji mengenai Integral Riemann-Stieltjes, Pertidaksamaan Hadamard, Aturan Trapesium dan Aturan Titik Tengah. Langkah selanjutnya mengkaji Integral Riemann-Stieltjes untuk Pertidaksamaan Hadamard dengan menggunakan Aturan Titik Tengah. Langkah selanjutnya yaitu mengkaji Integral Riemann-Stieltjes untuk Pertidaksamaan Hadamard dengan menggunakan Aturan Trapesium.

6. Menarik kesimpulan, kesimpulan merupakan representasi langkah yang dimana terdapat batasan atas apa yang ditulis penulis dan didasari atas definisi dan teorema yang telah dikaji penulis.



Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian

BAB 4

Hasil dan Pembahasan

Pada bab ini akan dibahas mengenai Terintegralnya Riemann-Stieltjes, yang dimana akan dimulai dari membentuk Aproksimasi Aturan Titik Tengah, Aproksimasi Aturan Trapesium, setelah itu melakukan pembuatan Pertidaksamaan yang digenerasilasikan dan pembuktiannya.

4.1 Fungsi Terintegalkan Riemann-Stieltjes

Untuk f dikatakan kontinu pada $[a, b]$, menggunakan pendekatan dalam Aturan Titik Tengah ialah :

$$\int_a^b f(t)dt \cong f\left(\frac{a+b}{2}\right) [b-a].$$

Perhatikan jika fungsi f yang terintegral Riemann-Stieltjes terhadap fungsi g pada batas $[a, b]$ dengan perumpamaan yang sederhana dengan bentuk Integral Riemenn dan Integral Riemann-Stieltjes dengan mengubah panjang $(b-a)$ pada setiap kuadatur bentuk aproksimasi dengan selisih nilai fungsi

$$g(b) - g(a)$$

maka didapat,

$$\int_a^b f(x)dg(x) \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right) (g(b) - g(a)).$$

Pendekatan dalam Aturan Trapesium

$$\int_a^b f(t)dt \cong \frac{f(a) + f(b)}{2}(g(b) - g(a)).$$

Diperhatikan kembali jika fungsi f yang terintegral Riemann-Stieltjes terhadap fungsi g pada batas $[a, b]$ dengan perumpamaan yang sederhana dengan bentuk Integral Riemann dan Integral Riemann-Stieltjes dengan mengubah panjang $(b - a)$ pada setiap kuadatur bentuk aproksimasi dengan selisih nilai fungsi

$$g(b) - g(a)$$

maka didapat,

$$\int_a^b f(x)dg(x) \approx \frac{f(a) + f(b)}{2}[b - a].$$

Dalam keadaan tertentu ada hubungan yang sangat baik dan bermanfaat antara Aturan Trapesium dan Aturan Titik Tengah. Pertidaksamaan Hadamard (Pertidaksamaan Hermite-Hadamard). Jika f adalah fungsi konveks (Misal $f'' \geq 0$) pada $[a, b]$,

maka kita bisa menggunakan

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)[b-a] \leq \int_a^b f(t)dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}[b-a].$$

Beralih ke Integral Riemann-Stieltjes, untuk f kontinu (katakanlah), dan g adalah fungsi naik (katakanlah) pada $[a, b]$, maka pendekatan Aturan Titik Tengah RS

$$\int_a^b f dg \cong f\left(\frac{a+b}{2}\right)[g(b) - g(a)].$$

Dan untuk pendekatan dalam Aturan Trapesium

$$\int_a^b f dg \cong \frac{f(a) + f(b)}{2}[g(b) - g(a)].$$

Aturan Titik Tengah dan Aturan Trapesium adalah aturan klasik. Aturan Titik Tengah RS dan Aturan Trapesium RS di atas tentunya merupakan aturan kuadratur yang paling jelas pada Integral Riemann -Stieltjes yang direduksi menjadi integral klasik ketika $g(t) = t$. Ini telah digunakan dan dipelajari oleh banyak penulis.

Pertidaksamaan Hadamard yang sejenis yang berlaku dalam konteks Integral Riemann -Stieltjes yaitu: jika f adalah fungsi konveks (misal $f'' \geq 0$) dan fungsi g adalah fungsi naik pada $[a, b]$ maka

$$\frac{f(a) + f(b)}{2}[g(b) - g(a)] \leq \int_a^b f dg \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)[g(b) - g(a)]$$

Contoh 4.1.1 Misalkan fungsi $f(x) = x^2$ dan $g(x) = \sqrt{x}$ pada batas $[a, b] = [1, 0]$.

Penyelesaian :

Ditunjukkan bahwa

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(g(a) - g(b)) > \int_a^b f(x)dg(x)$$

Perhatikan bahwa

$$f\left(\frac{0+1}{2}\right)(g(1) - g(0)) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 (\sqrt{1} - \sqrt{0}) = \frac{1}{4}$$

Dapat menggunakan integrator Riemann-Stieltjes dimana memiliki turunan dan kontinu, didapat

$$\int_0^1 x^2 d(\sqrt{x}) = \int_0^1 x^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{5}$$

sehingga

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(g(a) - g(b)) > \int_a^b f(x) dg(x)$$

Maka untuk $f(x) = x^2$ dan $g(x) = \sqrt{x}$ dengan batas $[1, 0]$ dengan kata lain pertidaksamaan tidak berlaku.

