

ANALISIS DINAMIK MODEL PREDATOR-PREY DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE IV DAN PEMANENAN PREDATOR-PREY

SKRIPSI

**Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu MATEMATIKA**



Oleh : LIYA TSANYYATUL KHISHOL
NIM : 2108046083

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2025**

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : LIYA TSANYYATUL KHISHOL
NIM : 2108046083
Jurusan/Program Studi : MATEMATIKA/ MATEMATIKA

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

ANALISIS DINAMIK MODEL PREDATOR-PREY DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE IV DAN PEMANENAN PREDATOR-PREY

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 26 Mei 2025
Pembuat pernyataan,



LIYA TSANYYATUL KHISHOL
NIM : 2108046083



KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **Analisis Dinamik Model Predator-Prey dengan Fungsi Respon Holling Tipe IV dan Pemanenan Predator-Prey**

Penulis : LIYA TSANYATUL KHISHOL

NIM : 2108046083

Jurusan : MATEMATIKA

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu MATEMATIKA.

Semarang, 10 Juni 2025

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

Emy Siswanah, M.Sc.

NIP : 19870202 201101 2 014

Penguji II,

Yulia Romadiastri, S.Si., M.Sc.

NIP : 19810715 200501 2 008

Penguji III,

Agus Wayan Yulianto, M.Sc.

NIP : 19890716 201903 1 007

Penguji IV,

Yolanda Norasia, M.Si.

NIP : 19940923 201903 2 011

Pembimbing I,

Zulaikha, M.Si.

NIP : 19920409 201903 2 027

NOTA DINAS

Semarang, 26 Mei 2025

Yth. Ketua Program Studi MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : Analisis Dinamik Model Predator-Prey dengan
Fungsi Respon Holling Tipe IV dan Pemanenan
Predator-Prey
Nama : LIYA TSANYATUL KHISHOL
NIM : 2108046083
Jurusan : MATEMATIKA

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqosah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,



Zulaikha, M.Si.

NIP : 19920409 201903 2 027

ABSTRAK

Penelitian ini membahas mengenai analisis dinamik model predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey. Tujuan penelitian ini adalah memahami dinamika populasi predator-prey dalam ekosistem yang dipengaruhi oleh kedua faktor tersebut. Hasil analisis menunjukkan bahwa ada empat titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium kepunahan kedua populasi (E_0), titik ekuilibrium bebas predator (E_1), titik ekuilibrium bebas prey (E_2), dan titik ekuilibrium kedua populasi hidup bersama (E_3). Syarat eskistensi pada titik ekuilibrium bebas predator, titik ekuilibrium bebas prey, dan titik ekuilibrium kedua populasi hidup bersama selalu eksis dengan kondisi-kondisi tertentu. Berdasarkan hasil analisis yang diperoleh titik ekuilibrium (E_0), (E_1), (E_2), dan, (E_3) bersifat stabil asimtotik lokal dengan syarat tertentu. Dari hasil simulasi numerik diperoleh hasil yang sesuai dengan analitik.

Kata kunci : Model predator-prey, Holling tipe IV, Pemanenan, Titik ekuilibrium, Analisis kestabilan lokal

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat, kesehatan, dan kemudahan yang diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Analisis Dinamik Model Predator-Prey dengan Fungsi Respon Holling Tipe IV dan Pemanenan Predator-Prey"** ini tepat pada waktunya. Skripsi ini ditulis untuk memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Matematika pada Program studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.

Dalam penyelesaian studi dan penulisan skripsi ini, penulis banyak mendapatkan bantuan baik pengajaran, dukungan, bimbingan dari berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Musahadi, M. Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang;
2. Ibu Any Muanalifah, M.Si., Ph.D., dan Bapak Prihadi Kurniawan, M.sc., selaku Ketua dan Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang;
3. Ibu Zulaikha M.Si., selaku dosen pembimbing yang telah memberikan arahan dan bimbingan dengan penuh kesabaran, ketelitian, dan ketulusan dalam menyelesaikan skripsi ini;
4. Ibu Zulaikha, M.Si., selaku wali dosen yang telah memberikan

bimbingan kepada penulis selama menjadi mahasiswa Progam Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang;

5. Segenap Dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang atas ilmu yang telah diberikan selama penulis menempuh pendidikan S1;
6. Kedua orang tua tercinta, Bapak Mat Sholeh dan Ibu Nuryati, yang dengan tulus dan tanpa lelah telah mencurahkan kasih sayang, doa, serta dukungan baik secara moral maupun materi. Setiap langkah dalam perjalanan pendidikan ini tidak lepas dari pengorbanan, kesabaran, dan cinta kalian yang tiada henti. Terima kasih telah menjadi sumber kekuatan terbesar dalam hidup penulis;
7. Ilham Adil Wicaksono, adik tersayang, terima kasih selalu hadir dengan semangat dan tawa yang mencerahkan hari-hari penulis. Kehadiranmu telah memberi warna dan semangat sepanjang perjalanan studi ini;
8. Keluarga besar dari pihak Bapak dan Ibu yang selalu memberikan dukungan, doa, dan perhatian yang berarti selama masa studi penulis;
9. Teman satu bimbingan, Nila Fadlilatul Ilma, Achla Fauziyah, dan Khoirunnisa Kusumaningsih. Terima kasih atas kebersamaan, semangat, dan bantuan yang telah diberikan selama proses penulisan skripsi ini;
10. Sahabat-sahabat terkasih Anggi Anissa Rahma, Anggun Anissa Rahma, Aprilia Normadyaningrum, Eka Novita

Ardellia, dan terkhusus Muchamad Khoirul Anam, terima kasih atas segala bentuk dukungan dan pengertian selama proses penyusunan skripsi ini. Kehadiran dan motivasi dari kalian sangat membantu penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini;

11. Teman-teman seperjuangan kelas Matematika C angkatan 2021, terima kasih atas kebersamaan, kerja sama, kenangan berharga sepanjang perjalanan studi ini, dan menjadi teman penulis dari awal semester hingga saat ini;
12. Seluruh pihak yang telah membantu dalam proses penyelesaian skripsi ini, baik secara langsung maupun tidak langsung, yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Terakhir penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih banyak kekurangan dan jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran demi memperbaiki skripsi ini. Akhir kata mohon maaf atas kesalahan dan kekurangannya.

Semarang, 26 Mei 2025

Penulis,

Liya Tsanyyatul Khishol

NIM : 2108046083

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iii
NOTA PEMBIMBING I	iv
ABSTRAK	v
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	6
1.3. Tujuan Penelitian	7
1.4. Batasan Masalah	7
1.5. Manfaat Penelitian	8
BAB II LANDASAN PUSTAKA	9
2.1. Persamaan Diferensial	9
2.2. Sistem Dinamik	12
2.1.1. Sistem Otonomus	13
2.2.2. Sistem Non Otonomus	15
2.3. Analisis Dinamik	16
2.1.1. Titik Ekuilibrium	16
2.2.2. Analisis Kestabilan Lokal Sistem Otonomus ..	18
2.4. Kriteria Routh-Hurwitz	29
2.5. Aturan Tanda Descartes	31
2.6. Metode Runge-Kutta	35
2.7. Model Matematika	39
2.1.1. Model Pertumbuhan Eksponensial	41
2.2.2. Model Pertumbuhan Logistik	43
2.3.3. Model Predator-Prey	44

2.4.4. Fungsi Respon	47
2.5.5. Pemanenan	51
2.6.6. Biomassa	53
2.8. Penelitian Terdahulu	54
BAB III Metodologi Penelitian	57
3.1. Metode Penelitian	57
3.2. Langkah-Langkah Penelitian	57
3.3. Alur Penelitian	59
BAB IV PEMBAHASAN	60
4.1. Model Matematika Predator-Prey dengan Fungsi Respon Holling Tipe IV dan Pemanenan Predator-Prey ..	60
4.2. Analisis Model	65
4.3. Titik Ekuilibrium Model Matematika Predator-Prey dengan Fungsi Respon Holling Tipe IV dan Pemanenan Predator-Prey	72
4.1.1. Titik Ekuilibrium Kepunahan Kedua Populasi	74
4.2.2. Titik Ekuilibrium Bebas Predator	74
4.3.3. Titik Ekuilibrium Bebas Prey	75
4.4.4. Titik Ekuilibrium Kedua Populasi Hidup Bersama	76
4.4. Analisis Kestabilan Lokal	85
4.1.1. Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Kepunahan Kedua Populasi	85
4.2.2. Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Bebas Predator	87
4.3.3. Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Bebas Prey	89
4.4.4. Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Kedua Populasi Hidup Bersama	91
4.5. Simulasi Numerik Model Matematika Predator-Prey dengan Fungsi Respon Holling Tipe IV dan Pemanenan Predator-Prey	98
4.1.1. Simulasi Titik Ekuilibrium Kepunahan Kedua Populasi	98
4.2.2. Simulasi Titik Ekuilibrium Bebas Predator .	102
4.3.3. Simulasi Titik Ekuilibrium Bebas Prey	106

4.4.4. Simulasi Titik Ekuilibrium Kedua Populasi Hidup Bersama	110
BAB V PENUTUP	117
5.1. Kesimpulan	117
5.2. Saran	119
DAFTAR PUSTAKA	120
Lampiran-lampiran	127

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul	Halaman
Tabel 2.1	Kriteria kestabilan dari titik ekuilibrium	27
Tabel 2.2	Persamaan dan perbedaan dengan penelitian terdahulu	54
Tabel 4.1	Variabel model matematika predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey	61
Tabel 4.2	Parameter model matematika predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey	61
Tabel 4.3	Kemungkinan solusi persamaan (4.20) berdasarkan aturan tanda Descartes	82
Tabel 4.4	Kemungkinan eksistensi solusi N^* berdasarkan aturan tanda Descartes pada persamaan (4.20)	84
Tabel 4.5	Syarat kestabilan titik ekuilibrium sistem persamaan (4.3)	97
Tabel 4.6	Nilai parameter titik ekuilibrium kepunahan kedua populasi	98
Tabel 4.7	Nilai parameter titik ekuilibrium bebas predator	102
Tabel 4.8	Nilai parameter titik ekuilibrium bebas prey	106

Tabel 4.9	Nilai parameter titik ekuilibrium kedua populasi hidup bersama	110
-----------	--	-----

DAFTAR GAMBAR

Lampiran	Judul	Halaman
Gambar 2.1	Langkah-langkah pemodelan matematika	40
Gambar 3.1	Diagram alir tahapan penelitian	59
Gambar 4.1	Kepadatan populasi predator-prey	100
Gambar 4.2	Kepadatan populasi prey	100
Gambar 4.3	Kepadatan populasi predator	101
Gambar 4.4	Kepadatan populasi predator-prey	104
Gambar 4.5	Kepadatan populasi prey	104
Gambar 4.6	Kepadatan populasi predator	105
Gambar 4.7	Kepadatan populasi predator-prey	108
Gambar 4.8	Kepadatan populasi prey	108
Gambar 4.9	Kepadatan populasi predator	109
Gambar 4.10	Kepadatan populasi predator-prey	115
Gambar 4.11	Kepadatan populasi prey	115
Gambar 4.12	Kepadatan populasi predator	116

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1	Perhitungan aturan tanda descartes untuk menentukan banyaknya akar positif 127
Lampiran 2	Perhitungan manual untuk mencari nilai A_2 163
Lampiran 3	Hasil iterasi sistem persamaan (4.3) berdasarkan metode Runge-Kutta menggunakan MATLAB R2013a 166
Lampiran 4	Pembuktian kestabilan titik ekuilibrium model predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey 174
Lampiran 5	Program MATLAB R2013a model predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey. 186

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Ekologi berasal dari bahasa Yunani yaitu *oikos* (tempat tinggal) dan *logos* (ilmu pengetahuan), yang mempelajari keterkaitan antara makhluk hidup dengan lingkungannya (Khaerus dan Indra, 2022). Salah satu aspek lingkungan hidup adalah interaksi antar unsur baik makhluk hidup maupun benda mati, yang membentuk ekosistem. Ekosistem melibatkan hubungan antara manusia dan makhluk hidup lain, seperti tumbuhan, hewan, serta lingkungan di sekitarnya (Siahaan, 2004).

Di dalam ekosistem, makhluk hidup dan lingkungannya berinteraksi untuk menjaga keseimbangan dan kelangsungan hidup. Salah satu bentuk interaksi ini adalah model predator-prey, yang menggambarkan hubungan antara mangsa dan pemangsa. Salah satu contoh interaksi dalam ekosistem ialah pemangsaan (*predasi*), di mana pemangsa (predator) sebagai spesies yang memakan dan mangsa (prey) sebagai spesies yang dimakan (Ummah dan Abadi, 2013). Interaksi predator dan prey bertujuan menjaga kestabilan populasi dalam ekosistem. Predator membantu mengontrol jumlah prey agar tidak merusak rantai makanan, sementara prey menyediakan sumber makanan bagi predator untuk bertahan hidup (Mahmudah dan Rifai, 2020).

Konsep keseimbangan ini juga tercermin dalam ajaran agama, sebagaimana firman Allah SWT dalam Al-Qur'an Surat Ar-Rahman (55:7-9), bahwa Allah telah menciptakan keseimbangan di alam dan memerintahkan kita untuk menjaga keseimbangan tersebut.

وَالسَّمَاءَ رَفَعَهَا وَوَضَعَ الْمِيزَانَ ﴿٧﴾ أَلَّا تَطْغَوْا فِي الْمِيزَانِ ﴿٨﴾ وَأَقِيمُوا الْوَزْنَ
بِالْقِسْطِ وَلَا تُخْسِرُوا الْمِيزَانَ ﴿٩﴾

Artinya: "Dan langit telah ditinggikan-Nya dan Dia ciptakan keseimbangan, agar kamu jangan merusak keseimbangan itu. Dan tegakkanlah keseimbangan itu dengan adil dan janganlah kamu mengurangi keseimbangan itu."

Penafsiran Ibnu Kathir terhadap ayat ini menunjukkan bahwa manusia harus menjaga keseimbangan alam, termasuk hubungan predator dan prey untuk menjaga kestabilan ekosistem. Tafsir ini menegaskan bahwa merusak keseimbangan ekosistem berarti melanggar hukum alam dan perintah Allah untuk menjaga ciptaan-Nya (Abdullah dan Abdurrahman, 2004).

