

POLINOMIAL SIKEL TERINDUKSI PADA GRAF

SKRIPSI

**Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika**



Oleh : ANA NUR ROKHMAH

NIM : 2108046095

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2025**

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : ANA NUR ROKHMAH
NIM : 2108046095
Jurusan/Program Studi : Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

POLINOMIAL SIKEL TERINDUKSI PADA GRAF

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri, kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 11 Juni 2025

Pembuat pernyataan,



ANA NUR ROKHMAH

NIM : 2108046095



KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

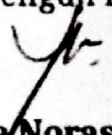
Judul : **POLINOMIAL SIKEL TERINDUKSI PADA GRAF**
Penulis : **ANA NUR ROKHMAH**
NIM : **2108046095**
Jurusan : **Matematika**

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 25 Juni 2025

DEWAN PENGUJI

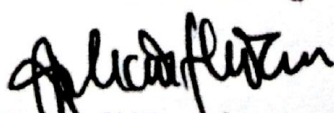
Penguji I, 
Dinni Rahma Oktaviani, M.Si.
NIP : 199410092019032017

Penguji II, 
Yolanda Norasia, M.Si.
NIP : 199409232019032011

Penguji III, 
Zulaikha, M.Si.
NIP : 199204092019032027

Penguji IV, 
Seftina Diyah Miasary, M.Sc.
NIP : 198709212019032010

Pembimbing,


Prihadi Kurniawan, M.Sc.
NIP : 199012262019031012

ABSTRAK

Graf $G=(V, E)$ adalah suatu himpunan berhingga titik yang tidak kosong dan sisi boleh kosong, dimana dua titik dihubungkan oleh satu sisi. Dalam penelitian ini, graf yang digunakan adalah graf sederhana, graf memiliki siklus (graf lengkap, lingkaran, dan bipartit lengkap), terhubung, dan tidak berarah. Objek kajian pada penelitian ini adalah polinomial siklus terinduksi pada graf. Polinomial siklus terinduksi pada graf adalah suatu subgraf terinduksi yang membentuk graf siklus dengan struktur dan sifatnya dapat dinyatakan dalam bentuk suku banyak. Penelitian ini bertujuan mampu menjelaskan sifat-sifat polinomial siklus terinduksi pada graf yang diperoleh dari hasil operasi tertentu. Operasi pada graf meliputi operasi gabungan, join, komplemen, produk, komposisi, ring sum, dan operasi korona. Setiap operasi pada graf memengaruhi polinomial siklus terinduksinya dengan masing-masing operasi membentuk siklus terinduksi yang bervariasi tergantung pada graf yang digunakan pula. Dengan demikian, polinomial siklus terinduksi mampu menggambarkan perubahan struktur graf secara signifikan dan dapat mempresentasikan siklus terinduksi serta sifat pada graf hasil operasi dengan mengamati graf sebelum dan sesudah dioperasikan.

Kata kunci : Graf sederhana, polinomial graf, siklus terinduksi, operasi graf.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakaatuh

Alhamdulillah, segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, Tuhan semesta alam yang telah memberikan rahmat, kekuatan, dan pertolongan-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul "Polinomial Sikel Terinduksi pada Graf."

Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan kita, Nabi Muhammad SAW, yang telah membawa manusia dari zaman jahiliah menuju zaman dengan keilmuan yang luas.

Penyusunan tugas akhir ini merupakan salah satu syarat kelulusan Strata 1 (S1) di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Walisongo Semarang. Proses penyusunan tugas akhir ini tidak lepas dari bantuan, dukungan, arahan, dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Nizar Ali, M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
2. Prof. Dr. H. Musahadi, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
3. Ibu Any Muanalifah, M.Si., Ph.D., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
4. Bapak Prihadi Kurniawan, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan bimbingan, motivasi, kritik, dan

saran sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Terima kasih telah membimbing dengan sabar, tekun, dan sangat peduli dengan progres tugas akhir penulis serta memberi *support*, arahan, dan nasihat agar penulis menyelesaikan studi tepat pada waktunya.

5. Ibu Ariska Kurnia Rachmawati, M.Sc. selaku Wali Dosen yang telah memberikan arahan selama masa perkuliahan penulis.
6. Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang yang telah membekali ilmu kepada penulis selama penulis melakukan studi S1 di UIN Walisongo Semarang.
7. Kedua orang tua tercinta, Almh. Ibu Narsiah dan Bapak Darso Haryono serta kakak dan adik penulis yang telah memberikan dukungan dan doa selama masa studi penulis.
8. Keluarga besar khususnya *Wa Juwed* yang telah memberikan dukungan, motivasi, doa, dan material, serta telah mendidik sekaligus membesarkan penulis dengan kasih sayang.
9. Teman-teman seperjuangan Matematika Murni kelas C angkatan 2021 yang telah kebersamai proses kuliah penulis. Terima kasih rasa kekeluargaan, kerja sama, dan saling mengulurkan tangan. Kebersamaan yang belum tentu penulis rasakan di luar sana. Pengalaman ini akan menjadi cerita yang seru bagi penulis.
10. Teman-teman IMM Paripatetik, UIN Walisongo yang selalu memberikan semangat, motivasi, dan doa kepada penulis. Terima kasih telah memberi pengalaman berharga dan langka.

11. Teman-teman teristimewa penulis: Achla, Fifi, Afi, Iffah, Zahida, Syarifah, dan Yunia. Terima kasih telah kebersamai penulis sejak awal masuk perkuliahan hingga kini. Terima kasih telah menjadi tempat pulang saat penulis menempuh pendidikan di Semarang, menemani dikala suka dan duka, serta kebersamai penulis dikala *overthinking* akan masa depan.
12. Teman dekat penulis: Aulia, Tiara, Ely, Sari, Bilqis, dan Jihan. Terima kasih telah menjadi teman curhat penulis di semester tenggang ini dengan adanya pertemanan yang penuh dukungan, canda, dan hiburan, sehingga penulis tidak merasakan semester akhir yang hampa.
13. Teman-teman spesial penulis: Dwi, Fikka, Deviana, Pipit, Muji, dan Dinda. Terima kasih telah mengisi liburan penulis dengan rencana yang selalu terealisasikan dan mendengarkan keluh kesah penulis dengan drama perkuliahan.
14. Diri saya sendiri, Ana Nur Rokhmah. Anak tengah keras kepala yang pernah bermimpi menjadi sarjana pertama di keluarga. Terima kasih telah mampu melangkah dan bertahan sejauh ini serta mampu melawan rasa malas agar dapat menyelesaikan apa yang telah dimulai pada tahun 2021 lalu. Tetaplah mau belajar di manapun berada.
15. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu. Terima kasih telah membantu dan kebersamai penulis dalam segala keadaan baik di perkuliahan maupun luar perkuliahan.

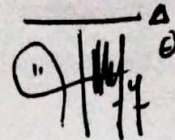
Penulis ucapkan terima kasih atas bantuan dan doanya. Semoga semua pihak selalu diberi kesehatan dan kemudahan dalam segala urusan yang sedang diusahakan. Penulis menyadari tugas akhir ini masih banyak kekurangan. Oleh sebab itu, penulis mengharapkan saran dan kritik agar tugas akhir ini lebih baik. Semoga tugas akhir ini bermanfaat bagi pembaca dan peneliti selanjutnya.

Billahi fiisabilil haq fastabiqul khairat.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Semarang, 25 Mei 2025

Penulis

A handwritten signature in black ink, consisting of stylized letters and a circular mark on the left.

Ana Nur Rokhmah

NIM. 2108046095

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iii
NOTA PEMBIMBING	iv
ABSTRAK	v
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Tujuan Penelitian	4
C. Tinjauan Pustaka	4
D. Batasan Masalah	6
E. Metodologi Penelitian	6
F. Sistematika Penulisan	7
BAB II LANDASAN TEORI	9
A. Kajian Teori	9
1. Graf	9
2. Terminologi Keterhubungan Graf	11
3. Macam-Macam Graf Khusus	17
4. Operasi pada Graf	23
5. Polinomial Sikel Terinduksi pada Graf	32
6. Representasi Polinomial Sikel Terinduksi pada Graf	34
B. Hasil Penelitian yang Relevan	40
BAB III HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN	43
A. Polinomial Sikel Terinduksi pada Graf	43
1. Graf Lengkap K_n	43
2. Graf Lingkaran C_n	48
3. Graf Bipartit Lengkap $K_{m,n}$	52

B.	Polinomial Sikel Terinduksi Hasil Operasi pada Graf	60
1.	Gabungan	60
2.	Join	71
3.	Komplemen	76
4.	Produk	78
5.	Komposisi	85
6.	Ring sum	97
7.	Korona	113
BAB IV Simpulan dan Saran		124
A.	Simpulan	124
B.	Saran	127
DAFTAR PUSTAKA		128
DAFTAR RIWAYAT HIDUP		132

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul	Halaman
Tabel 4.1	Operasi Gabungan	124
Tabel 4.2	Operasi Join	125
Tabel 4.3	Operasi Komplemen	125
Tabel 4.4	Operasi Produk	125
Tabel 4.5	Operasi Komposisi	126
Tabel 4.6	Operasi Ring Sum	126
Tabel 4.7	Operasi Korona	127

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
Gambar 2.1	Graf G	10
Gambar 2.2	Graf K	10
Gambar 2.3	Graf T	11
Gambar 2.4	Graf Z	12
Gambar 2.5	Graf A_1	13
Gambar 2.6	Graf A_2	14
Gambar 2.7	Graf A_3	14
Gambar 2.8	Graf S	15
Gambar 2.9	Graf Q	16
Gambar 2.10	Subgraf	17
Gambar 2.11	Graf N_5	18
Gambar 2.12	Graf Lintasan P_4	18
Gambar 2.13	Graf K_4	19
Gambar 2.14	Graf Lingkaran	20
Gambar 2.15	Graf Bipartit	20
Gambar 2.16	Graf Bipartit Lengkap $K_{2,3}$	21
Gambar 2.17	Graf K	22
Gambar 2.18	Gabungan graf $G = P \cup Q$	24
Gambar 2.19	(a) Graf A ; (b) Graf B	25
Gambar 2.20	Join graf $G = A + B$	25
Gambar 2.21	Graf C_4	26
Gambar 2.22	Komplemen graf C_4	26
Gambar 2.23	(a) Graf G_1 ; (b) Graf G_2	27
Gambar 2.24	$G = G_1 \times G_2$	27
Gambar 2.25	(a) Graf M ; (b) Graf N	28

Gambar 2.26	Graf $M \times N$	28
Gambar 2.27	(a) Graf G_1 ; (b) Graf G_2	29
Gambar 2.28	Graf Komposisi $G = G_1 [G_2]$	29
Gambar 2.29	(a) Graf G_1 ; (b) Graf G_2	30
Gambar 2.30	Graf $G = G_1 \oplus G_2$	31
Gambar 2.31	(a) Graf C_4 ; (b) Graf P_2	31
Gambar 2.32	Graf korona $P_2 \odot C_4$	32
Gambar 2.33	Graf korona $C_4 \odot P_2$	32
Gambar 2.34	(a) Graf K_4 , (b) Bukan Sikel Terinduksi dari K_4 , (c) Sikel Terinduksi dari K_4	34
Gambar 2.35	Graf K_4	35
Gambar 2.36	Sikel Terinduksi $c_3(K_4)$	35
Gambar 2.37	Graf C_6	36
Gambar 2.38	Graf $K_{2,3}$	37
Gambar 2.39	Sikel Terinduksi $c_4(K_{2,3})$	37
Gambar 2.40	Graf G	38
Gambar 2.41	Sikel Terinduksi dari G	38
Gambar 2.42	Graf G_1	39
Gambar 2.43	Sikel Terinduksi $c_4(G_1)$	40
Gambar 3.1	Graf K_3	44
Gambar 3.2	Graf K_4	44
Gambar 3.3	Sikel Terinduksi $c_3(K_4)$	45
Gambar 3.4	Graf K_5	45
Gambar 3.5	Sikel Terinduksi $c_3(K_5)$	46
Gambar 3.6	Graf K_n	47
Gambar 3.7	Graf C_3	49
Gambar 3.8	Graf C_4	49
Gambar 3.9	Graf C_5	50
Gambar 3.10	Graf C_n	51

Gambar 3.11	Graf $K_{1,2}$	52
Gambar 3.12	Graf $K_{1,3}$	53
Gambar 3.13	Graf $K_{2,2}$	53
Gambar 3.14	Graf $K_{2,3}$	54
Gambar 3.15	Sikel Terinduksi $c_4(K_{2,3})$	54
Gambar 3.16	Graf $K_{3,3}$	55
Gambar 3.17	Sikel Terinduksi $c_4(K_{3,3})$	56
Gambar 3.18	Graf $K_{m,n}$	58
Gambar 3.19	$K_{3,1} \subseteq_{\text{ind}} K_{m,n}$	58
Gambar 3.20	$K_{2,2} \subseteq_{\text{ind}} K_{m,n}$	59
Gambar 3.21	$K_{3,2} \subseteq_{\text{ind}} K_{m,n}$	59
Gambar 3.22	Graf $K_4 \cup K_3$	61
Gambar 3.23	Graf $K_4 \cup K_5$	62
Gambar 3.24	Graf $C_3 \cup C_4$	64
Gambar 3.25	Graf $C_5 \cup C_6$	65
Gambar 3.26	Graf $K_{2,2} \cup K_{2,3}$	67
Gambar 3.27	Graf $K_{2,3} \cup K_{3,3}$	68
Gambar 3.28	(a) Graf C_3 ; (b) Graf N_1	71
Gambar 3.29	Graf $C_3 + N_1$	72
Gambar 3.30	(a) Graf C_4 ; (b) Graf N_2	72
Gambar 3.31	Graf $C_4 + N_2$	73
Gambar 3.32	(a) Graf C_5 ; (b) Graf N_3	74
Gambar 3.33	Graf $C_5 + N_3$	74
Gambar 3.34	Graf $C_m + N_n$	75
Gambar 3.35	(a) Graf K_4 ; (b) Graf K_5 ; (c) Graf K_6	77
Gambar 3.36	(a) Graf $\bar{K}_4$; (b) Graf $\bar{K}_5$; (c) Graf $\bar{K}_6$	77
Gambar 3.37	(a) Graf C_3 ; (b) Graf P_3	78
Gambar 3.38	Graf $C_3 \times P_3$	79
Gambar 3.39	(a) Graf C_5 ; (b) Graf P_3	80

Gambar 3.40	Graf $C_5 \times P_3$	80
Gambar 3.41	(a) Graf C_3 ; (b) Graf P_4	81
Gambar 3.42	Graf $C_3 \times P_4$	82
Gambar 3.43	Graf $C_m \times P_n$	84
Gambar 3.44	(a) Graf P_2 ; (b) Graf P_3	85
Gambar 3.45	Graf $P_2 [P_3]$	86
Gambar 3.46	(a) Graf P_3 ; (b) Graf P_4	87
Gambar 3.47	Graf $P_3 [P_4]$	87
Gambar 3.48	(a) Graf P_4 ; (b) Graf P_5	88
Gambar 3.49	Graf $P_4 [P_5]$	88
Gambar 3.50	Graf $P_n [P_m]$	90
Gambar 3.51	(a) Graf P_3 ; (b) Graf P_2	91
Gambar 3.52	Graf $P_3 [P_2]$	92
Gambar 3.53	(a) Graf P_4 ; (b) Graf P_3	92
Gambar 3.54	Graf $P_4 [P_3]$	93
Gambar 3.55	(a) Graf P_5 ; (b) Graf P_4	94
Gambar 3.56	Graf $P_5 [P_4]$	94
Gambar 3.57	Graf $P_m [P_n]$	96
Gambar 3.58	(a) Graf K_4 ; (b) Graf K_5	98
Gambar 3.59	Graf $K_4 \oplus K_5$	98
Gambar 3.60	(a) Graf K_5 ; (b) Graf K_6	99
Gambar 3.61	Graf $K_5 \oplus K_6$	99
Gambar 3.62	(a) Graf K_7 ; (b) Graf K_8	100
Gambar 3.63	Graf $K_7 \oplus K_8$	100
Gambar 3.64	(a) Graf K_m ; (b) Graf K_{m+1}	101
Gambar 3.65	Graf $K_m \oplus K_{m+1}$	101
Gambar 3.66	(a) Graf C_3 ; (b) Graf C_4	102
Gambar 3.67	Graf $C_3 \oplus C_4$	103
Gambar 3.68	(a) Graf C_4 ; (b) Graf C_5	103

Gambar 3.69	Graf $C_4 \oplus C_5$	104
Gambar 3.70	(a) Graf C_5 ; (b) Graf C_6	104
Gambar 3.71	Graf $C_5 \oplus C_6$	105
Gambar 3.72	(a) Graf C_m ; (b) Graf C_{m+1}	106
Gambar 3.73	Graf $C_m \oplus C_{m+1}$	107
Gambar 3.74	(a) Graf C_3 ; (b) Graf C_5	108
Gambar 3.75	Graf $C_3 \oplus C_5$	108
Gambar 3.76	(a) Graf C_4 ; (b) Graf C_7	109
Gambar 3.77	Graf $C_4 \oplus C_7$	109
Gambar 3.78	(a) Graf C_5 ; (b) Graf C_{10}	110
Gambar 3.79	Graf $C_5 \oplus C_{10}$	110
Gambar 3.80	(a) Graf C_m ; (b) Graf C_{m+k}	112
Gambar 3.81	Graf $C_m \oplus C_{m+k}$	112
Gambar 3.82	(a) Graf C_4 ; (b) Graf P_3	113
Gambar 3.83	Graf $C_4 \odot P_3$	114
Gambar 3.84	(a) Graf C_5 ; (b) Graf P_2	115
Gambar 3.85	Graf $C_5 \odot P_2$	115
Gambar 3.86	Graf $C_n \odot P_m$	117
Gambar 3.87	(a) Graf C_3 ; (b) Graf K_4	118
Gambar 3.88	Graf $C_3 \odot K_4$	118
Gambar 3.89	(a) Graf C_4 ; (b) Graf K_5	119
Gambar 3.90	Graf $C_4 \odot K_5$	120
Gambar 3.91	Graf $C_n \odot K_m$	122

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Matematika adalah ilmu yang tidak bisa dijauhkan dari manusia karena perannya dalam membantu memajukan dan mengefisiensikan kegiatan manusia, misalnya aplikasi dalam berbagai bidang kehidupan sehari-hari seperti teknologi, ekonomi, dan sains (Yunaeti dkk., 2021). Matematika dibagi menjadi beberapa cabang yaitu aljabar, geometri, analisis, statistika peluang, matematika diskrit, dan matematika terapan lainnya. Pada masing-masing cabang ilmu ini memiliki kajian yang beragam (Courant dan Robbins, 1996). Matematika diskrit merupakan cabang ilmu matematika yang membahas tentang suatu objek yang dapat dihitung dan ditulis menggunakan angka (Munir, 2012).

Teori graf termasuk ke dalam cabang matematika diskrit karena titik dan sisi dapat dihitung dan tidak bersifat kontinu, sedangkan pengertian dari teori graf adalah ilmu yang mempelajari sifat-sifat suatu graf yang terdiri dari titik yang dihubungkan oleh sisi (Wilson, 2010). Graf dapat digunakan untuk menggambarkan macam struktur persoalan atau permasalahan agar mudah dimengerti dan dirumuskan, sehingga mampu memecahkan permasalahan contohnya pada jaringan listrik rangkaian kirchoff (Munir, 2012). Selain itu juga pada silsilah keluarga, sistem komunikasi, jaringan transportasi, dan desain arsitektur (Buhaerah dkk., 2022).

Graf pada dasarnya merupakan kumpulan sisi dan titik yang terhubung dengan satu sisi dapat menghubungkan dua titik atau

dengan kata lain dua titik yang terhubung terdapat minimal satu sisi. Titik dikenal dengan sebutan *vertex* atau simpul, sedangkan sisi dikenal dengan sebutan *edge* atau tepi. Sisi pada graf digambarkan tidak selalu berupa garis lurus, namun dapat berupa garis lengkung (Daniel dan Prida, 2019).

Hal yang mendasar munculnya teori graf bermula pada masalah jembatan königsberg tahun 1736. Euler ingin melewati semua dari ketujuh jembatan itu dengan syarat hanya melewati tepat satu kali dan harus kembali ke tempat semula. Euler memodelkan masalah tersebut dan dinamakan dengan teori graf. Daratan yang dilewati yang disebut dengan titik, sedangkan jembatannya disebut sebagai sisi. Euler menemukan solusinya yaitu tidak mungkin jika seseorang melewati ketujuh jembatan tersebut tepat satu kali dan dapat kembali ke tempat semula. Masalah tersebut ia modelkan menjadi suatu teori graf (Dafik, 2015).

Seiring dengan kemajuan zaman dalam dekade terakhir ini, teori graf terus mengalami perkembangan salah satunya yaitu pada teori polinomial. Polinomial adalah persamaan matematika yang terdiri dari koefisien, variabel, dan konstanta yang dengan jumlahan perkalian pangkat dalam satu atau lebih variabel. Ada beberapa jenis-jenis polinomial pada graf yaitu polinomial kromatik, klik polinomial, *matching polinomial*, polinomial dominasi graf yang mengandung graf sederhana, polinomial penutup tepi, polinomial subgraf cembung, dan polinomial sikel terinduksi. Polinomial kromatik yang menunjukkan berbagai cara untuk mewarnai graf tanpa adanya warna pada sisi yang terhubung (Beraha, dkk., 1980), dilanjutkan dengan adanya klik polinomial yang menghitung subset titik bertetangga pada graf

yang dikumpulkan berdasarkan banyaknya titik (Hoede dan Li, 1994).

Pada abad ke-20, graf terus mengalami perkembangan yaitu dengan adanya *matching polinomial* yang memuat himpunan sisi dari graf sehingga tidak ada dua dari sisi yang memiliki titik yang saling bersisian (Lass, 2004). Polinomial terus mengalami perkembangan terutama pada keterhubungan graf yang disebut dengan polinomial dominasi graf yang mengandung graf sederhana untuk mengukur keterhubungan pada tiap titik di graf (Alikhani dan Peng, 2010). Polinomial penutup tepi untuk menghitung jumlah himpunan penutup tepi atau sisi berdasarkan ukurannya dengan setiap titik memiliki setidaknya satu sisi yang terhubung (Akbari dan Oboudi, 2013).

Polinomial berkembang yang melibatkan jalan ataupun lintasan yaitu polinomial subgraf cembung yang setiap dua titik yang berbeda pada subgraf tersebut terhubung tepat satu lintasan pada subgraf (Laja dan Artes, 2014), dan polinomial siklus yang terinduksi pada graf untuk menghitung jumlah dan jenis siklus yang dapat terbentuk dalam graf yang mengacu pada siklus dengan tidak adanya tambahan titik atau sisi di luar siklus berdasarkan panjangnya (Madalim dkk., 2023). Hubungan polinomial subgraf cembung dan polinomial siklus terinduksi adalah sama-sama membahas polinomial pada subgraf namun dengan sudut pandang yang berbeda. Pada polinomial subgraf cembung fokus pada titik, sedangkan pada polinomial siklus terinduksi fokus pada siklusnya. Polinomial siklus terinduksi adalah persamaan suku banyak pada graf yang merupakan hasil seluruh penjumlahan dari siklus terinduksi pada graf dengan derajat minimal tiga hingga ke panjang siklus terpanjang (Villarta dkk., 2024). Kajian tentang

polinomial sikel terinduksi pada graf merupakan tema yang relatif baru dalam kajian teori graf. Dimana suatu polinomial dapat merepresentasikan struktur pada graf (Jannah, 2013).

Pembahasan mengenai polinomial sikel terinduksi pada graf yang diteliti oleh Radana E. Madalim, dkk., termuat dalam artikel berjudul "Induced Cycle Polynomial of a Graph" tahun 2023. Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, penulis tertarik untuk membahas dan mengkaji lebih lanjut tentang polinomial sikel terinduksi pada graf, terutama polinomial sikel hasil operasi pada graf yang memberi bentuk baru yang bervariasi sesuai dengan operasi yang digunakan.

B. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah agar mampu menjelaskan bagaimana sifat-sifat polinomial sikel terinduksi pada graf yang merupakan hasil operasi tertentu yaitu operasi gabungan, join, komplemen, produk, komposisi, ring sum, dan korona.

C. Tinjauan Pustaka

Dalam tinjauan pustaka ini akan mengulas mengenai polinomial sikel terinduksi pada graf dengan artikel rujukan utamanya merupakan karya Radana E. Madalim, dkk., tahun 2023 yang berjudul "Induced Cycle Polynomial of a Graph". Selain itu, terdapat artikel pendukung di antaranya adalah Dimensi Metrik Hasil Operasi Korona Antara Graf Lintasan dengan Graf Lengkap ($P_n \odot K_m$) dan Graf Sikel dengan Graf Lintasan ($C_n \odot mP_2$) serta *Induced Path Polynomials of the Join and Corona of Graphs*.

Dalam tinjauan pustaka ini juga berisi tentang sumber referensi yang berkaitan dengan teori-teori yang akan dipakai pada penelitian ini. Adapun pada penelitian ini membahas tentang konsep dasar pada graf, operasi pada graf, perkembangan polinomial pada graf, dan polinomial siklus terinduksi pada graf. Berikut adalah sumber referensi yang digunakan dalam penelitian ini.

