

**PENERAPAN KONTROL OPTIMAL PENGENDALIAN
JARAK, PENEMUAN KASUS DAN PENGOBATAN PADA
PENYEBARAN TUBERKULOSIS DI KOTA SEMARANG**

SKRIPSI

**Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika**



Oleh : ERLINDA DIAH PRAWATI
NIM : 2108046100

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2025**

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Erlinda Diah Prawati
NIM : 2108046100
Jurusan/Program Studi : Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

PENERAPAN KONTROL OPTIMAL PENGENDALIAN JARAK, PENEMUAN KASUS DAN PENGOBATAN PADA PENYEBARAN TUBERKULOSIS DI KOTA SEMARANG

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 7 Februari 2025
Pembuat pernyataan,



Erlinda Diah Prawati
NIM : 2108046100



KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : Penerapan Kontrol Optimal Pengendalian Jarak,
Penemuan Kasus dan Pengobatan pada Penyebaran
Tuberkulosis di Kota Semarang

Penulis : Erlinda Diah Prawati

NIM : 2108046100

Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji
Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima
sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu
Matematika.

Semarang, 23 April 2025

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

Yulia Romadistri, S.Si, M.Sc

NIP : 19810715 200501 2 008

Penguji II,

Yolanda Norasia, M.Si.

NIP : 19940923 201903 2 011

Penguji III,

Aini Fitriyah, M.Sc

NIP : 19890929 201903 2 021

Penguji IV,

Eva Khoirun Nisa, M.Si.

NIP : 19870102 201903 2 010

Pembimbing I,

Yolanda Norasia, M.Si.

NIP : 19940923 201903 2 011

NOTA DINAS

Semarang, 7 Februari 2025

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : **PENERAPAN KONTROL OPTIMAL
PENGENDALIAN JARAK, PENEMUAN KASUS
DAN PENGOBATAN PADA PENYEBARAN
TUBERKULOSIS DI KOTA SEMARANG**

Nama : Erlinda Diah Prawati

NIM : 2108046100

Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,



Yolanda Norasia, M.Si

NIP : 19940923 201903 2 011

ABSTRAK

Pada Skripsi ini bertujuan untuk mengurangi penyebaran penyakit tuberkulosis dengan penerapan kontrol optimal pengendalian jarak, penemuan kasus, dan pengobatan pada model penyebaran tuberkulosis. Model penyebaran tuberkulosis menggunakan model SEIR (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered*) dengan tiga strategi kontrol optimal yang digunakan yaitu kontrol pengendalian jarak pada Subpopulasi *Susceptible*, kontrol penemuan kasus pada Subpopulasi *Exposed*, dan kontrol pengobatan pada Subpopulasi *Infected*. Tujuan kontrol optimal pada model penyebaran tuberkulosis SEIR ini adalah untuk meminimumkan jumlah Subpopulasi *Susceptible*, *Exposed*, dan *Infected*, serta memaksimumkan Subpopulasi *Recovered*. Kontrol optimal diperoleh dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin, kemudian diselesaikan secara numerik menggunakan Metode *Sweep* Maju-Mundur. Simulasi numerik menunjukkan bahwa pemberian pengendalian jarak, penemuan kasus, dan pengobatan efektif untuk meminimumkan jumlah Subpopulasi *Susceptible*, *Exposed*, dan *Infected*, serta memaksimumkan Subpopulasi *Recovered*.

Kata kunci : Kontrol Optimal, Model Penyebaran Tuberkulosis, Prinsip Minimum Pontryagin, Metode *Sweep* Maju-Mundur.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil'alamin, segala puji dan syukur kehadiran Allah SWT atas rahmat, hidayah, dan inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Penerapan Kontrol Optimal Pengendalian Jarak, Penemuan Kasus, dan Pengobatan pada Penyebaran Tuberkulosis di Kota Semarang". Sholawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Skripsi ini disusun untuk memenuhi persyaratan dalam memperoleh gelar Sarjana Matematika (S-1) pada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang Jurusan Matematika. Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari berbagai hambatan dan kesulitan, namun berkat bimbingan, saran, dan bantuan dari berbagai pihak, baik secara langsung maupun tidak langsung, skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada yang terhormat:

1. Prof. Dr. H. Musahadi, M.Ag. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang
2. Any Muanalifah, M.Si, Ph.D., dan Prihadi Kurniawan, M.Sc., selaku Ketua dan Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.
3. Yolanda Norasia, M.Si., sebagai Dosen Pembimbing yang telah meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran untuk memberikan bimbingan, arahan, dan motivasi selama penelitian dan penulisan skripsi.
4. Ariska Kurnia Rachmawati, M.Sc., selaku Dosen Wali yang telah mendampingi penulis sepanjang masa studi di Program

Studi Matematika UIN Walisongo Semarang.

5. Segenap dosen di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.
6. Orang Tua tercinta, Bapak Parji Abidin dan Ibu Kusniatun yang telah memberikan dukungan, semangat, perhatian, serta selalu mendoakan kepada penulis untuk bisa menyelesaikan tugas akhir skripsi ini. Penulis mengucapkan terimakasih kepada kedua orang tua yang selalu mengusahakan untuk anaknya menjadi sarjana, walaupun beliau tidak merasakan pendidikan sampai dibangku perkuliahan.
7. Adik tersayang, Muhammad Rehan Saputra yang telah menjadi penyemangat dan pelipur lara di setiap perjalanan penulis. Kehadiranmu memberikan warna dalam hidup saya dan motivasi untuk terus berusaha menjadi panutan yang baik.
8. Keluarga besar penulis, terimakasih selalu memberikan dukungan dan doa kepada penulis.
9. Teman-teman Matematika angkatan 2021 terkhusus MM-C yang telah berbagi kebersamaan, dukungan, dan semangat selama masa perkuliahan. Terima kasih atas kerja sama, diskusi, dan tawa yang membuat perjalanan ini menjadi lebih bermakna.
10. Segenap teman dan pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah memberikan kontribusi hingga selesainya skripsi ini.

11. Untuk diri saya Erlinda Diah Prawati terimakasih telah kuat sampai detik ini, yang mampu melewati berbagai rintangan yang ada. Yang tidak menyerah sesulit apapun rintangan kuliah ataupun proses penyusunan skripsi, yang mampu berdiri tegak ketika dihantam permasalahan yang ada. Terimakasih Erlinda tetap rendah hati, ini baru awal dari permulaan hidupmu. Semoga mimpi-mimpinya segera tercapai, sehat selalu, tetap semangat dan percayalah kamu pasti bisa menghadapi segala tantangan yang ada di depan. I'm proud of you.

Penulis tidak dapat memberikan balasan selain ucapan terimakasih dan doa semoga Allah membalas amal kebaikan yang telah diberikan dengan balasan yang terbaik. Semoga karya ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak. Amin.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iv
NOTA PEMBIMBING	iv
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xv
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Rumusan Masalah	6
C. Tujuan Penelitian	6
D. Manfaat Penelitian	7
E. Batasan Masalah	7
BAB II LANDASAN PUSTAKA	8
A. Persamaan Diferensial	8
B. Pemodelan Matematika pada Penyebaran Penyakit	11
1. Model SI (<i>Susceptible, Infected</i>)	13
2. Model SIR (<i>Susceptible, Infected, Recovered</i>) ..	13
3. Model SEIR (<i>Susceptible, Exposed, Infected, Recovered</i>)	14
C. Tuberkulosis	17
D. Pengendalian Jarak	18
E. Penemuan Kasus	20
F. Pengobatan	21
G. Sistem Kontrol Optimal	22
H. Penyelesaian Analisis Kontrol Optimal Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin	23
I. Simulasi Numerik Menggunakan Metode Sweep Maju-Mundur	25

J.	Kajian Penelitian Terdahulu.....	27
BAB III METODE PENELITIAN		30
A.	Langkah Penelitian	30
B.	Alur Penelitian	32
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN		33
A.	Model Matematika Penyebaran Tuberkulosis dengan Kontrol Optimal	33
B.	Analisis Kontrol Optimal	39
C.	Simulasi Numerik	45
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN		63
A.	Kesimpulan	63
B.	Saran	65
DAFTAR PUSTAKA		67

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul	Halaman
Tabel 2.1	Definisi Variabel Model	14
Tabel 2.2	Definisi Parameter Model	15
Tabel 4.1	Definisi Variabel Model	36
Tabel 4.2	Definisi Parameter Model	37
Tabel 4.3	Nilai Variabel Model	45
Tabel 4.4	Nilai Parameter Model	45

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
Gambar 2.1	Skema Pemodelan Matematika	12
Gambar 2.2	Diagram Kompartmen Penyebaran Tuberkulosis Tanpa Kontrol Optimal	15
Gambar 3.1	Peta Konsep Alur Penelitian	32
Gambar 4.1	Kontrol Optimal Tuberkulosis	35
Gambar 4.2	Diagram Kompartmen Penyebaran Tuberkulosis dengan Kontrol Optimal	37
Gambar 4.3	Simulasi Numerik Model Penyebaran Tuberkulosis Sebelum Penambahan Kontrol Optimal	46
Gambar 4.4	Simulasi Numerik Subpopulasi <i>Susceptible</i> sebelum dan sesudah Penambahan Kontrol Optimal (u_1)	47
Gambar 4.5	Simulasi Numerik Subpopulasi <i>Exposed</i> sebelum dan sesudah Penambahan Kontrol Optimal (u_2)	48
Gambar 4.6	Simulasi Numerik Subpopulasi <i>Infected</i> sebelum dan sesudah Penambahan Kontrol Optimal (u_3)	49
Gambar 4.7	Simulasi Numerik Subpopulasi <i>Recovered</i> sebelum dan sesudah Penambahan Kontrol Optimal	50

Gambar 4.8	Simulasi Numerik Kontrol Pengendalian Jarak (u_1) pada Model Penyebaran Tuberkulosis	51
Gambar 4.9	Simulasi Numerik Kontrol Penemuan kasus (u_2) pada Model Penyebaran Tuberkulosis	52
Gambar 4.10	Simulasi Numerik Kontrol Pengobatan (u_3) pada Model Penyebaran Tuberkulosis	53
Gambar 4.11	Simulasi Numerik Model Penyebaran Tuberkulosis Sebelum Penambahan Kontrol Optimal	54
Gambar 4.12	Simulasi Numerik Subpopulasi <i>Susceptible</i> sebelum dan sesudah Penambahan Kontrol Optimal (u_1)	55
Gambar 4.13	Simulasi Numerik Subpopulasi <i>Exposed</i> sebelum dan sesudah Penambahan Kontrol Optimal (u_2)	56
Gambar 4.14	Simulasi Numerik Subpopulasi <i>Infected</i> sebelum dan sesudah Penambahan Kontrol Optimal (u_3)	57
Gambar 4.15	Simulasi Numerik Subpopulasi <i>Recovered</i> sebelum dan sesudah Penambahan Kontrol Optimal	58
Gambar 4.16	Simulasi Numerik Kontrol Pengendalian Jarak (u_1) pada Model Penyebaran Tuberkulosis	59

Gambar 4.17	Simulasi Numerik Kontrol Penemuan kasus (u_2) pada Model Penyebaran Tuberkulosis	60
Gambar 4.18	Simulasi Numerik Kontrol Pengobatan (u_3) pada Model Penyebaran Tuberkulosis	61

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 Program MATLAB R2013a Model Penyebaran Tuberkulosis dengan dan tanpa Kontrol Optimal	74
Lampiran 2 Daftar Riwayat Hidup	83

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Kesehatan adalah nikmat paling berharga yang dimiliki oleh masing-masing individu (Rizal, 2024). Tanpa tubuh yang sehat, sulit bagi kita untuk menjalani aktivitas sehari-hari dengan produktif dan bahagia. Pentingnya menjaga kesehatan tidak hanya dirasakan saat kita jatuh sakit, tetapi harus menjadi bagian dari rutinitas harian. Dengan menjaga pola makan, berolahraga, istirahat cukup, dan menjaga kebersihan diri, kita dapat mencegah banyak penyakit. Kesehatan yang terjaga juga membantu meningkatkan kualitas hidup, memperpanjang usia harapan hidup, dan mencegah beban ekonomi yang ditimbulkan oleh biaya pengobatan. Lebih dari itu, kesehatan yang baik memungkinkan kita untuk berkontribusi lebih besar dalam keluarga dan masyarakat. Terdapat sebuah hadits yang menjelaskan tentang kesehatan, sebagaimana tertulis dalam hadits berikut.

قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ إِنَّ الصِّحَّةَ وَالْفَرَاغَ نِعْمَتَانِ مِنْ
نِعَمِ اللَّهِ مَغْبُوءٌ فِيهِمَا كَثِيرٌ مِنَ النَّاسِ

Artinya: "Sesungguhnya kesehatan dan waktu luang adalah dua nikmat Allah yang banyak dilalaikan oleh kebanyakan manusia" (Musnad bani Hasyim, No.2224, Awal Musnad Abdullah bin Al'Abbas)

Kesehatan merupakan salah satu nikmat yang Allah SWT berikan kepada manusia, sehingga harus dijaga dan tidak boleh diabaikan (Septianingrum dkk, 2023). Jika kesehatan tidak dijaga dengan baik, manusia berisiko terkena penyakit. Beragam penyakit dapat mengancam kesehatan, baik itu penyakit yang dapat menular ataupun yang tidak dapat menular.

Penyakit menular merupakan penyakit yang disebabkan oleh mikroorganisme seperti bakteri dan virus (Andika, 2020). Penularan penyakit ini menyebar melalui udara, air, suhu, kelembaban, serta makanan (Yosua dkk, 2022). Seseorang juga bisa terinfeksi melalui kontak fisik dengan seseorang yang sudah terinfeksi penyakit menular, karena itu haruslah setiap individu ataupun suatu kelompok individu yang terkena suatu penyakit menular agar melakukan isolasi mandiri dirumah ataupun di tempat yang sudah disediakan oleh suatu pihak.

Tuberkulosis merupakan salah satu penyakit menular yang berbahaya, penyakit ini disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis* (Kristini dan Hamidah, 2020). Bakteri ini merupakan penyebab utama penyakit tuberkulosis yang dapat mengakibatkan komplikasi pada organ-organ seperti paru-paru, tulang, kelenjar getah bening, ginjal, selaput otak, dan lainnya. Penyakit ini menyerang paru-paru sebagai tempat utamanya (Kementerian Kesehatan, 2022).

Tuberkulosis merupakan penyakit yang serius dan mematikan yang ditularkan melalui udara yang terkontaminasi oleh percikan air liur saat penderita batuk, bersin, atau berbicara. Gejalanya meliputi gangguan pernapasan, batuk kronis, demam, nyeri dada, dan hilangnya nafsu makan (Kementerian Kesehatan, 2022). Sebagai tindakan pencegahan, pengendalian jarak

diperlukan untuk mencegah meluasnya penularan penyakit, karena kontak langsung dengan penderita tuberkulosis aktif merupakan faktor utama seseorang bisa tertular. Risiko tambahan termasuk perokok aktif, lansia, dan individu dengan kondisi medis lain yang mengurangi daya tahan tubuh, seperti HIV/AIDS maupun diabetes serta lingkungan yang padat, kumuh, dan kotor juga dapat menjadi sumber penularan tuberkulosis (Kementerian Kesehatan, 2022).

Penelitian yang telah diteliti mengenai dampak karantina dalam model penyakit menular endemik (Hethcote dan Zhien dkk, 2002). Model tersebut mengembangkan model SIR dengan tambahan kelas Q yang merepresentasikan individu yang dikarantina, yaitu individu yang sudah dipulihkan atau diisolasi dari populasi individu yang terinfeksi kemudian model tersebut berubah menjadi model SIQR (*Susceptible, Infected, Quarantined, Recovered*). Kemudian, dikembangkan menjadi model SEIQR dengan menambahkan kelas E (*Exposed*), yang merepresentasikan individu yang sudah terinfeksi tetapi belum mampu menularkan kepada individu lain (Jumpen dan Tang dkk, 2009). Model ini menerapkan tingkat kejadian standar, dengan laju infeksi yang tergantung pada interaksi antara individu yang *susceptible* (S) dengan individu yang *infected* (I) dan *ekposed* (E) (Syuhefti, 2021).

Menurut data dari WHO (*World Health Organization*), setiap tahunnya sekitar 10 juta orang terinfeksi tuberkulosis. Meskipun dapat dicegah, dampak penyakit ini tetap signifikan, yang dapat menyebabkan sekitar 1,5 juta kematian setiap tahunnya. Negara-negara dengan populasi padat dan tingkat pendapatan menengah, seperti Bangladesh, Cina, India, dan termasuk Indonesia, merupakan negara-negara yang mengalami

jumlah kematian akibat tuberkulosis yang tinggi (WHO, 2021). Menurut data yang diterima, Indonesia menempati posisi kedua setelah India dalam hal jumlah kasus tuberkulosis (TBC), dengan total 1.060.000 kasus. Di antara daerah yang memiliki beban kasus tinggi, Kota Semarang mencatatkan 6.527 kasus TBC sepanjang tahun 2023 (Dinkes Semarang, 2024). Penelitian oleh Indah Kartika Sari dan Maryani Setyowati (2024) menganalisis penyebaran kasus tuberkulosis di Kota Semarang tahun 2021. Hasilnya menunjukkan bahwa sebagian besar kasus terjadi pada laki-laki, kelompok usia dewasa dan anak-anak, serta domisili di Kecamatan Ngaliyan, Semarang Barat, Tugu, dan Mijen. Faktor-faktor seperti kebiasaan merokok, pola hidup kurang sehat, dan lingkungan tidak sehat berkontribusi terhadap tingginya kasus tuberkulosis di wilayah tersebut.

