

KONJEKTUR ABC DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu MATEMATIKA



Oleh : **FAIZATUL ULYA**

NIM : 2108046077

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2025

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : FAIZATUL ULYA
NIM : 2108046077
Jurusan/Program Studi : MATEMATIKA/ MATEMATIKA

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

KONJEKTUR ABC DAN SIFAT-SIFATNYA

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 11 Juni 2025

Pembuat pernyataan,



FAIZATUL ULYA
NIM : 2108046077



KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **KONJEKTUR ABC DAN SIFAT-SIFATNYA**

Penulis : **FAIZATUL ULYA**

NIM : **2108046077**

Jurusan : **MATEMATIKA**

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu **MATEMATIKA**.

Semarang, 25 Juni 2025

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

Any Muanalifah, M.Si., Ph.D

NIP : 19820113201101200

Penguji II,

Wayan Yulianto, M.Sc.

NIP : 198908112019032019

Penguji III,

Eva Khoirun Nisa, M.Si.

NIP : 1987010220190320

Penguji IV,

Siswanah, M.Sc.

NIP : 198702022011012014

Pembimbing I,

Agus Wayan Yulianto, M.Sc.

NIP : 198908112019032019

NOTA DINAS

Semarang, 11 Juni 2025

Yth. Ketua Program Studi MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : KONJEKTUR ABC DAN SIFAT-SIFATNYA
Nama : FAIZATUL ULYA
NIM : 2108046077
Jurusan : MATEMATIKA

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,



Agus Wayan Yulianto, M.Sc.
NIP : 198908112019032019

ABSTRAK

Teori bilangan adalah bagian dari ilmu matematika yang meneliti sifat-sifat dan hubungan antara berbagai jenis bilangan. Dalam penelitian ini akan dikaji tentang Konjektur ABC dan Sifat-Sifatnya. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa Konjektur ABC memberikan batasan terhadap solusi dari persamaan $a + b = c$ dengan menggunakan konsep radikal, yaitu hasil kali semua bilangan prima berbeda yang membagi a , b , dan c . Konsep ini, menekankan pentingnya peran bilangan prima dalam struktur bilangan bulat. Selain itu, Konjektur ABC memperkuat terhadap Teorema Terakhir Fermat, terutama dalam kasus $N \geq 6$, karena konjektur ini berhasil membuktikan bahwa tidak ada solusi bentuk persamaan $A^N + B^N = C^N$.

Kata kunci : Konjektur ABC, faktor prima, Teorema Terakhir Fermat pada kasus $N \geq 6$

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb. Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, yang telah memberikan kesehatan, kenikmatan, dan kemudahan dalam menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Konjektur ABC dan Sifat-Sifatnya.**"

Salawat dan salam dihaturkan kepada junjungan kita, Nabi Agung Muhammad SAW. Beliau adalah manusia pilihan yang telah menerima wahyu dan membawa ilmu ke dunia ini sehingga kita bisa lepas dari zaman kebodohan menuju zaman Islam rahmatan lil alamin.

Penyusunan skripsi ini merupakan salah satu syarat yang harus dipenuhi oleh penulis untuk menyelesaikan pendidikan strata 1 (S1) di Progam Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang. Dalam penyusunan skripsi ini penulis mendapatkan dukungan serta bimbingan dari berbagai pihak, baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Terima kasih kepada diri sendiri atas segala usaha, ketekunan, dan kerja keras yang telah dilakukan selama menempuh perjalanan pendidikan ini. Terima kasih telah berani melangkah, mengambil keputusan-keputusan besar, dan tetap bertahan meski dalam situasi yang tidak selalu mudah. Semoga langkah ini menjadi awal dari banyak keberanian dan pencapaian lainnya di masa depan;
2. Terima kasih kepada Bapak dan Ibu yang telah mendoakan setiap langkah, terimakasih kepada kakakku yang telah mensupport dan memberi dorongan sepanjang perjalanan

ini;

3. Agus Wayan, M.Sc., selaku dosen pembimbing yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam menyelesaikan skripsi ini;
4. Zulaikha, M.Si., selaku wali dosen yang telah memberikan bimbingan kepada penulis selama menjadi mahasiswa Progam Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang;
5. Terima kasih teman-teman seperjuangan (Fatimeh, Ace, Nila dan Safira) dan seangkatan 2021 terutama teman-teman Matematika C penulis;
6. Terima kasih kepada semua orang hebat yang kutemui di Semarang. Kehadiran kalian memberikan warna, cerita, dan kesan yang luar biasa dalam perjalanan ini. Setiap pertemuan, tawa, dan kebersamaan menjadi bagian berharga ;
7. Segenap Dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang yang telah memberikan ilmu dan pelajaran bagi penulis selama penulis melakukan studi S1 di UIN Walisongo Semarang;

Terakhir penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih banyak kekurangan dan jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran demi memperbaiki skripsi ini. Akhir kata mohon maaf atas kesalahan dan kekurangannya.

Semarang, 11 Juni 2025

Penulis,

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Faizatul Ulya'.

Faizatul Ulya

NIM: 2108046077

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iv
NOTA PEMBIMBING I	iv
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	ix
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Tujuan Penelitian	2
C. Tinjauan Pustaka	3
D. Metode Penelitian	4
E. Sistematika Penulisan	5
BAB II LANDASAN PUSTAKA	6
A. Relasi Keterbagian	6
B. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)	7
C. Bilangan Relatif Prima	13
D. Konjektur ABC	20
E. Teorema Terakhir Fermat	21
BAB III Sifat-Sifat Konjektur ABC	23
A. Kaitannya Konjektur ABC dengan Teorema Terakhir Fermat	23
B. Kaitannya Konjektur ABC dengan Faktor Prima	26
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN	64
A. Kesimpulan	64
B. Saran	64
DAFTAR PUSTAKA	66

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Teori bilangan adalah bagian dari ilmu matematika yang meneliti sifat-sifat dan hubungan antara berbagai jenis bilangan, serta termasuk sebuah permasalahan terbuka yang bisa dipahami meskipun bukan oleh ahli matematika (Nurrahmah & Karim, 2018). Dalam teori bilangan, bilangan prima memegang peranan penting dalam membentuk struktur bilangan bulat positif. Setiap bilangan bulat positif dapat dituliskan sebagai hasil kali dari bilangan-bilangan prima. Berdasarkan bentuk ini, dikenal konsep radikal dari suatu bilangan, yang dilambangkan sebagai $\text{Rad}(A)$. Radikal dari bilangan bulat positif A adalah hasil kali dari semua faktor prima berbeda yang menyusun bilangan tersebut (Sheppard, 2016).

Pada tahun 1988, Masser dan Oesterlé mengajukan sebuah dugaan yang dikenal sebagai Konjektur ABC, yang menyatakan adanya hubungan tertentu antara bilangan bulat yang memenuhi persamaan $A + B = C$, dengan ketergantungan pada radikal dari ABC dimana, $\text{Rad}(ABC)$ adalah hasil kali dari semua bilangan prima yang membagi A , B , atau C (Sheppard, 2016).

Pierre de Fermat adalah seorang matematikawan terkenal di Eropa. Pernyataan "untuk semua bilangan bulat $N > 2$, persamaan $A^N + B^N = C^N$ tidak memiliki solusi" dikenal sebagai Teorema Terakhir Fermat. Banyak ahli matematika terkemuka telah mencoba menyelesaikannya, pernyataan tersebut tetap belum terpecahkan selama lebih dari tiga ratus tahun sejak

zaman Fermat (Edwards, 1996). Konjektur ABC ini memberikan kontribusi penting dalam memperkuat pembuktian Teorema Terakhir Fermat, karena dengan membatasi kemungkinan solusi untuk persamaan-persamaan tertentu, konjektur ini mendukung pernyataan bahwa tidak ada solusi untuk persamaan $A^N + B^N = C^N$ ketika $N > 2$. Untuk kasus $N = 2$ yaitu telah dibuktikan menggunakan tripel Pythagoras, sedangkan untuk kasus ketika $N > 2$ yaitu $N = 3, 4$ dan $N = 5$, telah dibuktikan oleh ilmuwan matematika bahwa tidak ada solusi untuk kasus tersebut, kemudian Teorema Terakhir Fermat untuk kasus $N \geq 6$ menggunakan Konjektur ABC (Sheppard, 2016).

Berdasarkan pembahasan di atas, peneliti tertarik untuk mengkaji Konjektur ABC dan Sifat-Sifatnya. Permasalahan dalam Teorema Terakhir Fermat menjadi pendorong untuk perkembangan teori bilangan serta memotivasi para ilmuwan matematika untuk memecahkan kasus didalamnya. Dalam konteks ini, Konjektur ABC memberikan perspektif yang memperkuat pernyataan bahwa tidak ada solusi untuk kasus $N \geq 6$, selain itu konjektur ini menekankan pentingnya hubungan bilangan bulat dalam persamaan $a + b = c$ dengan konsep radikal yaitu hasil kali semua bilangan prima berbeda antara a, b atau c radikal ini menjelaskan bagaimana bilangan prima memengaruhi bentuk dalam persamaan tersebut (Sheppard, 2016).

B. Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang tersebut, adapun tujuan skripsi dengan judul Konjektur ABC dan Sifat-Sifatnya adalah:

1. Untuk mengetahui kaitannya Konjektur ABC dengan

Teorema Terakhir Fermat.

2. Untuk mengetahui kaitannya Konjektur ABC dengan faktor prima.

C. Tinjauan Pustaka

Tinjauan pustaka ini membahas teori dan referensi ilmiah yang berkaitan dengan Konjektur ABC dan Sifat-Sifatnya diantaranya:

1. Sumber referensi yang berkaitan dengan relasi keterbagian, FPB dan bilangan prima yaitu *Teori Bilangan*(2013), *Introduction to Analytic Number Theory* (1983) dan *Pengantar Teori Bilangan* (2018).
2. Sumber referensi yang berkaitan dengan Faktor Bilangan Prima *Pengantar Teori Bilangan*(2006).
3. Sumber referensi yang berkaitan dengan radikal yaitu *The ABC Conjecture and Its Applications*(2016).
4. Sumber referensi yang berkaitan dengan relatif prima yaitu *Introduction to Analytic Number Theory* (1983) dan *Teori Bilangan* (2004).
5. Sumber referensi yang berkaitan dengan Euclidean yaitu *Teori Bilangan*(2013).
6. Sumber referensi yang berkaitan dengan Algoritma Euclidean yaitu *Teori Bilangan*(2004).
7. Sumber referensi yang berkaitan dengan Konjektur ABC yaitu *Global conjecturing process in pattern generalization*

problem(2018) dan *The ABC Conjecture and Its Applications* (2016).

8. Sumber referensi yang berkaitan dengan Teorema Terakhir Fermat yaitu *The ABC Conjecture and Its Applications*(2016) dan *Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*(1996).

Hasil-hasil penelitian di atas memberikan landasan teoritis yang kuat untuk memahami Konjektur ABC beserta sifat-sifatnya. Dalam penelitian ini, fokus utama diarahkan pada pengkajian sifat-sifat Konjektur ABC, khususnya yang berkaitan dengan implikasinya terhadap Teorema Terakhir Fermat dan struktur faktor prima pada bilangan bulat.

D. Metode Penelitian

Metode yang dilakukan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Dalam pembahasan Konjektur ABC terhadap Teorema Terakhir Fermat serta kaitannya Konjektur ABC dengan faktor prima, diawali dengan definisi bilangan bulat, FPB, bilangan prima dan bilangan relatif prima kemudian melakukan kajian terkait Konjektur ABC dan Teorema Terakhir Fermat.

Adapun langkah-langkah penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Mencari berbagai sumber yang berkaitan dengan pembahasan Konjektur ABC terhadap Teorema Terakhir Fermat diantaranya jurnal, artikel, buku, tesis, internet dll.
2. Mempelajari dan mengkaji lebih dalam tentang kaitannya Konjektur ABC terhadap Teorema Terakhir Fermat mengenai

kasus $N \geq 6$.

3. Mempelajari dan mengkaji lebih dalam mengenai kaitannya Konjektur ABC dengan faktor prima.

E. Sistematika Penulisan

Penulisan penelitian ini disusun berdasarkan sistematika berikut:

1. Bab 1: PENDAHULUAN

Pada bab ini mencakup latar belakang masalah, tujuan penelitian, tinjauan pustaka, metodologi penelitian, dan sistematika penulisan.

2. Bab 2: LANDASAN TEORI

Pada bab ini memuat teori-teori dasar yang digunakan dalam pembahasan. Di antaranya definisi relasi keterbagian, FPB, bilangan relatif prima, konjektur abc dan teorema terakhir fermat.

3. Bab 3: PEMBAHASAN

Bab ini membahas konjektur abc dan sifat-sifatnya, serta penyertaan contoh untuk memberikan gambaran.

4. Bab 4: PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan hasil penelitian dan saran untuk lebih lanjut.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

Bab ini berisi definisi yang mendasari pembahasan terkait Konjektur ABC dan Sifat-Sifatnya. Teori dalam pembahasan ini meliputi relasi keterbagian, FPB, bilangan relatif prima, Konjektur ABC dan Teorema Terakhir Fermat.