Contoh 4.1.2 Misalkan fungsi $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x^{\frac{5}{2}}$ pada batas $[1, 0]$.

Penyelesaian :

Ditunjukkan bahwa

$$\int_a^b f(x) dg(x) > \frac{f(a) + f(b)}{2} (g(b) - g(a))$$

Maka berlaku pertidaksamaan diatas

Perhatikan Bahwa

$$\frac{f(0) + f(1)}{2} (g(1) - g(0)) = \frac{0^2 + 1^2}{2} \left(1^{\frac{5}{2}} - 0^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

Dapat menggunakan integrator Riemann-Stieltjes dimana memiliki turunan dan kontinu, didapat

$$\int_0^1 x^2 d(x^{\frac{5}{2}}) = \int_0^1 x^2 \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} dx = \int_0^1 \frac{5}{2} x^{\frac{7}{2}} dx = \frac{5}{9} x^{\frac{9}{2}} \Big|_0^1 = \frac{5}{9}$$

sehingga

$$\int_a^b f(x) dg(x) > \frac{f(a) + f(b)}{2} (g(b) - g(a))$$

untuk $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x^{\frac{5}{2}}$ pada batas $[1, 0]$ maka pertidaksamaan tidak berlaku.

Karena Contoh 4.1.1 dan Contoh 4.1.2 tidak berlaku secara umum pertidaksamaan maka bisa dicari kuadratur lain yang dapat dibangun pertidaksamaan pada Integral Riemann-Stieltjes. Bahwasannya jelas ada banyak Aturan Titik Tengah dan Aturan Trapesium pada Integral Riemann-Stieltjes yang masuk akal yaitu dengan direduksi menjadi aturan klasik ketika $g(t) = t$. Tujuan pertama menyelidiki bahwa menemukan generalisasi Pertidaksamaan Hadamard. Setelah ditemukan, bisa kita menemukan kesalahan atau eror untuk pertidaksamaan tersebut dan aturan kuadrat lainnya.

4.2 Aturan Trapesium dan Aturan Titik Tengah pada Pertidaksamaan Hadamard dengan Integral Riemann-Stieltjes

Pembuatan kuadatur pada Integral Riemann-Stieltjes dengan Aturan Trapesium, diperhatikan :

$$\frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a) = \frac{b - a}{2}f(a) + \frac{b - a}{2}f(b).$$

Dapat dilihat bahwa $f(a)$ memiliki faktor pengali $\frac{b-a}{2}$ dan begitu pula dengan $f(b)$.

Selanjutnya untuk $f(x) = 1$ pada $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 1dx = b - a = \frac{1+1}{2}(b - a) = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a).$$

Untuk $f(x) = x$ pada $[a, b]$,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^b xdx \\ &= \frac{(b^2 - a^2)}{2} \\ &= \frac{(a + b)}{2}(b - a). \\ &= \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a). \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $\int_a^b f(x)dx$ tepat sama dengan $\frac{f(a)+f(b)}{2}(b - a)$ maka ada dua fungsi f , yaitu pada $f(x) = 1$ dan $f(x) = x$.

Menurut Peter Mercer (2008), dasar gagasan untuk membentuk suatu kuadatur Integral Riemann-Stieltjes yang bersamaan dengan Aturan Trapezium yang membentuk

$$\int_a^b f(x)dg(x) \approx Af(a) + Bf(b)$$

Dimana $A, B \in \mathbb{R}$ dan mencari nilai A dan B yang memenuhi $\int_a^b f(x)dg(x)$ tepat sama dengan $Af(a) + Bf(b)$ ketika $f(x) = 1$ dan $f(x) = x$.

Untuk $f(x) = 1$, dimana $[a, b]$. $f(a) = f(b) = 1$ sehingga,

$$\int_a^b f(x)dg(x) \approx Af(a) + Bf(b) \iff \int_a^b 1dg(x) = A.1 + B.1 = A + B.$$

Selanjutnya integralkan secara parsial pada Integral Riemann-Stieltjes, maka

$$\int_a^b 1dg(x) = 1.g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)d(1) = [g(b) - g(a)] - 0$$

$$\int_a^b 1dg(x) = g(b) - g(a).$$

$$A + B = g(b) - g(a).$$

Untuk $f(x) = x$, dimana $[a, b]$ $f(a) = a$ dan $f(b) = b$ sehingga,

$$\int_a^b f(x)dg(x) \approx Af(a) + Bf(b) \iff \int_a^b xdg(x) = Aa + Bb.$$

Didapat menggunakan integral parsial pada Integral Riemann-Stieltjes, maka

$$\int_a^b xdg(x) = x.g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)dx = [bg(b) - ag(a)] - \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b xdg(x) = bg(b) - ag(a) - \int_a^b gdx$$

$$\iff Aa + Bb = bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx$$

$$\iff Aa - Ab + Ab + Bb = bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx$$

$$\iff A(a - b) + b(A + B) = bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx.$$