Kontrol optimal adalah bidang ilmu yang berhubungan dengan matematika dan teknik. Secara umum, kontrol optimal berfokus dalam proses optimasi guna menghasilkan nilai terbaik untuk fungsi tujuan (Putri dan Rina, 2023). Penelitian mengenai kontrol optimal dalam penyebaran suatu penyakit telah banyak dilakukan oleh para peneliti sebelumnya. Pada tahun 2016 telah dilakukan penelitian dari Syafruddin Side, Wahidah Sanusi, dan Nur Fajri Setiawan menganalisis tentang Analisis model SITR (*Susceptible, Infective, Treatment, Recovered*) pada model penyebaran penyakit tuberkulosis yang berjudul "Analisis dan Simulasi Model SITR pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar". Kemudian dikembangkan oleh Rindi Wulandari Tanjung, Muhafzan, dan Zulakmal (2021) dengan penambahan kontrol vaksinasi yang berjudul "Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Kontrol Vaksinasi".

Azkia Khairal Jamil, Yuni Yulida, dan M.Ahsar Karim (2023) telah meneliti analisis kestabilan dan solusi numerik model penyebaran tuberkulosis SEIR. Adapun penelitian selanjutnya yang sudah membuktikan upaya vaksinasi dan penggunaan masker dapat mengurangi penyebaran penyakit tuberkulosis, penelitian itu berjudul "Pemodelan Matematika Penyakit Tuberkulosis dengan Vaksinasi, Penggunaan Masker Medis, Kasus Tidak Terdeteksi, dan Re-Infeksi" oleh Putri Shafira Utami pada tahun 2024.

Penelitian sebelumnya oleh Rodah Jerubet, George Kimathi, dan Mary Wanaina (2019) yang berjudul "*Analysis and Modeling of Tuberculosis Transmission Dynamics*". Penelitian ini membahas analisis kestabilan dan sistem dinamik dari model tuberkulosis SILR (*Susceptible, Infected, Latent, Recovered*). Selanjutnya, Anita Puspitasari, Kamiran, dan Nur Asiyah (2019) menjelaskan tentang kontrol optimal terapi untuk individu *infected* dan vaksinasi bagi individu *susceptible* pada model matematika SITR.

Penelitian ini memodifikasi model sistem dinamika Tuberkulosis di Kota Semarang dari Dhimas Mahardika dan Sopia Kartika (2023) dengan mengkontruksi menambahkan parameter pengendalian jarak, penemuan kasus, dan pengobatan. Pengendalian jarak dengan melakukan upaya menggunakan strategi menjaga jarak bagi individu yang belum terinfeksi penyakit terhadap individu yang menularkan penyakit, serta penemuan kasus dengan melakukan pengecekan atau pemeriksaan ada tidaknya resiko terinfeksi penyakit, dan melakukan pengobatan pada individu yang sudah terinfeksi penyakit untuk mengurangi jumlah orang yang terkena dan meninggal karena penyakit. Hasil dari penerapan kontrol optimal ini diperoleh melalui simulasi numerik dan interpretasi model menggunakan MATLAB R2013a.

B. Rumusan Masalah

1. Bagaimana model penyebaran tuberkulosis dengan tiga strategi kontrol yaitu pengendalian jarak, penemuan kasus dan pengobatan ?
2. Bagaimana analisis kontrol optimal model penyebaran tuberkulosis dengan tiga strategi kontrol yaitu pengendalian jarak, penemuan kasus dan pengobatan ?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik pada model penyebaran tuberkulosis dengan tiga strategi kontrol yaitu pengendalian jarak, penemuan kasus dan pengobatan ?

C. Tujuan Penelitian

1. Memperoleh model penyebaran tuberkulosis dengan tiga strategi kontrol yaitu pengendalian jarak, penemuan kasus dan pengobatan.
2. Memperoleh hasil analisis dari model penyebaran tuberkulosis dengan tiga strategi kontrol yaitu pengendalian jarak, penemuan kasus dan pengobatan .
3. Memperoleh hasil simulasi numerik pada model penyebaran tuberkulosis dengan tiga strategi kontrol yaitu pengendalian jarak, penemuan kasus dan pengobatan.

D. Manfaat Penelitian

1. Menciptakan terobosan inovasi baru.
2. Analisis kontrol optimal dari model penyebaran tuberkulosis dapat memberikan pengetahuan baru tentang cara meminimalkan penyebaran penyakit tuberkulosis.
3. Simulasi numerik pada model penyebaran tuberkulosis dapat menunjukkan hasil prediksi penyebaran tuberkulosis dengan strategi kontrol optimal pengendalian jarak, penemuan kasus dan pengobatan.

E. Batasan Masalah

1. Model yang diterapkan dalam penelitian ini adalah model penyebaran tuberkulosis yang telah diteliti oleh Dhimas Mahardika dan Sopia Kartika (2023).
2. Penyakit yang menjadi fokus penelitian ini adalah Tuberkulosis.
3. Penelitian ini bertujuan untuk meminimalkan atau mengurangi penyebaran tuberkulosis dengan menerapkan sistem kontrol yang meliputi pengendalian jarak, penemuan kasus, dan pengobatan.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

Pada bab ini, dibahas definisi serta teori-teori yang diperlukan untuk mengembangkan model matematika penyebaran penyakit tuberkulosis, termasuk persamaan diferensial, model penyebaran penyakit, tuberkulosis, pengendalian jarak, penemuan kasus, pengobatan, sistem kontrol optimal, serta tinjauan penelitian sebelumnya.

A. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan hubungan antara variabel bebas, variabel tak bebas, dan satu atau lebih turunan dari variabel tak bebas terhadap variabel bebas. Dalam persamaan diferensial, terdapat istilah orde dan derajat. Orde mengacu pada turunan tertinggi dari variabel tak bebas terhadap variabel bebas, sedangkan derajat adalah pangkat dari turunan tertinggi variabel tak bebas yang memiliki orde tertinggi dalam persamaan diferensial tersebut (Yanti, 2022). Berdasarkan jumlah variabel, persamaan diferensial dibagi menjadi dua jenis (Ross, 1989), yaitu:

1. Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan Diferensial Biasa adalah suatu persamaan yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Contoh 2.1.1

Berikut ini adalah contoh persamaan diferensial biasa dengan orde 4 derajat 1.

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin(t) \quad (2.1)$$

2. Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan Diferensial Parsial adalah suatu persamaan yang memuat turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Contoh 2.1.2

Berikut ini adalah contoh persamaan diferensial parsial dengan orde 1 derajat 1.

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v \quad (2.2)$$

Berdasarkan linearitas dalam suatu persamaan, persamaan diferensial terbagi menjadi dua jenis (Ross, 1989), yaitu:

1. Persamaan Diferensial Linear

Persamaan diferensial linear adalah suatu persamaan diferensial yang turunan-turunannya memiliki bentuk linear dan berderajat satu.

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x) \quad (2.3)$$

Persamaan 2.3 merupakan persamaan diferensial linear orde n , dengan variabel tak bebas y dan variabel bebas x . Dimana a_0 adalah koefisien yang tidak sama dengan nol. Sebuah persamaan diferensial dianggap persamaan diferensial linear jika memiliki karakteristik berikut ini:

- a) Variabel-variabel tak bebas dan semua turunannya hanya terdapat dalam derajat satu.
- b) Tidak ada perkalian antara variabel-variabel tak bebas atau turunan - turunannya.
- c) Tidak terdapat fungsi transenden yang termuat dari variabel-variabel tak bebas atau turunannya. Fungsi transenden adalah jenis fungsi yang tidak dapat direpresentasikan melalui operasi aljabar dasar seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, atau perpangkatan dengan eksponen rasional. Contohnya meliputi fungsi eksponensial, fungsi logaritma, dan fungsi trigonometri.

Contoh 2.1.3

Berikut ini adalah contoh persamaan diferensial linear dengan orde 2 derajat 1.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad (2.4)$$

2. Persamaan Diferensial Non Linear

Suatu persamaan diferensial dikatakan sebagai persamaan diferensial non linear apabila terdapat satu ciri-ciri dari persamaan diferensial linear yang tidak terpenuhi.

Contoh 2.1.4

Berikut ini adalah contoh persamaan diferensial non linear dengan orde 2 derajat 1.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5y\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad (2.5)$$

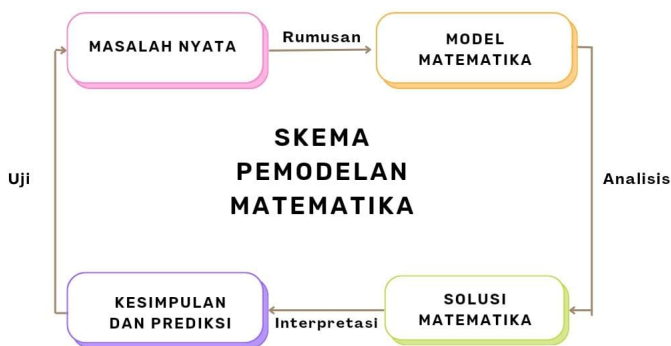
Pada contoh di atas merupakan salah satu contoh dari persamaan diferensial non linear karena terdapat salah satu dari ketiga ciri-ciri dari persamaan diferensial linear yang tidak terpenuhi yaitu terdapat perkalian antara variabel tak bebas dan turunan pertamanya.

B. Pemodelan Matematika pada Penyebaran Penyakit

Pemodelan matematika adalah cabang matematika yang bertujuan untuk merepresentasikan masalah di dunia nyata dalam bentuk bahasa matematis, sehingga masalah tersebut dapat dipahami dengan lebih jelas dan tepat (Sepetiansyah dkk, 2022). Secara sederhana, model matematika merupakan upaya untuk merepresentasikan suatu fenomena dalam bentuk rumus-rumus matematika agar lebih mudah dipelajari dan dihitung secara matematis.

Masalah yang dapat diimplementasikan dalam bidang pemodelan matematika diantaranya yaitu kontrol optimal penyebaran penyakit covid 19 di jakarta (Zulaikha dan Norasia, 2024), penerapan kontrol optimal untuk meminimalkan penyebaran virus pada model matematika penyebaran virus ebola (Sumardi dan Norasia, 2023), dan Kontrol Optimal Penyebaran HIV-1 dalam Kombinasi dengan Status Gizi dan Pengobatan ARV

(Norasia dkk, 2022). Model-model ini memiliki sifat yang fleksibel dan penggunaannya disesuaikan dengan permasalahan serta tujuan penelitian. Pemodelan dapat didasarkan pada data yang diperoleh atau menggunakan model yang telah ada, serta dapat dimodifikasi dan digabungkan sesuai kebutuhan peneliti. Berikut ini skema pemodelan matematika (Sani, 2022).



Gambar 2.1. Skema Pemodelan Matematika

Skema pemodelan dijelaskan dalam diagram alur di atas. Langkah pertama dimulai dengan mengidentifikasi permasalahan yang ada di lingkungan masyarakat. Setelah masalah tersebut ditemukan, langkah selanjutnya adalah merumuskan masalah dalam bentuk yang bisa dianalisis secara matematis. Proses ini mentransformasikan persoalan dunia nyata ke dalam bahasa matematika.

Setelah model matematika berhasil disusun, tahap berikutnya adalah analisis solusi matematika. Pada tahap ini, berbagai metode matematika digunakan untuk mencari solusi atau hasil dari model matematika tersebut. Analisis terhadap hasil sangat penting,

karena di sinilah solusi dievaluasi dan diinterpretasikan sesuai dengan konteks masalah aslinya.

Tahap akhir dalam skema pemodelan matematika adalah interpretasi hasil serta penarikan kesimpulan. Solusi yang dihasilkan dari model matematika dihubungkan kembali dengan masalah nyata untuk memberikan prediksi atau solusi yang bisa diterapkan. Proses ini bersifat iteratif atau perulangan, sering kali memerlukan pengulangan beberapa tahap untuk mencapai hasil yang lebih optimal dan akurat, sehingga perbaikan model menjadi langkah yang diperlukan. Berikut ini beberapa model matematika yang berkaitan dengan penyebaran penyakit, dengan penjelasan sebagai berikut:

1. Model SI (*Susceptible, Infected*)

Model penyebaran penyakit SI adalah salah satu model matematis yang digunakan untuk merepresentasikan dinamika penyebaran penyakit dalam populasi (Yudasubrata, 2018). Model ini membagi subpopulasi menjadi dua kategori yaitu Subpopulasi *Susceptible* (S) individu ini rentan terhadap infeksi dan dapat terjangkit penyakit jika melakukan kontak dengan individu yang terinfeksi, serta subpopulasi terinfeksi yaitu *Infected* (I) dapat menularkan penyakit kepada individu *susceptible* lainnya.

2. Model SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*)

Model penyebaran penyakit SIR dikelompokkan menjadi tiga subpopulasi, yaitu kelompok Subpopulasi *Susceptible* (S) terdiri dari individu yang rentan, dan dapat dapat terinfeksi jika melakukan kontak langsung dengan individu yang terinfeksi.

Kelompok Subpopulasi *Infected* (I) merupakan individu yang telah terinfeksi dan dapat menularkan penyakit kepada individu lain. Kemudian kelompok Subpopulasi *Recovered* (R) terdiri dari individu yang sudah sembuh dan tidak dapat terinfeksi lagi (Rosyid dkk, 2021).

3. Model SEIR (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered*)

Pada skripsi ini digunakan sistem kontrol optimal pengendalian jarak, penemuan kasus, dan pengobatan pada model SEIR (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered*) penyebaran penyakit tuberkulosis di Kota Semarang yang telah diteliti oleh Dhimas Mahardika dan Sophia Kartika (2023). Model SEIR terdiri dari empat kompartemen subpopulasi yang saling berinteraksi. Jumlah individu dalam setiap kompartemen ini berubah seiring waktu, sehingga pada setiap waktu masing-masing jumlah individu dinyatakan sebagai $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$, dan $R(t)$. Berikut adalah penjelasan mengenai variabel dan parameter dalam model penyebaran penyakit tuberkulosis.

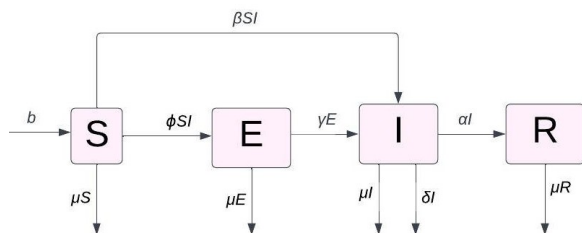
Tabel 2.1. Definisi Variabel Model

Variabel	Keterangan
$S(t)$	Subpopulasi <i>Susceptible</i> terhadap penyakit terhadap waktu
$E(t)$	Subpopulasi <i>Exposed</i> yang tidak menunjukkan gejala terhadap waktu
$I(t)$	Subpopulasi <i>Infected</i> yang menunjukkan gejala terhadap waktu
$R(t)$	Subpopulasi <i>Recovered</i> setelah berobat terhadap waktu

Tabel 2.2. Definisi Parameter Model

Parameter	Keterangan
b	Angka Kelahiran
β	Individu <i>Susceptible</i> menjadi <i>Infected</i>
α	Individu <i>Infected</i> menjadi <i>Recovered</i>
δ	Tingkat kematian akibat penyakit
μ	Tingkat kematian alami
ϕ	Individu <i>Susceptible</i> menjadi <i>Exposed</i>
γ	Individu <i>Exposed</i> menjadi <i>Infected</i>

Model penyebaran tuberkulosis ini dapat dimodelkan menggunakan diagram kompartmen SEIR, di mana S (*Susceptible*) adalah subpopulasi rentan terpapar penyakit, E (*Exposed*) merupakan subpopulasi terkena penyakit namun tidak menunjukkan gejala penyakit, I (*Infected*) yaitu subpopulasi terkena penyakit yang menunjukkan gejala, dan R (*Recovered*) adalah subpopulasi yang sudah sembuh setelah berobat. Berikut ini adalah diagram kompartmen model penyebaran penyakit tuberkulosis sebelum penerapan kontrol optimal yang telah diteliti oleh Dhimas Mahardika dan Sophia Kartika (2023).



Gambar 2.2. Diagram Kompartmen Penyebaran Tuberkulosis Tanpa Kontrol Optimal

Selanjutnya, diagram kompartmen diatas diformulasikan menjadi suatu sistem persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = b - \beta SI - \mu S - \phi SI \quad (2.6)$$

$$\frac{dE}{dt} = \phi SI - (\mu + \gamma)E \quad (2.7)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI + \gamma E - (\mu + \delta + \alpha)I \quad (2.8)$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I - \mu R \quad (2.9)$$

Berikut merupakan deskripsi dari persamaan – persamaan model matematika diatas. Persamaan (2.6) laju Subpopulasi *Susceptible* terhadap waktu $S(t)$ dipengaruhi oleh parameter b, β, μ, ϕ . Subpopulasi *Susceptible* bertambah karena terdapat angka kelahiran alami sebanyak b . Kemudian, Subpopulasi *Susceptible* berkurang karena adanya interaksi dengan Subpopulasi *Infected* $-\beta SI$. Selanjutnya, Subpopulasi *Susceptible* berkurang lagi karena mengalami kematian alami sebesar $-\mu S$ dan adanya peralihan dari Subpopulasi *Susceptible* menjadi Subpopulasi *Exposed* sebesar $-\phi SI$.

Persamaan (2.7) laju Subpopulasi *Exposed* yang tidak menunjukkan gejala terhadap waktu $E(t)$ dipengaruhi oleh parameter ϕ, μ, γ . Subpopulasi ini bertambah akibat Subpopulasi *Susceptible* menjadi Subpopulasi *Exposed* $+\phi SI$. Kemudian, Subpopulasi *Exposed* berkurang karena mengalami kematian alami sebesar $-\mu E$ dan adanya perubahan dari Subpopulasi *Exposed* menjadi Subpopulasi *Infected* $-\gamma E$.