A. Relasi Keterbagian

Dalam Teori Bilangan, ruang lingkup pembicaraan umumnya mencakup seluruh himpunan bilangan bulat yang dapat bernilai positif, negatif, maupun nol. Namun, dalam banyak kajian, pembahasan sering kali dibatasi hanya pada himpunan bilangan asli.

Definisi dasar dari keterbagian yang dipaparkan oleh (Apostol, 1983) dalam buku yang berjudul *Introduction to Analytic Number Theory* sebagai berikut

Definisi 2.1.1 (*Keterbagian*)

Suatu bilangan bulat d dikatakan membagi bilangan bulat n (ditulis $d \mid n$) apabila terdapat bilangan bulat r sehingga $n = r \cdot d$. Dalam hal ini, n disebut kelipatan dari d , dan d disebut sebagai pembagi atau faktor dari n . Sebaliknya, jika tidak ada bilangan bulat r yang memenuhi $n = r \cdot d$, maka ditulis $d \nmid n$, artinya d tidak membagi n .

Berdasarkan definisi keterbagian, diberikan contoh terhadap bilangan yang habis dibagi dan bilangan tidak habis dibagi sebagai berikut

Contoh 2.1.2

3 membagi habis bilangan bulat 15 yang dituliskan sebagai $3 \mid 15$ karena terdapat bilangan bulat 5 sedemikian sehingga $3 \times 5 = 15$.

Contoh 2.1.3

Bilangan 3 tidak membagi bilangan bulat 14, yang dituliskan sebagai $3 \nmid 14$, karena tidak ada bilangan bulat k sedemikian sehingga $3 \times k = 14$.

Bilangan bulat r yang dimaksud dalam **Definisi 2.1.1 bersifat tunggal**. Sebab, jika terdapat bilangan bulat lain m yang juga memenuhi persamaan $n = m \cdot d$ maka akan berlaku,

$$m \cdot d = r \cdot d$$

sehingga dapat disimpulkan

$$m = r.$$

Dengan demikian, bilangan bulat r tersebut hanya satu atau tunggal.

B. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dalam literatur bahasa asing, istilah ini dikenal sebagai *The Greatest Common Divisor (GCD)* dari dua atau lebih bilangan bulat adalah bilangan bulat terbesar, yang dapat membagi kedua bilangan tersebut tanpa sisa. Jika suatu bilangan d membagi habis kedua bilangan bulat n dan m , maka d disebut sebagai *faktor persekutuan* dari n dan m . Karena

1 membagi semua bilangan bulat, maka 1 selalu menjadi faktor persekutuan dari sembarang pasangan bilangan bulat.

Definisi dasar dari faktor persekutuan yang dipaparkan oleh (Sukirman, 2013) dalam buku yang berjudul *Teori Bilangan* adalah sebagai berikut

Definisi 2.2.1 (*Faktor Persekutuan*)

Jika n dan m adalah bilangan bulat, maka suatu bilangan bulat d disebut sebagai faktor persekutuan dari a dan b apabila $d \mid n$ dan $d \mid m$.

Berdasarkan definisi faktor persekutuan, diberikan contoh faktor persekutuan sebagai berikut

Contoh 2.2.2

Misalkan $n = 36$ dan $m = 48$ maka faktor persekutuan dari 36 dan 48 yaitu mencari faktor dari masing-masing bilangan serta menemukan faktor yang sama diperoleh:

faktor dari 36 adalah 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, dan 36

faktor dari 48 adalah 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, dan 48

faktor persekutuan dari 36 dan 48 adalah 1, 2, 3, 4, 6, dan 12.

Definisi dasar dari Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) yang dipaparkan oleh (Sukirman, 2013) dalam buku yang berjudul *Teori Bilangan* adalah sebagai berikut

Definisi 2.2.3 (*Faktor Persekutuan Terbesar*)

Jika n dan m adalah bilangan bulat, dengan syarat setidaknya salah satunya tidak bernilai nol, maka faktor persekutuan terbesar (FPB) dari n dan m , yang dilambangkan dengan (n, m) , adalah suatu bilangan bulat positif d yang memenuhi dua kondisi berikut:

1. $d \mid n$ dan $d \mid m$, dan
2. Jika $e \mid n$ dan $e \mid m$, maka $e \leq d$.

Dari definisi tersebut dapat dipahami bahwa jika $(n, m) = d$, yang berarti d adalah faktor persekutuan terbesar dari n dan m , maka $d \geq 1$. Selain itu, jika terdapat faktor persekutuan lain, misalnya e , maka $e \leq d$.

Berdasarkan definisi faktor persekutuan terbesar, diberikan contoh faktor persekutuan terbesar sebagai berikut

Contoh 2.2.4

Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dari dua bilangan bulat misalkan:

$$n = 15$$

$$m = 25$$

faktor dari 15 = 1, 3, 5, 15

faktor dari 25 = 1, 5, 25

faktor Persekutuan dari 15 dan 25 = 1 dan 5

Faktor Persekutuan Terbesar dari 15 dan 25 = 5

Jadi, 5 adalah FPB dari dua bilangan bulat.

Teorema 2.2.5 (*Faktor Bilangan Prima*)

Setiap bilangan bulat positif $p > 1$ adalah bilangan prima atau dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima.

Bukti.

Akan dibuktikan bahwa setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian bilangan prima.

1. Ambil sebuah bilangan bulat positif $p > 1$.
2. Jika p adalah bilangan prima maka selesai, karena p sudah berupa bilangan prima.
3. Jika p bukan bilangan prima (artinya bilangan komposit) maka, p habis dibagi oleh suatu bilangan bulat positif yang lain, selain 1 dan dirinya sendiri. Misal terdapat bilangan h_1 atau dapat ditulis $h_1 \mid p$ sehingga,

$$p = h_1 \cdot k_1$$

dengan syarat $1 \leq k_1 < p$.

- (a) Jika $k_1 = 1$ maka, $p = h_1$ sehingga p adalah bilangan prima.
- (b) Jika $k_1 > 1$ maka, ada suatu bilangan prima k_1 habis dibagi oleh suatu bilangan bulat positif yang lain misal, h_2 atau dapat ditulis $h_2 \mid k_1$ sehingga,

$$k_1 = h_2 \cdot k_2$$

dengan syarat $1 \leq k_2 < k_1$.

- b1) Jika $k_2 = 1$ maka,

$$k_1 = h_2$$

sehingga diperoleh,

$$p = h_1 \cdot h_2$$

dapat disimpulkan bahwa teorema terbukti.

- b2) Jika $k_2 > 1$ maka, proses faktorisasi berlanjut seperti langkah b . Ketika proses berhenti, seluruh faktor yang diperoleh adalah bilangan prima sehingga p dapat ditulis sebagai hasil perkalian bilangan-bilangan prima yaitu :

$$p = h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \dots h_n$$

dengan setiap h_n adalah bilangan prima.



Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima atau dapat dikatakan sebagai **faktor bilangan prima**.

Berdasarkan teorema faktor bilangan prima, diberikan contoh hasil perkalian bilangan prima sebagai berikut

Contoh 2.2.6

Akan ditunjukkan bahwa bilangan 72 dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian bilangan prima.

Karena 72 adalah bilangan komposit, dapat ditulis sebagai hasil perkalian dua bilangan lebih kecil dari 72.

- 1) Ambil dua bilangan lebih kecil dari 72 yang jika dikalikan menghasilkan 72 misal 8 dan 9:

$$72 = 8 \times 9$$

- 2) Faktorkan masing-masing bilangan ke dalam bilangan prima:

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

$$9 = 3 \times 3 = 3^2$$

3) Gabungkan faktorisasi prima dari kedua bilangan:

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

4) Uji bahwa setiap bilangan yang terlibat dalam faktorisasi adalah bilangan prima dan hasil perkalian bilangan prima menghasilkan 72 sehingga:

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

Dalam hal ini, faktorisasi prima dari 72 adalah bilangan prima, yaitu 2 dan 3, yang memenuhi pernyataan teorema bahwa setiap bilangan bulat positif $p > 1$ dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima.

Definisi dasar dari radikal yang dipaparkan oleh (Sheppard, 2016) dalam tesis yang berjudul *The ABC Conjecture and Its Applications* adalah sebagai berikut

Definisi 2.2.7 (Radikal)

Radikal dari suatu bilangan bulat A adalah hasil perkalian dari semua faktor prima yang berbeda dari A . Dengan kata lain, jika A memiliki faktor prima $p_1, p_2, \dots, p_n$, maka radikal dari A , yang dilambangkan sebagai $\text{Rad}(A)$, didefinisikan sebagai:

$$\text{Rad}(A) = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$$

di mana $p_1, p_2, \dots, p_n$ adalah faktor prima yang berbeda dari A .

Berdasarkan definisi radikal, diberikan contoh radikal sebagai berikut

Contoh 2.2.8

Misalkan

$$A = 12,$$

$$B = 15,$$

$$C = 20.$$

Faktor prima dari masing -masing bilangan:

$$A = 12 = 2^2 \times 3 \quad (\text{bilangan prima yang membagi } A \text{ adalah } 2 \text{ dan } 3)$$

$$B = 15 = 3 \times 5 \quad (\text{bilangan prima yang membagi } B \text{ adalah } 3 \text{ dan } 5)$$

$$C = 20 = 2^2 \times 5 \quad (\text{bilangan prima yang membagi } C \text{ adalah } 2 \text{ dan } 5).$$

Bilangan prima yang membagi A , B , atau C adalah 2, 3, dan 5.

$\text{Rad}(ABC)$:

$$\text{Rad}(ABC) = 2 \times 3 \times 5 = 30.$$

Dengan demikian nilai dari $\text{Rad}(ABC)$ adalah 30.

C. Bilangan Relatif Prima

Konsep bilangan relatif prima mengacu pada dua bilangan bulat yang tidak memiliki pembagi bersama selain angka 1. Dengan kata lain, dua bilangan n dan m dianggap relatif prima jika faktor persekutuan terbesar (FPB) dari keduanya adalah 1. Konsep ini

memainkan peran penting dalam teori bilangan, terutama dalam operasi pembagian dan penerapan algoritma Euclidean.

Definisi dasar dari relatif prima di mana d disebut FPB dari n dan m berdasarkan **Definisi 2.2.3** yang dipaparkan oleh (Apostol, 1983) dalam buku yang berjudul *Introduction to Analytic Number Theory* sebagai berikut

Definisi 2.3.1 (Relatif Prima)

Bilangan d disebut sebagai faktor persekutuan terbesar (FPB) dari dua bilangan a dan b , yang dilambangkan dengan (a, b) apabila $(a, b) = 1$, maka a dan b disebut relatif prima.

Berdasarkan definisi relatif prima, diberikan contoh bilangan relatif prima dan bilangan tidak relatif prima sebagai berikut

Contoh 2.3.2

Misalnya, bilangan 4 dan 9 relatif prima karena $(4, 9) = 1$

Contoh 2.3.3

18 dan 12 tidak relatif prima karena $(18, 12) = 6 \neq 1$

Definisi dasar dari relatif prima yang dipaparkan oleh (Munir, 2004) berjudul *Teori Bilangan* adalah sebagai berikut

Definisi 2.3.4 (Relatif Prima)

Jika o dan p relatif prima, maka terdapat bilangan bulat y dan z sedemikian sehingga $yo + zp = 1$.

Berdasarkan definisi relatif prima, diberikan contoh bilangan relatif prima sebagai berikut

Contoh 2.3.5

Bilangan 14 dan 13 adalah relatif prima karena $(14, 13) = 1$, atau dapat ditulis:

$$1 \cdot 14 + (-1) \cdot 13 = 1$$

dengan $y = 1$ dan $z = -1$.

Teorema 2.3.6 (Euclidean)

Jika n dan m adalah bilangan bulat dengan $n > 0$, maka terdapat pasangan bilangan bulat tunggal q dan r sedemikian sehingga

$$m = qn + r, \quad \text{dengan} \quad 0 \leq r < a.$$

*Dalam teorema ini, bilangan q disebut **hasil bagi**, sedangkan bilangan r disebut **sisanya pembagian** dari b oleh a .*

Bukti.

Misalkan m dan n adalah bilangan bulat dengan $n > 0$. Akan dibuktikan bahwa terdapat pasangan bilangan bulat tunggal q dan r sedemikian sehingga:

$$m = q \cdot n + r$$

dengan

$$0 \leq r < n$$

misal suatu himpunan:

$$S = \{m - xn \mid x \in \mathbb{Z}, m - xn \geq 0\}$$

himpunan S memuat semua bilangan bulat tak negatif yang berbentuk $m - xn$. Karena $n > 0$, maka untuk x yaitu $x = -|m|$,

nilai $m - xn$ akan menjadi tidak negatif. Maka, S bukan himpunan kosong, maka S pada bilangan bulat tak negatif, memiliki anggota terkecil, misalkan r , sehingga:

$$r = m - q \cdot n$$

dengan $q \in \mathbb{Z}$, dan $0 \leq r < n$.

Misalkan bukan $r < n$ tetapi $r \geq n$ maka,

$$r - n = m - q \cdot n - n = m - (q + 1)n$$

di mana $n \geq 0$,

karena sebelumnya telah memilih $r = m - q \cdot n$ sebagai elemen terkecil di himpunan S , maka tidak boleh ada elemen lain dalam S yang lebih kecil dari r .