Dari persamaan,

$$A + B = g(b) - g(a).$$

Bisa didapatkan,

$$A(a - b) + b[g(b) - g(a)] = bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx$$

$$\Longleftrightarrow A(a-b) + bg(b) - bg(a) = bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx$$

$$\Longleftrightarrow A(a-b) = bg(a) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx$$

$$\Longleftrightarrow A[-(b-a)] = g(a)[b-a] - \int_a^b g(x)dx$$

$$\Longleftrightarrow A = -g(a) + \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx - g(a).$$

Dimana definisikan $G = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx$, maka

$$A = G - g(a).$$

selanjutnya substitusikan $A = G - g(a)$ ke persamaan

$$A + B = g(a) - g(b) \text{ didapat}$$

$$G - g(a) + b = g(b) - g(a)$$

$$\Longleftrightarrow B = g(b) - G.$$

Maka diperoleh

$$\int_a^b f(x)dg(x) \approx [G - g(a)]f(a) + [g(b) - G]f(b)$$

dengan $G = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx$.

setelah kuadratur diperoleh, ditunjukkan bahwa kuadratur dapat direduksi menjadi kuadratur dengan aturan trapesium pada Integral Riemann-Stieltjes.

Akibatnya, Jika $g(x) = x$ dan $G = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx$, maka

$$[g - g(a)]f(a) + [g(b) - G]f(b) = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a)$$

Jika $g(x) = x$ dan $G = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx$, maka

$$\begin{aligned} G - g(A) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx - a \\ &= \frac{1}{2(b-a)}(b^2 - a^2) - a \\ &= \frac{b+a}{2} - a \\ &= \frac{b-a}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(b) - G &= b - \frac{1}{b-a} \int_b^a x dx \\ &= b - \frac{b+a}{2} \\ &= \frac{b-a}{2}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} [G - g(a)]f(a) + [g(b) - G]f(b) &= \frac{b-a}{2}f(a) + \frac{b-a}{2}f(b) \\ &= \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a) \end{aligned}$$

Pembentukan kuadratur pada Integral Riemann-Stieltjes

dengan Aturan Titik Tengah, diperhatikan :

$$\frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a) = \frac{b - a}{2}f(a) + \frac{b - a}{2}f(b).$$

Dapat dilihat bahwa $f(a)$ memiliki faktor pengali $\frac{b-a}{2}$ dan $f(b)$ juga memiliki faktor pengali $\frac{b-a}{2} \in [a, b]$.

Selanjutnya untuk $f(x) = 1$ pada $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 1dx = b - a = 1 \cdot (b - a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b - a).$$

Untuk $f(x) = x$ pada $[a, b]$,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b xdx = \frac{(b^2 - a^2)}{2} = \frac{(a+b)}{2}(b - a) \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b - a).\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $\int_a^b f(x)dx$ tepat sama dengan $f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b - a)$ maka ada dua fungsi f , yaitu pada $f(x) = 1$ dan $f(x) = x$.

Menurut Peter Mercer (2008), Dasar gagasan untuk membentuk suatu kuadatur Integral Riemann-Stieltjes yang bersamaan dengan Aturan Titik Tengah dengan $A \in \mathbb{R}$ dan $c \in [a, b]$ yang membentuk

$$\int_a^b f dg \cong Af(c).$$

Mencari nilai A dan c yang memenuhi $\int_a^b f(x)dg(x)$ tepat sama dengan $Af(c)$ ketika $f(x) = 1$ dan $f(x) = x$.

Untuk $f(x) = 1$, $f(c) = 1$, sehingga

$$\int_a^b f(x)dg(x) \approx Af(c) \iff \int_a^b 1dg(x) = A \cdot 1 = A.$$

Dari persamaan

$$\int_a^b 1dg(x) = g(b) - g(a).$$

Didapat $A = g(b) - g(a)$. Selanjutnya mencari $c \in [a, b]$. Untuk $f(x) = x$, $f(c) = c$, sehingga

$$\int_a^b f(x)dg(x) \approx Af(c) \iff \int_a^b xdg(x) = Ac.$$

Dari persamaan

$$\int_a^b xdg(x) = bg(b) - ag(a) - \int_a^b gdx.$$

Didapat

$$Ac = bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx$$

$$\iff [g(b) - g(a)]c = bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx.$$

Pada pembahasan ini, g adalah fungsi monoton naik. Dapat dibuktikan bahwa c yang memenuhi persamaan diatas adalah anggota interval $[a, b]$. Pembuktian dibagi dalam 2 kasus yaitu $g(a) = g(b)$ dan $g(a) \neq g(b)$.

