

**ANALISIS KESTABILAN DINAMIKA BELANJA *ONLINE*
DENGAN PENGARUH *BEAUTY INFLUENCER***

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika



Oleh : **MERI TERI ANDANI**

NIM : 2108046014

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2025

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : MERI TERI ANDANI
NIM : 2108046014
Jurusan/Program Studi : Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

ANALISIS KESTABILAN DINAMIKA BELANJA *ONLINE* DENGAN PENGARUH *BEAUTY INFLUENCER*

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 22 Mei 2025
Pembuat pernyataan,



MERI TERI ANDANI
NIM : 2108046014



KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

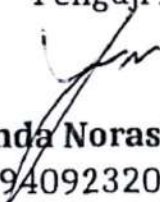
Judul : **ANALISIS KESTABILAN DINAMIKA BELANJA
ONLINE DENGAN PENGARUH BEAUTY
INFLUENCER**
Penulis : MERI TERI ANDANI
NIM : 2108046014
Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 13 Juni 2025

DEWAN PENGUJI

Penguji I,


Yolanda Norasia, M.Si.

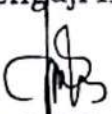
NIP: 199409232019032011

Penguji II,


Nur Khasanah, M.Si.

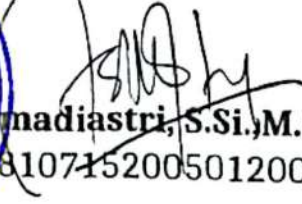
NIP: 199111212019032017

Penguji III,


Seftina Diyah Miasary, M.Sc.

NIP: 198709212019032010

Penguji IV,


Yulia Romadiastri, S.Si., M.Sc.

NIP: 198107152005012008


Zulaikha, M.Si

NIP: 199204092019032027



NOTA DINAS

Semarang, 22 Mei 2025

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : ANALISIS KESTABILAN DINAMIKA BELANJA
ONLINE DENGAN PENGARUH BEAUTY INFLUENCER
Nama : MERI TERI ANDANI
NIM : 2108046014
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing,



Zulaikha, M.Si

NIP : 199204092019032027

ABSTRAK

Penelitian ini menganalisis kestabilan dinamika belanja *online* dengan pengaruh *influencer* melalui pendekatan pemodelan matematika. Model dikembangkan dalam bentuk sistem otonomus nonlinier dengan dua subpopulasi utama yaitu subpopulasi pembelanja *offline* (L) dan subpopulasi pembelanja *online* (O), serta satu variabel yang menyatakan banyaknya konten promosi oleh *beauty influencer* (F). Analisis dilakukan dengan menentukan titik kesetimbangan sistem, dan menghitung bilangan reproduksi dasar (R_0) sebagai tolok ukur keberlanjutan belanja *online* dalam sistem. Hasil analisis menunjukkan bahwa sistem memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas belanja *online* yang stabil asimtotik saat $R_0 < 1$ dan titik kesetimbangan endemik belanja *online* yang stabil asimtotik saat $R_0 > 1$. Simulasi numerik dilakukan menggunakan *software* Matlab R2013a untuk memverifikasi hasil analisis kestabilan. Hasil simulasi menunjukkan bahwa jika $R_0 < 1$, maka tidak ada yang berbelanja secara *online*. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$, maka jumlah pembelanja *online* akan terus naik mencapai keadaan stabil pada nilai tertentu. Selain itu, variasi parameter k sebagai laju pertumbuhan konten promosi dan θ sebagai laju penurunan konten promosi turut memengaruhi jumlah pembelanja *online*. Semakin besar nilai k dan semakin kecil nilai θ , maka semakin tinggi jumlah pembelanja *online*. Hal ini menunjukkan bahwa *influencer* memiliki peran penting dalam dinamika belanja *online*, yaitu melalui unggahan konten promosi yang menarik, sehingga mampu mendorong konsumen melakukan pembelian secara *online* terutama pada kategori produk kecantikan.

Kata kunci : Analisis Kestabilan, Sistem Dinamik, Belanja *Online*, *Influencer*

KATA PENGANTAR

Dengan penuh rasa syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat dan petunjuk-Nya, penulis akhirnya dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Analisis Kestabilan Dinamika Belanja *Online* dengan Pengaruh *Beauty Influencer*.”

Penyusunan skripsi ini merupakan salah satu persyaratan untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat) pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang. terselesaikannya skripsi ini tentu tidak lepas dari bantuan, dukungan, serta kerja sama dari berbagai pihak. Oleh sebab itu, penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang mendalam kepada:

1. Bapak Prof.Dr.H. Musahadi, M.Ag., selaku Ketua Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
2. Ibu Any Muanalifah, M.Si., Ph.D., selaku Ketua Program Studi Matematika dan Bapak Prihadi Kurniawan, M.Sc., selaku Sekretaris Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
3. Ibu Emy Siswanah, M.Sc., selaku dosen wali penulis yang memberikan motivasi dalam proses penyelesaian skripsi ini.
4. Ibu Zulaikha, M.Si., selaku dosen pembimbing yang telah dengan sabar memberikan bimbingan, ilmu, dukungan, motivasi, arahan, serta masukan yang berharga dalam proses penyusunan skripsi ini.

5. Bapak dan Ibu Dosen Program Studi yang telah memberikan ilmu, bimbingan, serta wawasan selama masa perkuliahan yang menjadi bekal bagi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Bapak Tamyur dan Ibu Wasem, sebagai orang tua tercinta, serta Supriyadi, S.M. selaku kakak penulis, beserta seluruh keluarga dan saudara yang senantiasa memberikan dukungan, motivasi, kepercayaan, kasih sayang, dan doa tanpa henti, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
7. Seluruh rekan penulis, khususnya Dea, serta teman-teman kos: Hida, Defy, Riris, Wulan, Nur, Resa, Rezka, Anisa, Anggun, Kiki, dan Nisa atas kebersamaan, semangat, dan dukungan selama proses penyusunan skripsi. Terima kasih juga untuk teman-teman satu bimbingan yang telah menjadi tempat berbagi ilmu dan pengalaman, teman-teman sekelas yang senantiasa mendukung selama masa perkuliahan, rekan-rekan KKN yang turut memberikan pengalaman berharga di luar kampus, serta teman-teman magang yang telah menjadi bagian dari proses pembelajaran. Seluruh bentuk dukungan dan kebersamaan tersebut menjadi bagian yang berarti dalam proses menuju tugas akhir ini.
8. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu atas segala bantuan, dukungan, serta kontribusinya dalam penyelesaian skripsi ini. Semoga segala kebaikan yang telah diberikan mendapatkan balasan yang berlipat ganda dari Allah SWT.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih memiliki kekurangan dan keterbatasan. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan saran dan kritik yang membangun demi perbaikan di masa mendatang.

Semoga karya sederhana ini dapat memberi manfaat dan menjadi referensi yang berguna bagi penelitian-penelitian berikutnya.

Semarang, 28 Mei 2025

Meri Teri Andani

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iii
NOTA PEMBIMBING	iv
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Rumusan Masalah	5
C. Tujuan Penelitian	5
D. Manfaat Penelitian	6
E. Batasan Masalah	6
BAB II LANDASAN PUSTAKA	9
A. Belanja <i>Online</i>	9
1. <i>Online Shop</i>	9
2. <i>Marketplace</i>	9
3. <i>E-commerce</i>	10
B. Media Sosial, <i>Influencer</i> dan <i>Endorsement</i>	10
1. Media Sosial	10
2. <i>Influencer</i>	11
3. <i>Endorsement</i>	12
C. Persamaan Diferensial	14
D. Persamaan Diferensial Biasa	14
E. Sistem Dinamik	17
1. Sistem Otonomus Linier	18
2. Sistem Otonomus Nonlinier	20
F. Model Matematika	20
G. Solusi Positif dan Terbatas	25

H.	Analisis Kestabilan Lokal	31
1.	Titik Keseimbangan	31
2.	Bilangan Reproduksi Dasar R_0	33
3.	Linierisasi	35
4.	Nilai Eigen dan Vektor Eigen	39
5.	Kestabilan Titik Keseimbangan	45
6.	Kriteria Routh-Hurwitz	47
7.	Aturan Tanda Descartes	49
8.	Metode Runge-Kutta Orde 4	49
I.	Kajian penelitian terdahulu	51
	BAB III METODOLOGI PENELITIAN	55
A.	Metode Penelitian	55
B.	Prosedur Penelitian	55
	BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	60
A.	Model Matematika Dinamika Belanja <i>Online</i> dengan Pengaruh <i>Beauty Influencer</i>	60
B.	Analisis Dinamik Model Matematika Dinamika Belanja <i>Online</i> dengan Pengaruh <i>Beauty Influencer</i>	73
C.	Simulasi Numerik Model Matematika Dinamika Belanja <i>Online</i> dengan Pengaruh <i>Beauty Influencer</i>	98
	BAB V PENUTUP	112
A.	Kesimpulan	112
B.	Saran	114
	DAFTAR PUSTAKA	115
	Lampiran-lampiran	123

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul	Halaman
Tabel 2.1	Variabel Model <i>NSP</i> (Pembelanja <i>Offline</i> , Pembelanja <i>Online</i> , Kepadatan Kumulatif Informasi)	23
Tabel 2.2	Parameter Model <i>NSP</i> (Pembelanja <i>Offline</i> , Pembelanja <i>Online</i> , Kepadatan Kumulatif Informasi)	23
Tabel 2.3	Jenis-jenis Kestabilan Titik Keseimbangan	46
Tabel 2.4	Contoh Kestabilan Titik Keseimbangan	47
Tabel 2.5	Kajian Penelitian Terdahulu	51
Tabel 4.1	Daftar Variabel-variabel	63
Tabel 4.2	Daftar Parameter-parameter	64
Tabel 4.3	Kemungkinan Tanda Koefisien a, b, c	86
Tabel 4.4	Banyaknya Akar Riil Positif dan Negatif	87
Tabel 4.5	Ringkasan Hasil Analisis Kestabilan Sistem	97
Tabel 4.6	Daftar Nilai Awal	98
Tabel 4.7	Daftar Nilai Parameter (1)	99
Tabel 4.8	Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Belanja <i>Online</i>	102
Tabel 4.9	Daftar Nilai Parameter (2)	103
Tabel 4.10	Kestabilan Titik Keseimbangan Endemik Belanja <i>Online</i>	107
Tabel 4.11	Variasi Nilai Parameter k	108
Tabel 4.12	Variasi Nilai Parameter θ	108

Tabel 4.13	Variasi k dan θ Terhadap Jumlah Pembelanja <i>Online</i>	111
Tabel 0.1	Kemungkinan Tanda Koefisien a, b, c	123
Tabel 0.2	Banyaknya Akar Riil Positif dan Negatif	126
Tabel 0.3	Daftar Nama Beauty Influencer serta Jumlah Konten Promosi pada tahun 2023	145

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
Gambar 2.1	Diagram Kompartemen Model NSP	22
Gambar 3.1	Diagram Alur Penelitian	59
Gambar 4.1	Diagram Kompartemen Model Matematika Dinamika Belanja <i>Online</i> dengan Pengaruh <i>Beauty Influencer</i>	65
Gambar 4.2	Simulasi Bebas Belanja <i>Online</i>	100
Gambar 4.3	Subpopulasi Pembelanja <i>Offline</i>	100
Gambar 4.4	Subpopulasi Pembelanja <i>Online</i>	101
Gambar 4.5	Banyaknya Konten Promosi oleh <i>Beauty Influencer</i>	101
Gambar 4.6	Simulasi Endemik Belanja <i>Online</i>	105
Gambar 4.7	Subpopulasi Pembelanja <i>Offline</i>	105
Gambar 4.8	Subpopulasi Pembelanja <i>Online</i>	106
Gambar 4.9	Banyaknya Konten Promosi oleh <i>Beauty Influencer</i>	106
Gambar 4.10	Pengaruh k pada Subpopulasi Pembelanja <i>Online</i>	109
Gambar 4.11	Pengaruh θ pada Subpopulasi Pembelanja <i>Online</i>	109

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1	Penentuan Banyaknya Akar Riil Negatif dengan Aturan Tanda Descartes 123
Lampiran 2	Pembuktian Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Belanja <i>Online</i> 127
Lampiran 3	Perhitungan Nilai Titik Keseimbangan Bebas dan Endemik Belanja <i>Online</i> 130
Lampiran 4	Pembuktian Kestabilan Titik Keseimbangan Endemik Belanja <i>Online</i> 133
Lampiran 5	Program Matlab Simulasi Titik Keseimbangan Bebas Belanja <i>Online</i> 136
Lampiran 6	Program Matlab Simulasi Titik Keseimbangan Endemik Belanja <i>Online</i> 139
Lampiran 7	Program Matlab Simulasi Variasi Nilai Parameter k dan θ Terhadap Subpopulasi Pembelanja <i>Online</i> 142
Lampiran 8	Daftar Nama-nama Beauty <i>Influencer</i> Tahun 2023 Menurut Slice.id 145

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Aktivitas berbelanja telah menjadi bagian yang tak terpisahkan dari kehidupan manusia, mulai dari memenuhi kebutuhan pokok hingga memperoleh barang-barang mewah. Bagi sebagian orang berbelanja adalah kegiatan yang menyenangkan, tetapi bagi sebagian yang lainnya dianggap membosankan dan menyita waktu. Jika dibandingkan dengan belanja *offline* atau belanja secara langsung, belanja *online* menjadi pilihan utama untuk dua kategori tersebut (Sharma, 2021).

Menurut Ellitan dan Anatan (2008), belanja melalui internet (*online shopping*) merupakan aktivitas pembelian produk atau jasa yang dilakukan konsumen secara daring. Kelebihan dari belanja *online* yaitu menghemat waktu, pengiriman yang cepat, kenyamanan, harga yang lebih terjangkau, pilihan barang yang lebih bervariasi dan tidak perlu mengantri. Namun belanja *online* juga memiliki kekurangan seperti adanya masalah keamanan, situs web yang rumit, masalah pengiriman dan peluang penipuan yang lebih tinggi (Sameeha dan Milhana, 2021).

EMarketer mencatat bahwa pada tahun 2023, sekitar 2,64 miliar orang di seluruh dunia telah melakukan pembelian secara *online* (Capital One Shopping, 2024). Aktivitas pembelian secara *online* semakin ramai di Indonesia seiring dengan perkembangan teknologi internet dan infrastruktur (Rianto, dkk., 2013). Dampaknya yang positif terlihat pada pertumbuhan jumlah pengguna internet di Indonesia. Menurut pengumuman Asosiasi

Penyelenggara Jasa Internet Indonesia (APJII), pada tahun 2023, pengguna internet di Indonesia mencapai 215,63 juta orang, yang mendorong peningkatan layanan jual beli *online*. Jumlah pengguna *e-commerce* di Indonesia terus mengalami kenaikan sejak tahun 2020, hingga pada tahun 2023 sebanyak 58,63 juta pengguna (Statista, 2024).

Dinamika belanja *online* tidak hanya dipengaruhi oleh faktor-faktor seperti harga, kemudahan pengiriman, dan kualitas produk. Selain itu, pengaruh *influencer* juga berperan penting dalam keputusan pembelian konsumen (Lou dan Yuan, 2019). Survei Rakuten Insight pada Mei 2023 menunjukkan bahwa sekitar 68 persen responden di Indonesia pernah membeli produk kecantikan akibat *endorsement* yang dilakukan oleh *influencer*. Survei yang sama menemukan bahwa mayoritas responden Indonesia mengikuti setidaknya satu *influencer* di media sosial dan pernah membeli suatu barang atau produk karena *endorsement* dari *influencer* (Statista, 2024).

Menurut Ryan dan Jones (2009), seseorang yang memiliki pengaruh besar di media sosial disebut sebagai digital *influencer*, karena memiliki kemampuan untuk memengaruhi dan mengubah opini serta perilaku secara *online*. *Influencer* ini memperoleh kepercayaan dari banyak pengguna internet, sehingga pendapat para *influencer* dapat berdampak besar pada reputasi *online*, termasuk reputasi merek atau produk. Selain itu, penyebaran informasi positif melalui *word of mouth* (WOM) di platform media sosial juga berperan penting dalam memengaruhi keputusan pembelian (Jansen, dkk., 2009). Dalam konteks ini, Instagram, TikTok, dan YouTube merupakan tiga platform media sosial yang paling populer, berdasarkan data dari Statista. Popularitas ini

turut mendorong para *influencer* untuk memanfaatkan ketiga platform tersebut sebagai media yang paling sering digunakan dalam kegiatan promosi atau *endorsement* (Influencer Marketing Hub, 2023).

Fenomena atau permasalahan sosial dapat dimodelkan menggunakan pendekatan matematika (Alam, 2019). Model matematika dapat menjadi salah satu solusi dalam menangani berbagai permasalahan kehidupan (Aswan, 2018). Salah satu pendekatan matematika yang efektif dalam mencari solusi dari suatu permasalahan yang kompleks adalah menggunakan Sistem Persamaan Diferensial Biasa (SPDB) non-linier (Hermann dan Saravi, 2016).

Beberapa penelitian sebelumnya telah menekankan pentingnya peran media sosial serta faktor-faktor yang mempengaruhi belanja *online* diantaranya penelitian oleh Misra dkk. (2022) memodelkan dampak iklan media sosial terhadap dinamika belanja *online*. Bentuk model penelitian tersebut adalah XYM , dengan X (pembelanja *offline*), Y (pembelanja *online*) dan M (jumlah iklan di media sosial). Hasil dari penelitian menunjukkan iklan media sosial memainkan peran penting dalam dinamika belanja *online*.

Penelitian oleh Sharma (2021) memodelkan peran informasi terhadap penyebaran belanja *online*. Bentuk model penelitian tersebut adalah NSP , dengan N (pembelanja *offline*), S (pembelanja *online*) dan P (kepadatan kumulatif informasi yang dihasilkan oleh pembelanja *online*). Hasil dari penelitian menunjukkan bahwa informasi positif tentang manfaat belanja *online* turut berperan dalam mempercepat pertumbuhan fenomena belanja *online*.

Adapun penelitian oleh Liu (2023) menunjukkan bahwa *influencer* memengaruhi keputusan pembelian kosmetik di platform TikTok, terutama melalui aspek kredibilitas, kreativitas, dan konten yang disajikan. Selanjutnya penelitian oleh Lailia dan Andriana (2023) yang menyatakan bahwa promosi online berpengaruh terhadap minat dan keputusan pembelian secara online. Di sisi lain, Duggal dan Verma (2022) menemukan bahwa pengalaman negatif saat berbelanja *offline*, seperti sikap tidak sopan dari petugas toko dan perlakuan yang tidak adil, mendorong konsumen untuk beralih ke belanja *online*. Perpindahan ini juga dipengaruhi oleh persepsi bahwa belanja *online* menawarkan kenyamanan dan aksesibilitas yang lebih baik dibandingkan belanja *offline*.

Berdasarkan hasil kajian dari penelitian sebelumnya, penulis tertarik untuk melakukan modifikasi model dan pengembangan lebih lanjut dari penelitian yang dilakukan oleh Sharma (2021). Modifikasi yang dilakukan meliputi penambahan parameter α yang menunjukkan laju perpindahan pembelian dari platform *offline* ke *online* tanpa pengaruh *beauty influencer*. Penambahan parameter α ini bertujuan untuk membuat model lebih realistis dengan kondisi nyata, mengingat perpindahan pembelian ke platform *online* dapat dipengaruhi oleh berbagai faktor, tidak hanya dari *influencer*. Selain itu, variabel kepadatan kumulatif informasi yang dihasilkan oleh individu pembelian *online* (P) pada penelitian Sharma (2021) diganti dengan variabel banyaknya konten promosi yang dilakukan oleh *beauty influencer* (F). Pergantian variabel ini bertujuan untuk lebih menekankan pengaruh langsung dari konten promosi yang dilakukan *beauty influencer* terhadap dinamika belanja *online*, khususnya dalam

konteks promosi produk kecantikan. Fokus pada kategori ini dipilih karena survei Rakuten Insight pada Mei 2023 menunjukkan bahwa sebagian besar konsumen di Indonesia pernah membeli produk akibat *endorsement* dari *influencer*, terutama untuk produk kecantikan. Berdasarkan uraian di atas, penulis bermaksud melakukan penelitian yang berjudul "Analisis Kestabilan Dinamika Belanja *Online* dengan Pengaruh *Beauty Influencer*". Penelitian ini bertujuan untuk merumuskan model matematika yang digunakan untuk menganalisis dinamika belanja *online* yang dipengaruhi oleh *beauty influencer*.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, rumusan masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana kontruksi model matematika dinamika belanja *online* dengan pengaruh *beauty influencer* ?
2. Bagaimana analisis kestabilan lokal model matematika dinamika belanja *online* dengan pengaruh *beauty influencer* ?
3. Bagaimana interpretasi hasil simulasi numerik model matematika dinamika belanja *online* dengan pengaruh *beauty influencer* ?

C. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkontruksi model matematika dinamika belanja *online* dengan pengaruh *beauty influencer*.
2. Menganalisis kestabilan lokal model matematika dinamika belanja *online* dengan pengaruh *beauty influencer*.
3. Menginterpretasikan hasil simulasi numerik dari model matematika dinamika belanja *online* dengan pengaruh *beauty influencer* untuk memahami perilaku sistem, termasuk pengaruh perubahan parameter terhadap dinamika pembelanja *online*.

D. Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan di atas, manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagi penulis

Sebagai sarana pengembangan wawasan dalam pemodelan matematika, khususnya dalam menganalisis dinamika belanja *online* dengan pengaruh *beauty influencer*.

2. Bagi pembaca

Sebagai referensi dalam pemodelan matematika terkait permasalahan sosial, khususnya dinamika belanja *online*, serta sebagai acuan untuk penelitian lebih lanjut.

E. Batasan Masalah

Batasan masalah yang ditetapkan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Model matematika yang akan dikembangkan merupakan model matematika dari jurnal karya Sharma (2021).
2. Dalam model ini, tidak dipertimbangkan adanya perpindahan individu dari luar sistem (imigrasi) maupun keluar dari sistem (emigrasi). Seluruh individu diasumsikan berasal dari dalam sistem yang tertutup, di mana populasi hanya berasal dari pendatang baru yaitu A , bukan akibat perpindahan antar wilayah. Dengan demikian, dinamika populasi hanya dipengaruhi oleh transisi antar subpopulasi dalam sistem, yaitu dari pembeli *offline* ke *online* dan sebaliknya, serta keluar dari sistem karena faktor seperti kematian atau lainnya.
3. Model matematika dinamika belanja *online* dengan pengaruh *beauty influencer* terdiri dari dua subpopulasi utama, yaitu subpopulasi pembelanja *offline* (L), subpopulasi pembelanja *online* (O), serta satu variabel pendukung yang berperan sebagai faktor yang memengaruhi dinamika perpindahan antara pembelanja *offline* dan *online*, yaitu banyaknya konten promosi yang dilakukan oleh *beauty influencer* (F).
4. Nilai parameter β yang merepresentasikan laju perpindahan pembelanja dari *offline* ke *online* karena pengaruh *beauty influencer*, ditentukan berdasarkan jumlah konten promosi yang diunggah oleh *beauty influencer* di media sosial. Data konten promosi diperoleh dari akun tujuh *beauty influencer* Indonesia di tiga platform, yaitu Instagram, TikTok, dan YouTube. Pemilihan *beauty influencer* mengacu pada Slice.id (2023), sementara pemilihan platform merujuk pada data Statista dan Influencer Marketing Hub (2023)

yang menunjukkan bahwa ketiga platform tersebut paling populer dan paling sering digunakan untuk promosi atau *endorsement*.

5. Belanja *online* yang dimaksud adalah aktivitas pembelian di *online shop, marketplace* dan *e-commerce*.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

A. Belanja *Online*

Belanja *online* merupakan proses yang memungkinkan konsumen melakukan pembelian barang, jasa, dan produk lainnya secara langsung dari penjual dengan cara interaktif dan *real-time*, tanpa memerlukan media perantara melalui internet (Mujiyana dan Elissa, 2013). Belanja *online* terdiri dari tiga jenis, yaitu *online shop*, *marketplace*, dan *e-commerce* (Kusumaningsih, 2021). Berikut adalah definisi serta contoh dari jenis-jenis belanja *online*:

1. *Online Shop*

Online shop atau toko *online* merupakan sebuah platform yang secara khusus menjual produk miliknya sendiri secara *online*. Semua pemasaran dan operasi dikelola oleh perusahaan yang memiliki situs web dan produk. Contoh toko *online* ini dapat ditemukan di platform seperti Facebook, Tiktok, dan Instagram.

2. *Marketplace*

Marketplace adalah sebuah platform daring yang memfasilitasi transaksi antara penjual dan pembeli, dilengkapi dengan fitur-fitur seperti pilihan metode pembayaran, estimasi pengiriman, pemilihan produk per kategori, dan layanan lainnya. Contohnya seperti Shopee, Tokopedia, Lazada, Bukalapak dan Blibli.

3. *E-commerce*

E-commerce adalah situs web yang digunakan untuk memfasilitasi pembelian dan penjualan produk dari suatu merek atau perusahaan yang lebih berfokus pada penjualan produk pada brand itu sendiri. *E-commerce* seringkali diartikan sebagai *marketplace*, meskipun keduanya memiliki perbedaan. *Marketplace* adalah platform yang menampung berbagai penjual dalam satu situs web, sedangkan *e-commerce* merujuk pada situs web yang dikelola oleh satu penjual untuk menawarkan produk atau layanannya secara langsung. Contohnya *e-commerce* antara lain Zalora dan Berrybenka.

B. Media Sosial, *Influencer* dan *Endorsement*

Beberapa aspek penting yang berpengaruh dalam perkembangan belanja *online* adalah media sosial, *influencer* dan *endorsement*. Masing-masing aspek ini berpengaruh terhadap perilaku konsumen dan keputusan pembelian (Harishchandra, 2021). Definisi dan penjelasan dari tiga aspek ini adalah sebagai berikut:

1. Media Sosial

Media sosial adalah sebuah media *online* yang memungkinkan pengguna dapat dengan mudah berkontribusi, membagikan, dan menciptakan konten. Saat ini, masyarakat telah menggunakan berbagai macam platform media sosial. Kaplan dan Haenlein (2010) mengklasifikasikan media sosial ke dalam enam kategori, yaitu (1) *Collaborative Projects*, seperti

Wikipedia; (2) *Blogs*, contohnya WordPress dan Blogspot; (3) *Content Communities*, seperti YouTube dan Slideshare; (4) *Social Networking Sites*, misalnya Facebook, Instagram, dan Twitter; (5) *Virtual Game Worlds*, seperti permainan daring PUBG dan *Free Fire*; serta (6) *Virtual Social Worlds*, contohnya aplikasi *Second Life*.

2. *Influencer*

Menurut Freberg (2010), *influencer* adalah individu yang mampu memengaruhi keputusan orang lain melalui platform seperti blog, tweet, dan media sosial lainnya. *Influencer* umumnya aktif dalam platform media sosial serta memiliki jumlah pengikut yang banyak. Dalam konteks media sosial, pengikut atau *followers*, merujuk pada individu yang memilih untuk mengikuti atau melihat unggahan akun pengguna lain pada platform jejaring sosial, sehingga memungkinkan mereka menerima pembaruan rutin dari konten yang dibagikan oleh akun tersebut, baik berupa informasi maupun pendapat pribadi (Cambridge Dictionary, 2024). *Influencer* memainkan berbagai peran di media sosial, seperti (Mileva, 2024):

- a. *Brand awareness* yaitu mencitrakan merek secara positif, baik melalui platform *online* maupun secara langsung.
- b. *Content creator* yaitu membuat konten *online* yang menarik dan informatif, melalui unggahan pribadi di media sosial, seperti melalui ulasan produk, artikel blog, dan postingan informatif.
- c. *Feedback management* yaitu berperan dalam menjembatani komunikasi dengan audiens, seperti

mendengarkan komentar dan saran dari konsumen.