1. Sumber referensi yang berkaitan dengan konsep dasar pada graf, di antaranya adalah Pengantar Teori Graf (Edisi Kelima), Teori Graf, Prosedur Penelitian Suatu Pendekatan Praktek, Teori Graph dan Penerapannya, Teori Graf dan Aplikasinya, dan Teori Graf dan Aplikasinya (Edisi Revisi Kedua).
2. Sumber referensi yang berkaitan dengan operasi pada graf, di antaranya adalah Ketakteraturan Sisi Total Pada Graf Pohon Palem $C_r \smile B_{r,r}$ dan Graf Pohon Palem. $C_{r+1} \smile B_{r,r}$, Teori Graf, Pengantar Teori Graf (Edisi Kelima), *Prime Labeling in Context of Ring Sum of Graphs*, dan Dimensi Metrik Hasil Operasi Korona Antara Graf Lintasan Dengan Graf Lengkap $(P_N \odot K_M)$ dan Graf Sikel dengan Graf Lintasan $(C_N \odot mP_2)$.
3. Sumber referensi yang berkaitan dengan perkembangan polinomial pada graf, di antaranya adalah *Limits of Chromatic Zeros of Some Families of Maps* (1980), *Clique Polynomials and Independent Set Polynomials of Graphs* (1994), *Matching Polynomials and Duality* (2004), *Dominating Sets and Domination Polynomials of Certain Graphs, II* (2010), *On the Edge Cover Polynomial of a Graph* (2013), dan *Zeros of Convex Subgraph Polynomials* (2014).

4. Sumber referensi yang berkaitan dengan polinomial sikel terinduksi pada graf, di antaranya adalah *An atlas of graphs*, *Graph Theory*, dan *Induced Cycle Polynomial Of A Graph*.

D. Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah graf yang digunakan dalam penelitian ini hanya graf sederhana, graf yang memiliki sikel (graf lengkap, lingkaran, dan bipartit), terhubung, dan tidak berarah.

E. Metodologi Penelitian

Pada metodologi penelitian ini berisi tentang metode penelitian yang berupa langkah-langkah dalam melakukan penelitian sehingga penelitiannya lebih terarah. Adapun metodologi penelitiannya adalah sebagai berikut.

1. Mengulas artikel berjudul "Induced Cycle Polynomial of a Graph" oleh Radana E. Madalim dkk (2023) sebagai bahan dalam memahami metode dan hasil penelitian pada artikel tersebut.
2. Mengevaluasi teori-teori yang ada pada artikel.
3. Mengidentifikasi definisi serta rumus yang berkaitan dengan polinomial sikel terinduksi pada graf.
4. Menganalisis polinomial sikel terinduksi pada graf.
5. Mengidentifikasi banyaknya sikel berdasarkan jenis grafnya.

6. Mengsubstitusikan banyaknya sikel terinduksi yang ditemukan ke persamaan untuk memperoleh bentuk polinomialnya.
7. Mengoperasikan dua buah graf dan dianalisis polinomial sikel terinduksinya.
8. Mengidentifikasi kembali banyaknya sikel terinduksi pada graf hasil operasi.
9. Menentukan bentuk umum polinomial sikel terinduksi hasil operasi pada graf .
10. Membuktikan persamaan umum polinomial sikel terinduksi hasil operasi pada graf.
11. Mengambil kesimpulan sifat berdasarkan hubungan polinomial sikel terinduksi pada graf sebelum dan sesudah dioperasikan.

F. Sistematika Penulisan

Penelitian ini memiliki empat bab sebagai bahan acuan untuk mengatur jalan penyusunan tugas akhir ini. Berikut merupakan sistematika penulisan pada penelitian ini.

1. BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini berisi latar belakang masalah, tujuan penelitian, tinjauan pustaka, batasan masalah, metodologi penelitian, dan sistematika penulisan.

2. BAB II LANDASAN TEORI

Pada bab ini berisi dasar-dasar teori yang digunakan pada penelitian ini dan teorema yang mendukung pada pembahasan serta berisi hasil penelitian yang relevan, sehingga hasil dari penelitian tidak rancu.

3. BAB III HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini berisi hasil penelitian dan pembahasan yang sesuai dengan tujuan penelitian yang telah disusun.

4. BAB IV SIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini berisi simpulan dari hasil penelitian yang telah dilakukan serta mengandung saran agar peneliti berikutnya melakukan penelitian yang lebih baik lagi.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini, berisi teori-teori yang digunakan sebagai landasan penelitian serta ringkasan hasil penelitian sebelumnya yang relevan dengan penelitian ini.

A. Kajian Teori

Pada subbab ini akan membahas mengenai konsep dan teori yang digunakan untuk mempermudah dalam penelitian.

1. Graf

Pada bagian ini, akan dibahas mengenai definisi graf secara singkat serta ketentuan graf sederhana.

Definisi 2.1.1 (*Graf, e.g (Munir, 2016)*)

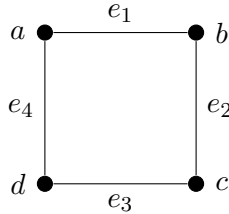
Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $G = (V, E)$ dengan V merupakan himpunan tak kosong titik dan E merupakan himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik. Suatu sisi e menghubungkan titik u dan v dapat dituliskan dengan $e = (u, v)$, dengan $u, v \in V$.

Pada graf, setiap sisi mampu menghubungkan dua titik dan pada setiap titik terdapat minimal satu sisi kecuali pada graf trivial (Anisa dan Lukito, 2021). Hal tersebut menyebabkan suatu titik yang terhubung berderajat minimal satu. Derajat titik yaitu banyaknya sisi yang bertemu pada titik (Rahayuningsih, 2018).

Contoh 2.1.2 Perhatikan contoh sebagai berikut.

- a. Misal diberikan graf $G = (V, E)$ dengan $V = \{a, b, c, d\}$ dan $E = \{(e_1), (e_2), (e_3), (e_4)\}$.

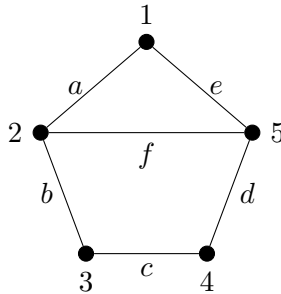
Sisinya dapat dituliskan sebagai $e_1 = (a, b), e_2 = (b, c), e_3 = (c, d), e_4 = (a, d)$.



Gambar 2.1. Graf G

- b. Misal diberikan graf $K = (V, E)$ dengan $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $E = \{(a), (b), (c), (d), (e), (f)\}$.

Di mana sisinya dapat ditulis $a = (1, 2), b = (2, 3), c = (3, 4), d = (4, 5), e = (1, 5), f = (2, 5)$.



Gambar 2.2. Graf K

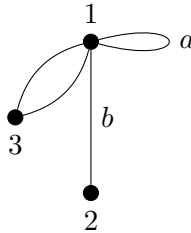
Definisi 2.1.3 (Graf sederhana, e.g (Daniel dan Prida, 2019))

Suatu graf G dikatakan graf sederhana jika graf tersebut tidak memuat loop atau sisi ganda.

Loop merupakan sisi yang menghubungkan titik yang sama, dimana setiap loop mewakili 2 derajat, sedangkan sisi ganda adalah sisi yang menghubungkan dua titik yang sama. Jika pada graf terdapat loop atau sisi ganda, maka graf tersebut dinamakan graf tak sederhana (Marsudi, 2016).

Contoh 2.1.4

Misal diberikan graf $T = (V, E)$ dengan $V = \{1, 2, 3\}$ dan $E = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$.



Gambar 2.3. Graf T

Berdasarkan gambar 2.3. graf T tersebut bukan graf sederhana karena mengandung loop yaitu pada sisi a dan terdapat sisi ganda antara titik 1 dan 3.

2. Terminologi Keterhubungan Graf

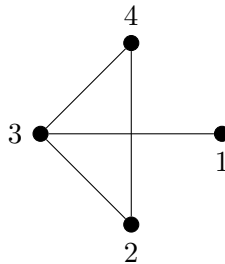
Berikut ini merupakan terminologi atau istilah asing pada graf yang digunakan untuk mempermudah pemahaman pada penelitian ini. Adapun terminologi keterhubungan graf yang digunakan pada penelitian ini adalah

- a. Ketetanggaan (*adjacent*)

Definisi 2.1.5 (*Ketetanggaan, e.g (Daniel dan Prida, 2019)*)

Ketetanggaan terjadi apabila ada dua titik yang dihubungkan oleh sisi, di mana satu sisi menghubungkan dua titik yang berbeda.

Contoh 2.1.6 Perhatikan graf berikut ini.



Gambar 2.4. Graf Z

Berdasarkan gambar 2.4. graf Z , salah satu titik yang bertetangga adalah 1 dengan 3, sedangkan titik 1 dan 4 tidak bertetangga karena tidak ada sisi yang menghubungkan antar kedua titik tersebut.

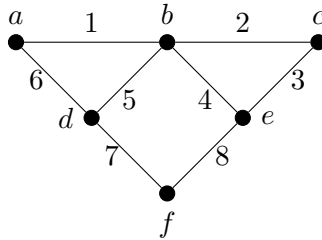
b. Jalan

Definisi 2.1.7 (*Jalan, e.g (Clark dan Holton, 1995)*)

Jalan (walk) pada suatu graf G adalah sebuah urutan tak nol $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ yang suku-sukunya bergantian sedemikian sehingga titik v_{i-1} dan v_i merupakan titik ujung sisi e_i untuk $1 \leq i \leq k$. Jalan W merupakan jalan dari v_0 ke v_k . Titik v_0 disebut titik awal dan v_k disebut titik akhir. Panjang W merupakan banyaknya sisi pada W .

Suatu jalan dinamakan jalan tertutup jika titik awal dan titik akhirnya sama. Jalan dinamakan jalan terbuka jika titik awal dan titik akhirnya berbeda. Jalan dapat melewati titik yang sama lebih dari satu kali (Abdussakir, dkk., 2009)

Contoh 2.1.8 Perhatikan graf di bawah ini.



Gambar 2.5. Graf A_1

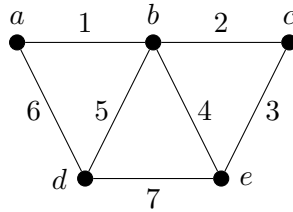
Pada gambar 2.5. graf A_1 , maka salah satu jalan dari titik a ke d adalah $a1b5d$ dengan panjang jalan 2, $a1b4e8f7d$ dengan panjang jalan 4, dan $a1b2c3e8f7d$ dengan panjang jalan 5. Untuk jalan terbuka dari a ke d salah satunya adalah $a1b4e8f7d$ dengan panjang jalan 4, sedangkan untuk jalan tertutup pada titik b salah satunya adalah $b4e8f7d5b$ dengan panjang jalan 4.

c. Lintasan

Definisi 2.1.9 (Lintasan, *e.g* (Ibrahim dan Noor, 2013))

Lintasan pada suatu graf G adalah jalan dari titik awal sampai titik akhir melewati titik-titik yang berbeda.

Contoh 2.1.10 Perhatikan graf berikut.

Gambar 2.6. Graf A_2

Pada gambar 2.6. graf A_2 , maka salah satu lintasan dari titik a ke d adalah $a1b4e7d$ dengan panjang jalan 3.

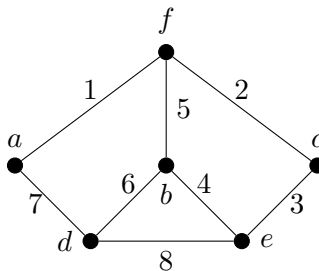
Salah satu jalan tapi bukan lintasan dari a ke d adalah $a1b2c3e4b5d$, hal ini karena melewati titik b sebanyak dua kali.

d. Sikel

Definisi 2.1.11 (Sikel e.g (Rahayuningsih, 2018))

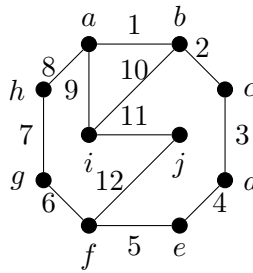
Sikel pada graf adalah jalan yang semua sisi dan titiknya berbeda kecuali titik awal dan titik akhir.

Contoh 2.1.12 Perhatikan graf sebagai berikut.

Gambar 2.7. Graf A_3

Berdasarkan gambar 2.7. graf A_3 , maka salah satu sikelnnya adalah sikel $a1f2c3e4b6d7a$ dengan panjang jalan 6 dan sikel $a1f5b4e8d7a$ dengan panjang jalan 5 yang bukan termasuk sikel terinduksi. Salah satu contoh sikel terinduksi adalah $a1f5b6d7a$ dan $b4e8d6b$.

Contoh 2.1.13 Perhatikan graf berikut ini.



Gambar 2.8. Graf S

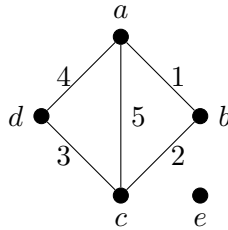
Berdasarkan gambar 2.8. Graf S , terdapat salah satu lintasan dengan panjang jalan 8 namun bukan sikel terinduksi yaitu $a1b2c3d4e5f12j11i9a$.

e. Terhubung

Definisi 2.1.14 (Terhubung, e.g (Marsudi, 2016))

Dua titik u dan v pada graf G dikatakan terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan titik u dan v .

Contoh 2.1.15 Perhatikan graf sebagai berikut.

Gambar 2.9. Graf Q

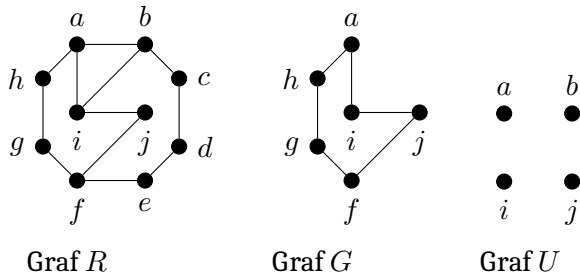
Berdasarkan gambar 2.9. titik a, b, c, d saling terhubung karena terdapat lintasan yang menghubungkannya, contohnya titik b terhubung dengan titik d karena terdapat salah satu lintasan yang menghubungkan titik b dengan d yaitu $b1a4d$. Namun terdapat titik yang tidak terhubung yaitu titik e , karena tidak ada lintasan yang menghubungkan titik e dengan titik lainnya.

f. Subgraf

Definisi 2.1.16 (*Subgraf, e.g (Ihwan dan Rahmawati, 2014)*)

Graf H dikatakan subgraf dari graf G jika setiap titik di H adalah titik di G dan setiap sisi di H adalah sisi di graf G . Jika H subgraf dari G maka dapat ditulis $H \subseteq G$.

Contoh 2.1.17 Perhatikan graf berikut ini.



Gambar 2.10. Subgraf

Berdasarkan gambar 2.10. graf G merupakan subgraf dari graf R karena titik dan sisinya berada di graf R . Selain itu, graf U juga merupakan subgraf dari R , karena setiap titiknya berasal dari graf R .

3. Macam-Macam Graf Khusus

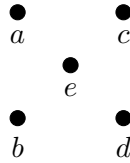
Terdapat beberapa macam graf, berikut ini yang merupakan graf-graf khusus yang digunakan pada penelitian ini.

a. Graf Kosong

Definisi 2.1.18 (*Graf Kosong, e.g (Ibrahim dan Noor, 2013)*)

Graf dikatakan graf kosong jika pada graf memuat minimal satu titik tanpa adanya sisi yang menghubungkannya sehingga semua titiknya merupakan titik terasing yang dinotasikan dengan N_n .

Contoh 2.1.19 Perhatikan graf sebagai berikut.

Gambar 2.11. Graf N_5

Berdasarkan gambar 2.11, maka graf tersebut merupakan salah satu graf kosong yang memiliki 5 titik atau dapat dinotasikan dengan N_5 , dengan semua titiknya tidak memiliki sisi.

b. Graf Lintasan

Definisi 2.1.20 (*Graf Lintasan, e.g (Multasya, 2024)*)

Graflintasan yang dilambangkan sebagai P_n adalah graf yang memiliki tepat satu lintasan dengan n titik dan panjang jalan sebesar $n - 1$.

Contoh 2.1.21 Perhatikan graf di bawah ini.

Gambar 2.12. Graf Lintasan P_4

Berdasarkan gambar 2.12 yang terdiri dari empat titik maka disebut graf lintasan P_4 yang memiliki panjang jalan tiga.

c. Graf Lengkap

Definisi 2.1.22 (*Graf Lengkap, e.g (Buhaerah dkk., 2022)*)

Graf dikatakan graf lengkap apabila graf sederhana dengan semua titik pada graf saling bertetangga dengan banyaknya

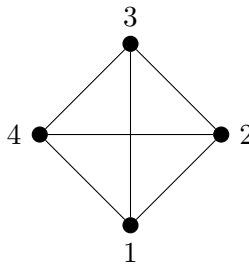
sisi adalah $\frac{n(n-1)}{2}$ atau $\binom{n}{2}$. Graf lengkap dinotasikan dengan K_n dengan n adalah banyaknya titik.

Catatan:

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)! \cdot 2!}$$

dengan $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$

Contoh 2.1.23 Perhatikan graf sebagai berikut.



Gambar 2.13. Graf K_4

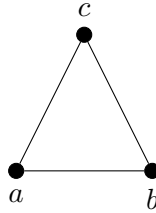
Berdasarkan gambar 2.14, graf K_4 yang artinya memiliki 4 titik dengan setiap titiknya saling bertetangga dengan titik lainnya.

d. Graf Lingkaran atau Graf Sikel

Definisi 2.1.24 (Graf Lingkaran, e.g (Slamin, 2023))

Graf Lingkaran adalah graf yang memiliki lintasan dengan titik awal dan titik akhirnya sama, graf ini dinotasikan dengan C_n , dengan n adalah banyaknya titik.

Contoh 2.1.25 Perhatikan graf sebagai berikut.



Gambar 2.14. Graf Lingkaran

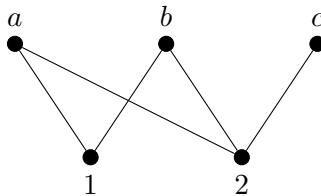
Berdasarkan gambar 2.14, graf C_3 yang artinya graf lingkaran yang terdiri dari 3 titik dan dengan banyaknya sisi 3.

e. Graf Bipartit Lengkap

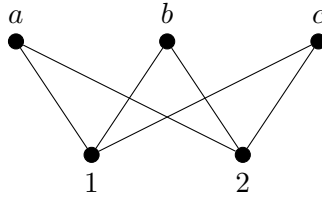
Definisi 2.1.26 (*Graf Bipartit Lengkap, e.g (Slamin, 2023)*)

Graf bipartit adalah graf yang terdiri dari dua himpunan namun dalam satu himpunan titik-titik tidak saling bertetangga, sedangkan terdapat titik pada himpunan menghubungkan titik pada himpunan lainnya. Graf bipartit dikatakan graf bipartit lengkap jika titik pada himpunan yang berbeda menghubungkan setiap titik pada himpunan lainnya.

Contoh 2.1.27 Berikut ini adalah salah satu contoh graf bipartit dan graf bipartit lengkap.



Gambar 2.15. Graf Bipartit



Gambar 2.16. Graf Bipartit Lengkap $K_{2,3}$

Teorema 2.1.28 (*Graf Bipartit, e.g (Wilson, 2010)*)

Suatu graf sederhana K dikatakan graf bipartit jika dan hanya jika K tidak memiliki siklus dengan panjang ganjil.

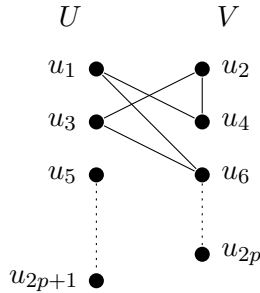
Bukti.

($\Rightarrow$) Akan dibuktikan, jika graf K adalah graf bipartit, maka K tidak memiliki siklus dengan panjang ganjil.

Misalkan dipunyai K graf bipartit. Andaikan K memiliki siklus dengan panjang ganjil. Graf K adalah graf bipartit, artinya terdapat dua himpunan titik. Namun dalam satu himpunan titik tidak saling bertetangga, sedangkan pada himpunan berbeda terdapat titik yang bertetangga. Misal U dan V adalah dua himpunan titik pada graf K . Untuk setiap sisi menghubungkan himpunan titik di U dan V secara bergantian, sehingga $U \cap V = \emptyset$. Misal titik $K = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_{2p}, u_{2p+1}\}$, untuk $u_1, u_3, u_5, \dots, u_{2p+1} \in U$ dan $u_2, u_4, u_6, \dots, u_{2p} \in V$, dengan $p \in \mathbb{Z}$.

Ambil sebarang titik bergantian dari U ke V atau sebaliknya, sehingga sisinya berada di antara dua himpunan U dan V .

Misal ambil sebarang subgraf $H = \{u_2, u_3, u_6, u_1, u_4\} \subseteq K$, sehingga terdapat sisi yang menghubungkan pada graf terinduksi $E(H) = \{e_2, e_3, e_6, e_1, e_4\} \subseteq E(K)$.

Gambar 2.17. Graf K

Perhatikan bahwa pada graf bagian terinduksi H mengakibatkan terbentuknya siklus namun pada graf bipartit antar titik pada satu himpunan tidak bertetangga. Hal tersebut kontradiksi dengan K adalah graf bipartit.

Jadi, terbukti jika K adalah graf bipartit, maka tidak memiliki siklus dengan panjang ganjil.

($\Leftarrow$) Akan dibuktikan, jika tidak memiliki siklus dengan panjang ganjil, maka graf K adalah graf bipartit.

Misalkan dipunyai K graf yang tidak memiliki siklus dengan panjang ganjil. Buktikan titik pada K dapat dibagi menjadi 2 himpunan, misal A dan B yang tidak saling bertetangga. Sedemikian sehingga untuk setiap sisi menghubungkan a_i dengan b_i , untuk $a_i \in A$ dan $b_i \in B$.

Ambil sebarang $v \in V(K)$ sebagai titik awal dan $u \in V(K)$, maka dipunyai 2 himpunan titik yaitu :

$A = \{\text{Jarak terpendek } v \text{ ke } u \text{ memiliki panjang ganjil}\}$

$B = \{\text{Jarak terpendek } v \text{ ke } u \text{ memiliki panjang genap}\}$

Hal tersebut menunjukkan bahwa A terdiri oleh titik dengan jarak ganjil dan B terdiri oleh titik dengan panjang genap, sehingga diperoleh $A \cap B = \emptyset$ dan $A \cup B = V(K)$ dengan setiap titik pada $V(K)$ mempunyai jarak tertentu yaitu ganjil atau genap.

Misalkan $a_1, a_2 \in A$ bertetangga, maka akan ada jalan tertutup dengan panjang jalan ganjil $(v, \dots, a_1, a_2, \dots, v)$. Jelas membentuk siklus ganjil, sehingga tidak ada dua titik di A yang bertetangga. Hal tersebut kontradiksi dengan $a_1, a_2 \in A$ bertetangga.

Misal $b_1, b_2 \in B$ bertetangga, maka akan ada jalan tertutup dengan panjang ganjil $(v, \dots, b_1, b_2, \dots, v)$. Jelas membentuk siklus dengan panjang jalan ganjil sehingga tidak ada dua titik di B yang bertetangga.

Hal tersebut menyebabkan setiap sisi harus menghubungkan titik A dengan titik B , sesuai dengan definisi graf bipartit di mana suatu graf dibagi menjadi 2 himpunan titik. Hal tersebut kontradiksi dengan $b_1, b_2 \in B$ bertetangga.

Jadi, terbukti jika tidak memiliki siklus dengan panjang ganjil, maka graf K adalah graf bipartit.

Dengan demikian, terbukti bahwa suatu graf sederhana K dikatakan graf bipartit jika dan hanya jika K tidak memiliki siklus dengan panjang ganjil. ■

4. Operasi pada Graf

Terdapat beberapa operasi pada graf di antaranya yaitu gabungan, join, komplemen, produk, komposisi, ring sum, dan

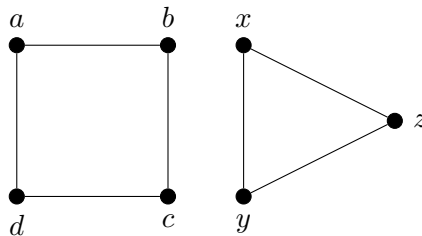
operasi korona. Berikut ini merupakan macam-macam operasi pada graf.

a. Gabungan atau *Union*

Definisi 2.1.29 (*Gabungan, e.g (Syihabuddin dan Rosyida, 2022)*)

Misal terdapat graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ di mana V_1 dan V_2 adalah saling asing, maka graf gabungan dari G_1 dan G_2 adalah $G = G_1 \cup G_2$ dengan himpunan titik $V_1 \cup V_2$ dan himpunan sisi $E_1 \cup E_2$. Pada kedua graf tidak ada penambahan sisi yang menghubungkan antar graf tersebut.

Contoh 2.1.30 Dipunyai graf $P = C_4$ dan graf $Q = C_3$, maka graf gabungannya adalah seperti gambar di bawah ini.