Kasus 1 ketika $g(a) = g(b)$.

karena g monoton naik, maka $g(a) \leq g(x) \leq g(b)$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Karena $g(a) = g(b)$, maka $g(x) = g(a) = g(b) = k$ untuk setiap $x \in [a, b]$. $g(x) = g(a) = g(b) = k$ disubstitusikan ke persamaan,

$$Ac = bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx$$

$$\iff [g(b) - g(a)]c = bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx.$$

dari substitusi persamaan diatas maka didapatkan,

$$[k - k]c = bk - ak - \int_a^b kdx$$

$$0 = k(b - a) - k(b - a) = 0.$$

untuk sembarang c bilangan real untuk persamaan diatas maka berlaku, bentuk $c = \frac{a+b}{2}$, maka $c \in [a, b]$.

Kasus 2 ketika $g(a) \neq g(b)$.

karena g monoton naik, maka $g(b) - g(a) > 0$. Dari persamaan

$$Ac = bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx$$

$$\iff [g(b) - g(a)]c = bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx.$$

didapat

$$c = \frac{bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx}{g(b) - g(a)}$$

Terdefinisi karena $g(b) - g(a) > 0$.

Dibuktikan bahwa $c \in [a, b]$ dengan membuktikan bahwa tidak mungkin bisa diaplikasikan $c < a$ atau $b < c$. Andaikan $c < a$, maka

$$[g(b) - g(a)]c < [g(b) - g(a)]a.$$

Dari persamaan

$$Ac = bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx$$

$$\iff [g(b) - g(a)]c = bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx.$$

didapat

$$bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx < [g(b) - g(a)]a$$

$$\iff bg(b) - ag(b) - \int_a^b g(x)dx < ag(b) - ag(a)$$

$$\iff bg(b) - ag(b) < \int_a^b g(x)dx$$

$$\iff g(b) - [b - a] < \int_a^b g(x)dx$$

$$\iff \int_a^b g(b)dt < \int_a^b g(x)dx$$

Karena g monoton naik, seharusnya $g(x) \leq g(b)$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

$$\iff \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b g(b)dx.$$

Kontradiksi. Selanjutnya dimisalkan $b < c$, maka dari persamaan

$$Ac = bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx$$

$$\iff [g(b) - g(a)]c = bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx.$$

didapat

$$bg(b) - bg(a) < bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx$$

$$\iff \int_a^b g(x)dx < bg(a) - ag(a)$$

$$\iff \int_a^b g(x)dx < g(a)[b - a]$$

$$\iff \int_a^b g(x)dx < \int_a^b g(a)dx.$$

karena g monoton naik, seharusnya $g(a) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

$$\int_a^b g(a)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Kontradiksi.

Dari 2 perumpamaan diatas, maka $c \in [a, b]$. Sehingga didapatkan

$$\int_a^b f(x)dg(x) \approx (g(b) - g(a))f(c).$$

Selanjutnya ditunjukkan bahwa persamaaan kuadatur dapat direduksi menjadi kuadatur dengan aturan titik tengah pada Integral Riemann.

Akibatnya Jika $g(x) = x$ dan dimana c bilangan real yang memenuhi

$$[g(b) - g(a)]c = bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx.$$

maka $(g(b) - g(a))f(c) = (b - a)f(\frac{a+b}{2})$.

Jika $g(x) = x$ dan dimana c bilangan real yang memenuhi

$$[g(b) - g(a)]c = bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx.$$

Maka didapat

$$\begin{aligned}
 [g(b) - g(a)]c &= bg(a) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx \\
 \iff (b-a)c &= b^2 - a^2 - \int_a^b xdx. \\
 \iff (b-a)c &= b^2 - a^2 - \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2} \\
 \iff c &= \frac{a+b}{2}
 \end{aligned}$$

Sehingga

$$(g(b) - g(a))f(c) = (g(b) - g(a))f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Perhatikan bentuk persamaan dibawah ini

$$\begin{aligned}
 Ac &= bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx \\
 \iff [g(b) - g(a)]c &= bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx.
 \end{aligned}$$

Dari persamaan diatas dapat dirubah ke bentuk persamaan lain.

$$\begin{aligned}
 [g(b) - g(a)]c &= bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx \\
 \iff \int_a^b g(x)dx &= bg(b) - ag(a) - [g(b) - g(a)]c \\
 \iff \int_a^b g(x)dx &= bg(b) - ag(a) - cg(b) + cg(a) \\
 \iff \int_a^b g(x)dx &= cg(a) - ag(a) + bg(b) - cg(b) \\
 \iff \int_a^b g(x)dx &= g(a)[c - a] + g(b)[b - c].
 \end{aligned}$$

dimana c memenuhi,

$$\int_a^b g(t)dt = g(a)[c - a] + g(b)[b - c].$$

dengan

$$c = \frac{bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(t)dt}{g(b) - g(a)}.$$

Perlu ditunjukkan bahwa c itu ada. Dengan menggunakan teorema rata-rata dari kedua integral:

Misalkan fungsi konveks f di turunkan dua kali pada $[a, b]$ dan g fungsi monoton naik pada $[a, b]$ maka terdapat $c \in [a, b]$ sehigga $\int_a^b g(t)dt = g(a)[c - a] + g(b)[b - c]$.