- d. *Live appearances* yaitu ikut serta dalam kegiatan pemasaran, seperti *launching* produk, konferensi, dan sebagainya.

Influencer memiliki beberapa kategori yaitu (Campbell dan Farrel, 2020):

- a. *Mega-influencer* yaitu *influencer* dengan lebih dari satu juta pengikut.
- b. *Macro-influencer* yaitu *influencer* yang memiliki jumlah pengikut antara 100.000 hingga satu juta.
- c. *Micro-influencer* yaitu *influencer* yang memiliki jumlah pengikut antara 1.000 hingga 100.000.
- d. *Nano-influencer* yaitu *influencer* dengan kurang dari 1.000.

Individu yang dapat dikategorikan sebagai *influencer* berasal dari berbagai kalangan, bergantung pada kemampuan mereka untuk memengaruhi audiens. Beberapa kategori orang yang disebut sebagai *influencer* seperti selebriti, aktivis, *blogger*, *vlogger*, fotografer, jurnalis dan sebagainya (GRIN, 2024).

3. *Endorsement*

Menurut Martin Roll (2018), *endorsement* merupakan sarana komunikasi merek di mana selebriti berperan sebagai juru bicara merek dan mendukung klaim serta posisi merek tersebut melalui kepribadian, popularitas, status sosial, atau keahliannya di bidang tertentu kepada merek tersebut. Jenis-jenis *endorsement* adalah sebagai berikut (Fahmi, 2018):

a. *Celebrity Endorsement*

Celebrity endorsement adalah dukungan di media sosial yang berarti meminta bantuan dari publik figur seperti selebriti, *influencer*, atau akun yang memiliki banyak pengikut untuk mempromosikan produk tertentu yang kemudian dipublikasikan di akun media sosial para publik figur.

b. *Paid Promote*

Paid promote adalah metode di mana pemilik akun Instagram yang memiliki banyak pengikut dibayar untuk melakukan promosi terhadap suatu produk. Dengan meningkatnya jumlah pengikut, peluang untuk memperoleh pendapatan juga akan semakin tinggi.

Dari penjelasan di atas, terdapat perbedaan antara *celebrity endorsement* dan *paid promote*, meskipun keduanya memiliki kesamaan. *Celebrity endorsement* melibatkan promosi barang yang nantinya menjadi milik *endorser*, sedangkan *paid promote* biasanya hanya mempromosikan brosur, merek produk, atau poster usaha. Untuk mendukung promosi produk, *influencer* umumnya menggunakan media berupa foto atau video yang dirancang dengan pendekatan humor, tutorial, atau testimoni (Chrisavira & Chan, 2025).

C. Persamaan Diferensial

Berikut adalah definisi dari persamaan diferensial.

Definisi 2.3.1 (Ross, 1984)

Persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel dependen terhadap satu atau lebih variabel independen disebut persamaan diferensial.

Persamaan diferensial dapat dibagi berdasarkan jumlah variabel independen yang terlibat. Jika hanya memuat satu variabel independen, persamaan disebut persamaan diferensial biasa. Namun, jika memuat lebih dari satu variabel independen, persamaan disebut persamaan diferensial parsial. Berikut adalah penjelasan tentang persamaan diferensial biasa.

D. Persamaan Diferensial Biasa

Definisi 2.4.1 (Ross, 1984)

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel dependen terhadap satu atau lebih variabel independen

Berikut merupakan persamaan diferensial biasa orde n (Boyce dan DiPrima, 2009)

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right) \quad (2.1)$$

dimana $y^{(n)}$ menyatakan turunan ke- n dari fungsi y , x adalah variabel independen dan f adalah fungsi yang bergantung pada variabel independen x , fungsi y serta turunannya hingga orde $n - 1$.

Contoh 2.1

Berikut adalah contoh dari persamaan diferensial

$$y^{(2)} = -y' - 4y \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) merupakan persamaan diferensial orde dua, karena memuat turunan kedua dari fungsi y , yaitu $y^{(2)}$ merupakan turunan kedua dari y , y' adalah turunan pertama dari y , dan y adalah fungsi yang bergantung pada variabel independen x .

Berdasarkan sifat kelinierannya persamaan diferensial biasa dapat dibedakan menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa linier dan nonlinier.

1. Persamaan Diferensial Biasa Linier

Berikut adalah definisi dari persamaan diferensial biasa linier.

Definisi 2.4.2 (Ross, 1984)

Persamaan diferensial biasa linier orde n dalam variabel dependen y dan variabel independen x adalah persamaan yang berbentuk

$$c_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + c_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + c_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + c_n(x)y = d(x),$$

dengan $c_0 \neq 0$, $c_1(x), \dots, c_{n-1}(x), c_n(x)$ adalah fungsi dari x .

Berikut adalah kriteria persamaan diferensial biasa linier:

- (a) Variabel dependen y dan turunannya harus memiliki pangkat satu.
- (b) Tidak terdapat perkalian antara variabel dependen y dan/atau turunan-turunannya.

- (c) Tidak terdapat fungsi transenden (eksponensial, logaritma, atau trigonometri) yang melibatkan variabel dependen y dan/atau turunannya.

Contoh 2.2

Berikut adalah contoh dari persamaan diferensial biasa linier.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 9y = 0 \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) merupakan persamaan diferensial biasa linier karena variabel dependen y dan/atau turunannya memiliki pangkat satu dan tidak ada perkalian antara variabel dependen y dan/atau turunannya.

2. Persamaan Diferensial Biasa Nonlinier

Persamaan diferensial biasa nonlinier adalah persamaan diferensial biasa yang bersifat tidak linier. Berikut adalah kriteria persamaan diferensial biasa nonlinier (Ross, 1984):

- (a) Variabel dependen y beserta turunannya dapat berpangkat lebih dari satu.
- (b) Terdapat perkalian antara variabel dependen y dan/atau turunan-turunannya.
- (c) Terdapat fungsi transenden (eksponensial, logaritma, atau trigonometri) yang melibatkan variabel dependen y dan/atau turunannya

Contoh 2.3

Berikut adalah contoh dari persamaan diferensial biasa nonlinier.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0 \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) merupakan persamaan diferensial biasa nonlinier karena $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ merupakan turunan dari variabel dependen y yang berpangkat dua.

E. Sistem Dinamik

Sistem dinamik dikelompokkan menjadi dua jenis, yaitu sistem dinamik diskrit dan sistem dinamik kontinu. Perubahan yang terjadi pada interval waktu yang terpisah disebut sistem diskrit. Sistem dinamik diskrit dapat direpresentasikan melalui persamaan beda berikut

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t), \quad t \in \mathbb{Z} \text{ atau } \mathbb{N}$$

Perubahan yang terjadi secara kontinu sepanjang waktu disebut sistem kontinu. Bentuk umum dari sistem dinamik kontinu adalah sebagai berikut

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

(Elaydi, 2005).

Sistem dinamik kontinu dibagi menjadi dua yaitu sistem nonotonomus dan sistem otonomus (Boyce dan DiPrima, 2009). Sistem yang bergantung langsung pada waktu atau persamaan diferensial yang variabel independennya muncul secara eksplisit disebut sistem dinamik nonotonomus. Bentuk sistem nonotonomus adalah sebagai berikut (Perko, 2001)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t)$$

Contoh 2.4

Berikut adalah contoh sistem nonotonomus.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + t \\ \frac{dy}{dt} = -5 + t^2 \end{cases} \quad (2.5)$$

Sistem (2.4) merupakan sistem nonotonomus karena variabel independen t muncul secara eksplisit.

Selanjutnya persamaan diferensial yang variabel independennya tidak muncul secara eksplisit dalam persamaan disebut sistem otonomus. Persamaan ini dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$$

Sistem otonomus dibagi menjadi dua yaitu sistem otonomus linier dan nonlinier.

1. Sistem Otonomus Linier

Sistem otonomus linier merupakan sistem persamaan diferensial linier yang variabel independennya tidak muncul secara eksplisit (Boyce dan DiPrima, 2009).

Perhatikan sistem otonomus linier dengan tiga variabel dependen yaitu x_1, x_2, x_3 sebagai berikut

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4 \\ \frac{dx_2}{dt} = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 \\ \frac{dx_3}{dt} = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + c_{34}x_4 \end{cases} \quad (2.6)$$

dengan $c_{11}, \dots, c_{34}$ adalah koefisien dari $x_1, \dots, x_3$.

Sistem (2.6) dapat direpresentasikan dalam bentuk vektor sebagai berikut

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{C}(\vec{x})$$

dengan

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(Boyce dan DiPrima, 2009).

Contoh 2.5

Berikut adalah contoh sistem otonomus linier.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -5y - 3x \end{cases} \quad (2.7)$$

Sistem (2.7) merupakan sistem otonomus linier karena dapat direpresentasikan dalam bentuk vektor $\frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{C}\vec{w}$, dengan

$\vec{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ dan $\vec{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ serta semua suku yang melibatkan variabel dependen x dan y memiliki pangkat satu dan tidak terdapat perkalian antara variabel dependen.

2. Sistem Otonomus Nonlinier

Sistem otonomus nonlinier adalah sistem dinamik yang dinyatakan dalam persamaan diferensial yang variabel independennya tidak muncul secara eksplisit serta memiliki karakteristik nonlinier. Bentuk umum dari sistem otonomus nonlinier adalah sebagai berikut

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (2.8)$$

dengan $x \in \mathbb{R}$ dan f adalah fungsi nonlinier (Perko, 2001).

Contoh 2.6

Berikut adalah contoh sistem otonomus nonlinier.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x - 5xy \\ \frac{dy}{dt} = 3y + xy - 3y^2 \end{cases} \quad (2.9)$$

Sistem (2.9) merupakan sistem otonomus nonlinier karena variabel independen t tidak muncul secara eksplisit serta terdapat suku yang memuat perkalian antara dua variabel dependen yaitu $-5xy$ dan xy serta terdapat suku yang memuat pangkat lebih dari satu yaitu y^2 .

F. Model Matematika

Model matematika merupakan model yang merepresentasikan fenomena nyata menggunakan konsep dan simbol-simbol matematika (Bender, 1978).

Adapun langkah-langkah pemodelan matematika menurut Bender (1978) adalah sebagai berikut:

1. Identifikasi masalah yaitu menentukan fenomena atau proses nyata yang akan dijadikan objek pemodelan.
2. Asumsi dan simplifikasi menyederhanakan sistem dengan mengabaikan faktor-faktor yang tidak terlalu penting.
3. Formulasi model yaitu menyusun persamaan atau fungsi matematika yang menggambarkan hubungan antara variabel-variabel dalam sistem.
4. Analisis model yaitu menggunakan metode matematika atau numerik untuk memahami perilaku model tersebut.
5. Verifikasi dan validasi membandingkan hasil dari model dengan data nyata untuk menguji seberapa baik model tersebut merepresentasikan sistem yang sesungguhnya.
6. Interpretasi dan prediksi menggunakan model untuk membuat prediksi atau mendapatkan wawasan yang lebih dalam tentang sistem yang dipelajari.

Salah satu contoh pemodelan matematika yaitu pemodelan peran informasi terhadap penyebaran belanja *online*. Menurut Sharma (2021), penyebaran informasi mengenai belanja *online* memiliki kemiripan dengan penyebaran epidemi.

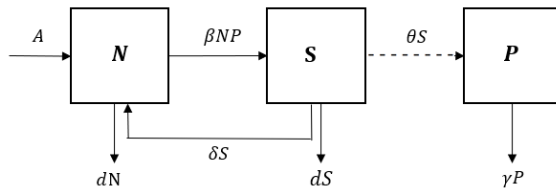
Beberapa poin yang menjadi dasar dalam membangun model ini antara lain:

1. Dalam pemodelan epidemi, transmisi bilinear sering digunakan sebagai pendekatan utama. Oleh karena itu, laju transmisi bilinear juga dimasukkan dalam pengembangan model ini.

2. Pada model kompartemen klasik, seperti SIR, SIS, atau SEIR, laju rekrutmen yang bersifat konstan merupakan salah satu konsep dasar yang umum diterapkan. Karena itu, model ini mengasumsikan adanya laju rekrutmen yang konstan.
3. Dalam model kompartemen epidemi, perpindahan populasi antar kompartemen umumnya terjadi dengan laju yang sebanding dengan jumlah populasi di kompartemen tertentu.

Berdasarkan konsep epidemiologi di atas, proses pemodelan dibagi menjadi dua populasi, yaitu populasi pembelanja *offline* $N(t)$ dan populasi pembelanja *online* $S(t)$, serta variabel $P(t)$ sebagai kepadatan kumulatif informasi yang dihasilkan oleh individu $S(t)$. Oleh karena itu, tingkat pertumbuhan kepadatan informasi berbanding lurus dengan ukuran populasi pembelanja *online* $S(t)$.

Model NSP direpresentasikan pada Gambar 2.1 sebagai berikut.



Gambar 2.1: Diagram Kompartemen Model NSP

Variabel dan paramater yang digunakan dalam model ini ditunjukkan pada Tabel 2.1 dan 2.2 adalah sebagai berikut.

Tabel 2.1: Variabel Model NSP (Pembelanja *Offline*, Pembelanja *Online*, Kepadatan Kumulatif Informasi)

Variabel	Keterangan	Satuan
$N(t)$	Populasi pembelanja <i>offline</i>	Individu
$S(t)$	Populasi pembelanja <i>online</i>	Individu
$P(t)$	Kepadatan kumulatif informasi	-

Tabel 2.2: Parameter Model NSP (Pembelanja *Offline*, Pembelanja *Online*, Kepadatan Kumulatif Informasi)

Parameter	Keterangan	Satuan
A	Seseorang yang baru memulai berbelanja	$\frac{1}{\text{waktu}}$
β	Tingkat perpindahan individu dari pembelanja <i>offline</i> ke <i>online</i>	$\frac{1}{\text{waktu}}$
δ	Tingkat perpindahan individu dari pembelanja <i>online</i> kembali ke <i>offline</i>	$\frac{1}{\text{waktu}}$
θ	Tingkat informasi dihasilkan	$\frac{1}{\text{waktu}}$
γ	Tingkat penurunan informasi	$\frac{1}{\text{waktu}}$
d	Tingkat individu keluar dari sistem belanja	$\frac{1}{\text{waktu}}$

Berdasarkan Gambar 2.1, asumsi untuk model ini adalah sebagai berikut:

1. Seseorang mulai berbelanja dari sumber *nononline* langsung bergabung dengan kelas $N(t)$ dengan laju A .
2. Individu dari kelas $N(t)$ berpindah ke kelas $S(t)$ setelah mendapat informasi tentang manfaat belanja *online* dengan laju β .
3. Individu kelas $S(t)$ meninggalkan kelas belanja *online* dan

bergabung dengan kelas $N(t)$ karena beberapa alasan, seperti kurangnya pengetahuan tentang teknologi, kualitas produk, dan lain sebagainya dengan laju δ .

4. Individu keluar (ketidakaktifan dan kematian) dari masing-masing sistem belanja dengan laju $\mathbf{d}$.
5. Tingkat informasi yang dihasilkan oleh individu pembelanja *online* dinyatakan dengan θ .
6. Tingkat penurunan informasi karena ketidakefektifan dan masalah sosial dalam populasi atau faktor lainnya dinyatakan dengan γ .

Berdasarkan asumsi, maka sistem otonomus nonlinier untuk model ini adalah sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = A - \beta NP - \mathbf{d}N + \delta S \\ \frac{dS}{dt} = \beta NP - \mathbf{d}S - \delta S \\ \frac{dP}{dt} = \theta S - \gamma P \end{cases} \quad (2.10)$$

Berdasarkan sistem (2.10), populasi pembelanja *offline* mengalami peningkatan jumlah individu, yaitu masuknya individu baru ke dalam sistem dan perpindahan dari populasi pembelanja *online*. Di sisi lain, populasi pembelanja *offline* berkurang akibat individu yang keluar dari sistem, misalnya karena tidak lagi aktif atau meninggal.

Populasi pembelanja *online* bertambah karena adanya perpindahan individu dari populasi pembelanja *offline*, namun juga mengalami penurunan, yaitu karena perpindahan kembali ke

populasi pembelanja *offline* dan keluarnya individu dari sistem karena ketidakaktifan atau faktor lainnya.

Sementara itu, informasi promosi yang dihasilkan oleh populasi pembelanja *online* akan meningkat seiring bertambahnya jumlah individu pembelanja *online*. Namun, informasi tersebut juga dapat menurun akibat penurunan akibat ketidakefektifan, permasalahan sosial dalam populasi, atau faktor lainnya.

G. Solusi Positif dan Terbatas

Untuk memastikan solusi model dapat diinterpretasikan dalam konteks biologis, maka solusinya harus positif dan terbatas. Selain itu, interpretasi tersebut menjadikan model lebih realistis (Wiraya, dkk., 2023).

Berikut contoh menganalisis kepositifan dan keterbatasan solusi dari model Sharma (2021).

Contoh 2.7

Diberikan sistem otonomus nonlinier sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = A - \beta NP - \mathbf{d}N + \delta S \\ \frac{dS}{dt} = \beta NP - \mathbf{d}S - \delta S \\ \frac{dP}{dt} = \theta S - \gamma P \end{cases} \quad (2.11)$$

Teorema 2.7.1 (Solusi Positif) (Sharma, 2021)

Semua solusi dari sistem (2.11) adalah positif, yaitu $N(t), S(t), P(t) \geq 0$ untuk setiap $t > 0$.

Bukti:

Akan dibuktikan persamaan pertama dari sistem (2.11) memiliki

solusi positif

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= A - \beta NP - \mathbf{d}N + \delta S \\ \Leftrightarrow \frac{dN(t)}{dt} &\geq -(\beta P + \mathbf{d})N\end{aligned}\quad (2.12)$$

Pertidaksamaan (2.12) diselesaikan dengan metode variabel terpisah, yaitu dengan memisahkan variabel yang sama, kemudian kedua ruas diintegrasikan, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \int \frac{dN(t)}{N} &\geq \int -(\beta P + \mathbf{d})dt \\ \Leftrightarrow \int \frac{dN(t)}{N} &\geq -\int \beta P dt - \int \mathbf{d}dt \\ \Leftrightarrow \ln|N(t)| &\geq \left(-\int \beta P dt\right) - \mathbf{d}t + C_1,\end{aligned}$$

dengan C_1 adalah konstanta

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow e^{\ln|N(t)|} &\geq e^{(-\int \beta P dt) - \mathbf{d}t + C_1} \\ \Leftrightarrow N(t) &\geq e^{-\int \beta P dt} e^{-\mathbf{d}t} k_1,\end{aligned}\quad (2.13)$$

dengan $k_1 = e^{C_1}$ adalah konstanta

Ketika $t = 0$, maka

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow N(0) &\geq e^{-\int \beta P dt} e^{-\mathbf{d}0} k_1 \\ \Leftrightarrow N(0) &\geq e^{-\int \beta P dt} k_1 \\ \Leftrightarrow N(0) e^{\int \beta P dt} &\geq k_1 e^{-\int \beta P dt} e^{\int \beta P dt} \\ \Leftrightarrow N(0) e^{\int \beta P dt} &\geq k_1\end{aligned}\quad (2.14)$$

Substitusi (2.14) ke (2.13), sehingga

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow N(t) \geq e^{-\int \beta P dt} e^{-\mathbf{d}t} N(0) e^{\int \beta P dt} \\
 &\Leftrightarrow N(t) \geq N(0) e^{-\mathbf{d}t} \\
 &\Leftrightarrow N(t) \geq N(0) \cdot 0, \quad \text{karena } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\mathbf{d}t} = 0 \\
 &\Leftrightarrow N(t) \geq 0
 \end{aligned}$$

Jadi terbukti, solusi persamaan pertama dari sistem (2.11) adalah positif, yaitu $N(t) \geq 0$ untuk setiap $t > 0$.

Dengan pendekatan pembuktian yang serupa, dapat ditunjukkan bahwa solusi untuk persamaan kedua dan ketiga pada sistem (2.11) juga bernilai positif, yaitu $S(t) \geq 0$ dan $P(t) \geq 0$.

Teorema 2.7.2 (Solusi Terbatas) (Sharma, 2021)

Sistem (2.11) memiliki solusi yang terbatas pada daerah

$$\Omega = \left\{ (N(t), S(t), P(t)) : 0 \leq N(t), S(t) \leq \frac{A}{\mathbf{d}}, 0 \leq P(t) \leq \frac{\theta A}{\gamma \mathbf{d}} = P_M \right\}$$

Bukti:

Akan dibuktikan $0 \leq N(t), S(t) \leq \frac{A}{\mathbf{d}}$.

Jumlah populasi dari sistem (2.11) adalah $J(t) = N(t) + S(t)$, turunkan $J(t)$ terhadap t , sehingga

$$\begin{aligned}
 \frac{dJ(t)}{dt} &= A - \beta NP - \mathbf{d}N + \delta S + \beta NP - \mathbf{d}S - \delta S \\
 &\Leftrightarrow \frac{dJ(t)}{dt} = A - \mathbf{d}N - \mathbf{d}S \\
 &\Leftrightarrow \frac{dJ(t)}{dt} = A - \mathbf{d}(N + S) \\
 &\Leftrightarrow \frac{dJ(t)}{dt} = A - \mathbf{d}J(t)
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Persamaan (2.15) diselesaikan dengan metode variabel terpisah, yaitu dengan memisahkan variabel yang sama, kemudian kedua ruas diintegrasikan, sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow \int \frac{dJ(t)}{A - \mathbf{d}J(t)} \leq \int dt \quad (2.16)$$

misalkan

$$u = A - \mathbf{d}J(t), \text{ turunan } u \text{ terhadap } J(t), \text{ adalah} \quad (2.17)$$

$du = -\mathbf{d}dJ(t)$, sehingga

$$dJ(t) = -\frac{1}{\mathbf{d}}du \quad (2.18)$$

substitusi (2.17) dan (2.18) ke (2.16), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int \frac{-\frac{1}{\mathbf{d}}du}{u} &\leq t + C_4, \quad \text{dengan } C_4 \text{ adalah konstanta} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{\mathbf{d}} \int \frac{du}{u} &\leq t + C_4 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{\mathbf{d}} \ln|u| &\leq t + C_4 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{\mathbf{d}} \ln|A - \mathbf{d}J(t)| &\leq t + C_4 \\ \Leftrightarrow \ln|A - \mathbf{d}J(t)| &\geq -\mathbf{d}t - \mathbf{d}C_4 \\ \Leftrightarrow e^{\ln|A - \mathbf{d}J(t)|} &\geq e^{-\mathbf{d}(t+C_4)} \\ \Leftrightarrow A - \mathbf{d}J(t) &\geq k_4 e^{-\mathbf{d}t}, \quad \text{dengan } k_4 = e^{\mathbf{d}C_4} \text{ adalah konstanta} \\ \Leftrightarrow -\mathbf{d}J(t) &\geq -A + k_4 e^{-\mathbf{d}t} \\ \Leftrightarrow J(t) &\leq \frac{A - k_4 e^{-\mathbf{d}t}}{\mathbf{d}} \end{aligned}$$

Ketika $t = 0$, maka

$$\Leftrightarrow J(0) \leq \frac{A - k_4 e^{-d_0}}{d} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow J(0) &\leq \frac{A - k_4}{d} \\ \Leftrightarrow dJ(0) &\leq A - k_4 \\ \Leftrightarrow A - dJ(0) &\geq k_4 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Substitusi (2.20) ke (2.19)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow J(t) &\leq \frac{A + (A - dJ(0))e^{-dt}}{d} \\ \Leftrightarrow J(t) &\leq \frac{A}{d} + \frac{Ae^{-dt}}{d} - J(0)e^{-dt} \\ \Leftrightarrow J(t) &\leq \frac{A}{d} + 0 + 0, \quad \text{karena } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-dt} = 0 \\ \Leftrightarrow J(t) &\leq \frac{A}{d} \end{aligned}$$

Dari hasil perhitungan diperoleh bahwa $J(t) \leq \frac{A}{d}$, yang menunjukkan bahwa jumlah total populasi dalam sistem selalu dibatasi oleh $\frac{A}{d}$. Karena $J(t) = N(t) + S(t)$ dan kedua komponen $N(t)$ serta $P(t)$ merupakan bagian dari $J(t)$, maka secara langsung dapat disimpulkan terbukti bahwa $0 \leq N(t), S(t) \leq \frac{A}{d}$. Selanjutnya akan dibuktikan $0 \leq P \leq \frac{\theta A}{d}$

$$\frac{dP(t)}{dt} = \theta S - \gamma P$$

Diketahui $S \leq \frac{A}{d}$, maka

$$\Leftrightarrow \frac{dP(t)}{dt} \leq \frac{\theta A}{d} - \gamma P(t) \quad (2.21)$$

Pertidaksamaan (2.21) diselesaikan dengan metode variabel

terpisah, yaitu dengan memisahkan variabel yang sama, kemudian kedua ruas diintegralkan, sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow \int \frac{dP(t)}{\frac{\theta A}{\mathbf{d}} - \gamma P(t)} \leq \int dt \quad (2.22)$$

misalkan

$$v = \frac{\theta A}{\mathbf{d}} - \gamma P(t), \text{ turunan } v \text{ terhadap } P(t), \text{ adalah} \quad (2.23)$$

$dv = -\gamma dP(t)$, sehingga

$$dP(t) = -\frac{1}{\gamma} dv \quad (2.24)$$

substitusi (2.23) dan (2.24) ke (2.22), sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow \int \frac{-\frac{1}{\gamma} dv}{v} \leq t + C_5, \quad \text{dengan } C_5 \text{ adalah konstanta}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\gamma} \int \frac{dv}{v} \leq t + C_5$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\gamma} \ln|v| \leq t + C_5$$

$$\Leftrightarrow \ln \left| \frac{\theta A}{\mathbf{d}} - \gamma P(t) \right| \geq -\gamma t - \gamma C_5$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln \left| \frac{\theta A}{\mathbf{d}} - \gamma P(t) \right|} \geq e^{-\gamma(t+C_5)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\theta A}{\mathbf{d}} - \gamma P(t) \geq e^{-\gamma t} e^{\gamma C_5}$$

$$\Leftrightarrow -\gamma P(t) \geq -\frac{\theta A}{\mathbf{d}} + k_5 e^{-\gamma t}, \quad \text{dengan } k_5 = e^{\gamma C_5}$$

$$\Leftrightarrow P(t) \leq \frac{\theta A}{\gamma \mathbf{d}} - \frac{k_5 e^{-\gamma t}}{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow P(t) \leq P_M = \frac{\theta A}{\gamma \mathbf{d}}, \quad \text{karena } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\gamma t} = 0$$

Karena $P(t) \geq 0$, maka terbukti $0 \leq P(t) \leq P_M = \frac{\theta A}{\gamma \mathbf{d}}$. Sehingga terbukti sistem (2.11) terbatas pada daerah

$$\Omega = \left\{ (N(t), S(t), P(t)) : 0 \leq N(t), S(t) \leq \frac{A}{\mathbf{d}}, 0 \leq P(t) \leq \frac{\theta A}{\gamma \mathbf{d}} = P_M \right\}$$

H. Analisis Kestabilan Lokal

Analisis kestabilan titik kesetimbangan berperan penting untuk memahami perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan seiring waktu. Melalui analisis ini, dapat ditentukan bahwa sistem akan kembali ke titik kesetimbangan (stabil) atau menjauhi titik kesetimbangan (tidak stabil) (Wei, 2023).