Di sini terjadi suatu kontradiksi bahwa ditemukan

$$r - n < r \quad \text{dan} \quad r - n \in S$$

maka, asumsi $r \geq n$ salah, dan haruslah

$$0 \leq r < n.$$

Misalkan terdapat dua pasangan berbeda dan yang memenuhi:

$$m = q \cdot n + r = q'n + r'$$

dengan $0 \leq r$ dan $r' < n$ maka,

$$q \cdot n + r = q'n + r'$$

$$(q - q')n = r' - r$$

karena r dan r' keduanya berada di antara 0 dan $n - 1$, maka berlaku:

$$|r' - r| < n$$

dari persamaan $m = qn + r = q'n + r'$ diperoleh,

$$(q - q')n = r' - r$$

sehingga $(q - q')n$ adalah kelipatan dari n yang bernilai lebih kecil dari n dalam nilai mutlak. Maka satu-satunya kemungkinan adalah

$$r = r' \quad \text{dan} \quad q = q'.$$

Dengan demikian, pasangan (q, r) adalah **tunggal**.

Telah dibuktikan bahwa untuk setiap pasangan bilangan bulat m dan n dengan $n > 0$, terdapat unik pasangan bilangan bulat q dan r sedemikian sehingga:

$$m = qn + r, \quad \text{dengan} \quad 0 \leq r < n.$$



Algoritma Euclidean adalah metode yang efisien untuk menghitung FPB dari dua bilangan bulat m dan n . Misalkan m dan n adalah bilangan bulat tak-negatif dengan $m \geq n$, maka algoritma Euclidean dapat digunakan untuk mencari faktor persekutuan terbesar (FPB) dari keduanya. Langkah-langkahnya algoritma Euclidean yang dipaparkan oleh (Munir, 2004) berjudul *Teori Bilangan* adalah sebagai berikut Berikut adalah penjelasan :

1. Periksa kondisi awal:

- Jika $n = 0$, maka $\text{FPB}(m, n) = m$. Algoritma berhenti karena m adalah hasil akhirnya.
- Jika $n \neq 0$, lanjutkan ke langkah berikutnya.

2. Hitung sisa pembagian:

- Bagilah m dengan n , dan tentukan sisanya r , sehingga berlaku:

$$m = n \cdot q + r$$

di mana q adalah hasil bagi, dan r adalah sisa ($0 \leq r < n$).

3. Perbarui nilai:

- Ganti nilai m dengan n , dan n dengan r . Ulangi algoritma dari langkah 1.

4. Perhitungan berhenti ketika $n = 0$:

- Ketika $n = 0$, nilai m pada langkah tersebut adalah FPB dari bilangan awal m dan n .

Diberikan langkah-langkah algoritma Euclidean contoh sebagai berikut

Contoh 2.3.7

Misalkan $o = 8$ dan $p = 5$, tunjukkan bahwa o dan p relatif prima dan bilangan bulat y dan z sehingga $yo + zp = 1$.

Jawab:

- 1) Akan ditunjukkan bahwa o dan p relatif prima.

Untuk menunjukkan bahwa $o = 8$ dan $p = 5$ relatif prima, hitung FPB(8, 5) menggunakan Algoritma Euclid:

$$8 = 5 \times 1 + 3$$

$$5 = 3 \times 1 + 2$$

$$3 = 2 \times 1 + 1$$

$$2 = 1 \times 2 + 0$$

sehingga,

$$\text{FPB}(8, 5) = 1.$$

Karena FPB nya adalah 1, maka 8 dan 5 relatif prima.

- 2) Cari bilangan bulat y dan z . Gunakan langkah pengembalian dari Algoritma Euclid untuk menemukan y dan z . Dari perhitungan di atas diperoleh:

$$1 = 3 - 1 \times 2.$$

substitusikan $2 = 5 - 1 \times 3$:

$$1 = 3 - 1 \times (5 - 1 \times 3) = 2 \times 3 - 1 \times 5.$$

Karena $3 = 8 - 1 \times 5$, substitusikan :

$$1 = 2 \times (8 - 1 \times 5) - 1 \times 5 = 2 \times 8 - 3 \times 5.$$

Jadi, diperoleh $y = 2$ dan $z = -3$ sehingga:

$$2 \times 8 - 3 \times 5 = 1.$$

Dapat disimpulkan untuk bilangan $o = 8$ dan $p = 5$, diperoleh $y = 2$ dan $z = -3$, sehingga $yo + zp = 1$.

D. Konjektur ABC

Konjektur adalah pernyataan yang berasal dari proses berpikir, namun kebenarannya masih belum bisa dipastikan. Konjektur ABC pertama kali diajukan oleh Joseph Oesterlé dan David Masser pada tahun 1985. Konjektur ini berkaitan dengan hasil kali dari semua faktor prima yang berbeda dari suatu bilangan A , yang sering disebut sebagai radikal dari A , dan dinotasikan dengan $\text{Rad}(A)$, di mana A adalah bilangan bulat. Pada tahun 1988, Masser dan Oesterlé mengajukan sebuah dugaan yang dikenal sebagai Konjektur ABC. Misalkan A , B , dan C adalah bilangan bulat yang memenuhi:

- (i) $A + B = C$
- (ii) A , B , dan C masing-masing bukan nol,
- (iii) A , B , dan C tidak memiliki faktor prima yang sama.

maka untuk setiap $\epsilon > 0$ ada sebuah konstanta $K(\epsilon) > 0$ sedemikian sehingga,

$$\max\{|A|; |B|; |C|\} \leq K(\epsilon) \text{Rad}(ABC)^{1+\epsilon}.$$

Keterangan:

1)

$$\max\{|A|; |B|; |C|\}$$

adalah nilai terbesar di antara nilai mutlak A , B , dan C .

- 2) $K(\epsilon)$ adalah suatu konstanta yang bergantung pada $\epsilon \in \mathbb{R}$ dan $\epsilon > 0$. Nilai $K(\epsilon)$ mungkin berubah sesuai dengan ϵ , namun tetap merupakan konstanta yang lebih besar dari nol.
- 3) $\text{Rad}(ABC)$ adalah hasil kali dari semua bilangan prima yang membagi A , B , atau C (Sheppard, 2016).
- 4) $1 + \epsilon$ menunjukkan bahwa perkalian radikal dari A , B , dan C dipangkatkan dengan $1 + \epsilon$, yang berarti hasilnya sedikit lebih besar dari radikal biasa, tergantung pada nilai ϵ .

E. Teorema Terakhir Fermat

Pierre de Fermat adalah salah satu matematikawan terkenal di Eropa, dan namanya hampir identik dengan teori bilangan. Meskipun begitu, Fermat tidak pernah menerbitkan satu pun karya matematikanya. Ia sering didesak untuk mempublikasikan temuannya, tetapi ia selalu menolak untuk melakukannya. Asal usul nama "Teorema Terakhir Fermat" tidak begitu jelas, dan tidak diketahui kapan tepatnya Fermat menuliskan catatan tersebut. Namun, diasumsikan bahwa ia menuliskannya ketika mempelajari karya Diophantus. Nama "Teorema Terakhir" kemungkinan besar muncul karena dari sekian banyak pernyataan yang belum terbukti oleh Fermat, ini adalah yang terakhir yang masih belum terbukti.

Teorema 2.5.1 (*Teorema Terakhir Fermat*)

Teorema Terakhir Fermat pada dasarnya menyatakan bahwa jika N adalah bilangan bulat lebih besar dari 2, maka tidak ada bilangan bulat positif A , B , dan C yang memenuhi persamaan $A^N + B^N = C^N$.

Bentuk ini adalah pernyataan umum dari teorema tersebut. Jika Fermat benar-benar memiliki bukti untuk ini, hal itu akan sangat luar biasa, mengingat tidak ada seorang pun yang mampu membuktikannya selama lebih dari tiga ratus tahun sejak zaman Fermat.

Pembahasan untuk kasus $N = 2$ yaitu telah dibuktikan menggunakan tripel Pythagoras. Sedangkan untuk kasus ketika $N > 2$ tidak ada solusi dibuktikan oleh ilmuwan matematika yaitu: Fermat membuktikan bahwa untuk kasus $N = 4$ menggunakan metode penurunan tak hingga, pada pertengahan abad ke-18, Euler membuktikan kasus $N = 3$ tetapi ada kesalahan dalam pembuktiannya, di awal tahun 1800-an, pencapaian besar berikutnya terjadi ketika Sophie Germain mencapai kemajuan pada kasus $N = 5$ dan untuk membuktikan Teorema Terakhir Fermat (Kasus $N \geq 6$ menggunakan Konjektur ABC).

BAB III

Sifat-Sifat Konjektur ABC

A. Kaitannya Konjektur ABC dengan Teorema Terakhir Fermat

Kasus $N \geq 6$ dengan menggunakan Konjektur ABC dengan $\epsilon = \frac{3}{4}$ maka ada $K\left(\frac{3}{4}\right) = 1$, yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\max\{|A|, |B|, |C|\} \leq K(\epsilon) \cdot \text{Rad}(ABC)^{1+\epsilon}$$

dengan $\epsilon = \frac{3}{4}$ ada $K\left(\frac{3}{4}\right) = 1$ maka,

$$\max\{|A|, |B|, |C|\} \leq 1 \cdot \text{Rad}(ABC)^{1+\frac{3}{4}} = 1 \cdot \text{Rad}(ABC)^{\frac{4}{4}+\frac{3}{4}} = \text{Rad}(ABC)^{\frac{7}{4}} \quad (3.1)$$

di mana pertidaksamaan ini digunakan untuk membuktikan versi Teorema Terakhir Fermat pada bilangan bulat, untuk $N \geq 6$ (Sheppard, 2016).

Teorema 3.1.1

Tidak ada bilangan bulat yang relatif prima A , B , dan C sedemikian sehingga memenuhi persamaan $A^N + B^N = C^N$ untuk $N \geq 6$.

Bukti.

Misalkan A , B , dan C adalah bilangan bulat saling prima yang memenuhi $A^N + B^N = C^N$.

Menurut Konjektur ABC yaitu:

$$\max\{|A|, |B|, |C|\} \leq K(\epsilon) \cdot \text{Rad}(ABC)^{1+\epsilon}$$

dengan $\epsilon = \frac{3}{4}$ ada $K\left(\frac{3}{4}\right) = 1$ maka,

$$\max\{|A|, |B|, |C|\} \leq 1 \cdot \text{Rad}(ABC)^{1+\frac{3}{4}} = 1 \cdot \text{Rad}(ABC)^{\frac{4}{4}+\frac{3}{4}} = \text{Rad}(ABC)^{\frac{7}{4}}.$$

Kemudian menggunakan $A^N + B^N = C^N$ dan pertidaksamaan pada (3.1) diperoleh,

$$\max\{|A|^N, |B|^N, |C|^N\} \leq \text{Rad}(ABC)^{\frac{7}{4}} \quad (3.2)$$

di mana secara umum,

$$\text{Rad}(A)^{\frac{7}{4}} \leq |A|^{\frac{7}{4}}, \quad \text{Rad}(B)^{\frac{7}{4}} \leq |B|^{\frac{7}{4}}, \quad \text{Rad}(C)^{\frac{7}{4}} \leq |C|^{\frac{7}{4}}$$

kemudian kalikan sehingga menghasilkan bentuk,

$$\text{Rad}(ABC)^{\frac{7}{4}} \leq |A|^{\frac{7}{4}} \cdot |B|^{\frac{7}{4}} \cdot |C|^{\frac{7}{4}} = |ABC|^{\frac{7}{4}}.$$

$$|A|^{7/4} \leq (\max\{|A|, |B|, |C|\})^{7/4} \quad (3.3)$$

$$|B|^{7/4} \leq (\max\{|A|, |B|, |C|\})^{7/4} \quad (3.4)$$

$$|C|^{7/4} \leq (\max\{|A|, |B|, |C|\})^{7/4} \quad (3.5)$$

Dengan mengalikan ketiga persamaan yaitu (3.3), (3.4) dan (3.5) diperoleh,

$$\begin{aligned} & (\max\{|A|, |B|, |C|\})^{7/4} \cdot (\max\{|A|, |B|, |C|\})^{7/4} \cdot (\max\{|A|, |B|, |C|\})^{7/4} \\ &= (\max\{|A|, |B|, |C|\}^3)^{7/4} \\ &= (\max\{|A|, |B|, |C|\})^{21/4} \end{aligned}$$

sehingga pertidaksamaan menjadi,

$$|ABC|^{\frac{7}{4}} \leq (\max\{|A|, |B|, |C|\})^{21/4} \quad (3.6)$$

diperoleh dari pertidaksamaan (3.2) dan (3.6) sehingga,

$$\max\{|A|^N, |B|^N, |C|^N\} \leq \text{Rad}(ABC)^{\frac{7}{4}} \leq |ABC|^{\frac{7}{4}} \leq \max\{|A|, |B|, |C|\}^{\frac{21}{4}}.$$

$$\Leftrightarrow \max\{|A|^N, |B|^N, |C|^N\} \leq \max\{|A|, |B|, |C|\}^{\frac{21}{4}}. \quad (3.7)$$

Jika $N \geq 6$ maka peningkatan pangkat eksponen $\max\{|A|^N, |B|^N, |C|^N\}$ akan lebih dari atau sama dengan $\max\{|A|, |B|, |C|\}^{\frac{21}{4}}$ yaitu misal diambil $N = 6$ maka:

$$\max\{|A|^6, |B|^6, |C|^6\} \geq \max\{|A|, |B|, |C|\}^{\frac{21}{4}}.$$

sehingga terjadi kontradiksi dengan pertidaksamaan (3.7) sehingga dapat disimpulkan bahwa teorema ini terbukti. ■

Berdasarkan **Teorema 3.1.1**, diberikan contoh sebagai berikut

Contoh 3.1.2

Akan ditunjukkan bahwa tidak ada bilangan bulat yang relatif prima A , B , dan C sedemikian sehingga memenuhi persamaan $A^N + B^N = C^N$ untuk $N \geq 6$.