Gambar 2.18. Gabungan graf $G = P \cup Q$

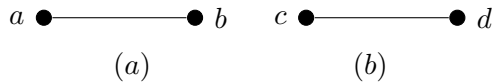
Berdasarkan gambar 2.18 graf gabungan dari C_4 dan C_3 tetap seperti gambar 2.18 karena dari kedua graf tersebut tidak ada penambahan atau pengurangan sisi.

b. Join

Definisi 2.1.31 (*Join, e.g (Marsudi, 2016)*)

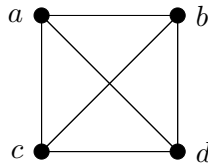
Dipunyai graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ maka graf join dari G_1 dan G_2 dapat dinyatakan dalam bentuk $G = G_1 + G_2 = (V, E)$ dengan kata lain operasi join menghasilkan semua titiknya saling bertetangga.

Contoh 2.1.32 Perhatikan dua graf sebagai berikut.



Gambar 2.19. (a)Graf A; (b) Graf B

Berdasarkan gambar 2.19. graf A dan graf B, maka hasil dari operasi joinnya adalah



Gambar 2.20. Join graf $G = A + B$

Berdasarkan gambar 2.20 hasil operasi join menyebabkan setiap titik pada kedua graf menjadi bertetangga.

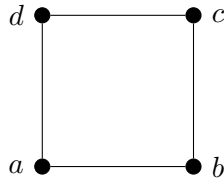
c. Komplemen

Definisi 2.1.33 (*Komplemen, e.g (Marsudi, 2016)*)

Dipunyai graf G , maka komplemen dari graf G dapat dinotasikan dengan $\bar{G}$. Komplemen dari graf G adalah graf

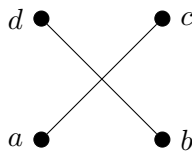
yang memiliki banyak titik yang sama pada G dan dua titik u dan v di $\bar{G}$ bertetangga jika dan hanya jika u dan v tidak bertetangga di G .

Contoh 2.1.34 Perhatikan graf sebagai berikut.



Gambar 2.21. Graf C_4

Berdasarkan gambar 2.21. graf C_4 maka komplemen grafnya adalah sebagai berikut.



Gambar 2.22. Komplemen graf C_4

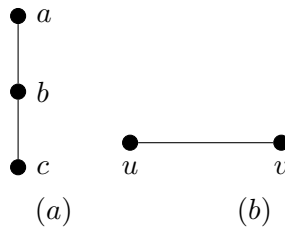
Berdasarkan gambar 2.22 hasil operasi komplemen menyebabkan titik yang awalnya bertetangga menjadi tidak bertetangga dan titik yang awalnya tidak bertetangga menjadi bertetangga.

d. Produk atau Hasil Kali Kartesian

Definisi 2.1.35 (*Produk, e.g (Marsudi, 2016)*)

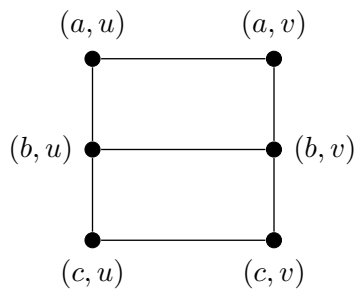
Dipunyai graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ maka produk dari G_1 dan G_2 adalah $G = G_1 \times G_2 = (V, E)$ adalah graf dengan himpunan titik $V = V_1 \times V_2$ dan dua titik $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$ adjacent di G jika $[(u_1 = v_1 \text{ dan } u_2 \text{ bertetangga dengan } v_2) \text{ atau } (u_2 = v_2 \text{ dan } u_1 \text{ bertetangga dengan } v_1)]$.

Contoh 2.1.36 Perhatikan dua graf sebagai berikut.



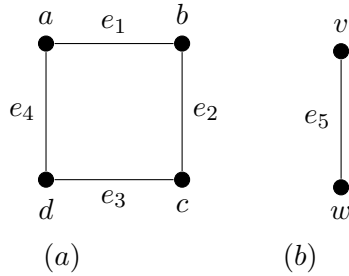
Gambar 2.23. (a) Graf G_1 ; (b) Graf G_2

Berdasarkan gambar 2.23, maka hasil operasi produk graf G_1 dan G_2 adalah



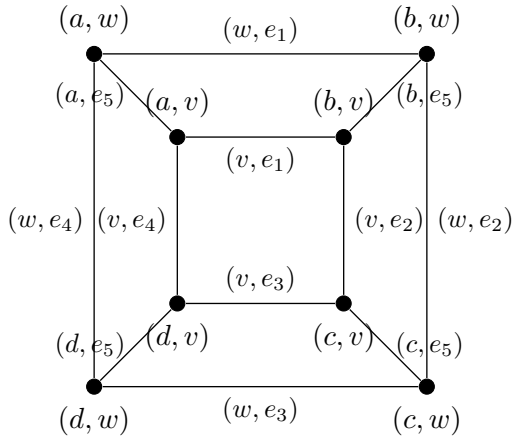
Gambar 2.24. $G = G_1 \times G_2$

Contoh 2.1.37 Perhatikan graf M dan N berikut.



Gambar 2.25. (a) Graf M ; (b) Graf N

Berdasarkan gambar 2.25. graf M dan N maka produk dari graf $M \times N$ adalah



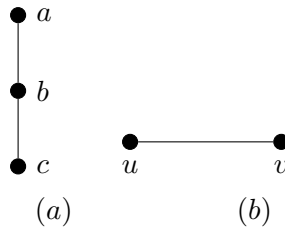
Gambar 2.26. Graf $M \times N$

e. Komposisi

Definisi 2.1.38 (Komposisi, e.g (Marsudi, 2016))

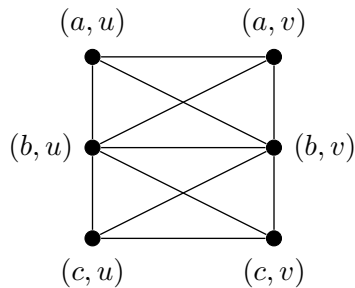
Dipunyai graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ maka komposisi dari G_1 dan G_2 adalah $G = G_1 [G_2] = (V, E)$ adalah graf dengan himpunan titik $V = V_1 \times V_2$ dan dua titik $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$ adjacent di G jika $[(u_1 = v_1 \text{ dan } u_2 \text{ adjacent } v_2) \text{ atau } u_1 \text{ adjacent } v_1]$.

Contoh 2.1.39 Perhatikan dua graf sebagai berikut.



Gambar 2.27. (a) Graf G_1 ; (b) Graf G_2

Berdasarkan gambar 2.27, maka graf komposisinya adalah



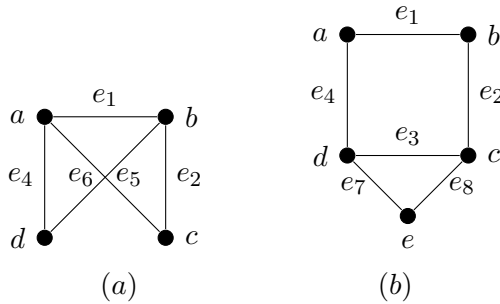
Gambar 2.28. Graf Komposisi $G = G_1 [G_2]$

f. Ring Sum

Definisi 2.1.40 (Ring sum, e.g (Rokad dan Ghodasara, 2015))

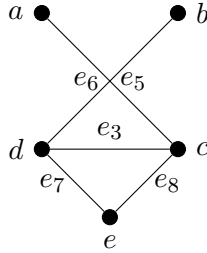
Dipunyai graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$, maka ring sum dapat dinotasikan dengan $G_1 \oplus G_2$ adalah graf yang memiliki himpunan titik $V(G_1 \oplus G_2) = V_1 \cup V_2$ dan himpunan sisi $E(G_1 \oplus G_2) = (E_1 \cup E_2) - (E_1 \cap E_2)$.

Contoh 2.1.41 Perhatikan dua graf sebagai berikut.



Gambar 2.29. (a) Graf G_1 ; (b) Graf G_2

Berdasarkan pada gambar 2.29, maka sisi hasil ring sumnya adalah sisi ac, bd, dc, de , dan ce . Hal ini karena sisi tersebut merupakan sisi yang dimiliki oleh salah satu graf, namun bukan pada kedua grafnya.



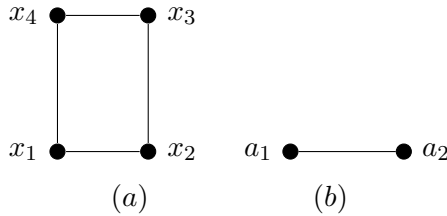
Gambar 2.30. Graf $G = G_1 \oplus G_2$

g. Operasi Korona

Definisi 2.1.42 (*Operasi Korona, e.g (Fendiyanto P, 2019)*)

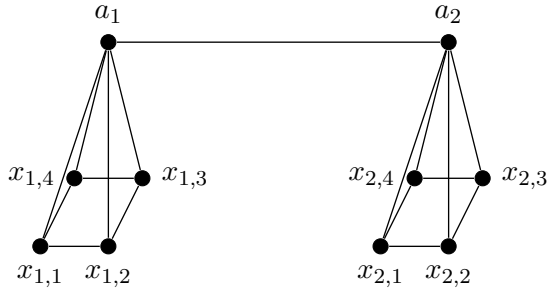
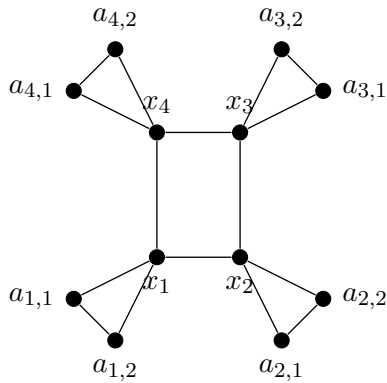
Operasi korona pada dua buah graf F dan H dapat didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dari duplikat graf F yang kemudian titik graf F untuk setiap titik graf H , operasi ini dapat dinotasikan dengan $F \odot H$.

Contoh 2.1.43 Perhatikan graf C_4 dan P_2 sebagai berikut.



Gambar 2.31. (a) Graf C_4 ; (b) Graf P_2

Berdasarkan pada gambar 2.31, maka hasil operasi $P_2 \odot C_4$ dan $C_4 \odot P_2$ adalah sebagai berikut.

Gambar 2.32. Graf korona $P_2 \odot C_4$ Gambar 2.33. Graf korona $C_4 \odot P_2$

5. Polinomial Sikel Terinduksi pada Graf

Pada bagian ini berisi definisi dari polinomial sikel terinduksi pada graf.

a. Polinomial Graf

Definisi 2.1.44 (*Polinomial Graf, e.g (Read dan Wilson,*

1998))

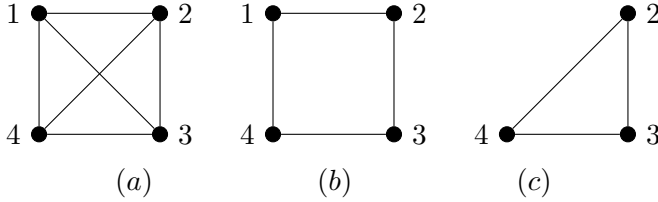
Suatu graf dikatakan polinomial graf apabila graf tersebut dapat direpresentasikan ke dalam bentuk polinomial yang mampu menggambarkan struktur dan sifat pada graf tersebut.

b. Sikel Terinduksi pada Graf

Definisi 2.1.45 (Sikel Terinduksi pada Graf, e.g (Harary, 2018))

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf dengan titik V dan sisi E serta $S \subseteq V$ sembarang himpunan bagian dari titik di G . Subgraf terinduksi dari S yang dinotasikan dengan $G[S]$ merupakan graf yang titik-titiknya adalah S , himpunan sisi terdiri dari semua sisi yang ada di E yang titik-titik ujungnya tetap berada pada S dan untuk setiap u dan v bertetangga di $G[S]$ jika dan hanya jika u dan v bertetangga di G , di mana $u, v \in G[S] \subseteq V(G)$. Jika subgraf terinduksi $G[S]$ membentuk graf lingkaran maka $G[S]$ disebut sikel terinduksi.

Contoh 2.1.46 Perhatikan graf di bawah ini yang merupakan sikel terinduksi dan bukan sikel terinduksi pada graf



Gambar 2.34. (a) Graf K_4 , (b) Bukan Sikel Terinduksi dari K_4 ,
(c) Sikel Terinduksi dari K_4

c. Polinomial Sikel Terinduksi pada Graf

Definisi 2.1.47 (*Polinomial Sikel Terinduksi pada Graf, e.g (Madalim dkk, 2023)*)

Sikel terinduksi pada graf yang struktur dan sifatnya dinyatakan dalam bentuk suku banyak.

Definisi ini dapat dituliskan dengan persamaan di bawah ini:

$$c(G; x) := \sum_{i=3}^{c(G)} c_i(G) x^i \quad (2.1)$$

Keterangan:

$c(G; x)$ = Polinomial sikel terinduksi pada graf G

$c_i(G)$ = Banyaknya sikel terinduksi pada G

$c(G)$ = Panjang jalan terpanjang pada sikel

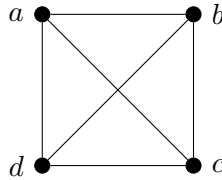
i = Panjang jalan

6. Representasi Polinomial Sikel Terinduksi pada Graf

Pada bagian ini, akan membahas konsep representasi contoh graf yang membentuk suatu polinomial berdasarkan sikel terinduksi yang termuat pada graf.

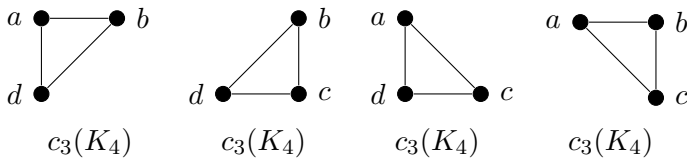
a. Graf Lengkap

Perhatikan graf K_4 sebagai berikut.



Gambar 2.35. Graf K_4

Berdasarkan pada gambar 2.35. graf K_4 , diperoleh siklus-siklus terinduksinya yaitu:



Gambar 2.36. Siklus Terinduksi $c_3(K_4)$

Diperoleh siklus terinduksi dengan panjang jalan 3 ada empat.

$$c(G; x) := \sum_{i=3}^{c(G)} c_i(G) x^i$$

$$c(K_4; x) = c_3(K_4) x^3 + c_4(K_4) x^4$$

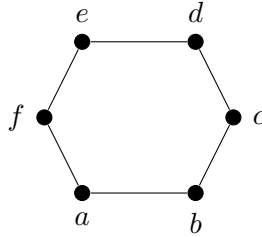
$$c(K_4; x) = 4x^3 + 0x^4$$

$$c(K_4; x) = 4x^3$$

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan, maka polinomial siklus terinduksi graf K_4 adalah $4x^3$.

b. Graf Lingkaran

Perhatikan graf C_6 sebagai berikut.



Gambar 2.37. Graf C_6

Diperoleh hanya terdapat tepat satu siklus terinduksi yaitu siklus dengan panjang jalan 6 yang banyaknya ada satu.

$$c(G; x) := \sum_{i=3}^{c(G)} c_i(G) x^i$$

$$c(C_6; x) = c_3(C_6)x^3 + c_4(C_6)x^4 + c_5(C_6)x^5 + c_6(C_6)x^6$$

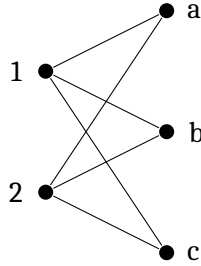
$$c(C_6; x) = 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 + 1x^6$$

$$c(C_6; x) = x^6$$

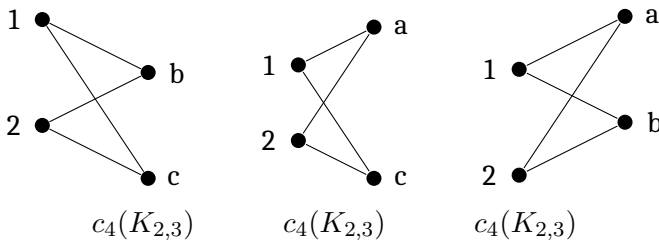
Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan, maka polinomial siklus terinduksi graf C_6 adalah x^6 .

c. Graf Bipartit Lengkap

Tentukan polinomial siklus terinduksi pada graf bipartit lengkap $K_{2,3}$ di bawah ini.

Gambar 2.38. Graf $K_{2,3}$

Berdasarkan pada gambar 2.38 graf $K_{2,3}$, diperoleh siklus-siklus terinduksinya yaitu:

Gambar 2.39. Siklus Terinduksi $c_4(K_{2,3})$

Diperoleh, hanya ada siklus terinduksi dengan panjang jalan 4 dengan banyak tiga siklus.

$$c(G; x) := \sum_{i=3}^{c(G)} c_i(G) x^i$$

$$c(K_{2,3}; x) = c_3(K_{2,3})x^3 + c_4(K_{2,3})x^4$$

$$c(K_{2,3}; x) = 0x^3 + 3x^4$$

$$c(K_{2,3}; x) = 3x^4$$

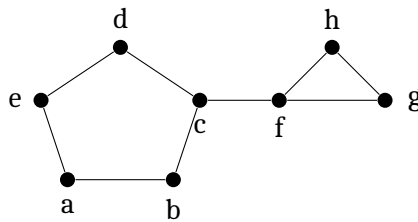
Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan, maka polinomial

sikel terinduksi graf $K_{2,3}$ adalah $3x^4$.

d. Gabungan Graf

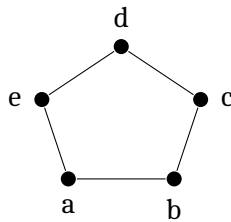
Berikut ini contoh mengenai polinomial sikel terinduksi pada sembarang graf.

- 1) Tentukan polinomial sikel terinduksi pada graf G tertentu di bawah ini!

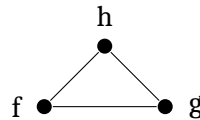


Gambar 2.40. Graf G

Berdasarkan pada gambar 2.40 graf G , diperoleh sikel-sikel terinduksinya yaitu:



Sikel Terinduksi $c_5(G)$



Sikel Terinduksi $c_3(G)$

Gambar 2.41. Sikel Terinduksi dari G

Diperoleh sikel terinduksi dengan panjang jalan 3 ada satu dan sikel terinduksi dengan panjang jalan 5 ada

satu siklus.

$$c(G; x) := \sum_{i=3}^{c(G)} c_i(G) x^i$$

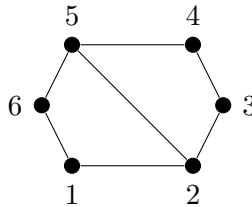
$$c(G; x) = c_3(G)x^3 + c_4(G)x^4 + c_5(G)x^5$$

$$c(G; x) = 1x^3 + 0x^4 + 1x^5$$

$$c(G; x) = x^3 + x^5$$

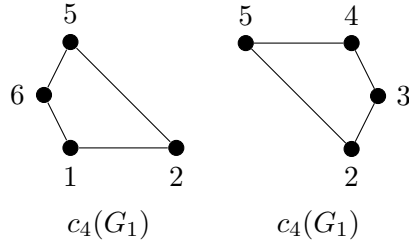
Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan, maka polinomial siklus terinduksi graf G adalah $x^3 + x^5$.

- 2) Tentukan polinomial siklus terinduksi pada graf tertentu di bawah ini.



Gambar 2.42. Graf G_1

Berdasarkan gambar 2.42 graf G_1 , diperoleh siklus-siklus terinduksinya yaitu:



Gambar 2.43. Sikel Terinduksi $c_4(G_1)$

Diperoleh sikel terinduksi dengan panjang jalan 4 ada dua sikel.

$$c(G; x) := \sum_{i=3}^{c(G)} c_i(G) x^i$$

$$c(G; x) = c_3(G) x^3 + c_4(G) x^4 + c_5(G) x^5 + c_6(G) x^6$$

$$c(G; x) = 0x^3 + 2x^4 + 0x^5 + 0x^6$$

$$c(G; x) = 2x^4$$

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan, maka polinomial sikel terinduksi graf G_1 adalah $2x^4$.

B. Hasil Penelitian yang Relevan

Pada subbab ini akan mengulas mengenai hasil penelitian terdahulu yang berhubungan dengan kajian polinomial sikel terinduksi pada graf dan hasil operasi pada graf. Hasil penelitian tersebut sebagai landasan referensi dalam melakukan penelitian ini. Berikut ini merupakan hasil penelitian yang relevan.

1. Penelitian yang dilakukan oleh Petrus Fendiyanto (2019)

yang berjudul Dimensi Metrik Hasil Operasi Korona Antara Graf Lintasan dengan Graf Lengkap ($P_n \odot K_m$) dan Graf Sikel dengan Graf Lintasan ($C_n \odot mP_2$). Pada penelitian ini berisi tentang dimensi metrik pada graf, definisi operasi korona, representasi operasi korona pada graf $P_n \odot K_m$ dan $C_n \odot mP_2$, serta karakteristik graf hasil operasi korona. Persamaan antara penelitian ini dengan penelitian yang akan dilakukan adalah sama-sama membahas salah satu jenis operasi pada graf yakni operasi korona. Adapun perbedaannya terletak pada jenis graf yang digunakan, pada penelitian ini menggunakan graf $P_n \odot K_m$ dan $C_n \odot mP_2$ sedangkan pada penelitian yang akan dilakukan menggunakan graf $C_n \odot P_m$ dan $C_n \odot K_m$.

2. Penelitian yang dilakukan oleh Villarta, dkk., (2024) yang berjudul *Induced Path Polynomials of the Join and Corona of Graphs*. Pada penelitian ini berisi tentang definisi polinomial sikel terinduksi pada graf dan karakteristik polinomial sikel terinduksi pada dua graf lintasan menggunakan operasi join dan korona. Persamaan antara penelitian ini dengan penelitian yang akan dilakukan adalah sama-sama menggunakan operasi join dan korona. Adapun perbedaannya terletak pada graf yang digunakan, pada penelitian ini menggunakan dua graf lintasan pada kedua operasi sedangkan pada penelitian yang akan dilakukan menggunakan graf C_n dengan N_n pada operasi join dan graf $P_m \odot C_n$ serta $K_m \odot C_n$ pada operasi korona.
3. Penelitian yang dilakukan oleh Radana E. Madalim, dkk., (2023) yang berjudul *Induced Cycle Polynomial of a Graph*.

Pada penelitian ini berisi tentang polinomial siklus terinduksi dan karakteristik hasil operasi pada graf. Persamaan antara penelitian ini dengan penelitian yang akan dilakukan adalah sama-sama membahas polinomial siklus terinduksi pada graf dan hasil operasi join pada graf. Adapun perbedaannya terletak pada graf yang digunakan pada operasi serta menggunakan beberapa operasi tambahan pada penelitian yang akan dilakukan.

BAB III

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Bab ini membahas mengenai bentuk umum polinomial sikel terinduksi pada graf khusus terutama graf lengkap, graf lingkaran, dan graf bipartit lengkap. Setelah itu graf tersebut dioperasikan dan dicari bentuk umum hasil operasi pada graf tersebut dan diambil kesimpulan sifat hasil operasinya.

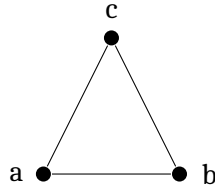
A. Polinomial Sikel Terinduksi pada Graf

Pada polinomial sikel terinduksi ini terdapat bentuk umum yang berbeda pada setiap macam-macam graf. Berikut ini merupakan penerapan dalam menentukan polinomial sikel terinduksi pada graf lengkap, graf lingkaran, dan graf bipartit lengkap.

1. Graf Lengkap K_n

Berikut ini merupakan penerapan dalam menentukan polinomial sikel terinduksi pada graf lengkap dengan n banyaknya titik. Pada pembahasan ini untuk $n \geq 3$ karena agar terbentuk sikel.

a. Graf Lengkap K_3

Gambar 3.1. Graf K_3

Berdasarkan gambar 3.1. graf K_3 , hanya terdapat satu siklus terinduksi dengan panjang jalan tiga.