Untuk memahami dinamika interaksi predator-prey, dikembangkan model matematika dengan fungsi respon yang menggambarkan laju pemangsaan predator terhadap prey. Salah satunya adalah konsep fungsi respon yang diperkenalkan oleh C.S. Holling pada tahun 1965. Holling mengklasifikasikan fungsi respon ke dalam tiga tipe, yaitu tipe I, tipe II, dan tipe III. Masing-masing tipe menunjukkan pola pemangsaan yang berbeda, yang menggambarkan bagaimana predator menyesuaikan diri dengan perubahan populasi prey dalam berbagai kondisi ekosistem (Huang dan Xiao, 2004).

Namun, dalam kondisi tertentu, seperti hewan yang hidup berkelompok, seiring bertambahnya populasi prey, perlindungan terhadap populasi prey juga meningkat dan pemangsaan predator terhadap prey menurun. Oleh karena itu, Andrews (1968) mengusulkan fungsi respon Monod-Haldane yang dikenal dengan

fungsi respon Holling tipe IV. Fungsi respon ini menggambarkan situasi di mana tingkat perlindungan kelompok prey meningkat akibat bertambahnya populasi prey. Akibatnya, laju konsumsi predator terhadap prey menurun.

Salah satu fenomena nyata yang mencerminkan interaksi predator-prey dapat diamati pada hubungan antara ikan buntal sebagai predator dan kepiting sebagai prey. Ketika populasi kepiting meningkat, individu-individu dalam populasi cenderung membentuk kelompok atau bersembunyi dalam habitat yang melindungi mereka dari serangan ikan buntal. Perilaku ini dikenal sebagai mekanisme pertahanan kelompok. Dengan adanya perlindungan kelompok, laju pemangsaan ikan buntal terhadap kepiting tidak terus meningkat secara proporsional dengan jumlah prey. Bahkan, ketika jumlah prey sangat banyak, predator mengalami kesulitan dalam memangsa karena adanya efek kejenuhan dan kemampuan persembunyian prey.

Selain interaksi alami, terdapat terlibatan manusia melalui kegiatan pemanenan terhadap populasi predator maupun prey, baik untuk kepentingan ekonomi maupun pelestarian sumber daya alam (Didiharyono, 2016). Namun, jika pemanenan dilakukan secara berlebihan dapat merusak ekosistem dan mengancam kelangsungan hidup spesies, sehingga pemanenan harus dilakukan secara hati-hati untuk menjaga ekosistem serta sumber daya dapat digunakan secara berkelanjutan (Kumar dan Poonia, 2023).

Berbagai peneliti telah mengembangkan model predator-prey yang mempertimbangkan fungsi respon dan pemanenan. (Kumar dan Poonia, 2023) membahas analisis dinamik model predator-prey dengan menggunakan fungsi respon Holling tipe III dan strategi pemanenan optimal. Hasil penelitian menunjukkan bahwa

semua titik kesetimbangan dalam model tersebut stabil secara asimtotik dengan syarat tertentu, dan kestabilan ekosistem sangat dipengaruhi oleh intensitas pemanenan.

Penelitian yang dilakukan oleh (Sirisubtawee et al., 2021) tentang dampak strategi kontrol impulsif serta perilaku anti-predator dalam sistem predator-prey dengan fungsi respon Holling Tipe IV. Hasil penelitian menunjukkan bahwa populasi predator dan prey bisa mengalami kepunahan atau kelangsungan hidup tergantung pada interval waktu kontrol impulsif. Fungsi respon Holling Tipe IV efektif dalam menggambarkan dinamika pemangsaan secara realistis, termasuk efek kejenuhan predator dan mekanisme pertahanan kelompok prey pada kepadatan tinggi. Selain itu, sistem dapat mengalami bifurkasi, yang menunjukkan potensi munculnya perilaku dinamis yang kompleks dalam interaksi populasi.

Penelitian yang dilakukan oleh (Pusawidjayanti, Asmianto & Kusumasari, 2021) membahas analisis dinamik model predator-prey dengan menggunakan fungsi respon Holling tipe II, pertahanan prey, dan pemanenan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa semua titik kesetimbangan dalam model tersebut stabil secara asimtotik dengan syarat tertentu. Jika laju pertumbuhan prey menurun, maka semua populasi dapat punah pada titik kesetimbangan yang stabil. Sebaliknya, predator dapat punah pada titik kesetimbangan yang stabil jika laju pertumbuhan predator melebihi suatu nilai tertentu.

Sementara itu, (Guin et al., 2020) menganalisis model dengan respon fungsional Beddington–DeAngelis dan pemanenan prey. Di mana pemanenan dapat mempengaruhi keseimbangan populasi dalam suatu ekosistem. Selain itu, dengan adanya

rencana pemanenan yang tepat, populasi predator dan prey dapat tetap stabil, sehingga berkontribusi pada pelestarian ekosistem. Selanjutnya, penelitian oleh (Ghosh, Majumdar, & Ghosh, 2020) mengembangkan model dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator non-linier. Hasil penelitian menunjukkan bahwa keseimbangan antara predator dan prey dipengaruhi oleh faktor efisiensi konversi prey menjadi predator serta tingkat pemanenan predator, di mana perubahan kecil dalam faktor-faktor ini dapat menyebabkan perubahan yang signifikan terhadap keseimbangan ekosistem.

Di berbagai bidang, model matematika dapat digunakan untuk menggambarkan suatu situasi dunia nyata dan dapat digunakan sebagai penyelesaian masalah dalam situasi dunia nyata (Kurniawati dan Rosyidi, 2019). Pada model matematika akan dilakukan analisis dinamik untuk menggambarkan dan menganalisis bagaimana perilaku sistem berubah seiring waktu. Dengan menggunakan analisis dinamik, dapat dipahami bagaimana interaksi antara berbagai elemen dalam sistem dinamik, memprediksi perilaku sistem di masa depan, dan menentukan solusi yang lebih tepat (Arnold, 1992).

Dalam konteks ini, model matematika juga berperan penting dalam ekologi. Misalnya, beberapa prey memiliki kemampuan pertahanan yang dapat mempengaruhi interaksi prey dengan predator. Hubungan antara populasi predator dan prey dapat dimodelkan dengan menerapkan fungsi respon Holling tipe IV, fungsi ini menunjukkan bahwa tingkat predasi tidak hanya ditentukan oleh jumlah prey, namun juga dipengaruhi oleh jumlah predator serta adanya perlindungan lingkungan yang membatasi interaksi antara predator dan prey (Haque, 2011).

Dengan menerapkan fungsi respon Holling tipe IV, dapat dipahami bagaimana faktor-faktor seperti kemampuan pertahanan prey dan upaya perlindungan lingkungan mempengaruhi dinamika pemangsaan serta keseimbangan ekosistem secara keseluruhan (Huang dan Xiao, 2004).

Berdasarkan penelitian terdahulu, penulis memodifikasi model predator-prey penelitian Kumar dan Poonia (2023) dengan menerapkan fungsi respon Holling tipe IV seperti pada penelitian (Ghosh, Majumdar, & Ghosh, 2020). Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk membahas dan mempelajari Analisis Dinamik Model *Predator-Prey* dengan Fungsi Respon Holling Tipe IV dan Pemanenan *Predator-Prey*.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan, maka permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana konstruksi model matematika predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey ?
2. Bagaimana menentukan titik ekuilibrium dan kestabilan lokal titik ekuilibrium dari model matematika predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey ?
3. Bagaimana interpretasi hasil simulasi numerik model matematika predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey ?

1.3. Tujuan Penelitian

Dengan merujuk pada permasalahan di atas, tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkonstruksi model matematika predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey.
2. Menentukan titik ekuilibrium serta kestabilan lokal titik ekuilibrium dari model matematika predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey.
3. Menginterpretasi hasil simulasi numerik model matematika predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey.

1.4. Batasan Masalah

1. Analisis pada penelitian ini diarahkan pada modifikasi model Kumar dan Poonia (2023).
2. Diasumsikan populasi predator dan prey tumbuh mengikuti model pertumbuhan logistik, yaitu laju pertumbuhan populasi meningkat seiring waktu namun terbatas oleh daya dukung lingkungan.
3. Pemanenan dilakukan oleh manusia pada populasi predator dan prey.
4. Fungsi respon yang digunakan untuk predator dan prey adalah fungsi respon Holling tipe IV.

1.5. Manfaat Penelitian

Penelitian ini memiliki manfaat-manfaat sebagai berikut:

1. Menambah wawasan dan pengetahuan dalam bidang matematika khususnya pada model matematika predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey.
2. Sebagai bahan referensi untuk penelitian selanjutnya yang berhubungan dengan model matematika predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

2.1. Persamaan Diferensial

Definisi 2.1.1 (Ross, 1984)

Persamaan diferensial (differential equation) ialah persamaan yang memuat paling sedikit satu turunan atau diferensial dari suatu fungsi yang belum diketahui. Persamaan ini melibatkan variabel terikat dan turunannya terhadap variabel bebas.

Dalam persamaan diferensial, istilah tingkat (orde) merujuk pada turunan tertinggi yang terdapat dalam persamaan tersebut (Sipayung, 2018). Suatu persamaan diferensial disebut persamaan diferensial orde pertama jika hanya mempunyai turunan pertama, dan persamaan diferensial orde dua jika turunan tertingginya merupakan turunan kedua, dan seterusnya (Lebl, 2019).

Persamaan diferensial dapat dikelompokkan menjadi dua jenis utama berdasarkan jumlah variabel bebas yang terlibat, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Suatu persamaan diferensial adalah Persamaan Diferensial Biasa (PDB) jika hanya terdapat satu variabel bebas yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel terikat (Ross, 1984).

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad (2.1)$$

dengan x adalah variabel bebas, $y(x)$ adalah variabel terikat dan $\frac{d^ny}{dx^n}$ adalah turunan ke- n dari y terhadap x .

Contoh 2.1.2

Berikut ini contoh untuk sistem persamaan diferensial biasa:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 3x = 0 \quad (2.2)$$

Sistem (2.2) disebut persamaan diferensial biasa orde dua karena hanya terdapat satu variabel bebas yang memuat turunan biasa dari satu variabel terikat dengan variabel t adalah variabel bebas, sedangkan variabel x adalah variabel terikat.

Berdasarkan linearitasnya, sistem persamaan diferensial biasa dibagi menjadi dua jenis, yaitu:

a. Persamaan Diferensial Biasa Linear

Definisi 2.1.3 (Ross, 1984)

Persamaan diferensial biasa linear orde n , dengan variabel bebas x dan variabel terikat y ialah persamaan yang dituliskan dalam bentuk berikut

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x) \quad (2.3)$$

di mana $a_0 \neq 0$.

Sebuah persamaan diferensial disebut sebagai persamaan diferensial biasa linier jika memenuhi kriteria berikut (Ross, 1984):

1. Pangkat tertinggi dari variabel terikat dan turunannya adalah satu.
2. Tidak terdapat fungsi transenden yang melibatkan variabel terikat. Contoh fungsi transenden meliputi fungsi

eksponensial, logaritma, dan trigonometri.

3. Tidak melibatkan perkalian antara variabel terikat atau turunannya dalam persamaan.

Contoh 2.1.4

Berikut ini contoh untuk sistem persamaan diferensial biasa linear:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 5y = 0 \quad (2.4)$$

Sistem (2.4) disebut persamaan diferensial biasa linier orde dua karena memenuhi kriteria dari (Ross, 1984) yaitu pangkat tertinggi dari variabel terikat dan turunannya tidak lebih dari satu, tidak ada fungsi transenden dan tidak ada perkalian antara variabel terikat atau turunannya.

b. Persamaan Diferensial Biasa Nonlinear

Definisi 2.1.5 (Ross, 1984)

Persamaan diferensial biasa nonlinear adalah persamaan diferensial yang bukan dalam bentuk persamaan (2.3) atau tidak memenuhi syarat sebagai persamaan diferensial biasa linier.

Sebuah persamaan diferensial disebut sebagai persamaan diferensial biasa nonlinier jika memenuhi setidaknya satu dari kriteria berikut (Ross, 1984):

1. Pangkat tertinggi dari variabel terikat dan turunannya adalah lebih dari satu.
2. Terdapat fungsi transenden yang melibatkan variabel terikat. Contohnya fungsi transenden meliputi fungsi eksponensial, logaritma, dan trigonometri.

3. Melibatkan perkalian antara variabel terikat atau turunannya dalam persamaan.

Contoh 2.1.6

Berikut ini contoh untuk sistem persamaan diferensial biasa nonlinear:

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^4 + 8y = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y^2 = 0 \quad (2.6)$$

Sistem (2.5) disebut persamaan diferensial biasa nonlinear karena terdapat $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^3$ dan $\left(\frac{dy}{dt}\right)^4$ suku yang memiliki pangkat variabel terikat lebih dari satu. Sedangkan persamaan (2.6) disebut persamaan diferensial biasa nonlinear karena terdapat suku $6y^2$ yang memiliki pangkat variabel terikat lebih dari satu.

2.2. Sistem Dinamik

Menurut Nagle (2012), sistem dinamik memiliki kondisi yang dapat diketahui di masa mendatang ketika kondisi saat ini atau sebelumnya diberikan. Sistem dinamik terbagi menjadi dua jenis, yaitu sistem dinamik diskrit yang dinyatakan dalam bentuk persamaan beda dan sistem dinamik kontinu yang menggunakan persamaan diferensial biasa.

Bentuk persamaan sistem dinamik diskrit:

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{F}(\vec{x}_t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

Bentuk persamaan sistem dinamik kontinu:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}(t), t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

Sistem dinamik kontinu dapat diklasifikasikan menjadi sistem otonomus dan sistem non otonomus.

2.1.1. Sistem Otonomus

Sistem otonomus adalah sistem dinamik yang tidak bergantung secara eksplisit pada waktu atau variabel bebas t (Boyce dan DiPrima, 2012). Sistem otonomus dengan dimensi n dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.9)$$

dengan $i = 1, 2, \dots, n$, fungsi f_i adalah fungsi kontinu yang hanya bergantung pada variabel x_i . Sistem otonomus dibedakan menjadi dua jenis, yaitu linier dan nonlinier.