Misal $A = 13$ dan $B = 12$ maka $C = 13 + 12 = 25$ jika $N = 100$ berdasarkan persamaan **3.1** diperoleh,

$$\max\{|A|^N, |B|^N, |C|^N\} \leq \max\{|A|, |B|, |C|\}^{\frac{21}{4}}$$

$$\max\{|13|^{100}, |12|^{100}, |25|^{100}\} \leq \max\{|13|, |12|, |25|\}^{\frac{21}{4}}$$

karena nilai mutlak selalu bernilai positif maka persamaan ruas kiri diperoleh;

$$|13|^{100} = 13^{100}, \quad |12|^{100} = 12^{100}, \quad |25|^{100} = 25^{100}$$

$$\max \{13^{100}, 12^{100}, 25^{100}\} = 25^{100}$$

nilai maksimumnya yaitu 25^{100}
sedangkan ruas kanan diperoleh,

$$\max \{|13|, |12|, |25|\}^{\frac{21}{4}} = 25^{\frac{21}{4}}$$

bandingkan kedua ruas sehingga diperoleh hasil,

$$25^{100} \leq 25^{\frac{21}{4}}$$

$$\Leftrightarrow 6.22301527786114210^{139} \not\leq 2.18310^7 \quad (3.8)$$

Karena nilai ruas kiri jauh lebih besar daripada ruas kanan, maka pertidaksamaan **3.1** tidak terpenuhi sehingga tidak ada bilangan bulat yang relatif prima A , B , dan C sedemikian sehingga memenuhi persamaan $A^N + B^N = C^N$ untuk $N \geq 6$ teorema ini terbukti benar.

B. Kaitannya Konjektur ABC dengan Faktor Prima

Definisi dasar dari μ yang dipaparkan oleh (Ben Hadj Salem, 2019) adalah sebagai berikut

Definisi 3.2.1

Misalkan a adalah bilangan bulat positif yang dapat dinyatakan

sebagai,

$$a = \mu_a \cdot \text{Rad}(a)$$

dengan,

$$\mu_a = p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2-1} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n-1}.$$

Keterangan:

1. p_i adalah faktor prima dari a .
2. α_i adalah pangkat dari faktor prima p_i dalam faktorisasi prima a .
3. $\text{Rad}(a)$ adalah hasil kali faktor-faktor prima dari a (radikal dari a).
4. μ_a adalah hasil kali dari setiap faktor prima p_i yang dipangkatkan dengan $\alpha_i - 1$.

Berdasarkan definisi μ , diberikan contoh sebagai berikut

Contoh 3.2.2

Akan ditunjukkan untuk nilai $\mu(12)$.

Faktorisasi prima dari $a = 12 = 2^2 \cdot 3^1$

untuk 2^2 pangkatnya adalah 2 dengan menggunakan rumus μ maka diperoleh $2^{2-1} = 2^1 = 2$

untuk 3^1 pangkatnya adalah 1 dengan menggunakan rumus μ maka diperoleh $3^{1-1} = 3^0 = 1$

maka, hasil nilai $\mu(a)$:

$$\mu(12) = 2^1 \cdot 3^0 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Teorema 3.2.3 (*Ben Hadj Salem, 2019*)

Misalkan a dan c adalah bilangan bulat positif yang relatif prima dengan $c = a + 1$ dan $a \geq 2$, maka berlaku:

$$c < 2 \cdot \text{Rad}^2(ac)$$

Bukti.

Ambil sebarang a dan c adalah bilangan bulat positif yang relatif prima dengan $c = a + 1$ di mana $a \geq 2$ dengan adanya syarat ini, menunjukkan bahwa $a \neq 0$ akan ditunjukkan:

$$c < 2 \cdot \text{Rad}^2(ac).$$

untuk membuktikan pertidaksamaan ini dengan membandingkan versi yang sederhana yaitu c dengan $\text{Rad}(ac)$ muncul permasalahan untuk menyelesaikan kasus ketika $c < \text{Rad}(ac)$, $c = \text{Rad}(ac)$ dan $c > \text{Rad}(ac)$.

1. Kasus $c < \text{Rad}(ac)$

Untuk $c < \text{Rad}(ac)$ jelas, $c < \text{Rad}(ac) < \text{Rad}^2(ac) < 2 \cdot \text{Rad}^2(ac)$.

2. Kasus $c = \text{Rad}(ac)$

Jika $c = \text{Rad}(ac)$, maka semua faktor prima yang ada dalam c juga muncul di a akibatnya a dan c memiliki faktor prima yang sama, sehingga tidak saling relatif prima.

Karena syarat awal yaitu a dan c bilangan bulat positif yang relatif prima, maka kasus ini tidak memenuhi syarat dan harus ditolak.

3. Kasus $c > \text{Rad}(ac)$

Misalkan $c > \text{Rad}(ac)$ maka $\mu_c > \text{Rad}(a)$

$$c > \text{Rad}(ac)$$

$$\Leftrightarrow c > \text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(c) \quad (3.9)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{\text{Rad}(c)} > \text{Rad}(a) \quad (3.10)$$

$$\Leftrightarrow \mu_c > \text{Rad}(a) \quad (3.11)$$

karena μ_c lebih besar maka dapat membagi $\text{Rad}(a)$ sehingga

dapat ditulis,

$$\mu_c = \text{Rad}(a) \cdot l + l_0,$$

di mana l adalah suatu bilangan bulat positif dan l_0 adalah suatu bilangan yang memenuhi syarat:

$$0 < l_0 < \text{Rad}(a)$$

Karena $l_0 < \text{Rad}(a)$, maka:

$$\text{Rad}(a) \cdot l + l_0 < l \cdot \text{Rad}(a) + \text{Rad}(a)$$

dapat ditulis menjadi,

$$l \cdot \text{Rad}(a) + \text{Rad}(a) = (l + 1) \cdot \text{Rad}(a)$$

Dengan menggunakan **Definisi 3.1.3** diperoleh:

$$\mu_c \cdot \text{Rad}(c) < (l + 1) \cdot \text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(c)$$

$$c < (l + 1) \cdot \text{Rad}(ac) \quad (3.12)$$

untuk menguji kebenaran untuk semua nilai l (suatu bilangan bulat positif yang muncul dari pembagian μ_c), dapat diuji 3 kemungkinan:

(3a) Kasus $l + 1 < \text{Rad}(ac)$, jelas $l < \text{Rad}(ac)$

Dengan menggunakan pertidaksamaan (3.12) maka,

$$\Leftrightarrow c < (\text{Rad}(ac) + 1) \cdot \text{Rad}(ac) = \text{Rad}^2(ac) + \text{Rad}(ac) \quad (3.13)$$

$$\Leftrightarrow c < \text{Rad}^2(ac) + \text{Rad}(ac) < 2 \cdot \text{Rad}^2(ac) \quad (3.14)$$

$$\Leftrightarrow c < 2 \cdot \text{Rad}^2(ac). \quad (3.15)$$

Maka, kasus ini terpenuhi.

(3b) Kasus $l = \text{Rad}(ac)$

Diketahui pertidaksamaan (3.12) maka diperoleh,

$$c < (\text{Rad}(ac) + 1) \cdot \text{Rad}(ac) = \text{Rad}^2(ac) + \text{Rad}(ac) < 2 \cdot \text{Rad}^2(ac),$$

di mana,

$$(\text{Rad}(ac) + 1) \cdot \text{Rad}(ac) = \text{Rad}^2(ac) + \text{Rad}(ac),$$

sehingga,

$$c < \text{Rad}^2(ac) + \text{Rad}(ac) < 2 \cdot \text{Rad}^2(ac),$$

$$c < 2 \cdot \text{Rad}^2(ac)$$

Maka, kasus ini terpenuhi.

(3c) Kasus $l > \text{Rad}(ac)$

Untuk kasus ini tidak bisa langsung menggunakan pertidaksamaan (3.12) karena l terlalu besar sehingga kemungkinan bisa melebihi $2 \cdot \text{Rad}^2(ac)$, maka diperlukan persamaan $\mu_c = l \cdot \text{Rad}(a) + l_0$.

Akan dibuktikan $l > \text{Rad}(ac)$ maka l_0 tidak digunakan karena terlalu kecil $0 < l_0 < \text{Rad}(a)$ sehingga pertidaksamaan menjadi,

$$\mu_c > \text{Rad}(ac) \cdot \text{Rad}(a)$$

karena μ_c lebih besar maka dapat membagi $\text{Rad}(ac) \cdot \text{Rad}(a)$ sehingga,

$$\mu_c = \text{Rad}(ac) \cdot \text{Rad}(a) \cdot m + r,$$

dimana m adalah hasil bagi dengan syarat variabel m adalah bilangan bulat positif $m \geq 1$ dan r adalah sisa dari hasil bagi, disini r memiliki syarat $0 < r < \text{Rad}(ac) \cdot \text{Rad}(a)$.

Syarat $r < \text{Rad}(ac) \cdot \text{Rad}(a)$ substitusikan ke dalam persamaan sehingga,

$$\mu_c < m \cdot \text{Rad}(ac) \cdot \text{Rad}(a) + \text{Rad}(ac) \cdot \text{Rad}(a) = (m+1) \text{Rad}(ac) \cdot \text{Rad}(a)$$

dengan menggunakan **Definisi 3.1.3** maka,

$$\mu_c = \frac{c}{\text{Rad}(c)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{\text{Rad}(c)} < (m+1) \cdot \text{Rad}(ac) \cdot \text{Rad}(a) \quad (3.16)$$

$$\Leftrightarrow c < (m + 1) \cdot \text{Rad}(ac) \cdot \text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(c) \quad (3.17)$$

di mana,

$$\begin{aligned} (m + 1) \cdot \text{Rad}(ac) \cdot \text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(c) &= (m+1) \cdot \text{Rad}(ac) \cdot \text{Rad}(ac) \\ &= (m + 1) \cdot \text{Rad}^2(ac) \end{aligned}$$

Dengan $m \geq 1$ misal ambil $m = 1$ maka diperoleh,

$$c < (1 + 1) \cdot \text{Rad}^2(ac)$$

$$c < 2 \cdot \text{Rad}^2(ac).$$

Maka, kasus ini terpenuhi.

■

Berdasarkan uraian di atas maka, misalkan a dan c adalah bilangan bulat positif yang relatif prima dengan $c = a + 1$ dan $a \geq 2$, maka berlaku:

$$c < 2 \cdot \text{Rad}^2(ac)$$

Berdasarkan **Teorema 3.2.3**, diberikan contoh sebagai berikut

Contoh 3.2.4

Misal nilai $a = 5$ dan $c = a + 1$ akan dibuktikan penyelesaian kasus $c < 2 \cdot \text{Rad}^2(ac)$

Diketahui nilai $a = 5$ dan $c = a + 1 = 5 + 1 = 6$ maka,

$$\text{Rad}(a) = \text{Rad}(5) = 5$$

$$\text{Rad}(c) = \text{Rad}(6) = 2 \times 3 = 6$$

$$\text{Rad}(ac) = 5 \times 3 \times 2 = 30$$

$$\text{Rad}^2(ac) = \text{Rad}(ac) \cdot \text{Rad}(ac) = 30 \times 30 = 900$$

$$2 \cdot \text{Rad}^2(ac) = 2 \times 900 = 1.800$$

Jika $c < \text{Rad}(ac)$ maka,

$$c < \text{Rad}(ac) < \text{Rad}^2(ac) < 2 \cdot \text{Rad}^2(ac)$$

dengan menggunakan ketentuan yang ada maka diperoleh,

$$6 < 30 < 900 < 2 \times 900$$

$$6 < 30 < 900 < 1.800$$

dengan demikian, kasus $c < 2 \cdot \text{Rad}^2(ac)$ terpenuhi.

Teorema 3.2.5 (Ben Hadj Salem, 2019)

Misalkan a, b, c adalah bilangan bulat positif yang relatif prima dengan $c = a + b$ di mana, $a > b$ dan $b \geq 2$ maka:

$$c < 2 \cdot \text{Rad}^2(abc).$$

Bukti.