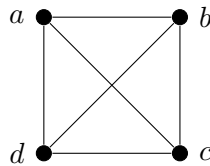
$$c(G; x) := \sum_{i=3}^{c(G)} c_i(G) x^i$$

$$c(K_3; x) = c_3(K_3) x^3$$

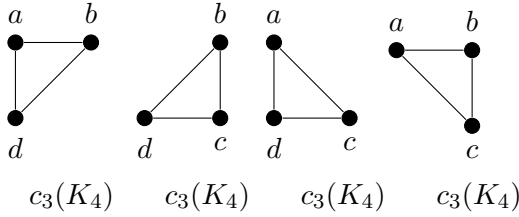
$$c(K_3; x) = x^3$$

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan, maka polinomial siklus terinduksi graf K_3 adalah x^3 .

b. Graf Lengkap K_4

Gambar 3.2. Graf K_4

Berdasarkan gambar 3.2 graf K_4 , diperoleh siklus-siklus terinduksinya yaitu:



Gambar 3.3. Sikel Terinduksi $c_3(K_4)$

Diperoleh banyaknya sikel terinduksi dengan panjang jalan 3 ada empat.

$$c(G; x) := \sum_{i=3}^{c(G)} c_i(G) x^i$$

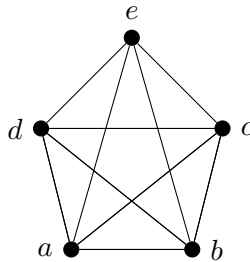
$$c(K_4; x) = c_3(K_4)x^3 + c_4(K_4)x^4$$

$$c(K_4; x) = 4x^3 + 0x^4$$

$$c(K_4; x) = 4x^3$$

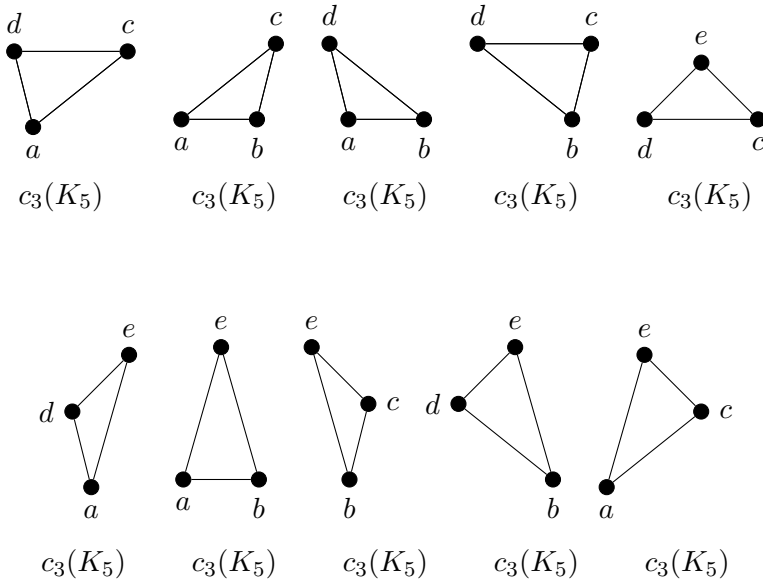
Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan, maka polinomial sikel terinduksi graf K_4 adalah $4x^3$.

c. Graf Lengkap K_5



Gambar 3.4. Graf K_5

Berdasarkan gambar 3.4. graf K_5 , diperoleh sikel-sikel terinduksinya yaitu:



Gambar 3.5. Sikel Terinduksi $c_3(K_5)$

Diperoleh banyaknya sikel terinduksi dengan panjang jalan 3 ada sepuluh sikel terinduksi.

$$c(G; x) := \sum_{i=3}^{c(G)} c_i(G) x^i$$

$$c(K_5; x) = c_3(K_5)x^3 + c_4(K_5)x^4 + c_5(K_5)x^5$$

$$c(K_5; x) = 10x^3 + 0x^4 + 0x^5$$

$$c(K_5; x) = 10x^3$$

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan, maka polinomial sikel terinduksi graf K_5 adalah $10x^3$.

d. Graf Lengkap K_n

Teorema 3.1.1 (Graf Lengkap K_n , e.g (Madalim, 2023))

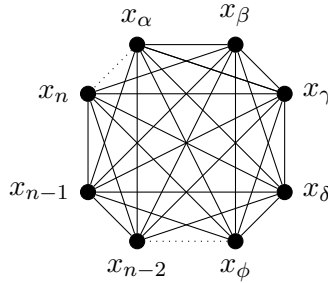
Polinomial sikel terinduksi pada graf lengkap K_n dengan $n \geq 3$ adalah

$$c(K_n; x) = \binom{n}{3} x^3 \quad (3.1)$$

Bukti.

Graf lengkap K_n adalah graf yang setiap pasangan titiknya bertetangga dan setiap titik memiliki derajat yang sama. Untuk terbentuknya sikel minimal mempunyai panjang jalan 3.

Misal $V(K_n) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$.



Gambar 3.6. Graf K_n

Ambil sebarang $G_1 = \{x_\alpha, x_\beta, x_\gamma\} \subseteq V(K_n)$ dengan $\alpha \neq \beta \neq \gamma$. Jelas untuk setiap pasangan anggota G_1 bertetangga, artinya graf bagian terinduksi dari G_1 merupakan graf lengkap K_3 yang mempunyai sikel terinduksi dengan panjang jalan 3.

Misal ambil sebarang $G_2 = \{x_\delta, x_\phi, x_{n-1}, x_n\} \subseteq V(K_n)$ dengan $\delta \neq \phi \neq (n-1) \neq n$. Jelas untuk setiap

pasangan anggota G_2 bertetangga, artinya graf bagian dari G_2 merupakan graf lengkap K_4 yang merupakan bukan siklus terinduksi sehingga $c_4(G_2) = 0$. Hal tersebut serupa untuk $n > 4$ sehingga $c_n(G) = 0$ dengan $n > 4$. Pada K_n , graf yang terinduksi hanya terdapat siklus dengan panjang jalan 3.

$$c_i(G)x^i = \begin{cases} 0, & \text{jika } i > 3 \\ \binom{n}{3}x^3, & \text{jika } i = 3 \end{cases}$$

Oleh karena itu, untuk menentukan polinomial siklus terinduksi pada graf K_n adalah $\binom{n}{3}x^3$, dengan n adalah banyaknya titik.

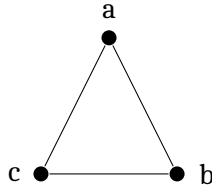
$$\begin{aligned} c(G; x) &:= \sum_{i=3}^{c(G)} c_i(K_n)x^i \\ &= \binom{n}{3}x^3 + 0x^4 + 0x^5 + \dots \\ &= \binom{n}{3}x^3 \end{aligned}$$

■

2. Graf Lingkaran C_n

Berikut ini merupakan polinomial siklus terinduksi pada graf lingkaran dengan n banyaknya titik.

a. Graf Lingkaran C_3

Gambar 3.7. Graf C_3

Berdasarkan graf C_3 , hanya terdapat satu siklus terinduksi dengan panjang jalan tiga.

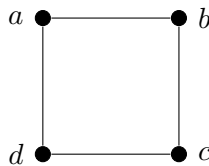
$$c(G; x) := \sum_{i=3}^{c(G)} c_i(G) x^i$$

$$c(C_3; x) = c_3(C_3) x^3$$

$$c(C_3; x) = x^3$$

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan, maka polinomial siklus terinduksi graf C_3 adalah x^3 .

b. Graf Lingkaran C_4

Gambar 3.8. Graf C_4

Berdasarkan graf C_4 , hanya terdapat satu siklus terinduksi

dengan panjang jalan empat.

$$c(G; x) := \sum_{i=3}^{c(G)} c_i(G) x^i$$

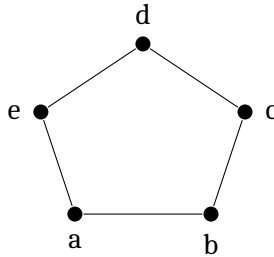
$$c(C_4; x) = c_3(C_4)x^3 + c_4(C_4)x^4$$

$$c(C_4; x) = 0x^3 + x^4$$

$$c(C_4; x) = x^4$$

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan, maka polinomial sikel terinduksi graf C_4 adalah x^4 .

c. Graf Lingkaran C_5



Gambar 3.9. Graf C_5

Berdasarkan graf C_5 , hanya terdapat satu sikel terinduksi dengan panjang jalan lima.

$$c(G; x) := \sum_{i=3}^{c(G)} c_i(G) x^i$$

$$c(C_5; x) = c_3(C_5)x^3 + c_4(C_5)x^4 + c_5(C_5)x^5$$

$$c(C_5; x) = 0x^3 + 0x^4 + x^5$$

$$c(C_5; x) = x^5$$

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan, maka polinomial sikel terinduksi graf C_5 adalah x^5 .

d. Graf Lingkaran C_n

Teorema 3.1.2 (Graf Lingkaran C_n , e.g (Madalim, 2023))

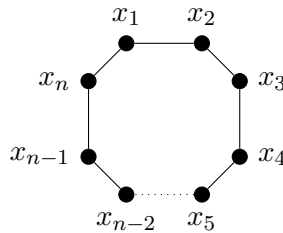
Polinomial sikel terinduksi pada graf lingkaran C_n untuk $n \geq 3$ adalah

$$c(C_n; x) = x^n \quad (3.2)$$

Bukti.

Graf lingkaran C_n adalah graf yang memiliki lintasan yang titik awal dan titik akhirnya sama sehingga terdapat tepat sebuah sikel dengan panjang jalan n .

Titik $V(C_n) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$.



Gambar 3.10. Graf C_n

Misal ambil sebarang $G_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_{n-1}\} \subseteq C_n$, tidak mungkin ada sikel karena titik awal dan titik akhirnya tidak sama. Hal tersebut berakibat sebarang graf bagian dari C_n dengan titik $< n$ tidak ada sikelnya.

Misal ambil $G_2 = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} \subseteq C_n$, maka terbentuk tepat satu sikel terinduksi dengan panjang jalan n . Oleh

sebab itu, graf tersebut hanya terdapat tepat satu siklus yang terinduksi dengan panjang jalan n , sehingga polinomial siklus terinduksi pada graf bagian dengan jumlah titik yang kurang dari atau lebih dari n adalah nol.

Hal ini berakibat polinomial siklus terinduksi yang terbentuk dari graf C_n adalah x^n , dengan n adalah banyaknya titik.

$$\begin{aligned} c(G; x) &:= \sum_{i=3}^{c(G)} c_i(C_n) x^i \\ &= x^n \end{aligned}$$

■

3. Graf Bipartit Lengkap $K_{m,n}$

Berikut ini merupakan polinomial siklus terinduksi pada graf bipartit lengkap dengan m dan n banyaknya titik pada masing-masing himpunan.

a. Graf Bipartit $K_{1,2}$

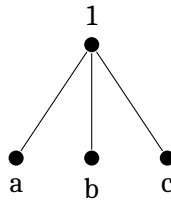


Gambar 3.11. Graf $K_{1,2}$

Berdasarkan graf $K_{1,2}$, tidak terdapat siklus pada graf tersebut, maka polinomial siklus terinduksi graf $K_{1,2}$ adalah

tidak ada atau nol.

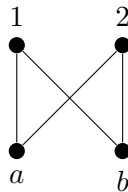
b. Graf Bipartit $K_{1,3}$



Gambar 3.12. Graf $K_{1,3}$

Berdasarkan graf $K_{1,3}$, tidak terdapat siklus pada graf tersebut, maka polinomial siklus terinduksi graf $K_{1,3}$ adalah tidak ada atau nol.

c. Graf Bipartit $K_{2,2}$



Gambar 3.13. Graf $K_{2,2}$

Berdasarkan graf $K_{2,2}$, hanya terdapat satu siklus terinduksi

dengan panjang jalan empat.

$$c(G; x) := \sum_{i=3}^{c(G)} c_i(G)x^i$$

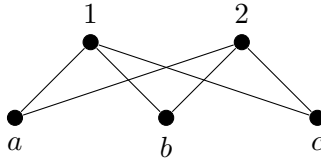
$$c(K_{2,2}; x) = c_3(G)x^3 + c_4(G)x^4$$

$$c(K_{2,2}; x) = 0x^3 + x^4$$

$$c(K_{2,2}; x) = x^4$$

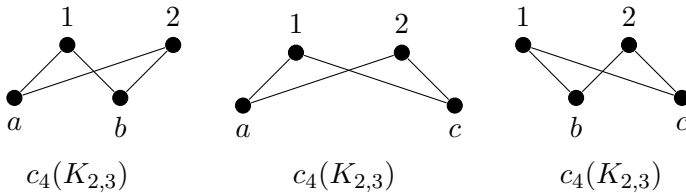
Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan, maka polinomial siklus terinduksi graf $K_{2,2}$ adalah x^4 .

d. Graf Bipartit $K_{2,3}$



Gambar 3.14. Graf $K_{2,3}$

Berdasarkan graf $K_{2,3}$, diperoleh siklus-siklus terinduksinya yaitu:



Gambar 3.15. Siklus Terinduksi $c_4(K_{2,3})$

Diperoleh banyaknya siklus terinduksi dengan panjang jalan

empat ada 3 sikel terinduksi.

$$c(G; x) := \sum_{i=3}^{c(G)} c_i(G) x^i$$

$$c(K_{2,3}; x) = c_3(K_{2,3})x^3 + c_4(K_{2,3})x^4 + c_5(K_{2,3})x^5$$

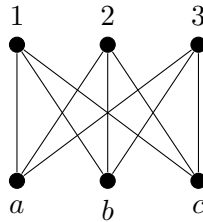
$$c(K_{2,3}; x) = 0x^3 + 3x^4 + 0x^5$$

$$c(K_{2,3}; x) = 3x^4$$

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan, maka polinomial sikel terinduksi graf $K_{2,3}$ adalah $3x^4$.

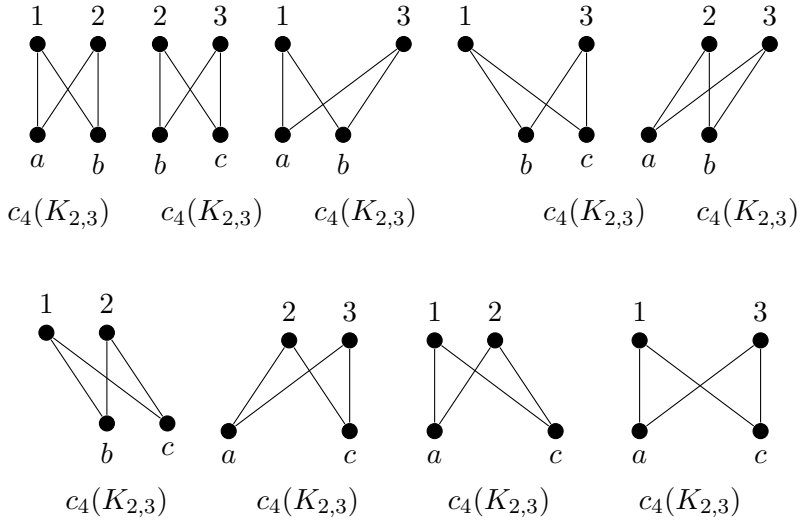
e. Graf Bipartit $K_{3,3}$

Perhatikan graf $K_{3,3}$ di bawah ini.



Gambar 3.16. Graf $K_{3,3}$

Berdasarkan graf $K_{2,3}$, diperoleh sikel-sikel terinduksinya yaitu:



Gambar 3.17. Sikel Terinduksi $c_4(K_{3,3})$

Diperoleh banyaknya sikel terinduksi dengan panjang jalan 4 ada sembilan sikel terinduksi.

$$c(G; x) := \sum_{i=3}^{c(G)} c_i(G) x^i$$

$$c(K_{3,3}; x) = c_3(G)x^3 + c_4(G)x^4 + c_5(G)x^5 + c_6(G)x^6$$

$$c(K_{3,3}; x) = 0x^3 + 9x^4 + 0x^5 + 0x^6$$

$$c(K_{3,3}; x) = 9x^4$$

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan, maka polinomial sikel terinduksi graf $K_{3,3}$ adalah $9x^4$.

f. Graf Bipartit Lengkap $K_{m,n}$

Teorema 3.1.3 (Graf Bipartit Lengkap $K_{m,n}$, e.g (Madalim,

2023))

Polinomial sikel terinduksi pada graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ untuk $m, n \geq 2$ adalah

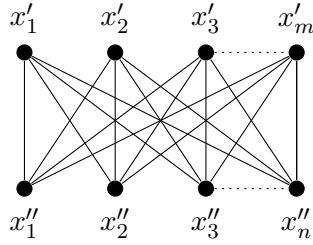
$$c(K_{m,n}; x) = \binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2} x^4 \quad (3.3)$$

Jika jumlah titik pada salah satu himpunan $m, n < 2$, maka tidak terbentuk sikel sehingga tidak terdapat polinomial sikel terinduksi pada graf bipartit tersebut.

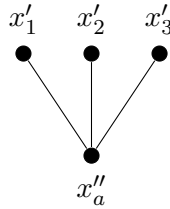
Bukti.

Graf $K_{m,n}$ adalah graf yang terdiri dari dua himpunan namun dalam satu himpunan titik-titik tidak saling bertetangga, sedangkan terdapat titik pada himpunan menghubungkan titik pada himpunan lainnya. Pada graf $K_{m,n}$, sikel terbentuk mulai dari panjang jalan 4, karena menurut teorema 2.1.28 graf bipartit tidak memiliki sikel dengan panjang jalan ganjil, artinya sikel dengan panjang jalan 3 pada graf $K_{m,n}$ tidak ada.

Misal titik pada himpunan pertama $V_1(K_{m,n}) = \{x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_m\}$, sedangkan titik pada himpunan kedua $V_2(K_{m,n}) = \{x''_1, x''_2, x''_3, \dots, x''_n\}$. Hal tersebut artinya semua titik pada himpunan $\{x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_m\}$ bertetangga dengan setiap titik pada himpunan $\{x''_1, x''_2, x''_3, \dots, x''_n\}$.

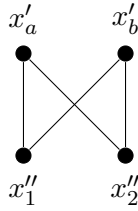
Gambar 3.18. Graf $K_{m,n}$

Ambil sebarang tiga titik di V_1 dan sebuah titik di V_2 misal titik $\{x'_1, x'_2, x'_3\} \subseteq V_1$ dan $\{x''_a\} \subseteq V_2$.

Gambar 3.19. $K_{3,1} \subseteq_{\text{ind}} K_{m,n}$

Graf bagian terinduksi dari $\{x'_1, x'_2, x'_3, x''_a\}$ tidak membentuk siklus dengan panjang jalan 4.

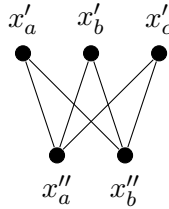
Ambil sebarang dua titik di V_1 dan dua titik di V_2 misal titik $\{x'_a, x'_b\} \subseteq V_1$ dan $\{x''_1, x''_2\} \subseteq V_2$.



Gambar 3.20. $K_{2,2} \subseteq_{\text{ind}} K_{m,n}$

Graf bagian terinduksi dari $\{x'_a, x'_b, x''_a, x''_b\}$ membentuk satu siklus terinduksi dengan panjang jalan 4.

Ambil sebarang tiga titik di V_1 dan dua titik di V_2 , misal ambil titik $\{x'_a, x'_b, x'_c\} \subseteq V_1$ dan $\{x''_a, x''_b\} \subseteq V_2$.



Gambar 3.21. $K_{3,2} \subseteq_{\text{ind}} K_{m,n}$

Graf bagian terinduksi dari $\{x'_a, x'_b, x'_c, x''_a, x''_b\}$ tidak membentuk siklus terinduksi dengan panjang jalan 5.

Terbentuknya siklus dengan mengambil 2 titik pada masing-masing himpunan dan pada titik tersebut digunakan bersama sehingga menggunakan kaidah perkalian. Graf bagian terinduksi yang terbentuk lebih dari 4 titik bukan merupakan siklus terinduksi.

Jadi, polinomial siklus terinduksi pada graf $K_{m,n}$ untuk $m, n \geq$

2 adalah

$$\begin{aligned} c(G; x) &:= \sum_{i=3}^{c(G)} c_i(K_{m,n}) x^i \\ &= \binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2} x^4 \end{aligned}$$

■

B. Polinomial Sikel Terinduksi Hasil Operasi pada Graf

Pada bagian ini akan membahas polinomial sikel terinduksi hasil operasi pada graf yang mencakup hasil operasi gabungan, produk, korona, join, komplemen, dan ringsum.

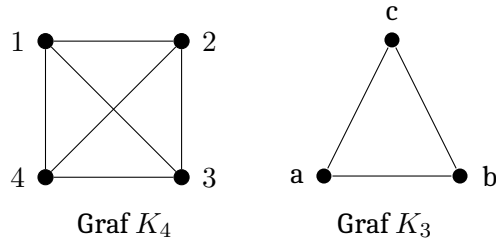
1. Gabungan

Berikut ini merupakan hasil operasi gabungan pada graf lengkap, lingkaran, dan bipartit.

a. Graf Lengkap

1) Graf K_4 dengan K_3

Perhatikan graf K_4 dan K_3 di bawah ini.

Gambar 3.22. Graf $K_4 \cup K_3$

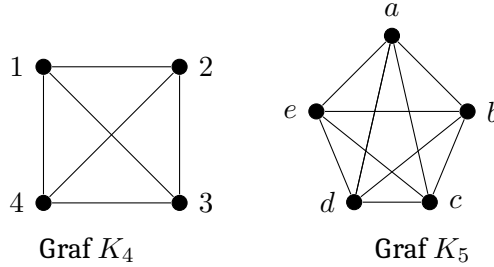
Berdasarkan graf K_4 dan K_3 , maka polinomial siklus terinduksinya adalah

$$\begin{aligned}
 c(K_4 \cup K_3; x) &= \binom{4}{3} x^3 + \binom{3}{3} x^3 \\
 c(K_4 \cup K_3; x) &= \left(\frac{4 \times 3!}{1! \times 3!} + \frac{3!}{0! \times 3!} \right) x^3 \\
 c(K_4 \cup K_3; x) &= (4 + 1) x^3 \\
 c(K_4 \cup K_3; x) &= 5x^3
 \end{aligned}$$

Artinya terdapat lima siklus terinduksi dengan panjang jalan 3 dari hasil operasi gabungan graf K_4 dan K_3 .

2) Graf K_4 dengan K_5

Perhatikan graf K_4 dan K_5 di bawah ini.

Gambar 3.23. Graf $K_4 \cup K_5$

Berdasarkan graf K_4 dan K_3 , maka polinomial siklus terinduksinya sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 c(K_4 \cup K_5; x) &= \binom{4}{3} x^3 + \binom{5}{3} x^3 \\
 c(K_4 \cup K_5; x) &= \left(\frac{4 \times 3!}{1! \times 3!} + \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} \right) x^3 \\
 c(K_4 \cup K_5; x) &= (4 + 10) x^3 \\
 c(K_4 \cup K_5; x) &= 14x^3
 \end{aligned}$$

Artinya terdapat 14 siklus terinduksi dengan panjang jalan 3 dari hasil operasi gabungan graf K_4 dan K_5 .

3) Graf K_m dengan K_n

Akan ditunjukkan bahwa polinomial siklus terinduksi hasil

operasi gabungan dari graf lengkap K_m dan K_n .

$$\begin{aligned}
 c(K_m \cup K_n; x) &= c(K_m; x) + c(K_n, x) \\
 &= \binom{m}{3} x^3 + \binom{n}{3} x^3 \\
 &= \left[\binom{m}{3} + \binom{n}{3} \right] x^3
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Graf K_m adalah graf lengkap dengan m titik, sedangkan graf K_n adalah graf lengkap dengan n titik. Semua titik pada masing-masing graf saling bertetangga.

Misal titik $V_1(K_m) = \{x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_m\}$, jelas semua titik tersebut saling bertetangga pada $V_1(K_m)$.

Misal titik $V_2(K_n) = \{x''_1, x''_2, x''_3, \dots, x''_n\}$, jelas semua titik tersebut saling bertetangga $V_2(K_n)$.

Graf K_m dioperasikan gabungan dengan K_n , artinya tidak ada penambahan sisi yang menghubungkan antar kedua graf tersebut. Himpunan titik $= \{x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_m\}$ hanya ada di $V_1(K_m)$ dan tidak bertetangga dengan $\{x''_1, x''_2, x''_3, \dots, x''_n\}$ serta sebaliknya.

Hal ini mengakibatkan tidak adanya perubahan struktur pada graf tersebut, sehingga hasil operasinya dengan menjumlahkan polinomial siklus terinduksi pada graf K_m dan K_n .

Jadi, polinomial siklus terinduksi hasil operasi gabungan pada

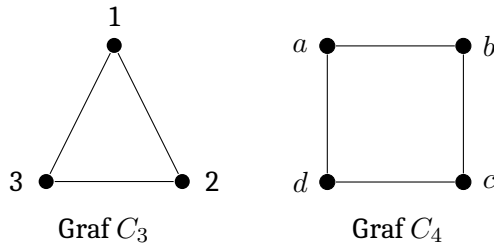
graf lengkap K_m dan K_n adalah

$$\begin{aligned} c(K_m \cup K_n; x) &= c(K_m; x) + c(K_n, x) \\ &= \binom{m}{3} x^3 + \binom{n}{3} x^3 \\ &= \left[\binom{m}{3} + \binom{n}{3} \right] x^3 \end{aligned}$$

b. Graf Lingkaran

1) Graf C_3 dan C_4

Perhatikan graf C_3 dan C_4 di bawah ini.



Gambar 3.24. Graf $C_3 \cup C_4$

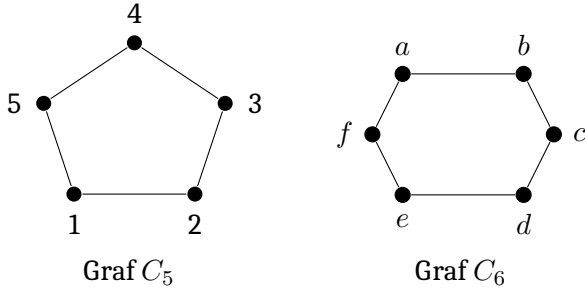
Berdasarkan graf C_3 dan C_4 , maka polinomial sikel terinduksinya adalah

$$c(C_3 \cup C_4; x) = x^3 + x^4$$

Artinya terdapat tepat satu sikel terinduksi dengan panjang jalan 3 dan tepat satu sikel terinduksi dengan panjang jalan 4 dari hasil operasi gabungan graf C_3 dan C_4 .