Persamaan (2.8) laju Subpopulasi *Infected* yang menunjukkan gejala terhadap waktu $I(t)$ dipengaruhi oleh parameter β, γ, μ ,

δ , α . Subpopulasi *Infected* bertambah akibat adanya interaksi dengan Subpopulasi *Susceptible* $+\beta SI$. Kemudian, Subpopulasi *Infected* bertambah karena adanya perubahan dari Subpopulasi *Exposed* menjadi *Infected* $+\gamma E$. Selanjutnya Subpopulasi *Infected* berkurang karena mengalami kematian alami sebesar $-\mu I$ juga individu *Infected* akan mengalami kematian akibat penyakit sebesar $-\delta I$, dan adanya individu *Recovered* dari penyakit setelah pengobatan $-\alpha I$.

Persamaan (2.9) laju Subpopulasi *Recovered* terhadap waktu $R(t)$ dipengaruhi oleh parameter α dan μ . Subpopulasi *Recovered* bertambah akibat adanya kesembuhan dari individu *Infected* $(+\alpha I)$. Kemudian, berkurang karena mengalami kematian alami sebesar $-\mu R$.

C. Tuberkulosis

Tuberkulosis adalah penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis* (Vidyastari dkk, 2019). Bakteri ini menyerang organ paru-paru, tetapi organ lain dalam tubuh juga bisa terkena. Penularan penyakit ini terjadi melalui percikan dahak dari individu yang terinfeksi bakteri tersebut. Beberapa gejala utama dari infeksi ini meliputi batuk yang berlangsung lebih dari dua minggu, disertai batuk berdarah yang kadang-kadang mengeluarkan darah, kesulitan bernafas, kehilangan nafsu makan, kelemahan tubuh, rasa tidak nyaman, demam lebih dari satu bulan, dan berkeringat di malam hari tanpa aktivitas fisik. Penularan terjadi ketika seseorang yang sehat menghirup udara yang telah terkontaminasi bakteri tuberkulosis dari orang yang terinfeksi (Kementerian Kesehatan, 2024).

Tuberkulosis merupakan penyakit yang sering menyerang individu di usia produktif, yaitu antara 15 hingga 49 tahun (Nurjana, 2015). Penderita tuberkulosis dapat menularkan infeksi kepada semua kelompok usia. Pada tahun 2017, di Kota Semarang, terdapat penderita TBC dari berbagai tipe, di mana 24% berada di kelompok usia bayi dan anak, 40% berada di rentang usia 15-44 tahun, dan 22% berada di atas usia 55 tahun. Persentase tuberkulosis paru-paru pada wanita lebih rendah dibandingkan laki-laki, hal ini disebabkan oleh kurangnya perhatian laki-laki terhadap kesehatan diri dan frekuensi yang lebih tinggi dalam berinteraksi dengan faktor risiko dibandingkan perempuan (Kristini dan Hamidah, 2020)

D. Pengendalian Jarak

Pengendalian jarak atau menjaga jarak bertujuan untuk membatasi kontak fisik guna menghentikan penyebaran penyakit menular seperti penyakit tuberkulosis (Melania dan Dhamanti, 2023). Berdasarkan Keputusan Menteri Kesehatan Republik Indonesia Nomor HK.01.07/MENKES/382/2020, jarak minimum yang harus dijaga adalah 1 meter. Menurut Suppawittaya, Yiempthai, dan Yasri (2020), menjaga jarak berfungsi untuk meminimalkan kontak dengan orang yang mungkin terinfeksi tapi belum menyadari dan belum melakukan isolasi mandiri (Melania dan Dhamanti, 2023). Yunus dan Rezki (2020) juga menyatakan bahwa menjaga jarak bertujuan membatasi kontak antara individu yang terinfeksi dengan orang sehat, sehingga membantu mengurangi penyebaran penyakit. Menjaga jarak dapat diterapkan dengan menjaga jarak aman paling sedikit

1 meter saat berinteraksi dengan orang lain dan menghindari keramaian atau tempat umum, serta tidak mengikuti kegiatan yang melibatkan banyak orang (Melania dan Dhamanti, 2023). Selain itu, menjaga jarak juga mencakup tidak meninggalkan rumah kecuali dalam situasi yang mendesak dan menghindari kontak fisik seperti bersalaman atau berpelukan (Kemenkes, 2020c). Dengan pengendalian jarak diharapkan dapat membantu dalam mengurangi jumlah penyebaran penyakit tuberkulosis.

Chukwu, Alqahtani, Alfiniyah, dan Herdicho (2023) telah meneliti penerapan kontrol optimal pengendalian jarak pada model penyebaran COVID-19 $S_1S_2EAI R$ yang dirancang untuk mengurangi kontak langsung antara individu yang *Infected* dan *Susceptible*, sehingga menurunkan kemungkinan penularan. Dalam model yang digunakan, kontrol pengendalian jarak diterapkan pada kelompok Subpopulasi *Susceptible* untuk menghambat interaksi yang berisiko tinggi menyebabkan infeksi. Simulasi numerik menunjukkan bahwa penerapan kontrol pengendalian jarak dapat secara signifikan mengurangi jumlah individu di Subpopulasi *Susceptible* dibandingkan dengan kondisi tanpa kontrol. Hasil penelitian ini mengindikasikan bahwa strategi pencegahan yang terkandung dalam kontrol pengendalian jarak dapat menjadi komponen penting dalam menekan penyebaran COVID-19 di tengah masyarakat, khususnya jika dilaksanakan secara konsisten dalam jangka waktu tertentu. Selain itu, pada penyakit menular lainnya seperti tuberkulosis, penerapan kontrol optimal pengendalian jarak memungkinkan adanya potensi untuk membantu mengurangi penyebaran penyakit tersebut.

E. Penemuan Kasus

Penemuan kasus merupakan langkah penting dalam mengurangi penyebaran tuberkulosis (Kereyu dan Demie, 2021). Mendeteksi sejak dini melalui skrining atau pemeriksaan kesehatan secara rutin seperti pada anggota keluarga penderita TB, orang dengan sistem kekebalan tubuh lemah, atau mereka yang tinggal di daerah padat penduduk dapat membantu mengidentifikasi individu yang terinfeksi tuberkulosis, termasuk mereka yang mungkin belum menunjukkan gejala. Setelah kasus ditemukan, pengobatan segera dapat dimulai untuk mencegah penyebaran lebih lanjut. Dengan menemukan kasus secara cepat, pengobatan dapat segera dimulai, sehingga mengurangi risiko penularan di masyarakat dan mempercepat pengendalian penyebaran tuberkulosis (Madona dan Pratiwi dkk, 2023).

Doyo Kereyu dan Seleshi Demie (2021) telah meneliti model SEIR pada penyebaran tuberkulosis dengan penerapan kontrol optimal penemuan kasus. Kesimpulan dari penggunaan kontrol penemuan kasus dalam penelitian ini menunjukkan bahwa strategi penemuan kasus melalui kontrol optimal efektif dalam mengurangi jumlah individu yang terpapar. Kontrol penemuan kasus melibatkan upaya untuk mendeteksi individu yang terinfeksi secara *Exposed* melalui pemeriksaan secara rutin, sehingga dapat segera menjalani pengobatan dan mengurangi risiko penyebaran lebih lanjut. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa penerapan kontrol optimal penemuan kasus memiliki dampak signifikan dalam mengurangi populasi yang berisiko menjadi infeksi, terutama ketika diterapkan secara bersama dengan kontrol lain, seperti pengendalian jarak dan pengobatan.

F. Pengobatan

Pengobatan yang tepat dan teratur merupakan usaha atau peran penting dalam mengurangi penyebaran penyakit tuberkulosis (Kereyu dan Demie, 2021). Penanganan Untuk menangani individu yang terinfeksi tuberkulosis aktif, WHO merekomendasikan penggunaan Obat Anti Tuberkulosis (OAT) seperti isoniazid, rifampisin, pirazinamid, etambutol, dan streptomisin, yang diberikan secara bertahap di berbagai fasilitas kesehatan di seluruh dunia (Nainggolan, 2017). Gerberding pada tahun 2003 menyatakan pengendalian penyebaran penyakit dapat dicapai melalui pengobatan (Nainggolan, 2017). Pentingnya pengobatan bukan hanya untuk menyembuhkan pasien, melainkan juga untuk mencegah penyebaran lebih lanjut di masyarakat. Kepatuhan pasien dalam menjalani pengobatan hingga tuntas sangat diperlukan, karena penghentian pengobatan sebelum waktunya dapat menyebabkan resistensi obat, yang membuat penyakit lebih sulit diobati dan meningkatkan risiko penyebaran (Kementerian Kesehatan, 2024).

Jonner Nainggolan pada tahun 2017 telah meneliti penelitian tentang kontrol pengobatan optimal pada model penyebaran tuberkulosis tipe SEIT (*Susceptible, Exposed, Infected, treatment*). Prinsip Maksimum Pontryagin digunakan untuk mengoptimalkan kontrol pengobatan, penelitian ini bertujuan menurunkan jumlah individu yang terinfeksi *Infected* dengan menerapkan kontrol pengobatan. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa kontrol pengobatan efektif menurunkan jumlah individu yang terinfeksi dan secara signifikan mengurangi penyebaran penyakit tuberkulosis. Hal ini menandakan bahwa penggunaan

kontrol pengobatan yang optimal dapat mengurangi penyebaran tuberkulosis lebih efisien dibandingkan tanpa kontrol.

G. Sistem Kontrol Optimal

Kontrol optimal adalah proses optimasi yang bertujuan untuk mencapai nilai optimum terbaik dalam suatu proses di bidang matematika (Putri dan Rina, 2023). Menurut syahril dan Garnadi (2018) Kontrol optimal adalah serangkaian persamaan diferensial yang menggambarkan jalur variabel-variabel kontrol untuk meminimalkan fungsi tujuan.

Kontrol optimal digunakan untuk menemukan solusi dari persamaan diferensial yang terkait dengan pengontrol yang biasanya dinyatakan dengan variabel $u(t)$, dan merepresentasikan suatu indeks perilaku. Variabel sistem kontrol $u(t)$ berperan dalam mengubah kondisi awal $x(0)$ pada waktu x_0 menuju kondisi akhir $x(T)$ pada waktu x_T (Syahril dan Garnadi, 2018). Berikut adalah masalah kontrol optimal di mana fungsi tujuan digunakan untuk meminimalkan maupun memaksimalkan suatu persamaan:

$$J(x, u, t) = \int_0^T f(x(t), u(t), t) dt \quad (2.10)$$

dengan kendala

$$x'(t) = g(x(t), u(t), t) \quad (2.11)$$

$x(0) = x_0$ dan $x(T) = x_T$ dan fungsi $u(t)$ bergantung pada waktu t , dengan 0 sebagai waktu awal dan T sebagai waktu akhir setelah penerapan kontrol optimal.

Persamaan (2.10) disebut fungsi tujuan dan persamaan *state* (2.11) terdapat tiga jenis variabel, yaitu variabel waktu (t), variabel *state* (x), dan variabel kontrol (u).

H. Penyelesaian Analisis Kontrol Optimal Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin

Penggunaan kontrol optimal dalam penelitian ini akan dilakukan melalui penerapan prinsip minimum pontryagin, yang bertujuan untuk memperoleh sistem kontrol terbaik pada sistem dinamik dari *state* awal hingga akhir, yaitu dengan meminimalkan fungsi tujuan. Meminimalkan fungsi tujuan dengan kontrol $u(t)$ terbatas pada $u(t) \in u$, u merupakan himpunan kontrol (Sumardi dan Norasia, 2023). Berikut adalah tahapan-tahapan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal dengan menerapkan syarat-syarat dari prinsip minimum Pontryagin.

a. Membentuk Fungsi Hamiltonian

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) g_i(t, x, u) \quad (2.12)$$

Pada persamaan tersebut f adalah integran dari fungsi tujuan yang dioptimalkan. Fungsi Hamiltonian dilambangkan dengan H , yang terdiri atas empat variabel, yaitu variabel waktu (t), variabel kontrol (u), variabel *state* (x), dan variabel *costate* (λ).

b. Menentukan u_k^* yang memenuhi kondisi stasioner

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0, \forall u_k, k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.13)$$

$$u_k^* = \min \{ \max (0, u_k) , 1 \} , \quad (2.14)$$

Nilai kontrol dibatasi dalam rentang $(0,1)$ yang menggambarkan proporsi dari suatu intervensi, seperti penggunaan obat atau pelaksanaan vaksinasi. Oleh sebab itu, di mana nilai 0 menunjukkan tanpa adanya penerapan kontrol dan nilai 1 menyatakan bahwa ada penerapan kontrol yang dilakukan secara maksimal. Pembatasan ini mencerminkan bahwa pelaksanaan suatu kontrol tidak dapat melebihi kapasitas maksimalnya, sehingga nilai di luar batas tersebut dianggap tidak valid (Lenhart dan Workman, 2007).

c. Menetapkan persamaan *state* dan persamaan *costate*

$$x'(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \forall \lambda_i, i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.15)$$

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \forall x_j, j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.16)$$

Persamaan (2.15) merupakan persamaan *state*, sedangkan persamaan (2.16) merupakan persamaan *costate*.

d. Menentukan solusi kontrol optimal dengan mensubstitusikan u_k^* terhadap persamaan *state* serta persamaan *costate*.

I. Simulasi Numerik Menggunakan Metode Sweep Maju-Mundur

Penyelesaian simulasi numerik pada model penyebaran tuberkulosis dengan tiga strategi kontrol optimal pengendalian jarak, penemuan kasus, dan pengobatan menggunakan Metode *Sweep* Maju-Mundur dengan penerapan Metode Runge-Kutta Orde 4 pada interval waktu $[0, T]$. Selanjutnya, u , x dan λ dinyatakan u_i , x_i dan λ_i dengan algoritma optimal untuk analisis metode ini dijelaskan sebagai berikut (Lenhart dan Workman, 2007).

1. Menentukan nilai tebakan awal kontrol u .
2. Menggunakan kondisi awal $x(0) = x_0$ dan nilai awal u untuk menyelesaikan persamaan *state* melalui metode Runge-Kutta orde-4 langkah maju.

$$\begin{aligned}
 i &= 1 : N \\
 k_1 &= f(x_i, u_i) \\
 k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}k_1, \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1})\right) \\
 k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}k_2, \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1})\right) \\
 k_4 &= f(x_i + hk_3, u_{i+1}) \\
 x(i+1) &= x_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

3. Menggunakan kondisi transversal $\lambda(T) = 0$ dan nilai awal u dan x untuk menyelesaikan persamaan *costate* melalui

metode Runge-Kutta orde-4 langkah mundur.

$$\begin{aligned}
 i &= 1 : N \\
 j &= N + 2 - i \\
 k_1 &= f(\lambda_j, x_j, u_j) \\
 k_2 &= f\left(\lambda_j - \frac{h}{2}k_1, \frac{1}{2}(x_j + x_{j-1}), \frac{1}{2}(u_j + u_{j-1})\right) \\
 k_3 &= f\left(\lambda_j - \frac{h}{2}k_2, \frac{1}{2}(x_j + x_{j-1}), \frac{1}{2}(u_j + u_{j-1})\right) \\
 k_4 &= f(\lambda_j - hk_3, x_{j-1}, u_{j-1}) \\
 \lambda(j-1) &= \lambda_j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

4. Memperbarui nilai kontrol u dengan memasukkan nilai x dan λ yang baru kedalam karakteristik kontrol optimal u .
5. Memeriksa konvergensi solusi, yaitu jika nilai galat (error) iterasi saat ini dan iterasi sebelumnya sudah sangat kecil maka nilai tersebut dianggap sebagai solusi. Namun, jika nilai galat tidak kecil maka proses akan kembali ke langkah kedua.

J. Kajian Penelitian Terdahulu

Dalam bagian ini, membahas beberapa penelitian terdahulu yang relevan dengan topik yang diteliti, dan akan dijadikan acuan oleh peneliti dalam melaksanakan penelitian ini.

1. Penelitian yang terdahulu dari Rodah Jerubet, dkk (2019) yang berjudul *"Analysis and Modeling of Tuberculosis Transmission Dynamics"*. Hasil penelitian ini menyatakan bahwa semakin banyak orang yang melakukan kontak dengan individu yang menular, penyebaran TB akan meningkat dan tingkat pemulihan individu yang terinfeksi merupakan indikasi bahwa penyebaran penyakit akan berkurang seiring waktu yang dapat membantu menekan penularan TB. Persamaan dalam penelitian ini juga membahas topik penyebaran tuberkulosis. Namun, perbedaannya terletak pada penggunaan kontrol optimal, sementara jurnal yang dijadikan referensi menggunakan analisis kestabilan dan sistem dinamik.
2. Penelitian yang terdahulu dari Doyo Kereyu, dkk (2021) yang berjudul *"Transmission Dynamics Model of Tuberculosis with Optimal Control Strategiesin Haramaya District, Ethiopia"*. Hasil penelitian ini membuktikan bahwa penerapan strategi kontrol optimal pengendalian jarak, penemuan kasus , dan pengobatan dapat menurunkan model penyebaran tuberkulosis. Persamaan dalam penelitian ini membahas topik penyebaran tuberkulosis dengan kontrol optimal yang serupa. Namun, perbedaannya terletak pada parameter masing-masing variabel yang berbeda dibandingkan dengan jurnal ini.