Akan ditunjukkan bahwa kedua aturan tersebut mampu membangun Pertidaksamaan Hadamard pada Integral

Riemann–Stieltjes, yang selanjutnya dapat direduksi menjadi Pertidaksamaan Hadamard pada integral Riemann.

Teorema 4.2.1 *Misalkan fungsi konveks f di turunkan dua kali pada $[a, b]$ dan g fungsi monoton naik pada $[a, b]$ maka terdapat*

$$\int_a^b g(t)dt = g(a)[c - a] + g(b)[b - c].$$

dengan

$$G = \frac{1}{b - a} \int_a^b g(t)dt$$

jika $f'' \leq 0$ dipunyai

$$f(c)[g(b) - g(a)] \leq \int_a^b f dg \leq [G - g(a)]f(a) + [g(b) - G]f(b).$$

Dikarenakan fungsi f diturunkan dua kali maka kontinu di $[a, b]$ sehingga $f \in \mathbb{R}[a, b]$. Maka g monoton naik di $[a, b]$ maka $f \in \mathbb{RS}(g)$ pada $[a, b]$. Pembuktian akan dilakukan pada sebelah kanan terlebih dahulu.

$$\int_a^b f(x)dg(x) \leq [G - g(a)]f(a) + [g(b) - G]f(b).$$

Karena g kontinu pada $[a, b]$, maka $g \in \mathbb{R}[a, b]$ sehingga bisa diinterpesikan $h_1(x) = g(x) - G$ dan $H_1(x) = \int_a^x h_1 du$, dimana $x \in [a, b]$ dan $u \in [a, b]$.

Perhatikan $H_1(a) = \int_a^b h_1(x)dx = 0$.

Selanjutnya diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 h_1(b) &= \int_a^b h_1(x) dx \\
 &= \int_a^b (g(x) - G) dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b G dx \\
 &\iff H_1(b) = \int_a^b g(x) dx - (b-a)G \\
 &= \int_a^b g(x) dx - (b-a) \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx = 0
 \end{aligned}$$

Maka $H_1(a) = H_1(B) = 0$. Kemudian

$$\begin{aligned}
 &\int_a^b f(x) dg(x) - f(c)(g(b) - g(a)) \\
 &= \int_a^c f(x) g dx + \int_c^b f(x) dg(x) - f(c)g(b) + f(c)g(c) - f(c)g(c) \\
 &+ f(c)g(a) \\
 &= \int_a^c f(x) dg(x) + \int_c^b f(x) dg(x) + f(c)(g(c) - g(b)) \\
 &- f(c)(g(c) - g(a)) \\
 &= \int_a^b f(x) d(g(x) - G) - [(g(x) - G)f(x)]|_a^b
 \end{aligned}$$

Menggunakan integral parsial pada Integral Riemann–Stieltjes, lalu

$$\int_a^b f(x)d(g(x) - G) - [(g(x) - G)f(x)]_a^b = \int_a^b (g(x) - G)df(x).$$

Dikarenakan memiliki f'' , maka f' diturunkan sehingga diketahui bahwa f' kontinu. Maka

$$\begin{aligned} & - \int_a^b (g(x) - G)df(x) \\ &= - \int_a^b (g(x) - G)f'(x)dx \\ &= - \int_a^b f'(x)(g(x) - G)dx \\ &= - \int_a^b f'(x)h_1(x)dx. \end{aligned}$$

Dimana $h_1(x) = g(x) - G$ dengan g fungsi kontinu pada $[a, b]$ maka $h_1(x) = g(x) - G$ kontinu pada $[a, b]$. $H'_1(x) = h_1(x)$ dengan $[a, b]$ maka

$$- \int_a^b f'(x)h_1(x)dx = - \int_a^b f'(x)H'_1(x)dx.$$

Dengan menggunakan integral parsial pada Integral Riemann, maka

$$-\int_a^b f'(x)H_1'(x)|_a^b + \int_a^b H_1(x)f''(x)dx.$$

Karena $H_1(a) = H_1(b) = 0$, $-f'(x)H_1(x)|_a^b = 0$ sehingga

$$-\int_a^b f'(x)H_1'(x)dx = \int_a^b H_1(x)f''(x)dx.$$

Maka bisa dibuktikan bahwa

$$\int_a^b H_1(x)''(x)dx \leq 0$$

Menunjukkan bahwa $H_1(x) \leq 0$ dan $f'' \geq 0$ dengan batas $[a, b]$.

karena f konveks dan diturunkan dua kali dengan batas $[a, b]$.