2) Graf C_5 dan C_6

Perhatikan graf C_5 dan C_6 di bawah ini.

Gambar 3.25. Graf $C_5 \cup C_6$

Berdasarkan graf C_5 dan C_6 , maka polinomial siklus terinduksinya sebagai berikut.

$$c(C_5 \cup C_6; x) = x^5 + x^6$$

Artinya terdapat tepat satu siklus terinduksi dengan panjang jalan 5 dan tepat satu siklus terinduksi dengan panjang jalan 6 dari hasil operasi gabungan graf C_5 dan C_6 .

3) Graf C_m dan C_n

Akan ditunjukkan bahwa polinomial siklus terinduksi hasil operasi gabungan dari graf lengkap C_m dan C_n adalah

$$\begin{aligned} c(C_m \cup C_n; x) &= c(C_m; x) + c(C_n; x) \\ &= x^m + x^n \end{aligned} \quad (3.5)$$

Graf C_m adalah graf lingkaran dengan m titik, sedangkan graf C_n adalah graf lingkaran dengan n titik. Pada masing-masing graf terdapat tepat satu siklus terinduksi dengan panjang jalan m dan n .

Misal titik $V_1(C_m) = \{x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_m\}$, sedangkan titik $V_2(C_n) = \{x''_1, x''_2, x''_3, \dots, x''_n\}$.

Graf C_m dioperasikan gabungan dengan C_n , artinya tidak ada penambahan sisi yang menghubungkan antar kedua graf tersebut, hanya ada tepat satu siklus terinduksi pada masing-masing graf. Titik $\{x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_m\}$ hanya ada di $V_1(C_m)$ dan tidak bertetangga dengan $\{x''_1, x''_2, x''_3, \dots, x''_n\}$.

Hal ini mengakibatkan tidak adanya perubahan struktur pada kedua graf tersebut, sehingga polinomial siklus terinduksi hasil operasinya dengan menjumlahkan polinomial siklus terinduksi pada graf C_m dan C_n .

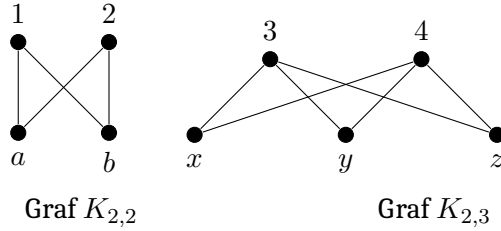
Jadi, polinomial siklus terinduksi hasil operasi gabungan pada graf lingkaran C_m dan C_n adalah

$$\begin{aligned} c(C_m \cup C_n; x) &= c(C_m; x) + c(C_n; x) \\ &= x^m + x^n \end{aligned}$$

c. Graf Bipartit

1) Graf $K_{2,2}$ dan $K_{2,3}$

Perhatikan graf $K_{2,2}$ dan $K_{2,3}$ di bawah ini.



Gambar 3.26. Graf $K_{2,2} \cup K_{2,3}$

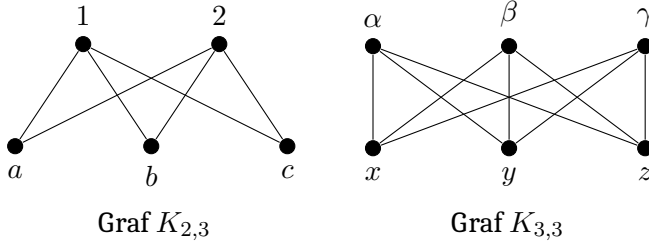
Berdasarkan graf $K_{2,2}$ dan $K_{2,3}$, maka polinomial sikel terinduksinya sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 c(K_{2,2} \cup K_{2,3}; x) &= \binom{2}{2} \cdot \binom{2}{2} x^4 + \binom{2}{2} \cdot \binom{3}{2} x^4 \\
 c(K_{2,2} \cup K_{2,3}; x) &= \left(\frac{2!}{0! \times 2!} \cdot \frac{2!}{0! \times 2!} + \frac{2!}{0! \times 2!} \cdot \frac{3 \times 2!}{1! \times 2!} \right) x^4 \\
 c(K_{2,2} \cup K_{2,3}; x) &= (1 + 3) x^4 \\
 c(K_{2,2} \cup K_{2,3}; x) &= 4x^4
 \end{aligned}$$

Artinya terdapat 4 sikel terinduksi dengan panjang jalan 4 dari hasil operasi gabungan graf $K_{2,2}$ dan $K_{2,3}$.

2) Graf $K_{2,3}$ dan $K_{3,3}$

Perhatikan graf $K_{2,3}$ dan $K_{3,3}$ di bawah ini.



Gambar 3.27. Graf $K_{2,3} \cup K_{3,3}$

Berdasarkan graf $K_{2,3}$ dan $K_{3,3}$, maka polinomial siklus terinduksinya sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 c(K_{2,2} \cup K_{3,3}; x) &= \binom{2}{2} \cdot \binom{3}{2} x^4 + \binom{3}{2} \cdot \binom{3}{2} x^4 \\
 c(K_{2,2} \cup K_{3,3}; x) &= \left(\frac{2!}{0! \times 2!} \cdot \frac{3 \times 2!}{1! \times 2!} + \frac{3 \times 2!}{1! \times 2!} \cdot \frac{3 \times 2!}{1! \times 2!} \right) x^4 \\
 c(K_{2,2} \cup K_{3,3}; x) &= (3 + 9) x^4 \\
 c(K_{2,2} \cup K_{3,3}; x) &= 12x^4
 \end{aligned}$$

Artinya terdapat 12 siklus terinduksi dengan panjang jalan 4 dari hasil operasi gabungan graf $K_{2,3}$ dan $K_{3,3}$.

3) Graf $K_{m,n}$ dan $K_{p,q}$

Akan ditunjukkan bahwa polinomial siklus terinduksi pada graf hasil operasi gabungan dari graf bipartit lengkap $K_{m,n}$

dan $K_{p,q}$ adalah

$$\begin{aligned}
 c(K_{m,n} \cup K_{p,q}; x) &= c(K_{m,n}; x) + c(K_{p,q}; x) \\
 &= \binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2} x^4 + \binom{p}{2} \cdot \binom{q}{2} x^4 \quad (3.6) \\
 &= \left[\binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2} + \binom{p}{2} \cdot \binom{q}{2} \right] x^4
 \end{aligned}$$

Graf $K_{m,n}$ dan $K_{p,q}$ adalah dua graf bipartit lengkap dengan m, n dan p, q banyaknya titik. Sesuai definisi pada persamaan 3.3, untuk mencari polinomial sikel terinduksi pada graf bipartit lengkap pada graf $K_{m,n} = \binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2} x^4$, artinya hal tersebut analog untuk mencari polinomial pada graf $K_{p,q} = \binom{p}{2} \cdot \binom{q}{2} x^4$.

Misal titik $V_1(K_{m,n}) = \{u'_1, u'_2, u'_3, \dots, u'_m, v'_1, v'_2, v'_3, \dots, v'_n\}$, sedangkan $V_2(K_{p,q}) = \{x''_1, x''_2, x''_3, \dots, x''_p, y''_1, y''_2, y''_3, \dots, y''_q\}$.

Graf $K_{m,n}$ dioperasikan gabungan dengan $K_{p,q}$ sehingga tidak ada penambahan sisi yang menghubungkan antar kedua graf tersebut, hanya ada graf sikel terinduksi pada masing-masing graf bipartit. Jelas, titik $V_1(K_{m,n}) = \{u'_1, u'_2, u'_3, \dots, u'_m, v'_1, v'_2, v'_3, \dots, v'_n\}$ hanya ada di $K_{m,n}$ dan tidak bertetangga dengan $V_2(K_{p,q}) = \{x''_1, x''_2, x''_3, \dots, x''_p, y''_1, y''_2, y''_3, \dots, y''_q\}$, serta sebaliknya.

Jadi, polinomial sikel terinduksi dari dua graf bipartit lengkap dengan menjumlahkan polinomial sikel terinduksi

pada graf $K_{m,n}$ dan $K_{p,q}$.

$$\begin{aligned}
 c(K_{m,n} \cup K_{p,q}; x) &= c(K_{m,n}; x) + c(K_{p,q}; x) \\
 &= \binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2} x^4 + \binom{p}{2} \cdot \binom{q}{2} x^4 \\
 &= \left[\binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2} + \binom{p}{2} \cdot \binom{q}{2} \right] x^4
 \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan yang telah diperoleh, untuk menghitung polinomial sikel terinduksi hasil operasi gabungan dari dua graf sederhana dengan menjumlahkan polinomial sikel terinduksi dari kedua graf tersebut berdasarkan jenis grafnya, karena pada hasil operasi gabungan graf tidak merubah struktur grafnya.

Proposisi 3.2.1 *Misalkan dipunyai graf G_1 dan G_2 dengan polinomial sikel terinduksi berturut-turut $c(G_1; x)$ dan $c(G_2; x)$, maka polinomial sikel terinduksinya adalah*

$$c((G_1 \cup G_2); x) = c(G_1; x) + c(G_2; x)$$

Bukti.

Misal dipunyai sebarang graf sederhana yaitu G_1 dan G_2 dengan polinomial sikel terinduksinya berturut-turut adalah $c(G_1; x)$ dan $c(G_2; x)$ dengan $V(G_1) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_m\}$ dan titik $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$. Dari graf G_1 dan G_2 dioperasikan gabungan, artinya titik $V(G_1) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_m\}$ tidak terhubung dengan $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ sehingga tidak mungkin ada penambahan sisi dari kedua graf tersebut.

Maka dari itu, sikel terinduksi pada G_1 dan sikel terinduksi

pada G_2 tidak berubah sehingga banyaknya polinomial sikel terinduksi hasil dari operasi gabungan graf G_1 dan G_2 dengan menjumlahkan polinomial pada G_1 dan G_2 .

Jadi, polinomial sikel terinduksi hasil operasi gabungan G_1 dan G_2 adalah

$$c((G_1 \cup G_2); x) = c(G_1; x) + c(G_2; x) \quad (3.7)$$

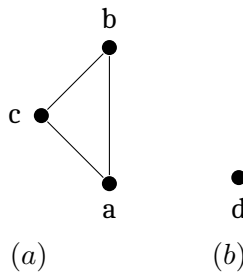


2. Join

Pada bagian ini akan dieksplorasi lebih jauh mengenai polinomial sikel terinduksi hasil operasi graf C_m dan N_n .

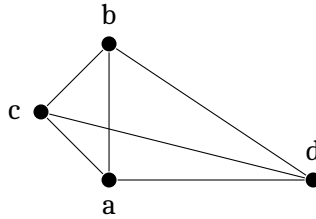
a. Graf C_3 dan N_1

Perhatikan graf C_3 dan N_1 di bawah ini.



Gambar 3.28. (a) Graf C_3 ; (b) Graf N_1

Hasil operasi join dari graf $C_3 + N_1$ adalah sebagai berikut.

Gambar 3.29. Graf $C_3 + N_1$

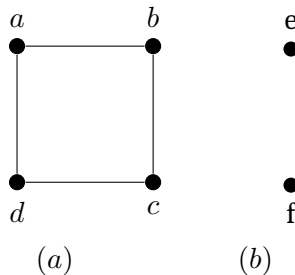
Berdasarkan hasil operasi join dari graf $C_3 + N_1$ menghasilkan empat sikel terinduksi dengan panjang jalan 3.

$$c(C_3 + N_1; x) = 3x^3 + x^3$$

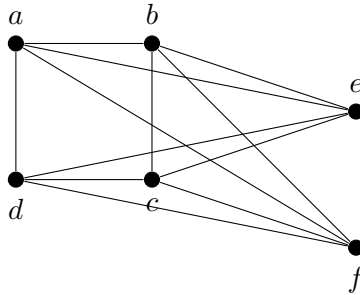
$$c(C_3 + N_1; x) = 4x^3$$

b. Graf C_4 dengan N_2

Perhatikan graf C_4 dan N_2 di bawah ini.

Gambar 3.30. (a) Graf C_4 ; (b) Graf N_2

Hasil operasi join dari graf $C_4 + N_2$ adalah sebagai berikut.



Gambar 3.31. Graf $C_4 + N_2$

Berdasarkan hasil operasi join dari graf $C_4 + N_2$ menghasilkan delapan siklus terinduksi dengan panjang jalan 3 dan satu siklus terinduksi dengan panjang jalan 4.

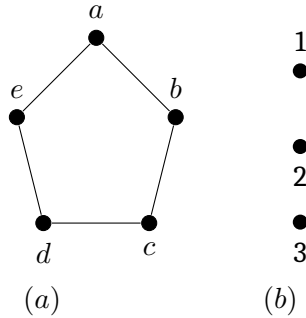
$$c(C_4 + N_2; x) = 4x^3 + 4x^3 + x^4$$

$$c(C_4 + N_2; x) = 4 \times 2x^3 + x^4$$

$$c(C_4 + N_2; x) = 8x^3 + x^4$$

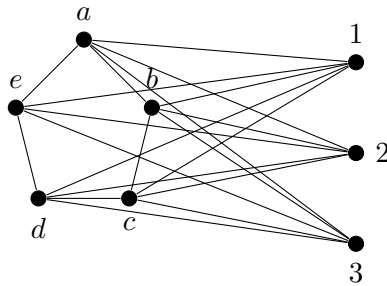
c. Graf C_5 dengan N_3

Perhatikan graf C_5 dan N_3 di bawah ini.



Gambar 3.32. (a) Graf C_5 ; (b) Graf N_3

Hasil operasi join dari graf $C_5 + N_3$ adalah sebagai berikut.



Gambar 3.33. Graf $C_5 + N_3$

Berdasarkan hasil operasi join dari graf $C_5 + N_3$ menghasilkan delapan siklus terinduksi dengan panjang jalan 3 dan satu siklus terinduksi dengan panjang jalan 4.

$$c(C_4 + N_2; x) = 5x^3 + 5x^3 + 5x^3 + x^5$$

$$c(C_4 + N_2; x) = 5 \times 3x^3 + x^5$$

$$c(C_4 + N_2; x) = 15x^3 + x^5$$

d. Graf C_m dengan Graf N_n

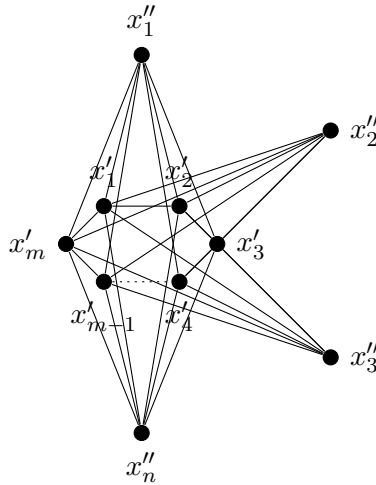
Proposisi 3.2.2 *Polinomial siklus terinduksi hasil operasi join pada graf lingkaran dengan graf kosong adalah*

$$c(C_m + N_n; x) = (mn)x^3 + x^m \quad (3.8)$$

Bukti. Graf C_m adalah graf lingkaran dengan m banyaknya titik dengan polinomial siklus terinduksinya adalah x^m . Misal titik dari graf $V(C_m) = \{x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_m\}$.

Graf N_n adalah graf kosong dengan n banyaknya titik, misal titik pada graf $V(N_n) = \{x''_1, x''_2, x''_3, \dots, x''_n\}$.

Graf C_m dioperasikan join dengan N_n artinya semua titik pada C_m bertetangga dengan setiap titik pada N_n , yaitu:



Gambar 3.34. Graf $C_m + N_n$

Hal tersebut berakibat setiap titik pada C_m bertetangga dengan titik pada N_n dapat dinyatakan dengan x'_i

bertetangga dengan x_j'' untuk $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$.

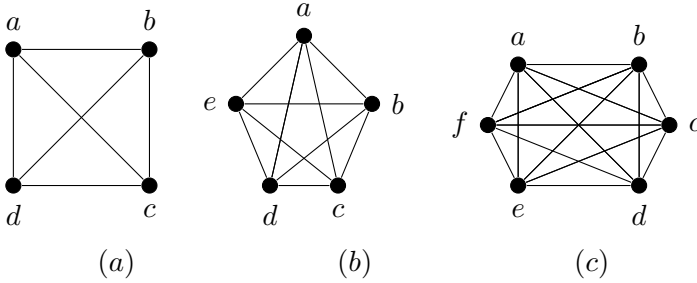
Dengan demikian, terbentuk siklus terinduksi dengan panjang jalan 3 dari operasi join graf C_m dan N_n , sehingga diperoleh siklus terinduksi $(x_i', x'_{(i+1)}, x_j'')$ untuk $1 \leq i \leq (m-1)$ dan $1 \leq j \leq n$ sebanyak $(m-1)n$ siklus serta ketika $i = m$ yaitu (x_m', x_1', x_j'') untuk $1 \leq j \leq n$ sebanyak n siklus terinduksi. Oleh karena itu, banyaknya siklus terinduksi dengan panjang jalan 3 hasil operasi join C_m dan N_n adalah $c_3(C_m + N_n) = (m-1)n + n = mn$ siklus. Selain itu juga terdapat tepat satu siklus terinduksi dengan panjang jalan m .

Jadi, banyaknya polinomial siklus terinduksi hasil dari operasi join pada C_m dan N_n yaitu terdapat mn siklus terinduksi dengan panjang jalan 3 dan ada tepat satu siklus terinduksi dengan panjang jalan m . Oleh karena itu, banyaknya polinomial siklus terinduksi hasil operasi join dari graf C_m dan N_n adalah $c(C_m + N_n; x) = (mn)x^3 + x^m$. ■

3. Komplemen

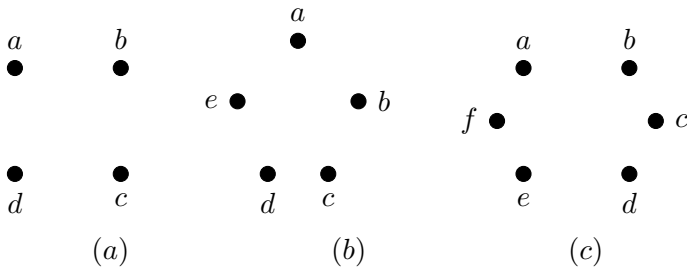
Berikut ini merupakan penerapan operasi komplemen pada graf lengkap.

Perhatikan tiga graf lengkap di bawah ini.



Gambar 3.35. (a) Graf K_4 ; (b) Graf K_5 ; (c) Graf K_6

Berdasarkan pada gambar 3.36 graf lengkap, untuk hasil operasi komplementnya adalah sebagai berikut.



Gambar 3.36. (a) Graf $\bar{K}_4$; (b) Graf $\bar{K}_5$; (c) Graf $\bar{K}_6$

Akan ditunjukkan bahwa polinomial siklus terinduksi hasil operasi komplement pada graf lengkap K_m adalah

$$c(\bar{K}_m; x) = 0 \quad (3.9)$$

Graf K_m adalah graf lengkap dengan m titik yang setiap titiknya saling bertetangga. Misal $V(K_m) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\}$, artinya pada titik $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\}$ saling bertetangga yaitu titik v_i bertetangga dengan v_j untuk $1 \leq i, j \leq m$.

Operasi komplement pada graf mengakibatkan setiap titik

melepas ketetanggaanya, sehingga setiap pasangan titik pada graf K_m tidak saling bertetangga. Hal tersebut berakibat setiap titik v_i tidak bertetangga dengan v_j , untuk $1 \leq i, j \leq m$.

Oleh karena itu, graf K_m menjadi graf kosong dengan m banyaknya titik, karena semua titik melepas sisinya sehingga tidak adanya siklus terinduksinya. Jadi, polinomial siklus terinduksi hasil operasi komplemen pada graf K_m adalah

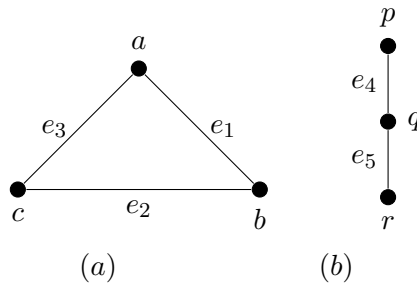
$$c(\bar{K}_m; x) = 0 \quad (3.10)$$

4. Produk

Berikut ini merupakan hasil operasi produk pada graf lingkaran dan graf lintasan.

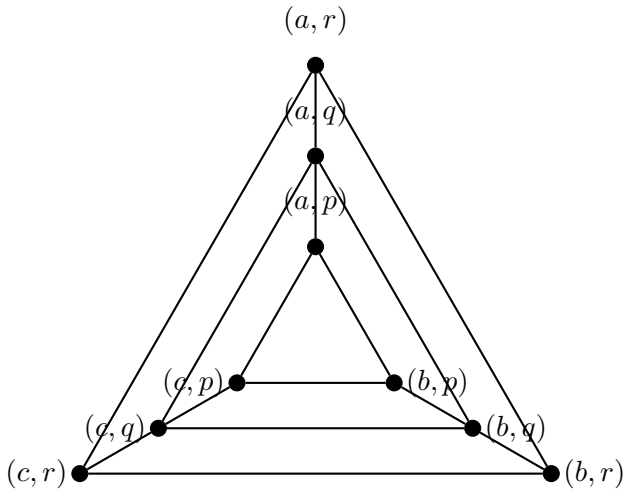
a. Graf C_3 dan P_3

Perhatikan graf C_3 dan P_3 berikut.



Gambar 3.37. (a) Graf C_3 ; (b) Graf P_3

Hasil operasi dari graf $C_3 \times P_3$ adalah seperti graf di bawah ini.



Gambar 3.38. Graf $C_3 \times P_3$

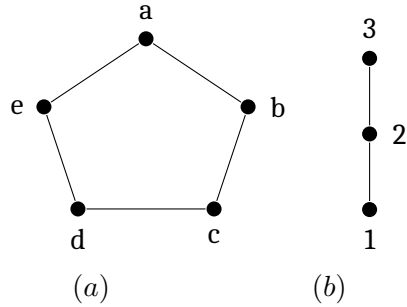
Berdasarkan hasil operasi produk graf $C_3 \times P_3$ menghasilkan tiga siklus terinduksi dengan panjang jalan 3 dan enam siklus terinduksi dengan panjang jalan 4.

$$c(C_3 \times P_3; x) = 3x^3 + 3 \times 2x^4$$

$$c(C_3 \times P_3; x) = 3x^3 + 6x^4$$

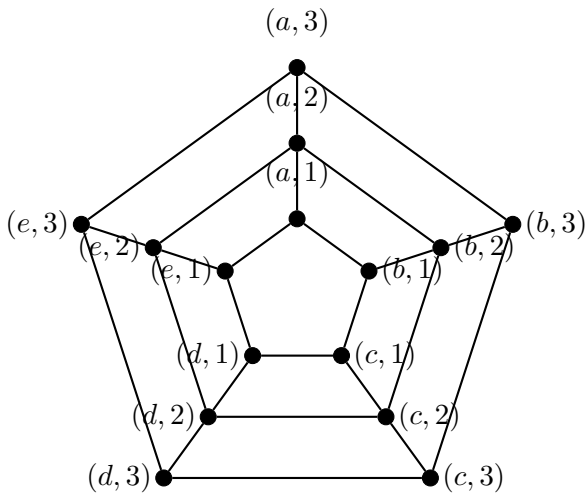
b. Graf C_5 dan P_3

Perhatikan graf C_5 dan P_3 berikut.



Gambar 3.39. (a) Graf C_5 ; (b) Graf P_3

Hasil operasi dari graf $C_5 \times P_3$ adalah seperti graf di bawah ini.



Gambar 3.40. Graf $C_5 \times P_3$

Berdasarkan hasil operasi produk graf $C_5 \times P_3$ menghasilkan tiga siklus terinduksi dengan panjang jalan 5 dan sepuluh siklus

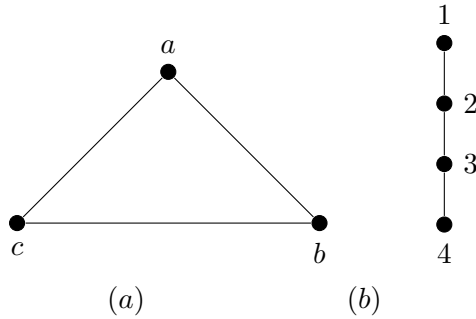
terinduksi dengan panjang jalan 4.

$$c(C_5 \times P_3; x) = 3x^5 + 5 \times 2x^4$$

$$c(C_5 \times P_3; x) = 3x^5 + 10x^4$$

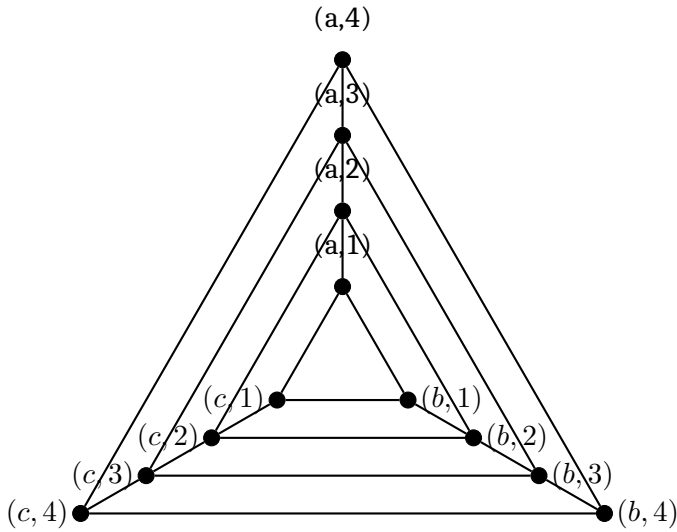
c. Graf C_3 dan P_4

Perhatikan graf C_3 dan P_4 berikut.