Ambil sebarang a, b, c adalah bilangan bulat positif yang relatif prima dengan $c = a + b$ dimana $b < a$ dan $b \geq 2$ dengan adanya syarat ini, menunjukkan bahwa $b \neq 0$ dan $b < a$ akan ditunjukkan:

$$c < 2 \cdot \text{Rad}^2(abc).$$

untuk membuktikan pertidaksamaan ini dengan membandingkan versi yang sederhana yaitu c dengan $\text{Rad}(abc)$ muncul permasalahan kasus untuk menyelesaikannya yaitu, ketika

$c < \text{Rad}(abc)$, $c = \text{Rad}(abc)$ dan $c > \text{Rad}(abc)$.

1. Kasus $c < \text{Rad}(abc)$

Untuk $c < \text{Rad}(abc)$ jelas bahwa,

$$c < \text{Rad}(abc) < \text{Rad}^2(abc) < 2 \cdot \text{Rad}^2(abc).$$

2. Kasus $c = \text{Rad}(abc)$

Jika $c = \text{Rad}(abc)$, maka semua faktor prima yang ada dalam c juga muncul di a atau b akibatnya a , b , dan c memiliki faktor prima yang sama, sehingga tidak saling relatif prima.

Karena syarat awal yaitu a , b , dan c bilangan bulat positif yang relatif prima, maka kasus ini tidak memenuhi syarat dan harus ditolak.

3. Kasus $c > \text{Rad}(abc)$

Jika

$$c > \text{Rad}(abc)$$

maka berlaku,

$$\frac{c}{\text{Rad}(c)} > \frac{\text{Rad}(abc)}{\text{Rad}(c)}$$

sehingga diperoleh,

$$\mu_c > \text{Rad}(ab).$$

karena μ_c lebih besar maka dapat membagi $\text{Rad}(ab)$ sehingga dapat ditulis,

$$\mu_c = l \cdot \text{Rad}(ab) + l_0,$$

di mana l adalah suatu bilangan bulat positif dan l_0 adalah

suatu bilangan yang memenuhi syarat:

$$0 < l_0 < \text{Rad}(ab).$$

Karena akan dibuktikan $c > \text{Rad}(abc)$ maka $l_0 < \text{Rad}(ab)$ disubstitusikan ke dalam pertidaksamaan,

$$\mu_c < l \cdot \text{Rad}(ab) + \text{Rad}(ab) = (l + 1) \cdot \text{Rad}(ab).$$

Dengan menggunakan **Definisi 3.1.3** sehingga diperoleh:

$$\text{Rad}(c) \cdot \mu_c \cdot \text{Rad}(c) < (l + 1) \cdot \text{Rad}(ab).$$

$$c < (l + 1) \cdot \text{Rad}(abc) \quad (3.18)$$

untuk menguji kebenaran untuk semua nilai l (suatu bilangan bulat positif yang muncul dari pembagian μ_c), dapat diuji 3 kemungkinan:

(3a) Kasus $l < \text{Rad}(abc)$,

Dengan menggunakan pertidaksamaan (3.18) maka,

$$\Leftrightarrow c < (\text{Rad}(abc)+1) \cdot \text{Rad}(abc) = \text{Rad}^2(abc) + \text{Rad}(abc) \quad (3.19)$$

$$\Leftrightarrow c < \text{Rad}^2(abc) + \text{Rad}(abc) < 2 \cdot \text{Rad}^2(abc) \quad (3.20)$$

$$\Leftrightarrow c < 2 \cdot \text{Rad}^2(abc). \quad (3.21)$$

Dengan demikian, kasus ini terpenuhi.

(3b) Kasus $l = \text{Rad}(abc)$

Dengan menggunakan pertidaksamaan (3.18) maka

diperoleh,

$$c < (\text{Rad}(abc) + 1) \cdot \text{Rad}(abc) = \text{Rad}^2(abc) + \text{Rad}(abc)$$

di mana,

$$(\text{Rad}(abc) + 1) \cdot \text{Rad}(abc) = \text{Rad}^2(abc) + \text{Rad}(abc)$$

$$c < \text{Rad}^2(abc) + \text{Rad}(abc) < \text{Rad}^2(abc) + \text{Rad}^2(abc) < 2 \cdot \text{Rad}^2(abc),$$

sehingga,

$$c < 2 \cdot \text{Rad}^2(abc).$$

Dengan demikian, kasus ini terpenuhi.

(3c) Kasus $l > \text{Rad}(abc)$

Untuk kasus ini tidak bisa langsung menggunakan pertidaksamaan (3.18) karena l terlalu besar sehingga kemungkinan bisa melebihi $2 \cdot \text{Rad}^2(abc)$, maka diperlukan persamaan $\mu_c = l \cdot \text{Rad}(ab) + l_0$.

Akan dibuktikan $l > \text{Rad}(abc)$ maka l_0 tidak digunakan karena terlalu kecil $0 < l_0 < \text{Rad}(ab)$ sehingga pertidaksamaan menjadi,

$$\mu_c > \text{Rad}(abc) \cdot \text{Rad}(ab) = \text{Rad}^2(ab) \cdot \text{Rad}(c)$$

karena nilai μ_c lebih besar maka dapat membagi $\text{Rad}(abc) \cdot \text{Rad}(ab)$ sehingga dapat ditulis,

$$\mu_c = m \cdot \text{Rad}^2(ab) \cdot \text{Rad}(c) + r,$$

di mana m adalah hasil bagi dengan syarat variabel m

adalah bilangan bulat positif $m \geq 1$ dan r adalah sisa dari hasil bagi, disini r memiliki syarat

$$0 < r < \text{Rad}^2(ab) \cdot \text{Rad}(c).$$

Maka syarat $r < \text{Rad}^2(ab) \cdot \text{Rad}(c)$ disubstitusikan kedalam pertidaksamaan,

$$\mu_c < m \cdot \text{Rad}^2(ab) \cdot \text{Rad}(c) + \text{Rad}^2(ab) \cdot \text{Rad}(c)$$

$$\mu_c < (m + 1) \cdot \text{Rad}^2(ab) \cdot \text{Rad}(c)$$

dengan menggunakan **Definisi 3.1.3** ,

$$\mu_c = \frac{c}{\text{Rad}(c)}$$

maka,

$$\Leftrightarrow \frac{c}{\text{Rad}(c)} < (m + 1) \cdot \text{Rad}^2(ab) \cdot \text{Rad}(c) \quad (3.22)$$

$$\Leftrightarrow c < (m + 1) \cdot \text{Rad}^2(ab) \cdot \text{Rad}(c) \cdot \text{Rad}(c) \quad (3.23)$$

$$\Leftrightarrow c < (m + 1) \cdot \text{Rad}^2(abc) \quad (3.24)$$

Dengan variabel m bilangan bulat positif $m \geq 1$ misal ambil $m = 1$ maka diperoleh,

$$c < (1 + 1) \cdot \text{Rad}^2(abc)$$

$$c < 2 \cdot \text{Rad}^2(abc).$$

Maka, kasus ini terpenuhi.



Berdasarkan uraian di atas maka, untuk a, b, c adalah bilangan bulat positif yang relatif prima dengan $c = a + b$ di mana, $a > b$ dan $b \geq 2$ maka:

$$c < 2 \cdot \text{Rad}^2(abc).$$

Berdasarkan **Teorema 3.2.5**, diberikan contoh sebagai berikut

Contoh 3.2.6

Misal nilai $a = 5$, $b = 3$, dan $c = a + b$ tentukan penyelesaian kasus $c < 2 \cdot \text{Rad}^2(abc)$?

Jawab:

Diketahui nilai $a = 5$, $b = 3$, dan $c = a + b = 5 + 3 = 8$ maka,

$$\text{Rad}(a) = \text{Rad}(5) = 5$$

$$\text{Rad}(b) = \text{Rad}(3) = 3$$

$$\text{Rad}(c) = \text{Rad}(8) = 2$$

$$\text{Rad}(abc) = 5 \times 3 \times 2 = 30$$

$$\text{Rad}^2(abc) = \text{Rad}(abc) \cdot \text{Rad}(abc) = 30 \times 30 = 900$$

$$2 \cdot \text{Rad}^2(abc) = 2 \times 900 = 1.800$$

Jika $c < \text{Rad}(abc)$ maka

$$c < \text{Rad}(abc) < \text{Rad}^2(abc) < 2 \times \text{Rad}^2(abc)$$

dengan menggunakan ketentuan yang ada maka diperoleh,

$$8 < 30 < 900 < 2 \times (900)$$

$$8 < 30 < 900 < 1.800$$

dengan demikian, kasus ini terpenuhi.

Teorema 3.2.7 *David Masser, Joseph Oesterlé & Abdelmajid Ben Hadj Salem, 2019*

Misalkan a, b, c adalah bilangan bulat positif yang relatif prima dengan $c = a + b$. Maka, untuk setiap $\epsilon > 0$ ada konstanta $K(\epsilon)$ yang memenuhi:

$$c < K(\epsilon) \cdot \text{Rad}(abc)^{1+\epsilon},$$

di mana $K(\epsilon)$ adalah sebuah konstanta yang bergantung pada ϵ sebagai berikut:

$$K(\epsilon) = \begin{cases} 2e^{\frac{1}{\epsilon^2}}, & \text{jika } \epsilon \geq 1, \\ e^{\frac{1}{\epsilon^2}}, & \text{jika } 0 < \epsilon < 1. \end{cases}$$

Bukti.

Misalkan $R = \text{Rad}(ac)$ atau $R = \text{Rad}(abc)$.

1. Kasus $\epsilon \geq 1$

Dengan menggunakan pertidaksamaan pada **Teorema 3.2.5** dan **Teorema 3.2.3** jelas $c < 2R^2$ dengan ketentuan untuk semua $\epsilon \geq 1$ misal $\epsilon = 1$ maka ada $K(\epsilon) = 2e^{\frac{1}{\epsilon^2}}$ di mana,

$$2R^2 \leq 2R^{1+\epsilon} = 2R^{1+1} = 2R^2$$

sehingga diperoleh,

$$c < 2R^2 \leq 2R^{1+\epsilon} < K(\epsilon) \cdot R^{1+\epsilon}$$

Berdasarkan kasus ini, Konjektur ABC terbukti benar.

2. Kasus $\epsilon < 1$

(2a) Kasus $c < R$

Dengan $\epsilon < 1$ ada $K(\epsilon) = e^{\frac{1}{\epsilon^2}}$

jelas,

$$c < R < R^2 \leq R^{1+\epsilon} < K(\epsilon)R^{1+\epsilon}$$

Berdasarkan kasus ini, Konjektur ABC terbukti benar.

(2b) Kasus $c > R$

Diketahui bahwa: $c < K(\epsilon)R^{1+\epsilon}$, dengan $0 < \epsilon < 1$ ada $K(\epsilon) = e^{\frac{1}{\epsilon^2}}$. Pernyataan tersebut tidak terpenuhi karena akan membuktikan $c > R$ ini adalah bentuk kasus kontradiksi,

maka terdapat suatu $\epsilon_0 \in [0, 1]$ sedemikian sehingga $(c = a + b)$ memenuhi $c > R$ dan $c \geq K(\epsilon_0) \cdot R^{1+\epsilon_0}$.

Akan dibuktikan bahwa $c > R$ dan $c \geq K(\epsilon_0) \cdot R^{1+\epsilon_0}$ maka,

$$c \geq K(\epsilon_0) \cdot R^{1+\epsilon_0}$$

kalikan kedua ruas dengan $R^{1-\epsilon_0}$ diperoleh,

$$R^{1-\epsilon_0}c \geq K(\epsilon_0) \cdot R^{1-\epsilon_0}R^{1+\epsilon_0},$$

berdasarkan **Teorema 3.2.3** dan **Teorema 3.2.5** bahwa $c < R$ maka:

$$R^{1-\epsilon_0} \cdot c \geq K(\epsilon_0) \cdot R^2 > K(\epsilon_0) \cdot c$$

(disini pertidaksamaan dibandingkan dengan teorema sebelumnya karena akan mengambil bentuk

kontradiksinya) sehingga,

$$R^{1-\epsilon_0} \cdot c > K(\epsilon_0) \cdot c$$

bagi kedua ruas dengan c maka diperoleh,

$$R^{1-\epsilon_0} > K(\epsilon_0)$$

Karena $c > R$ sehingga,

$$c^{1-\epsilon_0} > R^{1-\epsilon_0} > K(\epsilon_0)$$

$$\Leftrightarrow c^{1-\epsilon_0} > K(\epsilon_0), \quad (3.25)$$

maka,

$$c > (K(\epsilon_0))^{\frac{1}{1-\epsilon_0}}.$$

Sehingga, nilai c , R , dan ϵ_0 , tidak memenuhi pertidaksamaan $c \geq R^{1+\epsilon_0} K(\epsilon_0)$ di mana hasil yang diperoleh bertentangan dengan teorema.