Menurut teorema perhitungan terhadap suatu nilai rata-rata untuk integral, terdapat suatu $\tau \in [a, b]$ sedemikian rupa sehingga.

$$g(\tau) = \frac{\int_a^b g(x)dx}{b-a} = G.$$

Pertama untuk $g(x) \leq G$ untuk $x \in [a, \tau]$,

$$H_1(x) = \int_a^x h_1(u)du = \int_a^x (g(u) - G)du \leq \int_a^x (G - G)du = 0.$$

Selanjutnya $g(x) \leq G$ untuk $x \in [\tau, b]$,

$$\begin{aligned} H_1(x) &= \int_a^x h_1(u) du = \int_a^b (g(u) - G) du + \int_b^x (g(u) - G) du \\ &\iff H_1(x) = H_1(b) - \int_x^b (g(u) - G) du \\ &\iff 0 + \int_x^b (G - g(u)) du \leq \int_x^b (G - G) du = 0. \end{aligned}$$

Dilihat bahwa $H_1(x) \leq 0 \forall, x \in [a, b]$ maka $H_1(x)f''(x) \leq 0 \forall, x \in [a, b]$ Maka

$$\int_a^b f(x) dg(x) - [G - g(a)f(a) + (g(b) - G)f(b)] = \int_a^b H_1(t)f''(t)dt \leq 0.$$

Dengan demikian terbukti

$$\int_a^b f(x) dg(x) \leq [(G - g(a))f(a) + (g(b) - G)f(b)].$$

Didefinisikan

$$h_2(x) = \begin{cases} g(x) - g(a), & x \in [a, c] \\ g(x) - g(b), & x \in (c, b] \end{cases}$$

dan $H_2(x) = \int_a^x h_2(u) du$ dimana $x \in [a, b]$ dan $u \in [a, x]$.

Diperhatikan bahwa $H_2(a) = \int_a^a h_2(x) dx = 0$.

Selanjutnya diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} H_2(b) &= \int_a^b h_2(x)dx = \int_a^c h_2(x)dx + \int_c^b h_2(x)dx \\ &= \int_a^c (g(x) - g(a))dx + \int_c^b (g(x)g(b))dx \\ &= \int_a^b g(x)dx - g(a)[c - a] - g(b)[b - c] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Maka $H_2(a) = H_2(b) = 0$. Selanjutnya

$$\begin{aligned}
& \int_a^b f(x)dg(x) - f(c)(g(b) - g(a)) \\
&= \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x) - f(c)f(b) + f(c)g(c) \\
&\quad - f(c)g(c) + f(c)g(a) \\
&= \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x) + f(c)(g(c) - g(b)) \\
&\quad - f(c)(g(c) - g(a)) \\
&= \int_a^c f(x)dg(x) - f(c)(g(c) - g(a)) + \int_c^b f(x)dg(x) \\
&\quad + f(c)(g(c) - g(b)) \\
&= \int_a^c f(x)dg(x) - [f(c)(g(c) - g(a)) - f(a)(g(a) - g(a))] \\
&\quad + \int_c^b f(x)dg(x) - [f(b)(g(b) - g(b)) - f(c)(g(c) - g(b))] \\
&= \int_a^c f(x) d(g(x) - g(a)) - f(t)(g(t) - g(a))|_a^c \\
&\quad + \int_c^b f(x) d(g(x) - g(b)) - f(t)(g(t) - g(b))|_c^b \\
&= - \int_a^c (g(x) - g(a))df(x) - \int_c^b (g(x) - g(b))df(x) \\
&= - \int_a^c h_2(x)df(x) - \int_c^b h_2(x)df(x)
\end{aligned}$$

Karena f'' ada, maka f' dapat dibedakan, yang menunjukkan bahwa f' kontinu. Akibatnya, integral Riemann-Stieltjes dari $-\int_a^c h_2(x)df(x)$ dan $-\int_c^b h_2(x)df(x)$ dapat diubah menjadi integral Riemann. Mengingat bahwa g kontinu pada interval $[a, b]$, dapat disimpulkan bahwa $h_2(x)$ kontinu pada interval $[a, b] - [c]$.

$$\begin{aligned} & -\int_a^c h_2(x)df(x) - \int_c^b h_2(x)df(x) \\ &= -\int_a^c h_2(x)f'(x)dx - \int_c^b h_2(x)f'(x)dx \\ &= -\int_c^a f'(x)h_2(x)dx - \int_c^b f'(x)h_2(x)dx. \end{aligned}$$

$H_2'(x) = h_2(x)$ pada batas $[a, b] - [c]$ karena $[c]$ ialah himpunan berhingga maka

$$\begin{aligned} & -\int_a^c f'(x)h_2(x)dx - \int_c^b f'(x)h_2(x)dx \\ &= -\int_a^c f'(x)H_2(x)dx - \int_c^b f'(x)H_2(x)dx \\ &= -\int_a^b f'(x)H_2(x)dx \end{aligned}$$

Dengan menggunakan integral parsial pada integral Riemann

$$\begin{aligned} & - \int_a^b f'(x) H_2(x) \\ & = -f'(x) H_2(x) \Big|_a^b + \int_a^b H_2(x) f''(x) dx. \end{aligned}$$

Karena $H_2(a) = H_2(b) = 0$. maka $-f'(x) H_2(x) \Big|_a^b = 0$.

$$- \int_a^b f'(x) H_2'(x) dx = \int_a^b H_2(x) f''(x) dx.$$

Diperoleh

$$\int_a^b f(x) dg(x) - f(c)(g(b) - g(a)) = \int_a^b H_2(x) f''(x) dx.$$

Akan ditunjukkan bahwa $\int_a^b H_2(x) f''(x) dx \geq 0$

dengan $H_2(x) \geq 0$ dengan batas $[a, b]$ dan $f'' \geq 0$.