1. Sistem Otonomus Linier

Sistem otonomus linier dengan dimensi n dapat dinyatakan dalam bentuk berikut (Boyce dan DiPrima, 2012):

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (2.10)$$

Sistem (2.10) dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan, yaitu

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \quad (2.11)$$

dengan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ dan } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Contoh 2.2.1

Berikut adalah contoh sistem otonomus linear:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 11x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases} \quad (2.12)$$

Sistem (2.12) disebut sistem otonomus linear karena setiap variabel dikalikan dengan koefisien tetap yaitu suku x dan suku y serta variabel t yang tidak dinyatakan secara eksplisit. Sistem (2.12) juga dapat dinyatakan dalam bentuk matriks berikut

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. Sistem Otonomus Nonlinear

Sistem otonomus nonlinear persamaan diferensial biasa dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (2.13)$$

di mana x adalah vektor dalam ruang Euclidean $\mathbb{R}^n$ dan $f(x)$ adalah fungsi nonlinear dari x . Sistem (2.13) disebut otonomus nonlinear karena tidak bergantung secara eksplisit pada waktu atau variabel bebas t (Perko, 2001).

Contoh 2.2.2

Berikut adalah contoh sistem otonomus nonlinear:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + y \\ \frac{dy}{dt} = x - y^2 \end{cases} \quad (2.14)$$

Sistem (2.14) disebut sistem otonomus nonlinear karena turunan $\frac{dx}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt}$ hanya bergantung pada variabel x dan y dan tidak bergantung secara eksplisit pada variabel bebas t . Kedua persamaan terdapat pangkat variabel yaitu suku x^2 dan suku y^2 yang menunjukkan bahwa fungsi $f(x, y)$ adalah nonlinear.

2.2.2. Sistem Non Otonomus

Sistem non otonomus adalah sistem dinamik yang secara eksplisit bergantung terhadap waktu atau variabel t . Sistem non otonomus dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = g(x, y, t) \\ \frac{dy}{dt} = h(x, y, t) \end{cases} \quad (2.15)$$

di mana fungsi g dan h bergantung pada variabel x, y dan waktu t . Dalam sistem ini, kedua persamaan secara eksplisit bergantung pada t yang menjadikannya non otonomus (Perko, 2001).

Contoh 2.2.3

Berikut adalah contoh sistem non otonomus:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10xt + 4yt \\ \frac{dy}{dt} = 2xt + 13yt \end{cases} \quad (2.16)$$

Sistem (2.16) disebut sistem non otonomus karena pada kedua persamaan terdapat variabel t yang dinyatakan secara eksplisit.

2.3. Analisis Dinamik

Tahapan analisis dinamik akan dijelaskan secara rinci pada bagian berikut. Hal ini meliputi langkah-langkah yang diperlukan untuk memahami perilaku sistem dinamik, seperti menentukan titik ekuilibrium dan menganalisis kestabilan lokal.

2.1.1. Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium atau titik kesetimbangan adalah kondisi di mana nilai tidak mengalami perubahan seiring berjalannya waktu. Berikut adalah definisi titik ekuilibrium yang akan digunakan dalam penyelesaian suatu model matematika.

Definisi 2.3.1 (Perko, 2000)

Jika diberikan sebuah sistem persamaan $\dot{x} = f(x)$ yang memiliki solusi dengan kondisi awal $x(0) = x_0$. Suatu vektor x^* disebut titik ekuilibrium dari persamaan $\dot{x} = f(x)$ jika memenuhi $f(x^*) = 0$.

Contoh 2.3.2

Diberikan sistem persamaan

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4y + xy \\ \frac{dy}{dt} = -2x + x^2 - xy \end{cases} \quad (2.17)$$

Akan ditentukan titik ekuilibrium dari sistem persamaan (2.17).

Penyelesaian:

Titik ekuilibrium diperoleh jika $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$. Sehingga

$$\begin{aligned} -4y^* + x^*y^* &= 0 \\ y^*(-4 + x^*) &= 0 \\ y^* = 0 \text{ atau } x^* &= 4 \end{aligned}$$

Apabila $y^* = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned} -2x^* + x^{*2} - x^*y^* &= 0 \\ -2x^* + x^{*2} - x^*(0) &= 0 \\ x^*(-2 + x^*) &= 0 \\ x^* = 0 \text{ atau } x^* &= 2 \end{aligned}$$

Apabila $x^* = 4$, diperoleh

$$\begin{aligned} -2(4) + (4)^2 - (4)y^* &= 0 \\ -8 + 16 &= 4y^* \\ y^* &= 2 \end{aligned}$$

Jadi, titik ekuilibrium pada sistem (2.17) diperoleh $x_1^* = (0, 0)$, $x_2^* = (2, 0)$ dan $x_3^* = (4, 2)$.

2.2.2. Analisis Kestabilan Lokal Sistem Otonomus

Analisis kestabilan lokal pada sistem otonomus bertujuan untuk menganalisis perilaku solusi di sekitar titik ekuilibrium dan menentukan kestabilan lokal pada sistem persamaan diferensial. Jika persamaan tidak dapat diselesaikan secara eksplisit, analisis kualitatif dapat digunakan untuk memahami perilaku solusi sekitar titik ekuilibrium (Edwards dan Penney, 2008).

Definisi 2.3.3 (Olsder dan Waode, 2004)

Jika diberikan persamaan diferensial orde satu yaitu $\dot{x} = f(x)$ yang memiliki solusi $x(t, x_0)$ dengan kondisi awal $x(0) = x_0$.

1. Titik ekuilibrium x^* disebut stabil jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$, sedemikian sehingga $\|x_0 - x^*\| < \delta$, kemudian $\|x(t, x_0) - x^*\| < \epsilon$ untuk semua $t \geq 0$.
2. Titik ekuilibrium x^* disebut stabil asimtotik jika titik ekuilibrium stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - x^*\| = 0$, apabila $\|x_0 - x^*\| < \delta_1$.
3. Titik ekuilibrium x^* disebut tidak stabil apabila tidak memenuhi kriteria stabil.

Beberapa cara untuk analisis kestabilan diantaranya adalah sebagai berikut:

a. Linierisasi

Sistem persamaan diferensial nonlinier dapat diubah menjadi sistem persamaan diferensial linier melalui proses yang disebut linearisasi. Proses ini dilakukan untuk memahami perilaku sistem di sekitar titik ekuilibrium.

Definisi 2.3.4 (Perko, 2001)

Jika bagian real dari semua nilai eigen $Jf(x^*)$ tidak bernilai nol, titik ekuilibrium x^* disebut hiperbolik, sedangkan jika terdapat bagian real dari semua nilai eigen $Jf(x^*)$ bernilai nol, titik ekuilibrium x^* disebut nonhiperbolik.

Linierisasi hanya dapat dilakukan pada titik ekuilibrium yang bersifat hiperbolik. Selanjutnya, akan diberikan definisi tentang pelinieran dalam suatu sistem persamaan nonlinear.

Definisi 2.3.5 (Perko, 2000)

Misalkan $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ sebagai titik ekuilibrium dari suatu sistem nonlinier. Titik $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ disebut titik ekuilibrium hiperbolik di mana bagian real dari semua nilai eigen matriks Jacobian $J(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ tidak sama dengan nol. Persamaan $\dot{v} = J(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)v$ disebut sebagai hasil linierisasi dari sistem $\dot{x} = f(x)$ dititik ekuilibrium x^* .

Sistem $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ dapat dilinierisasikan di sekitar titik ekuilibrium $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ menggunakan ekspansi deret Taylor dengan $f(x^*) = 0$, yaitu dengan mendekati sistem nonlinier tersebut menggunakan polinomial orde pertama yang hanya memuat suku-suku linear dan mengabaikan suku-suku nonlinier. Dengan demikian, bentuk sistemnya menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} = & f_1(x^*) + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \dots \\ & + \frac{\partial(f_1 x^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f_1(x^*)}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(x^*) + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \dots \\
&\quad + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f_2(x^*)}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 + \dots \\
&\quad \vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(x^*) + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \dots \\
&\quad + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f_n(x^*)}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 + \dots
\end{aligned}$$

Linierisasi dilakukan dengan menghilangkan suku-suku yang berpangkat lebih dari satu, sehingga diperoleh sistem yang lebih sederhana, yaitu:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x^*) + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \dots \\
&\quad + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(x^*) + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \dots \\
&\quad + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) \\
&\quad \vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(x^*) + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \dots \\
&\quad + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Selanjutnya dimisalkan,

$$v_1 = x_1 - x_1^*, \quad v_2 = x_2 - x_2^*, \quad \dots, \quad v_n = x_n - x_n^* \tag{2.19}$$

Sehingga turunannya diperoleh seperti berikut

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{dv_2}{dt} = \frac{dx_2}{dt}, \quad \dots, \quad \frac{dv_n}{dt} = \frac{dx_n}{dt} \quad (2.20)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (2.19) dan (2.20) ke sistem persamaan (2.18), maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= f_1(x^*) + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} v_2 + \dots + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} v_n \\ \frac{dv_2}{dt} &= f_2(x^*) + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} v_2 + \dots + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} v_n \\ &\vdots \\ \frac{dv_n}{dt} &= f_n(x^*) + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} v_2 + \dots + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} v_n \end{aligned} \quad (2.21)$$

Sistem persamaan (2.21) dapat ditulis dalam bentuk berikut

$$\begin{pmatrix} \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{dv_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dv_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x^*) \\ f_2(x^*) \\ \vdots \\ f_n(x^*) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Sehingga persamaan (2.22) merupakan sistem otonomus linear, yang dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{dv_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dv_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

atau dapat ditulis menjadi

$$\dot{v} = J(f(x^*))v \quad (2.24)$$

dengan $J(f(x^*))$ merupakan matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Berdasarkan definisi 2.3.5 persamaan (2.24) adalah linearisasi sistem (2.9) disekitar titik ekuilibrium hiperbolik x^* .

b. Matriks Jacobian

Matriks Jacobian adalah susunan matriks di mana entri-entrinya merupakan turunan parsial orde pertama dari fungsi vektor terhadap variabel bebas (Zill dan Cullen, 2009).

Definisi 2.3.6 (Perko, 1991)

Jika diberikan fungsi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada sistem (2.9), maka pada suatu titik x^* dari f , diberikan matriks Jacobian seperti berikut

$$Jf(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Berikut adalah teorema yang menjelaskan perilaku kestabilan titik ekuilibrium dalam sistem nonlinier (2.9) yang terkait dengan matriks Jacobian.

Teorema 2.3.7 (Olsder dan Waode, 2004)

Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{x} = Ax$, dengan A adalah matriks $n \times n$ yang memiliki k nilai eigen berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, sehingga $k \leq n$, maka

1. Titik ekuilibrium x^* dikatakan stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) < 0$, untuk semua $i = 1, 2, \dots, k$.
2. Titik ekuilibrium x^* dikatakan stabil jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) \leq 0$, untuk semua $i \in 1, 2, \dots, k$ dan untuk setiap λ_i dengan $Re(\lambda_i) = 0$.
3. Titik ekuilibrium x^* dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) > 0$, untuk semua $i \in 1, 2, \dots, k$.

Bukti.

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial:

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

dengan A adalah matriks berukuran $n \times n$. Berdasarkan definisi titik ekuilibrium, maka sistem memiliki titik ekuilibrium $x^* = 0$.

Langkah pertama adalah menentukan bentuk umum solusi dari sistem,

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{x} = A dt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int A dt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{x} dx = A \int dt$$

$$\Leftrightarrow \ln x = At + C, \quad \text{dengan } C \text{ suatu konstanta}$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{At+C}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = e^{At+C} = e^{At}e^C = e^{At}D, \quad \text{dengan } D = e^C \quad (2.26)$$

Untuk $t = 0$, maka

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow x(0) &= e^{A \cdot 0} D \\ \Leftrightarrow x(0) &= D\end{aligned}\tag{2.27}$$

Dengan mensubstitusikan nilai D dari persamaan (2.26) ke persamaan (2.27), maka diperoleh

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

dimana e^{At} merepresentasikan eksponensial dari matriks A .

Selanjutnya, dengan menggunakan transformasi Jordan, matriks A dapat dituliskan sebagai $A = TJT^{-1}$, sehingga $e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$. Dengan demikian, solusi umum sistem menjadi

$$x(t) = Te^{Jt}T^{-1}x(0)$$

dimana J adalah bentuk Jordan dari A , dan T adalah matriks yang kolom-kolomnya merupakan vektor-vektor eigen dari A .

Bentuk Jordan J terdiri dari blok-blok (sub-blok Jordan) yang masing-masing berhubungan dengan satu nilai eigen λ . Setiap sub-blok Jordan dapat berukuran $k \times k$ memiliki bentuk umum:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Jika semua nilai eigen dari A memiliki bagian real negatif, maka e^{Jt} akan menuju ke nol ketika $t \rightarrow \infty$. Dengan demikian, solusi

$x(t) = e^{At}x(0)$ juga menuju nol, dan sistem dinyatakan stabil.

Namun, jika terdapat nilai eigen yang memiliki bagian real sama dengan nol. Sub-blok J_{ij} dalam bentuk Jordan J yang berkaitan dengan nilai eigen $Re\lambda_i < 0$ tidak menimbulkan masalah (karena $e^{\lambda_i t} \rightarrow 0$ saat $t \rightarrow \infty$), tetapi sub-blok yang berkaitan dengan $Re\lambda_i = 0$ dapat mempengaruhi kestabilan.

Pada kasus tersebut, bentuk matriks eksponensial untuk sub-blok J_i adalah sebagai berikut:

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots \\ 0 & 1 & t & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Faktor $e^{\lambda_i t}$ tetap terbatas, tetapi tidak menuju nol, untuk $t \rightarrow \infty$. Akan tetapi, suku-suku seperti t , $\frac{t^2}{2!}$, dan seterusnya dapat tumbuh tanpa batas. jika ukuran dari sub-blok Jordan $J_i > 1 \times 1$, maka sistem menjadi tidak stabil. Sebaliknya, jika semua sub-blok J_i berukuran tepat 1×1 , maka sistem tetap stabil, meskipun tidak stabil asimtotik.