■

Berdasarkan uraian di atas maka, a , b , c adalah bilangan bulat positif yang relatif prima dengan $c = a + b$. Maka, untuk setiap $\epsilon > 0$ ada konstanta $K(\epsilon)$ yang memenuhi:

$$c < K(\epsilon) \cdot \text{Rad}(abc)^{1+\epsilon},$$

di mana $K(\epsilon)$ adalah sebuah konstanta yang bergantung pada ϵ

sebagai berikut:

$$K(\epsilon) = \begin{cases} 2e^{\frac{1}{\epsilon^2}}, & \text{jika } \epsilon \geq 1, \\ e^{\frac{1}{\epsilon^2}}, & \text{jika } 0 < \epsilon < 1. \end{cases}$$

Berdasarkan **Teorema 3.2.7**, diberikan contoh sebagai berikut

Contoh 3.2.8

Misalkan $a = 5$, $b = 3$, dengan $c = a + b$ adalah bilangan bulat positif yang relatif prima. Maka, untuk setiap $\epsilon > 0$ ada konstanta $K(\epsilon)$, di mana $K(\epsilon)$ adalah sebuah konstanta yang bergantung pada ϵ sebagai berikut:

$$K(\epsilon) = \begin{cases} 2e^{\frac{1}{\epsilon^2}}, & \text{jika } \epsilon \geq 1, \\ e^{\frac{1}{\epsilon^2}}, & \text{jika } 0 < \epsilon < 1. \end{cases}$$

akan dibuktikan penyelesaian kasus

$$c < K(\epsilon) \cdot \text{Rad}(abc)^{1+\epsilon}$$

Diketahui nilai $a = 5$, $b = 3$, dan $c = a + b = 5 + 3 = 8$ maka,

$$\text{Rad}(a) = \text{Rad}(5) = 5$$

$$\text{Rad}(b) = \text{Rad}(3) = 3$$

$$\text{Rad}(c) = \text{Rad}(8) = 2$$

dengan R adalah $R = \text{Rad}(ac)$ atau $R = \text{Rad}(abc)$

$$\text{Rad}(ac) = 5 \times 2 = 10$$

$$\text{Rad}(abc) = 5 \times 3 \times 2 = 30$$

1. **Kasus:** $\epsilon \geq 1$

Dengan menggunakan hasil $c < 2 \cdot \text{Rad}^2(abc)$, diperoleh untuk semua $\epsilon \geq 1$ dengan menggunakan $\epsilon = 1$ ada $K(\epsilon) = 2e^{\frac{1}{\epsilon^2}}$ yaitu $K(\epsilon) = 2e^{\frac{1}{1^2}} = 2e \approx 2 \times 2,718 = 5,436$ dengan,

$$c < K(\epsilon) \cdot \text{Rad}(abc)^{1+\epsilon},$$

maka,

$$8 < 5,436 \times (30)^{1+1},$$

$$8 < 4.892,400$$

Berdasarkan kasus ini, Konjektur ABC terbukti benar.

2. **Kasus:** $\epsilon < 1$ dengan $c < R$

Dengan $\epsilon < 1$ ada $K(\epsilon) = e^{\frac{1}{\epsilon^2}}$ misal $\epsilon = 0,5$ maka nilai $K(\epsilon) = e^{\frac{1}{0,5^2}} = e \approx 54,598$ dengan,

$$c < K(\epsilon) \cdot \text{Rad}(abc)^{1+\epsilon},$$

maka,

$$8 < 54,598 \times 30^{1+0,5}$$

$$8 < 8.970,9$$

Berdasarkan kasus ini, Konjektur ABC terbukti benar.

Teorema 3.2.9 (Ben Hadj Salem, 2019)

Misalkan a, b, c adalah bilangan bulat positif yang relatif prima dengan $c = a + b$ dan $1 \leq b < a$, maka:

$$c < \text{Rad}^2(abc).$$

Bukti.

Ambil sebarang a, b, c adalah bilangan bulat positif yang relatif prima dengan $c = a + b$ dimana $1 \leq b < a$ dengan adanya syarat ini, menunjukkan bahwa $b \neq 0$ dan $b < a$ akan ditunjukkan:

$$c < \text{Rad}^2(abc).$$

untuk membuktikan yaitu:

1. Kasus $c < \text{Rad}(abc)$

Untuk $c < \text{Rad}(abc)$ jelas bahwa,

$$c < \text{Rad}(abc) < \text{Rad}^2(abc).$$

2. Kasus $c \geq \text{Rad}(abc)$

Disini dibagi menjadi 2 kasus yaitu:

- (2a.) Kasus $c = a + 1$ ketika $b = 1$ karena a, b, c relatif prima, tentu $(a, 1) = 1$

Dengan menggunakan **Definisi 3.2.1** maka,

$$c = a + 1 = \mu_a \cdot \text{Rad}(a) + 1$$

karena $b = 1$ maka,

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot c$$

$$\text{Rad}(abc) = \text{Rad}(a) \cdot 1 \cdot \text{Rad}(c)$$

$$\text{Rad}^2(abc) = \text{Rad}^2(a) \cdot \text{Rad}^2(c)$$

di sini diperoleh,

$$c = \mu_a \cdot \text{Rad}(a) + 1 < \text{Rad}^2(abc) = \text{Rad}^2(ac). \quad (3.26)$$

Untuk membuktikan pertidaksamaan berlaku atau tidak, maka muncul kasus-kasus untuk menyelesaikan pertidaksamaan. Jadi, akan dibandingkan antara μ_a dan Radikal karena μ_a bisa jadi lebih kecil, sama, atau lebih besar dari radikalnya masing-masing yaitu:

i. Kasus $\mu_a = 1$

Jika $\mu_a = 1$ maka, $a = \text{Rad}(a)$. Dengan menggunakan pertidaksamaan (3.26) sehingga,

$$\begin{aligned} c &= a + 1 < 2 \cdot a = 2 \cdot \mu_a \cdot \text{Rad}(a) = 2 \cdot 1 \cdot \text{Rad}(a) \\ &< \text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(a) < \text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(c) = \text{Rad}(ac) \\ &< \text{Rad}^2(abc) = \text{Rad}^2(ac) \end{aligned}$$

maka kasus ini terpenuhi.

ii. Kasus $\mu_a \neq 1, \mu_a < \text{Rad}(a)$

Dengan menggunakan pertidaksamaan (3.26) sehingga,

$$\begin{aligned} c &= a + 1 < 2 \cdot a = 2 \cdot \mu_a \cdot \text{Rad}(a) \\ &< 2 \cdot \text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(a) < \text{Rad}^2(ac). \end{aligned}$$

maka, kasus ini terpenuhi.

iii. Kasus $\mu_a \neq 1, \mu_a \geq \text{Rad}(a)$

Dengan menggunakan pertidaksamaan (3.26)

dan $\mu_a \geq \text{Rad}(a)$ maka,

$$c = a+1 = \mu_a \cdot \text{Rad}(a) + 1 \leq \mu_a \cdot \mu_a + 1 < \text{Rad}^2(ac).$$

misal pertidaksamaan berlaku, $\mu_a^2 + 1 \geq \text{Rad}^2(ac)$
jelas bahwa $\mu_a^2 > \text{Rad}^2(ac)$ sehingga,

$$\mu_a^2 > \text{Rad}^2(a) \cdot \text{Rad}^2(c) > \text{Rad}^2(a)$$

karena akan dibuktikan $\mu_a \geq \text{Rad}(a)$ maka,

$$\mu_a^2 > \text{Rad}^2(a).$$

ambil akar kuadrat kedua sisi sehingga diperoleh,

$$\sqrt{\mu_a^2} > \sqrt{\text{Rad}^2(a)}$$

$$\mu_a > \text{Rad}(a)$$

disini, diperoleh hasil bahwa $\mu_a^2 > \text{Rad}^2(a)$ hal ini terjadi kontradiksi karena bertentangan dengan bentuk $\mu_a \geq \text{Rad}(a)$ dimana ada 2 kemungkinan yaitu $\mu_a = \text{Rad}(a)$ dan $\mu_a > \text{Rad}(a)$ tetapi hanya memperoleh kesimpulan $\mu_a > \text{Rad}(a)$.

Dengan demikian, diperoleh kesimpulan akhir bahwa, $\mu_a^2 + 1 < \text{Rad}^2(ac)$ sehingga bentuk pertidaksamaannya yaitu $c < \mu_a^2 + 1 < \text{Rad}^2(ac)$.

(2b.) Kasus $c = a + b$ ketika $b > 1$

dengan menggunakan **Definisi 3.2.1** maka,

$$c = a + b = \text{Rad}(a) \cdot \mu_a + \text{Rad}(b) \cdot \mu_b$$

akan diubah menjadi bentuk umum,

$$c = \text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(b) \left(\frac{\mu_a}{\text{Rad}(b)} + \frac{\mu_b}{\text{Rad}(a)} \right)$$

$$c = \text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(b) \cdot \text{Rad}(c) \left(\frac{\mu_a}{\text{Rad}(b) \cdot \text{Rad}(c)} + \frac{\mu_b}{\text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(c)} \right)$$

$$c = \text{Rad}(abc) \cdot \left(\frac{\mu_a}{\text{Rad}(b) \cdot \text{Rad}(c)} + \frac{\mu_b}{\text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(c)} \right)$$

meskipun ada kemungkinan $\mu_a > \text{Rad}(a)$ tetapi, penyebutnya adalah perkalian dari dua bilangan yaitu:

$$\text{Rad}(b) \cdot \text{Rad}(c)$$

dan

$$\text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(c).$$

sehingga,

$$\frac{\mu_a}{\text{Rad}(b) \cdot \text{Rad}(c)}$$

dan

$$\frac{\mu_b}{\text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(c)}$$

menghasilkan suatu bilangan yang relatif kecil karena nilai (penyebut > pembilang μ_a dan μ_b).

Misalkan,

$$\left(\frac{\mu_a}{\text{Rad}(b) \cdot \text{Rad}(c)} + \frac{\mu_b}{\text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(c)} \right) = l$$

karena l menghasilkan nilai yang relatif kecil kemudian dikalikan dengan $\text{Rad}(abc)$ maka, akan menghasilkan

nilai yang lebih kecil dibandingkan dengan $Rad(abc)$ sehingga dapat disimpulkan bahwa,

$$c = Rad(abc) \cdot l < Rad(abc)$$

dengan menggunakan $l < Rad(abc)$ jelas bahwa,

$$c = \left(\frac{\mu_a}{Rad(b) \cdot Rad(c)} + \frac{\mu_b}{Rad(a) \cdot Rad(c)} \right) < Rad(abc)$$

tujuannya yaitu untuk memudahkan suatu perbandingan maka, persamaan diubah kedalam bentuk yang lebih eksplisit, yaitu dengan mengalikan kedua ruas dengan $Rad(c)$ sehingga diperoleh,

$$c = \frac{\mu_a}{Rad(b)} + \frac{\mu_b}{Rad(a)} < Rad(abc) \cdot Rad(c). \quad (3.27)$$

Untuk membuktikan pertidaksamaan berlaku atau tidak, maka muncul kasus-kasus untuk menyelesaikan persamaan. Jadi, akan dibandingkan antara μ dan Radikal karena μ_a dan μ_b bisa jadi lebih kecil, sama, atau lebih besar dari radikalnya masing-masing yaitu:

i. Kasus $\mu_a = 1$ dan $\mu_b = 1$

Dengan menggunakan pertidaksamaan (3.27), substitusikan $\mu_a = \mu_b = 1$ kedalam pertidaksamaan,

$$c = \left(\frac{1}{Rad(b)} + \frac{1}{Rad(a)} \right) < Rad(abc) \cdot Rad(c) < Rad^2(abc)$$

dapat disimpulkan bahwa kasus ini terpenuhi.

ii. Kasus $\mu_a = 1$ dan $\mu_b > 1$

Karena syarat $b < a$ maka dengan menggunakan **Definisi 3.1.2**,

$$\mu_b \cdot \text{Rad}(b) < \mu_a \cdot \text{Rad}(a)$$

tujuannya yaitu akan diubah menjadi (3.27) maka, bagi kedua ruas dengan $\text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(b)$ sehingga diperoleh:

$$\frac{\mu_b \cdot \text{Rad}(b)}{\text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(b)} < \frac{\mu_a \cdot \text{Rad}(a)}{\text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(b)}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_b}{\text{Rad}(a)} < \frac{\mu_a}{\text{Rad}(b)}$$

dengan menggunakan pertidaksamaan (3.27) ,

$$c = \frac{\mu_a}{\text{Rad}(b)} + \frac{\mu_b}{\text{Rad}(a)} < \frac{\mu_a}{\text{Rad}(b)} + \frac{\mu_a}{\text{Rad}(b)}$$

subtitusikan $\mu_a = 1$ sehingga,

$$\frac{\mu_a}{\text{Rad}(b)} + \frac{\mu_a}{\text{Rad}(b)} = \frac{1}{\text{Rad}(b)} + \frac{1}{\text{Rad}(b)} = \frac{2}{\text{Rad}(b)}$$

maka diperoleh,

$$c = \frac{1}{\text{Rad}(b)} + \frac{\mu_b}{\text{Rad}(a)} < \frac{2}{\text{Rad}(b)}$$

$$< \text{Rad}(abc) \cdot \text{Rad}(c) < \text{Rad}^2(abc)$$

dapat disimpulkan bahwa kasus ini terpenuhi.

iii. Kasus $\mu_b = 1$ dan $\mu_a \leq b = \text{Rad}(b)$

Dengan menggunakan pertidaksamaan (3.27), substitusikan $\mu_b = 1$ dan $\mu_a \leq b = \text{Rad}(b)$ dengan syarat $1 \leq b$ misal ambil $b = 1$ maka substitusikan ke dalam pertidaksamaan,

$$c = \frac{\mu_a}{\text{Rad}(b)} + \frac{\mu_b}{\text{Rad}(a)} \leq \frac{\text{Rad}(b)}{\text{Rad}(b)} + \frac{1}{\text{Rad}(a)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\text{Rad}(a)}$$

maka diperoleh,

$$\frac{\mu_a}{\text{Rad}(b)} + \frac{1}{\text{Rad}(a)} \leq 1 + \frac{1}{\text{Rad}(a)}$$

$$< \text{Rad}(abc) \cdot \text{Rad}(c) < \text{Rad}^2(abc)$$

dapat disimpulkan bahwa kasus ini terpenuhi.

iv. Kasus $\mu_b = 1$ dan $\mu_a > b = \text{Rad}(b)$ diketahui syarat awal bahwa $b \geq 1$.