3. Penelitian sebelumnya oleh Anita Puspitasari dkk. (2019) yang berjudul "Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Penyebaran Tuberkulosis (TB) dengan Terapi dan Vaksinasi Menggunakan Metode Runge Kutta". Hasil dari penelitian ini yaitu penerapan kontrol vaksinasi dan terapi terbukti dapat menurunkan jumlah penyebaran tuberkulosis. Persamaan dalam penelitian ini juga membahas penyebaran penyakit tuberkulosis, namun perbedaannya terletak pada penerapan kontrol optimal yang digunakan.
4. Penelitian terdahulu dari Azkia Khairal Jamil, dkk (2023) yang berjudul "Analisis Kestabilan dan Solusi Numerik pada Model SEIR untuk Penyakit Tuberkulosis". Penelitian ini menghasilkan dua titik ekuilibrium bebas penyakit yang stabil secara asimtotik lokal ketika $R_0 < 1$, dan titik ekuilibrium endemik yang stabil secara asimtotik lokal ketika $R_0 > 1$, dan untuk memperkuat analisis stabilitasnya digunakan simulasi numerik RK-4 pada model penyebaran tuberkulosis ini. Persamaan pada penelitian ini sama-sama membahas penyebaran penyakit tuberkulosis sedangkan perbedaannya yaitu pada penelitian ini menggunakan kontrol optimal sedangkan untuk referensi menggunakan analisis kestabilan.
5. Penelitian terdahulu dari Rindi wulandari T, dkk (2021) yang berjudul "Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Kontrol Vaksinasi". Hasil penelitian ini yaitu penerapan kontrol optimal vaksinasi dapat mengurangi populasi yang terinfeksi pada model penyebaran tuberkulosis.

Persamaan pada penelitian ini sama-sama membahas penyebaran penyakit tuberkulosis sedangkan perbedaanya yaitu pada penelitian ini menggunakan tiga kontrol optimal pengendalian jarak, penemuan kasus, dan pengobatan, sedangkan untuk referensi menggunakan kontrol vaksinasi saja.

BAB III

METODE PENELITIAN

A. Langkah Penelitian

Bab ini menjelaskan langkah-langkah dan prosedur yang digunakan dalam metode penelitian analisis kontrol optimal pengendalian jarak, penemuan kasus, dan pengobatan terhadap model penyebaran tuberkulosis di Kota Semarang dengan pemodelan matematika SEIR (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered*). Beberapa langkah- langkah yang akan dibahas antara lain sebagai berikut.

1. Studi Literatur

Studi literatur ini adalah langkah pertama yang dilakukan oleh penulis untuk memahami dan mengumpulkan bahan terkait dengan model matematika epidemiologi dalam penyebaran tuberkulosis. Selanjutnya, penulis mengumpulkan referensi yang relevan untuk mendukung proses penelitian, termasuk jurnal, situs web, dan buku yang terkait dengan model matematika yang akan diteliti.

2. Konstruksi Model

Pada tahap ini, dilakukan modifikasi terhadap model penyebaran penyakit tuberkulosis melalui proses konstruksi model. Model yang dimodifikasi didasarkan pada penelitian Dhimas Mahardika dan Sophia Kartika pada tahun 2023. Pada penelitian ini akan ditambahkan strategi kontrol pada model penyebaran tuberkulosis, strategi tersebut adalah pengendalian jarak, penemuan kasus dan pengobatan.

3. Analisis Kontrol Optimal

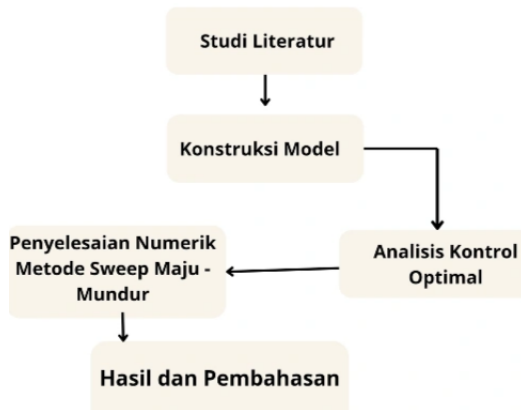
Analisis ini merupakan tahap yang sangat penting dalam keseluruhan proses penelitian. Analisis dilakukan dengan meninjau model awal secara lengkap, lalu menentukan kondisi optimal serta parameter kontrol yang paling efisien. Prinsip minimum pontryagin mengatur bahwa kondisi optimal tercapai apabila syarat-syarat, seperti kondisi stasioner, persamaan *state*, dan persamaan *costate* terpenuhi.

- ### 4. Penyelesaian Numerik dengan Metode Sweep Maju - Mundur
- Langkah awal dalam penyelesaian solusi numerik adalah menetapkan nilai parameter dan variabel yang diperlukan. Metode yang digunakan untuk menjalankan simulasi numerik adalah Metode Sweep Maju-Mundur dengan penerapan Metode Runge-Kutta Orde 4. Hasil simulasi numerik ini akan menghasilkan grafik yang kemudian diinterpretasikan dengan membandingkan setiap subpopulasi S, E, I, dan R dalam sistem kendali kontrol optimal, menggunakan software MATLAB R2013a untuk menghasilkan grafik solusinya.

5. Hasil dan Pembahasan

Tahap akhir adalah menganalisis hasil simulasi numerik dari *output* model penyebaran tuberkulosis menggunakan program MATLAB R2013a dan menyimpulkan hasil dari penelitian tersebut.

B. Alur Penelitian



Gambar 3.1. Peta Konsep Alur Penelitian

Alur penelitian diawali dengan studi literatur untuk memahami dan mengumpulkan referensi yang relevan. Tahap berikutnya adalah konstruksi model dengan memodifikasi model yang telah diteliti oleh Dhimas Mahardika dan Sophia Kartika (2023), dengan menambahkan tiga strategi kontrol pengendalian jarak, penemuan kasus, dan pengobatan. Selanjutnya, dilakukan analisis kontrol optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin untuk menentukan kondisi optimal. Penyelesaian numerik dilakukan dengan Metode *Sweep Maju-Mundur* menggunakan Metode Runge-Kutta Orde 4 yang diimplementasikan melalui MATLAB R2013a untuk memperoleh grafik solusi. Tahap akhir penelitian adalah pembahasan dan analisis hasil simulasi numerik sebagai dasar penarikan kesimpulan.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dilakukan pembahasan mengenai model SEIR pada penyebaran tuberkulosis dengan strategi kontrol pengendalian jarak, penemuan kasus, dan pengobatan disertai dengan analisis numerik menggunakan MATLAB R2013a.

A. Model Matematika Penyebaran Tuberkulosis dengan Kontrol Optimal

Agar memudahkan dalam penyusunan model, asumsi-asumsi pada model penyebaran tuberkulosis tipe SEIR akan diberikan sebagai berikut.

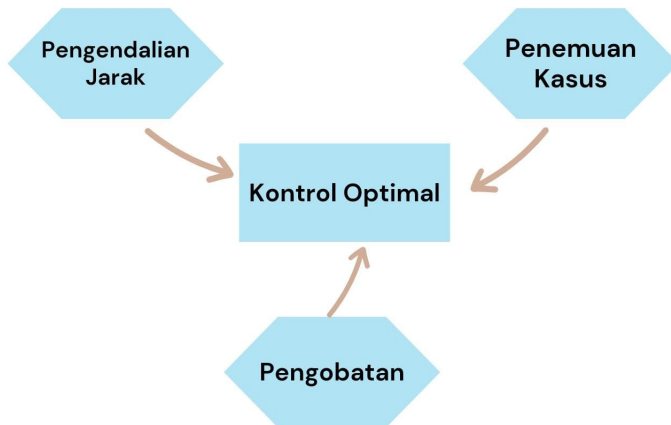
1. Subpopulasi *Susceptible* dilambangkan dengan $S(t)$, menunjukkan jumlah individu yang sehat rentan yang berisiko tertular tuberkulosis pada waktu t (Jamil dan Yulida dkk, 2023).
2. Subpopulasi *Exposed* dilambangkan dengan $E(t)$, menunjukkan jumlah individu yang telah terpapar akibat interaksi dengan penderita tuberkulosis, tetapi tidak menunjukkan gejala penyakit pada waktu t (Jamil dan Yulida dkk, 2023).
3. Subpopulasi *Infected* dilambangkan dengan $I(t)$, menunjukkan jumlah individu yang terinfeksi tuberkulosis dan menunjukkan adanya gejala penyakit pada waktu t (Jamil dan Yulida dkk, 2023).

4. Subpopulasi *Recovered* atau subpopulasi sembuh yang dilambangkan dengan $R(t)$, menunjukkan jumlah individu yang telah sembuh dari infeksi tuberkulosis pada waktu t (Jamil dan Yulida dkk, 2023).
5. Individu yang *Infected* akan sembuh dari gejala tuberkolosis setelah pengobatan (Jerubet dan Kimathi dkk, 2019).
6. Setiap individu yang baru lahir secara otomatis masuk ke dalam Subpopulasi *Susceptible*, karena mereka dianggap sehat namun rentan terhadap infeksi tuberkulosis (Jerubet dan Kimathi dkk, 2019).
7. Orang yang terinfeksi secara *Exposed* tidak akan kembali ke orang yang *Susceptible* kerana mereka sudah terinfeksi memiliki bakteri tersebut (Jerubet dan Kimathi dkk, 2019).
8. Individu yang telah *Recovered* dari infeksi tuberkulosis tidak akan kembali ke Subpopulasi *Susceptible*, melainkan tetap berada dalam Subpopulasi *Recovered* dengan asumsi mereka memiliki kekebalan tubuh terhadap infeksi ulang (Jerubet dan Kimathi dkk, 2019).
9. Pengendalian jarak (u_1) dengan cara menjaga jarak aman minimal 1 meter saat berinteraksi dengan orang lain, menghindari keramaian atau tempat umum, serta tidak mengikuti kegiatan yang melibatkan banyak orang (Melania dan Dhamanti, 2023).
10. Penemuan Kasus (u_2) dengan cara mendeteksi sejak dini atau melakukan pemeriksaan kesehatan secara rutin dapat membantu mengidentifikasi individu yang terinfeksi

tuberkulosis, termasuk mereka yang mungkin belum menunjukkan gejala (Madona dan Pratiwi dkk, 2023).

11. Pengobatan (u_3) berupa isoniazid, rifampisin, pirazinamid, etambutol, dan streptomisin secara tepat berperan efektif dalam mempercepat proses penyembuhan (Nainggolan, 2017).

Pemodelan matematika kasus penyebaran penyakit tuberkulosis ini akan diberikan kontrol yang bertujuan untuk meminimumkan jumlah individu yang terinfeksi penyakit tuberkulosis. Kontrol optimal yang diterapkan dalam model ini meliputi pengendalian jarak, penemuan kasus, dan pengobatan.



Gambar 4.1. Kontrol Optimal Tuberkulosis

Pada Gambar 2.2, terlihat adanya perubahan pada Subpopulasi *Susceptible* yang berinteraksi dengan Subpopulasi *Infected* dan Subpopulasi *Exposed*. Selanjutnya, Subpopulasi *Exposed* beralih menjadi Subpopulasi *Infected*, sementara

Subpopulasi *Infected* menjadi Subpopulasi *Recovered*. Interaksi antar subpopulasi ini dapat menyebabkan peningkatan jumlah individu yang terinfeksi penyakit tuberkulosis.

Penerapan kontrol optimal diperlukan untuk mengatasi masalah penyebaran penyakit tuberkulosis tersebut. Kontrol optimal yang akan diterapkan mencakup pengendalian jarak (u_1) pada Subpopulasi *Susceptible* dengan tujuan mengurangi Individu *Susceptible*, penemuan kasus (u_2) untuk mendeteksi individu dalam Subpopulasi *Exposed* agar dapat ditindak lanjuti lebih awal sebelum mereka menjadi sumber infeksi, dan pengobatan (u_3) pada Subpopulasi *Infected* dengan mempercepat pengobatan dan memindahkan mereka ke Subpopulasi *Recovered*, sekaligus mengurangi tingkat penularan lebih lanjut.

Berikut ini adalah penjelasan mengenai variabel dan parameter yang digunakan dalam model penyebaran penyakit tuberkulosis.

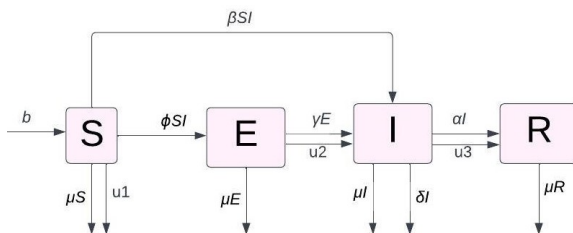
Tabel 4.1. Definisi Variabel Model

Variabel	Keterangan
S(t)	Subpopulasi <i>Susceptible</i> terhadap penyakit terhadap waktu
E(t)	Subpopulasi <i>Exposed</i> yang tidak menunjukkan gejala terhadap waktu
I(t)	Subpopulasi <i>Infected</i> yang menunjukkan gejala terhadap waktu
R(t)	Subpopulasi <i>Recovered</i> setelah berobat terhadap waktu

Tabel 4.2. Definisi Parameter Model

Parameter	Keterangan
b	Angka Kelahiran
β	Individu <i>Susceptible</i> menjadi <i>Infected</i>
α	Individu <i>Infected</i> menjadi <i>Recovered</i>
δ	Tingkat kematian akibat penyakit
μ	Tingkat kematian alami
ϕ	Individu <i>Susceptible</i> menjadi <i>Exposed</i>
γ	Individu yang <i>Exposed</i> menjadi <i>Infected</i>

Berikut ini merupakan diagram kompartemen penyebaran tuberkulosis yang telah dimodifikasi dengan penambahan kontrol.



Gambar 4.2. Diagram Kompartemen Penyebaran Tuberkulosis dengan Kontrol Optimal

Selanjutnya, diagram kompartemen tersebut diformulasikan menjadi suatu sistem persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = b - u_1S - \beta SI - \phi SI - \mu S \quad (4.1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \phi SI - (\mu + \gamma + u_2)E \quad (4.2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI + (\gamma + u_2)E - (\mu + \delta + \alpha + u_3)I \quad (4.3)$$

$$\frac{dR}{dt} = (u_3 + \alpha)I - \mu R \quad (4.4)$$

Berikut merupakan deskripsi dari persamaan – persamaan model matematika diatas. Persamaan (4.1) laju Subpopulasi *Susceptible* terhadap waktu $S(t)$ yang dipengaruhi oleh kontrol pengendalian jarak (u_1). Penambahan kontrol pengendalian jarak pada Subpopulasi *Susceptible* bertujuan agar individu Subpopulasi *Susceptible* berkurang.

Persamaan (4.2) laju Subpopulasi *Exposed* yang tidak menunjukkan gejala terhadap waktu $E(t)$ dipengaruhi oleh kontrol penemuan kasus (u_2). Penambahan kontrol penemuan kasus dapat membantu menemukan kasus penyakit tuberkulosis dengan cepat melalui pemeriksaan kesehatan sejak dini secara rutin pada Subpopulasi *Exposed*, penambahan kontrol penemuan kasus bertujuan agar Subpopulasi *Exposed* berkurang.

Persamaan (4.3) laju Subpopulasi *Infected* yang menunjukkan gejala terhadap waktu $I(t)$ dipengaruhi kontrol pengobatan (u_3). Penambahan kontrol pengobatan berupa isoniazid, rifampisin, pirazinamid, etambutol, dan streptomisin bertujuan untuk mengurangi Subpopulasi *Infected* dan Subpopulasi *Recovered* bertambah.

Persamaan (4.4) laju Subpopulasi *Recovered* terhadap waktu $R(t)$. Subpopulasi individu *Recovered* bertambah akibat adanya kesembuhan dari individu *Infected*. Berdasarkan pengembangan model penyebaran penyakit tuberkulosis tersebut, akan dilakukan analisis kontrol optimal.

B. Analisis Kontrol Optimal

Analisis kontrol optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin untuk memastikan bahwa model matematika yang telah dirumuskan memenuhi sejumlah syarat tertentu. Dalam penelitian ini, tujuan kontrol optimal adalah meminimalkan jumlah subpopulasi yang terinfeksi penyakit tuberkulosis melalui tiga kontrol, yaitu pengendalian jarak (u_1), penemuan kasus (u_2), dan pengobatan (u_3).

Dengan demikian, fungsi tujuan yang akan diminimalkan dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$J(u_1, u_2, u_3) = \int_0^T E + I + Au_1^2 + Bu_2^2 + Cu_3^2 dt \quad (4.5)$$

Dengan A,B,C adalah bobot pada masing- masing kontrol (u_1), (u_2), dan (u_3). Selanjutnya adalah menentukan kontrol optimal u_1^* , u_2^* dan u_3^* sedemikian sehingga berlaku

$$J(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = \min(u_1, u_2, u_3 \in u) \quad (4.6)$$

Dimana u merupakan himpunan kontrol. Masalah kontrol optimal dapat diselesaikan jika memenuhi syarat Prinsip Minimum Pontryagin. Langkah pertama adalah menentukan fungsi hamiltonian yang sesuai dengan sistem persamaan setelah

diterapkan kontrol, untuk memperoleh.

$$\begin{aligned}
 H &= E + I + Au_1^2 + Bu_2^2 + Cu_3^2 + \sum_{i=1}^4 \lambda_i f_i \\
 H &= E + I + Au_1^2 + Bu_2^2 + Cu_3^2 \\
 &\quad + \lambda_1 (b - u_1 S - \beta SI - \phi SI - \mu S) \\
 &\quad + \lambda_2 ((\phi SI - (\mu + \gamma + u_2)E)) \\
 &\quad + \lambda_3 (\beta SI + (\gamma + u_2)E - (\mu + \delta + \alpha + u_3)I) \\
 &\quad + \lambda_4 ((u_3 + \alpha)I - \mu R)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dalam hal ini, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dan λ_4 berperan sebagai variabel *costate*. Fungsi hamiltonian akan mencapai solusi optimal jika memenuhi kondisi stasioner, kondisi persamaan *state* dan persamaan *costate*.