Proses analisis kestabilan titik kesetimbangan pada sistem otonomus nonlinier melibatkan linierisasi, penggunaan matriks Jacobian, penentuan nilai eigen serta kriteria Routh-Hurwitz untuk memastikan bahwa semua nilai eigen bagian riil bersifat negatif, sehingga sistem dinyatakan stabil (Murray, 2002).

1. Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan merepresentasikan keadaan ketika sistem tidak mengalami perubahan, atau semua laju perubahan bernilai nol (Strogatz, 2015).

Diberikan sistem otonomus sebagai berikut

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (2.25)$$

dengan $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, suatu titik $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$ dikatakan titik kesetimbangan dari sistem (2.25) jika $\vec{f}(\vec{x}^*) = 0$ (Wiggins, 2003).

Contoh 2.8

Menentukan titik kesetimbangan dari sistem otonomus nonlinier (2.9), yaitu

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x - 5xy \\ \frac{dy}{dt} = 3y + xy - 3y^2 \end{cases}$$

Untuk menemukan titik kesetimbangan dari sistem (2.9), dapat dilakukan dengan mengubah $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$, sehingga sistem (2.9) menjadi

$$\begin{cases} 0 = 10x - 5xy \\ 0 = 3y + xy - 3y^2 \end{cases} \quad (2.26)$$

Untuk persamaan pertama dari sistem (2.26), dapat diselesaikan dengan pefaktoran, sehingga

$$0 = 10x - 5xy$$

$$0 = 5x(2 - y)$$

Diperoleh $x = 0$ atau $y = 2$.

Jika $x = 0$, maka persamaan kedua dari sistem (2.26) menjadi

$$0 = 3y + xy - 3y^2$$

$$0 = 3y + 0 \cdot y - 3y^2$$

$$0 = 3y(1 - y)$$

Diperoleh $y_1 = 0$ atau $y_2 = 1$, sehingga titik kesetimbangan yang didapat jika $x = 0$ adalah $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$ dan $(x_2^*, y_2^*) = (0, 1)$.

Selanjutnya jika $y = 2$, maka persamaan kedua dari sistem (2.26) menjadi

$$0 = 3y + xy - 3y^2$$

$$0 = 3.2 + x.2 - 3.(2)^2$$

$$0 = 2(x - 3)$$

Diperoleh $x = 3$, sehingga titik kesetimbangan yang didapat jika $y = 2$ adalah $(x_3^*, y_3^*) = (3, 2)$.

Jadi, sistem (2.26) memiliki tiga titik kesetimbangan, yaitu $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$, $(x_2^*, y_2^*) = (0, 1)$, dan $(x_3^*, y_3^*) = (3, 2)$.

2. Bilangan Reproduksi Dasar R_0

Menurut Bhattacharya dkk. (2019), bilangan reproduksi dasar R_0 merupakan ukuran yang digunakan untuk mengukur tingkat penyebaran informasi dalam kampanye pada *viral marketing*, penyebaran informasi ini serupa dengan penyebaran penyakit dalam model epidemiologi. Apabila nilai $R_0 > 1$ maka pesan kampanye akan menyebar secara endemik dalam populasi, artinya kampanye *viral marketing* akan terus menyebar. Sebaliknya, jika $R_0 < 1$ maka pesan kampanye cenderung tidak bertahan atau berangsur-angsur hilang dari populasi.

Dalam penelitian ini, bilangan reproduksi dasar R_0 digunakan untuk menganalisis sejauh mana pengaruh konten promosi yang dilakukan *beauty influencer* dapat mendorong perpindahan konsumen dari pembelian *offline*

ke pembelanja *online*. Nilai R_0 menggambarkan tingkat keberlanjutan dan pertumbuhan fenomena belanja *online* dalam suatu sistem. Jika $R_0 < 1$, maka konten promosi oleh *beauty influencer* tidak cukup efektif untuk mempertahankan tren belanja *online*, sehingga jumlah pembelanja *online* cenderung menurun seiring waktu. Jika $R_0 > 1$, maka konten promosi oleh *influencer* efektif dalam mendorong peralihan dari pembelanja *offline* ke *online*, sehingga belanja *online* dapat terus berkembang dan bertahan.

Misalkan $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ sebagai jumlah individu pada subpopulasi ke- j , dengan $u_j \geq 0$. Didefinisikan $\mathcal{F}_i$ yang menggambarkan laju pertambahan individu pada subpopulasi ke- i , misalnya karena pengaruh promosi atau perpindahan dari pembelanja *offline*. Sementara itu, $\mathcal{V}_i$ menggambarkan laju perpindahan individu antar kelompok dalam sistem belanja *online*, misalnya kembali menjadi pembelanja *offline*, atau keluarnya individu dari sistem.

Matriks transmisi W merepresentasikan laju penambahan pembelanja *online* baru, sedangkan matriks transisi Z menggambarkan perpindahan antar kelompok subpopulasi yang terlibat dalam aktivitas belanja *online*. Kedua matriks tersebut berukuran $n \times n$ dan masing-masing diperoleh dari turunan parsial fungsi $\mathcal{F}_i$ dan $\mathcal{V}_i$ terhadap variabel u_j , yaitu:

$$W = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial u_j} \right), \quad Z = \left(\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial u_j} \right), \quad \text{untuk } i, j = 1, 2$$

Kemudian menyelesaikan matriks generasi selanjutnya berikut

$$G = WZ^{-1}$$

Sehingga bilangan reproduksi dasar diperoleh sebagai

$$R_0 = \rho(G) = \rho(WZ^{-1})$$

dengan $\rho(G)$ adalah nilai eigen terbesar (radius spektral) dari matriks G (Driessche dan Watmough, 2002).

3. Linierisasi

Menganalisis sistem nonlinier sering kali tidak mudah karena kompleksitasnya yang tinggi. Oleh karena itu, diperlukan proses linierisasi untuk menyederhanakan sistem sehingga lebih mudah dikaji. Proses linierisasi ini mengubah sistem otonomus nonlinier menjadi bentuk yang linier dengan memanfaatkan matriks Jacobian untuk mendekati perilaku sistem tersebut, yang pada umumnya menghasilkan kestabilan lokal dan menggambarkan dinamika sistem di sekitar titik kesetimbangan (Khalil, 2002).

Proses mengubah sistem otonomus nonlinier (2.8) menjadi sistem otonomus linier dapat menggunakan pendekatan ekspansi deret Taylor di sekitar titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^* \cdots, x_n^*)$ yaitu (Perko, 2001).

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(\vec{x}^*) + \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \cdots + \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \\
&\quad \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 + \cdots + \frac{\partial^2 f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n^2}(x_n - x_n^*)^2 \right] \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1^k}(x_1 - x_1^*)^k + \cdots + \frac{\partial^k f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n^k}(x_n - x_n^*)^k \right] \\
\\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(\vec{x}^*) + \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \cdots + \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \\
&\quad \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 + \cdots + \frac{\partial^2 f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n^2}(x_n - x_n^*)^2 \right] \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1^k}(x_1 - x_1^*)^k + \cdots + \frac{\partial^k f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n^k}(x_n - x_n^*)^k \right] \\
\\
&\quad \vdots \\
\\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(\vec{x}^*) + \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \cdots + \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \\
&\quad \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 + \cdots + \frac{\partial^2 f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n^2}(x_n - x_n^*)^2 \right] \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1^k}(x_1 - x_1^*)^k + \cdots + \frac{\partial^k f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n^k}(x_n - x_n^*)^k \right]
\end{aligned}$$

Dalam melakukan linierisasi persamaan (2.8) di sekitar titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, suku-suku yang berpangkat lebih dari satu pada ekspansi deret Taylor sebelumnya diabaikan, menghasilkan bentuk yang lebih sederhana yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(\vec{x}^*) + \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \cdots + \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(\vec{x}^*) + \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \cdots + \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(\vec{x}^*) + \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \cdots + \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Misalkan

$$v_1 = x_1 - x_1^*, v_2 = x_2 - x_2^*, \dots, v_n = x_n - x_n^* \tag{2.28}$$

sehingga diperoleh:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt}, \frac{dv_2}{dt} = \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dv_n}{dt} = \frac{dx_n}{dt} \tag{2.29}$$

Substitusi persamaan (2.28) dan (2.29) ke dalam sistem persamaan (2.27), sehingga menjadi:

$$\begin{aligned}
\frac{dv_1}{dt} &= f_1(\vec{x}^*) + \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1}v_1 + \cdots + \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n}v_n \\
\frac{dv_2}{dt} &= f_2(\vec{x}^*) + \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1}v_1 + \cdots + \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n}v_n \\
&\vdots \\
\frac{dv_n}{dt} &= f_n(\vec{x}^*) + \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1}v_1 + \cdots + \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n}v_n
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Berdasarkan sistem (2.8), dengan titik kesetimbangannya adalah $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, sehingga didapatkan $f_1(x^*) = f_2(x^*) = \dots = f_n(x^*) = 0$. Dengan demikian, diperoleh

persamaan (2.30) atau

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = Jf(\vec{x}^*)\vec{v} \quad (2.31)$$

dengan J merupakan matriks Jacobian di sekitar titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, yaitu:

$$J(\vec{f}(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^*) \end{bmatrix}$$

Matriks Jacobian untuk persamaan diferensial berdimensi n merupakan matriks berukuran $n \times n$, dengan setiap elemen pada baris ke- i dan kolom ke- j merupakan turunan parsial dari fungsi ke- i terhadap variabel ke- j (Ledder, 2013). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa sistem persamaan (2.31) merupakan hasil dari proses linierisasi yang dilakukan terhadap sistem otonomus nonlinier (2.8).

Berikut adalah contoh menentukan matriks Jacobi.

Contoh 2.9

Diberikan sistem otonomus nonlinier (2.9) sebagai berikut

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x - 5xy \\ \frac{dy}{dt} = 3y + xy - 3y^2 \end{cases}$$

Misalkan $f_1(x, y) = 10x - 5xy$ dan $f_2(x, y) = 3y + xy - 3y^2$,

matriks Jacobian untuk sistem (2.9) adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 J(x, y) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(10x - 5xy) & \frac{\partial}{\partial y}(10x - 5xy) \\ \frac{\partial}{\partial x}(3y + xy - 3y^2) & \frac{\partial}{\partial y}(3y + xy - 3y^2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 10 - 5y & -5x \\ y & 3 + x - 6y \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Jadi matriks Jacobian dari sistem (2.9) adalah

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 10 - 5y & -5x \\ y & 3 + x - 6y \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

4. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.8.1 (Anton dan Rorres, 2014)

Jika A merupakan matriks berukuran $n \times n$, maka vektor tak nol $\vec{x}$ di dalam $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari matriks A jika $A\vec{x}$ adalah skalar λ dikalikan dengan $\vec{x}$, yaitu:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (2.33)$$

dengan λ merupakan suatu skalar yang disebut nilai eigen dari A , dan $\vec{x}$ disebut vektor eigen yang sesuai dengan λ .

Untuk mencari nilai eigen dari A , persamaan (2.33), dapat ditulis dalam bentuk

$$(\lambda I - A)\vec{x} = 0 \quad (2.34)$$

dengan I adalah matriks identitas berukuran $n \times n$. Supaya persamaan ini memiliki solusi tak nol (non-trivial), maka determinan dari $(\lambda I - A)$ harus sama dengan nol, yaitu

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (2.35)$$

Persamaan (2.35) dikenal sebagai persamaan karakteristik dari matriks A , dan ketika determinan diperluas akan diperoleh polinomial karakteristik dalam bentuk:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n \quad (2.36)$$

Akar-akar dari polinomial (2.36) adalah nilai-nilai eigen dari matriks A .

Determinan matriks $|\lambda I - A|$ dapat dihitung dengan berbagai metode, salah satunya adalah metode ekspansi kofaktor.

Teorema 2.8.2 (Ekspansi Kofaktor) (Lay, dkk., 2016)

Diberikan matriks $A = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$, dengan a_{ij} adalah elemen pada baris ke- i dan kolom ke- j . Kofaktor C_{ij} dari elemen a_{ij} didefinisikan sebagai:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} \quad (2.37)$$

dengan A_{ij} adalah submatriks yang diperoleh dari A dengan menghapus baris ke- i dan kolom ke- j .

Maka, determinan dari A dapat dihitung melalui ekspansi pada baris pertama sebagai:

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

Secara umum, ekspansi kofaktor pada baris ke- i adalah

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

Sedangkan ekspansi kofaktor pada kolom ke- j adalah

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

Tanda positif atau negatif dari setiap kofaktor C_{ij} ditentukan oleh faktor $(-1)^{i+j}$, yang mengikuti pola tanda seperti papan catur sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Pola ini berlaku untuk semua ukuran matriks, tanpa memperhatikan nilai dari elemen a_{ij} itu sendiri.

Contoh 2.10

Mencari nilai eigen dari sistem otonomus nonlinier (2.9)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x - 5xy \\ \frac{dy}{dt} = 3y + xy - 3y^2 \end{cases}$$

Untuk menentukan nilai eigen dari sistem otonomus nonlinier, maka dilakukan dengan terlebih dahulu menentukan titik kesetimbangan dan matriks Jacobian dari sistem (2.9). Berdasarkan contoh (2.8), telah diperoleh titik kesetimbangan dari sistem (2.9) yaitu $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$, $(x_2^*, y_2^*) =$, dan

$(x_3^*, y_3^*) = (3, 2)$, kemudian berdasarkan contoh (2.9), telah diperoleh matriks Jacobian dari sistem (2.9) yaitu

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 10 - 5y & -5x \\ y & 3 + x - 6y \end{bmatrix}$$

Untuk memperoleh nilai eigen dari sistem (2.9), substitusi titik kesetimbangan ke matriks Jacobian (2.9).

Untuk $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$, diperoleh

$$\begin{aligned} J(x_1^*, y_1^*) &= \begin{bmatrix} 10 - 5y_1^* & -5x_1^* \\ y_1^* & 3 + x_1^* - 6y_1^* \end{bmatrix} \\ J(0, 0) &= \begin{bmatrix} 10 - 5.0 & -5.0 \\ 0 & 3 + 0 - 6.0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sehingga nilai eigen dari $J(0, 0)$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} |J(0, 0) - \lambda I| &= 0 \\ \left| \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ \begin{vmatrix} 10 - \lambda & 0 \\ 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema (2.8.2), maka

$$(10 - \lambda)|3 - \lambda| + 0|0| = 0$$

sehingga diperoleh $\lambda_1 = 10$ dan $\lambda_2 = 3$.

Untuk $(x_2^*, y_2^*) = (0, 1)$, diperoleh

$$\begin{aligned} J(x_2^*, y_2^*) &= \begin{bmatrix} 10 - 5y_2^* & -5x_2^* \\ y_2^* & 3 + x_2^* - 6y_2^* \end{bmatrix} \\ J(0, 1) &= \begin{bmatrix} 10 - 5.1 & -5.0 \\ 1 & 3 + 0 - 6.1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sehingga nilai eigen dari $J(0, 1)$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} |J(0, 1) - \lambda I| &= 0 \\ \left| \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 0 \\ 1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema (2.8.2), maka

$$(5 - \lambda)|-3 - \lambda| + 1|0| = 0$$

sehingga diperoleh $\lambda_3 = 5$ dan $\lambda_4 = -3$.

Untuk $(x_3^*, y_3^*) = (3, 2)$, diperoleh

$$\begin{aligned} J(x_3^*, y_3^*) &= \begin{bmatrix} 10 - 5y_3^* & -5x_3^* \\ y_3^* & 3 + x_3^* - 6y_3^* \end{bmatrix} \\ J(3, 2) &= \begin{bmatrix} 10 - 5 \cdot 2 & -5 \cdot 3 \\ 2 & 3 + 3 - 6 \cdot 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -15 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sehingga nilai eigen dari $J(3, 3)$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} |J(0, 1) - \lambda I| &= 0 \\ \left| \begin{bmatrix} 0 & -15 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ \begin{vmatrix} -\lambda & -15 \\ 2 & -6 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema (2.8.2), maka

$$\begin{aligned} (-\lambda)|-6 - \lambda| + (-15)|-2| &= 0 \\ (-\lambda)(-6 - \lambda) + 30 &= 0 \\ \lambda^2 + 6\lambda + 30 &= 0 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $\lambda_5 = -3 + i\sqrt{21}$ dan $\lambda_6 = -3 - i\sqrt{21}$.

5. Kestabilan Titik Keseimbangan

Kestabilan titik kesetimbangan $\vec{x}^* \in \mathbb{R}$ pada sistem (2.8) dapat ditentukan dengan menganalisis nilai eigen dari matriks Jacobian $J(\vec{f}(\vec{x}^*))$. Menurut Wiggins (2003), sistem yang direpresentasikan sebagai $\frac{d\vec{x}}{dt} = J(\vec{f}(\vec{x}^*))\vec{x}$, dengan J sebagai matriks Jacobian berukuran $n \times n$. Berikut adalah penjelasan mengenai titik kesetimbangan $\vec{x}^*$:

1. Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = 0$ dianggap stabil jika dan hanya jika bagian riil dari semua nilai eigen adalah negatif atau sama dengan nol.
2. Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = 0$ dianggap stabil asimtotik jika dan hanya jika bagian riil dari semua nilai eigen bernilai negatif.
3. Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = 0$ dianggap tidak stabil jika terdapat setidaknya satu nilai eigen dengan bagian riil yang positif.

Selanjutnya, Boyce dan DiPrima (2009) menjelaskan mengenai berbagai kemungkinan nilai akar dari persamaan karakteristik yang digunakan untuk menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan. Klasifikasi jenis kestabilan tersebut disajikan dalam Tabel 2.3 sebagai berikut.

Tabel 2.3: Jenis-jenis Kestabilan Titik Keseimbangan

Nilai Akar-akar Persamaan Karakteristik	Kestabilan	Bentuk
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	Simpul
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Stabil asimtotik	Simpul
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Tidak stabil	Titik pelana
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	Simpul atau spiral
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil asimtotik	Simpul atau spiral
$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\mu, \alpha > 0$	Tidak Stabil	Spiral
$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\mu, \alpha < 0$	Stabil Asimtotik	Spiral
$\lambda_1, \lambda_2 = \pm i\mu$	Tidak dapat ditentukan	Titik pusat atau spiral

Contoh 2.11

Berikut adalah contoh menentukan kestabilan titik kesetimbangan dari sistem otonomus nonlinier (2.9)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x - 5xy \\ \frac{dy}{dt} = 3y + xy - 3y^2 \end{cases}$$

Kestabilan titik kesetimbangan pada sistem (2.9) dianalisis melalui nilai eigen matriks Jacobian. Nilai eigen untuk masing-masing titik kesetimbangan diperoleh dari contoh (2.8). Jenis kestabilan titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan merujuk pada Tabel 2.3 (Boyce dan DiPrima, 2009).

Berikut adalah jenis kestabilan titik kesetimbangan untuk sistem otonomus nonlinier (2.9).

Tabel 2.4: Contoh Kestabilan Titik Kesetimbangan

No	Titik Kesetimbangan	Nilai Eigen	Kestabilan Titik Kesetimbangan
1.	$(0, 0)$	$\lambda_1 = 10$ dan $\lambda_2 = 3$	Tidak stabil karena $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$
2.	$(0, 1)$	$\lambda_3 = 5$ dan $\lambda_4 = -3$	Tidak stabil karena $\lambda_4 < 0 < \lambda_3$
3.	$(3, 2)$	$\lambda_5 = -3 \pm i\sqrt{21}$	Stabil asimtotik karena $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\mu, \alpha < 0$

6. Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria Routh-Hurwitz digunakan untuk memastikan bahwa seluruh nilai eigen dari polinomial karakteristik memiliki bagian riil yang negatif.

Diberikan sebuah persamaan karakteristik dalam bentuk polinomial sebagai berikut:

$$p(\lambda) = m_0\lambda^n + m_1\lambda^{n-1} + \cdots + m_{n-1}\lambda + m_n \quad (2.38)$$

dengan koefisien m_i berupa bilangan riil dan $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$. Nilai eigen dari persamaan (2.38) memiliki

bagian riil negatif jika dan hanya jika

$$\begin{aligned}
 R_1 &= |m_1| > 0 \\
 R_2 &= \begin{vmatrix} m_1 & m_3 \\ 1 & m_2 \end{vmatrix} > 0 \\
 R_3 &= \begin{vmatrix} m_1 & m_3 & m_5 \\ 1 & m_2 & m_4 \\ 0 & m_1 & m_3 \end{vmatrix} > 0 \\
 R_k &= \begin{vmatrix} m_1 & m_3 & m_5 & \cdots & m_{2n-1} \\ 1 & m_2 & m_4 & \cdots & m_{2n-2} \\ 0 & m_1 & m_3 & \cdots & m_{2n-3} \\ 0 & 1 & m_2 & \cdots & m_{2n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_k \end{vmatrix} > 0
 \end{aligned}$$

dengan $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Sebagai contoh, untuk persamaan polinomial berderajat tiga

$$\lambda^3 + m_1\lambda^2 + m_2\lambda + m_3 = 0,$$

kondisi yang harus dipenuhi agar semua nilai eigen memiliki bagian riil negatif adalah:

$$m_1 > 0, m_2 > 0, m_1m_2 - m_3 > 0$$

(Murray, 2002).

7. Aturan Tanda Descartes

Aturan Tanda Descartes atau *Descartes' Rule of Sign* berfungsi untuk menentukan banyaknya akar riil positif atau negatif dari suatu polinomial yang memiliki koefisien riil. Penentuan ini didasarkan pada jumlah perubahan tanda dalam urutan koefisien polinomial (Wang, 2004), sebagaimana dijelaskan dalam teorema berikut.

Teorema 2.8.3 (Wang, 2004)

Misalkan suatu polinomial dengan koefisien riil tak nol a_i didefinisikan sebagai

$$p(x) = a_0x^{b_0} + a_1x^{b_1} + \cdots + a_nx^{b_n},$$

dengan b_i merupakan bilangan bulat yang memenuhi ketidaksamaan $0 \leq b_0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n$. Maka banyaknya akar riil positif dari $p(x)$ sama dengan atau kurang dari banyaknya perubahan tanda dalam urutan koefisien $a_0, a_1, \dots, a_n$. Kemudian banyaknya akar riil negatif $p(x)$ sama dengan atau kurang dari jumlah perubahan tanda dalam urutan koefisien dari $p(-x)$.

8. Metode Runge-Kutta Orde 4

Metode Runge-Kutta merupakan metode numerik yang diperoleh melalui pendekatan deret Taylor dan mampu menghasilkan nilai dengan tingkat keakuratan tinggi tanpa memerlukan perhitungan turunan fungsi yang lebih tinggi. Bentuk umum metode Runge-Kutta dinyatakan sebagai

berikut:

$$z_{i+1} = z_i + k_1 r_1 + k_2 r_2 + \cdots + k_n r_n$$

dengan k adalah konstanta dan

$$r_1 = f(y_i, z_i)$$

$$r_2 = f(y_i + b_1 h, z_i + d_{11} r_1 h)$$

$$r_3 = f(y_i + b_2 h, z_i + d_{21} r_1 h + d_{22} r_2 h)$$

$$\vdots$$

$$r_n = f(y_i + b_{n-1} h, z_i + d_{n-1,1} r_1 h + d_{n-1,2} r_2 h + \cdots + d_{n-1,n-1} r_{n-1} h)$$

dengan h adalah panjangnya langkah, b, d adalah konstanta, serta $f(y_i, z_i)$ adalah persamaan diferensial orde pertama z terhadap y .

Metode Runge-Kutta yang paling umum digunakan adalah metode orde 4. Metode ini dipilih karena memiliki akurasi yang lebih baik dibandingkan dengan metode Runge-Kutta pada orde yang lebih rendah. Secara umum, bentuk metode Runge-Kutta orde 4 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6} h (r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4)$$

dengan

$$r_1 = f(y_i, z_i)$$

$$r_2 = f\left(y_i + \frac{1}{2}h, z_i + \frac{1}{2}r_1h\right)$$

$$r_3 = f\left(y_i + \frac{1}{2}h, z_i + \frac{1}{2}r_2h\right)$$

$$r_4 = f(y_i + h, z_i + r_3h)$$

(Chapra dan Canale, 2015).

I. Kajian penelitian terdahulu

Beberapa studi sebelumnya yang dijadikan sebagai acuan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

Tabel 2.5: Kajian Penelitian Terdahulu

No	Judul	Persamaan	Perbedaan
1.	<i>“Modelling the Role of Information on the Spread of Online Shopping”</i> oleh Sharma (2021)	Menganalisis model matematika mengenai belanja <i>online</i> dengan konsep pemodelan epidemi.	Penelitian Sharma mengembangkan model dengan konsep pemodelan epidemi yaitu model berbentuk <i>NSP</i> serta berfokus pada peran penyebaran informasi kumulatif <i>P</i> oleh pembelian <i>online</i> . Sedangkan dalam penelitian ini, variabel <i>P</i>

			diganti dengan banyaknya konten promosi oleh <i>beauty influencer</i> linierisasi F serta menambahkan parameter α untuk menggambarkan perpindahan pembelanja yang tidak terpengaruh oleh <i>beauty influencer</i> .
2.	" <i>Viral Marketing on Social Network: an epidemiological model</i> " oleh Bhattacharya dkk. (2019)	Menggunakan pendekatan epidemiologi untuk memodelkan penyebaran suatu fenomena dalam populasi.	Penelitian Bhattacharya menekankan penyebaran informasi melalui <i>viral marketing</i> di jejaring sosial, menggunakan konsep kompartemen seperti tidak sadar atau <i>unaware</i> (U), penyebar atau <i>broadcaster</i> (B), dan pasif atau <i>inert</i> (I). Sedangkan penelitian ini menggunakan konsep kompartemen seperti pembelanja <i>offline</i> L , pembelanja <i>online</i> O dan banyaknya konten promosi oleh <i>beauty influencer</i> F .

3.	<i>"Impact of Social Media Advertisements on the Dynamics of Online Shopping: A Modeling Study"</i> oleh Misra dkk. (2022)	Menganalisis model matematika mengenai belanja <i>online</i>.	Penelitian Misra dkk. berfokus pada iklan media sosial. Model pada penelitian Misra berbentuk XYZ dengan X (pembelanja <i>offline</i>), Y (pembelanja <i>online</i>), dan Z (jumlah iklan media sosial). Sedangkan penelitian ini lebih menekankan pada banyaknya konten promosi oleh <i>beauty influencer</i> serta bentuk kompartemen penelitian ini yaitu pembelanja <i>offline</i> L, pembelanja <i>online</i> O dan banyaknya konten promosi oleh <i>beauty influencer</i> F.
4.	<i>"How beauty influencers on TikTok can affect the purchasing of cosmetics"</i> oleh Liu (2023)	Menganalisis pengaruh <i>influencer</i>.	Penelitian Liu fokus pada persepsi konsumen (<i>attitude, credibility, interaction</i>), serta menggunakan analisis statistik, sedangkan penelitian ini menggunakan pendekatan matematika dinamis untuk menganalisis kestabilan sistem.

5.	<i>"Modelling the Impact of Social Media on the Adoption of a New Product by Customers"</i> oleh Maurya dkk. (2022)	Menggunakan model matematika nonlinier untuk menganalisis dampak iklan media sosial pada adopsi produk baru, mirip dengan penelitian ini yang fokus pada dinamika belanja <i>online</i> dengan pengaruh <i>beauty influencer</i>.	Penelitian Maurya merupakan generalisasi dari model Difusi Bass dengan memasukkan variabel M sebagai jumlah iklan media sosial pada waktu t, serta sepenuhnya berfokus pada dampak media sosial terhadap adopsi atau penggunaan produk baru. Sedangkan penelitian ini berfokus pada pengaruh <i>beauty influencer</i> terhadap dinamika belanja <i>online</i>
----	--	--	--

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

A. Metode Penelitian

Pada bab ini akan dibahas prosedur penulisan skripsi. Selain itu, disajikan diagram alur untuk mempermudah pemahaman terhadap langkah-langkah penyusunan skripsi.