Gambar 3.41. (a) Graf C_3 ; (b) Graf P_4

Hasil operasi dari graf $C_3 \times P_4$ adalah seperti graf di bawah ini.

Gambar 3.42. Graf $C_3 \times P_4$

Berdasarkan hasil operasi produk graf $C_3 \times P_4$ menghasilkan empat siklus terinduksi dengan panjang jalan 3 dan sembilan siklus terinduksi dengan panjang jalan 4.

$$c(C_3 \times P_4; x) = 4x^3 + 3 \times 3x^4$$

$$c(C_3 \times P_4; x) = 4x^3 + 9x^4$$

d. Graf C_m dengan P_n

Akan ditunjukkan bahwa polinomial siklus terinduksi hasil operasi produk pada graf lingkaran dengan graf lintasan adalah

$$c(C_m \times P_n; x) = nx^m + m(n-1)x^4 \quad (3.11)$$

Graf C_m adalah graf lingkaran dengan m titik, sedangkan graf P_n adalah graf lintasan dengan n titik.

Misal titik $V_1(C_m) = \{v'_1, v'_2, v'_3, \dots, v'_m\}$, sedangkan titik $V_2(P_n) = \{v''_1, v''_2, v''_3, \dots, v''_n\}$.

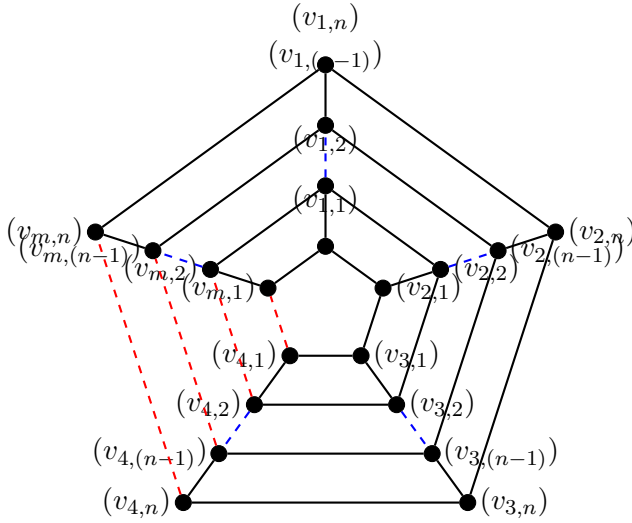
Definisi titik hasil produk dari dua graf:

$$V(C_m \times P_n) = V_1(C_m) \times V_2(P_n)$$

$$V(C_m \times P_n) = (v_{i,j}) = (v'_i, v''_i)$$

$$V(C_m \times P_n) = (v_{1,1}), (v_{1,2}), \dots, (v_{1,n}), (v_{2,1}), \dots, (v_{m-1,1}), \dots, (v_{m,n})$$

Graf C_m dioperasikan produk dengan P_n artinya terdapat C_m sebanyak n rangkap dengan panjang jalan m , yaitu $\{(v_{1,j}), (v_{2,j}), (v_{3,j}), \dots, (v_{m,j})\} \subseteq V(C_m \times P_n)$ untuk $1 \leq j \leq n$.

Gambar 3.43. Graf $C_m \times P_n$

Operasi produk menyebabkan titik-titik pada rangkap ke- v_i bertetangga dengan rangkap ke- v_{i+1} , artinya titik $(v_{i,j})$ bertetangga dengan $(v_{i,j+1})$ untuk $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq (n - 1)$.

Hal tersebut mengakibatkan adanya siklus terinduksi dengan panjang jalan 4 yaitu siklus $(v_{i,j}), (v_{(i+1),j}), (v_{(i+1),(j+1)}), (v_{i,(j+1)})$, untuk $1 \leq i \leq (m - 1)$ dan $1 \leq j \leq (n - 1)$ sebanyak $(m - 1)(n - 1)$ siklus dan kasus khusus ketika $i = m$ yaitu $(v_{m,j}), (v_{1,j}), (v_{1,(j+1)}), (v_{m,(j+1)})$, untuk $1 \leq j \leq n - 1$ sebanyak $n - 1$ siklus. Oleh karena itu, banyaknya siklus terinduksi dengan panjang jalan 4 hasil operasi produk pada graf C_m dan P_n adalah $C_m \times P_n = (m - 1)(n - 1) + (n - 1) = m(n - 1)$ siklus. Selain

itu, juga terdapat siklus terinduksi dengan panjang jalan m sebanyak n siklus.

Banyaknya polinomial siklus terinduksi hasil operasi produk pada graf C_m dan N_n yaitu terdapat $m(n-1)$ siklus terinduksi dengan panjang jalan 4 dan terdapat n siklus terinduksi dengan panjang jalan m .

Jadi, polinomial siklus terinduksi hasil operasi produk dari graf C_m dan P_n adalah

$$c(C_m \times P_n; x) = nx^m + m(n-1)x^4$$

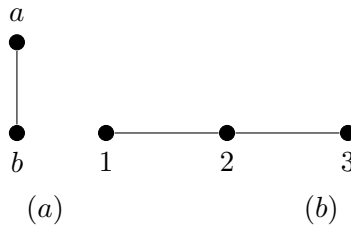
5. Komposisi

Berikut ini merupakan hasil operasi komposisi pada dua graf lintasan P_n dengan P_m dan P_m dengan P_n untuk $n \leq m$ adalah

a. Graf P_n dan P_m

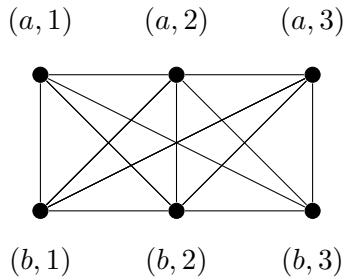
1) Graf P_2 dan P_3

Perhatikan graf lintasan P_2 dan P_3 berikut ini.



Gambar 3.44. (a) Graf P_2 ; (b) Graf P_3

Hasil operasi komposisi dari graf P_2 dan P_3 adalah sebagai berikut.

Gambar 3.45. Graf $P_2 [P_3]$

Berdasarkan hasil operasi komposisi dari graf P_2 dan P_3 menghasilkan 12 siklus terinduksi dengan panjang jalan 3.

$$c(P_2 [P_3]; x) = 3 \times 2 \times 2 \times 1x^3$$

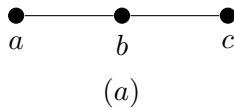
$$c(P_2 [P_3]; x) = 2 \times 3 \times 1 \times 2x^3$$

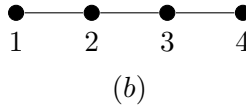
$$c(P_2 [P_3]; x) = 6 \times 2x^3$$

$$c(P_2 [P_3]; x) = 12x^3$$

2) Graf P_3 dan P_4

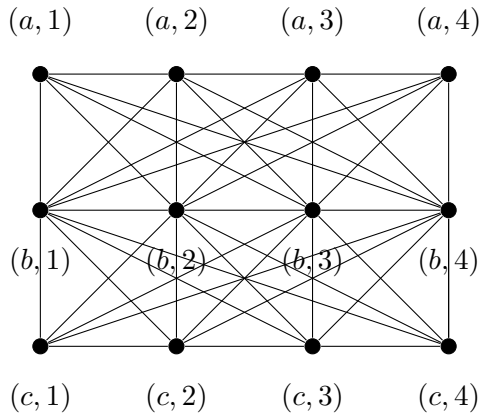
Perhatikan graf lintasan P_3 dan P_4 berikut ini.





Gambar 3.46. (a) Graf P_3 ; (b) Graf P_4

Hasil operasi komposisi dari graf P_3 dan P_4 adalah sebagai berikut.



Gambar 3.47. Graf $P_3 [P_4]$

Berdasarkan hasil operasi komposisi dari graf P_3 dan P_4 menghasilkan 40 siklus terinduksi dengan panjang jalan 3.

$$c(P_3 [P_4] ; x) = 4 \times 3 \times 2 \times 2x^3$$

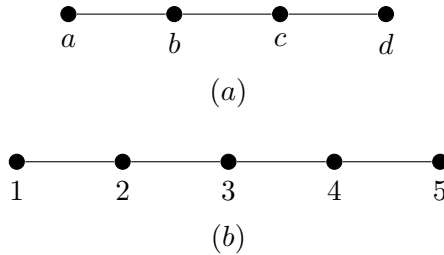
$$c(P_3 [P_4] ; x) = 2 \times 4 \times 2 \times 3x^3$$

$$c(P_3 [P_4] ; x) = 8 \times 6x^3$$

$$c(P_3 [P_4] ; x) = 48x^3$$

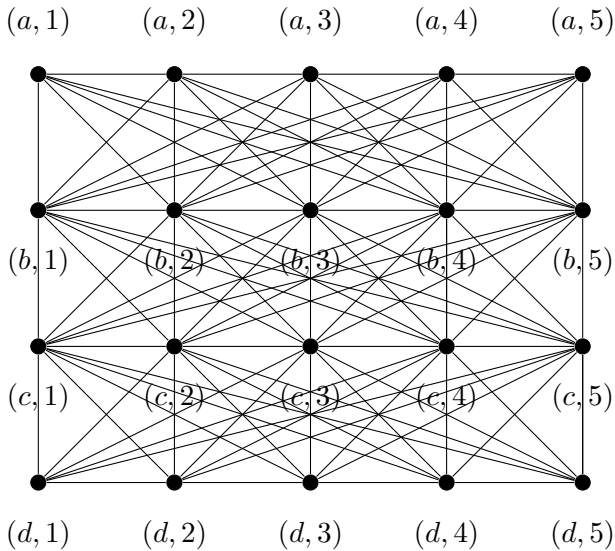
3) Graf P_4 dan P_5

Perhatikan graf lintasan P_4 dan P_5 berikut ini.



Gambar 3.48. (a) Graf P_4 ; (b) Graf P_5

Hasil operasi komposisi dari graf P_4 dan P_5 adalah sebagai berikut.



Gambar 3.49. Graf $P_4[P_5]$

Berdasarkan hasil operasi komposisi dari graf P_4 dan P_5 menghasilkan 120 siklus terinduksi dengan panjang jalan 3.

$$c(P_4 [P_5]; x) = 5 \times 4 \times 2 \times 3x^3$$

$$c(P_4 [P_5]; x) = 2 \times 5 \times 3 \times 4x^3$$

$$c(P_4 [P_5]; x) = 10 \times 12x^3$$

$$c(P_4 [P_5]; x) = 120x^3$$

4) Graf P_n dan P_m

Akan ditunjukkan bahwa polinomial siklus terinduksi hasil operasi komposisi pada dua graf lintasan yaitu graf P_n dan P_m dengan $n \leq m$ adalah

$$c(P_n [P_m]; x) = 2m(n-1)(m-1)x^3 \quad (3.12)$$

Graf P_n adalah graf lintasan dengan n titik, sedangkan P_m adalah graf lintasan dengan m titik.

Misal titik $V(P_n) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\}$, sedangkan titik $V(P_m) = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_{m-1}, b_m\}$.

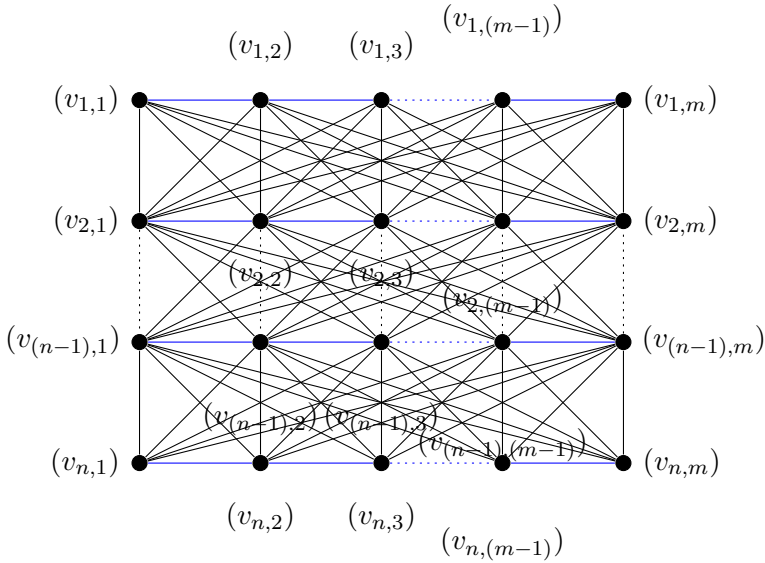
Definisi titik hasil operasi komposisi pada graf P_n dan P_m adalah

$$V(P_n [P_m]) = V(P_n) \times V(P_m)$$

$$V(P_n [P_m]) = v_{i,j} = (a_i, b_j)$$

$$V(P_n [P_m]) = \{(v_{1,1}), (v_{1,2}), \dots, (v_{1,m}), (v_{2,1}), \dots, (v_{n,m})\}$$

Untuk setiap $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in V(P_n [P_m])$. Titik (a_1, b_1) bertetangga dengan (a_2, b_2) apabila (a_1) bertetangga dengan (a_2) atau $(a_1 = a_2)$ dan b_1 bertetangga dengan b_2 .



Gambar 3.50. Graf $P_n [P_m]$

Diperhatikan bahwa a_i bertetangga dengan $a_{i+1} \in P_n$, artinya titik $(v_{i,j})$ bertetangga dengan titik $(v_{(i+1),k})$ untuk $1 \leq i \leq (n-1)$ dan $1 \leq j, k \leq m$. Selain itu, hal ini juga mengakibatkan $a_i = a_{i+1}$ dan b_i bertetangga dengan b_{i+1} di P_m , artinya titik $(v_{i,j})$ bertetangga dengan titik $(v_{i,(j+1)})$ untuk $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq (m-1)$.

Definisi himpunan sisi graf P_n dioperasikan komposisi dengan P_m adalah

$$E(P_n [P_m]) = \{(v_{i,j}), (v_{(i+1),k})\} \cup \{(v_{i,j}), (v_{i,(j+1)})\}$$

Berdasarkan hasil operasi komposisi graf P_n dan P_m , maka

terbentuk siklus terinduksi dengan panjang jalan 3 yaitu siklus $(v_{i,j}), (v_{i,(j+1)}), (v_{(i+1),k})$ untuk $1 \leq i \leq (n-1)$ dan $1 \leq j \leq (m-1)$ serta siklus $(v_{i,j}), (v_{i,(j+1)}), (v_{(i-1),j})$, untuk $2 \leq i \leq n$ sebanyak $(n-1)$ dan $1 \leq j \leq (m-1)$, serta $1 \leq k \leq m$.

Oleh karena itu, banyaknya siklus terinduksi yang terbentuk oleh hasil komposisi oleh graf P_n dan P_m adalah sebanyak $2m(n-1)(m-1)$ dengan panjang jalan 3.

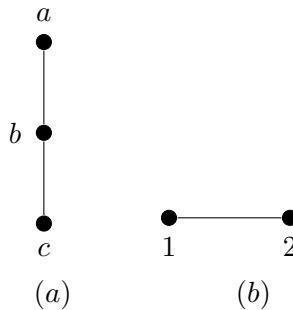
Jadi, polinomial siklus terinduksi hasil operasi komposisi pada graf P_n dan P_m dengan $n \leq m$ adalah

$$c(P_n[P_m]; x) = 2m(n-1)(m-1)x^3$$

b. Graf P_m dan P_n

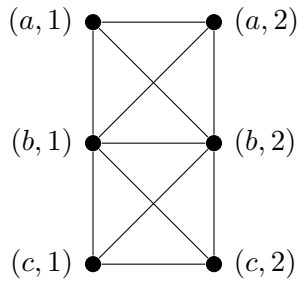
1). Graf P_3 dan P_2

Perhatikan graf lintasan P_3 dan P_2 berikut ini.



Gambar 3.51. (a) Graf P_3 ; (b) Graf P_2

Hasil operasi komposisi dari graf P_3 dan P_2 adalah sebagai berikut.

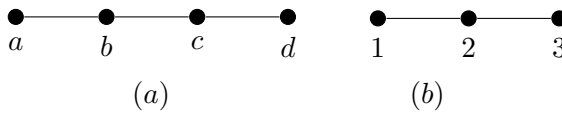
Gambar 3.52. Graf $P_3 [P_2]$

Berdasarkan hasil operasi komposisi dari graf P_3 dan P_2 menghasilkan 8 siklus terinduksi dengan panjang jalan 3.

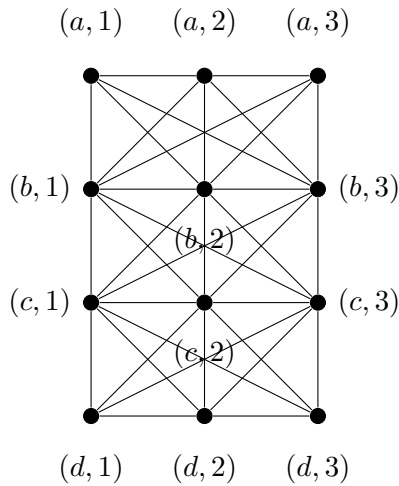
$$\begin{aligned}
 c(P_3 [P_2]; x) &= 2 \times 1 \times 2 \times 2x^3 \\
 &= 2 \times 2 \times 2 \times 1x^3 \\
 &= 8x^3
 \end{aligned}$$

2) Graf P_4 dan P_3

Perhatikan graf lintasan P_4 dan P_3 berikut ini.

Gambar 3.53. (a) Graf P_4 ; (b) Graf P_3

Hasil operasi komposisi dari graf P_4 dan P_3 adalah sebagai berikut.

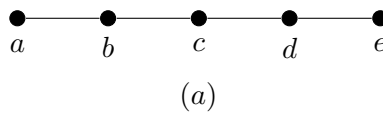
Gambar 3.54. Graf $P_4[P_3]$

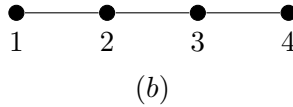
Berdasarkan hasil operasi komposisi dari graf P_4 dan P_3 menghasilkan 36 siklus terinduksi dengan panjang jalan 3.

$$\begin{aligned}
 c(P_4[P_3]; x) &= 3 \times 2 \times 2 \times 3x^3 \\
 &= 2 \times 3 \times 3 \times 2x^3 \\
 &= 36x^3
 \end{aligned}$$

3) Graf P_5 dan P_4

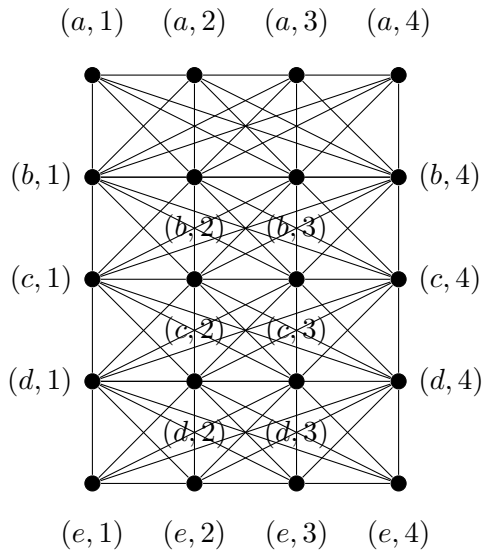
Perhatikan graf lintasan P_5 dan P_4 berikut ini.





Gambar 3.55. (a) Graf P_5 ; (b) Graf P_4

Hasil operasi komposisi dari graf P_5 dan P_4 adalah sebagai berikut.



Gambar 3.56. Graf $P_5 [P_4]$

Berdasarkan hasil operasi komposisi dari graf P_5 dan P_4

menghasilkan 96 sikel terinduksi dengan panjang jalan 3.

$$\begin{aligned} c(P_5[P_4]; x) &= 4 \times 3 \times 2 \times 4x^3 \\ &= 2 \times 4 \times 4 \times 3x^3 \\ &= 96x^3 \end{aligned}$$

4) Graf P_m dan P_n

Akan ditunjukkan bahwa polinomial sikel terinduksi hasil operasi komposisi pada dua graf lintasan yaitu graf P_m dan P_n untuk $n \leq m$ adalah

$$c(P_m[P_n]; x) = 2n(m-1)(n-1)x^3 \quad (3.13)$$

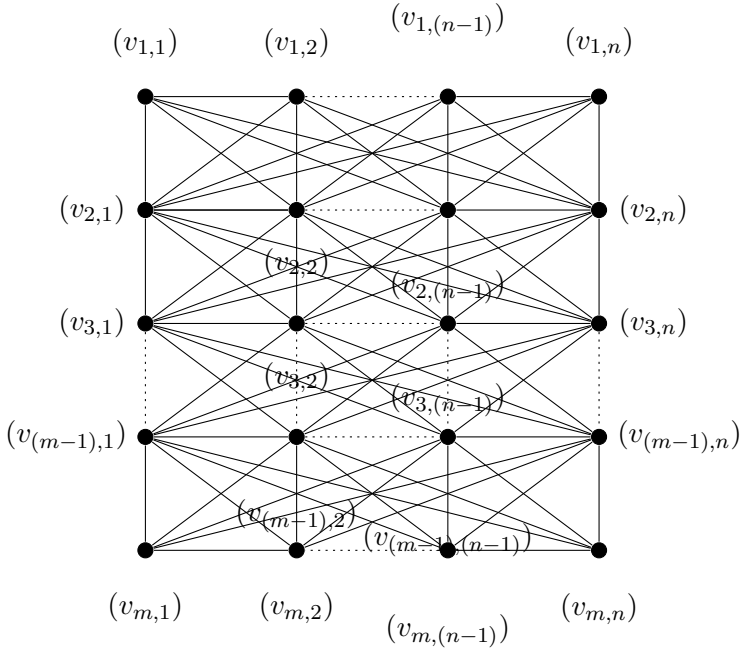
Graf P_m adalah graf lintasan dengan m titik, sedangkan P_n adalah graf lintasan dengan n titik.

Misal titik $V(P_m) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{m-1}, a_m\}$, sedangkan titik $V(P_n) = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n\}$.

Definisi titik hasil operasi komposisi pada graf P_m dan P_n adalah

$$\begin{aligned} V(P_m[P_n]) &= V(P_m \times P_n) \\ V(P_m[P_n]) &= v_{i,j} = (a_i, b_j) \\ V(P_m[P_n]) &= \{(v_{1,1}), (v_{1,2}), \dots, (v_{1,n}), (v_{2,1}), \dots, (v_{m,n})\}. \end{aligned}$$

Untuk setiap $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in V(P_m[P_n])$. Titik (a_1, b_1) bertetangga dengan (a_2, b_2) apabila $(a_1$ bertetangga dengan $a_2)$ atau $(a_1 = a_2$ dan b_1 bertetangga dengan $b_2)$.



Gambar 3.57. Graf $P_m [P_n]$

Diperhatikan bahwa a_i bertetangga dengan $a_{i+1} \in P_m$, artinya titik $(v_{i,j})$ bertetangga dengan $(v_{(i+1),k})$ untuk $1 \leq i \leq (m-1)$ dan $1 \leq j, k \leq n$. Selain itu, hal ini menyebabkan $a_i = a_{i+1}$ dan b_i bertetangga dengan b_{i+1} di P_n artinya $(v_{i,j})$ bertetangga dengan $(v_{i,(j+1)})$ untuk $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq (n-1)$.

Definisi himpunan sisi pada graf P_m dioperasikan komposisi dengan P_n adalah

$$E(P_m [P_n]) = \{(v_{i,j}), (v_{(i+1),k})\} \cup \{(v_{i,j}), (v_{(i+1),k})\}$$

Berdasarkan hasil operasi komposisi graf P_m dan P_n maka terbentuk siklus terinduksi dengan panjang jalan 3 yaitu siklus $(v_{i,j}), (v_{i,(j+1)}), (v_{(i+1),k})$ untuk $1 \leq i \leq (m-1)$ dan $1 \leq j \leq (n-1)$ serta siklus $(v_{i,j}), (v_{i,(j+1)}), (v_{(i-1),k})$, untuk $2 \leq i \leq m$ sebanyak $(m-1)$ dan $1 \leq j \leq (n-1)$, serta $1 \leq k \leq n$.

Oleh karena itu, banyaknya siklus terinduksi yang terbentuk oleh hasil komposisi oleh graf P_m dan P_n adalah sebanyak $2n(m-1)(n-1)$ dengan panjang jalan 3.