1. Kondisi Stasioner

Kondisi stasioner terjadi ketika kontrol optimal u_1, u_2 dan u_3 harus mampu meminimalkan fungsi hamiltonian pada setiap waktu. Akibatnya, syarat yang harus dipenuhi adalah turunan pertama fungsi hamiltonian terhadap u_1, u_2 dan u_3 harus sama dengan nol.

a. Kondisi Stasioner u_1

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial u_1} &= 0 \iff 2Au_1 - \lambda_1 S \\
 &\iff 2Au_1 = \lambda_1 S \\
 &\iff u_1 = \frac{(\lambda_1)S}{2A}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Sehingga, solusi untuk u_1^* sebagai berikut.

$$u_1^* = \min \left\{ \max \left(0, \frac{(\lambda_1)S}{2A} \right), 1 \right\} \quad (4.9)$$

b. Kondisi Stasioner u_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 &\iff 2Bu_2 - \lambda_2 E + \lambda_3 E \\ &\iff 2Bu_2 = \lambda_2 E - \lambda_3 E \\ &\iff u_2 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)E}{2B} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Sehingga, solusi untuk u_2^* sebagai berikut.

$$u_2^* = \min \left\{ \max \left(0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)E}{2B} \right), 1 \right\} \quad (4.11)$$

b. Kondisi Stasioner u_3

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_3} = 0 &\iff 2Cu_3 - \lambda_3 I + \lambda_4 I \\ &\iff 2Cu_3 = \lambda_3 I - \lambda_4 I \\ &\iff u_3 = \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)I}{2C} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Sehingga, solusi untuk u_3^* sebagai berikut.

$$u_3^* = \min \left\{ \max \left(0, \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)I}{2C} \right), 1 \right\} \quad (4.13)$$

2. Persamaan *State*

Persamaan *state* merupakan kendala dalam penyelesaian masalah kontrol optimal. Persamaan ini diperoleh sebagai turunan dari fungsi hamiltonian terhadap λ atau turunan setiap subpopulasi terhadap waktu. Adapun persamaan *state* dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} &= \frac{dS}{dt} = b - u_1 S - \beta SI - \phi SI - \mu S \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} &= \frac{dE}{dt} = \phi SI - (\mu + \gamma + u_2)E \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} &= \frac{dI}{dt} = \beta SI + (\gamma + u_2)E - (\mu + \delta + \alpha + u_3)I \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_4} &= \frac{dR}{dt} = (u_3 + \alpha)I - \mu R\end{aligned}\tag{4.14}$$

Dengan kondisi awal $S(0)=S_0$, $E(0)=E_0$, $I(0)=I_0$, dan $R(0)=R_0$.

3. Persamaan *Costate*

Persamaan *costate* adalah turunan fungsi hamiltonian terhadap variabel-variabel *state* dengan nilai negatif.

Adapun persamaan *costate* yang didapatkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\lambda_1}{dt} &= \frac{-\partial H}{\partial S} = -\{\lambda_1(-(u_1 + \beta I + \phi I + \mu) + \lambda_2 \phi I + \lambda_3 \beta I) \\
 &= \lambda_1(u_1 + \beta I + \phi I + \mu) - \lambda_2 \phi I - \lambda_3 \beta I \\
 \frac{d\lambda_2}{dt} &= \frac{-\partial H}{\partial E} = -1 - \{\lambda_2 - (\mu + \gamma + u_2) + \lambda_3(\gamma + u_2)\} \\
 &= -1 + \lambda_2(\mu + \gamma + u_2) - \lambda_3(\gamma + u_2) \\
 \frac{d\lambda_3}{dt} &= \frac{-\partial H}{\partial I} = -1 - \{\lambda_1(-\beta S - \phi S) + \lambda_2 \phi S \\
 &\quad + \lambda_3(\beta S - (\mu + \delta + \alpha + u_3)) + \lambda_4(u_3 + \alpha)\} \\
 &= -1 + \lambda_1(\beta S + \phi S) - \lambda_2 \phi S \\
 &\quad - \lambda_3(\beta S - (\mu + \delta + \alpha + u_3)) - \lambda_4(u_3 + \alpha) \\
 \frac{d\lambda_4}{dt} &= \frac{-\partial H}{\partial R} = -\{\lambda_4(-\mu)\} \\
 &= \lambda_4 \mu
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

4. Solusi Kontrol Optimal

Solusi untuk sistem kontrol optimal diperoleh dengan mensubstitusikan nilai dari kontrol optimal u^* ke dalam sistem persamaan *state* (4.14) dan persamaan *costate* (4.15) yang sudah optimal, sehingga diperoleh solusi sebagai

berikut.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \lambda_1^*} &= \frac{dS^*}{dt} = b - u_1^* S^* - \beta S^* I^* - \phi S^* I^* - \mu S^* \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda_2^*} &= \frac{dE^*}{dt} = \phi S^* I^* - (\mu + \gamma + u_2^*) E^* \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda_3^*} &= \frac{dI^*}{dt} = \beta S^* I^* + (\gamma + u_2^*) E^* - (\mu + \delta + \alpha + u_3^*) I^* \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda_4^*} &= \frac{dR^*}{dt} = (u_3^* + \alpha) I^* - \mu R^* \\
\frac{d\lambda_1^*}{dt} &= \frac{-\partial H}{\partial S^*} = \lambda_1(u_1^* + \beta I^* + \phi I^* + \mu) - \lambda_2 \phi I^* - \lambda_3 \beta I^* \\
\frac{d\lambda_2^*}{dt} &= \frac{-\partial H}{\partial E^*} = -1 + \lambda_2^*(\mu + \gamma + u_2^*) - \lambda_3^*(\gamma + u_2^*) \\
\frac{d\lambda_3^*}{dt} &= \frac{-\partial H}{\partial I^*} = -1 + \lambda_1(\beta S^* + \phi S^*) - \lambda_2 \phi S^* \\
&\quad - \lambda_3(\beta S^* - (\mu + \delta + \alpha + u_3^*)) - \lambda_4(u_3^* + \alpha) \\
\frac{d\lambda_4^*}{dt} &= \frac{-\partial H}{\partial R^*} = \lambda_4^* \mu
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Dengan syarat awal $S(0) = S_0$, $E(0) = E_0$, $I(0) = I_0$, dan $R(0) = R_0$, serta kondisi batas $\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = \lambda_4(T) = 0$.

C. Simulasi Numerik

Setelah dilakukan perhitungan dengan analisis kontrol optimal, langkah selanjutnya akan dilakukan perhitungan simulasi numerik menggunakan Metode Sweep Maju-Mundur dengan penerapan Metode Runge-Kutta Orde 4. Pada penelitian ini digunakan tiga kontrol yang diterapkan, yaitu pengendalian jarak (u_1), penemuan kasus (u_2) dan pengobatan (u_3) yang digunakan untuk memodelkan penyebaran penyakit tuberkulosis di Kota Semarang dengan nilai awal variabel dan parameter yang diterapkan sebagai berikut.

Tabel 4.3. Nilai Variabel Model

Variabel	Nilai	Satuan	Sumber
S(t)	1668	Individu	(asumsi)
E(t)	1000	Individu	(asumsi)
I(t)	2292	Individu	(Mahardika dan Kartika, 2024)
R(t)	1000	Individu	(Mahardika dan Kartika, 2024)

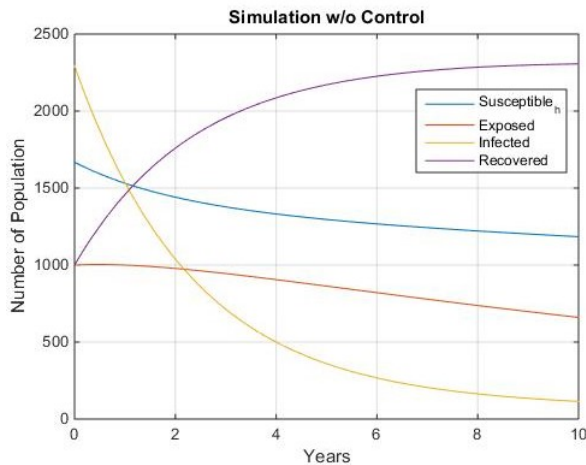
Tabel 4.4. Nilai Parameter Model

Parameter	Nilai	Satuan	Sumber
b	0.0121	Pertahun	(Mahardika dan Kartika, 2024)
β	0.00002	Pertahun	(Mahardika dan Kartika, 2024)
α	0.25	Pertahun	(Mahardika dan Kartika, 2024)
δ	0.2	Pertahun	(Mahardika dan Kartika, 2024)
μ	0.0101	Pertahun	(Mahardika dan Kartika, 2024)
ϕ	0.00002	Pertahun	(asumsi)
γ	0.05	Pertahun	(Mahardika dan Kartika, 2024)

Dalam penelitian ini ditunjukkan pengaruh penerapan kontrol optimal pada model penyebaran tuberkulosis dengan tiga strategi kontrol yaitu pengendalian jarak, penemuan kasus, dan pengobatan. Simulasi numerik dilakukan berdasarkan nilai awal variabel yang terdapat pada Tabel 4.3 dan nilai parameter pada Tabel 4.4, dengan rentang waktu $[0, T]$ mulai dari waktu awal 0 tahun hingga waktu akhir 10 tahun sebagai berikut.

1. Simulasi Pertama

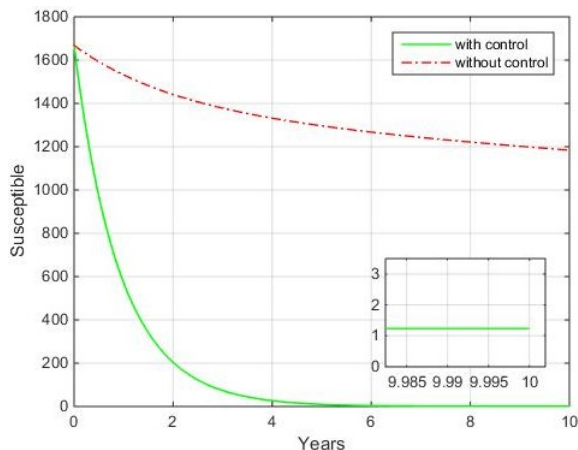
Pada simulasi pertama digunakan bobot kontrol pengendalian jarak (u_1) sebesar $A = 10$, penemuan kasus (u_2) sebesar $B = 10$, dan pengobatan (u_3) sebesar $C = 10$. Hasil simulasi numerik yang diperoleh disajikan dalam bentuk tabel dan grafik berikut.



Gambar 4.3. Simulasi Numerik Model Penyebaran Tuberkulosis Sebelum Penambahan Kontrol Optimal

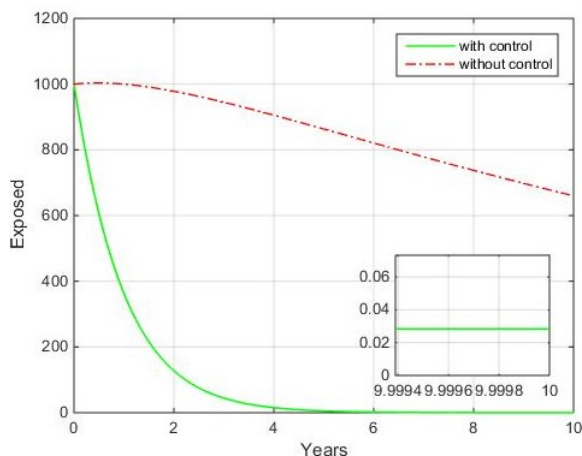
Gambar 4.3 menunjukkan simulasi numerik Subpopulasi *Susceptible*, *Exposed*, *Infected*, dan *Recovered* sebelum penambahan kontrol optimal. Grafik biru sebagai Subpopulasi *Susceptible* di

mana jumlahnya menurun seiring waktu karena individu dalam kategori ini berpindah ke Subpopulasi *Exposed* atau langsung ke Subpopulasi *Infected*. Selanjutnya, grafik oranye menunjukkan Subpopulasi *Exposed*, yaitu individu yang telah terpapar namun belum menunjukkan gejala penyakit. Populasi ini juga mengalami penurunan karena sebagian individu beralih ke Subpopulasi *Infected*. Kemudian, grafik kuning merepresentasikan Subpopulasi *Infected*, yang menunjukkan gejala penyakit. Jumlah populasi ini menurun seiring waktu karena individu mulai sembuh atau meninggal akibat penyakit tuberkulosis. Terakhir, grafik ungu menggambarkan Subpopulasi *Recovered*, yang dianggap memiliki kekebalan tubuh. Jumlah populasi yang sembuh terus meningkat seiring waktu karena semakin banyak individu yang pulih dari penyakit.



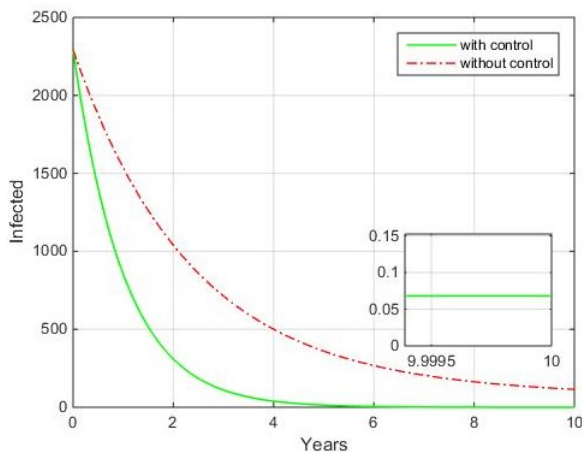
Gambar 4.4. Simulasi Numerik Subpopulasi *Susceptible* sebelum dan sesudah Penambahan Kontrol Optimal (u_1)

Gambar 4.4 menunjukkan simulasi numerik Subpopulasi *Susceptible* sebelum dan sesudah penambahan kontrol optimal pengendalian jarak (u_1). Grafik tanpa kontrol pada Subpopulasi *Susceptible* menurun lebih lambat dan tidak mencapai nol bahkan setelah mencapai waktu 10 tahun, ini menunjukkan bahwa tanpa pengendalian jarak penularan terus berlangsung meskipun dengan kecepatan yang lebih lambat, sedangkan grafik dengan penerapan pengendalian jarak jumlah individu yang rentan menurun tajam dalam 1-3 tahun pertama dan mendekati nol pada 5-10 tahun, ini menunjukkan bahwa pengendalian jarak dengan menjaga jarak aman minimal 1 meter saat berinteraksi dengan orang lain sangat efektif dalam mengurangi interaksi antara individu yang *Susceptible* dan yang terinfeksi, sehingga mengurangi penyebaran penyakit secara cepat dalam Subpopulasi *Susceptible*.



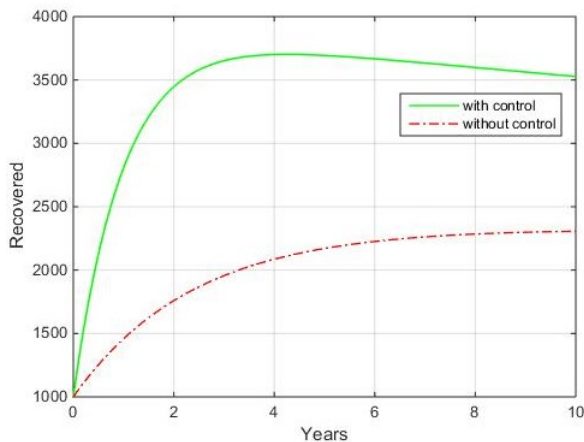
Gambar 4.5. Simulasi Numerik Subpopulasi *Exposed* sebelum dan sesudah Penambahan Kontrol Optimal (u_2)

Gambar 4.5 menyajikan perbandingan simulasi numerik Subpopulasi *Exposed* dengan dan tanpa kontrol optimal penemuan kasus (u_2). Grafik tanpa kontrol penemuan kasus Subpopulasi *Exposed* menurun lebih lambat dan tidak pernah mencapai nol selama waktu 10 tahun, hal ini menunjukkan bahwa tanpa upaya penemuan kasus penyakit terus menyebar secara perlahan dengan jumlah individu *Exposed* tetap tinggi sampai akhir waktu pengamatan, sedangkan grafik dengan adanya kontrol penemuan kasus Subpopulasi *Exposed* menurun drastis dalam 1-3 tahun pertama dan mendekati nol dari 5 tahun pertama hingga akhir waktu pengamatan, hal ini menunjukkan bahwa strategi penemuan kasus yang efektif dapat secara signifikan mengurangi jumlah individu *Exposed* dengan cepat, dengan cara mendeteksi dan menangani kasus lebih awal sebelum mereka dapat menularkan penyakit lebih lanjut.



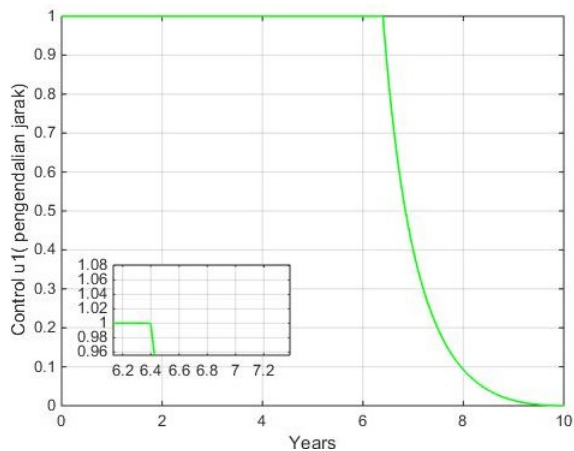
Gambar 4.6. Simulasi Numerik Subpopulasi *Infected* sebelum dan sesudah Penambahan Kontrol Optimal (u_3)

Gambar 4.6 menunjukkan perbandingan simulasi numerik Subpopulasi *Infected* sebelum dan sesudah penambahan kontrol pengobatan (u_3). Pada gambar tersebut terlihat bahwa Subpopulasi *Infected* sebelum kontrol pengobatan menurun lebih lambat dan tidak mencapai nol sampai akhir tahun pengamatan, hal ini menunjukkan bahwa tanpa pengobatan Subpopulasi *Infected* tetap bertahan dalam populasi lebih lama dengan risiko berkelanjutan untuk penyebaran lebih lanjut. Pada grafik dengan pengobatan terbukti sangat efektif dalam menurunkan Subpopulasi *Infected*, yang menegaskan pentingnya tindakan medis melalui pemberian obat berupa isoniazid, rifampisin, pirazinamid, etambutol, dan streptomisin secara tepat sangat penting dalam mengendalikan dan mengurangi penyebaran penyakit tuberkulosis.