B. Prosedur Penelitian

Untuk menjawab rumusan masalah yang ada, langkah-langkah penelitian ini dalam mengontruksi model matematika dinamika belanja *online* yang dipengaruhi oleh *influencer* adalah sebagai berikut:

1. Studi Literatur

Pada tahap awal penelitian ini, peneliti mengumpulkan berbagai sumber seperti artikel, jurnal, buku, dan penelitian terkait untuk memperoleh pemahaman yang mendalam tentang pengaruh *influencer* dalam dinamika belanja *online*.

2. Mengkonstruksi Model Matematika

Setelah memperoleh pemahaman tentang masalah terkait *influencer* dan belanja *online*, langkah selanjutnya adalah membuat asumsi model, serta menentukan parameter dan variabel yang akan digunakan untuk mengonstruksi model matematika dinamika belanja *online* dengan pengaruh *influencer*.

3. Menganalisis Model Matematika Belanja *Online* dengan Pengaruh *Influencer*

Setelah model matematika dikonstruksi, langkah selanjutnya adalah menganalisis model. Berikut adalah langkah dalam menganalisis model, yaitu:

(a) Menentukan titik kesetimbangan

Titik kesetimbangan diperoleh dengan menetapkan ruas kanan pada sistem otonomus yang telah diperoleh dari konstruksi model sebelumnya sama dengan nol, atau umumnya dinyatakan sebagai $\vec{f}(\vec{x}^*) = 0$. Model matematika yang menggunakan konsep model epidemi terdapat dua jenis titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan endemik dan nonendemik (Balisacan, dkk., 2021). Titik kesetimbangan nonendemik atau bebas pembelanja *online* diperoleh ketika tidak terdapat subpopulasi yang melakukan pembelian secara *online*, dalam hal ini $O^* = 0$. Sedangkan pada titik kesetimbangan endemik $O^* \neq 0$.

(b) Menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0)

Berikut langkah-langkah menentukan R_0 dengan menggunakan metode matriks generasi selanjutnya:

- Mengidentifikasi matriks transmisi W sebagai penambahan pembelanja *online* baru, dan matriks transisi Z , sebagai perpindahan antar kelompok subpopulasi yang terlibat belanja *online* (seperti individu yang berhenti belanja atau kembali menjadi pembelanja *offline*).

- Melakukan linierisasi terhadap matriks W dan Z menggunakan matriks Jacobian.
- Mensubstitusikan titik kesetimbangan nonendemik (bebas pembelanja *online*) ke dalam matriks W dan Z .
- Menentukan Z^{-1} untuk menghitung matriks generasi selanjutnya $G = WZ^{-1}$.
- Menentukan nilai eigen terbesar dari matriks generasi selanjutnya ($G = WZ^{-1}$), nilai eigen terbesar ini merupakan bilangan reproduksi dasar R_0 .

(c) Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan

Analisis kestabilan titik kesetimbangan dapat dilakukan melalui langkah-langkah berikut:

- Melakukan linierisasi terhadap sistem otonomus nonlinier di sekitar titik kesetimbangan dengan menggunakan matriks Jacobian.
- Membentuk persamaan karakteristik dari matriks Jacobian yang telah diperoleh di sekitar titik kesetimbangan.
- Menentukan nilai eigen dengan menggunakan definisi polinomial karakteristik.
- Menentukan kestabilan sistem dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.
- Menganalisis sifat kestabilan.

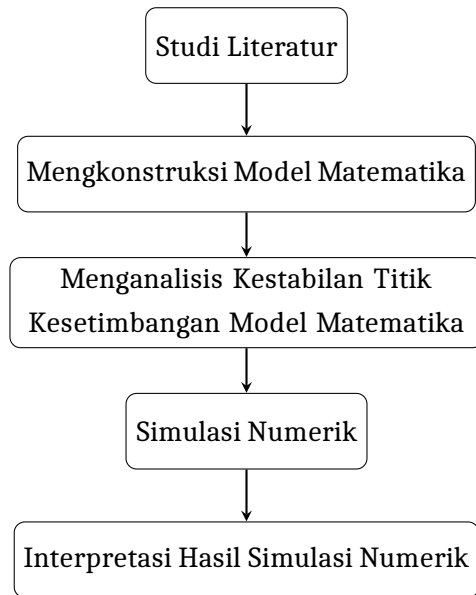
4. Simulasi Numerik

Model matematika yang telah dikonstruksi kemudian disimulasikan secara numerik dengan menetapkan nilai-nilai variabel dan nilai parameter. Simulasi numerik ini bertujuan untuk memverifikasi hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan, dengan menggunakan software Matlab R2013a.

5. Interpretasi Hasil Simulasi Numerik

Setelah simulasi numerik dilakukan, selanjutnya adalah menginterpretasikan hasil yang diperoleh. Interpretasi ini bertujuan untuk memahami dinamika perubahan dalam sistem yang dimodelkan. Melalui analisis grafik dan parameter model, dapat ditarik kesimpulan mengenai bagaimana variasi faktor-faktor atau parameter tertentu memengaruhi perpindahan dari pembelian *offline* ke *online*, serta sejauh mana intensitas promosi *influencer* berkontribusi terhadap peningkatan jumlah pembelian *online*.

Berikut adalah diagram alur dalam penelitian ini:



Gambar 3.1: Diagram Alur Penelitian

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, akan dibahas analisis kestabilan dinamika belanja *online* dengan pengaruh *beauty influencer*. Analisis ini meliputi kontruksi model dengan menetapkan asumsi terlebih dahulu, menentukan titik kesetimbangan dari sistem otonomus nonlinier yang diperoleh dari asumsi model sebelumnya, analisis kestabilan dari titik kesetimbangan tersebut, perhitungan angka reproduksi dasar R_0 dan simulasi numerik untuk mendukung hasil analisis dinamik, beserta interpretasi hasil simulasi numerik.

A. Model Matematika Dinamika Belanja *Online* dengan Pengaruh *Beauty Influencer*

Kontruksi model matematika dinamika belanja *online* dengan pengaruh *beauty influencer* dilakukan berdasarkan model dari penelitian Sharma (2021). Pada penelitian tersebut menggunakan dua populasi utama yaitu pembelanja *offline* (N), pembelanja *online* (S), dan kepadatan kumulatif informasi yang dihasilkan oleh pembelanja *online* (P).

Selanjutnya dari penelitian Sharma (2021) dilakukan modifikasi dengan menambah parameter α yang menunjukkan perpindahan dari pembelanja *offline* ke *online* tanpa pengaruh *beauty influencer*. Penambahan parameter α ini bertujuan untuk membuat model lebih realistis dengan kondisi nyata, mengingat perpindahan pembelanja ke platform *online* dapat dipengaruhi oleh berbagai faktor, tidak hanya konten promosi yang dilakukan oleh *beauty influencer*, seperti interaksi dan komunikasi dari

mulut ke mulut antara pembelanja *online* dengan pembelanja *offline*, faktor kenyamanan, harga yang lebih terjangkau dan lain sebagainya. Selain itu, mengganti variabel yang awalnya P menyatakan kepadatan kumulatif informasi menjadi banyaknya konten promosi yang dilakukan oleh *beauty influencer* (F). Pergantian variabel ini bertujuan untuk lebih menekankan pengaruh langsung dari promosi yang dilakukan oleh *beauty influencer* terhadap dinamika belanja *online*, dibandingkan dengan informasi kumulatif yang dihasilkan oleh pembelanja *online* itu sendiri.

Kemudian pada penelitian ini menggunakan dua subpopulasi utama yaitu pembelanja *offline* (L), pembelanja *online* (O) dan banyaknya konten promosi yang dilakukan oleh *beauty influencer* (F).

1. Asumsi Model

Adapun asumsi-asumsi yang digunakan dalam kontruksi model penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. Individu yang baru memulai aktivitas berbelanja berasal dari sumber *nononline*, seperti toko fisik, mal, pasar, dan sejenisnya. Dengan demikian, individu tersebut terlebih dahulu bergabung ke dalam subpopulasi pembelanja *offline*. Artinya, dalam model ini tidak terdapat individu yang secara langsung menjadi pembelanja *online* tanpa terlebih dahulu melakukan pembelian secara *offline*.
- b. Beberapa individu dalam subpopulasi pembelanja *offline* dapat berpindah ke subpopulasi pembelanja *online* dikarenakan beberapa hal, yaitu:

- i. perpindahan dengan pengaruh *beauty influencer*, dengan menerima informasi atau melihat produk dari konten promosi yang dilakukan oleh *influencer* pada platform media sosial atau platform belanja *online* (Shadrina, 2022),
 - ii. perpindahan yang terjadi tanpa pengaruh *beauty influencer*, misalnya karena kemudahan akses, harga yang lebih terjangkau, kebutuhan personal, interaksi atau komunikasi dari mulut ke mulut (*world of mouth*) antara pembelanja *offline* dan pembelanja *online* (Frahianti, dkk., 2024).
- c. Beberapa individu dalam subpopulasi pembelanja *online* dapat meninggalkan sistem belanja *online* dan kembali bergabung ke subpopulasi pembelanja *offline* karena berbagai alasan, seperti ketidaksesuaian kualitas barang dengan ekspektasi, ketidakmungkinan mencoba produk sebelum membeli, potensi keterlambatan dalam pengiriman atau faktor lainnya (Afika, 2023).
- d. Beberapa individu dapat meninggalkan sistem belanja secara keseluruhan, baik dari subpopulasi pembelanja *offline* $L(t)$ maupun pembelanja *offline* $O(t)$, karena kematian atau faktor eksternal lainnya.
- e. Konten promosi yang dilakukan oleh *beauty influencer* meningkat secara proporsional terhadap jumlah pembelanja *online*. Artinya, semakin banyak pembelanja *online* maka semakin besar kemungkinan *beauty influencer* untuk aktif melakukan promosi karena strategi pemasaran digital semakin bergantung pada efektivitas *influencer* dalam

mempengaruhi keputusan pembelian konsumen (Digital Marketing Institute, 2024).

- f. Penurunan jumlah konten promosi yang dilakukan *beauty influencer* dipengaruhi oleh beberapa faktor, seperti:
 - i. kejenuhan audiens, tidak lagi memberikan nilai yang relevan (Febby, 2025),
 - ii. permasalahan sosial yang melibatkan *influencer*, sehingga menyebabkan menurunnya kepercayaan dari pengikut *influencer* itu sendiri, atau faktor lainnya (Bithour Production, 2023)

Faktor-faktor ini turut berkontribusi pada penurunan banyaknya konten promosi yang dilakukan oleh *beauty influencer*.

2. Variabel dan Parameter

Berikut merupakan variabel dan parameter yang digunakan dalam model matematika dinamika belanja *online* dengan pengaruh *beauty influencer*.

Tabel 4.1: Daftar Variabel-variabel

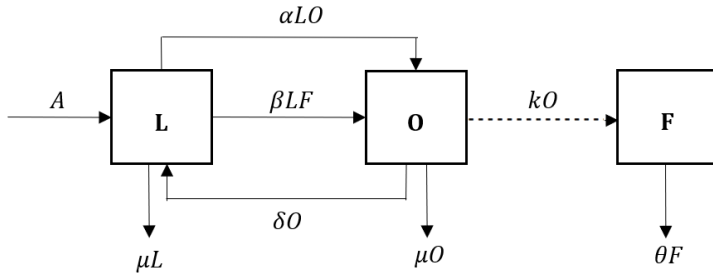
Variabel	Keterangan	Satuan	Syarat
$L(t)$	Subpopulasi pembelanja <i>offline</i>	Individu	$L(t) \geq 0$
$O(t)$	Subpopulasi pembelanja <i>online</i>	Individu	$O(t) \geq 0$
$F(t)$	Banyaknya konten promosi yang dilakukan oleh <i>beauty influencer</i>	Konten Promosi	$F(t) \geq 0$

Tabel 4.2: Daftar Parameter-parameter

Parameter	Keterangan	Satuan	Syarat
A	Individu yang baru memulai aktivitas berbelanja	$\frac{\text{individu}}{\text{hari}}$	$A \geq 0$
α	Laju perpindahan dari individu $L(t)$ ke individu $O(t)$ tanpa pengaruh <i>beauty influencer</i> , misalnya karena kemudahan akses, harga yang lebih terjangkau, kebutuhan personal, interaksi antar pembeli dari mulut ke mulut (<i>word of mouth</i>)	$\frac{1}{\text{individu.hari}}$	$\alpha \geq 0$
β	Laju perpindahan dari individu $L(t)$ ke individu $O(t)$ karena pengaruh <i>beauty influencer</i>	$\frac{1}{\text{konten promosi.hari}}$	$\beta \geq 0$
δ	Laju perpindahan dari individu $O(t)$ ke individu $L(t)$, misalnya karena berbagai alasan, seperti ketidaksesuaian kualitas barang dengan ekspektasi atau faktor lainnya	$\frac{1}{\text{hari}}$	$\delta \geq 0$
μ	Laju individu yang keluar dari sistem belanja	$\frac{1}{\text{hari}}$	$\mu \geq 0$
k	Laju pertumbuhan konten promosi oleh <i>beauty influencer</i>	$\frac{\text{konten promosi}}{\text{individu.hari}}$	$k \geq 0$
θ	Laju penurunan jumlah konten promosi oleh <i>beauty influencer</i> karena beberapa faktor	$\frac{1}{\text{hari}}$	$\theta \geq 0$

3. Kontruksi Model Matematika Dinamika Belanja *Online* dengan Pengaruh *Beauty Influencer*.

Berdasarkan asumsi model yang telah ditetapkan, maka secara skematis diagram kompartemen untuk model matematika dinamika belanja *online* dengan pengaruh *beauty influencer* adalah sebagai berikut:



Gambar 4.1: Diagram Kompartemen Model Matematika Dinamika Belanja *Online* dengan Pengaruh *Beauty Influencer*

Dari Gambar 4.1, diperoleh sistem otonomus nonlinier sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = A - \beta LF - \alpha LO + \delta O - \mu L, \\ \frac{dO}{dt} = \beta LF + \alpha LO - \delta O - \mu O, \\ \frac{dF}{dt} = kO - \theta F \end{cases} \quad (4.1)$$

dengan kondisi awal $L(0), O(0), F(0) \geq 0$, dan jumlah individu dinyatakan dengan $N(t) = L(t) + O(t)$.

Penjelasan persamaan pertama dari sistem (4.1) adalah sebagai berikut.

$$\frac{dL}{dt} = A - \beta LF - \alpha LO + \delta O - \mu L \quad (4.1.1)$$

Persamaan (4.1.1) menggambarkan dinamika laju perubahan subpopulasi pembelanja *offline* pada waktu t . Laju perubahannya dipengaruhi oleh beberapa faktor, yaitu: pertama, penambahan jumlah pembelanja *offline* karena masuknya individu yang baru memulai berbelanja dengan laju A , serta kembalinya pembelanja *online* menjadi pembelanja *offline* dengan laju δ . Kedua, terdapat pengurangan jumlah individu dalam subpopulasi pembelanja *offline*, yaitu perpindahan individu dari subpopulasi pembelanja *offline* ke subpopulasi pembelanja *online* karena pengaruh *beauty influencer* dengan laju β , serta perpindahan tanpa pengaruh dari *beauty influencer* dengan laju α . Selain itu, jumlah individu dalam subpopulasi pembelanja *offline* juga berkurang karena adanya individu yang meninggalkan sistem belanja secara keseluruhan atau berhenti berbelanja karena kematian atau faktor lainnya dengan laju μ .

$$\frac{dO}{dt} = \beta LF + \alpha LO - \delta O - \mu O \quad (4.1.2)$$

Persamaan (4.1.2) menggambarkan dinamika laju perubahan subpopulasi pembelanja *online* pada waktu t . Laju perubahannya dipengaruhi oleh beberapa faktor, yaitu: pertama, penambahan jumlah subpopulasi pembelanja *online* akibat perpindahan individu dari pembelanja *offline* karena pengaruh konten promosi oleh *beauty influencer* dengan laju β , serta perpindahan tanpa pengaruh *beauty influencer* dengan laju α . Kedua, pengurangan jumlah subpopulasi pembelanja *online* disebabkan oleh perpindahan individu yang kembali menjadi pembelanja *offline* karena adanya faktor-faktor seperti

ketidaknyamanan berbelanja secara *online* atau alasan lainnya dengan laju δ , serta individu yang meninggalkan sistem belanja secara keseluruhan atau berhenti berbelanja karena kematian atau faktor lainnya dengan laju μ .

$$\frac{dF}{dt} = kO - \theta F \quad (4.1.3)$$

Persamaan (4.1.3) menggambarkan dinamika laju perubahan jumlah konten promosi yang dilakukan oleh *beauty influencer*. Perubahan ini dipengaruhi oleh dua faktor utama: pertama, jumlah konten promosi meningkat seiring dengan bertambahnya jumlah pembelanja *online* dengan laju k , karena semakin banyak pembelanja *online*, maka dorongan bagi *beauty influencer* untuk melakukan promosi semakin besar. Kedua, jumlah konten promosi dapat menurun seiring waktu akibat berbagai faktor, seperti kejenuhan audiens atau permasalahan sosial pada *influencer* yang menyebabkan berkurangnya daya tarik konten yang dihasilkan oleh *influencer* dengan laju θ .

4. Solusi Positif dan Terbatas

Dua variabel utama pada sistem otonomus nonlinier (4.1) merepresentasikan subpopulasi manusia, yaitu subpopulasi pembelanja *offline* dan *online*, serta banyaknya konten promosi oleh *beauty influencer*. Oleh karena itu, diasumsikan $L(t), O(t), F(t) \geq 0$ serta semua solusi dari sistem otonomus nonlinier (4.1) positif dan terbatas untuk setiap $t > 0$.

Teorema 4.1.1 (Solusi Positif)

Semua solusi dari sistem (4.1) adalah positif yaitu $L(t), O(t), F(t) \geq 0$ untuk setiap $t > 0$.

Bukti:

Akan dibuktikan persamaan pertama dari sistem (4.1) memiliki solusi positif.

$$\begin{aligned} \frac{dL(t)}{dt} &= A - \beta LF - \alpha LO + \delta O - \mu L \\ \Leftrightarrow \frac{dL(t)}{dt} &\geq -(\beta F + \alpha O + \mu)L \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pertidaksamaan (4.2) diselesaikan dengan metode variabel terpisah, yaitu dengan memisahkan variabel yang sama, kemudian kedua ruas diintegralkan, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int \frac{dL(t)}{L} &\geq \int -(\beta F + \alpha O + \mu)dt \\ \Leftrightarrow \int \frac{dL(t)}{L} &\geq -\int (\beta F + \alpha O)dt - \int (\mu)dt \\ \Leftrightarrow \ln|L(t)| &\geq \left(-\int (\beta F + \alpha O)dt \right) - \mu t + K_1 \end{aligned}$$

dengan K_1 adalah konstanta

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow e^{\ln|L(t)|} &\geq e^{(-\int (\beta F + \alpha O)dt) - \mu t + K_1} \\ \Leftrightarrow L(t) &\geq e^{-\int (\beta F + \alpha O)dt} e^{-\mu t} c_1, \end{aligned} \quad (4.3)$$

dengan $c_1 = e^{K_1}$ adalah konstanta

Ketika $t = 0$, maka

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow L(0) &\geq e^{-\int (\beta F + \alpha O)dt} e^{-\mu 0} c_1 \\ \Leftrightarrow L(0) &\geq e^{-\int (\beta F + \alpha O)dt} c_1 \\ \Leftrightarrow L(0)e^{\int (\beta F + \alpha O)dt} &\geq c_1 e^{-\int (\beta F + \alpha O)dt} e^{\int (\beta F + \alpha O)dt} \\ \Leftrightarrow L(0)e^{\int (\beta F + \alpha O)dt} &\geq c_1, \end{aligned} \quad (4.4)$$

substitusi (4.4) ke (4.3), sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow L(t) \geq e^{-\int(\beta F + \alpha O)dt} e^{-\mu t} L(0) e^{\int(\beta F + \alpha O)dt}$$

$$\Leftrightarrow L(t) \geq L(0) e^{-\mu t}$$

$$\Leftrightarrow L(t) \geq L(0) \cdot 0, \quad \text{karena } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\mu t} = 0$$

$$\Leftrightarrow L(t) \geq 0$$

Diperoleh solusi persamaan pertama dari sistem (4.1) adalah positif, yaitu $L(t) \geq 0$ untuk setiap $t > 0$.

Dengan pendekatan pembuktian yang serupa, dapat ditunjukkan bahwa solusi untuk persamaan kedua dan ketiga pada sistem (4.1) juga bernilai positif, yaitu $O(t) \geq 0$ dan $F(t) \geq 0$ untuk setiap $t > 0$.

Jadi Teorema 4.1.1 terbukti.

Teorema 4.1.2 (Solusi Terbatas)

Sistem (4.1) memiliki solusi yang terbatas pada daerah

$$\Pi = \left\{ (L(t), O(t), F(t)) \mid 0 \leq L(t), O(t) \leq \frac{A}{\mu}, 0 \leq F(t) \leq \frac{kA}{\mu\theta} \right\}$$

Bukti:

Akan dibuktikan $0 \leq L(t), O(t) \leq \frac{A}{\mu}$. Jumlah populasi dari sisitem (4.1) adalah $N(t) = L(t) + O(t)$, turunkan $N(t)$ terhadap t , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= A - \beta LF - \alpha LO + \delta O - \mu L + \beta LF + \alpha LO - \delta O - \mu O \\ \Leftrightarrow \frac{dN(t)}{dt} &= A - \mu L - \mu O \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{dN(t)}{dt} = A - \mu(L + O) \\
&\Leftrightarrow \frac{dN(t)}{dt} = A - \mu N(t)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Persamaan (4.5) diselesaikan dengan metode variabel terpisah, yaitu dengan memisahkan variabel yang sama, kemudian kedua ruas diintegralkan, sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow \int \frac{dN(t)}{A - \mu N(t)} \leq \int dt \tag{4.6}$$

misalkan

$$v = A - \mu N(t), \text{ turunkan } v \text{ terhadap } N(t), \text{ maka} \tag{4.7}$$

$$dv = -\mu dN(t), \text{ sehingga}$$

$$dN(t) = -\frac{1}{\mu} dv \tag{4.8}$$

substitusi (4.7) dan (4.8) ke (4.6), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \int \frac{-\frac{1}{\mu} dv}{v} \leq t + K_4, \quad \text{dengan } K_4 \text{ adalah konstanta} \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{\mu} \int \frac{dv}{v} \leq t + K_4 \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{\mu} \ln|v| \leq t + K_4 \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{\mu} \ln|A - \mu N(t)| \leq t + K_4 \\
&\Leftrightarrow \ln|A - \mu N(t)| \geq -\mu t - \mu K_4 \\
&\Leftrightarrow e^{\ln|A - \mu N(t)|} \geq e^{-\mu t - \mu K_4} \\
&\Leftrightarrow A - \mu N(t) \geq c_4 e^{-\mu t}, \quad \text{dengan } c_4 = e^{-\mu K_4} \text{ adalah konstanta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -\mu N(t) \geq -A + c_4 e^{-\mu t} \\
&\Leftrightarrow N(t) \leq \frac{A}{\mu} - \frac{c_4}{\mu} e^{-\mu t}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Ketika $t = 0$, maka

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow N(0) \leq \frac{A}{\mu} - \frac{c_4}{\mu} e^{-\mu \cdot 0} \\
&\Leftrightarrow \mu N(0) \leq A - c_4 \\
&\Leftrightarrow A - \mu N(0) \geq c_4,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

substitusi (4.10) ke (4.9), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow N(t) \leq \frac{A + (A - \mu N(0))e^{-\mu t}}{\mu} \\
&\Leftrightarrow N(t) \leq \frac{A}{\mu} + \frac{Ae^{-\mu t}}{\mu} - N(0)e^{-\mu t} \\
&\Leftrightarrow N(t) \leq \frac{A}{\mu} + 0 + 0, \quad \text{karena } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\mu t} = 0 \\
&\Leftrightarrow N(t) \leq \frac{A}{\mu}
\end{aligned}$$

Dari hasil perhitungan diperoleh bahwa $N(t) \leq \frac{A}{\mu}$, yang menunjukkan bahwa jumlah populasi dalam sistem selalu dibatasi oleh $\frac{A}{\mu}$. Karena $N(t) = L(t) + O(t)$ dan kedua komponen $L(t)$ serta $O(t)$ merupakan bagian dari $N(t)$, maka secara langsung dapat disimpulkan bahwa $0 \leq L(t), O(t) \leq \frac{A}{\mu}$. Jadi terbukti bahwa $0 \leq L(t), O(t) \leq \frac{A}{\mu}$.

Selanjutnya akan dibuktikan $0 \leq F(t) \leq \frac{kA}{\theta\mu}$

$$\frac{dF(t)}{dt} = kO - \theta F(t)$$

Diketahui $O \leq \frac{A}{\mu}$, maka

$$\frac{dF(t)}{dt} \leq \frac{kA}{\mu} - \theta F(t) \quad (4.11)$$

Pertidaksamaan (4.11) diselesaikan dengan metode variabel terpisah, yaitu dengan memisahkan variabel yang sama, kemudian kedua ruas diintegralkan, sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow \int \frac{dF(t)}{\frac{kA}{\mu} - \theta F(t)} \leq \int dt \quad (4.12)$$

Misalkan

$$w = \frac{kA}{\mu} - \theta F(t), \text{ turunkan } w \text{ terhadap } F(t), \text{ maka} \quad (4.13)$$

$dw = -\theta dF(t)$, sehingga

$$dF(t) = -\frac{1}{\theta} dw \quad (4.14)$$

substitusi (4.13) dan (4.14) ke (4.12), sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow \int \frac{-\frac{1}{\theta} dw}{w} \leq t + K_5, \quad \text{dengan } K_5 \text{ adalah konstanta}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\theta} \int \frac{dw}{w} \leq t + K_5$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\theta} \ln|w| \leq t + K_5$$

$$\Leftrightarrow \ln \left| \frac{kA}{\mu} - \theta F(t) \right| \geq -\theta t - \theta K_5$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln \left| \frac{kA}{\mu} - \theta F(t) \right|} \geq e^{-\theta(t+K_5)}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{kA}{\mu} - \theta F(t) \geq e^{-\theta t} e^{K_5} \\
&\Leftrightarrow -\theta F(t) \geq -\frac{kA}{\mu} + c_5 e^{-\theta t}, \text{ dengan } c_5 = e^{K_5} \text{ adalah konstanta} \\
&\Leftrightarrow F(t) \leq \frac{kA}{\mu\theta} - \frac{c_5 e^{-\theta t}}{\theta} \\
&\Leftrightarrow F(t) \leq \frac{kA}{\mu\theta}, \quad \text{karena } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\theta t} = 0
\end{aligned}$$

Karena $F(t) \geq 0$, maka terbukti $0 \leq F(t) \leq \frac{kA}{\mu\theta}$. Jadi Teorema 4.1.2 terbukti bahwa sistem (4.1) terbatas pada daerah

$$\Pi = \left\{ (L(t), O(t), F(t)) \mid L(t), O(t) \leq \frac{A}{\mu}, 0 \leq F(t) \leq \frac{kA}{\mu\theta} \right\}$$

B. Analisis Dinamik Model Matematika Dinamika Belanja Online dengan Pengaruh *Beauty Influencer*

1. Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan merupakan keadaan dalam sistem dinamis yang semua variabel dalam model tidak berubah seiring waktu. Titik kesetimbangan diperoleh ketika ketiga persamaan dari sistem (4.1) sama dengan nol, atau $\frac{dL}{dt} = \frac{dO}{dt} = \frac{dF}{dt} = 0$, sehingga sistem (4.1) menjadi:

$$\begin{cases} A - \beta LF - \alpha LO + \delta O - \mu L = 0 \\ \beta LF + \alpha LO - \delta O - \mu O = 0 \\ kO - \theta F = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

Dari persamaan ketiga pada sistem (4.15), didapatkan

$$\begin{aligned} kO - \theta F &= 0 \\ \theta F &= kO \\ F &= \frac{kO}{\theta} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Substitusi (4.16) ke persamaan kedua pada sistem (4.15), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \beta LF + \alpha LO - \delta O - \mu O &= 0 \\ \beta L \left(\frac{kO}{\theta} \right) + \alpha LO - \delta O - \mu O &= 0 \\ \left(\frac{\beta Lk}{\theta} + \alpha L - \delta - \mu \right) O &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Sehingga diperoleh

$$\left(\frac{\beta Lk}{\theta} + \alpha L - \delta - \mu \right) = 0 \quad (4.18)$$

atau

$$O_1^* = 0 \quad (4.19)$$

Sistem (4.15) memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas belanja *online* dan titik kesetimbangan endemik belanja *online*. Dari titik kesetimbangan bebas belanja *online*, dapat ditentukan bilangan reproduksi dasar R_0 untuk sistem persamaan (4.1). Berikut titik kesetimbangan bebas belanja *online*, bilangan reproduksi dasar R_0 , serta titik kesetimbangan endemik belanja *online* dari sistem (4.1).