Jika $\mu_a > \text{Rad}(b)$ maka μ_a lebih besar dari pada $\text{Rad}(b)$ sehingga, dapat ditulis dengan:

$$\mu_a = m \cdot \text{Rad}(b) + n \quad (3.28)$$

di mana m adalah bilangan bulat $m = 1$ dan n adalah sisa pembagian dari μ_a oleh $\text{Rad}(b)$ dengan syarat $0 < n < \text{Rad}(b)$ diketahui bahwa

Definisi 3.2.1,

$$c = \mu_c \cdot \text{Rad}(c) = \mu_a \cdot \text{Rad}(a) + \mu_b \cdot \text{Rad}(b)$$

dengan menggunakan pertidaksamaan (3.28)

maka, $\mu_a = \text{Rad}(b) + n$ dan $\mu_b = 1$ substitusikan kedalam persamaan,

$$c = (\text{Rad}(b) + n) \text{Rad}(a) + 1 \text{Rad}(b)$$

$$= \text{Rad}(ab) + n \text{Rad}(a) + \text{Rad}(b)$$

dari $\mu_a = \text{Rad}(b) + n$ karena n adalah suatu bilangan bulat positif sisa pembagian jelas bahwa,

$$n < b = \text{Rad}(b)$$

maka diperoleh,

$$c < \text{Rad}(ab) + \text{Rad}(b) \cdot \text{Rad}(a) + \text{Rad}(b) = 2 \cdot \text{Rad}(ab) + \text{Rad}(b)$$

sehingga,

$$c < 2 \cdot \text{Rad}(ab) + \text{Rad}(b) < \text{Rad}(abc) \cdot \text{Rad}(c) < \text{Rad}^2(abc)$$

dengan demikian kasus ini terpenuhi.

$\mu_a \cdot \mu_b \neq 1$ (**artinya setidaknya salah satunya lebih besar dari 1**) pada kasus ini nilai μ bernilai besar, sesuai definisi bahwa μ memperhatikan pangkat sedangkan Rad tidak memperhatikan pangkat, disini nilai μ berpotensi lebih besar dibandingkan nilai Rad maka menggunakan persamaan,

$$c = \mu_c \cdot \text{Rad}(c) = \mu_a \cdot \text{Rad}(a) + \mu_b \cdot \text{Rad}(b)$$

v. Kasus $\mu_a \cdot \mu_b \neq 1$, $\mu_a < \text{Rad}(a)$, dan $\mu_b <$

$\text{Rad}(b)$

Diketahui bahwa **Definisi 3.2.1**

$$c = \mu_c \cdot \text{Rad}(c) = \mu_a \cdot \text{Rad}(a) + \mu_b \cdot \text{Rad}(b)$$

dengan menggunakan $\mu_a < \text{Rad}(a)$ dan $\mu_b < \text{Rad}(b)$ maka,

$$c < \text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(a) + \text{Rad}(b) \cdot \text{Rad}(b) = \text{Rad}^2(a) + \text{Rad}^2(b)$$

sehingga diperoleh,

$$c < \text{Rad}^2(a) + \text{Rad}^2(b) < \text{Rad}^2(ab)$$

dengan demikian kasus ini terpenuhi.

- vi. Kasus $\mu_a \cdot \mu_b \neq 1$, $\mu_a \leq \text{Rad}(a)$, dan $\mu_b \geq \text{Rad}(b)$

Diketahui bahwa **Definisi 3.2.1** yaitu,

$$c = \mu_c \cdot \text{Rad}(c) = \mu_a \cdot \text{Rad}(a) + \mu_b \cdot \text{Rad}(b)$$

jelas,

$$a + b < a \cdot b$$

$$c = \mu_a \cdot \text{Rad}(a) + \mu_b \cdot \text{Rad}(b) < \mu_a \cdot \mu_b \cdot \text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(b)$$

dengan menggunakan $\mu_a \leq \text{Rad}(a)$ maka,

$$\mu_a \cdot \text{Rad}(a) + \mu_b \cdot \text{Rad}(b) < \mu_a \cdot \mu_b \cdot \text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(b)$$

$$\leq \mu_b \cdot \text{Rad}^2(a) \cdot \text{Rad}(b) < \text{Rad}^2(ab)$$

akan diubah menjadi bentuk eksplisit

yaitu dengan membagi kedua ruas dengan $\text{Rad}^2(a) \cdot \text{Rad}(b)$ sehingga,

$$\frac{\mu_b \cdot \text{Rad}^2(a) \cdot \text{Rad}(b)}{\text{Rad}^2(a) \cdot \text{Rad}(b)} < \frac{\text{Rad}^2(abc)}{\text{Rad}^2(a) \cdot \text{Rad}(b)}$$

$$\mu_b < \text{Rad}(b) \cdot \text{Rad}^2(c)$$

sehingga

$$c \leq \mu_b < \text{Rad}(b) \cdot \text{Rad}^2(c)$$

maka syarat ini memenuhi.

akan dibuktikan syarat $\mu_b \geq \text{Rad}(b)$ memenuhi,

dimiliki bentuk pertidaksamaan yaitu:

$$\mu_b < \text{Rad}(b) \cdot \text{Rad}^2(c)$$

dengan syarat $\mu_b \geq \text{Rad}(b)$ maka menjadi,

$$\mu_b \geq \text{Rad}(b) \cdot \text{Rad}^2(c)$$

dengan menggunakan algoritma Euclid maka menjadi,

$$\mu_b = \text{Rad}(b) \cdot \text{Rad}^2(c) \cdot n + r$$

di mana, syarat $n \geq 1$ dan $0 \leq r < \text{Rad}(b) \cdot \text{Rad}^2(c)$ sehingga bentuk pertidaksamaan

menjadi,

$$\mu_b = \text{Rad}(b) \cdot \text{Rad}^2(c) \cdot 1 + r \quad (3.29)$$

sedangkan bentuk yang akan dibuktikan yaitu $\mu_b \geq \text{Rad}(b)$, dari bentuk ini dapat ditulis menjadi,

$$\mu_b = \text{Rad}(b) \cdot k + b$$

di mana, syarat $k \geq 1$ dan $0 \leq b < \text{Rad}(b)$ sehingga,

$$\mu_b = \text{Rad}(b) \cdot 1 + b \quad (3.30)$$

dengan membandingkan kedua persamaan yaitu (3.29) dan (3.30) maka,

$$\text{Rad}(b) \cdot 1 + b = \text{Rad}(b) \cdot \text{Rad}^2(c) \cdot 1 + r$$

di mana,

$$b - r = \text{Rad}(b) \cdot \text{Rad}^2(c) - \text{Rad}(b)$$

$$b - r = \text{Rad}(b)(\cdot \text{Rad}^2(c) - 1)$$

dari bentuk ini diketahui bahwa:

$$\text{Rad}(b) = b \geq 1$$

c adalah bentuk dari $c = a + b$ jelas bahwa

$$\text{Rad}^2(c) \geq 1$$

dari sini dapat disimpulkan bahwa

$\text{Rad}(b)(\cdot \text{Rad}^2(c) - 1)$ suatu bilangan positif karena,

$\text{positif} \cdot \text{positif} = \text{positif}$ sehingga jelas bahwa , b adalah suatu bilangan bulat positif yang besar dan dapat disimpulkan $b > r$ dari bentuk ini dapat disimpulkan,

$$b - r = \text{Rad}(b)(\cdot \text{Rad}^2(c) - 1)$$

$$\text{Rad}(b)(\cdot \text{Rad}^2(c) - 1) > 3 \cdot \text{Rad}(b)$$

sehingga jelas bahwa,

$$\mu_b = \text{Rad}(b) \cdot k + b > 4 \cdot \text{Rad}(b)$$

dari kedua bentuk ini $\mu_b > \text{Rad}(b)$ dan $\mu_b > \text{Rad}(b) \cdot \text{Rad}^2(c)$ diperoleh bentuk yang berbeda dengan yang akan dibuktikan yaitu $\mu_b \geq \text{Rad}(b)$ maka, syarat ini ditolak.

Sehingga untuk membuktikan bahwa $c < \text{Rad}^2(abc)$ dengan menggunakan **tanda kebalikannya** pada syaratnya yaitu $\mu_b < \text{Rad}(b)$ Dengan demikian untuk membuktikan ($c < \text{Rad}^2(abc)$) maka, kasus yang tepat adalah

$$\mu_a \cdot \mu_b \neq 1, \quad \mu_a \leq \text{Rad}(a), \quad \text{dan} \quad \mu_b < \text{Rad}(b).$$

- vii. Kasus $\mu_a \cdot \mu_b \neq 1, \quad \mu_a \geq \text{Rad}(a), \quad \text{dan} \quad \mu_b \leq \text{Rad}(b)$

Untuk kasus ini pendekatan pembuktiannya identik dengan metode sebelumnya yaitu **3f**.

viii. Kasus $\mu_a \cdot \mu_b \neq 1$, $\mu_a \geq \text{Rad}(a)$, dan $\mu_b \geq \text{Rad}(b)$

Diketahui bahwa **Definisi 3.2.1**

$$c = \mu_c \cdot \text{Rad}(c) = \mu_a \cdot \text{Rad}(a) + \mu_b \cdot \text{Rad}(b)$$

dari syarat diambil $\mu_a = \text{Rad}(a)$ dan $\mu_b = \text{Rad}(b)$ diperoleh,

$$c = a + b = \mu_a \cdot \text{Rad}(a) + \mu_b \cdot \text{Rad}(b) = \mu_a \cdot \mu_a + \mu_b \cdot \mu_b = \mu_a^2 \cdot \mu_b^2$$

jika $a + b < a \cdot b$ maka,

$$c = \mu_a \cdot \text{Rad}(a) + \mu_b \cdot \text{Rad}(b) \leq \mu_a^2 + \mu_b^2 < \mu_a^2 \cdot \mu_b^2 < \text{Rad}^2(abc)$$

dimiliki

$$\mu_a^2 \cdot \mu_b^2 < \text{Rad}^2(abc)$$

akan dibuktikan bahwa $\mu_a \geq \text{Rad}(a)$ dan $\mu_b \geq \text{Rad}(b)$ maka,

$$\mu_a^2 \cdot \mu_b^2 \geq \text{Rad}^2(abc)$$

dengan mengubah ke dalam bentuk sederhana sehingga hilangkan akar kedua sisinya yaitu,

$$\sqrt{\mu_a^2 \cdot \mu_b^2} \geq \sqrt{\text{Rad}^2(abc)}$$

maka diperoleh,

$$\mu_a \cdot \mu_b \geq \text{Rad}(abc)$$

akan dibuat menjadi bentuk ab sehingga,

$$\mu_a \cdot \text{Rad}(a) \cdot \mu_b \cdot \text{Rad}(b) \geq \text{Rad}(a) \cdot \text{Rad}(b) \text{Rad}(abc)$$

$$a \cdot b \geq \text{Rad}^2(a) \cdot \text{Rad}^2(b) \cdot \text{Rad}(c)$$

diketahui bahwa $a > b$ jelas bahwa,

$$a \cdot a > a \cdot b \geq \text{Rad}^2(a) \cdot \text{Rad}^2(b) \cdot \text{Rad}(c)$$

$$a^2 > \text{Rad}^2(ab) \cdot \text{Rad}(c)$$

agar mudah dibandingkan ubah ke dalam bentuk sederhana yaitu hilangkan akar kedua sisi,

$$\sqrt{a^2} > \sqrt{\text{Rad}^2(ab) \cdot \text{Rad}(c)}$$

sehingga diperoleh,

$$a > \text{Rad}(ab) \cdot \sqrt{\text{Rad}(c)}$$

diketahui bahwa $c = a + b$ jelas bahwa $\text{Rad}(c) > 1$ sehingga ambil,

$$a > \text{Rad}(ab) \cdot \sqrt{\text{Rad}(c)} \geq \cdot \text{Rad}(ab) \sqrt{7}$$

sehingga bentuknya menjadi,

$$a > \text{Rad}(ab) \sqrt{7}$$

jelas bahwa,

$$c > \text{Rad}(ab) \sqrt{7}$$

hal ini kontradiksi dengan bentuk yang akan dibuktikan.

Sehingga penyelesaiannya yaitu:

$$\mu_a \cdot \mu_b \neq 1, \quad \mu_a < \text{Rad}(a), \quad \text{dan} \quad \mu_b < \text{Rad}(b).$$



Berdasarkan uraian di atas maka, untuk a, b, c adalah bilangan bulat positif yang relatif prima dengan $c = a + b$ dan $1 \leq b < a$, maka, $c < \text{Rad}^2(abc)$.