Dengan demikian, sistem linear stabil apabila semua nilai eigen memiliki bagian real negatif dan setiap nilai eigen yang bagian realnya nol memiliki sub-blok Jordan berukuran 1×1 . ■

c. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai dan vektor eigen diperlukan dalam menganalisis sifat kestabilan sistem dinamik. Selain itu, menetapkan nilai eigen dan vektor eigen juga sangat penting untuk mendapatkan solusi dari sistem dinamik. Berikut adalah penjelasan umum mengenai nilai

eigen dan vektor eigen.

Definisi 2.3.8 (Anton dan Rorres, 2013)

Jika A merupakan matriks berukuran $n \times n$, maka vektor tak nol x pada $\mathbb{R}^n$ dikatakan sebagai vektor eigen dari matriks A jika hasil dari perkalian Ax adalah kelipatan skalar dari vektor x , yang dinyatakan sebagai

$$Ax = \lambda x \quad (2.29)$$

di mana λ merupakan skalar yang disebut nilai eigen dari matriks A , yang menunjukkan seberapa besar vektor x diperbesar atau diperkecil oleh matriks A .

Nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ dapat dicari menggunakan sistem (2.29). Persamaan ini juga dapat dinyatakan dalam bentuk $Ax = \lambda Ix$, atau dinyatakan sebagai

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (2.30)$$

dengan I sebagai matriks identitas, persamaan (2.30) harus memiliki solusi tak nol agar λ mempunyai nilai eigen jika memenuhi

$$\det(A - \lambda I)x = 0 \quad (2.31)$$

Persamaan (2.31) ialah persamaan karakteristik matriks A (Andari, 2017).

Kriteria kestabilan berdasarkan persamaan karakteristik yang berbentuk polinomial derajat dua yang dikemukakan oleh (Boyce dan DiPrima, 2009) dijelaskan seperti Tabel 2.1 berikut

Tabel 2.1. Kriteria kestabilan dari titik ekuilibrium

Nilai Eigen	Tipe	Kestabilan
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Simpul	Tidak stabil
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Simpul	Stabil asimtotik lokal
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Titik pelana	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Simpul atau spiral	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Simpul atau spiral	Stabil asimtotik lokal
$\lambda_{1,2} = a \pm ib, a < 0$	Spiral	Stabil asimtotik lokal
$\lambda_{1,2} = a \pm ib, a > 0$	Spiral	Tidak stabil
$\lambda_{1,2} = \pm ib$	Titik pusat	Stabil

Contoh 2.3.9

Diberikan sistem persamaan

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases} \quad (2.32)$$

Akan ditentukan nilai eigen dan vektor eigen dari sistem persamaan (2.32).

Penyelesaian:

Sistem persamaan (2.32) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks berikut ini

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matriks A dimisalkan sebagai berikut $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Maka nilai eigen ditentukan dari persamaan karakteristik

$$\det |A - \lambda I| = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4 - \lambda)(1 - \lambda) + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda = 2 \quad \text{dan} \quad \lambda = 3$$

Diperoleh nilai eigen matriks A adalah $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 3$. Untuk setiap nilai eigen, akan dicari vektor eigen dengan menyelesaikan persamaan:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Untuk $\lambda_1 = 2$

$$\left(\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 - 2 & -1 \\ 2 & 1 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$$

Jadi, vektor eigen untuk $\lambda_1 = 2$ adalah $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Untuk $\lambda_2 = 3$

$$\left(\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4-3 & -1 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2$$

Jadi, vektor eigen untuk $\lambda_2 = 3$ adalah $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.4. Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria Routh-Hurwitz adalah metode yang digunakan untuk melihat stabilitas suatu sistem tanpa menentukan akar-akar persamaan karakteristik sistem secara langsung. Kriteria ini berlaku jika nilai eigen dari matriks A adalah akar dari persamaan polinomial karakteristik. Jika persamaan polinomial untuk nilai eigen dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (2.33)$$

dengan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sebagai koefisien yang merupakan bilangan real.

Persamaan polinomial (2.33) akan stabil jika semua akar memiliki bagian real negatif, dan ini berlaku jika dan hanya jika memenuhi kondisi Routh-Hurwitz berikut (Murray, 2001):

$$H_1 = a_1 > 0, \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix} > 0, \quad H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} > 0$$

$$H_k = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_k \end{pmatrix} > 0, \quad \text{untuk } k = 1, 2, \dots, n.$$

Untuk polinomial berderajat $n = 2$, bentuk akar dari persamaan polinomialnya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$P(\lambda) = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (2.34)$$

dan matriks hurwitznya adalah sebagai berikut

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\det(H_2) = a_1 \cdot a_2 - 0 \cdot 1$$

$$= a_1 a_2$$

$$a_1 a_2 > 0, \quad \text{jika } a_1 > 0 \text{ dan } a_2 > 0.$$

Akar-akar persamaan (2.34) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika $a_1 > 0$, dan $a_2 > 0$.

Untuk polinomial berderajat $n = 3$, bentuk akar dari persamaan polinomialnya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$P(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \quad (2.35)$$

dan matriks hurwitznya adalah sebagai berikut

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\det(H_3) = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 - a_3^2$$

$$= a_3(a_1a_2 - a_3)$$

$$a_3(a_1a_2 - a_3) > 0, \quad \text{jika } a_1 > 0, a_3 > 0 \text{ dan } a_1a_2 - a_3 > 0.$$

Akar-akar persamaan (2.35) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ dan $a_1a_2 - a_3 > 0$.

2.5. Aturan Tanda Descartes

Aturan tanda descartes merupakan aturan yang digunakan untuk menentukan jumlah akar real positif dan negatif dari suatu persamaan polinomial berdasarkan perubahan tanda dalam koefisiennya.

Lemma 2.5.1 (Wang, 2004)

Jika $h(x) = a_0x^{b_0} + a_1x^{b_1} + \dots + a_nx^{b_n}$, dan $a_0a_n > 0$, maka $z(h)$ genap. Jika $a_0a_n < 0$, maka $z(h)$ ganjil.

Bukti.

Misalkan $v(h)$ adalah jumlah perubahan tanda pada urutan koefisien dari polinomial $h(x)$, dan $z(h)$ adalah jumlah akar real positif dari $h(x)$. Diasumsikan bahwa $a_0 a_n > 0$.

Karena $h(0) \geq 0$ dan $h(x) \rightarrow \infty$ saat $x \rightarrow \infty$, maka grafik $h(x)$ bergerak dari nol atau nilai positif menuju tak hingga. Dengan demikian, grafik tersebut memotong sumbu- x positif sebanyak jumlah genap, perpotongan tersebut dihitung tanpa memperhatikan kelipatan akar.

Apabila grafik $h(x)$ menyentuh sumbu- x pada $x = a$, maka a adalah akar dengan kelipatan genap. Jika grafik $h(x)$ memotong sumbu- x pada $x = a$, maka a merupakan akar dengan kelipatan ganjil. Karena total jumlah perpotongan grafik dengan sumbu- x adalah bilangan genap, maka $z(h)$ juga merupakan bilangan genap.

Sebaliknya, jika $a_0 a_n < 0$, maka grafik memiliki arah yang berlawanan pada kedua ujungnya (satu menuju ∞ dan satu menuju $-\infty$), sehingga jumlah perpotongan dengan sumbu- x menjadi ganjil. Oleh karena itu, $z(h)$ merupakan bilangan ganjil. ■

Teorema 2.5.2 (Wang, 2004)

Misalkan sebuah polinomial diberikan dalam bentuk

$$h(x) = a_0 x^{b_0} + a_1 x^{b_1} + \dots + a_n x^{b_n}$$

dengan koefisien real tak nol a_i , dimana b_i adalah bilangan bulat yang memenuhi $0 \leq b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Maka, jumlah akar real positif dari $h(x)$ sama dengan jumlah perubahan tanda pada koefisien $a_0, a_1, \dots, a_n$, atau sama dengan jumlah tersebut dikurang bilangan bulat positif. Sedangkan jumlah akar real negatif dari $h(x)$ sama dengan jumlah variasi tanda dalam koefisien $h(-x)$ atau sama

dengan jumlah tersebut dikurang bilangan bulat genap positif.

Bukti.

Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan bahwa $b_0 = 0$. Pembuktian dilakukan menggunakan metode induksi terhadap jumlah suku n dari polinomial.

Basis induksi: Untuk $n = 1$, jelas bahwa $h(x)$ memiliki paling banyak satu akar real positif, dan perubahan tanda $v(h)$ juga bernilai satu (jika a_0 dan a_1 berbeda tanda), sehingga $v(h) = z(h)$ terpenuhi.

Langkah induksi: Misalkan untuk semua $n \leq k - 1$, berlaku $v(h) \geq z(h)$ dan $z(h) \equiv v(h) \pmod{2}$. Akan ditunjukkan bahwa pernyataan tersebut juga berlaku untuk $n = k$. Perhatikan dua kasus berikut:

Kasus 1: $a_0 a_1 > 0$

Dalam hal ini, $v(h) = v(h')$, dimana $h'(x)$ adalah turunan dari $h(x)$. Berdasarkan Lemma 2.5.1, $z(h) \equiv z(h') \pmod{2}$ dan berdasarkan hipotesis induksi, $z(h') \equiv v(h') \pmod{2}$, dan $z(h') \leq v(h')$.

Maka $z(h) \equiv v(h) \pmod{2}$. Dengan menggunakan Teorema Rolle, diperoleh $z(h') \geq z(h) - 1$. Sehingga

$$v(h) = v(h') \geq z(h') \geq z(h) - 1 > z(h) - 2$$

yang menunjukkan bahwa $z(h) \leq v(h)$.

Kasus 2: $a_0 a_1 < 0$

Dalam hal ini, $v(h) = v(h') + 1$. Berdasarkan Lemma 2.5.1, $z(h) - z(h') \equiv 1 \pmod{2}$, dan dari hipotesis induksi memberikan bahwa $z(h') \equiv v(h') \pmod{2}$, dan $z(h') \leq v(h')$.

Maka $z(h) \equiv v(h) \pmod{2}$. Dengan menggunakan Teorema

Rolle diperoleh $z(h') \geq z(h) - 1$. Sehingga

$$v(h) = v(h') + 1 \geq z(h') + 1 \geq z(h)$$

Kesimpulan: Dalam kedua kasus, terbukti bahwa $z(h) \leq v(h)$ dan $z(h) \equiv v(h) \pmod{2}$. ■

Untuk mempermudah perhitungan, digunakan simbol berikut:

u : jumlah perubahan tanda positif

v : jumlah perubahan tanda negatif

np : jumlah akar real positif

nq : jumlah akar real negatif

Contoh 2.5.3

Diberikan persamaan polinomial berderajat 3 berikut

$$g(\lambda) = a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 - a_3\lambda + a_4 \quad (2.36)$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $u = 2$. selanjutnya diperoleh

$$u - np = 0 \text{ atau } u - np = 2 \Rightarrow np = 2 \text{ atau } np = 0$$

Maka, banyaknya akar real positif adalah 0 dan 2.

$$g(-\lambda) = -a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 \quad (2.37)$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 1 kali, sehingga $v = 1$.

$$v - nq = 0 \Rightarrow nq = 1$$

Maka, banyaknya akar real negatif adalah 1. Sehingga pada polinomial derajat 3 tersebut dapat diketahui kemungkinan

1. 0 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
2. 2 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 0 akar kompleks.

2.6. Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu. Metode ini dikembangkan untuk memperoleh solusi numerik yang akurat, tanpa memerlukan turunan-turunan tingkat tinggi sebagaimana pada pendekatan deret Taylor. Dengan kata lain, Runge-Kutta memberikan akurasi tinggi setara deret Taylor, namun hanya dengan evaluasi fungsi secara berulang (Chapra dan Canale, 2010). Secara umum, metode ini dapat dinyatakan dalam bentuk berikut

$$x_{i+1} = x_i + p_1 k_1 + p_2 k_2 + \dots + p_n k_n$$

dimana p adalah konstanta dan

$$k_1 = hf(t_i, x_i)$$

$$k_2 = hf(t_i + r_1 h, x_i + s_{11} k_1)$$

$$k_3 = hf(t_i + r_2 h, x_i + s_{21} k_1 + s_{22} k_2)$$

$$\vdots$$

$$k_n = hf(t_i + r_{n-1} h, x_i + s_{n-1,1} k_1 + s_{n-1,2} k_2 + \dots + s_{n-1,n-1} k_{n-1})$$

dengan

$$\begin{aligned} f(t_i, x_i) &= \text{persamaan diferensial orde pertama } x \text{ terhadap } t, \\ h &= \text{panjang langkah,} \\ r, s &= \text{konstanta.} \end{aligned}$$

Metode Runge-Kutta menjadi lebih efisien digunakan dalam perhitungan komputer didasarkan pada evaluasi fungsi secara berulang melalui tahapan konstanta antara k . Nilai-nilai k ini dihitung secara berurutan dan saling bergantung, sehingga membentuk struktur perulangan yang mudah diimplementasikan dalam program numerik.

Metode Runge-Kutta orde empat merupakan salah satu metode Runge-Kutta yang paling sering digunakan dalam penelitian karena memiliki tingkat ketelitian yang lebih tinggi dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde sebelumnya. Metode Runge-Kutta orde empat memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

dengan nilai k sebagai berikut:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, x_i) \\ k_2 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \\ k_3 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_2h\right) \\ k_4 &= f(t_i + h, x_i + k_3h) \end{aligned}$$

Contoh 2.6.1

Diberikan suatu persamaan diferensial biasa sebagai berikut

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x^2, \quad x(0) = 0$$

Gunakan metode Runge-Kutta orde 4 dengan langkah $h = 0,1$ untuk menghitung nilai pendekatan $x(0,2)$.