(a) Titik Keseimbangan Bebas Belanja *Online*

Titik keseimbangan bebas belanja *online* adalah ketika tidak ada individu yang melakukan belanja *online*, atau dari persamaan (4.19) yaitu $O^* = 0$. Substitusi persamaan (4.19) ke persamaan ketiga pada sistem (4.15), diperoleh

$$\begin{aligned} kO - \theta F &= 0 \\ k.0 - \theta F &= 0 \\ F_1^* &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Selanjutnya substitusi persamaan (4.19) dan (4.20) ke persamaan pertama pada sistem (4.15), diperoleh

$$\begin{aligned} A - \beta LF - \alpha LO + \delta O - \mu L &= 0 \\ A - (\beta F + \mu) L - O(\alpha L - \delta) &= 0 \\ A - (\beta.0 + \mu) L - 0(\alpha L - \delta) &= 0 \\ A - \mu L &= 0 \\ L_1^* &= \frac{A}{\mu} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Jadi diperoleh titik keseimbangan bebas belanja *online* dari sistem (4.1), yaitu

$$\begin{aligned} E_1 &= (L_1^*, O_1^*, F_1^*) \\ &= \left(\frac{A}{\mu}, 0, 0 \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Titik keseimbangan bebas belanja *online* E_1 eksis jika $A > 0$ dan $\mu > 0$.

Dengan demikian, pada titik keseimbangan bebas

belanja *online* subpopulasi pembelanja *offline* sebesar $\frac{A}{\mu}$, subpopulasi pembelanja *online* dan banyaknya konten promosi yang dilakukan oleh *beauty influencer* sebesar nol.

Selanjutnya titik kesetimbangan bebas belanja *online* yang telah diperoleh dapat digunakan untuk mencari bilangan reproduksi dasar R_0 . Untuk menentukan bilangan reproduksi dasar R_0 , terlebih dahulu ditentukan matriks transmisi W , yang merepresentasikan penambahan pembelanja *online* baru, serta matriks transisi Z , yang menggambarkan perpindahan individu antar kelompok subpopulasi dalam sistem belanja *online*. Matriks W dan Z dapat disusun berdasarkan sistem otonomus nonlinier (4.1) yang menggambarkan dinamika subpopulasi pembelanja *online*, yaitu persamaan $\frac{dO}{dt}$ dan $\frac{dF}{dt}$ sebagai berikut

$$\frac{dO}{dt} = \beta LF + \alpha LO - \delta O - \mu O \quad (4.23)$$

$$\frac{dF}{dt} = kO - \theta F \quad (4.24)$$

Dari sistem (4.1), hanya digunakan variabel-variabel yang berkontribusi terhadap penyebaran atau pertambahan jumlah pembelanja *online*. Oleh karena itu, hanya persamaan (4.23) dan (4.24) yang digunakan, karena masing-masing melibatkan subpopulasi O dan konten promosi F yang berperan dalam peningkatan jumlah pembelanja *online*. Sementara itu, subpopulasi L

berperan sebagai penerima pengaruh, bukan penyebar, sehingga tidak dimasukkan dalam pembentukan matriks W dan Z .

Sehingga diperoleh matriks W dan Z sebagai berikut

$$W = \begin{bmatrix} \beta LF + \alpha LO \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } Z = \begin{bmatrix} (\delta + \mu)O \\ -kO + \theta F \end{bmatrix}$$

Untuk mempermudah penyusunan matriks Jacobian, anggota matriks W dan Z dinotasikan sebagai:

$$a = \beta LF + \alpha LO, \quad b = 0 \text{ dan } c = (\delta + \mu)O, \quad d = -kO + \theta F$$

sehingga dapat ditulis kembali menjadi

$$W = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ dan } Z = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

Kemudian untuk memperoleh matriks generasi selanjutnya, dilakukan linierisasi terhadap W dan Z menggunakan matriks Jacobian, yaitu dengan menghitung turunan parsialnya terhadap variabel O dan F . Sehingga diperoleh

$$W = \frac{\partial}{\partial(O, F)} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a}{\partial O} & \frac{\partial a}{\partial F} \\ \frac{\partial b}{\partial O} & \frac{\partial b}{\partial F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha L & \beta L \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial(O, F)} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial O} & \frac{\partial c}{\partial F} \\ \frac{\partial d}{\partial O} & \frac{\partial d}{\partial F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta + \mu & 0 \\ -k & \theta \end{bmatrix}$$

Substitusi titik kesetimbangan bebas belanja *online* $E_1 = (L_1^*, O_1^*, F_1^*) = \left(\frac{A}{\mu}, 0, 0\right)$ ke dalam matriks W dan

matriks Z , sehingga diperoleh

$$W(E_1) = \begin{bmatrix} \alpha L_1^* & \beta L_1^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha A}{\mu} & \frac{\beta A}{\mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{dan}$$

$$Z(E_1) = \begin{bmatrix} \delta + \mu & 0 \\ -k & \theta \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari $Z(E_1)^{-1}$, yaitu

$$Z(E_1) = \begin{bmatrix} \delta + \mu & 0 \\ -k & \theta \end{bmatrix}, \quad \det(Z(E_1)) = (\delta + \mu)\theta \neq 0,$$

$$\text{Adj}(Z(E_1)) = \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ k & \delta + \mu \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Z(E_1)^{-1} &= \frac{1}{\det(Z(E_1))} \cdot \text{Adj}(Z(E_1)) \\ &= \frac{1}{(\delta + \mu)\theta} \cdot \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ k & \delta + \mu \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta + \mu} & 0 \\ \frac{k}{(\delta + \mu)\theta} & \frac{1}{\theta} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh matriks generasi selanjutnya sebagai berikut

$$\begin{aligned} G &= W(E_1)Z(E_1)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\alpha A}{\mu} & \frac{\beta A}{\mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta + \mu} & 0 \\ \frac{k}{(\delta + \mu)\theta} & \frac{1}{\theta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\alpha A}{(\delta + \mu)\mu} + \frac{\beta A k}{\mu(\delta + \mu)\theta} & \frac{\beta A}{\mu\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Selanjutnya menentukan nilai eigen dari matriks G

$$\begin{aligned}
 & |G - \lambda I| = 0 \\
 \Leftrightarrow & \left| \begin{bmatrix} \frac{\alpha A}{(\delta + \mu)\mu} + \frac{\beta Ak}{\mu(\delta + \mu)\theta} & \frac{\beta A}{\mu\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \\
 \Leftrightarrow & \left| \begin{bmatrix} \frac{\alpha A}{(\delta + \mu)\mu} + \frac{\beta Ak}{\mu(\delta + \mu)\theta} - \lambda & \frac{\beta A}{\mu\theta} \\ 0 & 0 - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \\
 & \left(\frac{\alpha A}{(\delta + \mu)\mu} + \frac{\beta Ak}{\mu(\delta + \mu)\theta} - \lambda \right) (-\lambda) = 0
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh dua nilai eigen, yaitu:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha A\theta + \beta Ak}{\delta\mu\theta + \mu^2\theta} \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = 0$$

Jadi bilangan reproduksi dasar dari sistem (4.16) adalah

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \rho(G) \\
 &= \mathbf{maks}\{\lambda_1, \lambda_2\} \\
 &= \mathbf{maks}\left\{ \frac{\alpha A\theta + \beta Ak}{\delta\mu\theta + \mu^2\theta}, 0 \right\} \\
 &= \frac{\alpha A\theta + \beta Ak}{\delta\mu\theta + \mu^2\theta}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

(b) Titik kesetimbangan Endemik Belanja *Online*

Akan dicari titik kesetimbangan endemik belanja *online*, dari persamaan ketiga pada sistem (4.15) telah diperoleh persamaan (4.16) yaitu $F = \frac{kO}{\theta}$.

Substitusi (4.16) ke persamaan kedua pada sistem (4.15), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \beta LF + \alpha LO - \delta O - \mu O &= 0 \\
 L(\beta F + \alpha O) - (\delta + \mu)O &= 0 \\
 L\left(\frac{\beta k}{\theta}O + \alpha O\right) &= (\delta + \mu)O \\
 L &= \frac{(\delta + \mu)O}{\left(\frac{\beta k}{\theta} + \alpha\right)O} \\
 L &= \frac{(\delta + \mu)}{\frac{\beta k + \alpha \theta}{\theta}} \\
 L_2^* &= \frac{(\delta + \mu)\theta}{\beta k + \alpha \theta} \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya substitusi (4.16) dan (4.26) ke persamaan pertama pada sistem (4.15), diperoleh

$$\begin{aligned}
 A - \beta LF - \alpha LO + \delta O - \mu L &= 0 \\
 \Leftrightarrow A - \beta \left(\frac{(\delta + \mu)\theta}{\beta k + \alpha \theta}\right) \left(\frac{kO}{\theta}\right) - \frac{\alpha(\delta + \mu)\theta O}{\beta k + \alpha \theta} + \delta O - \frac{\mu(\delta + \mu)\theta}{\beta k + \alpha \theta} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta k(\delta + \mu) + \alpha(\delta + \mu)\theta - \delta(\beta k + \alpha \theta)}{\beta k + \alpha \theta}\right) O = A - \frac{\mu(\delta + \mu)\theta}{\beta k + \alpha \theta} \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta k\delta + \beta k\mu + \alpha\delta\theta + \alpha\mu\theta - \delta\beta k - \delta\alpha\theta}{\beta k + \alpha \theta}\right) O = \frac{A(\beta k + \alpha \theta) - \mu(\delta + \mu)\theta}{\beta k + \alpha \theta} \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta k\mu + \alpha\mu\theta}{\beta k + \alpha \theta}\right) O = \frac{\alpha A\theta + \beta Ak - \delta\mu\theta - \mu^2\theta}{\beta k + \alpha \theta} \\
 \Leftrightarrow O_2^* = \frac{\alpha A\theta + \beta Ak - \delta\mu\theta - \mu^2\theta}{\mu(\beta k + \alpha \theta)} \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

Substitusi (4.27) ke (4.16), diperoleh

$$\begin{aligned} F &= \frac{kO}{\theta} \\ F_2^* &= \frac{k(\alpha A\theta + \beta Ak - \delta\mu\theta - \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)\theta} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Jadi titik kesetimbangan endemik belanja *online* adalah

$$\begin{aligned} E_2 &= (L_2^*, O_2^*, F_2^*) \\ &= \left(\frac{(\delta + \mu)\theta}{\beta k + \alpha\theta}, \frac{\alpha A\theta + \beta Ak - \delta\mu\theta - \mu^2\theta}{\mu(\beta k + \alpha\theta)}, \right. \\ &\quad \left. \frac{k(\alpha A\theta + \beta Ak - \delta\mu\theta - \mu\delta\theta - \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)\theta} \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Titik kesetimbangan endemik belanja *online* E_2 eksis jika $\beta Ak + \alpha A\theta > \mu\delta\theta + \mu^2\theta$.

Dengan demikian, pada titik kesetimbangan endemik belanja *online* terdapat subpopulasi pembelanja *offline* sebesar $\frac{(\delta + \mu)\theta}{\beta k + \alpha\theta}$, subpopulasi pembelanja *online* sebesar $\frac{\alpha A\theta + \beta Ak - \delta\mu\theta - \mu^2\theta}{\mu(\beta k + \alpha\theta)}$ dan banyaknya konten promosi yang dilakukan oleh *beauty influencer* sebesar $\frac{k(\alpha A\theta + \beta Ak - \delta\mu\theta - \mu\delta\theta - \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)\theta}$.

2. Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan

Sistem pada model matematika dinamika belanja *online* dengan pengaruh *beauty influencer* merupakan sistem otonomus nonlinier. Untuk menganalisis kestabilan lokal titik kesetimbangan dari sistem ini, dilakukan proses linierisasi sehingga diperoleh sistem otonomus baru yang bersifat linier. Linierisasi sistem (4.16) menggunakan

matriks Jacobi, disajikan sebagai berikut.

Misalkan

$$f(L, O, F) = A - \beta LF - \alpha LO + \delta O - \mu L$$

$$g(L, O, F) = \beta LF + \alpha LO - \delta O - \mu O$$

$$h(O, F) = kO - \theta F$$

$$\begin{aligned}
 J &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial L}(L, O, F) & \frac{\partial f}{\partial O}(L, O, F) & \frac{\partial f}{\partial F}(L, O, F) \\ \frac{\partial g}{\partial L}(L, O, F) & \frac{\partial g}{\partial O}(L, O, F) & \frac{\partial g}{\partial F}(L, O, F) \\ \frac{\partial h}{\partial L}(O, F) & \frac{\partial h}{\partial O}(O, F) & \frac{\partial h}{\partial F}(O, F) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\beta F - \alpha O - \mu & -\alpha L + \delta & -\beta L \\ \beta F + \alpha O & \alpha L - \delta - \mu & \beta L \\ 0 & k & -\theta \end{bmatrix} \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

(a) **Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Bebas Belanja Online**

Kestabilan titik keseimbangan bebas belanja *online* dapat dianalisis dengan mengacu pada teorema berikut.

Teorema 4.2.1

Titik keseimbangan E_1 stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$.

Bukti:

Untuk memperoleh kestabilan lokal titik keseimbangan bebas belanja *online*, maka substitusi titik keseimbangan $E_1 = (L_1^*, O_1^*, F_1^*) = \left(\frac{A}{\mu}, 0, 0\right)$ ke matriks Jacobian (4.30), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
J &= \begin{bmatrix} -\beta F - \alpha O - \mu & -\alpha L + \delta & -\beta L \\ \beta F + \alpha O & \alpha L - \delta - \mu & \beta L \\ 0 & k & -\theta \end{bmatrix} \\
J(E_1) &= \begin{bmatrix} -\beta \cdot 0 - \alpha \cdot 0 - \mu & -\frac{\alpha A}{\mu} & -\frac{\beta A}{\mu} \\ \beta \cdot 0 + \alpha \cdot 0 & \frac{\alpha A}{\mu} - \delta - \mu & \frac{\beta A}{\mu} \\ 0 & k & -\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\alpha A}{\mu} + \delta & -\frac{\beta A}{\mu} \\ 0 & \frac{\alpha A}{\mu} - \delta - \mu & \frac{\beta A}{\mu} \\ 0 & k & -\theta \end{bmatrix} \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari matriks $J(E_1)$, yaitu

$$\begin{aligned}
|J(E_1) - \lambda I| &= 0 \\
\left| \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\alpha A}{\mu} + \delta & -\frac{\beta A}{\mu} \\ 0 & \frac{\alpha A}{\mu} - \delta - \mu & \frac{\beta A}{\mu} \\ 0 & k & -\theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0 \\
\left| \begin{bmatrix} -\mu - \lambda & -\frac{\alpha A}{\mu} + \delta & -\frac{\beta A}{\mu} \\ 0 & \frac{\alpha A}{\mu} - \delta - \mu - \lambda & \frac{\beta A}{\mu} \\ 0 & k & -\theta - \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0
\end{aligned}$$

Determinan matriks berukuran 3×3 dapat ditentukan dengan menggunakan metode kofaktor, sesuai dengan Teorema 2.8.2, yaitu sebagai berikut.

Ekspansi kofaktor terhadap baris pertama adalah

$$|J(E_1) - \lambda I| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

dengan $a_{11} = (-\mu - \lambda)$, $a_{12} = \left(-\frac{\alpha A}{\mu} + \delta\right)$, dan $a_{13} =$

$$\left(-\frac{\beta A}{\mu}\right)$$

dan kofaktor yang bersesuaian adalah

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \frac{\alpha A}{\mu} - \delta - \mu - \lambda & \frac{\beta A}{\mu} \\ k & -\theta - \lambda \end{vmatrix},$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\beta A}{\mu} \\ 0 & -\theta - \lambda \end{vmatrix},$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\alpha A}{\mu} - \delta - \mu - \lambda \\ 0 & k \end{vmatrix}$$

Dengan demikian, determinan menjadi:

$$\begin{aligned} & (-\mu - \lambda) \begin{vmatrix} \frac{\alpha A}{\mu} - \delta - \mu - \lambda & \frac{\beta A}{\mu} \\ k & -\theta - \lambda \end{vmatrix} - \left(-\frac{\alpha A}{\mu} + \delta\right) \\ & \begin{vmatrix} 0 & \frac{\beta A}{\mu} \\ 0 & -\theta - \lambda \end{vmatrix} + \left(-\frac{\beta A}{\mu}\right) \begin{vmatrix} 0 & \frac{\alpha A}{\mu} - \delta - \mu - \lambda \\ 0 & k \end{vmatrix} = 0 \\ & (-\mu - \lambda) \left[\left(\frac{\alpha A}{\mu} - \delta - \mu - \lambda\right) (-\theta - \lambda) - \frac{\beta A k}{\mu} \right] = 0 \end{aligned}$$

Diperoleh nilai eigen λ_1 sebagai berikut

$$\begin{aligned} -\mu - \lambda &= 0 \\ \lambda_1 &= -\mu \end{aligned}$$

dan untuk nilai eigen yang lainnya yaitu λ_2 dan λ_3 adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\alpha A}{\mu} - \delta - \mu - \lambda \right) (-\theta - \lambda) - \frac{\beta Ak}{\mu} = 0 \\
& -\frac{\alpha A\theta}{\mu} - \frac{\alpha A\lambda}{\mu} + \delta\theta + \delta\lambda + \lambda\theta + \lambda^2 - \frac{\beta Ak}{\mu} = 0 \\
& \lambda^2 + \left(\delta + \mu + \theta - \frac{\alpha A}{\mu} \right) \lambda + \frac{\delta\mu\theta + \mu^2\theta - \alpha A\theta - \beta Ak}{\mu} = 0
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Dari persamaan (4.25) telah diperoleh

$$R_0 = \frac{\alpha A\theta + \beta Ak}{\delta\mu\theta + \mu^2\theta},$$

R_0 di atas dapat ditulis menjadi

$$\alpha A\theta + \beta Ak = R_0(\delta\mu\theta + \mu^2\theta) \tag{4.33}$$

Substitusi (4.33) ke (4.34), sehingga

$$\begin{aligned}
& \lambda^2 + \left(\delta + \mu + \theta - \frac{\alpha A}{\mu} \right) \lambda + \frac{\delta\mu\theta + \mu^2\theta - (\alpha A\theta + \beta Ak)}{\mu} = 0 \\
& \lambda^2 + \left(\delta + \mu + \theta - \frac{\alpha A}{\mu} \right) \lambda + \frac{\delta\mu\theta + \mu^2\theta - (R_0(\delta\mu\theta + \mu^2\theta))}{\mu} = 0 \\
& \lambda^2 + \left(\delta + \mu + \theta - \frac{\alpha A}{\mu} \right) \lambda + (\delta\theta + \mu\theta)(1 - R_0) = 0
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Selanjutnya menentukan nilai eigen λ_2 dan λ_3 dari polinomial karakteristik (4.34).

$$\lambda_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dengan

$$a = 1 > 0$$

$$b = \delta + \mu + \theta - \frac{\alpha A}{\mu}$$

$$c = (\delta\theta + \mu\theta)(1 - R_0)$$

Dapat dilihat bahwa koefisien b dapat bernilai positif atau negatif, sedangkan nilai koefisien c bergantung pada R_0 . Jika $R_0 < 1$ maka c bernilai positif, sedangkan jika $R_0 > 1$ maka c bernilai negatif.

Oleh karena itu persamaan (4.34) memiliki berbagai kemungkinan dalam perubahan tanda koefisiennya. Kemungkinan-kemungkinan tersebut dapat dilihat pada Tabel 4.3 berikut.

Tabel 4.3: Kemungkinan Tanda Koefisien a, b, c

a	b	c
+	+	+
+	+	-
+	-	+
+	-	-

Berdasarkan Tabel 4.3, terdapat empat kemungkinan perubahan tanda koefisien pada persamaan (4.34), yang disajikan pada Tabel 4.4 berikut (penentuan banyaknya akar riil positif dan negatif dapat dilihat pada lampiran 1).

Tabel 4.4: Banyaknya Akar Riil Positif dan Negatif

Banyaknya Kemungkinan	a	b	c	Banyaknya Akar Riil Positif	Banyaknya Akar Riil Negatif
1	+	+	+	0	2 atau 0
2	+	+	-	1	1
3	+	-	+	2 atau 0	1
4	+	-	-	1	1

Aturan tanda Descartes digunakan untuk menemukan akar riil positif dan negatif dari persamaan (4.34). Kestabilan titik kesetimbangan tercapai ketika semua akar polinomial bernilai negatif. Berdasarkan Tabel 4.4, dapat dilihat bahwa kedua akar dari persamaan (4.34) bernilai negatif pada kemungkinan pertama, yaitu ketika $a > 0$, $b > 0$, dan $c > 0$. Syarat $c > 0$ terpenuhi jika $R_0 < 1$. Oleh karena itu, titik kesetimbangan bebas belanja *online* akan stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$.

■ Jadi Teorema 4.2.1 terbukti.

(b) **Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik Belanja Online**

Kestabilan titik kesetimbangan endemik belanja *online* dapat dianalisis dengan mengacu pada teorema berikut.

Teorema 4.2.2

Titik kesetimbangan E_2 stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$.

Bukti:

Untuk memperoleh kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik belanja *online*, maka substitusi titik kesetimbangan $E_2 = (L_2^*, O_2^*, F_2^*)$ (4.29) ke matriks Jacobian (4.30), diperoleh

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -\beta F_2^* - \alpha O_2^* - \mu & -\alpha L_2^* + \delta & -\beta L_2^* \\ \beta F_2^* + \alpha O_2^* & \alpha L_2^* - \delta - \mu & \beta L_2^* \\ 0 & k & -\theta \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dan polinomial karakteristik dari matriks $J(E_2)$, yaitu

$$|J(E_2) - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} -\beta F_2^* - \alpha O_2^* - \mu & -\alpha L_2^* + \delta & -\beta L_2^* \\ \beta F_2^* + \alpha O_2^* & \alpha L_2^* - \delta - \mu & \beta L_2^* \\ 0 & k & -\theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} -\beta F_2^* - \alpha O_2^* - \mu - \lambda & -\alpha L_2^* + \delta & -\beta L_2^* \\ \beta F_2^* + \alpha O_2^* & \alpha L_2^* - \delta - \mu - \lambda & \beta L_2^* \\ 0 & k & -\theta - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Determinan matriks berukuran 3×3 dapat ditentukan dengan menggunakan metode kofaktor, sesuai dengan Teorema 2.8.2 sebagai berikut.