Berdasarkan **Teorema 3.2.9**, diberikan contoh sebagai berikut

Contoh 3.2.10

Misal nilai $a = 8$, $b = 5$, dan $c = a + b$ dengan $c = a + b$ di mana $1 \leq b < a$ akan dibuktikan penyelesaian kasus $c < \text{Rad}^2(abc)$.

Diketahui nilai $a = 8$, $b = 5$, dan $c = 8 + 5$ maka,

$$\text{Rad}(a) = \text{Rad}(8) = 2^3 = 2$$

$$\text{Rad}(b) = \text{Rad}(5) = 5$$

$$\text{Rad}(c) = \text{Rad}(13) = 13$$

$$\text{Rad}(abc) = \text{Rad}(a)\text{Rad}(b)\text{Rad}(c) = 2 \times 5 \times 13 = 130$$

$$\text{Rad}^2(abc) = \text{Rad}(abc)\text{Rad}(abc) = 130 \times 130 = 16.900$$

Jika $c < \text{Rad}(abc)$ jelas bahwa,

$$c < \text{Rad}(abc) < \text{Rad}^2(abc)$$

$$13 < 130 < 16.900$$

maka $c < \text{Rad}^2(abc)$ terbukti.

Teorema 3.2.11 (David Masser, Joseph Oesterlé & Abdelmajid Ben Hadj Salem; 2019)

Untuk setiap $\epsilon > 0$ ada $K(\epsilon) > 0$ sedemikian sehingga jika a, b, c adalah bilangan bulat relatif prima dengan $c = a + b$ maka:

$$c < K(\epsilon) \cdot \text{Rad}(abc)^{1+\epsilon}$$

dengan K adalah sebuah konstanta yang bergantung pada ϵ yaitu:

$$K(\epsilon) = 6^{1+\epsilon} \cdot e^{\left(\frac{1}{\epsilon^2} - \epsilon\right)}$$

Bukti.

Misalkan $R = \text{Rad}(abc)$.

1. Kasus $\epsilon \geq 1$

Dengan menggunakan **Teorema 3.2.9** yaitu $c < \text{Rad}^2(abc)$ jelas $c < R^2$ dengan ketentuan untuk semua $\epsilon \geq 1$ misal $\epsilon = 1$ maka ada $K(\epsilon) = 6^{1+\epsilon} \cdot e^{\left(\frac{1}{\epsilon^2} - \epsilon\right)}$ di mana,

$$R^2 \leq R^{1+\epsilon}$$

sehingga diperoleh,

$$c < R^2 \leq R^{1+\epsilon} < K(\epsilon) \cdot R^{1+\epsilon}$$

Berdasarkan kasus ini, Konjektur ABC terbukti benar.

2. Kasus $\epsilon < 1$

(2a) Kasus $c < R$

Dengan $\epsilon < 1$ ada $K(\epsilon) = 6^{1+\epsilon} \cdot e^{\left(\frac{1}{\epsilon^2} - \epsilon\right)}$

jelas bahwa,

$$c < R < R^2 \leq R^{1+\epsilon} < K(\epsilon)R^{1+\epsilon}$$

Berdasarkan kasus ini, Konjektur ABC terbukti benar.

(2b) Kasus $c > R$

Diketahui bahwa: $c < K(\epsilon)R^{1+\epsilon}$, dengan $0 < \epsilon < 1$. Pernyataan tersebut tidak terpenuhi karena akan membuktikan $c > R$ ini adalah bentuk kasus kontradiksi, maka terdapat suatu $\epsilon_0 \in [0, 1]$ sedemikian sehingga $c = a + b$ memenuhi, $c > R$ dan $c \geq K(\epsilon_0) \cdot R^{1+\epsilon_0}$ dimana $K(\epsilon) = 6^{1+\epsilon} \cdot e^{\left(\frac{1}{\epsilon^2}-\epsilon\right)}$.

Dengan menggunakan persamaan $c \geq K(\epsilon_0) \cdot R^{1+\epsilon_0}$ maka,

$$c \geq K(\epsilon_0) \cdot R^{1+\epsilon_0}$$

kalikan kedua ruas dengan $R^{1-\epsilon_0}$, diperoleh:

$$R^{1-\epsilon_0} \cdot c \geq K(\epsilon_0) \cdot R^{1-\epsilon_0} R^{1+\epsilon_0},$$

berdasarkan **Teorema 3.2.9** yaitu $c < Rad^2(abc)$ maka:

$$R^{1-\epsilon_0} \cdot c \geq K(\epsilon_0) \cdot R^2 > K(\epsilon_0) \cdot c$$

(di sini persamaan dibandingkan dengan teorema sebelumnya karena akan mengambil bentuk

kontradiksinya) sehingga,

$$R^{1-\epsilon_0} \cdot c > K(\epsilon_0) \cdot c$$

bagi kedua ruas dengan c maka diperoleh,

$$R^{1-\epsilon_0} > K(\epsilon_0)$$

Karena $c > R$ sehingga,

$$c^{1-\epsilon_0} > R^{1-\epsilon_0} > K(\epsilon_0)$$

$$\Leftrightarrow c^{1-\epsilon_0} > K(\epsilon_0), \quad (3.31)$$

maka,

$$c > (K(\epsilon_0))^{\frac{1}{1-\epsilon_0}}.$$

Dengan demikian, nilai c , R , dan ϵ_0 , tidak memenuhi persamaan $c \geq R^{1+\epsilon_0} K(\epsilon_0)$ di mana hasil yang diperoleh bertentangan dengan teorema.

■

Berdasarkan uraian di atas maka, untuk setiap $\epsilon > 0$ ada $K(\epsilon) > 0$ sedemikian sehingga jika a, b, c adalah bilangan bulat relatif prima dengan $c = a + b$ maka:

$$c < K(\epsilon) \cdot \text{Rad}(abc)^{1+\epsilon}$$

dengan K adalah sebuah konstanta yang bergantung pada ϵ yaitu:

$$K(\epsilon) = 6^{1+\epsilon} \cdot e^{\left(\frac{1}{\epsilon^2} - \epsilon\right)}.$$

Berdasarkan **Teorema 3.2.11** , diberikan contoh sebagai berikut

Contoh 3.2.12

Misalkan $a = 8$, $b = 5$, dengan $c = a + b$ adalah bilangan bulat positif yang relatif prima. Maka, untuk setiap $\epsilon > 0$ ada konstanta $K(\epsilon)$, di mana $K(\epsilon)$ adalah sebuah konstanta yang bergantung pada ϵ sebagai berikut:

$$K(\epsilon) = 6^{1+\epsilon} \cdot e^{\left(\frac{1}{\epsilon^2}-\epsilon\right)}$$

akan dibuktikan bahwa,

$$c < K(\epsilon) \cdot \text{Rad}(abc)^{1+\epsilon}$$

Diketahui nilai $a = 8$, $b = 5$, dan $c = a + b = 8 + 5 = 13$ maka,

$$\text{Rad}(a) = \text{Rad}(8) = 2^3 = 2$$

$$\text{Rad}(b) = \text{Rad}(5) = 5$$

$$\text{Rad}(c) = \text{Rad}(13) = 13$$

$$\text{Rad}(abc) = \text{Rad}(a)\text{Rad}(b)\text{Rad}(c) = 2 \times 5 \times 13 = 130$$

$$\text{Rad}^2(abc) = \text{Rad}(abc)\text{Rad}(abc) = 130 \times 130 = 16.900$$

1. Kasus: $\epsilon \geq 1$

Dengan menggunakan hasil $c < \text{Rad}^2(abc)$, diperoleh untuk semua $\epsilon \geq 1$ dengan menggunakan $\epsilon = 1$ ada $K(\epsilon) = 6^{1+\epsilon} \cdot e^{\left(\frac{1}{\epsilon^2}-\epsilon\right)}$ yaitu $K(\epsilon) = 6^{1+1} \cdot e^{\left(\frac{1}{1^2}-1\right)} = 36$ dengan,

$$c < K(\epsilon) \cdot \text{Rad}(abc)^{1+\epsilon},$$

maka,

$$13 < 36 \times (130)^{1+1},$$

$$13 < 36 \times 16.900 = 608.400$$

$$13 < 608.400$$

Berdasarkan kasus ini, Konjektur ABC terbukti benar.

2. Kasus: $\epsilon < 1$ dengan $c < R$

Dengan $\epsilon < 1$ ada $K(\epsilon) = 6^{1+\epsilon} \cdot e^{\left(\frac{1}{\epsilon^2} - \epsilon\right)}$ misal $\epsilon = 0,5$ maka nilai

$$K(\epsilon) = 6^{1+0,5} \cdot e^{\left(\frac{1}{0,5^2} - 0,5\right)} = 486.591.810$$

dengan,

$$c < K(\epsilon) \cdot \text{Rad}(abc)^{1+\epsilon},$$

maka,

$$13 < 486.591.810 \times 130^{1+0,5}$$

$$13 < 721.240.030$$

Berdasarkan kasus ini, Konjektur ABC terbukti benar.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Konjektur merupakan pernyataan matematika yang kebenarannya belum dibuktikan secara formal, namun penerapannya memenuhi pada berbagai kasus. Dari pembahasan kajian ini dapat disimpulkan bahwa,

1. Konjektur ABC memperkuat terhadap Teorema Terakhir Fermat, terutama dalam kasus $N \geq 6$, karena konjektur ini berhasil membuktikan bahwa tidak ada solusi bentuk persamaan $A^N + B^N = C^N$. Penyertaan contoh dalam kajian ini memberikan gambaran yang memperkuat pemahaman terhadap hubungan antara konjektur, bilangan prima, dan pembatasan solusi dalam teori bilangan.
2. Konjektur ABC memberikan batasan terhadap solusi dari persamaan $a + b = c$ dengan menggunakan konsep radikal, yaitu hasil kali semua bilangan prima berbeda yang membagi a, b , dan c konsep ini menekankan pentingnya peran bilangan prima dalam struktur bilangan bulat.

B. Saran

Dalam skripsi ini, pembahasan masih terbatas pada ruang lingkup judul Konjektur ABC dan Sifat-Sifatnya, di mana hanya dua sifat utama yang dikaji, yaitu: hubungan Konjektur ABC dengan pembuktian Teorema Terakhir Fermat, serta keterkaitannya

dengan faktor prima. Oleh karena itu, peneliti menyarankan agar penelitian selanjutnya dapat memperluas kajian dengan menelusuri dan menambahkan teorema-teorema lain yang berkaitan dengan Konjektur ABC, sehingga sifat-sifat lain yang mungkin terkandung dalam konjektur ini dapat ditemukan dan dianalisis secara lebih mendalam.

DAFTAR PUSTAKA

- Apostol, Tom M., 1983. *Introduction to Analytic Number Theory*. New York: John Wiley & sons, 1983 .
- Ben Hadj Salem, A., 2018. *Fermat's Last Theorem A Proof of the ABC Conjecture*. Preprint. Diakses dari: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.33283.76329>
- Ben Hadj Salem, A., 2019. *A Complete Proof of the ABC Conjecture: The End of The Mystery*. Preprint. Diakses dari: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.24732.74881>
- Ben Hadj Salem, A., 2019. *A Final Proof of The abc Conjecture*. Preprint. Diakses dari: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.11213.38881>
- Edwards, H. M., 1996. *Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*. New York: Springer Science & Business Media.
- Munir, R., 2004. *Teori Bilangan*. Bahan Kuliah ke-3 IF5054 Kriptografi. Departemen Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung, 2004.
- Nurhardiani dkk., 2018. *Pengantar Teori Bilangan*. Insan Madani Institute.
- Nurrahman, A., & Karim, A., 2018. *Analisis Kemampuan Pembuktian Matematika pada Matakuliah Teori Bilangan*. 4(2): 21-29.

Sheppard, J., 2016. *The ABC Conjecture and Its Applications*.
Master's thesis, Kansas State University, Department of
Mathematics.

Sukirman, 2006. *Pengantar Teori Bilangan*. Yogyakarta: Hanggar
Kreator.

Sukirman, 2013. *Teori Bilangan*. Yogyakarta: UNY Press.

Sutarto dkk., 2018. *Global conjecturing process in pattern
generalization problem*.

RIWAYAT HIDUP**A. Identitas Diri**

- 1. Nama : Faizatul Ulya
- 2. Tempat & Tgl. Lahir : Rembang, 13 Maret 2003
- 3. Alamat Rumah : Ds. Sumbergirang, RT. 003/ RW. 003,
Kec. Lasem, Kab. Rembang
- 4. Hp : 089624324300
- 5. Email : ulyafaizatul13032003@gamil.com

B. Riwayat Pendidikan

- 1. Pendidikan Formal
 - a. SDN 3 Sumbergirang
 - b. MTsN Lasem
 - c. MAN 2 Rembang
 - d. UIN Walisongo Semarang
- 2. Pendidikan Non-Formal
 - a. MI An-Nashriyyah
 - b. Ma'had Ulil Albab Lilbanat

Semarang, 11 Juni 2025



Faizatul Ulya

NIM. 2108046077