Jadi, polinomial siklus terinduksi hasil operasi komposisi pada graf P_m dan P_n dengan $n \leq m$ adalah

$$c(P_m [P_n]; x) = 2n(m-1)(n-1)x^3$$

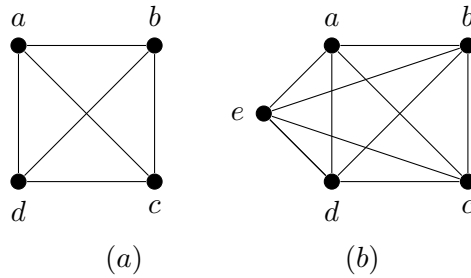
6. Ring sum

Berikut ini merupakan hasil operasi ring sum pada graf lengkap dan graf lingkaran.

a. Graf Lengkap dengan Selisih Satu Titik

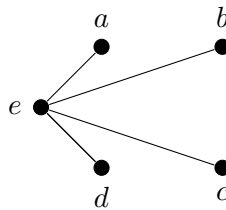
1) Graf K_4 dan K_5

Perhatikan graf lengkap K_4 dan K_5 di bawah ini.



Gambar 3.58. (a) Graf K_4 ; (b) Graf K_5

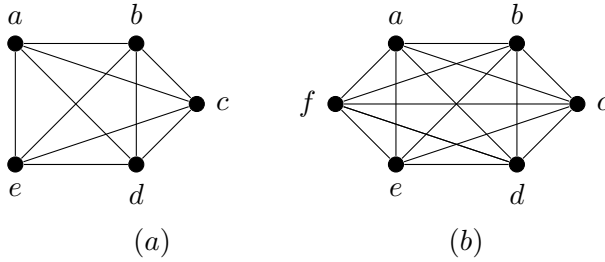
Hasil operasi ring sum dari graf K_4 dan K_5 adalah



Gambar 3.59. Graf $K_4 \oplus K_5$

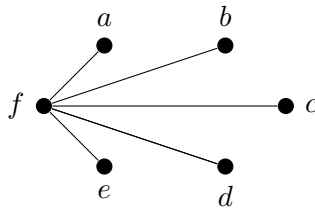
2) Graf K_5 dan K_6

Perhatikan graf lengkap K_5 dan K_6 berikut ini.



Gambar 3.60. (a) Graf K_5 ; (b) Graf K_6

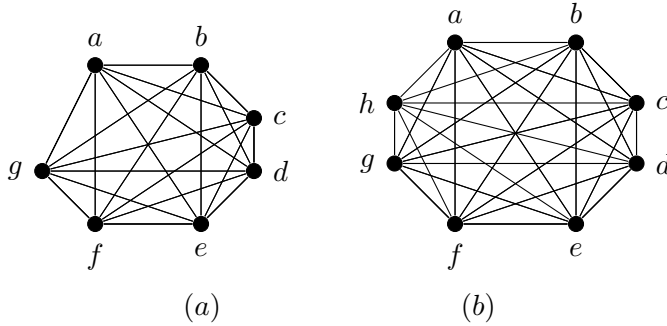
Hasil operasi ringsum dari graf K_5 dan K_6 menghasilkan graf sebagai berikut.



Gambar 3.61. Graf $K_5 \oplus K_6$

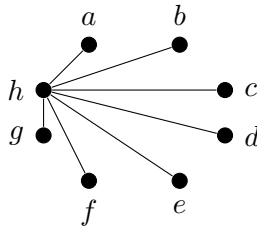
3) Graf K_7 dan K_8

Perhatikan graf lengkap K_7 dan K_8 berikut ini.



Gambar 3.62. (a) Graf K_7 ; (b) Graf K_8

Hasil operasi ring sum dari graf K_7 dan K_8 menghasilkan graf sebagai berikut.



Gambar 3.63. Graf $K_7 \oplus K_8$

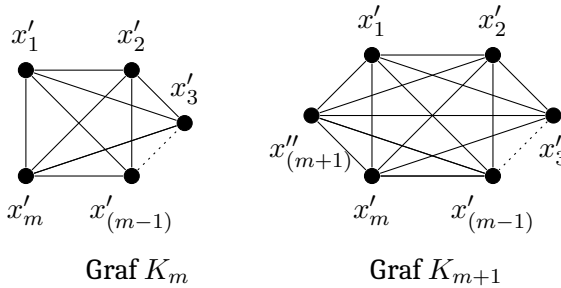
4) Graf K_m dan K_{m+1}

Akan ditunjukkan bahwa hasil dari operasi ring sum pada dua graf lengkap dengan selisih titiknya satu menghasilkan graf yang tidak memiliki siklus, sehingga tidak ada polinomial siklus terinduksinya.

$$c(K_m \oplus K_{m+1}; x) = 0 \quad (3.14)$$

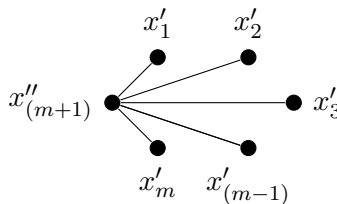
Graf K_m adalah graf lengkap yang terdiri dari m titik dan setiap pasangan titiknya bertetangga, sedangkan graf K_{m+1} adalah graf lengkap yang terdiri dari $m + 1$ titik dan setiap pasangan titiknya bertetangga.

Misalkan $V(K_m) = \{x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_m\}$, artinya semua titik tersebut bertetangga pada K_m dan misalkan $V(K_{m+1}) = \{x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_m, x''_{m+1}\}$, artinya semua titik tersebut bertetangga pada K_{m+1} .



Gambar 3.64. (a) Graf K_m ; (b) Graf K_{m+1}

Graf K_m dioperasikan ring sum dengan K_{m+1} , maka titiknya adalah $V(K_m \oplus K_{m+1}) = V(K_m) \cup V(K_{m+1}) = \{x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_m, x''_{(m+1)}\}$.



Gambar 3.65. $K_m \oplus K_{m+1}$

Untuk himpunan sisinya adalah $E(K_m \oplus K_{m+1}) = (E(K_m) \cup E(K_{m+1})) - (E(K_m) \cap E(K_{m+1}))$, karena $K_m \subseteq K_{m+1}$ sehingga terdapat tepat satu titik yang berbeda yaitu x''_{m+1} dan hanya ada sisi-sisi yang menghubungkan $x''_{(m+1)}$ dengan titik $\{x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_m\}$ sebanyak m sisi, sehingga tidak ada siklus terinduksi yang dibentuk.

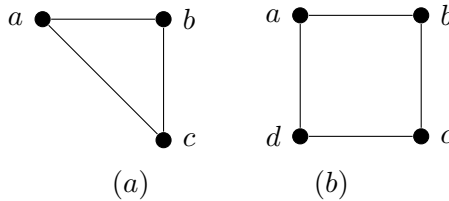
Oleh karena itu, hasil dari operasi ring sum pada K_m dan K_{m+1} menghasilkan graf yang tidak memiliki siklus, sehingga tidak ada polinomial siklus terinduksinya.

$$c(K_m \oplus K_{m+1}; x) = 0$$

b. Graf Lingkaran dengan Selisih Satu Titik

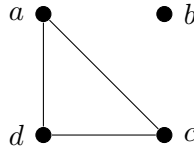
1) Graf C_3 dan C_4

Perhatikan graf C_3 dan C_4 di bawah ini.



Gambar 3.66. (a) Graf C_3 ; (b) Graf C_4

Hasil operasi ring sum dari graf C_3 dan C_4 menghasilkan graf sebagai berikut.

Gambar 3.67. Graf $C_3 \oplus C_4$

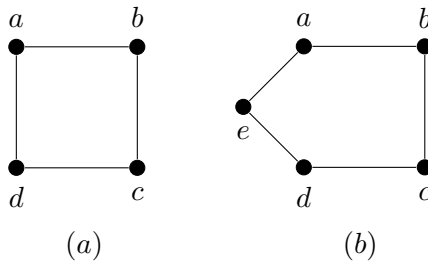
Berdasarkan hasil operasi ring sum dari graf C_3 dan C_4 menghasilkan satu siklus terinduksi dengan panjang jalan 3.

$$c(C_3 \oplus C_4; x) = 1x^3$$

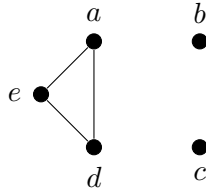
$$c(C_3 \oplus C_4; x) = x^3$$

2) Graf C_4 dan C_5

Perhatikan graf C_4 dan C_5 di bawah ini.

Gambar 3.68. (a) Graf C_4 ; (b) Graf C_5

Hasil operasi ring sum dari graf C_4 dan C_5 menghasilkan graf sebagai berikut.

Gambar 3.69. Graf $C_4 \oplus C_5$

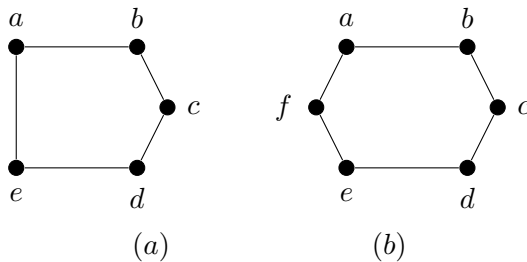
Berdasarkan hasil operasi ring sum dari graf C_4 dan C_5 menghasilkan satu siklus terinduksi dengan panjang jalan 3.

$$c(C_4 \oplus C_5; x) = 1x^3$$

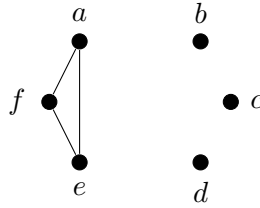
$$c(C_4 \oplus C_5; x) = x^3$$

3) Graf C_5 dan C_6

Perhatikan graf C_5 dan C_6 di bawah ini.

Gambar 3.70. (a) Graf C_5 ; (b) Graf C_6

Hasil operasi ring sum dari graf lingkaran C_5 dan C_6 adalah sebagai berikut.

Gambar 3.71. Graf $C_5 \oplus C_6$

Berdasarkan hasil operasi ring sum dari graf C_5 dan C_6 menghasilkan satu siklus terinduksi dengan panjang jalan 3.

$$c(C_5 \oplus C_6; x) = 1x^3$$

$$c(C_5 \oplus C_6; x) = x^3$$

4) Graf C_m dan C_{m+1}

Akan ditunjukkan bahwa polinomial siklus terinduksi hasil operasi ring sum pada dua graf lingkaran dengan selisih titiknya satu menghasilkan satu graf siklus terinduksi dengan panjang jalan 3, sehingga polinomial siklus terinduksinya adalah

$$c(C_m \oplus C_{m+1}; x) = 1x^3 \quad (3.15)$$

Graf C_m adalah graf lingkaran yang titik awal dan titik akhir sama yang memiliki m banyaknya titik, sedangkan C_{m+1} adalah graf lingkaran yang titik awal dan titik akhir sama yang memiliki $m + 1$ banyaknya titik.

Misal himpunan titik $V(C_m) = \{x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_m\}$ dengan sisi $E(C_m) = \{e'_1, e'_2, e'_3, \dots, e'_m\}$, sedangkan

titik $V(C_{m+1}) = \{x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_m, x''_{m+1}\}$ dengan sisi $E(C_{m+1}) = \{e'_1, e'_2, e'_3, \dots, e''_m, e''_{m+1}\}$.

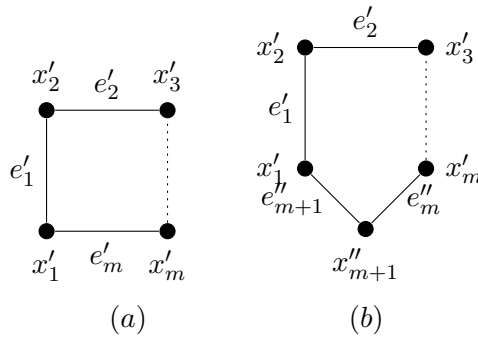
Definisi ketetanggaan pada graf C_m , yaitu x'_i bertetangga dengan x'_{i+1} sebagai sisi e'_i , untuk $1 \leq i \leq (m-1)$ dan x'_m bertetangga dengan x'_1 sebagai sisi e'_m .

Definisi ketetanggaan pada graf C_{m+1} , yaitu x'_i bertetangga dengan x'_{i+1} sebagai sisi e'_i , untuk $1 \leq i \leq m$ dan x''_{m+1} bertetangga dengan x'_1 sebagai sisi e''_{m+1} .

Graf C_m dioperasikan ring sum dengan C_{m+1} , artinya himpunan titiknya adalah $V(C_m \oplus C_{m+1}) = V(C_m) \cup V(C_{m+1})$ dan untuk himpunan sisinya adalah $E(C_m \oplus C_{m+1}) = (E(C_m) \cup E(C_{m+1})) - (E(C_m) \cap E(C_{m+1}))$.

Untuk himpunan titiknya adalah

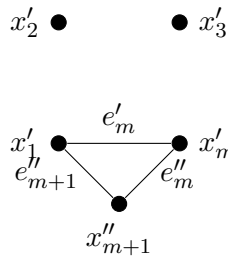
$$\begin{aligned} V(C_m \oplus C_{m+1}) &= V(C_m) \cup V(C_{m+1}) \\ &= \{x'_1, x'_2, \dots, x'_m\} \cup \{x'_1, x'_2, \dots, x'_m, x''_{m+1}\} \\ &= \{x'_1, x'_2, \dots, x'_m, x''_{m+1}\} \end{aligned}$$



Gambar 3.72. (a) Graf C_m ; (b) Graf C_{m+1}

Untuk himpunan sisinya adalah

$$\begin{aligned}
 E(C_m \oplus C_{m+1}) &= (E(C_m) \cup E(C_{m+1})) - (E(C_m) \cap E(C_{m+1})) \\
 &= \{e'_1, e'_2, e'_3, \dots, e'_{m-1}, e'_m, e''_m, e''_{m+1}\} \\
 &\quad - \{e'_1, e'_2, e'_3, \dots, e'_{m-1}\} \\
 &= \{e'_m, e''_m, e''_{m+1}\}
 \end{aligned}$$



Gambar 3.73. Graf $C_m \oplus C_{m+1}$

Hal tersebut berakibat terdapat satu titik yang tidak memiliki ketetanggaan sama yaitu x''_{m+1} yang bertetangga dengan x'_1 dan x'_m , sehingga terdapat tepat tiga sisi yang berada pada salah satu graf bukan dari keduanya yaitu $E(C_m \oplus C_{m+1}) = \{e'_m, e''_m, e''_{m+1}\}$ terbentuk siklus terinduksi dengan panjang jalan 3.

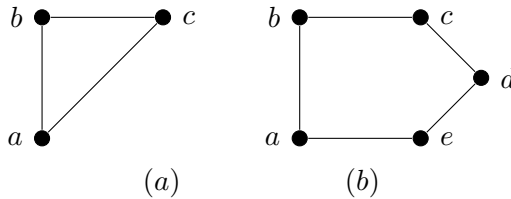
Jadi, polinomial siklus terinduksi pada graf C_m dan C_{m+1} hasil dari operasi ring sum adalah

$$c(C_m \oplus C_{m+1}; x) = x^3$$

c. Graf Lingkaran dengan selisih k titik

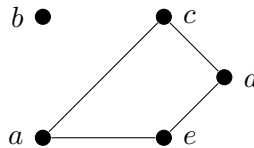
1) Graf C_3 dan C_5

Perhatikan graf C_3 dan C_5 di bawah ini.



Gambar 3.74. (a) Graf C_3 ; (b) Graf C_5

Hasil operasi ring sum dari graf C_3 dan C_5 menghasilkan graf sebagai berikut.



Gambar 3.75. Graf $C_3 \oplus C_5$

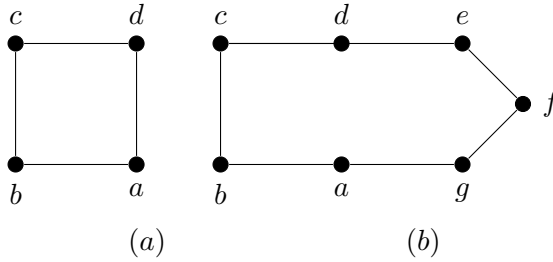
Berdasarkan hasil operasi ring sum dari graf C_3 dan C_5 menghasilkan satu siklus terinduksi dengan panjang jalan 4.

$$c(C_3 \oplus C_5; x) = 1x^{(5-3)+2}$$

$$c(C_3 \oplus C_5; x) = x^4$$

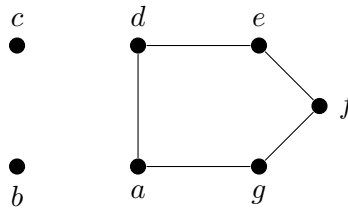
2) Graf C_4 dan C_7

Perhatikan graf C_4 dan C_7 berikut.



Gambar 3.76. (a) Graf C_4 ; (b) Graf C_7

Hasil operasi ring sum dari graf C_4 dan C_7 menghasilkan graf sebagai berikut.



Gambar 3.77. Graf $C_4 \oplus C_7$

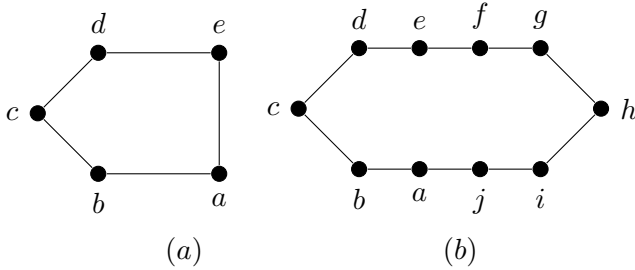
Berdasarkan hasil operasi ring sum dari graf C_4 dan C_7 menghasilkan satu siklus terinduksi dengan panjang jalan 5.

$$c(C_4 \oplus C_7; x) = 1x^{(7-4)+2}$$

$$c(C_4 \oplus C_7; x) = x^5$$

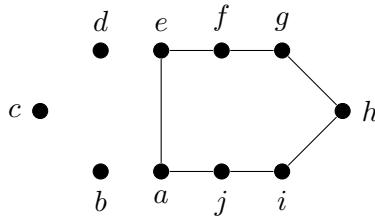
3) Graf C_5 dan C_{10}

Perhatikan graf C_5 dan C_{10} berikut.



Gambar 3.78. (a) Graf C_5 ; (b) Graf C_{10}

Hasil operasi ring sum dari C_5 dan C_{10} menghasilkan graf sebagai berikut.



Gambar 3.79. Graf $C_5 \oplus C_{10}$

Berdasarkan hasil operasi ring sum dari C_5 dan C_{10} menghasilkan satu siklus terinduksi dengan panjang jalan 7.

$$c(C_5 \oplus C_{10}; x) = 1x^{(10-5)+2}$$

$$c(C_5 \oplus C_{10}; x) = x^7$$

4) Graf C_m dan C_{m+k}

Akan ditunjukkan bahwa polinomial siklus terinduksi hasil operasi ring sum pada dua graf lingkaran C_m dan C_{m+k}

adalah

$$c(C_m \oplus C_{m+k}; x) = x^{(k+2)} \quad (3.16)$$

Graf C_m adalah graf lingkaran dengan titik awal dan titik akhir sama yang memiliki m banyaknya titik, sedangkan C_{m+k} adalah graf lingkaran dengan titik awal dan titik akhir sama yang memiliki $(m + k)$ banyaknya titik.

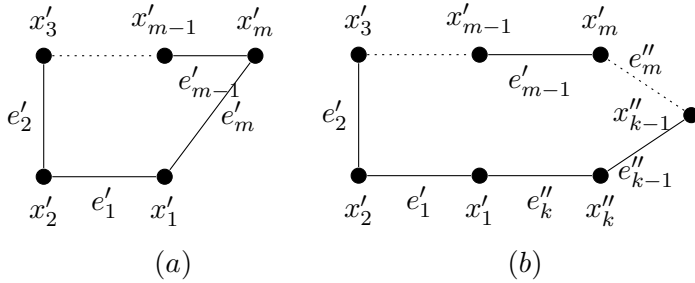
Misal himpunan titik $V(C_m) = \{x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_m\}$ dengan sisi $E(C_m) = \{e'_1, e'_2, e'_3, \dots, e'_m\}$, sedangkan titik $V(C_{m+k}) = \{x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_m, \dots, x''_k\}$ dengan sisi $E(C_{m+k}) = \{e'_1, e'_2, e'_3, \dots, e''_m, \dots, e''_k\}$.

Definisi ketetanggaan pada graf C_m yaitu x'_i bertetangga dengan x'_{i+1} sebagai sisi e'_i , untuk $1 \leq i \leq (m - 1)$ dan x'_m bertetangga dengan x'_1 sebagai sisi e'_m . Definisi ketetanggaan pada graf C_{m+k} yaitu x'_i bertetangga dengan x'_{i+1} sebagai sisi e'_i untuk $1 \leq i \leq (k - 1)$ dan x''_k bertetangga dengan x'_1 sebagai sisi e''_k .

Graf C_m dioperasikan ring sum dengan C_{m+k} , artinya himpunan titiknya adalah $V(C_m \oplus C_{m+k}) = V(C_m) \cup V(C_{m+k})$ dan untuk himpunan sisinya adalah $E(C_m \oplus C_{m+k}) = (E(C_m) \cup E(C_{m+k})) - (E(C_m) \cap E(C_{m+k}))$.

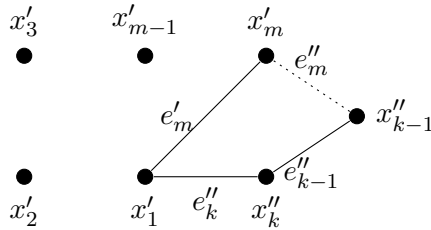
Untuk himpunan titiknya adalah

$$\begin{aligned} V(C_m \oplus C_{m+k}) &= V(C_m) \cup V(C_{m+k}) \\ &= \{x'_1, x'_2, \dots, x'_m\} \cup \{x'_1, x'_2, \dots, x'_m, \dots, x''_k\} \\ &= \{x'_1, x'_2, \dots, x'_m, \dots, x''_k\} \end{aligned}$$

Gambar 3.80. (a) Graf C_m ; (b) Graf C_{m+k}

Untuk himpunan sisinya adalah

$$\begin{aligned}
 E(C_m \oplus C_{m+k}) &= \{(E(C_m) \cup E(C_{m+k})) - (E(C_m) \cap E(C_{m+k}))\} \\
 &= \{(e'_1, e'_2, \dots, e'_{m-1}, e'_m, e''_m, e''_k) - (e'_1, e'_2, \dots, e'_{m-1})\} \\
 &= \{e'_m, e''_m, \dots, e''_k\}
 \end{aligned}$$

Gambar 3.81. Graf $C_m \oplus C_{m+k}$

Berdasarkan hasil operasi ring sum pada graf C_m dan C_{m+k} , maka sisi $E(C_m) \cap E(C_{m+k})$ dihilangkan sehingga terdapat sisa sisi dengan panjang jalan $(m + k) - m = k$. Hal tersebut menyebabkan terdapat tepat satu siklus terinduksi $(x'_1, x'_m, \dots, x''_{k-1}, x''_k, x'_1)$ dengan panjang jalan $(k + 2)$.

Jadi, polinomial sikel terinduksi hasil operasi ring sum pada graf C_m dan C_{m+k} adalah

$$c(C_m \oplus C_{m+k}; x) = x^{k+2}$$

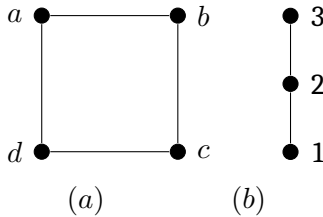
7. Korona

Berikut ini merupakan hasil operasi korona pada graf lengkap, lingkaran, dan lintasan.

a. Graf Lingkaran dengan Graf Lintasan

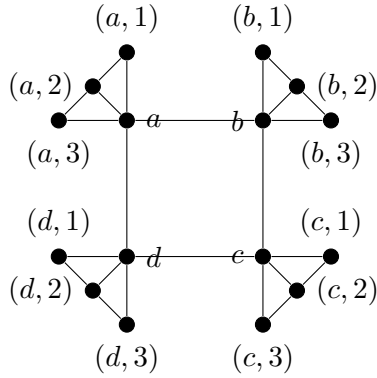
1) Graf C_4 dan P_3

Perhatikan graf C_4 dan P_3 di bawah ini.



Gambar 3.82. (a) Graf C_4 ; (b) Graf P_3

Hasil operasi korona dari graf $C_4 \odot P_3$ adalah sebagai berikut.

Gambar 3.83. Graf $C_4 \odot P_3$

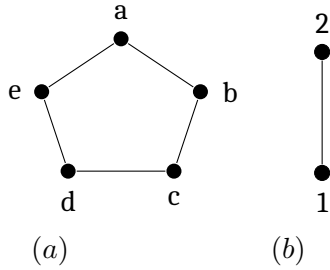
Berdasarkan hasil operasi korona graf $C_4 \odot P_3$ menghasilkan 8 siklus terinduksi dengan panjang jalan 3 dan terdapat satu siklus terinduksi dengan panjang jalan 4.

$$c(C_4 \odot P_3; x) = 2 \times 4x^3 + 1x^4$$

$$c(C_4 \odot P_3; x) = 8x^3 + x^4$$

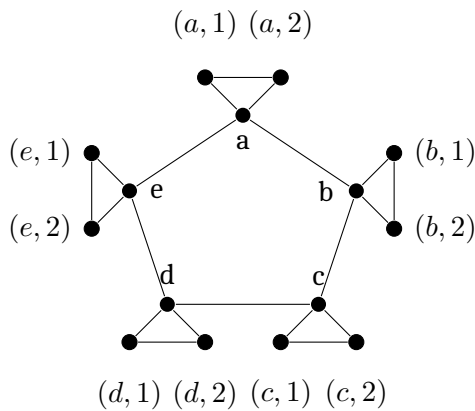
2) Graf C_5 dengan P_2

Perhatikan graf C_5 dengan P_2 di bawah ini.