Ekspansi kofaktor terhadap baris ketiga adalah

$$|J(E_2) - \lambda I| = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}$$

dengan $a_{31} = 0$, $a_{32} = k$, dan $a_{33} = (-\theta - \lambda)$

dan kofaktor yang bersesuaian adalah

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -\alpha L_2^* + \delta & -\beta L_2^* \\ \alpha L_2^* - \delta - \mu - \lambda & \beta L_2^* \end{vmatrix},$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -\beta F_2^* - \alpha O_2^* - \mu - \lambda & -\beta L_2^* \\ \beta F_2^* + \alpha O_2^* & \beta L_2^* \end{vmatrix},$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -\beta F_2^* - \alpha O_2^* - \mu - \lambda & -\alpha L_2^* + \delta \\ \beta F_2^* + \alpha O_2^* & \alpha L_2^* - \delta - \mu - \lambda \end{vmatrix}$$

Dengan demikian, determinan menjadi:

$$(0) \begin{vmatrix} \alpha L_2^* + \delta & -\beta L_2^* \\ \alpha L_2^* - \delta - \mu - \lambda & \beta L_2^* \end{vmatrix} - (k) \begin{vmatrix} -\beta F_2^* - \alpha O_2^* - \mu - \lambda & -\beta L_2^* \\ \beta F_2^* + \alpha O_2^* & \beta L_2^* \end{vmatrix}$$

$$+ (-\theta - \lambda) \begin{vmatrix} -\beta F_2^* - \alpha O_2^* - \mu - \lambda & -\alpha L_2^* + \delta \\ \beta F_2^* + \alpha O_2^* & \alpha L_2^* - \delta - \mu - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-k)(-\beta^2 F_2^* L_2^* - \alpha \beta O_2^* L_2^* - \mu \beta L_2^* - \lambda \beta L_2^* + \beta^2 F_2^* L_2^* + \beta \alpha O_2^* L_2^*) +$$

$$(-\theta - \lambda)(-\alpha \beta F_2^* L_2^* + \beta F_2^* \delta + \beta F_2^* \mu + \beta F_2^* \lambda - \alpha^2 O_2^* L_2^* + \alpha O_2^* \delta + \alpha^2$$

$$O_2^* \mu + \alpha^2 O_2^* \lambda - \mu \alpha L_2^* + \mu \delta + \mu^2 + \mu L_2^* - \alpha L_2^* \lambda + \delta \lambda + \mu \lambda + \lambda^2 - (\beta F_2^* \delta$$

$$+ \delta \alpha O_2^* - \alpha \beta L_2^* F_2^* - \alpha^2 L_2^* O_2^*)) = 0$$

$$(-k)(-\mu \beta L_2^* - \lambda \beta L_2^*) + (-\theta - \lambda)(\beta F_2^* \mu + \beta F_2^* \lambda + \alpha^2 O_2^* \mu + \alpha^2 O_2^* \lambda$$

$$- \mu \alpha L_2^* + \mu \delta + \mu^2 + 2\mu L_2^* - \alpha L_2^* \lambda + \delta \lambda + \lambda^2) = 0$$

$$k\mu\beta L_2^* + k\beta L_2^* \lambda - \beta F_2^* \mu \theta - \beta F_2^* \mu \lambda - \beta F_2^* \theta \lambda - \beta F_2^* \lambda^2 - \alpha^2 O_2^* \mu \theta -$$

$$\alpha^2 O_2^* \mu \lambda - \alpha^2 O_2^* \lambda \theta - \alpha^2 O_2^* \lambda^2 + \mu \alpha L_2^* \theta + \mu \alpha L_2^* \lambda - \mu \delta \theta -$$

$$\mu \delta \lambda - \mu^2 \theta - \mu^2 \lambda - 2\mu \theta \lambda - 2\mu \lambda^2 - \alpha L_2^* \theta \lambda - \alpha L_2^* \lambda^2 - \delta \theta \lambda - \delta \lambda^2 \theta -$$

$$\lambda^3 = 0$$

$$-\lambda^3 + (-\beta F_2^* + \alpha L_2^* - \alpha O_2^* - \delta - 2\mu - \theta)\lambda^2 + (-\beta \mu F_2^* - \beta \theta F_2^* + \alpha \mu$$

$$L_2^* + \alpha \theta L_2^* + \beta k L_2^* - \alpha \mu O_2^* - \alpha \theta O_2^* - \delta \mu - \delta \theta - \mu u^2 - 2\mu \theta)\lambda - \delta \mu \theta -$$

$$\mu^2 \theta - \beta \mu \theta F_2^* + \alpha \mu \theta L_2^* + \beta k \mu L_2^* - \alpha \mu \theta O_2^* = 0$$

$$\lambda^3 - (-\beta F_2^* + \alpha L_2^* - \alpha O_2^* - \delta - 2\mu - \theta)\lambda^2 - (-\beta \mu F_2^* - \beta \theta F_2^* + \alpha \mu L_2^*$$

$$+\alpha\theta L_2^*+\beta k L_2^*-\alpha\mu O_2^*-\alpha\theta O_2^*-\delta\mu-\delta\theta-\mu^2-2\mu\theta)\lambda+\beta\mu\theta F_2^*-\alpha\mu\theta L_2^*-\beta k\mu L_2^*+\alpha\mu\theta O_2^*+\delta\mu\theta+\mu^2\theta=0$$

Diperoleh polinomial karakteristik berderajat tiga, yaitu

$$\begin{aligned} \lambda^3 - (-\beta F_2^* + \alpha L_2^* - \alpha O_2^* - \delta - 2\mu - \theta)\lambda^2 - (-\beta\mu F_2^* - \beta\theta F_2^* \\ + \alpha\mu L_2^* + \alpha\theta L_2^* + \beta k L_2^* - \alpha\mu O_2^* - \alpha\theta O_2^* - \delta\mu - \delta\theta - \mu^2 - 2\mu\theta) \\ \theta)\lambda + \beta\mu\theta F_2^* - \alpha\mu\theta L_2^* - \beta k\mu L_2^* + \alpha\mu\theta O_2^* + \delta\mu\theta + \mu^2\theta = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Persamaan (4.36) dapat ditulis menjadi

$$m_0\lambda^3 + m_1\lambda^2 + m_2\lambda + m_3 = 0 \quad (4.37)$$

dengan

$$m_0 = 1 > 0$$

$$\begin{aligned} m_1 &= -(-\beta F_2^* + \alpha L_2^* - \alpha O_2^* - \delta - 2\mu - \theta) \\ &= \beta F_2^* - \alpha L_2^* + \alpha O_2^* + \delta + 2\mu + \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 &= -(-\beta\mu F_2^* - \beta\theta F_2^* + \alpha\mu L_2^* + \alpha\theta L_2^* + \beta k L_2^* - \alpha\mu O_2^* \\ &\quad - \alpha\theta O_2^* - \delta\mu - \delta\theta - \mu^2 - 2\mu\theta) \\ &= \beta\mu F_2^* + \beta\theta F_2^* - \alpha\mu L_2^* - \alpha\theta L_2^* - \beta k L_2^* + \alpha\mu O_2^* \\ &\quad + \alpha\theta O_2^* + \delta\mu + \delta\theta + \mu^2 + 2\mu\theta \end{aligned}$$

$$m_3 = \beta\mu\theta F_2^* - \alpha\mu\theta L_2^* - \beta k\mu L_2^* + \alpha\mu\theta O_2^* + \delta\mu\theta + \mu^2\theta$$

Akan dibuktikan semua nilai eigen dari persamaan (4.36) bernilai negatif dengan menerapkan Kriteria Routh-Hurwitz. Berdasarkan kriteria tersebut, semua nilai eigen dari persamaan (4.36) bernilai negatif, dan titik kesetimbangan endemik dikatakan stabil secara asimtotik lokal apabila memenuhi kondisi-kondisi berikut:

$$R_1 = |m_1| > 0$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} m_1 & m_3 \\ 1 & m_2 \end{vmatrix} > 0 \leftrightarrow m_1 m_2 - m_3 > 0$$

Bukti:

Dari persamaan (4.33) telah diperoleh

$$\alpha A\theta + \beta Ak = R_0 \delta \mu \theta + R_0 \mu^2 \theta \quad (4.38)$$

Selanjutnya substitusi (4.38) ke (4.27) dan (4.28), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} O_2^* &= \frac{\beta Ak + \alpha A\theta - \delta \mu \theta - \mu^2 \theta}{\mu(\beta k + \alpha \theta)} \\ &= \frac{R_0 \delta \mu \theta + R_0 \mu^2 \theta - \delta \mu \theta - \mu^2 \theta}{\mu(\beta k + \alpha \theta)} \\ &= \frac{(R_0 - 1)(\delta \mu \theta + \mu^2 \theta)}{\mu(\beta k + \alpha \theta)} \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} F_2^* &= \frac{k(\beta Ak + \alpha A\theta - \delta \mu \theta - \mu^2 \theta)}{\mu(\beta k + \alpha \theta)\theta} \\ &= \frac{k(R_0 \delta \mu \theta + R_0 \mu^2 \theta - \delta \mu \theta - \mu^2 \theta)}{\mu(\beta k + \alpha \theta)\theta} \\ &= \frac{k(R_0 - 1)(\delta \mu \theta + \mu^2 \theta)}{\mu(\beta k + \alpha \theta)\theta} \end{aligned} \quad (4.40)$$

- Akan dibuktikan $|m_1| > 0$

Substitusi (4.26), (4.39) dan (4.40) ke m_1 , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
|m_1| &= \beta F_2^* - \alpha L_2^* + \alpha O_2^* + \delta + 2\mu + \theta > 0 \\
&= \frac{\beta k(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)\theta} - \frac{\alpha\theta(\delta + \mu)}{\beta k + \alpha\theta} + \frac{\alpha(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)} \\
&\quad + \delta + 2\mu + \theta > 0
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Untuk mempersingkat penulisan, didefinisikan parameter tambahan dari (4.41) sebagai berikut, misalkan

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\alpha\theta(\delta + \mu)}{\beta k + \alpha\theta} > 0 \\
p_2 &= \delta + 2\mu + \theta
\end{aligned}$$

Selanjutnya substitusi p_1 dan p_2 ke (4.41), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta k(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)\theta} + \frac{\alpha(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)} + p_2 > p_1 \\
&= \frac{1}{p_1} \left(\frac{\beta k(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)\theta} + \frac{\alpha(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)} + p_2 \right) > \frac{p_1}{p_1} \\
&= \frac{1}{p_1} \left(\frac{\beta k(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)\theta} + \frac{\alpha(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)} + p_2 \right) > 1
\end{aligned}$$

Jadi $|m_1| > 0$ terpenuhi jika $R_0 > 1$.

• Selanjutnya akan dijelaskan $|m_2| > 0$

$$\begin{aligned}
|m_2| &= \beta\mu F_2^* + \beta\theta F_2^* - \alpha\mu L_2^* - \alpha\theta L_2^* - \beta k L_2^* + \alpha\mu O_2^* + \alpha\theta O_2^* + \delta\mu \\
&\quad + \delta\theta + \mu^2 + 2\mu\theta > 0 \\
&= (\beta\mu + \beta\theta)F_2^* - (\alpha\mu + \alpha\theta + \beta k)L_2^* + (\alpha\mu + \alpha\theta)O_2^* + \delta\mu + \delta\theta \\
&\quad + \mu^2 + 2\mu\theta > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\beta\mu + \beta\theta)k(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)\theta} - \frac{(\alpha\mu + \alpha\theta + \beta k)(\delta + \mu)\theta}{(\beta k + \alpha\theta)} \\
&\quad + \frac{(\alpha\mu + \alpha\theta)(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)} + \delta\mu + \delta\theta + \mu^2 + 2\mu\theta > 0
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Untuk mempersingkat penulisan, didefinisikan parameter tambahan dari (4.42) sebagai berikut, misalkan

$$p_3 = \frac{(\alpha\mu + \alpha\theta + \beta k)(\delta + \mu)\theta}{(\beta k + \alpha\theta)} > 0$$

$$p_4 = \delta\mu + \delta\theta + \mu^2 + 2\mu\theta$$

Selanjutnya substitusi p_3 dan p_4 ke (4.42), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\beta\mu + \beta\theta)k(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)\theta} + \frac{(\alpha\mu + \alpha\theta)(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)} \\
&\quad + p_4 > p_3 \\
&= \frac{1}{p_3} \left(\frac{(\beta\mu + \beta\theta)k(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)\theta} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\alpha\mu + \alpha\theta)(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)} + p_4 \right) > \frac{p_3}{p_3} \\
&= \frac{1}{p_3} \left(\frac{(\beta\mu + \beta\theta)k(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)\theta} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\alpha\mu + \alpha\theta)(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)} + p_4 \right) > 1
\end{aligned}$$

Jadi $|m_2| > 0$ terpenuhi jika $R_0 > 1$.

• Selanjutnya akan dibuktikan

$$R_2 = \begin{vmatrix} m_1 & m_3 \\ 1 & m_2 \end{vmatrix} > 0 \leftrightarrow m_1 m_2 - m_3 > 0$$

$$\begin{aligned} m_1 m_2 - m_3 &= (\beta F_2^* - \alpha L_2^* + \alpha O_2^* + \delta + 2\mu + \theta)(\beta \mu F_2^* + \beta \theta F_2^* - \\ &\quad \alpha \mu L_2^* - \alpha \theta L_2^* - \beta k L_2^* + \alpha \mu O_2^* + \alpha \theta O_2^* + \delta \mu + \delta \theta + \\ &\quad \mu^2 + 2\mu \theta) - \beta \mu \theta F_2^* - \alpha \mu \theta L_2^* - \beta k \mu L_2^* + \alpha \mu \theta O_2^* + \\ &\quad \delta \mu \theta + \mu^2 \theta > 0 \\ &= (\beta^2 \mu + \beta^2 \theta) F_2^* \\ &\quad - (2\alpha \beta \mu + 2\alpha \beta \theta + \beta^2 k) F_2^* L_2^* \\ &\quad + (2\alpha \beta \mu + 2\alpha \beta \theta) F_2^* O_2^* \\ &\quad + (2\beta \delta \mu + 2\beta \delta \theta + 3\beta \mu^2 + 4\beta \mu \theta + \beta \theta^2) F_2^* \\ &\quad + (\alpha^2 \mu + \alpha^2 \theta + \alpha \beta k) L_2^* \\ &\quad - (2\alpha^2 \mu + 2\alpha^2 \theta + \alpha \beta k) L_2^* O_2^* \\ &\quad - (2\alpha \delta \mu + 2\alpha \delta \theta + 3\alpha \mu^2 + 4\alpha \mu \theta + \beta \delta k + \beta k \mu + \\ &\quad \alpha \theta^2 + \beta k \theta) L_2^* \\ &\quad + (\alpha^2 \mu + \alpha^2 \theta) O_2^* \\ &\quad + (2\alpha \delta \mu + 2\alpha \delta \theta + 3\alpha \mu^2 + 4\alpha \mu \theta + \alpha \theta^2) O_2^* \\ &\quad + (\delta^2 \mu + \delta^2 \theta + 3\delta \mu^2 + 4\delta \mu \theta + 2\mu^3 + 4\mu^2 \theta \\ &\quad + \delta \theta^2 + 2\mu \theta^2) > 0 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Untuk mempersingkat penulisan, didefinisikan parameter tambahan dari (4.43) sebagai berikut, misalkan

$$p_5 = (\beta^2 \mu + \beta^2 \theta)$$

$$p_6 = (2\alpha \beta \mu + 2\alpha \beta \theta + \beta^2 k)$$

$$p_7 = (2\alpha \beta \mu + 2\alpha \beta \theta)$$

$$p_8 = (2\beta \delta \mu + 2\beta \delta \theta + 3\beta \mu^2 + 4\beta \mu \theta + \beta \theta^2)$$

$$\begin{aligned}
p_9 &= (\alpha^2\mu + \alpha^2\theta + \alpha\beta k) \\
p_{10} &= (2\alpha^2\mu + 2\alpha^2\theta + \alpha\beta k) \\
p_{11} &= (2\alpha\delta\mu + 2\alpha\delta\theta + 3\alpha\mu^2 + 4\alpha\mu\theta + \beta\delta k + \beta k\mu + \alpha\theta^2 + \beta k\theta) \\
p_{12} &= (\alpha^2\mu + \alpha^2\theta) \\
p_{13} &= (2\alpha\delta\mu + 2\alpha\delta\theta + 3\alpha\mu^2 + 4\alpha\mu\theta + \alpha\theta^2) \\
p_{14} &= (\delta^2\mu + \delta^2\theta + 3\delta\mu^2 + 4\delta\mu\theta + 2\mu^3 + 4\mu^2\theta + \delta\theta^2 + 2\mu\theta^2)
\end{aligned}$$

Selanjutnya substitusi p_5 hingga p_{14} , persamaan (4.39) dan (4.40) ke (4.43), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&= \frac{p_5 k^2 (R_0 - 1)^2 (\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)^2 \theta^2} - \frac{p_6 k (R_0 - 1) (\delta\mu\theta + \mu^2\theta) (\delta + \mu)\theta}{\mu(\beta k + \alpha\theta)^2} \\
&+ \frac{p_7 k (R_0 - 1)^2 (\delta\mu\theta + \mu^2\theta)^2}{\mu^2(\beta k + \alpha\theta)^2 \theta} + \frac{p_8 k (R_0 - 1) (\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)\theta} \\
&+ \frac{p_9 \theta^2 (\delta + \mu)^2}{(\beta k + \alpha\theta)^2} - \frac{p_{10} (R_0 - 1) (\delta\mu\theta + \mu^2\theta) (\delta + \mu)\theta}{\mu(\beta k + \alpha\theta)^2} \\
&- \frac{p_{11} (\delta + \mu)\theta}{\beta k + \alpha\theta} + \frac{p_{12} (R_0 - 1)^2 (\delta\mu\theta + \mu^2\theta)^2}{\mu^2(\beta k + \alpha\theta)} \\
&+ \frac{p_{13} (R_0 - 1) (\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)} + p_{14} > 0 \\
&= \frac{p_5 k^2 (R_0 - 1)^2 (\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)^2 \theta^2} + \frac{p_7 k (R_0 - 1)^2 (\delta\mu\theta + \mu^2\theta)^2}{\mu^2(\beta k + \alpha\theta)^2 \theta} \\
&+ \frac{p_8 k (R_0 - 1) (\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)\theta} + \frac{p_9 \theta^2 (\delta + \mu)^2}{(\beta k + \alpha\theta)^2} \\
&+ \frac{p_{12} (R_0 - 1)^2 (\delta\mu\theta + \mu^2\theta)^2}{\mu^2(\beta k + \alpha\theta)} + \frac{p_{13} (R_0 - 1) (\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)} + p_{14} \\
&> \\
&\frac{p_6 k (R_0 - 1) (\delta\mu\theta + \mu^2\theta) (\delta + \mu)\theta}{\mu(\beta k + \alpha\theta)^2} \\
&+ \frac{p_{10} (R_0 - 1) (\delta\mu\theta + \mu^2\theta) (\delta + \mu)\theta}{\mu(\beta k + \alpha\theta)^2} + \frac{p_{11} (\delta + \mu)\theta}{\beta k + \alpha\theta} \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk mempersingkat penulisan dari (4.44) dengan memisalkan

$$q = \frac{p_5 k(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)(\delta + \mu)\theta}{\mu(\beta k + \alpha\theta)^2} + \frac{p_9(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)(\delta + \mu)\theta}{\mu(\beta k + \alpha\theta)^2} + \frac{p_{10}(\delta + \mu)\theta}{\beta k + \alpha\theta} > 0$$

Substitusi q ke (4.44), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} &= \frac{p_5 k^2(R_0 - 1)^2(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)^2\theta^2} + \frac{p_7 k(R_0 - 1)^2(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)^2}{\mu^2(\beta k + \alpha\theta)^2\theta} \\ &+ \frac{p_8 k(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)\theta} + \frac{p_9\theta^2(\delta + \mu)^2}{(\beta k + \alpha\theta)^2} \\ &+ \frac{p_{12}(R_0 - 1)^2(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)^2}{\mu^2(\beta k + \alpha\theta)} + \frac{p_{13}(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)} \\ &+ p_{14} > q \\ &= \frac{1}{q} \left(\frac{p_5 k^2(R_0 - 1)^2(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)^2\theta^2} + \frac{p_7 k(R_0 - 1)^2(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)^2}{\mu^2(\beta k + \alpha\theta)^2\theta} \right. \\ &+ \frac{p_8 k(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)\theta} + \frac{p_9\theta^2(\delta + \mu)^2}{(\beta k + \alpha\theta)^2} \\ &+ \frac{p_{12}(R_0 - 1)^2(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)^2}{\mu^2(\beta k + \alpha\theta)} + \frac{p_{13}(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)} + p_{14} \Big) \\ &> \frac{q}{q} \\ &= \frac{1}{q} \left(\frac{p_5 k^2(R_0 - 1)^2(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)^2\theta^2} + \frac{p_7 k(R_0 - 1)^2(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)^2}{\mu^2(\beta k + \alpha\theta)^2\theta} \right. \\ &+ \frac{p_8 k(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)\theta} + \frac{p_9\theta^2(\delta + \mu)^2}{(\beta k + \alpha\theta)^2} \\ &+ \frac{p_{12}(R_0 - 1)^2(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)^2}{\mu^2(\beta k + \alpha\theta)} + \frac{p_{13}(R_0 - 1)(\delta\mu\theta + \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)} + p_{14} \Big) \\ &> 1 \end{aligned}$$

Jadi $m_1 m_2 - m_3 > 0$ terpenuhi jika $R_0 > 1$

Oleh karena itu, kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi jika $R_0 > 1$, artinya titik kesetimbangan endemik belanja online E_2 akan stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$.

■ Jadi Teorema 4.2.2 terbukti.

Berdasarkan hasil analisis terhadap titik-titik kesetimbangan sistem (4.1), ringkasan mengenai eksistensi, sifat, serta kestabilan masing-masing titik kesetimbangan ditunjukkan pada Tabel 4.5 berikut

Tabel 4.5: Ringkasan Hasil Analisis Kestabilan Sistem

Titik Kesetimbangan	Syarat Eksistensi	Syarat Kestabilan	Sifat Kestabilan
$E_1 = \left(\frac{A}{\mu}, 0, 0\right)$	$A, \mu > 0$	Sesuai dengan Teorema 4.2.1	Stabil Asimtotik Lokal
$E_2 = (L_2^*, O_2^*, F_2^*)$	$\beta Ak + \alpha A\theta > \mu\delta\theta + \mu^2\theta$	Sesuai dengan Teorema 4.2.2	Stabil Asimtotik Lokal

dengan

$$L_2^* = \frac{(\delta + \mu)\theta}{\beta k + \alpha\theta},$$

$$O_2^* = \frac{\alpha A\theta + \beta Ak - \delta\mu\theta - \mu^2\theta}{\mu(\beta k + \alpha\theta)} \text{ dan}$$

$$F_2^* = \frac{k(\alpha A\theta + \beta Ak - \delta\mu\theta - \mu\delta\theta - \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)\theta}$$

C. Simulasi Numerik Model Matematika Dinamika Belanja *Online* dengan Pengaruh *Beauty Influencer*

Pada bagian ini, dilakukan simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dengan bantuan software MATLAB R2013a. Simulasi ini diterapkan pada model dinamika belanja *online* yang dipengaruhi oleh *beauty influencer*, bertujuan untuk memverifikasi hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan. Proses simulasi dilakukan dengan memasukkan nilai-nilai parameter yang telah ditentukan sebelumnya. Terdapat dua jenis simulasi yang dilakukan, yaitu simulasi numerik untuk kondisi bebas belanja *online* dan simulasi numerik untuk kondisi endemik belanja *online*.

1. Simulasi Numerik dalam Keadaan Bebas Belanja *Online*

Berikut merupakan nilai awal yang digunakan untuk simulasi numerik dalam keadaan bebas belanja *online*, yaitu ketika belum terdapat pembelanja *online* dalam sistem.

Tabel 4.6: Daftar Nilai Awal

Variabel	Nilai	Satuan	Sumber
$L(0)$	150	Individu	Sharma (2021)
$O(0)$	150	Individu	Sharma (2021)
$F(0)$	10	Konten promosi	Asumsi

Adapun nilai-nilai parameter yang akan digunakan adalah sebagai berikut.

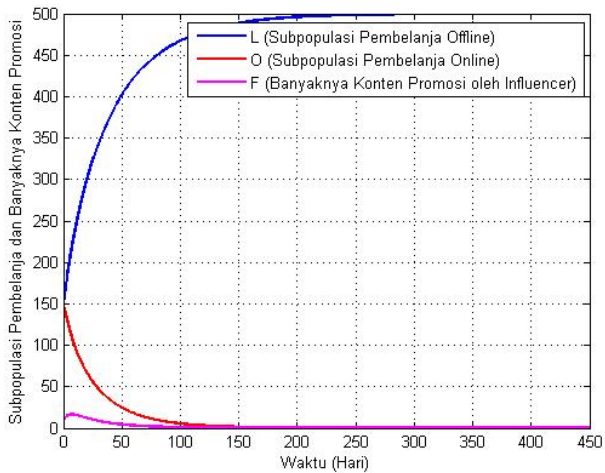
Tabel 4.7: Daftar Nilai Parameter (1)

Parameter	Nilai	Satuan	Sumber
A	10	$\frac{\text{Individu}}{\text{hari}}$	Sharma (2021)
α	0,00001	$\frac{\text{Individu.hari}}{\text{Individu.hari}}$	Lamis (2019)
β	0,0002	$\frac{\text{konten promosi.hari}}{\text{konten promosi.hari}}$	Sharma (2021)
δ	0,03	$\frac{1}{\text{hari}}$	Sharma (2021)
μ	0,02	$\frac{1}{\text{hari}}$	Sharma (2021)
k	0,03	$\frac{\text{konten promosi}}{\text{Individu.hari}}$	Misra (2022)
θ	0,2	$\frac{1}{\text{hari}}$	Maurya (2022)

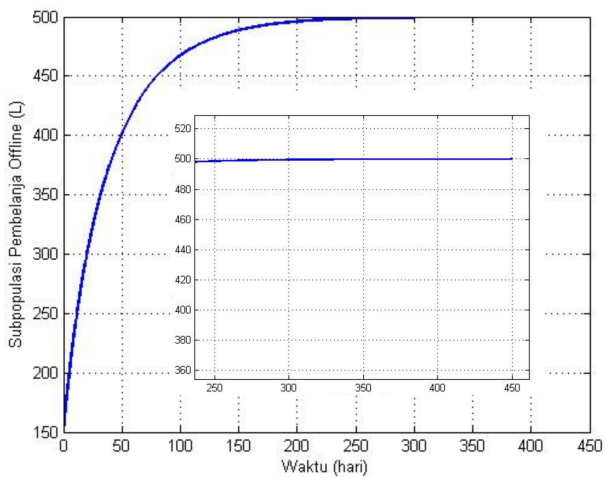
Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 4.7, diperoleh

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \frac{\alpha A \theta + \beta A k}{\delta \mu \theta + \mu^2 \theta} \\
 &= \frac{(0,00001)(10)(0,2) + (0,0002)(10)(0,03)}{(0,03)(0,02)(0,2) + (0,02^2)(0,2)} \\
 &= 0,4 < 1
 \end{aligned}$$

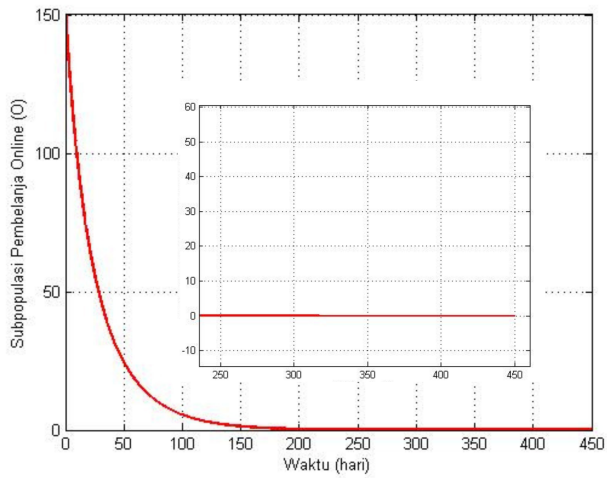
Karena $R_0 < 1$, maka tidak ada pembelanja *online* pada waktu tertentu dengan titik kesetimbangan bebas belanja *online* yaitu $L_1^* = 500$, $O_1^* = 0$ dan $F_1^* = 0$ (perhitungannya dapat dilihat pada lampiran (3)). Simulasi numerik untuk titik kesetimbangan bebas belanja *online* ditunjukkan pada Gambar 4.2 dengan rentang waktu hingga 450 hari sebagai berikut.



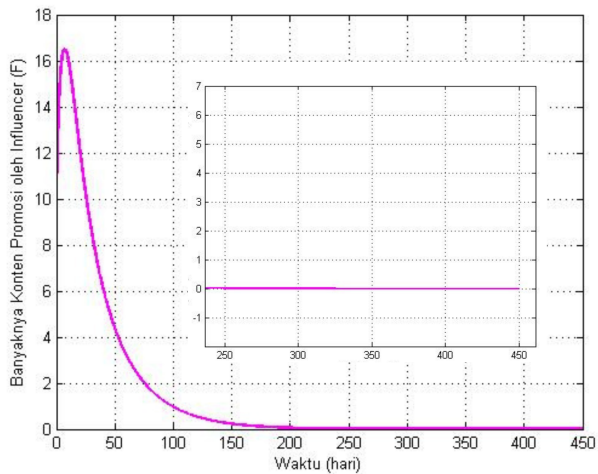
Gambar 4.2: Simulasi Bebas Belanja *Online*



Gambar 4.3: Subpopulasi Pembelanja *Offline*



Gambar 4.4: Subpopulasi Pembelanja Online



Gambar 4.5: Banyaknya Konten Promosi oleh *Beauty Influencer*

Berdasarkan Gambar 4.3, subpopulasi pembelanja *offline* mengalami peningkatan hingga hari ke-416, menuju titik 500 dan tetap stabil di titik tersebut. Sementara itu, berdasarkan Gambar 4.4, subpopulasi pembelanja *online* mengalami penurunan hingga hari ke-268, menuju titik 0 dan tetap stabil di titik tersebut. Selanjutnya, berdasarkan Gambar 4.5, konten promosi yang dilakukan oleh *beauty influencer* juga mengalami penurunan hingga hari ke-205, menuju titik 0 dan tetap stabil di titik tersebut.

Dengan demikian, titik kesetimbangan bebas belanja *online* yaitu $(L_1^*, O_1^*, F_1^*) = (500, 0, 0)$ bersifat stabil asimtotik lokal ketika $R_0 < 1$ dan ketika $t = 450$. Kondisi ini menunjukkan bahwa dalam jangka panjang, tidak terdapat pembelanja *online* dalam sistem.

Selanjutnya, hasil perhitungan nilai eigen dari persamaan (4.34) diperoleh dengan mensubstitusikan nilai parameter pada Tabel 4.7. Perhitungan lebih rinci mengenai nilai eigen tersebut dapat dilihat pada lampiran (2).