Penyelesaian:

Diketahui:

$$f(t, x) = 1 + x^2, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad h = 0,1$$

$$n = \frac{0,2 - 0}{0,1} = 2 \quad (\text{jumlah langkah})$$

Langkah 1

$$k_1 = f(t_0, x_0) = f(0, 0) = 1 + 0^2 = 1$$

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}k_1h\right) = f\left(0 + \frac{1}{2}(0,1), 0 + \frac{1}{2}(1)(0,1)\right)$$

$$= f(0,05, 0,05) = 1 + (0,05)^2 = 1 + 0,0025 = 1,0025$$

$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}k_2h\right) = f\left(0 + \frac{1}{2}(0,1), 0 + \frac{1}{2}(1,0025)(0,1)\right)$$

$$= f(0,05, 0,050125) = 1 + (0,050125)^2 = 1 + 0,0025125$$

$$= 1,0025125$$

$$k_4 = f(t_i + h, x_i + k_3h) = f(0,1, 0 + (1,0025125)(0,1))$$

$$= f(0,1, 1,0025125 \cdot 0,1) = f(0,1, 0,10025125) = 1 + (0,10025125)^2$$

$$= 1 + 0,0100503 = 1,0100503$$

Maka:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \\
 &= 0 + \frac{1}{6}(1 + 2 \cdot 1,0025 + 2 \cdot 1,0025125 + 1,0100503)(0,1) \\
 &= \frac{1}{6}(6,0200753)(0,1) \\
 x_1 &= 0,10033459
 \end{aligned}$$

Untuk iterasi selanjutnya, diperlukan nilai t_1 . Karena langkah $h = 0,1$, maka:

$$t_1 = t_0 + h = 0 + 0,1 = 0,1$$

Diketahui untuk langkah berikutnya:

$$f(t, x) = 1 + x^2, \quad x_1 = 0,10033459, \quad t_1 = 0,1, \quad h = 0,1$$

Langkah 2

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(t_1, x_1) = f(0,1, 0,10033459) = f(1 + (0,10033459)^2) \\
 &= 1,01006709 \\
 k_2 &= f\left(t_1 + \frac{1}{2}h, x_1 + \frac{1}{2}k_1h\right) \\
 &= f\left(0,1 + \frac{1}{2}(0,1), 0,10033459 + \frac{1}{2}(1,01006709)(0,1)\right) \\
 &= f(0,15, 0,10033459 + 0,05050335) = f(0,15, 0,15083794) \\
 &= 1 + (0,15083794)^2 = 1,022752
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= f\left(t_1 + \frac{1}{2}h, x_1 + \frac{1}{2}k_2h\right) \\
&= f\left(0, 1 + \frac{1}{2}(0, 1), 0, 10033459 + \frac{1}{2}(1, 022752)(0, 1)\right) \\
&= f(0, 15, 0, 10033459 + 0, 0511376) = f(0, 15, 0, 15147219) \\
&= 1 + (0, 15147219)^2 = 1, 022944 \\
k_4 &= f(t_1 + h, x_1 + k_3h) = f(0, 1 + 0, 1, 0, 10033459 + (1, 022944)(0, 1) \\
&= f(0, 2, 0, 10033459 + 0, 1022944) = f(0, 2, 0, 202629) \\
&= 1 + (0, 202629)^2 = 1, 041060
\end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \\
&= 0, 10033459 + \frac{1}{6}(1, 01006709 + 2 \cdot 1, 022752 + 2 \cdot 1, 022944 \\
&\quad + 1, 041060)(0, 1) \\
&= 0, 10033459 + \frac{1}{6}(6, 142519)(0, 1) \\
x_2 &= 0, 20271
\end{aligned}$$

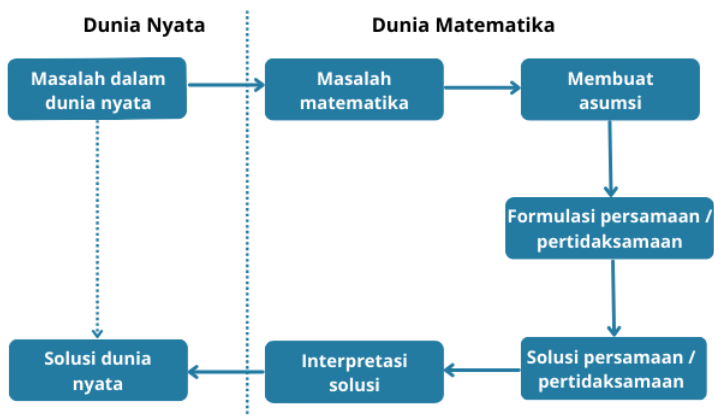
Nilai pendekatan untuk $x(0, 2)$ menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dengan langkah $h = 0, 1$ adalah 0, 20271.

2.7. Model Matematika

Model matematika merupakan representasi kejadian nyata yang terbentuk melalui proses pemodelan matematika. Tujuan pemodelan ini adalah untuk merepresentasikan dan menginterpretasi kejadian nyata ke dalam pernyataan matematika untuk memperoleh solusi yang tepat (Widowati dan Sutimin,

2007).

Berikut ini adalah diagram alur yang menunjukkan proses pemodelan matematika (Widowati dan Sutimin, 2007):



Gambar 2.1. Langkah-langkah pemodelan matematika

Berdasarkan Gambar 2.1, berikut adalah langkah-langkah yang akan diuraikan dalam proses pemodelan matematika:

1. Mengubah masalah di dunia nyata ke dalam bentuk permasalahan matematika

Mengidentifikasi variabel-variabel yang ada dalam permasalahan dan membangun hubungan antar variabel. Menggambarkan sistem dan variabel dalam bentuk model.

2. Membuat asumsi

Menyusun kerangka dasar model dengan membuat asumsi yang menjelaskan cara kerja model. Asumsi ini bertujuan untuk menyederhanakan masalah dan mempermudah pemahaman model.

3. Formulasi persamaan/pertidaksamaan

Formulasi model adalah langkah yang sangat penting, sehingga asumsi-asumsi yang digunakan perlu diuji kembali untuk memperoleh formulasi model yang tepat.

4. Solusi persamaan/pertidaksamaan

Langkah selanjutnya adalah mencari solusi dari persamaan. Proses ini memerlukan ketelitian, karena persamaan mungkin tidak memperoleh solusi atau memiliki lebih dari satu solusi, sehingga penting mengetahui mana yang valid.

5. Interpretasi solusi

Mengidentifikasi permasalahan matematika dengan permasalahan di dunia nyata. Salah satu cara untuk menginterpretasikan suatu solusi adalah dengan membuat grafik berdasarkan solusi yang ditemukan, yang kemudian disimpulkan sebagai solusi permasalahan di dunia nyata.

Model matematika digunakan untuk menggambarkan perubahan dan interaksi dalam suatu sistem, seperti dinamika populasi predator dan prey. Dalam hal ini, model pertumbuhan sangat penting untuk memahami perkembangan kedua populasi dari waktu ke waktu. Dua model pertumbuhan yang paling umum digunakan untuk menjelaskan dinamika populasi adalah model pertumbuhan eksponensial dan model pertumbuhan logistik.

2.1.1. Model Pertumbuhan Eksponensial

Thomas Malthus pertama kali memperkenalkan bukunya yang berjudul *An Essay on the Principle of Population* pada tahun 1798, yang menyatakan bahwa laju pertumbuhan populasi

yang tidak terkendali dikenal sebagai hukum pertumbuhan eksponensial (Sani, 2020). Malthus menyatakan bahwa populasi akan tumbuh secara kontinu tanpa dibatasi faktor lingkungan, sehingga tidak akan terjadi persaingan dalam memperoleh sumber daya (Nurkholipah et al., 2017).

Misal $N(t)$ menyatakan jumlah individu suatu populasi tertentu pada waktu t . Selanjutnya, b dan d masing-masing menyatakan rata-rata tingkat kelahiran dan kematian per kapita. Dalam selang waktu singkat Δt , jumlah kelahiran dalam populasi adalah $b\Delta tN$, sedangkan jumlah kematian dalam populasi adalah $d\Delta tN$. Oleh karena itu, jumlah populasi pada waktu $t + \Delta t$ dapat ditentukan dengan

$$N(t + \Delta t) = N(t) + bN(t)\Delta t - dN(t)\Delta t \quad (2.38)$$

Persamaan (2.38) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{N(t + \Delta) - N(t)}{\Delta t} = (b - d)N(t)$$

Jika $\Delta t \rightarrow 0$ maka diperoleh

$$\frac{dN(t)}{dt} = (b - d)N(t) \quad (2.39)$$

Pada persamaan (2.39) menunjukkan bahwa laju perubahan N terhadap waktu t bergantung pada selisih antara tingkat kelahiran dan kematian populasi pada saat itu (Sani, 2020).

2.2.2. Model Pertumbuhan Logistik

Thomas Malthus (1798) berpendapat bahwa populasi meningkat dan menurun secara eksponensial. Namun, pandangan ini dianggap tidak realistis, karena model pertumbuhan eksponensial memungkinkan kepadatan populasi mencapai nilai yang tidak terbatas (Sani, 2020). Untuk mengatasi hal ini, Verhulst (1830), Pearl dan Reed (1920) mengembangkan model untuk menggambarkan keterkaitan antara laju pertumbuhan populasi $R(t)$ dan jumlah individu suatu populasi tertentu $N(t)$, dengan persamaan linier $R(N) = r - bN$. Dengan demikian, persamaan yang diperoleh adalah

$$\frac{dN}{dt} = N(r - bN) \quad (2.40)$$

Persamaan diferensial tersebut adalah persamaan logistik, di mana r menunjukkan laju pertumbuhan tanpa adanya faktor lingkungan dan b adalah dampak peningkatan kepadatan populasi. Persamaan (2.40) sering dituliskan sebagai

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad (2.41)$$

dengan $K = \frac{r}{b}$. Jika laju pertumbuhan populasi adalah $(\frac{dN}{dt} = 0)$, maka populasi tersebut disebut populasi dalam keadaan keseimbangan (populasi ekuilibrium) yaitu kondisi di mana populasi suatu populasi berada pada tingkat yang stabil. Pada (2.41) kondisi terjadi saat $N = 0$ dan $N = K$. Populasi dalam keadaan keseimbangan $N = 0$ berarti tidak memiliki populasi. Namun, ketika populasi dalam keadaan keseimbangan tak nol yaitu $N = K$, ini menunjukkan bahwa populasi telah mencapai

kapasitas batas (*carrying capacity*), yaitu jumlah maksimum suatu populasi yang dapat mempertahankan hidup. Tingkat kejenuhan (*saturation level*) juga digunakan untuk menggambarkan populasi ini, karena pada populasi yang cukup besar angka kematian lebih tinggi dibandingkan angka kelahiran (Stevenson dan Haberman, 1998).

2.3.3. Model Predator-Prey

Model predator-prey adalah suatu representasi matematis yang menggambarkan interaksi antara populasi predator dan prey dalam ekosistem. Berikut adalah model predator-prey yang seringkali diterapkan:

1. Model Predator Prey Lotka-Volterra

Model Predator Prey yang juga disebut model Lotka-Volterra, adalah sistem persamaan diferensial non-linier yang menggambarkan interaksi antara dua populasi dalam hubungan pemangsaan (Darmawan dan Hariastuti, 2018). Model ini digunakan untuk mempelajari dinamika populasi, di mana satu populasi menjadi pemangsa (predator) dan populasi lainnya menjadi mangsa (prey).

Model Lotka-Volterra pertama kali diperkenalkan pada tahun 1926 oleh Vito Volterra dan Alfred J. Lotka (Sani, 2020). Menurut Murray (2001), dalam model ini, jumlah individu prey pada waktu t diwakili oleh $N(t)$, jumlah individu predator diwakili oleh $P(t)$, maka model dapat

dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN - bNP, \\ \frac{dP}{dt} = cPN - dP \end{cases} \quad (2.42)$$

di mana terdapat konstanta positif yaitu parameter a, b, c dan d . Asumsi dalam model Lotka-Volterra adalah sebagai berikut:

- (a) Tanpa adanya pemangsaan, populasi prey tumbuh tanpa batas (pertumbuhan eksponensial menurut Malthus), maka bentuk persamaanya adalah

$$\frac{dN}{dt} = aN$$

- (b) Adanya interaksi pemangsaan akan mengurangi laju pertumbuhan prey dan mendorong pertumbuhan predator dalam jangka waktu yang sebanding, maka bentuk persamaanya adalah

$$\frac{dN}{dt} = -bNP$$

- (c) Jika tidak ada prey yang dapat dimakan, maka populasi predator akan mengalami penurunan (akibat kematian) secara eksponensial, maka bentuk persamaanya adalah

$$\frac{dP}{dt} = -dP$$

- (d) Kontribusi prey terhadap laju pertumbuhan predator akan sebanding dengan ketersediaan prey serta ukuran populasi predator, maka bentuk persamaanya adalah

$$\frac{dP}{dt} = cPN$$

2. Model Predator Prey Leslie-Gower

Model Leslie-Gower diperkenalkan pada tahun 1948 oleh Leslie dan Gower sebagai bentuk modifikasi dari model Lotka-Volterra. Model ini mengasumsikan bahwa pertumbuhan populasi dalam interaksi predator-prey mengikuti model pertumbuhan logistik, di mana populasi tidak dapat tumbuh secara tak terbatas karena adanya pengaruh dari kepadatan populasi dan daya dukung lingkungan yang terbatas (Ulya dan Toaha, 2019). Daya dukung lingkungan tersebut membatasi pertumbuhan populasi prey, sedangkan pertumbuhan populasi predator bergantung pada ketersediaan jumlah populasi prey (Resmawan, 2019).

Model Leslie-Gower dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(r_1 - b_1 N - a_1 P), \\ \frac{dP}{dt} = P(r_2 - a_2 \frac{P}{N}) \end{cases} \quad (2.43)$$

dimana r_1 dan r_2 merupakan parameter yang menunjukkan laju pertumbuhan intrinsik populasi prey dan predator, b_1 menunjukkan koefisien interaksi antar prey, a_1 menunjukkan koefisien interaksi pemangsaan predator terhadap prey, a_2 menunjukkan koefisien interaksi antar predator, $\frac{r_1}{b_1}$ menyatakan daya dukung lingkungan pada prey tanpa adanya pemangsaan, dan $\frac{r_2 N}{a_2}$ menyatakan daya dukung lingkungan pada predator yang dipengaruhi oleh jumlah prey yang tersedia (Zhuang dan Wen, 2011).

2.4.4. Fungsi Respon

Holling (1953) memperkenalkan konsep yang disebut fungsi respon holling, yang menggambarkan tingkat pemangsaan predator terhadap jumlah prey yang tersedia. Konsep ini berhubungan dengan dinamika perubahan populasi predator dan prey selama berinteraksi. Dalam konteks ekologi, fungsi respon holling didefinisikan sebagai tingkat konsumsi predator terhadap prey berdasarkan jumlah populasi prey yang tersedia (Hunsicker et al., 2011).