Gambar 4.7. Simulasi Numerik Subpopulasi *Recovered* sebelum dan sesudah Penambahan Kontrol Optimal

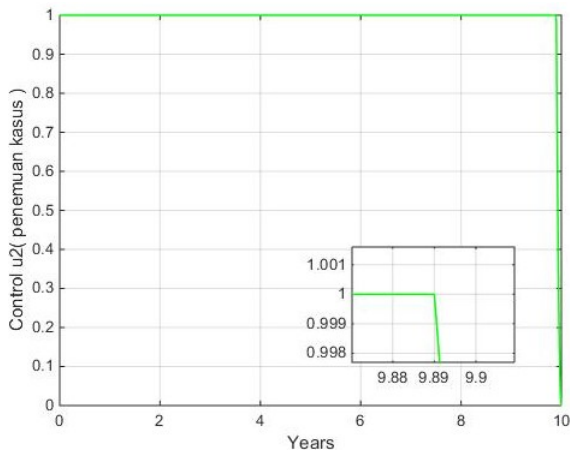
Gambar 4.7 menunjukkan simulasi numerik Subpopulasi individu *Recovered* sebelum dan sesudah penambahan kontrol optimal. Grafik tersebut memperlihatkan adanya peningkatan jumlah individu sembuh seiring waktu akibat proses penyembuhan dari Subpopulasi *Infected*. Hal ini menunjukkan bahwa penerapan kontrol pengobatan (u_3) berupa isoniazid, rifampisin, pirazinamid, etambutol, dan streptomisin secara tepat berperan efektif dalam meningkatkan jumlah individu *Recovered* dengan mempercepat proses pemulihan dari kondisi *Infected*.



Gambar 4.8. Simulasi Numerik Kontrol Pengendalian Jarak (u_1) pada Model Penyebaran Tuberkulosis

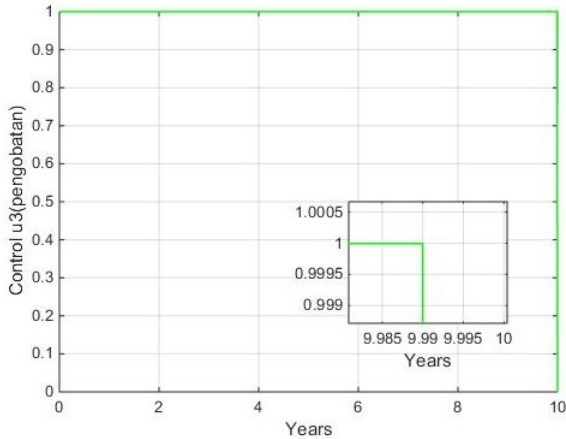
Gambar 4.8 simulasi numerik dari kontrol pengendalian jarak (u_1) dengan menjaga jarak aman minimal 1 meter saat berinteraksi dengan orang lain, menghindari keramaian atau tempat umum, serta tidak mengikuti kegiatan yang melibatkan banyak orang. Simulasi ini diterapkan pada Subpopulasi *Susceptible* selama 10 tahun. Berdasarkan grafik, kontrol pengendalian jarak berlangsung dari tahun ke-0 hingga tahun ke-6 untuk mencapai kondisi optimal

yang dapat menurunkan Subpopulasi *Susceptible*. Selanjutnya, pada tahun 6.4 kontrol pengendalian jarak berhasil menurunkan Subpopulasi *Susceptible* secara bertahap hingga mencapai nol pada akhir waktu pengamatan.



Gambar 4.9. Simulasi Numerik Kontrol Penemuan kasus (u_2) pada Model Penyebaran Tuberkulosis

Gambar 4.9 menampilkan simulasi numerik kontrol optimal berupa penemuan kasus (u_2) dengan cara mendeteksi dan menangani kasus lebih awal sebelum mereka dapat menularkan penyakit lebih lanjut pada Subpopulasi *Exposed* selama 10 tahun. Grafik tersebut menunjukkan bahwa kontrol penemuan kasus diterapkan dari tahun ke-0 hingga tahun ke-9 untuk mencapai kondisi optimal dalam menurunkan Subpopulasi *Exposed*. Kemudian, pada tahun 9.89 kontrol penemuan kasus berhasil secara signifikan menurunkan jumlah Subpopulasi *Exposed* hingga mencapai nol pada akhir waktu pengamatan.

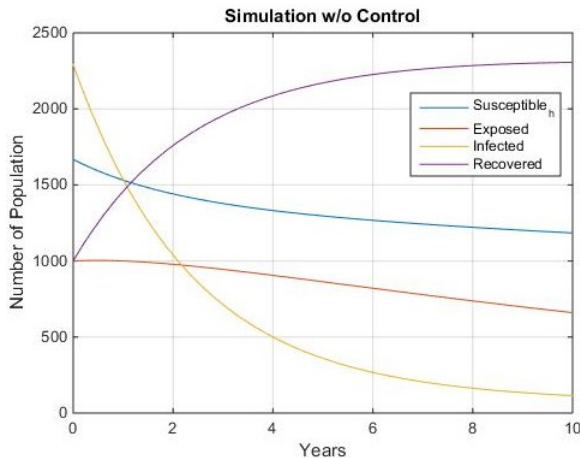


Gambar 4.10. Simulasi Numerik Kontrol Pengobatan (u_3) pada Model Penyebaran Tuberkulosis

Gambar 4.10 menampilkan simulasi numerik kontrol optimal pengobatan (u_3) berupa isoniazid, rifampisin, pirazinamid, etambutol, dan streptomisin pada Subpopulasi *Infected* selama 10 tahun. Grafik tersebut menunjukkan bahwa kontrol pengobatan diterapkan dari tahun ke-0 hingga tahun ke-9 untuk mencapai kondisi optimal dalam menurunkan Subpopulasi *Infected*. Kemudian, mendekati pada tahun 9.99 kontrol berupa pengobatan berhasil secara signifikan menurunkan jumlah Subpopulasi *Infected* hingga mencapai nol pada akhir waktu pengamatan.

2. Simulasi Kedua

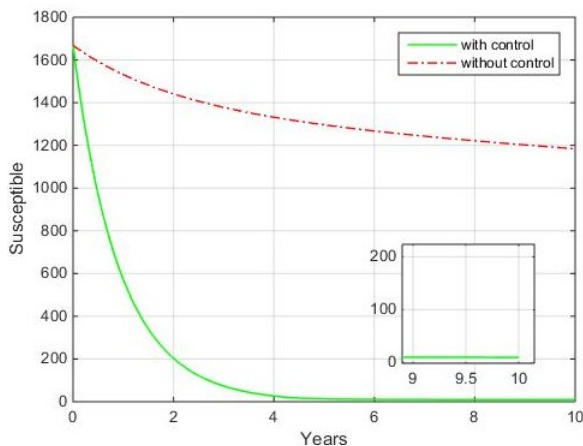
Pada simulasi kedua digunakan bobot kontrol pengendalian jarak (u_1) sebesar $A = 0.1$, penemuan kasus (u_2) sebesar $B = 0.1$, dan pengobatan (u_3) sebesar $C = 0.1$. Hasil simulasi numerik yang diperoleh disajikan dalam bentuk tabel dan grafik berikut.



Gambar 4.11. Simulasi Numerik Model Penyebaran Tuberkulosis Sebelum Penambahan Kontrol Optimal

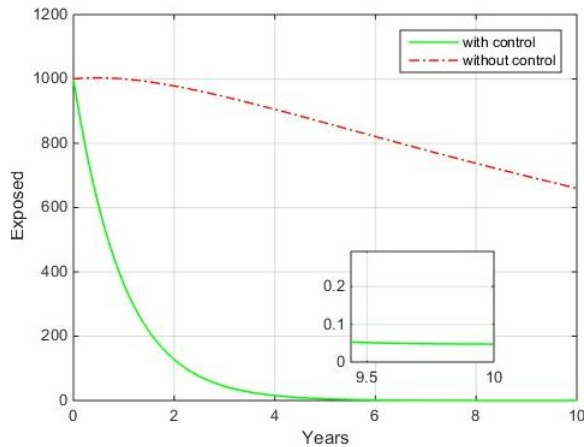
Gambar 4.11 menunjukkan simulasi numerik Subpopulasi *Susceptible*, *Exposed*, *Infected*, dan *Recovered* sebelum penambahan kontrol optimal. Grafik biru sebagai Subpopulasi *Susceptible* di mana jumlahnya menurun seiring waktu karena individu dalam kategori ini berpindah ke Subpopulasi *Exposed* atau langsung ke Subpopulasi *Infected*. Selanjutnya, grafik oranye menunjukkan Subpopulasi *Exposed*, yaitu individu yang telah terpapar namun belum menunjukkan gejala penyakit. Populasi ini juga mengalami penurunan karena sebagian individu beralih ke Subpopulasi *Infected*. Kemudian, grafik kuning merepresentasikan Subpopulasi *Infected*, yang menunjukkan gejala penyakit. Jumlah populasi ini menurun seiring waktu karena individu mulai sembuh atau meninggal akibat penyakit tuberkulosis. Terakhir, grafik ungu menggambarkan Subpopulasi *Recovered*, yang dianggap memiliki kekebalan tubuh. Jumlah populasi yang sembuh terus meningkat

seiring waktu karena semakin banyak individu yang pulih dari penyakit.



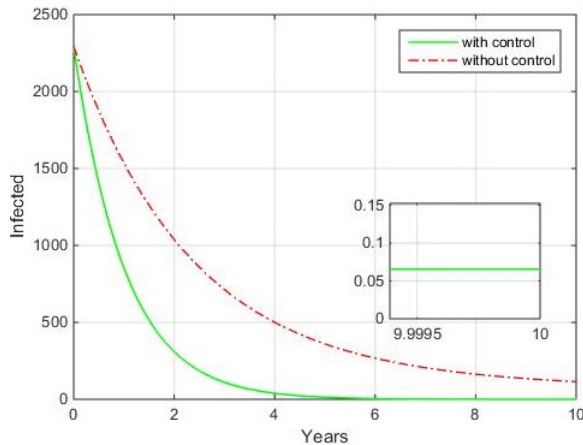
Gambar 4.12. Simulasi Numerik Subpopulasi *Susceptible* sebelum dan sesudah Penambahan Kontrol Optimal (u_1)

Gambar 4.12 menunjukkan simulasi numerik Subpopulasi *Susceptible* sebelum dan sesudah penambahan kontrol optimal pengendalian jarak (u_1). Grafik tanpa kontrol pada Subpopulasi *Susceptible* menurun lebih lambat dan tidak mencapai nol bahkan setelah mencapai waktu 10 tahun, ini menunjukkan bahwa tanpa pengendalian jarak penularan terus berlangsung meskipun dengan kecepatan yang lebih lambat, sedangkan grafik dengan penerapan pengendalian jarak jumlah individu yang rentan menurun tajam dalam 1-3 tahun pertama dan mendekati nol pada 6-10 tahun, ini menunjukkan bahwa pengendalian jarak dengan menjaga jarak aman minimal 1 meter saat berinteraksi dengan orang lain sangat efektif dalam mengurangi interaksi antara individu yang *Susceptible* dan yang terinfeksi, sehingga mengurangi penyebaran penyakit secara cepat dalam Subpopulasi *Susceptible*.



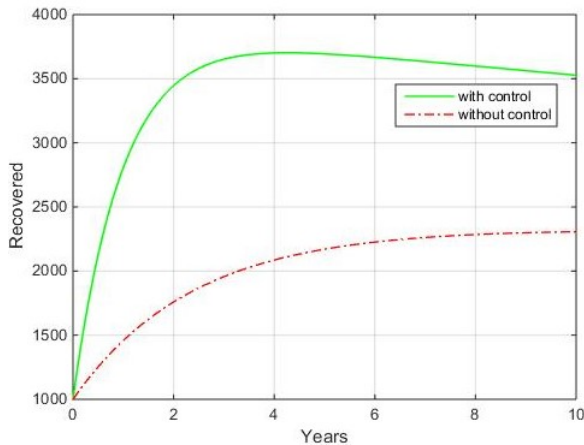
Gambar 4.13. Simulasi Numerik Subpopulasi *Exposed* sebelum dan sesudah Penambahan Kontrol Optimal (u_2)

Gambar 4.13 menyajikan perbandingan simulasi numerik Subpopulasi *Exposed* sebelum dan sesudah kontrol optimal penemuan kasus (u_2). Grafik tanpa kontrol Subpopulasi *Exposed* menurun lebih lambat dan tidak pernah mencapai nol selama waktu 10 tahun, hal ini menunjukkan bahwa tanpa upaya penemuan kasus penyakit terus menyebar secara perlahan dengan jumlah individu *Exposed* tetap tinggi sampai akhir waktu pengamatan, sedangkan grafik dengan adanya kontrol penemuan kasus Subpopulasi *Exposed* menurun drastis dalam 1-3 tahun pertama dan mendekati nol dari 5 tahun pertama hingga akhir waktu pengamatan, hal ini menunjukkan bahwa strategi penemuan kasus yang efektif dapat secara signifikan mengurangi jumlah individu *Exposed* dengan cepat, dengan cara mendeteksi dan menangani kasus lebih awal sebelum mereka dapat menularkan penyakit lebih lanjut.



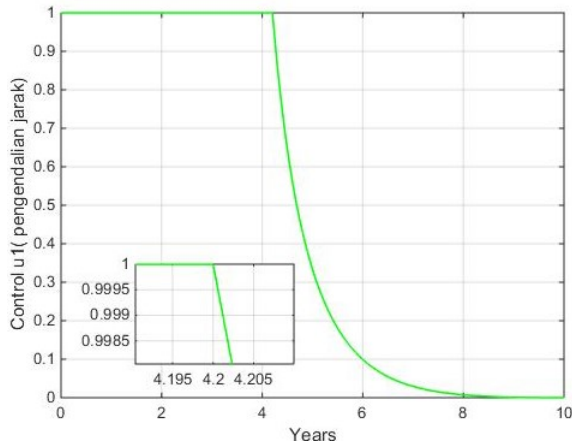
Gambar 4.14. Simulasi Numerik Subpopulasi *Infected* sebelum dan sesudah Penambahan Kontrol Optimal (u_3)

Gambar 4.14 menunjukkan perbandingan simulasi numerik Subpopulasi *Infected* sebelum dan sesudah penambahan kontrol pengobatan (u_3). Pada gambar tersebut terlihat bahwa Subpopulasi *Infected* sebelum kontrol pengobatan menurun lebih lambat dan tidak mencapai nol sampai akhir tahun pengamatan, hal ini menunjukkan bahwa tanpa pengobatan Subpopulasi *Infected* tetap bertahan dalam populasi lebih lama dengan risiko berkelanjutan untuk penyebaran lebih lanjut. Pada grafik dengan pengobatan terbukti sangat efektif dalam menurunkan Subpopulasi *Infected*, yang menegaskan pentingnya tindakan medis melalui pemberian obat berupa isoniazid, rifampisin, pirazinamid, etambutol, dan streptomisin secara tepat sangat penting dalam mengendalikan dan mengurangi penyebaran penyakit tuberkulosis.



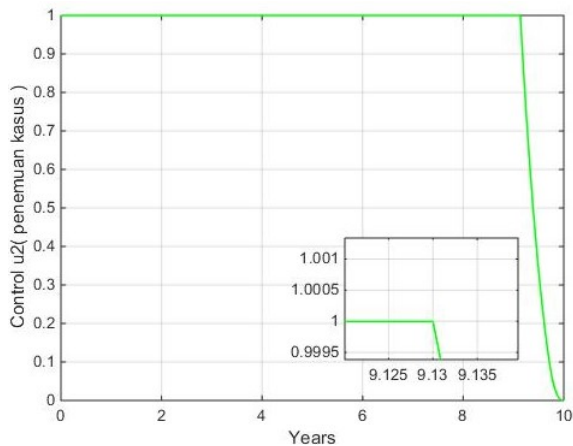
Gambar 4.15. Simulasi Numerik Subpopulasi *Recovered* sebelum dan sesudah Penambahan Kontrol Optimal

Gambar 4.15 menunjukkan hasil simulasi numerik untuk Subpopulasi *Recovered* sebelum dan sesudah penerapan kontrol optimal. Grafik tersebut memperlihatkan adanya peningkatan jumlah individu yang sembuh seiring berjalannya waktu, yang disebabkan oleh proses penyembuhan dari Subpopulasi *Infected*. Peningkatan ini menunjukkan bahwa penerapan kontrol pengobatan (u_3) berupa obat isoniazid, rifampisin, pirazinamid, etambutol, dan streptomisin secara optimal berkontribusi secara signifikan terhadap percepatan pemulihan individu yang terinfeksi. Dengan adanya kontrol pengobatan yang efektif, laju transisi individu dari Subpopulasi *Infected* ke *Recovered* menjadi lebih cepat, yang pada akhirnya berperan dalam menekan penyebaran penyakit di dalam populasi. Hal ini menegaskan bahwa strategi pengobatan memiliki peran penting dalam upaya menghambat penyebaran penyakit tuberkulosis lebih lanjut.