Tabel 4.8: Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Belanja *Online*

Titik Keseimbangan	Nilai Eigen	Sifat Kestabilan
$L_1^* = 500,$ $O_1^* = 0,$ $F_1^* = 0$	$\lambda_1 = -0,02$ $\lambda_2 = -0,27$ $\lambda_3 = -0,21$	Stabil Asimtotik Lokal

2. Simulasi Numerik dalam Keadaan Endemik Belanja Online

Untuk simulasi numerik endemik belanja *online*, parameter yang diubah dari kondisi bebas belanja *online* adalah α dan β , sementara parameter lainnya tetap. Berikut nilai parameter α dan β yang digunakan.

Tabel 4.9: Daftar Nilai Parameter (2)

Parameter	Nilai	Satuan	Sumber
α	0,002	$\frac{1}{\text{individu.hari}}$	Misra(2022)
β	0,003	$\frac{1}{\text{konten promosi.hari}}$	Asumsi

Pada Tabel 4.9 terdapat nilai parameter yang diasumsikan yaitu β . Nilai parameter β dihitung berdasarkan jumlah konten promosi dari tujuh *beauty influencer* di platform Instagram, YouTube, dan TikTok selama periode Januari hingga Desember 2023, yang mencapai 251 unggahan atau sekitar 0,687 konten promosi per hari (daftar nama *beauty influencer* dan jumlah postingan promosi dapat dilihat pada lampiran (8)). Berdasarkan data dari Statista, 68% responden Indonesia tahun 2023 membeli produk *skincare* dan kosmetik berdasarkan *endorsement* oleh *influencer*. Pada tahun 2023, jumlah pengguna *e-commerce* di Indonesia tercatat sebanyak 58,63 juta, sementara total populasi mencapai 278,7 juta jiwa (BPS). Dengan demikian, jumlah penduduk yang belum menggunakan *e-commerce* diperkirakan sekitar 220,06 juta orang. Dari kelompok pengguna yang belum menggunakan *e-commerce*, diperkirakan 68% atau sekitar 149,65 juta orang berpindah ke belanja *online*

akibat pengaruh *influencer*, dengan rata-rata perpindahan harian sebesar 409.986 orang. Oleh karena itu, nilai β dihitung sebagai rasio antara jumlah perpindahan per hari dan hasil perkalian antara jumlah pengguna *non e-commerce* dengan jumlah konten promosi per hari, yaitu:

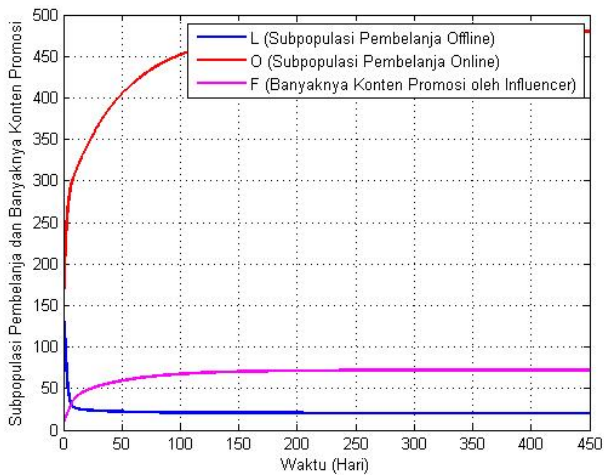
$$\beta = \frac{409.986}{220.066.200 \times 0,687} = 0,003$$

Selanjutnya berdasarkan nilai parameter pada Tabel 4.9, diperoleh

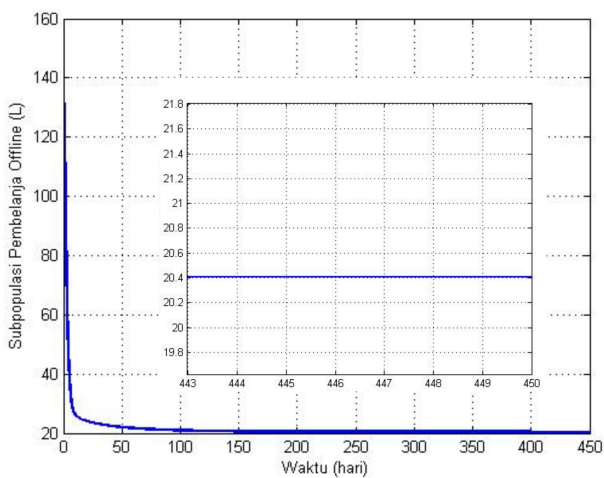
$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\alpha A\theta + \beta Ak}{\delta\mu\theta + \mu^2\theta} \\ &= \frac{(0,002)(10)(0,2) + (0,003)(10)(0,03)}{(0,03)(0,02)(0,2) + (0,02^2)(0,2)} = 24,5 > 1 \end{aligned}$$

Karena $R_0 > 1$, maka terdapat pembelanja *online* pada waktu tertentu dengan titik kesetimbangan endemik belanja *online* yaitu $L_2^* = 20,4$, $O_2^* = 479,5$ dan $F_2^* = 71,9$ (dapat dilihat pada lampiran (3)).

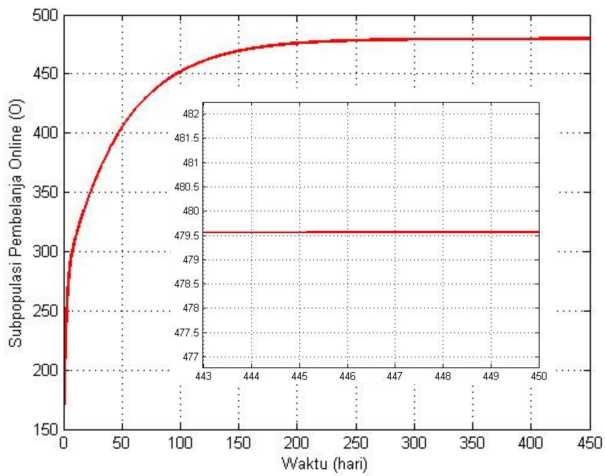
Simulasi numerik untuk titik kesetimbangan endemik belanja *online* dilakukan dengan nilai awal yang disajikan pada Tabel 4.6 dan rentang waktu hingga 450 hari adalah sebagai berikut.



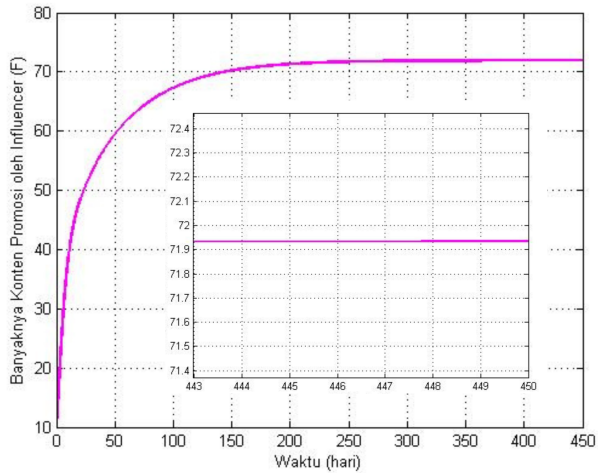
Gambar 4.6: Simulasi Endemik Belanja *Online*



Gambar 4.7: Subpopulasi Pembelanja *Offline*



Gambar 4.8: Subpopulasi Pembelanja Online



Gambar 4.9: Banyaknya Konten Promosi oleh *Beauty Influencer*

Berdasarkan Gambar 4.7, subpopulasi pembelanja *offline* mengalami penurunan bertahap hingga hari ke-224, menuju titik 20,4 dan stabil di titik tersebut. Sementara itu, berdasarkan Gambar 4.8 subpopulasi pembelanja *online* mengalami kenaikan secara bertahap hingga hari ke-425, menuju titik 479,6 dan stabil di titik tersebut. Selanjutnya berdasarkan Gambar 4.9, banyaknya konten promosi oleh *beauty influencer* terus meningkat hingga hari ke-298, menuju titik 71,9 dan tetap stabil di waktu tersebut hingga waktu ke-450.

Selanjutnya, hasil perhitungan nilai eigen dari persamaan karakteristik (4.36) diperoleh dengan mensubstitusikan nilai parameter pada Tabel 4.9. Perhitungan lebih rinci mengenai nilai eigen tersebut dapat dilihat pada lampiran (4).

Tabel 4.10: Kestabilan Titik Keseimbangan Endemik Belanja Online

Titik Keseimbangan	Nilai Eigen	Sifat Kestabilan
$L_2^* = 20,4$	$\lambda_1 = -0,02$	Stabil
$O_2^* = 479,5$	$\lambda_2 = -1,18$	Asimtotik
$F_2^* = 71,9$	$\lambda_3 = -0,19$	Lokal

Selanjutnya dilakukan simulasi numerik untuk beberapa variasi nilai parameter k dan θ . Parameter k merepresentasikan laju peningkatan konten promosi oleh *beauty influencer*, sedangkan θ menunjukkan laju penurunan konten promosi tersebut.

Simulasi ini digunakan untuk meninjau pengaruh kedua parameter terhadap pertumbuhan serta kestabilan jumlah pembelanja *online* dalam sistem. Variasi nilai parameter k dan θ yang digunakan menghasilkan perbedaan nilai R_0 , yang memengaruhi dinamika belanja *online*.

Berikut variasi nilai parameter k, θ dan R_0 yang digunakan.

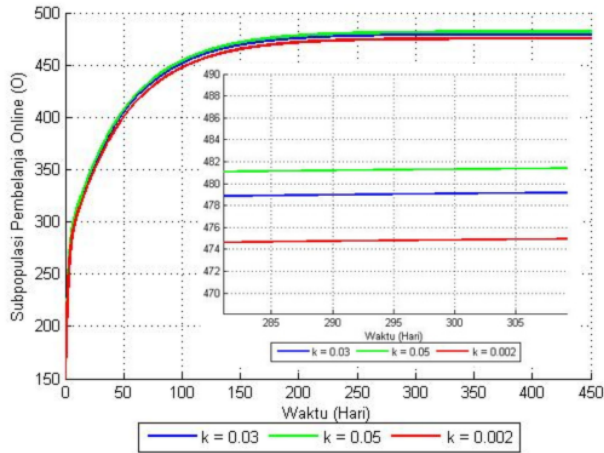
Tabel 4.11: Variasi Nilai Parameter k

Parameter k	Nilai R_0	Sumber
0,03	24,5	Misra (2022)
0,05	27,5	Sharma (2021)
0,002	20,3	Asumsi

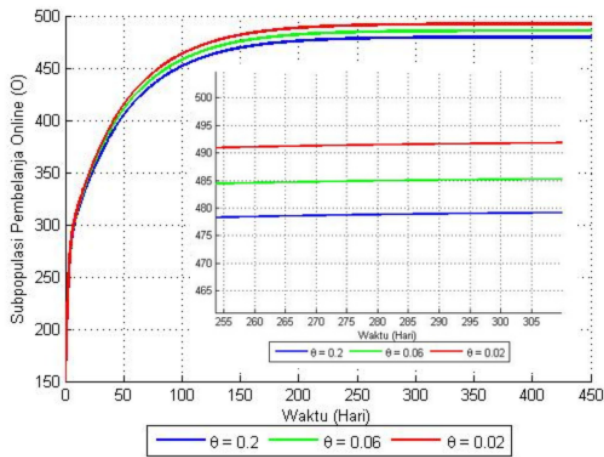
Tabel 4.12: Variasi Nilai Parameter θ

Parameter θ	Nilai R_0	Sumber
0,2	24,5	Maurya (2022)
0,06	35	Sharma (2021)
0,02	65	Misra (2022)

Berikut adalah grafik dengan variasi nilai parameter k dan θ yang berbeda.



Gambar 4.10: Pengaruh k pada Subpopulasi Pembelanja *Online*



Gambar 4.11: Pengaruh θ pada Subpopulasi Pembelanja *Online*

Berdasarkan Gambar 4.10 dan 4.11, hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa parameter k dan θ memengaruhi jumlah pembelanja *online*. Selain memengaruhi jumlah pembelanja, variasi nilai k dan θ juga berdampak pada perubahan nilai R_0 . Semakin besar nilai k , maka nilai R_0 akan semakin meningkat. Sebaliknya, semakin besar nilai θ , maka nilai R_0 akan semakin menurun. Hal ini menunjukkan bahwa semakin tinggi intensitas promosi (k) yang dilakukan oleh *beauty influencer*, maka semakin banyak individu yang beralih ke belanja *online*.

Temuan ini sejalan dengan penelitian Liu (2023) yang menunjukkan bahwa *influencer* memengaruhi keputusan pembelian kosmetik di platform TikTok. Hal serupa juga disampaikan oleh Lailia dan Andriana (2023), bahwa promosi *online* berpengaruh terhadap minat dan keputusan pembelian secara *online*. Penelitian Yoebrilanti (2014) turut memperkuat bahwa promosi melalui jejaring sosial dapat membentuk minat beli yang berperan penting dalam keputusan konsumen untuk berbelanja secara *online*.

Variasi nilai parameter tersebut dan dampaknya terhadap jumlah pembelanja *online* dapat dilihat pada Tabel 4.13 berikut.

Tabel 4.13: Variasi k dan θ Terhadap Jumlah Pembelanja Online

Parameter	Nilai R_0	Jumlah Pembelanja Online
$k = 0,03$	24,5	479,5
$k = 0,05$	27,5	481,7
$k = 0,002$	20,3	475,3
$\theta = 0,2$	24,5	479,5
$\theta = 0,06$	35	485,6
$\theta = 0,02$	65	492,2

Tabel 4.13 menunjukkan bahwa variasi parameter k dan θ memengaruhi nilai bilangan reproduksi dasar R_0 serta jumlah pembelanja online. Peningkatan nilai k , yang merepresentasikan laju pertumbuhan konten promosi oleh *beauty influencer*, menyebabkan kenaikan nilai R_0 dan jumlah pembelanja online. Sebagai contoh, ketika k meningkat dari 0,002 menjadi 0,05, jumlah pembelanja online naik dari 475,3 menjadi 481,7.

Sementara itu, penurunan nilai θ , yaitu laju penurunan jumlah konten promosi, juga meningkatkan R_0 dan jumlah pembelanja online. Ketika θ menurun dari 0,2 menjadi 0,02, jumlah pembelanja online meningkat dari 479,5 menjadi 492,2. Hal ini menunjukkan bahwa aktivitas promosi yang intensif dan bertahan lama berperan dalam mendorong perpindahan pembelanja ke platform belanja online.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan analisis kestabilan dinamika belanja *online* dengan pengaruh *beauty influencer*, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika dinamika belanja *online* dengan pengaruh *beauty influencer* direpresentasikan dalam sistem otonomus nonlinier berikut

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = A - \beta LF - \alpha LO + \delta O - \mu L, \\ \frac{dO}{dt} = \beta LF + \alpha LO - \delta O - \mu O, \\ \frac{dF}{dt} = kO - \theta F. \end{cases}$$

dengan kondisi awal $L(0) \geq 0$, $O(0) \geq 0$ dan $F(0) \geq 0$.

2. Model matematika dinamika belanja *online* dengan pengaruh *beauty influencer* memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu:

- a. Titik kesetimbangan bebas belanja *online*:

$$E_1 = (L_1^*, O_1^*, F_1^*) = \left(\frac{A}{\mu}, 0, 0 \right)$$

Titik E_1 selalu dikatakan eksis jika $A > 0$ dan $\mu > 0$. E_1 bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$.

b. Titik kesetimbangan endemik belanja *online*:

$$E_2 = (L_2^*, O_2^*, F_2^*)$$

dengan

$$\begin{aligned} L_2^* &= \frac{(\delta + \mu)\theta}{\beta k + \alpha\theta}, \\ O_2^* &= \frac{\alpha A\theta + \beta Ak - \delta\mu\theta - \mu^2\theta}{\mu(\beta k + \alpha\theta)}, \\ F_2^* &= \frac{k(\alpha A\theta + \beta Ak - \delta\mu\theta - \mu\delta\theta - \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)\theta} \end{aligned}$$

Titik E_2 selalu dikatakan eksis jika $\beta Ak + \alpha A\theta > \mu\delta\theta + \mu^2\theta$. E_2 bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$.

3. Hasil simulasi numerik menggunakan *software* Matlab R2013a menunjukkan bahwa ketika $R_0 < 1$ maka tidak terdapat pembelanja *online*, sedangkan ketika $R_0 > 1$ terdapat pembelanja *online*.

Variasi parameter k (laju pertumbuhan konten promosi) dan θ (laju penurunan konten promosi) memengaruhi nilai R_0 dan jumlah pembelanja *online*. Semakin besar k dan semakin kecil θ , maka nilai R_0 cenderung meningkat dan jumlah pembelanja *online* bertambah. Hal ini menunjukkan bahwa konten promosi yang dilakukan oleh *beauty influencer* secara intensif mampu mendorong perpindahan konsumen dari belanja *offline* ke *online*.

Temuan ini sejalan dengan penelitian Liu (2023) yang

menyatakan bahwa *influencer* berpengaruh terhadap keputusan pembelian. Penelitian Lailia dan Andriana (2023), serta Yoebrilianti (2014) juga mendukung bahwa promosi *online* dan strategi promosi melalui jejaring sosial berperan dalam meningkatkan minat dan keputusan pembelian secara *online*.

B. Saran

Berdasarkan penelitian ini, disarankan agar penelitian selanjutnya dapat mempertimbangkan analisis kestabilan secara global.

DAFTAR PUSTAKA

- Alam, M. D. 2019. Mathematical modeling in social and behavioral sciences. *International Journal of Applied Research*, 5(5), 310-312.
- Afika, A., Yulian P., O. D., & Pasulu, I. 2023. Pengaruh online shop terhadap minat beli barang secara online pada mahasiswa Fakultas Ekonomi Universitas Kristen Indonesia Toraja. *Prosiding Seminar Nasional Manajemen dan Ekonomi*, 2(1), 257–265.
- Anton, H. & Rorres, C. 2014. *Elementary Linear Algebra with Applications* (11th ed.). Wiley.
- Asosiasi Penyelenggara Jasa Internet Indonesia (APJII). 2024. *Jumlah Pengguna Internet Indonesia Tembus 221 Juta Orang*. Diakses dari <https://apjii.or.id/berita/d/>.
- Aswan. 2018. *Pembatasan Dinamika Merokok dengan Menggunakan Pendekatan Model Matematika* (Skripsi). UIN Alauddin Makassar.
- Balisacan, J., Chyba, M., & Shanbrom, C. (2021). *Two new compartmental epidemiological models and their equilibria*. medRxiv.
- Bender E. A. 1978. *An Introduction to Mathematical Modeling*. New York: Wiley-Interscience.
- Bhattacharya, S., Gaurav, K., & Ghosh, S. 2019. Viral marketing on social networks: An epidemiological

perspective. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 525, 478–490.

Bithour Production. 2023. *Kekurangan influencer marketing*. Diakses pada 6 Februari 2025, dari <https://bithourproduction.com/blog/kekurangan-influencer-marketing/>

Boyce, W. E. & DiPrima, R. C. 2009. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem*. Wiley.

Cambridge Dictionary. 2024. *Follower*. Dalam *Cambridge Dictionary*. Diakses pada tanggal 17 Oktober 2024, dari <https://dictionary.cambridge.org/dictionary/english/follower>.

Campbell, C. & Farrell, J. R. 2020. More than meets the eye: The functional components underlying influencer marketing. *Business Horizons*, 63(4), 469-479.

Capital One Shopping. 2024. *Total Number of Online Stores*. Diakses pada tanggal 02 September 2024, dari <https://capitaloneshopping.com/research/number-of-online-stores/>.

Chapra, S. C., & Canale, R. P. 2015. *Numerical methods for engineers* (7th ed.). New York: McGraw-Hill Education.

Chrisavira, M., Suryanto, & Chan, A. 2025. Analisis peran mega, macro, dan micro influencer dalam promosi produk kecantikan (Studi pada konten influencer di TikTok). *Jurnal Lentera Bisnis*, 14(1), 69–79.

- Digital Marketing Institute. 2024. *20 Surprising Influencer Marketing Statistics*. Diakses pada tanggal 06 Februari 2025 dari <https://digitalmarketinginstitute.com/blog/20-influencer-marketing-statistics-that-will-surprise-you>.
- Driessche, P. V. D. & Watmough, J. 2002. Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, 180(1-2), 29-48.
- Duggal, E. & Verma, H. V. 2022. Offline to online shopping: Shift in volition or escape from violation. *Journal of Indian Business Research*, 14(2), 123-135.
- Elaydi, S. 2005. *An Introduction to Difference Equations* (3rd ed.). Springer.
- Ellitan, L. & Anatan, L. 2008. *Supply Chain Management*. Bandung: Penerbit Alfabeta.
- Fahmi, M. N. 2018. Endorse dan paid promote Instagram dalam perspektif hukum Islam. *An-Nawa: Jurnal Hukum Islam*, 20(2), 145-154.
- Febby. 2025. *Influencer Fatigue*. Diakses pada tanggal 06 Februari 2025 di <https://kol.id/blog/influencer-fatigue?>.
- Frahyanti, F., Syafi'i, M. A., & Devi, H. S. 2024. Analisis faktor-faktor yang menyebabkan konsumen memilih

belanja online store daripada offline store. *Jurnal Sahmiyya*, 3(1), 42–51.

Freberg, K., Graham, K., McGaughey, K., & Freberg, L. A. 2010. Who are the social media influencers? A study of public perceptions of personality. *Public Relations Review*, 36(1), 90–92.

GRIN. 2024. *10 Types of Social Media Influencers You Can Work With*. Di akses pada 21 Oktober 2024, dari <https://grin.co/blog/types-of-social-media-influencers/>.

Harishchandra. 2021. The Impact of Social Media Influencers on Consumer Decision-Making and Brand Loyalty in Online Shopping. *International Journal for Multidisciplinary Research*, 3(3), 1–9.

Hermann, M. & Saravi, M. 2016. *Nonlinear Ordinary Differential Equations: Analytical Approximation and Numerical Methods*. Springer.

Influencer Marketing Hub. 2023. *Influencer Marketing Benchmark Report 2023*. Diakses pada tanggal 02 September 2024, dari https://influencermarketinghub.com/ebooks/Influencer_Marketing_Benchmark_Report_2023.pdf

Jansen, B.J., Zhang, M., Sobel, K., & Chowdury, A. 2009. Twitter power: Tweets as Electronic Word of Mouth. *Journal of the American Society for Information Science and Technology*, 60(11), 2169–2188.

- Khalil, H. K. 2002. *Nonlinear Systems* (3rd ed.). Prentice Hall.
- Kusumaningsih, S., Sutopo, J., & Nurlaeli, F. 2021. *Buku panduan marketplace*. Global Aksara Pres.
- Lailia, D. N., & Andriana, R. 2023. Pengaruh promosi online dan harga terhadap minat beli serta dampaknya pada keputusan pembelian belanja online di Shopee. *Prosiding Seminar Nasional Forum Manajemen Indonesia*, 1, 742–751.
- Lamis, A. 2019. *Analisis Dinamik Model Penyebaran Rumor dengan Kontrol Optimal Pada Payangan Berita di Media* (Skripsi). Malang: Universitas Brawijaya.
- Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. J. 2016. *Linear algebra and its applications* (5th ed.). Pearson Education.
- Liu, Q. 2023. How beauty influencers on TikTok can affect the purchasing of cosmetics. In *SHS Web of Conferences* (Vol. 165, 02022). EDP Sciences.
- Ledder, G. 2013. *Mathematics for the life sciences: Calculus, modeling, probability, and dynamical systems*. Springer.
- Lou, C. & Yuan, S. 2019. Influencer marketing: How message value and credibility affect consumer trust of branded content on social media. *Journal of Interactive Advertising*, 18(1), 58–73.
- Martin Roll. 2018. *Branding and Celebrity Endorsement*. Diakses pada tanggal 07 September 2024 , dari <https://martinroll>.

com/resources/articles/branding/
branding-and-celebrity-endorsement/.

Maurya, J., Goyal, K., & Misra, A. K. 2022. Modeling the impact of social media on the adoption of a new product by customers. *MethodsX*, 9, 101932.

Mileva, G. 2024. *8 steps to become a successful brand ambassador*. Influencer Marketing Hub. Diakses pada tanggal 06 September 2024, dari <https://influencermarketinghub.com/brand-ambassador/>.

Misra, A. K., Goyal, K., & Maurya, J. 2022. Impact of social media advertisements on the dynamics of online shopping: A modeling study. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 31(3), 651–671.

Mujiyana & Elissa, I. 2013. Analisis Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Keputusan Pembelian Via Internet Pada Toko Online. *J@TI Undip*, 8(3), 1–8.

Murray, J.D. 2002. *Mathematical biology: I. An introduction* (3rd ed.). Springer.

Perko, L. 2001. *Differential Equations and Dynamical Systems* (3rd ed.). Springer.

Rianto, Y., Lumanto, R., & Meiningsing, S. 2013. *Potret Belanja Online di Indonesia*. Pusat Data dan Sarana Informatika, Jakarta Pusat.

Ross, S.L. 1984. *Differential Equations* (3rd ed.). Wiley.

- Ryan, D. & Jones, C. 2009. *Understanding Digital Marketing. Marketing Strategis For Engagging the digital generation*. Kogan Page.
- Sameeha M.S.F. & Milhana U.L. 2021. A Comparative Study of Traditional Shopping and Online Shopping: Special Reference to Dharga Town. *KALAM - International Journal*, 14(4), 50–58.
- Slice.id. 2023. *Deretan 35 Influencer Indonesia Populer dari Berbagai Niche*. Diakses pada tanggal 22 April 2025, dari <https://www.slice.id/blog/deretan-35-influencer-indonesia-populer-dari-berbagai-niche>.
- Shadrina, R. N., & Sulistyanto, Y. 2022. Analisis pengaruh content marketing, influencer, dan media sosial terhadap keputusan pembelian konsumen (Studi pada pengguna Instagram dan TikTok di Kota Magelang). *Diponegoro Journal of Management*, 11(1), 1–10.
- Statista. 2024. *Number of users of e-commerce in Indonesia from 2020 to 2029 (in millions)*. Diakses pada tanggal 02 September 2024, dari <https://www.statista.com/forecasts/251635/e-commerce-users-in-indonesia>.
- Sharma, S. 2021. Modelling the role of information on the spread of online shopping. *Computational and Mathematical Methods*, 3(4), e1182.
- Statista. 2024. *Most popular social networks worldwide as of April 2024, by number of monthly active users*. Diakses

pada tanggal 02 September 2024, dari <https://www.statista.com/statistics/272014/>.

Statista. 2024. *Share of people who have purchased an item or product because it was endorsed by an influencer in Indonesia as of May 2023*. Diakses pada tanggal 02 September 2024, dari <https://www.statista.com/statistics/1201127/indonesia-influencer-impact-on-buyer-behavior/>.

Wang, X. 2004. "A simple proof of Descartes's rule of signs," *The American Mathematical Monthly*, 111(6), 525–526.

Wei, B. 2023. Stability Analysis of Equilibrium Point and Limit Cycle of Two-Dimensional Nonlinear Dynamical Systems—A Tutorial. *Applied Sciences*, 13(2), 1136.

Wiggins, S. 2003. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (2nd ed.). Springer.

Wiraya, A., Fitriana, L., Triyanto, Mardiyana, Y. A., Khoirunnisa, S., Nurmalitasari, A., Sitaba, M. B. D., & Sofiya, S. F. 2023. *Karakterisasi COVID-19 melalui model matematika tingkat mikroseluler*. Universitas Negeri Semarang.

Yoebrilianti, A. 2014. Pengaruh promosi penjualan terhadap minat beli produk fashion dengan gaya hidup sebagai variabel moderator (Survei konsumen pada jejaring sosial). *Jurnal Manajemen*, 8(1), 20–30.