Fungsi respon holling dalam interaksi predator-prey adalah sebagai berikut:

1. Fungsi Respon Holling Tipe I

Pada tipe ini menggambarkan hubungan linear antara populasi predator dan laju konsumsi terhadap prey (Altwegg et al., 2006), di mana laju konsumsi akan bertambah seiring dengan peningkatan jumlah prey, namun setelah predator berhenti memangsa jumlah populasi predator akan tetap konstan. Tipe ini umumnya ditemukan pada predator yang bersifat pasif, atau yang lebih memilih menunggu mangsa datang, seperti laba-laba yang menunggu mangsanya.

Berdasarkan model Lotka-Volterra dalam sistem (2.42), respon yang dihasilkan ialah fungsi respon holling tipe I. Sehingga dapat dirumuskan kembali

$$N_A = aTsN_0 \quad (2.44)$$

dengan N_A menunjukkan jumlah prey yang dimangsa oleh predator dalam waktu tertentu atau laju pemangsaan

predator terhadap prey, a merupakan parameter laju interaksi antara predator, T_s adalah waktu predator untuk mencari prey dan N_0 menunjukkan jumlah kepadatan populasi prey.

2. Fungsi Respon Holling Tipe II

Pada tipe ini diasumsikan bahwa laju konsumsi terhadap prey meningkat seiring dengan meningkatnya kepadatan prey. Namun, setelah jumlah prey mencapai tingkat tertentu, laju konsumsi predator dapat menurun menjadi lebih lambat karena predator memiliki keterbatasan, seperti waktu yang dibutuhkan untuk menangkap dan menangani prey, atau faktor fisik lainnya seperti kelelahan atau keterbatasan kemampuan untuk menangkap prey yang sangat banyak.

Laju konsumsi predator dalam model ini dibatasi oleh waktu. Apabila jumlah prey meningkat maka predator tidak perlu waktu untuk mencari, tetap tetap menghabiskan waktu untuk menangani prey. Total waktu T yang tersedia bagi predator dibagi menjadi waktu pencarian dan waktu penanganan, yaitu

$$T = T_s + T_h$$

dengan T_s adalah waktu predator untuk mencari prey dan T_h adalah waktu predator untuk menangani prey (waktu yang dihabiskan predator untuk menangkap, membunuh, dan memakan prey). Diasumsikan bahwa predator menangkap prey selama waktu T . Waktu untuk menangani prey sebanding dengan jumlah prey yang ditangkap, yaitu

$$T_h = hN_A$$

dengan h adalah waktu untuk predator menangani satu prey.

Dari persamaan (2.44) didapatkan

$$N_A = aTsN_0$$

$$N_A = a(T - hN_A)N_0$$

$$\frac{N_A}{T}(1 + ahN_0) = aN_0$$

Sehingga jumlah prey yang dimangsa dalam waktu tertentu adalah

$$\frac{N_A}{T} = \frac{aN_0}{1 + ahN_0} \quad (2.45)$$

Tipe ini umumnya ditemukan pada predator yang bersifat aktif mencari mangsa, seperti interaksi serigala dengan mangsanya. Dari persamaan (2.45) fungsi respon tersebut dapat direpresentasikan oleh persamaan berikut:

$$N_A = \frac{aN_0}{1 + ahN_0} \quad (2.46)$$

dengan N_A menunjukkan jumlah prey yang dimangsa oleh predator dalam waktu tertentu atau laju pemangsaan predator terhadap prey, a merupakan parameter laju interaksi antara predator dan prey, h adalah waktu untuk predator menangani satu mangsa, dan N_0 menunjukkan jumlah kepadatan populasi prey.

3. Fungsi Respon Holling Tipe III

Tipe ini menunjukkan bahwa ketika kepadatan populasi prey rendah, laju pemangsaannya akan menurun. Namun, seiring dengan meningkatnya kepadatan populasi prey,

laju pemangsaan akan meningkat hingga mencapai titik kejenuhan.

Tipe ini terjadi ketika predator mulai beralih mencari populasi prey lain saat jumlah prey yang dimangsa mengalami penurunan, seperti interaksi antara kucing sebagai populasi yang memangsa dan tikus sebagai populasi yang dimangsa. Fungsi respon tersebut dapat direpresentasikan oleh persamaan berikut:

$$N_A = \frac{aN_0^2}{1 + ahN_0^2} \quad (2.47)$$

dengan N_A menunjukkan jumlah prey yang dimangsa oleh predator dalam waktu tertentu atau laju pemangsaan predator terhadap prey, a merupakan parameter laju interaksi antara predator dan prey, h adalah waktu untuk predator menangani satu mangsa, dan N_0 menunjukkan populasi prey per satuan area.

4. Fungsi Respon Holling Tipe IV

Pada fungsi respon holling tipe IV, hubungan antara tingkat pemangsaan dan kepadatan prey menunjukkan bahwa seiring dengan meningkatnya populasi prey, kemampuan predasi atau pemangsaan predator terhadap prey menurun karena adanya pertahanan prey (Kaur et al., 2020). Seperti interaksi antara kepiting yang berkelompok membentuk pertahanan terhadap ancaman ikan buntal yang menyerang, sehingga menyebabkan ikan buntal semakin sulit untuk memangsanya dan tingkat konsumsi ikan buntal menurun (Dawes, 2003). Fungsi respon tersebut dapat

direpresentasikan oleh persamaan berikut:

$$N_A = \frac{aN_0}{b + cN_0 + N_0^2} \quad (2.48)$$

Fungsi ini juga dikenal sebagai fungsi respon Monod-Haldane (Andrews, 1968), di mana N_A menunjukkan tingkat pemangsaan predator terhadap prey, a merupakan parameter laju interaksi antara predator dan prey, b parameter yang menyatakan koefisien pertahanan kelompok prey, c menunjukkan koefisien kepadatan populasi prey yang mempengaruhi laju pemangsaan predator terhadap prey dan N_0 menunjukkan jumlah kepadatan populasi prey.

2.5.5. Pemanenan

Pemanenan adalah proses pengambilan atau pengumpulan sumber daya dari lingkungan untuk digunakan atau dimanfaatkan oleh manusia, baik untuk keperluan ekonomi, pemenuhan kebutuhan pangan, ataupun tujuan lainnya yang berkaitan dengan kelestarian sumber daya alam (Majumdar et al., 2022). Pemanenan dalam model predator-prey merujuk pada pengambilan populasi predator dan prey, baik salah satu maupun keduanya, untuk berbagai tujuan, seperti memenuhi kebutuhan pangan atau ekonomi, melestarikan populasi tertentu, serta menjaga keseimbangan ekosistem dengan mengatur jumlah populasi secara terencana (Kumar dan Poonia, 2023).

Ada beberapa jenis pemanenan yang umum digunakan diantaranya adalah (Majumdar et al., 2022):

1. Pemanenan konstan, dimana sejumlah populasi

tertentu dipanen secara tetap per satuan waktu, tanpa memperhatikan ketersediaan jumlah populasi secara keseluruhan. Pemanenan konstan dapat direpresentasikan oleh persamaan berikut:

$$H_1(t) = H \quad (2.49)$$

dengan $H_1(t)$ merupakan jumlah populasi yang dipanen pada waktu t , dan H adalah laju pemanenan yang tetap.

2. Pemanenan proporsional, di mana jumlah populasi yang dipanen akan disesuaikan dengan ketersediaan populasi yang ada. Jika jumlah populasi bertambah, maka jumlah yang dipanen akan meningkat, begitu pula sebaliknya jika jumlah populasi berkurang, maka jumlah yang dipanen juga akan menurun. Pemanenan proporsional dapat direpresentasikan oleh persamaan berikut:

$$H_2(t) = qEx \quad (2.50)$$

dengan $H_2(t)$ merupakan jumlah populasi yang dipanen pada waktu t , q merupakan koefisien daya tangkap yang menggambarkan tingkat efisiensi upaya manusia dalam menangkap populasi, dan E merupakan usaha pemanenan terhadap populasi seperti waktu, tenaga, atau peralatan yang digunakan untuk memanen.

3. Pemanenan non-linier, ialah pemanenan yang dilakukan tanpa memperhitungkan jumlah populasi yang tersedia. Pemanenan dapat dipengaruhi oleh berbagai faktor tambahan, seperti kondisi lingkungan atau faktor lainnya.

Pemanenan non-linier dapat direpresentasikan oleh persamaan berikut:

$$H_3(t) = \frac{qEx}{n_1E + n_2x} \quad (2.51)$$

dengan $H_3(t)$ merupakan jumlah populasi yang dipanen pada waktu t , q merupakan koefisien daya tangkap yang menggambarkan tingkat efisiensi upaya manusia dalam menangkap populasi, dan E merupakan usaha pemanenan terhadap populasi seperti waktu, tenaga, atau peralatan yang digunakan untuk memanen, dan n_1, n_2 adalah konstanta positif.

2.6.6. Biomassa

Kepadatan populasi adalah jumlah populasi dalam suatu unit atau satuan ruang, biasanya dinyatakan sebagai jumlah individu atau biomassa per satuan area atau volume (Maknun, 2017). Biomassa merupakan total berat atau massa dari semua bahan organik yang terdapat dalam suatu ekosistem, meliputi berbagai makhluk hidup, seperti tumbuhan, hewan, mikroorganisme, serta sisa-sisa organisme yang telah mati (Murray, 2001). Dalam bidang ekologi, khususnya dalam model predator-prey, biomassa digunakan sebagai satuan untuk merepresentasikan ketersediaan energi dan materi antar populasi.

Biomassa dapat dinyatakan dalam satuan berat per unit area atau volume (misalnya ton/ha , kg/m^2 atau g/m^3). Penggunaan biomassa memberikan analisis yang lebih tepat dibandingkan jumlah individu, karena memperhitungkan ukuran tubuh dan kandungan energi dari setiap organisme (Hatton et al., 2015).

Dalam model seperti Lotka–Volterra, biomassa digunakan untuk menghitung pertumbuhan populasi, jumlah makanan yang dikonsumsi, dan seberapa efisien energi berpindah dari prey ke predator.

2.8. Penelitian Terdahulu

Beberapa penelitian yang membahas tentang model predator-prey antara lain:

Tabel 2.2. Persamaan dan perbedaan dengan penelitian terdahulu

Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
<i>Dynamical Analysis and Optimal Harvesting Policy of a Prey - Predator Model with Holling type - III Functional Response</i> (Kumar dan Poonia, 2023).	Membentuk model dengan dua populasi, mengasumsikan bahwa kepadatan populasi prey dan predator tumbuh secara logistik, serta mempertimbangkan pemanenan pada populasi predator dan prey.	Peneliti terdahulu menggunakan fungsi respon Holling tipe III sedangkan peneliti menggunakan fungsi respon Holling tipe IV, yang mempertimbangkan adanya sifat bertahan dalam kelompok prey pada tingkat kepadatan prey yang sangat tinggi.

Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
<i>"Dynamical Analysis Predator - Prey Population with Holling Type II Functional Response"</i> (Pusawidjayanti, Asmianto & Kusumasari, 2021).	Membentuk model dengan dua subpopulasi dan mempertimbangkan pemanenan pada populasi predator dan prey.	Peneliti terdahulu mengasumsikan bahwa prey tumbuh secara logistik dan menggunakan fungsi respon Holling tipe II, sedangkan peneliti mengasumsikan bahwa kedua populasi tumbuh secara logistik dan menggunakan fungsi respon Holling tipe IV.
<i>""Investigation on Dynamics of an Impulsive Predator-Prey System with Generalized Holling Type IV Functional Response and Anti-Predator Behavior"</i> (Sirisubtawee et al., 2021).	Membentuk model dengan dua sub populasi dan menggunakan fungsi respon Holling tipe IV.	Peneliti terdahulu mengasumsikan bahwa populasi prey tumbuh secara logistik, menambahkan perilaku anti predator, tidak ada pemanenan pada kedua populasi dan populasi predator mengalami kematian, sedangkan peneliti mengasumsikan bahwa kedua populasi tumbuh secara logistik, tidak menambahkan perilaku anti predator, terdapat pemanenan pada kedua populasi dan tidak terdapat kematian alami pada predator.

Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
<i>"Dynamical Analysis of a Beddington–DeAngelis Interacting Species System with Prey Harvesting"</i> (Guin et al., 2020).	Membentuk model dengan dua populasi, mengasumsikan bahwa kedua populasi tumbuh secara logistik dan mempertimbangkan pemanenan pada kedua populasi.	Peneliti terdahulu menggunakan fungsi respon Beddington – DeAngelis dan pemanenan konstan pada populasi predator dan prey sedangkan peneliti menggunakan fungsi respon Holling tipe IV, yang mempertimbangkan adanya sifat bertahan dalam kelompok prey pada tingkat kepadatan prey yang sangat tinggi dan terdapat pemanenan proporsional pada predator dan prey.
<i>"Bifurcation Analysis of a two Dimensional Predator - Prey model with Holling Type IV Functional Response and Non - Linear Predator Harvesting"</i> (Ghosh, Majumdar, & Ghosh, 2020).	Membentuk model dengan dua subpopulasi dan menggunakan fungsi respon holling tipe IV.	Peneliti terdahulu mengasumsikan bahwa populasi prey tumbuh secara logistik dan menggunakan pemanenan non-linear pada populasi predator sedangkan peneliti mengasumsikan bahwa kedua populasi tumbuh secara logistik dan terdapat pemanenan proporsional pada predator dan prey.

BAB III

Metodologi Penelitian

3.1. Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah studi pustaka (*Library Research*). Studi pustaka merupakan suatu metode pengumpulan data yang melibatkan pengamatan terhadap konsep, ide dan pendapat yang ditemukan dalam media cetak, khususnya buku-buku yang membahas permasalahan dalam penelitian. Selain itu, studi pustaka juga mencakup kajian terhadap buku referensi dan hasil serupa dari penelitian sebelumnya, yang digunakan untuk memperoleh gambaran tentang permasalahan yang diteliti (Zed,2004).

3.2. Langkah-Langkah Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan mengikuti serangkaian prosedur penelitian guna mencapai tujuan penelitian. Berikut ialah langkah langkah yang dilakukan dalam penelitian ini:

1. Studi Literatur

Mengumpulan teori melalui studi literatur untuk mengidentifikasi masalah predator-prey, menggunakan referensi seperti buku, jurnal, tugas akhir, dan artikel tentang topik tersebut.