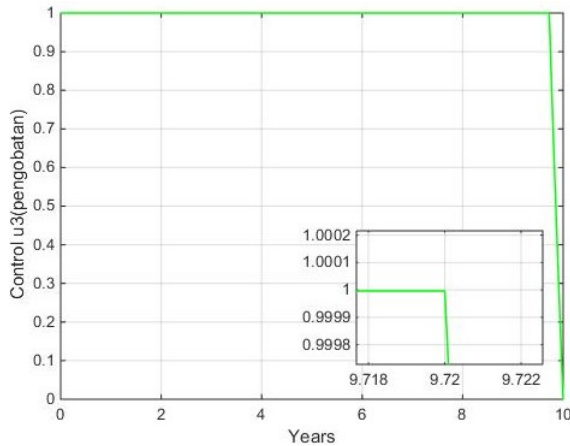
Gambar 4.16. Simulasi Numerik Kontrol Pengendalian Jarak (u_1) pada Model Penyebaran Tuberkulosis

Gambar 4.16 menampilkan hasil simulasi numerik terhadap penerapan kontrol pengendalian jarak (u_1) yang mencakup berbagai tindakan pencegahan, seperti menjaga jarak aman minimal 1 meter saat berinteraksi dengan orang lain, menghindari keramaian atau tempat umum, serta tidak berpartisipasi dalam kegiatan yang melibatkan banyak orang. Simulasi ini diterapkan pada Subpopulasi *Susceptible* selama 10 tahun untuk mengamati efektivitas strategi pengendalian jarak dalam menekan potensi penyebaran infeksi. Berdasarkan grafik hasil simulasi, kontrol pengendalian jarak berlangsung dari tahun ke-0 hingga tahun ke-4 untuk mencapai kondisi optimal yang dapat menurunkan jumlah individu dalam Subpopulasi *Susceptible*. Setelah itu, pada sekitar tahun ke-4.2, pengendalian jarak mulai menunjukkan dampak yang lebih signifikan, dengan jumlah individu dalam Subpopulasi *Susceptible* mengalami penurunan bertahap hingga mencapai nol pada akhir waktu pengamatan.



Gambar 4.17. Simulasi Numerik Kontrol Penemuan kasus (u_2) pada Model Penyebaran Tuberkulosis

Gambar 4.17 menampilkan hasil simulasi numerik terhadap penerapan kontrol optimal berupa penemuan kasus (u_2), dengan cara mendeteksi dan menangani kasus lebih awal sebelum mereka dapat menularkan penyakit lebih lanjut pada Subpopulasi *Exposed* selama 10 tahun. Berdasarkan grafik yang diperoleh, kontrol penemuan kasus mulai diterapkan sejak tahun ke-0 dan terus berlangsung hingga tahun ke-9 untuk mencapai kondisi optimal yang mampu menurunkan jumlah individu dalam Subpopulasi *Exposed*. Seiring dengan berjalannya waktu, dampak dari strategi ini menjadi semakin terlihat, di mana pada sekitar tahun ke-9.13, kontrol penemuan kasus berhasil menurunkan jumlah individu dalam Subpopulasi *Exposed* secara signifikan dan dapat mencapai nol pada akhir waktu pengamatan.



Gambar 4.18. Simulasi Numerik Kontrol Pengobatan (u_3) pada Model Penyebaran Tuberkulosis

Gambar 4.18 menampilkan simulasi numerik kontrol optimal pengobatan (u_3) berupa isoniazid, rifampisin, pirazinamid, etambutol, dan streptomisin pada Subpopulasi *Infected* selama 10 tahun. Grafik tersebut menunjukkan bahwa kontrol pengobatan diterapkan dari tahun ke-0 hingga tahun ke-9 untuk mencapai kondisi optimal dalam menurunkan Subpopulasi *Infected*. Kemudian, mendekati pada tahun 9.72 kontrol berupa pengobatan berhasil secara signifikan menurunkan jumlah Subpopulasi *Infected* hingga mencapai nol pada akhir waktu pengamatan.

Penerapan kontrol u_1 , u_2 , dan u_3 memberikan dampak terhadap perubahan jumlah subpopulasi dalam model penyebaran tuberkulosis. Subpopulasi *Susceptible*, *Exposed*, *Infected* mengalami penurunan yang signifikan, sementara Subpopulasi *Recovered* menunjukkan peningkatan jumlah kesembuhan dibandingkan dengan kondisi sebelum penerapan kontrol. Simulasi numerik menggunakan MATLAB R2013a menunjukkan

bahwa kontrol berupa pengendalian jarak, penemuan kasus, dan pengobatan efektif dalam mengurangi serta mengendalikan penyebaran penyakit tuberkulosis.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dalam skripsi ini, dapat disimpulkan hal-hal berikut:

1. Model penyebaran tuberkulosis dibentuk dengan menambahkan strategi kontrol optimal pengendalian jarak (u_1), penemuan kasus (u_2), dan pengobatan (u_3). Berikut model penyebaran tuberkulosis dengan kontrol yaitu:

$$\frac{dS}{dt} = b - u_1S - \beta SI - \phi SI - \mu S \quad (5.1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \phi SI - (\mu + \gamma + u_2)E \quad (5.2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI + (\gamma + u_2)E - (\mu + \delta + \alpha + u_3)I \quad (5.3)$$

$$\frac{dR}{dt} = (u_3 + \alpha)I - \mu R \quad (5.4)$$

2. Penyelesaian kontrol optimal model penyebaran tuberkulosis diselesaikan dengan menggunakan prinsip minimum pontryagin dengan hasil sebagai berikut.

a. Kondisi Stasioner

$$u_1^* = \min \left\{ \max \left(0, \frac{(\lambda_1)S}{2A} \right), 1 \right\} \quad (5.5)$$

$$u_2^* = \min \left\{ \max \left(0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)E}{2B} \right), 1 \right\} \quad (5.6)$$

$$u_3^* = \min \left\{ \max \left(0, \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)I}{2C} \right), 1 \right\} \quad (5.7)$$

b. Persamaan *State*

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} &= \frac{dS}{dt} = b - u_1 S - \beta SI - \phi SI - \mu S \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} &= \frac{dE}{dt} = \phi SI - (\mu + \gamma + u_2)E \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} &= \frac{dI}{dt} = \beta SI + (\gamma + u_2)E - (\mu + \delta + \alpha + u_3)I \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_4} &= \frac{dR}{dt} = (u_3 + \alpha)I - \mu R \end{aligned} \quad (5.8)$$

c. Persamaan *Costate*

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= \frac{-\partial H}{\partial S} = \lambda_1(u_1 + \beta I + \phi I + \mu) - \lambda_2 \phi I - \lambda_3 \beta I \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= \frac{-\partial H}{\partial E} = -1 + \lambda_2(\mu + \gamma + u_2) - \lambda_3(\gamma + u_2) \\ \frac{d\lambda_3}{dt} &= \frac{-\partial H}{\partial I} = -1 + \lambda_1(\beta S + \phi S) - \lambda_2 \phi S \\ &\quad - \lambda_3(\beta S - (\mu + \delta + \alpha + u_3)) - \lambda_4(u_3 + \alpha) \\ \frac{d\lambda_4}{dt} &= \frac{-\partial H}{\partial R} = \lambda_4 \mu \end{aligned} \quad (5.9)$$

3. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa kontrol pengendalian jarak (u_1) berhasil menurunkan Subpopulasi *Susceptible*, kontrol penemuan kasus (u_2) efektif dalam menurunkan Subpopulasi *Exposed*, serta kontrol pengobatan (u_3) mampu menurunkan Subpopulasi *Infected* dan meningkatkan Subpopulasi *Recovered*.

B. Saran

Penulis menyadari bahwa pembahasan dalam penelitian ini mengenai kontrol optimal model SEIR untuk penyebaran tuberkulosis yang merupakan modifikasi dari jurnal karya Dhimas Mahardika dan Sophia Kartika (2023), masih belum sempurna. Penelitian ini terbatas pada analisis kontrol optimal untuk memprediksi cara meminimalkan penyebaran tuberkulosis melalui kontrol pengendalian jarak, penemuan kasus, dan pengobatan. Oleh karena itu, penelitian ini memberikan kesempatan bagi pembaca untuk melakukan modifikasi dan pengembangan lebih lanjut di masa depan.

Selain itu, penulis memberikan beberapa saran sebagai berikut:

1. **Untuk pemerintah Kota Semarang**, diharapkan hasil penelitian ini dapat menjadi pertimbangan dalam merumuskan kebijakan yang lebih efektif dalam pengendalian tuberkulosis, khususnya dalam memperkuat pelaksanaan pengendalian jarak, penemuan kasus secara aktif, serta pengobatan yang berkesinambungan.
2. **Untuk Dinas Kesehatan**, disarankan agar strategi pengendalian yang diterapkan didasarkan pada hasil

analisis matematis dan data epidemiologis yang akurat, guna meningkatkan efisiensi program pencegahan dan pengendalian tuberkulosis di lapangan.

3. **Untuk masyarakat**, diharapkan dapat lebih meningkatkan kesadaran dan partisipasi aktif dalam program pencegahan dan pengobatan tuberkulosis, serta tetap menjaga perilaku hidup bersih dan sehat untuk meminimalkan risiko penularan penyakit.

DAFTAR PUSTAKA

- Al Fauzi, A. L., Darti, I., dan Suryanto, A. (2017). Kontrol Optimal pada Model Economic Order Quantity (EOQ) dengan Inisiatif Tim Penjualan. *Jurnal Teknik Industri*. *Jurnal Teknik Industri*, 19(1), 21-28.
- Andika, F., Safira, A., Mustina, N., dan Marniati, M. (2020). Edukasi tentang Pemberantasan Penyakit Menular pada Siswa di SMA Negeri 5 Kota Banda Aceh. *Jurnal Pengabdian Kepada Masyarakat Bidang Kesehatan*, 2(1), 29-3.
- Chukwu, C. W., Alqahtani, R. T., Alfiniyah, C., dan Herdicho, F. F. (2023). A Pontryagin's maximum principle and optimal control model with cost-effectiveness analysis of the COVID-19 epidemic. *Decision Analytics Journal*, 8, 100273.
- Dinas Kesehatan Semarang, "6.527 Kasus TBC Ditemukan Sepanjang 2023," diakses pada 09 Oktober 2024. [Online]. Tersedia: <https://joglojateng.com/2024/02/21/dinkes-kota-semarang-6527-kasus-tbc-ditemukan-sepanjang2023/>
- Hethcote, H. W., M. Zhien, dan L. Shengbing. (2002). Effect of Quarantine in Six Endemic Models for Infectious Disease. *Mathematical Biosciences*, 180. 141-160.
- Jamil, A. K., Yulida, Y., dan Karim, M. A. (2023). Analisis Kestabilan dan Solusi Numerik pada Model SEIR untuk Penyakit Tuberkulosis. *Jurnal Matematika Murni Dan Terapan*, 17(1), 14-29.

- Jerubet, R., Kimathi, G., dan Wanaina, M. (2019). Analysis and modeling of tuberculosis transmission dynamics, *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, 32(5), 1-14.
- Jumpen, W., B. Wiwatanapataphee, Y. H. Wu, dan I. M. Tang. (2009). A SEIQR Model for Pandemic Influenza and Its Parameter Identification, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 52, 247-265.,
- Kementerian Kesehatan RI, "Tuberkulosis: Pencegahan dan Pengobatan," accessed Sep. 29, 2024. [Online]. Available: https://yankes.kemkes.go.id/view_artikel/1375/tbc
- Kementerian Kesehatan RI, "Informasi Dasar Seputar TBC," Kementerian Kesehatan RI, accessed Sep. 29, 2024. [Online]. Tersedia: https://tbindonesia.or.id/pustaka_tbc/informasi-dasar-seputar-tbc
- Kementerian Kesehatan RI, "Waspada Penularan dan Gejala TBC," Kementerian Kesehatan RI, accessed Sep. 29, 2024. [Online]. Tersedia: https://yankes.kemkes.go.id/view_artikel/3113/waspada-penularan-dan-gejala-tbc
- Kementerian Kesehatan RI, (2024). " Panduan Lengkap Pengobatan Tuberkulosis. ccessed Sep. 29, 2024. [Online]. Tersedia: <https://tbindonesia.or.id/panduan-lengkap-pengobatan-tuberkulosis-cara-efektif-mengatasi-tbc/>
- Kemenkes (2020c), "Pertanyaan dan Jawaban Terkait COVID-19," Kementerian Kesehatan RI, accessed Sep. 29, 2024. [Online].

Tersedia: <https://www.kemkes.go.id/folder/view/full-content/structure-faq.html>.

- Kereyu, D., dan Demie, S. (2021). Transmission dynamics model of Tuberculosis with optimal control strategies in Haramaya district, Ethiopia. *Advances in Difference Equation*, 2021(1), 289.
- Kristini, T., dan Hamidah, R., (2020). Potensi penularan tuberculosis paru pada anggota keluarga penderita. *Jurnal Kesehatan Masyarakat Indonesia*. 15(1), 24-28.
- Lenhart, S., dan Workman, J. T. (2007). Optimal control applied to biological models, New York: Taylor and Francis Group.
- Madona, A., Pratiwi, E. C., Adi, M. A. B., Nugraha, R. P., Qinaya, Z. P., Arifah, I., dan Utami, H. P. (2023). Skrining Penyakit Menular Tuberculosis Pada Masyarakat di Kecamatan Kartasura Kabupaten Sukoharjo. *PROSIDING SEMINAR KESEHATAN MASYARAKAT*, Vol. 1, 191-200.
- Mahardika, D., dan Kartika, S. (2024). DYNAMIC SYSTEM OF TUBERCULOSIS MODEL USING OPTIMAL CONTROL IN SEMARANG CITY INDONESIA. *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 18(1), 0043-0052.
- Mahmudah, D. E., dan Naf'an, M. Z. (2014). KONTROL OPTIMASI MODEL EPIDEMIK HOST-VECTOR DENGAN SIMULASI MENGGUNAKAN FORWARD-BACKWARD SWEEP. *Jurnal Ilmiah Teknologi Informasi Asia*, 8(1), 1-19.
- Melania, M. K. N., dan Dhamanti, I. (2023). Analysis of Physical Distancing Obedience for Covid-19 Spread Prevention in

- Indonesia: A Scoping Review. *Media Gizi Kesmas*, 12(1), 522-529.
- Millah, N., dan Fitria, I. (2021). Kendali optimal penyebaran penyakit influenza H1N1 tiga strain dengan vaksinasi dan pengobatan. *Journal of Mathematics and Its Applications*, 18(1), 57-70.
- Nainggolan, J. (2017). Kontrol pengobatan optimal pada model penyebaran Tuberkulosis tipe SEIT. *PE-Jurnal Mat*, 6(2), 137.
- Norasia, Y., Zulaikha, Z., Tafrikan, M., Ghani, M., dan Mukama, D. S. (2022). Optimal Control of HIV-1 Spread in Combination with Nutritional Status and ARV-Treatment. (*IJCSAM International Journal of Computing Science and Applied Mathematics*, 8(2), 66-70.
- Nurjana, M. A. (2015). Faktor risiko terjadinya tuberkulosis paru usia produktif (15-49 tahun) di Indonesia. *Media Penelitian dan Pengembangan Kesehatan*, 25(3), 20736.
- Muhroni, L. H. (2024). Implementasi Prinsip Pontryagin Dalam Masalah Kontrol Optimal Pada Model Matematika Interaksi Perokok. *Journal of Mathematics: Theory and Applications*, 6(1), 31-41.
- Puspitasari, A., Kamiran, K., dan Asiyah, N. (2020). Analisis kestabilan dan kontrol optimal model penyebaran tuberkulosis (TB) dengan terapi dan vaksinasi menggunakan metode runge kutta. *Jurnal Sains dan Seni ITS*, 8(2), A58-A64.
- Putri, N., dan Rina, I. (2023). Mengontruksi Kontrol Optimal Berkendala Pada Sistem LTI Dengan Keadaan Berkendala

- Menggunakan Metode Fungsi Penalti. *Jurnal Teknologi Dan Sistem Informasi Bisnis*, 5(2), 164-169.
- Rizal, S. (2024). *Aset Berharga yang tidak ternilai*. <https://www.rumbelnesia.com>.
- Ross, Shepley L. 1989. *Differential Equations*. Third Edition. John Wiley and Sons, Inc. United State of America.
- Rosyid, I. A. M., Respatiwan, R., dan Handajani, S. S., (2021). Model Penyebaran Penyakit SIR Tipe Rantai Binomial dengan Kontak Random dan Waktu Penyembuhan Bernilai Tak Hingga. *Indonesian Journal of Applied Statistics*, 3(2), 132-142.
- Sani, A. (2022)). Pengantar Pemodelan Matematika Dalam Bidang Biologi. *Media Sains Indonesia*.
- Septianingrum, E. A., Azzahra, S. S., Yasin, F., dan Utami, N. K. (2023). Pandangan Islam Terhadap Anjuran Pemeliharaan Kesehatan Gigi Serta Larangan Mengikir Gigi. *Journal Islamic Studies*, 1(2), 222-227.
- Septiansyah, G., Karim, M. A., dan Yulida, Y. (2022). Pemodelan Matematika Penyebaran Covid-19 dengan Model SVEIR. *JURNAL MATEMATIKA MURNI DAN TERAPAN*, 16(2), 101-116.
- Side, S., Sanusi, W., Setiawan, N. F. (2016). Analisis dan simulasi model SITR pada penyebaran penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar. *Jurnal Sainsmat*, 5(2), 191-204.
- S. Lenhart and J. T. Workman. (2007). Optimal Control Applied to Biological Models.