Untuk $x \in [a, c]$,

$$H_2(x) = \int_a^x h_2(u) du = \int_a^x (g(c) - g(a)) du \geq \int_a^x (g(a) - g(a)) = 0.$$

Untuk $x \in [c, b]$,

$$\begin{aligned}
 H_2(x) &= \int_a^x h_2(u) du = \int_a^c (g(u) - g(a)) du + \int_c^x (g(u) - g(b)) du \\
 &= \int_a^x g(u) du - g(a)[c - a] - g(b)[x - c] \\
 &= \int_a^b g(u) du - \int_x^b g(u) du - g(a)[c - a] - g(b)[x - c] \\
 &= \int_a^b g(u) du - g(a)[c - a] - \int_x^b du - g(b)[x - c]
 \end{aligned}$$

karena $\int_a^b g(x) dx = g(a)[c - a] + g(b)[b - c]$ maka diperoleh,

$$\begin{aligned}
 H_2(x) &= \int_a^b g(u) du - g(a)[c - a] - \int_x^b g(u) du - g(b)[x - c] \\
 &= g(b)[b - c] - \int_x^b g(u) du - g(b)[x - c] \\
 &= g(b)[b - x] - \int_x^b g(u) du \\
 &= \int_x^b g(b) du - \int_x^b g(u) du \\
 &= \int_x^b (g(b) - g(u)) du \geq 0.
 \end{aligned}$$

Dapat dikatakan bahwa $H_2(x) \geq 0$,

dimana terdapat x di bilangan riil dengan batas interval $[a, b]$.

Maka turunan kedua pada $H_2(x)f''(x)dx \geq 0$, Terdapat bilangan riil di x dengan interval pada batas $[a, b]$

Oleh karena itu

$$\int_a^b f(x)dg(x) - f(c)(g(b) - g(a)) = \int_a^b H_2(x)f''(x)dx \geq 0.$$

Terbukti bahwa

$$f(c)(g(b) - g(a)) \leq \int_a^b f(x)dg(x).$$

Telah dibuktikan sebelumnya bahwa

$$\int_a^b f(x)dg(x) \leq [G - g(a)]f(a) + [g(b) - G]f(b).$$

Dan terbukti bahwa Pertidaksamaan Hadamard dengan Aturan Titik Tengan dan Aturan Trapesium pada Integral Riemann-Stieltjes

$$f(c)(g(b) - g(a)) \leq \int_a^b f(x)dg(x) \leq [G - g(a)]f(a) + [g(b) - G]f(b)$$

BAB 5

Kesimpulan dan Saran

5.1 Kesimpulan

Membangun (atau mengkonstruksi) rumus memerlukan langkah-langkah sistematis untuk memahami hubungan antara variabel dan prinsip yang mendasarinya. Pertama membentuk Integral Riemann dengan Aturan Trapesium, setelah itu di Integral secara parsial pada Integral Riemann-Stieltjes dan membentuk Integral Riemann-Stieltjes di aturan Trapesium. Terbukti bahwa Pertidaksamaan Hadamard dengan Aturan Titik Tengan dan Aturan Trapesium pada Integral Riemann-Stieltjes

$$f(c)(g(b) - g(a)) \leq \int_a^b f(x)dg(x) \leq [G - g(a)]f(a) + [g(b) - G]f(b)$$

5.2 Saran

Pembentukan pertidaksamaan dengan kedua aturan tersebut dapat diperluas. Dalam konteks ini, kedua aturan tersebut dapat dikembangkan dengan batasan yang lebih luas, serta mempertimbangkan kesalahan pada nilai yang tepat maupun kesalahan pada batasan yang lebih luas, misalnya pada bilangan kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

- Budak, Huseyin. 2021. Budak, Huseyin. 2021. *Some Trapezoid and Midpoint Type Inequalities For Newly Defined Quantum Integrals*. Proyecciones (Antofagsta. On line).
- W. Alomari, Mohammad. 2021. *A Generalization Of Hermite-Hadamard's Inequality*. Arxiv Cornell University: United States.
- Mercer, Peter R. 2008. *Hadamard's inequality and Trapezoid Rules for the Riemann-Stieltjes integral*. Journal Of Mathematical Analysis And Applications.
- Bartle, R. G dan Donald R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis*. 3th. USA: John Wiley and Sons.
- Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P. 1970. *Surrogate Mathematical Programming*. Operations Research.
- A. Cambini and L. Martein. 2009. *Generalized Convexity and Optimization: Theory and Applications*. Springer. Berlin. Heidelberg.
- Hutahaeen, Effendi. 1989. *Analisis Real I*. Jakarta: Karunika Jakarta Universitas Terbuka.
- Constantin P. Niculescu. 2003. *Old And New On The Hermite-Hadamard Inequality*. Real Analysis Exchange. Romania: University of Craiova.
- Marzali, Amri. 2016. *Menulis Kajian Literatur*. Jurnal Etnosia. Vol. 01. No. 02.