2. Mengkontruksi model matematika

Langkah selanjutnya adalah menetapkan asumsi dan variabel yang kemudian digunakan untuk mengkontruksi model matematika dari sistem predator-prey.

3. Menentukan titik ekuilibrium dan kestabilan lokal titik ekuilibrium pada model

Tahap selanjutnya adalah menentukan titik ekuilibrium dan kestabilan lokal titik ekuilibrium pada model setelah persamaan untuk model matematika diperoleh. Proses ini didukung dengan perhitungan simbolik menggunakan *software* Maple 11 untuk memperoleh hasil yang akurat.

4. Melakukan simulasi numerik pada model

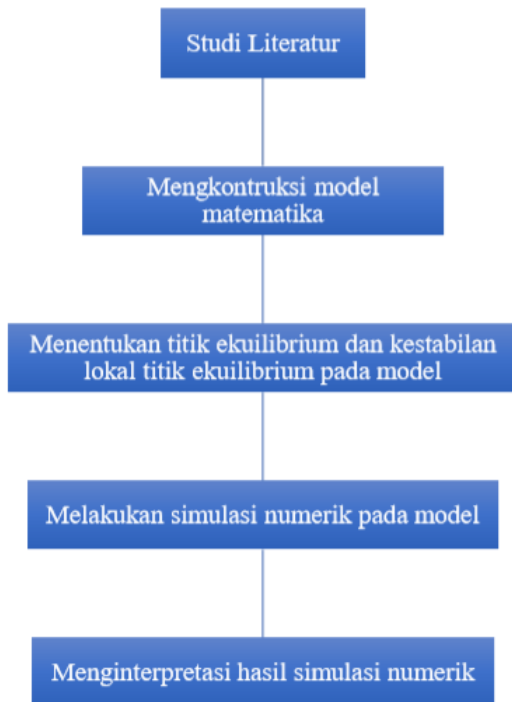
Melakukan simulasi numerik pada titik ekuilibrium berdasarkan model yang diperoleh dengan menggunakan *software* MATLAB R2013a.

5. Menginterpretasi hasil simulasi numerik

Menginterpretasi hasil simulasi numerik dan menarik kesimpulan dari hasil analisis model.

3.3. Alur Penelitian

Langkah-langkah penelitian ditunjukkan dalam diagram alir berikut:



Gambar 3.1. Diagram alir tahapan penelitian

BAB IV

PEMBAHASAN

Pada bab ini, membahas model matematika predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey serta analisis dinamik model meliputi menentukan titik ekuilibrium, analisis kesabilan lokal sistem otonomus, dan simulasi numerik.

4.1. Model Matematika Predator-Prey dengan Fungsi Respon Holling Tipe IV dan Pemanenan Predator-Prey

Pada model matematika ini, populasi dibagi menjadi dua populasi, yaitu populasi prey (N) dan populasi predator (P). Asumsi yang digunakan untuk membentuk model matematika predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan terhadap predator dan prey adalah sebagai berikut:

1. Populasi prey $N(t)$ dan predator $P(t)$ tumbuh secara logistik dengan laju pertumbuhan intrinsik r dan s serta dibatasi oleh daya dukung lingkungan K_1 dan K_2 .
2. Populasi predator diasumsikan tumbuh mengikuti model logistik, bukan hanya karena keberadaan prey, tetapi juga karena lingkungan menyediakan sumber daya lain sebagai bagian dari daya dukung lingkungan K_2 . Oleh karena itu, populasi predator tidak sepenuhnya bergantung pada prey sebagai sumber makanan utama.

3. Predator memangsa prey dengan laju pemangsaan yang mengikuti fungsi respon Holling tipe IV atau disebut fungsi respon Monod-Haldane.
4. Prey $N(t)$ dan predator $P(t)$ dipanen oleh manusia.

Berikut ini pendefinisian variabel dan parameter yang digunakan dalam model matematika predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan terhadap predator dan prey dapat dilihat pada Tabel 4.1 dan 4.2 berikut:

Tabel 4.1. Variabel model matematika predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey

No	Variabel	Keterangan	Syarat	Satuan
1	$N(t)$	Kepadatan populasi prey pada waktu ke-t	$N(t) \geq 0$	biomassa
2	$P(t)$	Kepadatan populasi predator pada waktu ke-t	$P(t) \geq 0$	biomassa

Tabel 4.2. Parameter model matematika predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey

No	Parameter	Keterangan	Syarat	Satuan
1	r	Tingkat pertumbuhan intrinsik prey	$r > 0$	$\frac{1}{\text{waktu}}$
2	s	Tingkat pertumbuhan intrinsik predator	$s > 0$	$\frac{1}{\text{waktu}}$

3	K_1	Daya dukung lingkungan untuk populasi prey	$K_1 > 0$	biomassa
4	K_2	Daya dukung lingkungan untuk populasi predator	$K_2 > 0$	biomassa
5	γ	Laju pemangsaan predator terhadap prey	$\gamma \geq 0$	$\frac{\text{biomassa}}{\text{waktu}}$
6	ϵ	Efisiensi konversi prey menjadi predator	$\epsilon \geq 0$	-
7	a	Koefisien pertahanan kelompok prey	$a \geq 0$	biomassa ²
8	b	Koefisien kepadatan populasi prey yang mempengaruhi laju pemangsaan predator terhadap prey	$b \geq 0$	biomassa
9	δ_1	Koefisien daya tangkap untuk populasi prey	$\delta_1 \geq 0$	$\frac{1}{\text{kapal} \cdot \text{waktu}}$
10	δ_2	Koefisien daya tangkap untuk populasi predator	$\delta_2 \geq 0$	$\frac{1}{\text{kapal} \cdot \text{waktu}}$
11	F_1	Upaya yang diperlukan untuk memanen populasi prey oleh manusia	$F_1 \geq 0$	kapal
12	F_2	Upaya yang diperlukan untuk memanen populasi predator oleh manusia	$F_2 \geq 0$	kapal

Berdasarkan asumsi-asumsi, variabel, dan parameter, terdapat dua populasi yaitu populasi prey (N) dan populasi predator (P). Pertumbuhan populasi prey mengikuti model logistik yang menyebabkan populasi prey bertambah sebesar $rN \left(1 - \frac{N}{K_1}\right)$, dimana r adalah tingkat pertumbuhan intrinsik yang merupakan selisih dari tingkat kelahiran dan kematian, sedangkan K_1 merupakan daya dukung lingkungan yang biasanya akan membatasi pertumbuhan populasi prey apabila terdapat interaksi antar prey maka akan terjadi persaingan dalam memperebutkan sumber daya yang tersedia sehingga laju pertumbuhan populasi menjadi lambat.

Namun, populasi prey mengalami penurunan akibat adanya pemangsaan oleh predator dengan laju pemangsaan sebesar $\frac{\gamma NP}{a + bN + N^2}$, dimana γ menunjukkan laju pemangsaan predator terhadap prey. Ketika populasi prey bertambah, prey mulai membentuk kelompok sebagai upaya untuk bertahan hidup dari serangan predator, dengan tingkat pertahanan sebesar a . Pertahanan ini membuat predator semakin kesulitan untuk memangsa prey, sehingga efektivitas pemangsaan berkurang. Akibatnya, kepadatan populasi prey mempengaruhi laju pemangsaan predator, yang diukur dengan parameter sebesar b .

Berdasarkan asumsi, populasi prey merupakan populasi yang dapat dipanen dengan koefisien daya tangkap sebesar δ_1 dan upaya yang diperlukan untuk memanen populasi prey sebesar F_1 . Maka populasi prey akan berkurang sebanyak $\delta_1 F_1 N$. Sehingga, diperoleh laju perubahan populasi prey terhadap waktu sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dT} = rN \left(1 - \frac{N}{K_1}\right) - \frac{\gamma NP}{a + bN + N^2} - \delta_1 F_1 N \quad (4.1)$$

Di sisi lain, Pertumbuhan populasi predator mengikuti model logistik yang menyebabkan populasi prey bertambah sebesar $sP \left(1 - \frac{P}{K_2}\right)$, dimana s adalah tingkat pertumbuhan intrinsik yang merupakan selisih dari tingkat kelahiran dan kematian, sedangkan K_2 merupakan daya dukung lingkungan yang biasanya akan membatasi pertumbuhan populasi predator apabila terdapat interaksi antar predator maka akan terjadi persaingan dalam memperebutkan sumber daya yang tersedia sehingga laju pertumbuhan populasi menjadi lambat.

Populasi predator akan bertambah seiring dengan pemangsaan predator terhadap prey dengan laju pemangsaan sebesar $\frac{\epsilon \gamma NP}{a + bN + N^2}$, dimana γ menunjukkan laju pemangsaan predator terhadap prey, dan ϵ menyatakan pengubahan biomassa prey yang dikonsumsi predator menjadi individu baru dalam populasi predator. Sementara itu, ketika populasi prey bertambah, prey mulai membentuk kelompok sebagai upaya untuk bertahan hidup dari serangan predator, dengan tingkat pertahanan sebesar a . Pertahanan ini membuat predator semakin kesulitan untuk memangsa prey, sehingga efektivitas pemangsaan berkurang. Akibatnya, kepadatan populasi prey mempengaruhi laju pemangsaan predator, yang diukur dengan parameter sebesar b .

Populasi predator mengalami pengurangan karena pemanenan dengan koefisien daya tangkap sebesar δ_2 dan upaya yang diperlukan untuk memanen populasi predator sebanyak F_2 . Maka populasi predator akan berkurang sebesar $\delta_2 F_2 N$. Sehingga, diperoleh laju perubahan populasi predator terhadap waktu sebagai berikut:

$$\frac{dP}{dt} = sP \left(1 - \frac{P}{K_2}\right) + \frac{\epsilon \gamma NP}{a + bN + N^2} - \delta_2 F_2 P \quad (4.2)$$

Berdasarkan persamaan (4.1) dan (4.2), model matematika predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey berupa sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= rN \left(1 - \frac{N}{K_1}\right) - \frac{\gamma NP}{a + bN + N^2} - \delta_1 F_1 N \\ \frac{dP}{dt} &= sP \left(1 - \frac{P}{K_2}\right) + \frac{\epsilon \gamma NP}{a + bN + N^2} - \delta_2 F_2 P\end{aligned}\quad (4.3)$$

4.2. Analisis Model

Karena variabel dalam sistem (4.3) merupakan populasi predator dan prey, solusi dari sistem (4.3) harus bernilai positif. Selain itu, populasi predator dan prey tidak dapat tumbuh tanpa batas karena keterbatasan daya dukung sumber daya yang tersedia. Oleh karena itu, pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa solusi model bersifat positif dan terbatas.

Teorema 4.2.1 (Solusi Positif)

Misalkan solusi sistem (4.3) dengan kondisi awal $(N(0), P(0)) \in \mathbb{R}_+^2$ adalah non-negatif, yaitu $N(0) \geq 0$ dan $P(0) \geq 0$ maka untuk setiap $t \geq 0$, berlaku $N(t) \geq 0$ dan $P(t) \geq 0$.

Bukti. Untuk $N(t) \geq 0$

Kasus 1: Jika $N(0) = 0$, maka $N(t) = 0$ untuk semua $t \geq 0$.

Jika $N(0) = 0$, substitusi $N = 0$ ke dalam persamaan $\frac{dN}{dt}$:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= r(0) \left(1 - \frac{0}{K_1}\right) - \frac{\gamma(0)P}{a + b(0) + (0)^2} - \delta_1 F_1(0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Maka $\frac{dN}{dt} = 0$, ini menunjukkan bahwa $N(t) = 0$ untuk setiap

$t = 0$. Dengan kata lain, populasi prey tidak berubah dan akan tetap nol.

Kasus 2: Jika $N(0) > 0$, akan dibuktikan bahwa $N(t) \geq 0$ untuk setiap $t \geq 0$. Pembuktian menggunakan metode kontradiksi. Misalkan terdapat waktu $t_1 > 0$ sehingga:

$$N(t) > 0, \quad \text{untuk} \quad 0 < t < t_1,$$

$$N(t) = 0, \quad \text{untuk} \quad t = t_1,$$

$$N(t) < 0, \quad \text{untuk} \quad t > t_1.$$

Substitusi $N(t_1) = 0$ ke dalam persamaan $\frac{dN}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= r(0) \left(1 - \frac{0}{K_1} \right) - \frac{\gamma(0)P}{a + b(0) + (0)^2} - \delta_1 F_1(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hasil ini menunjukkan bahwa $\frac{dN}{dt} = 0$, yang berarti $N(t)$ tidak berubah pada saat $t = t_1$, yang bertentangan dengan asumsi bahwa $N(t) < 0$ untuk $t > t_1$.

Kesimpulan: Asumsi bahwa $N(t) < 0$ untuk $t > t_1$ tidak mungkin terjadi. Sehingga berlaku, $N(t) \geq 0$ untuk semua $t \geq 0$. ■

Bukti. Untuk $P(t) \geq 0$

Kasus 1: Jika $P(0) = 0$, maka $P(t) = 0$ untuk semua $t \geq 0$.

Jika $P(0) = 0$, substitusi $P = 0$ ke dalam persamaan $\frac{dP}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= s(0) \left(1 - \frac{(0)}{K_2} \right) + \frac{\epsilon \gamma N(0)}{a + bN + N^2} - \delta_2 F_2(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Maka $\frac{dP}{dt} = 0$, ini menunjukkan bahwa $P(t) = 0$ untuk setiap $t = 0$. Dengan kata lain, populasi predator tidak berubah dan akan tetap nol.

Kasus 2: Jika $P(0) > 0$, akan dibuktikan bahwa $P(t) \geq 0$ untuk setiap $t \geq 0$. Pembuktian menggunakan metode kontradiksi. Misalkan terdapat waktu $t_1 > 0$ sehingga:

$$P(t) > 0, \quad \text{untuk } 0 < t < t_1,$$

$$P(t) = 0, \quad \text{untuk } t = t_1,$$

$$P(t) < 0, \quad \text{untuk } t > t_1.$$

Substitusi $P(t_1) = 0$ ke dalam persamaan $\frac{dP}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= s(0) \left(1 - \frac{0}{K_2} \right) + \frac{\epsilon \gamma N(0)}{a + bN + N^2} - \delta_2 F_2(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hasil ini menunjukkan bahwa $\frac{dP}{dt} = 0$, yang berarti $P(t)$ tidak berubah saat pada $t = t_1$, yang bertentangan dengan asumsi bahwa $P(t) < 0$ untuk $t > t_1$.