Gambar 3.84. (a) Graf C_5 ; (b) Graf P_2

Hasil operasi korona dari graf $C_5 \odot P_2$ adalah sebagai berikut.



Gambar 3.85. Graf $C_5 \odot P_2$

Berdasarkan hasil operasi korona graf $C_5 \odot P_2$ menghasilkan 5 siklus terinduksi dengan panjang jalan 3 dan terdapat satu

sikel terinduksi dengan panjang jalan 5.

$$c(C_5 \odot P_2; x) = 5x^3 + 1x^5$$

$$c(C_5 \odot P_2; x) = 5x^3 + x^5$$

3) Graf C_n dan P_m

Akan ditunjukkan bahwa polinomial sikel terinduksi hasil operasi korona pada graf lingkaran dan graf lintasan adalah

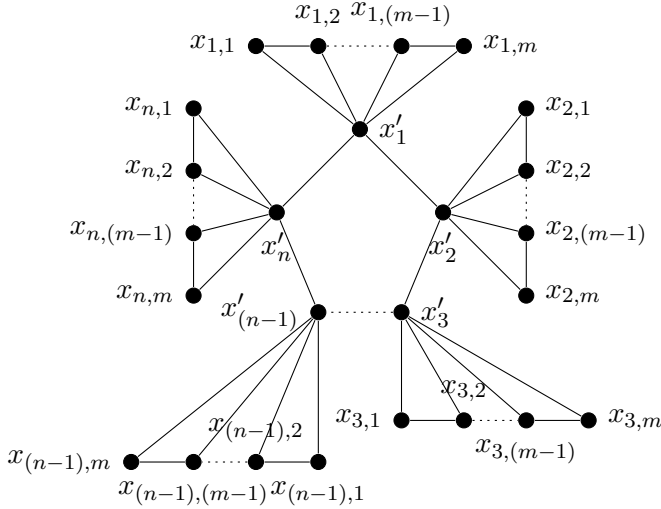
$$c(C_n \odot P_m; x) = (m - 1)nx^3 + x^n \quad (3.17)$$

Graf C_n adalah graf lingkaran dengan n titik, misal $V(C_n) = \{x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_n\}$ sedangkan graf P_m adalah graf lintasan dengan m titik, misal titiknya $V(P_m) = \{x''_1, x''_2, x''_3, \dots, x''_m\}$.

Definisi titik hasil operasi korona graf C_n dan P_m adalah

$$\begin{aligned} V(C_n \odot P_m) &= V(C_n) \times V(P_m) + V(C_n) \\ &= (x_{i,j}) = (x'_i, x''_j) \\ &= (x_{1,1}), (x_{1,2}), (x_{1,3}), \dots, (x_{1,m}), (x_{2,1}) \\ &\quad, \dots, (x_{n,m}) + (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \end{aligned}$$

Graf C_n dioperasikan korona dengan P_m artinya terdapat P_m sebanyak n rangkap dan untuk setiap titik di graf P_m bertetangga dengan titik di graf C_n , yaitu pada setiap titik $(x_{i,1}), (x_{i,2}), (x_{i,3}), \dots, (x_{i,m-1}), (x_{i,m})$ bertetangga dengan x'_i untuk $1 \leq i \leq n$.

Gambar 3.86. Graf $C_n \odot P_m$

Hal tersebut mengakibatkan adanya siklus terinduksi dengan panjang jalan 3 yaitu siklus $(x_{i,j}), (x_{i,(j+1)}), (x'_i)$ untuk $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq (m-1)$ sehingga diperoleh terdapat $(m-1)n$ siklus dan terdapat tepat satu siklus terinduksi dengan panjang jalan n .

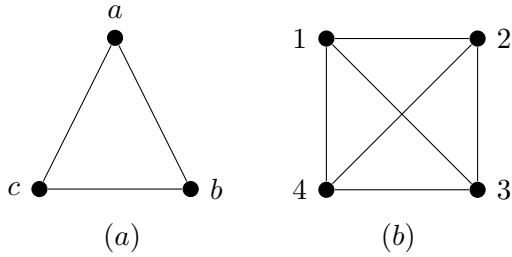
Jadi, polinomial siklus terinduksi pada graf C_n yang dioperasikan korona dengan P_m adalah

$$c(C_n \odot P_m; x) = (m-1)nx^3 + x^n$$

b. Graf Lingkaran dengan Graf Lengkap

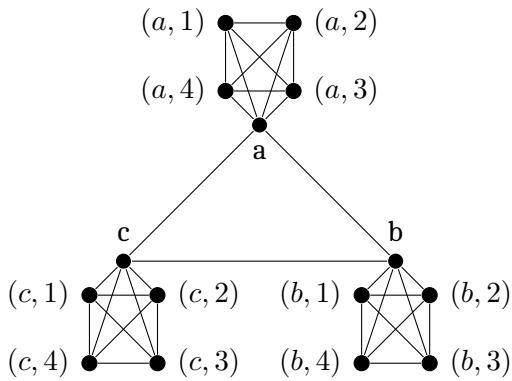
1) Graf C_3 dengan K_4

Perhatikan graf C_3 dan K_4 di bawah ini.



Gambar 3.87. (a) Graf C_3 ; (b) Graf K_4

Hasil operasi korona dari graf $C_3 \odot K_4$ adalah sebagai berikut.



Gambar 3.88. Graf $C_3 \odot K_4$

Berdasarkan hasil operasi korona graf $C_3 \odot K_4$ menghasilkan

31 siklus terinduksi dengan panjang jalan 3.

$$c(C_3 \odot K_4; x) = 3 \binom{4}{3} x^3 + 3 \binom{4}{2} x^3 + 1x^3$$

$$c(C_3 \odot K_4; x) = \left(\binom{4}{3} + \binom{4}{2} \right) 3x^3 + 1x^3$$

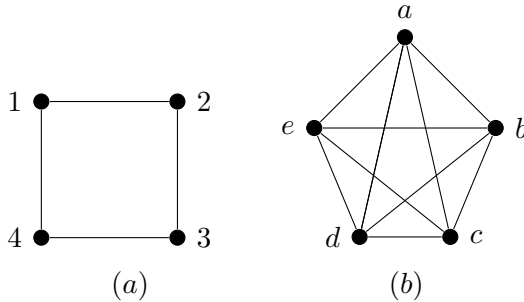
$$c(C_3 \odot K_4; x) = \left(\frac{4 \cdot 3!}{1! \cdot 3!} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2!} \right) 3x^3 + 1x^3$$

$$c(C_3 \odot K_4; x) = (10)3x^3 + 1x^3$$

$$c(C_3 \odot K_4; x) = 31x^3$$

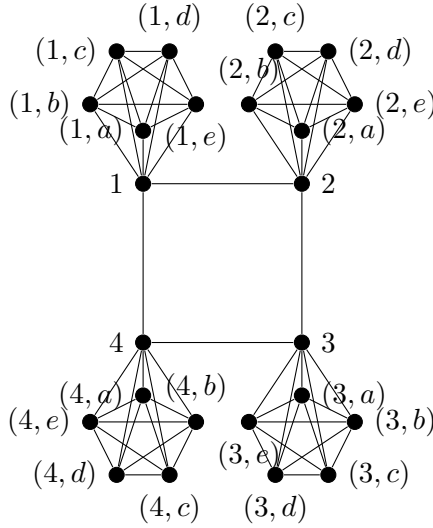
2) Graf C_4 dengan K_5

Perhatikan graf C_4 dan K_5 di bawah ini.



Gambar 3.89. (a) Graf C_4 ; (b) Graf K_5

Hasil operasi korona dari graf $C_4 \odot K_5$ adalah sebagai berikut.

Gambar 3.90. Graf $C_4 \odot K_5$

Berdasarkan hasil operasi korona graf $C_4 \odot K_5$ menghasilkan 80 siklus terinduksi dengan panjang jalan 3 dan terdapat tepat satu siklus terinduksi dengan panjang jalan 4.

$$c(C_4 \odot K_5; x) = 4 \binom{5}{3} x^3 + 4 \binom{5}{2} x^3 + 1x^4$$

$$c(C_4 \odot K_5; x) = \left(\binom{5}{3} + \binom{5}{2} \right) 4x^3 + 1x^4$$

$$c(C_4 \odot K_5; x) = \left(\frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} \right) 4x^3 + 1x^4$$

$$c(C_4 \odot K_5; x) = (20) 4x^3 + x^4$$

$$c(C_4 \odot K_5; x) = 80x^3 + x^4$$

3) Graf C_n dan K_m

Akan ditunjukkan bahwa polinomial siklus terinduksi hasil

operasi korona pada graf lengkap dengan graf lingkaran adalah

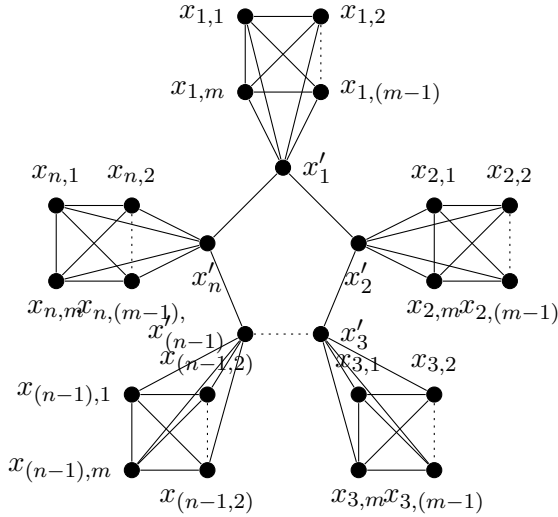
$$\begin{aligned} c(C_n \odot K_m; x) &= \binom{m}{3} nx^3 + \binom{m}{2} nx^3 + x^n \\ &= \left(\binom{m}{3} + \binom{m}{2} \right) nx^3 + x^n \end{aligned} \quad (3.18)$$

Graf C_n adalah graf lingkaran dengan n titik, misal titik $V(C_n) = \{x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_n\}$, sedangkan graf K_m adalah graf lengkap yang memiliki sikel terinduksi sebanyak $\binom{m}{3}$ sikel dengan panjang jalan 3 sesuai dengan persamaan (3.1), misal titik $V(K_m) = \{x''_1, x''_2, x''_3, \dots, x''_m\}$.

Definisi titik hasil operasi korona pada graf C_n dan K_m adalah

$$\begin{aligned} V(C_n \odot K_m) &= V(C_n) \times V(K_m) + V(C_n) \\ &= (x_{i,j}) = (x'_i, x''_j) \\ &= (x_{1,1}), (x_{1,2}), \dots, (x_{1,m}), (x_{2,1}), \dots, \\ &\quad (x_{n,m}) + (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \end{aligned}$$

Graf C_n dioperasikan korona dengan K_m sehingga terdapat duplikat K_m sebanyak n untuk setiap titik pada K_m bertetangga pada titik C_n . Hal tersebut berakibat titik pada graf K_m bertetangga pada titik C_n , yaitu $(x_{i,j})$ bertetangga dengan $x'_i \subseteq V(C_n \odot K_m)$ untuk $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m$.

Gambar 3.91. Graf $C_n \odot K_m$

Terbentuk siklus-siklus terinduksi dengan panjang jalan 3 antara graf C_n dan K_m , yaitu siklus $((x_{i,j}), (x_{i,k}), x'_i)$ dan siklus $((x_{i,j}), (x_{i,j+1}), x_{i,k})$ pada K_m untuk $1 \leq j, k \leq (m-1)$ dan $1 \leq i \leq n$.

Oleh karena itu, banyaknya siklus terinduksi dengan panjang jalan 3 hasil operasi korona C_n dan K_m adalah $n \binom{m}{3} + n \binom{m}{2} = (\binom{m}{3} + \binom{m}{2})n$ siklus. Selain itu juga terdapat tepat satu siklus terinduksi dengan panjang jalan n .

Jadi, polinomial siklus terinduksi hasil operasi korona pada graf lengkap dengan m titik dan graf lingkaran dengan n titik

adalah

$$\begin{aligned} c(C_n \odot K_m; x) &= \binom{m}{3} nx^3 + \binom{m}{2} nx^3 + x^n \\ &= \left(\binom{m}{3} + \binom{m}{2} \right) nx^3 + x^n \end{aligned}$$

BAB IV

Simpulan dan Saran

Pada bab ini, akan membahas simpulan yang diperoleh dari penelitian yang telah dilakukan serta berisi saran agar hasil penelitian ke depannya lebih baik lagi. Berikut ini merupakan simpulan dan saran.

A. Simpulan

Berdasarkan hasil yang telah diuraikan pada pembahasan, diperoleh sifat-sifat polinomial sikel terinduksi pada graf yang dikonstruksi dari hasil operasi gabungan, join, komplemen, produk, komposisi, ring sum, dan operasi korona. Hasil dari sifat-sifat polinomial sikel terinduksi hasil operasi pada graf adalah sebagai berikut.

1. Sifat hasil dari operasi gabungan dua graf antara G_1 dan G_2 akan menghasilkan polinomial sikel terinduksi dengan menjumlahkan polinomial pada G_1 dan G_2 karena operasi gabungan bersifat tidak menambahkan sisi sehingga keberadaan graf sebelum dan sesudah dioperasikan tetap, sebagaimana tertera pada tabel berikut.

Tabel 4.1. Operasi Gabungan

G_1	$c(G_1; x)$	G_2	$c(G_2; x)$	$c(G_1 * G_2; x)$
K_m	$\binom{m}{3}x^3$	K_n	$\binom{n}{3}x^3$	$\left[\binom{m}{3} + \binom{n}{3}\right]x^3$
C_m	x^m	C_n	x^n	$x^m + x^n$
$K_{m,n}$	$\binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2}x^4$	$K_{p,q}$	$\binom{p}{2} \cdot \binom{q}{2}x^4$	$\left[\binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2} + \binom{p}{2} \cdot \binom{q}{2}\right]x^4$

2. Sifat hasil operasi join dua graf akan menghasilkan graf baru dengan tetap mempertahankan polinomial graf pertama sehingga polinomial hasil operasi akan selalu memuat polinomial graf pertama dan jumlah serta sikel tambahan tergantung pada struktur dari graf kedua. Hal ini dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 4.2. Operasi Join

G_1	$c(G_1; x)$	G_2	$c(G_2; x)$	$c(G_1 * G_2; x)$
C_m	x^m	N_n	—	$c(C_m + N_n; x) = (mn)x^3 + x^m$

3. Sifat hasil operasi komplemen pada graf lengkap K_m akan menghapus semua sisinya, sehingga tidak ada sikel karena membentuk graf kosong dengan m titik. Hal tersebut dapat dilihat pada tabel di bawah ini.

Tabel 4.3. Operasi Komplemen

G_1	$c(G_1; x)$	G_2	$c(G_2; x)$	$c(G_1 * G_2; x)$
K_m	$\binom{m}{3}x^3$	—	—	$c(\bar{K}_m; x) = 0$

4. Sifat hasil operasi produk dua graf akan menghasilkan graf baru dengan tetap mempertahankan struktur pada graf pertama sebanyak titik pada graf kedua dan setiap titik pada graf kedua membentuk salinan dari graf pertama. Hal tersebut dapat dilihat pada tabel di bawah ini.

Tabel 4.4. Operasi Produk

G_1	$c(G_1; x)$	G_2	$c(G_2; x)$	$c(G_1 * G_2; x)$
C_m	x^m	P_n	—	$c(C_m \times P_n; x) = nx^m + m(n-1)x^4$

5. Sifat hasil operasi komposisi dua graf lintasan akan menghasilkan graf baru yang memiliki lebih banyak sikel. Hal tersebut bisa dilihat pada tabel berikut.

Tabel 4.5. Operasi Komposisi

G_1	$c(G_1; x)$	G_2	$c(G_2; x)$	$c(G_1 * G_2; x)$
P_n	—	P_m	—	$2m(n-1)(m-1)x^3$
P_m	—	P_n	—	$2n(m-1)(n-1)x^3$

6. Sifat hasil operasi ring sum pada graf lengkap dengan selisih satu titik akan menghasilkan satu titik berbeda yang terhubung ke semua titik tanpa membentuk sikel. Untuk operasi ring sum pada graf lingkaran dengan selisih satu titik akan menghasilkan satu titik berbeda namun membentuk sikel dengan panjang 3. Selain itu, operasi ring sum pada graf lingkaran dengan selisih k titik akan menghasilkan sikel dengan panjang $k+2$. Hal tersebut bisa dilihat pada tabel berikut.

Tabel 4.6. Operasi Ring Sum

G_1	$c(G_1; x)$	G_2	$c(G_2; x)$	$c(G_1 * G_2; x)$
K_m	$\binom{m}{3}x^3$	K_{m+1}	$\binom{m+1}{3}x^3$	$c(K_m \oplus K_{m+1}; x) = 0$
C_m	x^m	C_{m+1}	x^{m+1}	$c(C_m \oplus C_{m+1}; x) = x^3$
C_m	x^m	C_{m+k}	x^{m+k}	$c(C_m \oplus C_{m+k}; x) = x^{k+2}$

7. Sifat operasi korona dua graf akan tetap mempertahankan polinomial sikel graf pertama dan menambah struktur baru yang mengandung lebih banyak sikel terinduksi dengan banyaknya duplikat dari graf kedua sebanyak titik graf pertama. Hal tersebut dapat dilihat pada tabel berikut ini.

Tabel 4.7. Operasi Korona

G_1	$c(G_1; x)$	G_2	$c(G_2; x)$	$c(G_1 * G_2; x)$
C_n	x^n	P_m	—	$(m-1)nx^3 + x^n$
C_n	x^n	K_m	$\binom{m}{3}x^3$	$[\binom{m}{3} + \binom{m}{2}]nx^3 + x^n$

Keterangan:

- $*$ = Operasi tertentu pada graf
- G_1 = Graf pertama
- G_2 = Graf kedua
- $c(G_1; x)$ = Polinomial sikel terinduksi pada graf G_1 .
- $c(G_2; x)$ = Polinomial sikel terinduksi pada graf G_2 .
- $c(G_1 * G_2; x)$ = Polinomial sikel terinduksi hasil operasi tertentu.

Ada perbedaan bentuk umum polinomial sikel terinduksi dari masing-masing hasil operasi pada graf. Hal tersebut menunjukkan bahwa operasi graf memiliki pengaruh terhadap graf sikel hasil operasinya.

B. Saran

Penelitian ini memiliki fokus yang terbatas, yaitu hanya membahas sifat polinomial sikel terinduksi pada graf sederhana yang dibentuk dari beberapa operasi tertentu pada graf. Untuk peneliti selanjutnya, sebaiknya fokus dikembangkan pada polinomial sikel terinduksi hasil operasi pada graf yang lebih luas seperti pada graf berarah ataupun menggunakan operasi graf yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir, Azizah, N. N., dan Nofandika, F.F., 2009. *Teori Graf*. Malang : UIN-Malang Press.
- Akbari, S. dan Oboudi, M. R. 2013. On the Edge Cover Polynomial of a Graph. *European Journal of Combinatorics*. 34(2): 297-321.
- Alikhani, S., dan Peng, Y. H. 2010. Dominating Sets and Domination Polynomials of Certain Graphs, II. *Opuscula Mathematica*. 30(1): 37-51.
- Anisa, N., dan Lukito, A. 2021. Graf yang Diinduksi oleh Hiper BCI-Aljabar. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*. 9(2): 380-389.
- Beraha, S., Kahane, J., & Weiss, N. J. 1980. Limits of Chromatic Zeros of Some Families of Maps. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. 28(1): 52-65.
- Buhaerah, Zulfikar B., & Herlan S. 2022. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Makassar: LSQ Makassar.
- Clark, John dan Holton, D.A. 1995. *A First Look At Graph Theory*. Singapore: World Scientific Publishing.
- Courant, R. dan Robbins, H. 1996. *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*. Oxford University Press.
- Dafik, D. 2015. *Teori Graf, Aplikasi, dan Tumbuhnya Keterampilan Berfikir Tingkat Tinggi*. The conferment of professorship. 19.1-51.

- Daniel, F. dan Prida, N. L. T. 2019. *Teori Graf*. Yogyakarta: Deepublish.
- Fendiyanto, P. 2019. Dimensi Metrik Hasil Operasi Korona Antara Graf Lintasan Dengan Graf Lengkap $(P_N \odot K_M)$ dan Graf Sikel dengan Graf Lintasan $(C_N \odot Mp_2)$. *Primatika: Jurnal Pendidikan Matematika*. 8(1): 27-32.
- Harary, F. 2018. *Graph Theory*. Boca Raton, FL: CRC Press.
- Hoede, C., dan Li, X. 1994. Clique Polynomials and Independent Set Polynomials of Graphs. *Discrete Mathematics*. 125(1-3): 219-228.
- Ibrahim dan Noor, S. M. M. 2013. *Prosedur Penelitian Suatu Pendekatan Praktek*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Ihwan, M. D., Rahmawati, A., dan Sumargono. 2014. Kajian Bilangan Clique Graf Gear dan Graf Barbel. *Gamatika*. 5(1).
- Jannah, N. M. 2013. Pewarnaan Graf: Polinomial Kromatik dan Teorema Inversi Mobius. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*. 1(5).
- Laja, L. S., dan Artes Jr, R. G. 2014. Zeros of Convex Subgraph Polynomials. *Appl. Math. Sci*. 8(59): 2917-2923.
- Lass, B. 2004. Matching Polynomials and Duality. *Combinatorica*. 24(3): 427-440.
- Madalim, R. E., Eballe, R. G., Arajaini, A. H., dan Artes Jr, R. G. 2023. Induced Cycle Polynomial Of A Graph. *Advances and Applications in Discrete Mathematics*. 38(1): 83-94.

- Marsudi. 2016. *Teori Graf*. Malang: UB Press.
- Miksalmina, M. 2012. Penerapan Induksi Matematika dalam Pembuktian Matematika. *Visipena Journal*. 3(2).
- Multasya, N. C., Syafwan, M., & SY, S. 2024. Bilangan Rmh Untuk Graf Lintasan P_4 Dan Graf Roda W_N Dengan $N \geq 3$. *Jurnal Matematika Unand*. 12(2) : 135-143.
- Munir, R. 2012. *Apakah Matematika Diskrit Itu? (Edisi revisi Kelima)*. Bandung: Informatika Bandung.
- Munir, R. 2016. *Matematika Diskrit (Edisi revisi keenam)*. Bandung: Informatika Bandung.
- Rahayuningsih, Sri. 2018. *Teori Graph dan Penerapannya*. Malang: Universitas Wisnuwardhana Press Malang (Unidha Press).
- Read, R. C., dan Wilson, R. J. 1998. *An atlas of graphs*. Oxford University Press.
- Rokad, A.H. dan Ghodasara, G. V. 2015. Prime Labeling in Context of Ring Sum of Graphs. *International Journal of Science and Research*. 4(12): 390-392.
- Slamin. 2023. *Teori Graf dan Aplikasinya (Edisi Revisi Kedua)*. Malang: Rumpun Dua Belas (R12 Grup).
- Syihabuddin, M. dan Rosyida, I. 2022. Ketakteraturan Sisi Total Pada Graf Pohon Palem $C_r \smile B_{r,r}$ dan Graf Pohon Palem. $C_{r+1} \smile B_{r,r}$. *Indonesian Journal of Mathematics and Natural Sciences*. 45(2):59-68.

- Villarta, C. A., Eballe, R. G., & Artes Jr, R. G. 2024. Induced Path Polynomials of the Join and Corona of Graphs. *Computer Science*. 19(3): 649-652.
- Wilson, Robin J. 2010. *Pengantar Teori Graf (Edisi Kelima)*. Jakarta: Erlangga.
- Yunaeti, N., Arhasy, E. A., & Ratnaningsih, N. 2021. Analisis Kemampuan Pemecahan Masalah Matematik Peserta Didik Menurut Teori John Dewey ditinjau dari Gaya Belajar. *Journal of Authentic Research on Mathematics Education (JARME)*. 3(1): 10-21.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

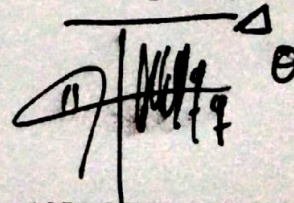
A. Identitas Diri

1. Nama Lengkap : Ana Nur Rokhmah
2. Tempat, Tanggal Lahir : Purbalingga, 19 Maret 2003
3. Alamat Rumah : Sinduraja RT 01/08, Kaligondang,
Purbalingga, Jawa Tengah
4. HP : 089612389850
5. E-mail : nur.anr16@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. MI Muhammadiyah Sinduraja (2009-2015)
2. MTs Muhammadiyah 03 Purbalingga (2015-2018)
3. SMA Negeri 1 Kejobong (2018-2021)

Semarang, 11 Juni 2025



ANA NUR ROKHMAH
NIM : 2108046095