Lampiran 1. Penentuan Banyaknya Akar Riil Negatif dengan Aturan Tanda Descartes

Menentukan banyaknya akar riil negatif dari polinomial berderajat dua berikut

$$\lambda^2 + \left(\delta + \mu + \theta - \frac{\alpha A}{\mu} \right) \lambda + (\delta\theta + \mu\theta)(1 - R_0) = 0 \quad (\text{L1.1})$$

didefinisikan terlebih dahulu koefisien-koefisiennya sebagai berikut:

$$a = 1$$

$$b = \delta + \mu + \theta - \frac{\alpha A}{\mu}$$

$$c = (\delta\theta + \mu\theta)(1 - R_0)$$

Koefisien b dapat bernilai positif atau negatif, sedangkan nilai koefisien c bergantung pada R_0 . Jika $R_0 < 1$, maka $c > 0$, sedangkan jika $R_0 > 1$, maka $c < 0$.

Dengan demikian, persamaan (L1.1) memiliki berbagai kemungkinan dalam perubahan tanda koefisiennya, yaitu

Tabel 0.1: Kemungkinan Tanda Koefisien a, b, c

a	b	c
+	+	+
+	+	-
+	-	+
+	-	-

(a) Kemungkinan 1

Menentukan banyaknya akar riil positif $P(\lambda)$, yaitu sebagai berikut

$$P(\lambda) = \underbrace{a\lambda^2}_0 + \underbrace{b\lambda}_0 + c$$

Tidak ada perubahan tanda, maka banyaknya akar riil positif dari kemungkinan 1 adalah 0.

Selanjutnya menentukan banyaknya akar riil negatif $P(-\lambda)$, yaitu sebagai berikut

$$P(\lambda) = \underbrace{a\lambda^2}_1 - \underbrace{b\lambda}_1 + c$$

Terjadi perubahan tanda dua kali, maka banyaknya akar riil negatif dari kemungkinan 1 adalah 2.

(b) Kemungkinan 2

Menentukan banyaknya akar riil positif $P(\lambda)$, yaitu sebagai berikut

$$P(\lambda) = \underbrace{a\lambda^2}_0 + \underbrace{b\lambda}_1 - c$$

Terjadi perubahan tanda satu kali, maka banyaknya akar riil positif dari kemungkinan 2 adalah 1.

Selanjutnya menentukan banyaknya akar riil negatif

$P(-\lambda)$, yaitu sebagai berikut

$$P(\lambda) = \underbrace{a\lambda^2}_1 - \underbrace{b\lambda}_0 - c$$

Terjadi perubahan tanda satu kali, maka banyaknya akar riil negatif dari kemungkinan 2 adalah 1.

(c) Kemungkinan 3

Menentukan banyaknya akar riil positif $P(\lambda)$, yaitu sebagai berikut

$$P(\lambda) = \underbrace{a\lambda^2}_1 - \underbrace{b\lambda}_1 + c$$

Terjadi perubahan tanda dua kali, maka banyaknya akar riil positif dari kemungkinan 3 adalah 2.

Selanjutnya menentukan banyaknya akar riil negatif $P(-\lambda)$, yaitu sebagai berikut

$$P(\lambda) = \underbrace{a\lambda^2}_0 + \underbrace{b\lambda}_0 + c$$

Tidak ada perubahan tanda, maka banyaknya akar riil negatif dari kemungkinan 3 adalah 0.

(d) Kemungkinan 4

Menentukan banyaknya akar riil positif $P(\lambda)$, yaitu

sebagai berikut

$$P(\lambda) = \underbrace{a\lambda^2}_{1} - \underbrace{b\lambda}_{0} - c$$

Terjadi perubahan tanda satu kali, maka banyaknya akar riil positif dari kemungkinan 4 adalah 1.

Selanjutnya menentukan banyaknya akar riil negatif $P(-\lambda)$, yaitu sebagai berikut

$$P(\lambda) = \underbrace{a\lambda^2}_{0} + \underbrace{b\lambda}_{1} - c$$

Terjadi perubahan tanda satu kali, maka banyaknya akar riil negatif dari kemungkinan 4 adalah 1,

Banyaknya akar riil positif dan negatif yang telah diperoleh disajikan pada Tabel berikut:

Tabel 0.2: Banyaknya Akar Riil Positif dan Negatif

Banyaknya Kemungkinan	a	b	c	Banyaknya Akar Riil Positif	Banyaknya Akar Riil Negatif
1	+	+	+	0	2 atau 0
2	+	+	-	1	1
3	+	-	+	2 atau 0	1
4	+	-	-	1	1

Lampiran 2. Pembuktian Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Belanja *Online*

Analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas belanja *online* dapat dilakukan dengan mensubstitusikan nilai parameter pada Tabel (4.7) ke matriks Jacobi E_1 (4.31), yaitu sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 J(E_1) &= \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\alpha A}{\mu} + \delta & -\frac{\beta A}{\mu} \\ 0 & \frac{\alpha A}{\mu} - \delta - \mu & \frac{\beta A}{\mu} \\ 0 & k & -\theta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -0,02 & -\frac{(0,00001)(10)}{0,02} + 0,03 & -\frac{(0,0002)(10)}{0,02} \\ 0 & \frac{(0,00001)(10)}{0,02} - (0,03) - (0,02) & \frac{(0,0002)(10)}{0,02} \\ 0 & 0,03 & -0,2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -0,02 & 0,025 & -0,1 \\ 0 & -0,045 & 0,1 \\ 0 & 0,03 & -0,2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Matriks $J(E_1)$ dapat dibentuk persamaan karakteristik yaitu

$$|\lambda I - J(E_1)| = 0$$

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,02 & 0,025 & -0,1 \\ 0 & -0,045 & 0,1 \\ 0 & 0,03 & -0,2 \end{bmatrix} \right| &= 0 \\
 \left| \begin{bmatrix} \lambda + 0,02 & 0,025 & -0,1 \\ 0 & \lambda + 0,045 & 0,1 \\ 0 & 0,03 & \lambda + 0,2 \end{bmatrix} \right| &= 0
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 0,02) \begin{vmatrix} \lambda + 0,045 & 0,1 \\ 0,03 & \lambda + 0,2 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 0,02)(\lambda^2 + 0,245\lambda + 0,006) = 0$$

diperoleh $\lambda_1 = -0,02$ dan persamaan karakteristik polinomial derajat dua, yaitu

$$\lambda^2 + 0,245\lambda + 0,006 = 0 \quad (\text{L2.2})$$

nilai λ pada persamaan (L2.2) dapat diperoleh dengan menggunakan rumus

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dengan $a = 1$, $b = 0,245$, $c = 0,006$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda_{2,3} &= \frac{-0,245 \pm \sqrt{0,245^2 - 4(0,006)}}{2} \\ &= \frac{-0,245 \pm 0,189802}{2} \end{aligned}$$

diperoleh $\lambda_2 = -0,027$ dan $\lambda_3 = -0,21$.

Perhitungan dengan menggunakan Maple

with(Student[Calculus1]):

$A := 10; \alpha := 0.00001; \beta := 0.0002; \delta := 0.03; \mu := 0.02; k := 0.03; \theta := 0.2;$

with(Student[MultivariateCalculus]):

$$JE1 := \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{A\alpha}{\mu} + \delta & -\frac{A\beta}{\mu} \\ 0 & \frac{A\alpha}{\mu} - \delta - \mu & \frac{A\beta}{\mu} \\ 0 & k & -\theta \end{bmatrix};$$

$$JE1 := \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02500000000 & -0.1000000000 \\ 0 & -0.04500000000 & 0.1000000000 \\ 0 & 0.03 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$Nilai_Eigen_JE1 := Eigenvalues(JE1);$

$$Nilai_Eigen_JE1 := \begin{bmatrix} -0.02000000000000000 + 0.0I \\ -0.0275987355194884 + 0.0I \\ -0.217401264480512 + 0.0I \end{bmatrix}$$

Berdasarkan perhitungan, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -0,02$; $\lambda_2 = -0,027$; dan $\lambda_3 = -0,21$. Karena bagian riil dari semua nilai eigen tersebut bernilai negatif, maka titik kesetimbangan bebas belanja *online* bersifat stabil secara asimtotik lokal, sesuai dengan kriteria stabilitas menurut Wiggins (2003).

Lampiran 3. Perhitungan Nilai Titik Keseimbangan Bebas dan Endemik Belanja *Online*

Perhitungan dengan menggunakan Maple diperoleh titik keseimbangan sebagai berikut:

>restart;

>dL:=A- beta*L*F - alpha*L*O + delta*O - mu*L;

dO:=beta*L*F + alpha*L*O - delta*O -mu*O;

dF:=k*O - theta*F;

Titik_Keseimbangan:= solve({dL, dO, dF}, {L, O, F});

Titik_Keseimbangan:= $\left\{ F = 0, L = \frac{A}{\mu}, O = 0 \right\},$
 $\left\{ F = \frac{k(A\alpha\theta + A\beta k - \theta\mu\delta - \theta\mu^2)}{\mu(\alpha\theta + \beta k)\theta}, L = \frac{\theta(\delta + \mu)}{\alpha\theta + \beta k}, O = \frac{A\alpha\theta + A\beta k - \theta\mu\delta - \theta\mu^2}{\mu(\alpha\theta + \beta k)} \right\}$

1. Titik Keseimbangan Bebas Belanja *Online*

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel (4.7), titik keseimbangan bebas belanja *online* dapat ditentukan sebagai berikut.

- Subpopulasi pembelanja *offline* $L_2^* = \frac{A}{\mu} = \frac{10}{0,02} = 500$
- Subpopulasi pembelanja *online* $O_2^* = 0$
- Banyaknya konten promosi yang dilakukan oleh *influencer* $F_2^* = 0$

2. Titik Keseimbangan Endemik Belanja *Online*

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel (4.9), titik keseimbangan endemik belanja *online* dapat ditentukan sebagai berikut.

- Subpopulasi pembelanja *offline* L_2^*

$$\begin{aligned}
L_2^* &= \frac{(\delta + \mu)\theta}{\beta k + \alpha\theta} \\
&= \frac{(0, 03 + 0, 02)(0, 2)}{(0, 003)(0, 03) + (0, 002)(0, 2)} \\
&= 20, 4
\end{aligned}$$

b. Subpopulasi pembelanja *online* O_2^*

$$\begin{aligned}
O_2^* &= \frac{\alpha A\theta + \beta Ak - \delta\mu\theta - \mu^2\theta}{\mu(\beta k + \alpha\theta)} \\
&= \frac{1}{\mu(\beta k + \alpha\theta)} \left(\alpha A\theta + \beta Ak - \delta\mu\theta - \mu^2\theta \right) \\
&= \frac{1}{(0, 02) ((0, 003)(0, 03) + (0, 002)(0, 2))} \left((0, 002) \right. \\
&\quad (10)(0, 2) + (0, 003)(10)(0, 03) - (0, 03)(0, 02)(0, 2) - \\
&\quad \left. (0, 02^2)(0, 2) \right) \\
&= 479, 5
\end{aligned}$$

c. Banyaknya konten promosi yang dilakukan oleh *influencer*

$$F_2^* = 0$$

$$\begin{aligned}
F_2^* &= \frac{k(\alpha A\theta + \beta Ak - \delta\mu\theta - \mu^2\theta)}{\mu(\beta k + \alpha\theta)\theta} \\
&= \frac{1}{\mu(\beta k + \alpha\theta)\theta} \left(k(\alpha A\theta + \beta Ak - \delta\mu\theta - \mu^2\theta) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(0,02)((0,003)(0,03) + (0,002)(0,2))(0,2)} \\
&\quad \left((0,03)((0,002)(10)(0,2) + (0,003)(10)(0,03) \right. \\
&\quad \left. - (0,03)(0,02)(0,2) - (0,02^2)(0,2)) \right) \\
&= 71,9
\end{aligned}$$

Lampiran 4. Pembuktian Kestabilan Titik Keseimbangan Endemik Belanja *Online*

Analisis kestabilan titik keseimbangan bebas belanja *online* dapat dilakukan dengan mensubstitusikan nilai parameter pada Tabel (4.9) ke matriks Jacobi E_2 (4.35), yaitu sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 J(E_2) &= \begin{bmatrix} -\beta F_2^* - \alpha O_2^* - \mu & -\alpha L_2^* + \delta & -\beta L_2^* \\ \beta F_2^* + \alpha O_2^* & \alpha L_2^* - \delta - \mu & \beta L_2^* \\ 0 & k & -\theta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -1,19 & -0,01 & -0,06 \\ 1,17 & -0,01 & 0,06 \\ 0 & 0,03 & -0,2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Matriks $J(E_2)$ dapat dibentuk persamaan karakteristik yaitu

$$|\lambda I - J(E_2)| = 0$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1,19 & -0,01 & -0,06 \\ 1,17 & -0,01 & 0,06 \\ 0 & 0,03 & -0,2 \end{bmatrix} \right| = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} \lambda + 1,19 & -0,01 & -0,06 \\ 1,17 & \lambda + 0,01 & 0,06 \\ 0 & 0,03 & \lambda + 0,2 \end{bmatrix} \right| = 0 \\
 &\Leftrightarrow (\lambda + 1,19) \begin{vmatrix} \lambda + 0,01 & 0,06 \\ 0,03 & \lambda + 0,2 \end{vmatrix} - (-0,01) \begin{vmatrix} 1,17 & 0,06 \\ 0 & \lambda + 0,2 \end{vmatrix} \\
 &\quad + (-0,06) \begin{vmatrix} 1,17 & \lambda + 0,01 \\ 0 & 0,03 \end{vmatrix} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\lambda + 1, 19)(\lambda^2 + 0, 21\lambda - 0, 0002) - (-0, 01)(1, 17\lambda + 0, 23) \\
&\quad + (-0, 06)(0, 03) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda^3 + 0, 21\lambda^2 + 0, 0002\lambda + 1, 19\lambda^2 + 0, 24\lambda - 0, 000238 \\
&\quad - (-0, 012)\lambda - 0, 0023 + (-0, 002) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda^3 + 1, 4\lambda^2 + 0, 252\lambda + 0, 0004 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda + 0, 02)(\lambda + 1, 18)(\lambda + 0, 19) = 0
\end{aligned}$$

Diperoleh $\lambda_1 = -0, 02$, $\lambda_2 = -1, 18$ dan $\lambda_3 = -0, 19$.

Perhitungan Menggunakan Maple

with(Student[Calculus1])

$A := 10; \alpha := 0.002; \beta := 0.003; \delta := 0.03; \mu := 0.02; k := 0.03; \theta := 0.2;$

$$L = \frac{(\delta + \mu)\theta}{\beta k + \alpha \theta};$$

Misalkan $O = Q$, supaya Maple tidak error;

$$Q = \frac{\alpha A \theta + \beta A k - \delta \mu \theta - \mu^2 \theta}{\mu(\beta k + \alpha \theta)};$$

$$F = \frac{k(\alpha A \theta + \beta A k - \delta \mu \theta - \mu^2 \theta)}{\mu(\beta k + \alpha \theta)\theta};$$

with(Student[MultivariateCalculus]);

$$J(E_2) := \begin{bmatrix} -\beta F - \alpha O - \mu & -\alpha L + \delta & -\beta L \\ \beta F + \alpha O & \alpha L - \delta - \mu & \beta L \\ 0 & k & -\theta \end{bmatrix};$$

$$J(E_2) := \begin{bmatrix} -1.195000000 & -0.01081632654 & -0.06122448981 \\ 1.175000000 & -0.00918367346 & 0.06122448981 \\ 0 & 0.03 & -0.2 \end{bmatrix}$$

with(LinearAlgebra);

Nilai Eigen $JE_2 := \text{Eigenvalues}(J(E_2));$

$$\text{Nilai Eigen } JE_2 := \begin{bmatrix} -1.18604639989407 + 0.0I \\ -0.0200000000000000 + 0.0I \\ -0.198137273565932 + 0.0I \end{bmatrix}$$

Berdasarkan perhitungan, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -0,02$; $\lambda_2 = -1,18$; dan $\lambda_3 = -0,19$. Karena bagian riil dari semua nilai eigen tersebut bernilai negatif, maka titik kesetimbangan bebas belanja *online* bersifat stabil secara asimtotik lokal, sesuai dengan kriteria stabilitas menurut Wiggins (2003).

Lampiran 5. Program Matlab Simulasi Titik Kesetimbangan Bebas Belanja Online

```

1  clc;
2
3  % Parameter model
4  A = 10;
5  alpha = 0.00001;
6  beta = 0.0002;
7  delta = 0.03;
8  mu = 0.02;
9  k = 0.03;
10 theta = 0.2;
11
12 % Kondisi awal
13 L0 = 150;
14 O0 = 150;
15 F0 = 10;
16 y0 = [L0; O0; F0];
17
18 % Waktu simulasi
19 t_start = 0;
20 t_end = 2500;
21 dt = 0.1;
22 t = t_start:dt:t_end;
23
24 % Metode Runge-Kutta orde 4
25 n = length(t);
26 y = zeros(n, length(y0));
27 y(1, :) = y0;
28
29 % Definisi sistem persamaan diferensial
30 f = @(t, y) [
31     A - beta * y(1) * y(3) - alpha * y(1) * y(2)

```

```

32     + delta * y(2) - mu * y(1);
33     beta * y(1) * y(3) + alpha * y(1) * y(2) -
34     delta * y(2) - mu * y(2);
35     k * y(2) - theta * y(3);
36 ];
37
38 fprintf('Waktu: 0, L: %.6f, O: %.6f, F: %.6f\n',
39 y(1,1), y(1,2), y(1,3));
40
41 % Simulasi Runge-Kutta
42 for i = 1:n-1
43     k1 = f(t(i), y(i, :)) * dt;
44     k2 = f(t(i) + dt/2, y(i, :) + k1/2) * dt;
45     k3 = f(t(i) + dt/2, y(i, :) + k2/2) * dt;
46     k4 = f(t(i) + dt, y(i, :) + k3) * dt;
47
48     y(i+1, :) = y(i, :) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 +
49     k4) / 6;
50
51     y(i+1, abs(y(i+1,:)) < 1e-10) = 0;
52
53     if mod(i, round(1/dt)) == 0
54         fprintf('Waktu: %.0f, L: %.6f, O: %.6f,
55         F: %.6f\n', t(i+1), y(i+1,1), y(i+1,2),
56         y(i+1,3));
57     end
58 end
59
60 % Plot hasil simulasi
61 figure(1);
62 plot(t, y(:, 1), 'b', 'LineWidth', 1.5);
63 hold on;
64 plot(t, y(:, 2), 'r', 'LineWidth', 1.5);

```

```

65 plot(t, y(:, 3), 'm', 'LineWidth', 1.5);
66 xlabel('Waktu (Hari)');
67 ylabel('Subpopulasi Pembelanja dan Banyaknya
68 Konten Promosi');
69 legend('L (Pembelanja Offline)', 'O (Pembelanja
70 Online)', 'F (Konten Promosi)');
71 grid on;
72 hold off;
73
74 variabel = {'Subpopulasi Pembelanja Offline (L)',
75 'Subpopulasi Pembelanja Online (O)', 'Banyaknya
76 Konten Promosi oleh Influencer (F)'};
77 warna = {'b', 'r', 'm'};
78 for i = 1:3
79     figure(i+1);
80     plot(t, y(:, i), warna{i}, 'LineWidth', 1.5);
81     xlabel('Waktu (hari)');
82     ylabel(variabel{i});
83     grid on;
84 end
85
86 fprintf('\nHasil Akhir:\n');
87 fprintf('L (Offline): %.6f\n', y(end, 1));
88 fprintf('O (Online): %.6f\n', y(end, 2));
89 fprintf('F (Konten Promosi): %.6f\n', y(end, 3));

```


Lampiran 6. Program Matlab Simulasi Titik Kesetimbangan Endemik Belanja *Online*

```

1  clc;
2
3  % Parameter model
4  A = 10;
5  alpha = 0.002;
6  beta = 0.003;
7  delta = 0.03;
8  mu = 0.02;
9  k = 0.03;
10 theta = 0.2;
11
12 % Kondisi awal
13 L0 = 150;
14 O0 = 150;
15 F0 = 10;
16 y0 = [L0; O0; F0];
17
18 % Waktu simulasi
19 t_start = 0;
20 t_end = 2500;
21 dt = 0.1;
22 t = t_start:dt:t_end;
23
24 % Metode Runge-Kutta orde 4
25 n = length(t);
26 y = zeros(n, length(y0));
27 y(1, :) = y0;
28
29 % Definisi sistem persamaan diferensial
30 f = @(t, y) [
31     A - beta * y(1) * y(3) - alpha * y(1) * y(2)

```

```

32     + delta * y(2) - mu * y(1);
33     beta * y(1) * y(3) + alpha * y(1) * y(2) -
34     delta * y(2) - mu * y(2);
35     k * y(2) - theta * y(3);
36 ];
37
38 fprintf('Waktu: 0, L: %.6f, O: %.6f, F: %.6f\n',
39 y(1,1), y(1,2), y(1,3));
40
41 % Simulasi Runge-Kutta
42 for i = 1:n-1
43     k1 = f(t(i), y(i, :)) * dt;
44     k2 = f(t(i) + dt/2, y(i, :) + k1/2) * dt;
45     k3 = f(t(i) + dt/2, y(i, :) + k2/2) * dt;
46     k4 = f(t(i) + dt, y(i, :) + k3) * dt;
47
48     y(i+1, :) = y(i, :) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 +
49     k4) / 6;
50
51     y(i+1, abs(y(i+1,:)) < 1e-10) = 0;
52
53     if mod(i, round(1/dt)) == 0
54         fprintf('Waktu: %.0f, L: %.6f, O: %.6f,
55         F: %.6f\n', t(i+1), y(i+1,1), y(i+1,2),
56         y(i+1,3));
57     end
58 end
59
60 % Plot hasil simulasi
61 figure(1);
62 plot(t, y(:, 1), 'b', 'LineWidth', 1.5);
63 plot(t, y(:, 2), 'r', 'LineWidth', 1.5);
64 plot(t, y(:, 3), 'm', 'LineWidth', 1.5);

```

```

65 xlabel('Waktu (Hari)');
66 ylabel('Subpopulasi Pembelanja dan Banyaknya
67 Konten Promosi');
68 legend('L (Subpopulasi Pembelanja Offline)',
69 'O (Subpopulasi Pembelanja Online)', 'F (Banyaknya
70 Konten Promosi oleh Influencer)');
71 grid on;
72 hold off;
73
74 variabel = {'Subpopulasi Pembelanja Offline (L)',
75 'Subpopulasi Pembelanja Online (O)', 'Banyaknya
76 Konten Promosi oleh Influencer (F)'};
77 warna = {'b', 'r', 'm'};
78 for i = 1:3
79     figure(i+1);
80     plot(t, y(:, i), warna{i}, 'LineWidth', 1.5);
81     xlabel('Waktu (hari)');
82     ylabel(variabel{i});
83     grid on;
84 end
85
86 % Menampilkan hasil akhir
87 fprintf('\nHasil Akhir:\n');
88 fprintf('L (Pembelanja Offline): %.6f\n',
89 y(end, 1));
90 fprintf('O (Pembelanja Online): %.6f\n',
91 y(end, 2));
92 fprintf('F (Banyaknya Konten Promosi oleh
93 Influencer): %.6f\n', y(end, 3));

```

Lampiran 7. Program Matlab Simulasi Variasi Nilai Parameter k dan θ Terhadap Subpopulasi Pembelanja Online

```

1  clc;
2
3  % Parameter model
4  A = 10;
5  alpha = 0.002;
6  beta = 0.003;
7  delta = 0.03;
8  mu = 0.02;
9  theta = 0.2;
10
11 % Kondisi awal
12 L0 = 150;
13 O0 = 150;
14 F0 = 10;
15 y0 = [L0; O0; F0];
16
17 % Waktu simulasi
18 t_start = 0;
19 t_end = 450;
20 dt = 0.1;
21 t = t_start:dt:t_end;
22 n = length(t);
23
24 % Nilai-nilai k dan theta yang ingin diuji.
25 Sesuaikan jika ingin menguji k, maka yang
26 theta bisa dihapus, begitu pula sebaliknya.
27 theta_values = [0.2, 0.06, 0.02];
28 k_values = [0.03, 0.05, 0.002];
29 warna_k = {'b', 'g', 'r'};
30 label_k = {'k = 0.03', 'k = 0.05', 'k = 0.002'};
31

```

```

32 % Membuat figure untuk O(t)
33 figure;
34 hold on;
35
36 for idx = 1:length(k_values)
37     k = k_values(idx);
38
39     % Inisialisasi ulang
40     y = zeros(n, 3);
41     y(1, :) = y0;
42
43     % Sistem persamaan
44     f = @(t, y) [
45         A - beta * y(1) * y(3) - alpha * y(1)
46         * y(2) + delta * y(2) - mu * y(1);
47         beta * y(1) * y(3) + alpha * y(1) * y(2)
48         - delta * y(2) - mu * y(2);
49         k * y(2) - theta * y(3);
50     ];
51
52     fprintf('\n==== Hasil untuk k = %.2f ==== \n',
53     k);
54     fprintf('Waktu\tO(t)\n');
55     fprintf('%s.0f\t%.3f\n', t(1), y(1, 2));
56
57     % Runge-Kutta 4
58     for i = 1:n-1
59         k1 = f(t(i), y(i, :))' * dt;
60         k2 = f(t(i) + dt/2, y(i, :) + k1/2)' * dt;
61         k3 = f(t(i) + dt/2, y(i, :) + k2/2)' * dt;
62         k4 = f(t(i) + dt, y(i, :) + k3)' * dt;
63         y(i+1, :) = y(i, :) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 +
64         k4) / 6;

```

```

65         y(i+1, abs(y(i+1,:)) < 1e-10) = 0;
66
67         % Tampilkan hasil  $O(t)$  setiap waktu  $t$ 
68         if mod(i, round(1/dt)) == 0
69             fprintf('%0f\t%.3f\n', t(i+1),
70                 y(i+1, 2));
71         end
72     end
73
74     % Plot  $O(t)$ 
75     plot(t, y(:, 2), warna_k{idx}, 'LineWidth',
76         1.5);
77 end
78
79 xlabel('Waktu (Hari)');
80 ylabel('Subpopulasi Pembelanja Online (O)');
81 legend(label_k, 'Orientation', 'horizontal',
82 'Location', 'southoutside');
83 grid on;
84 hold off;

```

**Lampiran 8. Daftar Nama-nama Beauty *Influencer* Tahun 2023
Menurut Slice.id**

Tabel 0.3: Daftar Nama Beauty Influencer serta Jumlah Konten Promosi pada tahun 2023

No.	Nama	Jumlah Konten Promosi			Total
		Instagram	Tiktok	Youtube	
1	Tasya Farasya	60	37	15	251
2	Nanda Arsyinta	2	12	0	
3	Jharna Bhagwani	3	0	0	
4	Abel Cantika	52	11	6	
5	Hanum Mega	2	1	0	
6	Rachel Goddard	21	8	2	
7	Sarah Ayu	18	1	0	

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

Nama Lengkap : Meri Teri Andani
Tempat, Tanggal Lahir : Brebes, 05 Mei 2003
Alamat : Desa Dawuhan, RT 005 RW 001,
Kecamatan Sirampog,
Kabupaten Brebes
No HP : 085712353031
E-mail : meriteriandani@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. SDN Dawuhan 01 Sirampog lulus tahun 2015
2. MTs Ma'Arif NU 05 Dawuhan Sirampog lulus tahun 2018
3. MA AL-Hikmah 01 Benda Sirampog lulus tahun 2021
4. UIN Walisongo Semarang

Semarang, 22 Mei 2025

Meri Teri Andani
NIM: 2108046014