- Ubaidillah, Firdaus. 2013. *Kekonvergenan Barisan Di Dalam Ruang Fungsi Kontinu $C[a,b]$* . Jurnal CAUCHY. Vol 2, No 4.
- Rumlawang, Francis Y. 2007. *Sifat - Sifat Integral Riemann-Stieltjes*. Barekeng. Vol. 1. No. 2. hal.25-30.
- Apostol, T.M. 2004. *Mathematical Analysis (2nd ed)*. Hong Kong: Pearson Education Asia Limited and China Machine press.
- Atkinson, K.E. 1989 . *An Introduction to Numerical Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Bartle, R.G. 1964. . *The Elements of Real Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Niculescu, C.P., & Persson, Lars-Erik. 2004 . *Convex Function and Their Application*. Springer-Verlag.
- Randolph, J.E. 1968 . *Basic Real And Abstract Analysis*. New York and London: Academic Press.
- lipschutz, Seymour. 1964 . *Set Theory*. Polytechnic Insitute of Brooklyn. McGRAW-HILL Publising Company.
- Rumlawang, Francis. 2007 . *SIFAT-SIFAT INTEGRAL RIEMANN-STIELTJES* Barekeng. Vol. 1. No. 2.
- Daut, Muhammad. 2017 . *PEMBELAJARAN MATEMATIKA DALAM PERSFEKTIF KONSTRUKTIVISME*. NIZHAMIYAH Jurnal Pendidikan Islam dan Teknologi Pendidikan. Vol. VII. No 2.
- Muanalifah, Any. 2017 . *PEMANFAATAN SOFTWARE MATLAB DALAMPEMBELAJARAN METODE NUMERIK POKOKBAHASAN SISTEM PERSAMAAN LINEARSIMULTAN*. JurnalPHENOMENON. Volume 1 Nomor 1.

- Pandu, Yafet.k. 2019 . *PENERAPAN INTEGRAL NUMERIK DALAM MENGHITUNG LUAS DAERAH TIDAK BERATURAN*. ASIMTOT: JURNAL KEPENDIDIKAN MATEMATIKA. Volume 1 Nomor 2.
- Kamarullah. 2017 . *PENDIDIKAN MATEMATIKA DI SEKOLAH KITA*. Al Khawarizmi: Jurnal Pendidikan dan Pembelajaran Matematika. Vol. 1. No. 1.
- lilis. 2019 . *Kajian Integral Riemann-Stieltjes*. Skripsi UIN Malik Ibrahim Malang.
- Ramawati. 2024 . *ANALISIS PEMAHAMAN MATEMATIS KONSEP INTEGRAL SISWA/SISWI KELAS XII MIPA 7 SMAN 13 MEDAN*. ELIPS: JURNAL PENDIDIKAN MATEMATIKA. Volume 5 Nomor 1.
- Bartle, R.G and Sherbet, D.R. 2011 .*Introduction to Real Analysis*(4th ed.). New York: John Wiley and Sons, Inc.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP
Curriculum Vitae



Nama : Annisa Nur Latifah
Alamat : Perumahan Taman Raya Bekasi Blok i4/18
Nomor Telepon : 085973726428
Email : annisanurl1309@gmail.com
Jenis Kelamin : Perempuan
Tanggal Kelahiran : 13 September 2001
Status Marital : Lajang
Warga Negara : Indonesia
Agama : Islam

Riwayat Pendidikan

Jenjang Pendidikan :

No	Tahun Pendidikan	
1	2019-2024	UIN WALISONGO SEMARANG
2	2016-2019	SMA N 7 TAMBUN SELATAN
3	2013-2016	SMP N 3 TAMBUN SELATAN
4	2007-2013	SD N 05 MANGUN JAYA

Riwayat Organisasi

1. Koordinator Departemen Komunikasi dan Informasi 2022 – 2023
Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika
2. Anggota Departemen Komunikasi dan Informasi 2021 - 2022
Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika
3. Bendahara 1 2022 - 2023
UKM Kempo UIN Walisongo
4. Bendahara 2 2021 - 2022
UKM Kempo UIN Walisongo

Riwayat Pengalaman Kerja

Tahun : 2021

Instansi / Perusahaan : Collegawan

Posisi : Design Grafis

Tahun : 2022

Instansi / Perusahaan : Magang Bank BTN Kantor Cabang Cikarang

Posisi : LoA Admin Service and Collection

Demikian CV ini saya buat dengan sebenarnya.

(Annisa Nur Latifah)