- Sumardi, S. R. A., dan Norasia, Y. (2023). Penerapan Dua Kendali Optimal pada Model Matematika Penyebaran Virus Ebola dengan Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin (PMP). *Indonesian Journal of Multidisciplinary Expertise* ,1(4), 10-17.
- Syahril, E., dan Garnadi, A. D. (2018). Kuliah Pengantar Kontrol Optimum dan Metode Numerik dalam Scilab. *JMA, Vol. yy No, 1*, 4-24.
- Syuhefti, E. N. M. (2021). Model susceptible exposed infected quarantine recovered (kasus covid-19 di Indonesia). *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika* 12(2), 249-258.
- Tanjung, R. W., Muhafzan, M., Zulakmal, Z. (2021). Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Kontrol Vaksinasi. *Jurnal Matematika UNAND*. 10(3), 280-288.
- Utami, P. S.(2024). Pemodelan matematika penyakit tuberkulosis dengan vaksinasi, penggunaan masker medis, kasus tidak terdeteksi, dan re-infeksi. *Bachelor's thesis*. Jakarta: Fakultas Sains dan Teknologi UIN Syarif Hidayatullah.
- World Health Organization, "Tuberculosis," World Health Organization (WHO), accessed Sep. 29, 2024. [Online]. Available: https://www.who.int/health-topics/tuberculosis#tab=tab_1
- Yanti, I. (2022). Persamaan Diferensial untuk Sains dan Teknik. Indramayu.
- Yosua, M. I., Ningsih, F., dan Ovany, R. (2022). Hubungan Kondisi Lingkungan Rumah dengan Kejadian Tuberkulosis (TB) Paru. *Jurnal Surya Medika (JSM)*, 8(1), 136-141.

- Yudasubrata, N. S. Y., (2018). Analisis Dinamik Model SIR dengan Skema Beda Hingga Tak-Standar. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Terapan 2018*.
- Vidyastari, Y. S., Riyanti, E., dan Cahyo, K. (2019). Faktor-Faktor Yang Mempengaruhi Pencapaian Target Cdr (Case Detection Rate) Oleh Koordinator P2tb Dalam Penemuan Kasus di Puskesmas Kota Semarang. *Jurnal Kesehatan Masyarakat*, 7(1), 535-544.
- Zulaikha, Z., dan Norasia, Y. (2024). Optimal control of Covid-19 in Jakarta and its relationship with unity of sciences. *JAIP Conference Proceedings* , 3046(1).

Lampiran 1. Program MATLAB R2013a Model Penyebaran Tuberkulosis dengan dan tanpa Kontrol Optimal

```

clc;
clear all;
close all;
test = -1;

N = 1000%iterasi
tf = 10; %T waktu akhir
t0 = 0; % 0 waktu awal
h = (tf-t0)/N;
%tf = 0:h:25;
h2 = h/2;
ite=1;

% parameter value
D1=1000;
D2=1000;
D3=1000;

b=0.0121; %Angka kelahiran
beta= 0.00002;%individu susceptible menjadi infected
miu=0.0101;%Tingkat kematian alamai
alfa=0.25; %Individu infected menjadi recovered
phi=0.00002;%Individu susceptible menjadi exposed
gama=0.05;%Individu exposed menjadi Infected
delta=0.2;%Tingkat kematian akibat penyakit
A=10; %bobot u_1
B=10; %bobot u_2
C=10; %bobot u_3

%=====KONTROL OPTIMAL
ABCDE=====
u = zeros(1,N+1); %kontrol u1 pengendalian jarak
m = zeros(1,N+1); %kontrol u2 penemuan kasus
n = zeros(1,N+1); %kontrol u3 pengobatan
S = zeros(1,N+1);
E = zeros(1,N+1);
I = zeros(1,N+1);
R = zeros(1,N+1);

```

```

% initial conditions
S(1) = 1668;
E(1) = 1000;
I(1) = 2292;
R(1) = 1000;
N0 = S(1) + E(1) + I(1) + R(1);

%costate
Si1 = zeros(1,N+1);
Si2 = zeros(1,N+1);
Si3 = zeros(1,N+1);
Si4 = zeros(1,N+1);

for i = 0:N
    tt(i+1) = t0 + i*h;
end
%MODEL PENYEBARAN PENYAKIT TUBERKULOSIS
SEIR SEBELUM KONTROL
%S = b - beta*S(i)*I(i) -miu* S(i) -phi*S(i)*I(i);
%E = phi*S(i)*I(i)-(miu+gamma)*E(i);
%I = beta*S(i)*I(i)+gamma*E(i)-(miu+deltha+alpha)*I(i);
%R = alpha*I(i)-miu*R(i);

%MODEL PENYEBARAN PENYAKIT TUBERKULOSIS
SEIR SETELAH KONTROL
%S=b - u(i)*S(i)- beta*S(i)*I(i)- phi*S(i)*I(i)-miu*S(i);
%E=phi*S(i)*I(i)-(miu+gama+m(i))*E(i);
%I=beta*S(i)*I(i)+(gama+m(i))*E(i)-
(miu+delta+alpa+n(i))*I(i);
%R=(n(i)+alpa)*I(i)-miu*R(i);

%MODEL SEIR S=x(1) E=x(2) I=x(3) R=x(4) TANPA
KONTROL OPTIMAL U1, U2 DAN U3
f=inline('[0.0121-0.00002*x(1)*x(3)-0.0101*x(1) -
0.00002*x(1)*x(3); 0.00002*x(1)*x(3)-
(0.0101+0.05)*x(2);0.00002*x(1)*x(3)+0.05*x(2)-
(0.0101+0.2+0.25)*x(3);0.25*x(3)-0.0101*x(4)]','t','x');
[t x]=ode45(f,[0 tf],[1668 1000 2292 1000]);

```

```

figure(1)
plot(t,x(:,1),t,x(:,2),t,x(:,3),t,x(:,4))
legend('Susceptible_h','Exposed','Infected','Recovered')
xlabel('Years'); ylabel('Number of Population')
title('Simulation w/o Control')
grid on
while(test < 0)
    oldu = u;
    oldm = m;
    oldn = n;
    oldS = S;
    oldE = E;
    oldI = I;
    oldR = R;
    oldSi1 = Si1;
    oldSi2 = Si2;
    oldSi3 = Si3;
    oldSi4 = Si4;
%forward rk4
    %MODEL DENGAN KONTROL OPTIMAL u1,u2 dan
    u3
    for i=1:N

        s1=b - u(i)*S(i)- beta*S(i)*I(i)- phi*S(i)*I(i)-miu*S(i);
        e1=phi*S(i)*I(i)-(miu+gama+m(i))*E(i);
        i1=beta*S(i)*I(i)+(gama+m(i))*E(i)-
        (miu+delta+alfa+n(i))*I(i);
        r1=(n(i)+alfa)*I(i)-miu*R(i);

        s2=b - (0.5*(u(i)+u(i+1)))*(S(i)+h2*s1) -
        beta*(S(i)+h2*s1)*(I(i)+h2*i1) -
        phi*(S(i)+h2*s1)*(I(i)+h2*i1)- miu *(S(i)+h2*s1) ;
        e2=phi*(S(i)+h2*s1)*(I(i)+h2*i1)-
        (miu+gama+(0.5*(m(i)+m(i+1))))*(E(i)+h2*e1);

        i2=beta*(S(i)+h2*s1)*(I(i)+h2*i1)+(gama+(0.5*(m(i)+m(i+1)
        )))*(E(i)+h2*e1)-
        (miu+delta+alfa+(0.5*(n(i)+n(i+1))))*(I(i)+h2*i1);
        r2=((0.5*(n(i)+n(i+1)))+alfa)*(I(i)+h2*i1)-
        miu*(R(i)+h2*r1);
    end
end

```

```

s3= b - (0.5*(u(i)+u(i+1)))*(S(i)+h2*s2) -
beta*(S(i)+h2*s2)*(I(i)+h2*i2) -
phi*(S(i)+h2*s2)*(I(i)+h2*i2)- miu *(S(i)+h2*s2) ;
e3=phi*(S(i)+h2*s2)*(I(i)+h2*i2)-
(miu+gama+(0.5*(m(i)+m(i+1))))*(E(i)+h2*e2);

i3=beta*(S(i)+h2*s2)*(I(i)+h2*i2)+(gama+(0.5*(m(i)+m(i+1)
))))*(E(i)+h2*e2)-
(miu+delta+alfa+(0.5*(n(i)+n(i+1))))*(I(i)+h2*i2);
r3=((0.5*(n(i)+n(i+1)))+alfa)*(I(i)+h2*i2) -
miu*(R(i)+h2*r2);

s4= b - (u(i+1))*(S(i)+h2*s3) -
beta*(S(i)+h2*s3)*(I(i)+h2*i3) -
phi*(S(i)+h2*s3)*(I(i)+h2*i3)- miu *(S(i)+h2*s3);
e4= phi*(S(i)+h2*s3)*(I(i)+h2*i3)-
(miu+gama+(m(i+1)))*(E(i)+h2*e3);

i4=beta*(S(i)+h2*s3)*(I(i)+h2*i3)+(gama+(m(i+1)))*(E(i)+
h2*e3)-(miu+delta+alfa+(n(i+1)))*(I(i)+h2*i3);
r4=((n(i+1))+alfa)*(I(i)+h2*i3)-miu*(R(i)+h2*r3);

S(i+1) = S(i) + (h/6)*(s1 + 2*s2 + 2*s3 + s4);
E(i+1) = E(i) + (h/6)*(e1 + 2*e2 + 2*e3 + e4);
I(i+1) = I(i) + (h/6)*(i1 + 2*i2 + 2*i3 + i4);
R(i+1) = R(i) + (h/6)*(r1 + 2*r2 + 2*r3 + r4);

end
%backward rk4 For lambda
%turunan Halmitonian
for i=1:N
    j = N + 2 - i;

    si11=Si1(j)*(beta*I(j)+ phi *I(j)+ miu + u(j))-
Si2(j)*phi*I(j)-Si3(j)*beta*I(j) ;
    si21=-1+Si2(j)*(miu+gama+m(j))-Si3(j)*(gama+m(j));
    si31=-1+Si1(j)*(beta*S(j)+phi*S(j))-Si2(j)*phi*S(j)-
Si3(j)*(beta*S(j) -(miu+delta+alfa+n(j)))-Si4(j)*(alfa+n(j));
    si41=Si4(j)*miu;

```

%2

```

    si12=(Si1(j)-h2*si11)*(beta*(0.5*(I(j)+I(j-1)))+
    phi*(0.5*(I(j)+I(j-1)))+miu +(0.5*(u(j)+u(j-1))))-(Si2(j)-
    h2*si21)*phi*(0.5*(I(j)+I(j-1)))-(Si3(j)-
    h2*si31)*beta*(0.5*(I(j)+I(j-1)));
    si22=-1+(Si2(j)-h2*si21)*(miu+gama+(0.5*(m(j)+m(j-
    1))))-(Si3(j)-h2*si31)*(gama+(0.5*(m(j)+m(j-1)))));
    si32=-1+(Si1(j)-h2*si11)*(beta*(0.5*(S(j)+S(j-
    1)))+phi*(0.5*(S(j)+S(j-1))))-(Si2(j)-
    h2*si21)*phi*(0.5*(S(j)+S(j-1)))-(Si3(j)-
    h2*si31)*(beta*(0.5*(S(j)+S(j-1))) -
    (miu+delta+alfa+(0.5*(n(j)+n(j-1))))))-(Si4(j)-
    h2*si41)*(alfa+(0.5*(n(j)+n(j-1)))));
    si42=(Si4(j)-h2*si41)*miu;

```

%3

```

    si13=(Si1(j)-h2*si12)*(beta*(0.5*(I(j)+I(j-
    1)))+phi*(0.5*(I(j)+I(j-1)))+miu +(0.5*(u(j)+u(j-1))))-
    (Si2(j)-h2*si22)*phi*(0.5*(I(j)+I(j-1)))-(Si3(j)-
    h2*si32)*beta*(0.5*(I(j)+I(j-1)));
    si23=-1+(Si2(j)-h2*si22)*(miu+gama+(0.5*(m(j)+m(j-
    1))))-(Si3(j)-h2*si32)*(gama+(0.5*(m(j)+m(j-1)))));
    si33=-1+(Si1(j)-h2*si12)*(beta*(0.5*(S(j)+S(j-
    1)))+phi*(0.5*(S(j)+S(j-1))))-(Si2(j)-
    h2*si22)*phi*(0.5*(S(j)+S(j-1)))-(Si3(j)-
    h2*si32)*(beta*(0.5*(S(j)+S(j-1))) -
    (miu+delta+alfa+(0.5*(n(j)+n(j-1))))))-(Si4(j)-
    h2*si42)*(alfa+(0.5*(n(j)+n(j-1)))));
    si43=(Si4(j)-h2*si42)*miu;

```

%4

```

    si14=(Si1(j)-h2*si13)*(beta*(I(j-1))+phi*(I(j-1))+miu
    +(u(j-1)))-(Si2(j)-h2*si23)*phi*(I(j-1))-(Si3(j)-
    h2*si33)*beta*(I(j-1));
    si24=-1+(Si2(j)-h2*si23)*(miu+gama+(m(j-1)))-(Si3(j)-
    h2*si33)*(gama+(m(j-1)));
    si34=-1+(Si1(j)-h2*si13)*(beta*(S(j-1))+phi*(S(j-1)))-
    (Si2(j)-h2*si23)*phi*(S(j-1))-(Si3(j)-h2*si33)*(beta*(S(j-1))
    -(miu+delta+alfa+(n(j-1)))))-(Si4(j)-h2*si43)*(alfa+(n(j-
    1)))));
    si44=(Si4(j)-h2*si43)*miu;

```



```

        Si1(j-1) = Si1(j) - (h/6)*(si11 + 2*si12 + 2*si13 + si14);
        Si2(j-1) = Si2(j) - (h/6)*(si21 + 2*si22 + 2*si23 + si24);
        Si3(j-1) = Si3(j) - (h/6)*(si31 + 2*si32 + 2*si33 + si34);
        Si4(j-1) = Si4(j) - (h/6)*(si41 + 2*si42 + 2*si43 + si44);
    end
    %Update u
    u1=S.*(Si1)/2*A*D1;
    u11=min(1,max(0,u1));
    u=0.5*(u11+oldu);

    m1=E.*(Si2-Si3)/2*B*D2;
    m11=min(1,max(0,m1));
    m=0.5*(m11+oldm);

    n1=I.*( Si3- Si4)/2*C*D3;
    n11=min(1,max(0,n1));
    n=0.5*(n11+oldn);
    %Convergence Test
    temp1 = beta*sum(abs(u)) - sum(abs(olds - u));
    temp2 = beta*sum(abs(m)) - sum(abs(olds - m));
    temp3 = beta*sum(abs(n)) - sum(abs(olds - n));
    temp4 = beta*sum(abs(S)) - sum(abs(olds - S));
    temp5 = beta*sum(abs(E)) - sum(abs(olds - E));
    temp6 = beta*sum(abs(I)) - sum(abs(olds - I));
    temp7 = beta*sum(abs(R)) - sum(abs(olds - R));
    temp9 = beta*sum(abs(Si1)) - sum(abs(olds - Si1));
    temp10 = beta*sum(abs(Si2)) - sum(abs(olds - Si2));
    temp11 = beta*sum(abs(Si3)) - sum(abs(olds - Si3));
    temp12 = beta*sum(abs(Si4)) - sum(abs(olds - Si4));

    test = min(temp1, min(temp2, min(temp3, min(temp4,
    min(temp5, min(temp6, min(temp7, min(temp9, min(temp10,
    min(temp11, min(temp12))))))))));

    %   ite=ite+1
end

```

```

y(1,:)=tt;
y(2,:)=S;
y(3,:)=E;
y(4,:)=I;
y(5,:)=R;
y(7,:)=Si1;
y(8,:)=Si2;
y(9,:)=Si3;
y(10,:)=Si4;
y(12,:)=u;
y(13,:)=m;
y(14,:)=n;

figure(2)
plot(y(1,:),y(2,:),'-g','linewidth',1)
xlim([0 tf])
hold on
grid on
plot(t,x(:,1),'-r','linewidth',1)
xlim([0 tf])
legend('with control','without control')
xlabel('Years')
ylabel('Susceptible')

figure(3)
plot(y(1,:),y(3,:),'-g','linewidth',1)
xlim([0 tf])
hold on
grid on
plot(t,x(:,2),'-r','linewidth',1)
xlim([0 tf])
legend('with control','without control')
xlabel('Years')
ylabel('Exposed')

```

```

figure(4)
plot(y(1,:),y(4,:),'-g','linewidth',1)
xlim([0 tf])
hold on
grid on
plot(t,x(:,3),'-r','linewidth',1)
xlim([0 tf])
legend('with control','without control')
xlabel('Years')
ylabel('Infected')
%
figure(5)
plot(y(1,:),y(5,:),'-g','linewidth',1)
xlim([0 tf])
hold on
grid on
plot(t,x(:,4),'-r','linewidth',1)
xlim([0 tf])
legend('with control','without control')
xlabel('Years')
ylabel('Recovered')

figure(7)
plot(y(1,:),y(12,:),'-g','linewidth',1)
xlim([0 tf])
ylim([0 1])
xlabel('Years')
ylabel('Control u1( pengendalian jarak)')
grid on

figure(8)
plot(y(1,:),y(13,:),'-g','linewidth',1)
xlim([0 tf])
ylim([0 1])
xlabel('Years')
ylabel('Control u2( penemuan kasus )')
grid on

```

```
figure(9)
plot(y(1,:),y(14,:),'-g','linewidth',1)
xlim([0 tf])
ylim([0 1])
xlabel('Years')
ylabel('Control u3(pengobatan)')
grid on
```

Lampiran 2. Daftar Riwayat Hidup**DAFTAR RIWAYAT HIDUP****A. Identitas Diri**

Nama Lengkap : Erlinda Diah Prawati
Tempat, Tanggal Lahir : Rembang, 26 Januari 2002
Alamat : Desa Pelemsari 02/04 Kec.
Sumber Kab. Rembang
Nomor HP : 081910668337
E-mail : erlindadiah10@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. SD Negeri Pelemsari : lulus tahun 2014
2. SMP Negeri 1 Sumber : lulus tahun 2017
3. SMA Negeri 1 Sulang : lulus tahun 2020