Kesimpulan: Asumsi bahwa $P(t) < 0$ untuk $t > t_1$ tidak mungkin terjadi. Sehingga berlaku, $P(t) \geq 0$ untuk semua $t \geq 0$. ■

Teorema 4.2.2 (Solusi Terbatas)

Himpunan solusi $N(t), P(t)$ dari sistem persamaan (4.3) dengan kondisi awal pada $t = 0$ terbatas pada daerah $S = \left\{ (N(t), P(t)) \in \mathbb{R}_+^2 : \eta(t) \leq \frac{\phi}{\xi} \right\}$.

Bukti.

Untuk membuktikan solusi terbatas, didefinisikan suatu fungsi $\eta(t)$ yaitu $\eta(t) = N(t) + \frac{1}{\epsilon} P(t)$. Turunkan η terhadap t sehingga

diperoleh

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{dN}{dt} + \frac{1}{\epsilon} \frac{dP}{dt}$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (4.3) ke persamaan $\frac{d\eta}{dt}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= rN \left(1 - \frac{N}{K_1}\right) - \delta_1 F_1 N + \frac{1}{\epsilon} \left[sP \left(1 - \frac{P}{K_2}\right) - \delta_2 F_2 P \right] \\ &= rN \left(1 - \frac{N}{K_1}\right) - \delta_1 F_1 N + \frac{s}{\epsilon} \left[P \left(1 - \frac{P}{K_2}\right) \right] - \frac{\delta_2 F_2}{\epsilon} P \end{aligned}$$

Untuk setiap $\xi > 0$, maka

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} + \xi\eta &= rN \left(1 - \frac{N}{K_1}\right) - \delta_1 F_1 N + \frac{s}{\epsilon} \left[P \left(1 - \frac{P}{K_2}\right) \right] - \frac{\delta_2 F_2}{\epsilon} P + \xi \left(N + \frac{1}{\epsilon} P \right) \\ &= rN - \frac{rN^2}{K_1} - \delta_1 F_1 N + \frac{s}{\epsilon} \left[P - \frac{P^2}{K_2} \right] - \frac{\delta_2 F_2}{\epsilon} P + \xi N + \frac{\xi}{\epsilon} P \\ &= N \left(r - \frac{rN}{K_1} - \delta_1 F_1 + \xi \right) + \frac{1}{\epsilon} P \left[s \left(1 - \frac{P}{K_2} \right) \right] - \frac{\delta_2 F_2}{\epsilon} + \frac{\xi}{\epsilon} P \\ &= N \left[\left(r - \delta_1 F_1 + \xi \right) - \frac{rN}{K_1} \right] + \frac{1}{\epsilon} P \left[s \left(1 - \frac{P}{K_2} \right) - \delta_2 F_2 + \xi \right] \\ &= N \left[\left(r - \delta_1 F_1 + \xi \right) - \frac{rN}{K_1} \right] + \frac{1}{\epsilon} P \left[s - \frac{sP}{K_2} - \delta_2 F_2 + \xi \right] \\ &= N \left[\left(r - \delta_1 F_1 + \xi \right) - \frac{rN}{K_1} \right] + \frac{1}{\epsilon} P \left[\left(s - \delta_2 F_2 + \xi \right) - \frac{sP}{K_2} \right] \end{aligned} \tag{4.4}$$

Selanjutnya, untuk mempermudah analisis, turunkan masing-masing bagian ke dalam persamaan (4.4) yang mengandung variabel N dan P

$$\begin{aligned}\frac{d\eta}{dt} + \xi\eta &= \left[Nr - N\delta_1 F_1 + N\xi - \frac{rN^2}{K_1} \right] + \frac{1}{\epsilon} \left[Ps - P\delta_2 F_2 + P\xi - \frac{sP^2}{K_2} \right] \\ &= \left[r - \delta_1 F_1 + \xi - \frac{2rN}{K_1} \right] + \frac{1}{\epsilon} \left[s - \delta_2 F_2 + \xi - \frac{2sP}{K_2} \right]\end{aligned}$$

Berikutnya, akan dicari nilai N dan P

$$\begin{aligned}r - \delta_1 F_1 + \xi - \frac{2rN}{K_1} &= 0 \\ r - \delta_1 F_1 + \xi &= \frac{2rN}{K_1} \\ K_1(r - \delta_1 F_1 + \xi) &= 2rN \\ N &= \frac{K_1(r - \delta_1 F_1 + \xi)}{2r}\end{aligned}\tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}s - \delta_2 F_2 + \xi - \frac{2sP}{K_2} &= 0 \\ s - \delta_2 F_2 + \xi &= \frac{2sP}{K_2} \\ K_2(s - \delta_2 F_2 + \xi) &= 2sP \\ P &= \frac{K_2(s - \delta_2 F_2 + \xi)}{2s}\end{aligned}\tag{4.6}$$

Substitusikan persamaan (4.5) dan (4.6) ke dalam persamaan (4.4)

$$\frac{d\eta}{dt} + \xi\eta = N \left[\left(r - \delta_1 F_1 + \xi \right) - \frac{rN}{K_1} \right] + \frac{1}{\epsilon} P \left[\left(s - \delta_2 F_2 + \xi \right) - \frac{sP}{K_2} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{K_1(r - \delta_1 F_1 + \xi)}{2r} \cdot \left[(r - \delta_1 F_1 + \xi) - \frac{r}{K_1} \cdot \frac{K_1(r - \delta_1 F_1 + \xi)}{2r} \right] \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon} \frac{K_2(s - \delta_2 F_2 + \xi)}{2r} \cdot \left[(s - \delta_2 F_2 + \xi) - \frac{s}{K_2} \cdot \frac{K_2(s - \delta_2 F_2 + \xi)}{2s} \right] \\
&= \frac{K_1(r - \delta_1 F_1 + \xi)}{2r} \cdot \frac{r - \delta_1 F_1 + \xi}{2} + \frac{1}{\epsilon} \frac{K_2(s - \delta_2 F_2 + \xi)}{2s} \cdot \frac{s - \delta_2 F_2 + \xi}{2} \\
&= \frac{K_1(r - \delta_1 F_1 + \xi)^2}{4r} + \frac{1}{\epsilon} \frac{K_2(s - \delta_2 F_2 + \xi)^2}{4s} \\
&= \frac{K_1(r - \delta_1 F_1 + \xi)^2}{4r} + \frac{K_2(s - \delta_2 F_2 + \xi)^2}{4s\epsilon} \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Sehingga persamaan (4.7) dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\frac{d\eta}{dt} + \xi\eta = \phi \tag{4.8}$$

dengan $\phi = \frac{K_1(r - \delta_1 F_1 + \xi)^2}{4r} + \frac{1}{\epsilon} \frac{K_2(s - \delta_2 F_2 + \xi)^2}{4s}$

Akan dicari solusi $\eta(t)$ dengan menggunakan metode faktor integrasi. Secara umum faktor integrasi berbentuk:

$$\mu(t) = e^{\int P(t)dt}$$

Sehingga didapatkan faktor integrasi

$$\mu(t) = e^{\int P(t)dt} = e^{\xi t}$$

Kalikan seluruh persamaan (4.8) dengan $e^{\xi t}$,

$$\begin{aligned}
&e^{\xi t} \frac{d\eta}{dt} + e^{\xi t} \xi \eta = e^{\xi t} \phi \\
&\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(e^{\xi t} \eta) = \phi e^{\xi t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \int d(e^{\xi t} \eta) = \int \phi e^{\xi t} dt \\
&\Leftrightarrow e^{\xi t} \eta = \frac{\phi}{\xi} e^{\xi t} + C \\
&\Leftrightarrow \eta = C e^{-\xi t} + \frac{\phi}{\xi}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Gunakan kondisi awal $\eta(0)$

$$\begin{aligned}
\eta(0) &= C e^{-\xi(0)} + \frac{\phi}{\xi} \\
\eta(0) &= C + \frac{\phi}{\xi} \\
C &= \eta(0) - \frac{\phi}{\xi}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Substitusikan persamaan (4.10) ke dalam persamaan (4.9)

$$\begin{aligned}
\eta(t) &= C e^{-\xi t} + \frac{\phi}{\xi} \\
&= \left(\eta(0) - \frac{\phi}{\xi} \right) e^{-\xi t} + \frac{\phi}{\xi} \\
&= e^{-\xi t} \cdot \eta(0) - e^{-\xi t} \cdot \frac{\phi}{\xi} + \frac{\phi}{\xi} \\
&= e^{-\xi t} \eta(0) + \frac{\phi}{\xi} (1 - e^{-\xi t})
\end{aligned}$$

Karena $e^{-\xi t} \geq 0$, untuk semua $t \geq 0$, maka untuk semua t ,

$$\eta(t) \leq e^{-\xi t} \eta(0) + \frac{\phi}{\xi} (1 - e^{-\xi t})$$

Selanjutnya dengan menggunakan limit pada $e^{-\xi t}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\xi t} = 0$$

Sehingga didapatkan

$$\eta(t) \leq e^{-\xi t} \eta(0) + \frac{\phi}{\xi} (1 - e^{-\xi t})$$

$$\eta(t) \leq 0 + \frac{\phi}{\xi} - \frac{\phi}{\xi} e^{-\xi t}$$

$$\eta(t) \leq \frac{\phi}{\xi} + 0 - 0, \quad \text{karena } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\xi t} = 0$$

$$\eta(t) \leq \frac{\phi}{\xi}$$

Sehingga terbukti daerah $S = \left\{ (N(t), P(t)) \in \mathbb{R}_+^2 : \eta(t) \leq \frac{\phi}{\xi} \right\}$ dan solusi dari sistem (4.3) terbatas dalam S .

■

4.3. Titik Ekuilibrium Model Matematika Predator-Prey dengan Fungsi Respon Holling Tipe IV dan Pemanenan Predator-Prey

Model matematika predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey dinyatakan dalam sistem persamaan diferensial nonlinier. Persamaan (4.3) dapat diselesaikan dengan menganalisis perilaku sistem di sekitar titik ekuilibrium. Dalam model ini, titik ekuilibrium diperoleh dengan mensyaratkan $\frac{dN}{dt} = \frac{dP}{dt} = 0$. Sehingga persamaan (4.3) dapat

ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K_1}\right) - \frac{\gamma NP}{a + bN + N^2} - \delta_1 F_1 N = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{dP}{dt} = sP \left(1 - \frac{P}{K_2}\right) + \frac{\epsilon \gamma NP}{a + bN + N^2} - \delta_2 F_2 P = 0 \quad (4.12)$$

Sehingga, dari persamaan (4.11), diperoleh

$$\begin{aligned} & rN \left(1 - \frac{N}{K_1}\right) - \frac{\gamma NP}{a + bN + N^2} - \delta_1 F_1 N = 0 \\ \Leftrightarrow & N \left(r \left(1 - \frac{N}{K_1}\right) - \frac{\gamma P}{a + bN + N^2} - \delta_1 F_1 \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & N = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

atau

$$\Leftrightarrow r \left(1 - \frac{N}{K_1}\right) - \frac{\gamma P}{a + bN + N^2} - \delta_1 F_1 = 0 \quad (4.14)$$

Sementara itu, dari persamaan (4.12), diperoleh

$$\begin{aligned} & sP \left(1 - \frac{P}{K_2}\right) + \frac{\epsilon \gamma NP}{a + bN + N^2} - \delta_2 F_2 P = 0 \\ \Leftrightarrow & P \left(s \left(1 - \frac{P}{K_2}\right) + \frac{\epsilon \gamma N}{a + bN + N^2} - \delta_2 F_2 \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & P = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

atau

$$\Leftrightarrow s \left(1 - \frac{P}{K_2}\right) + \frac{\epsilon \gamma N}{a + bN + N^2} - \delta_2 F_2 = 0 \quad (4.16)$$

4.1.1. Titik Ekuilibrium Kepunahan Kedua Populasi

Titik ekuilibrium kepunahan kedua populasi, yaitu kondisi ketika populasi prey dan predator punah. Berdasarkan hasil yang diperoleh pada persamaan (4.13) dan persamaan (4.15) yaitu $N = 0$ dan $P = 0$.

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium kepunahan kedua populasi $E_0 = (N, P) = (0, 0)$.

4.2.2. Titik Ekulibirum Bebas Predator

Titik ekuilibrium bebas predator atau kepunahan predator yakni kondisi ketika tidak adanya populasi predator. Kondisi ini terjadi ketika $N \neq 0$ dan $P = 0$. Dari persamaan (4.12) didapatkan $P = 0$, sedangkan dari persamaan (4.11) diperoleh

$$r \left(1 - \frac{N}{K_1} \right) - \frac{\gamma P}{a + bN + N^2} - \delta_1 F_1 = 0$$

Substitusi persamaan (4.15) ke persamaan (4.14)

$$\Leftrightarrow r \left(1 - \frac{N}{K_1} \right) - \frac{\gamma(0)}{a + bN + N^2} - \delta_1 F_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow r \left(1 - \frac{N}{K_1} \right) - \delta_1 F_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow r - \frac{rN}{K_1} - \delta_1 F_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{rN}{K_1} = -r + \delta_1 F_1$$

$$\Leftrightarrow -rN = -K_1 r + K \delta_1 F_1$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow N &= \frac{-K_1 r + K_1 \delta_1 F_1}{-r} \\
\Leftrightarrow N &= \frac{-(K_1 r - K_1 \delta_1 F_1)}{-r} \\
\Leftrightarrow N &= \frac{K_1(r - \delta_1 F_1)}{r}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium bebas predator atau kepunahan predator $E_1 = (N, P) = \left(\frac{K_1(r - \delta_1 F_1)}{r}, 0 \right)$. Terlihat bahwa titik ekuilibrium E_1 eksis jika $r > \delta_1 F_1$.

4.3.3. Titik Ekulibirum Bebas Prey

Titik ekuilibrium bebas prey atau kepunahan prey yakni kondisi ketika tidak adanya populasi prey. Kondisi ini terjadi ketika $P \neq 0$ dan $N = 0$. Dari persamaan (4.11) didapatkan $N = 0$, sedangkan dari persamaan (4.12) diperoleh

$$s \left(1 - \frac{P}{K_2} \right) + \frac{\epsilon \gamma N}{a + bN + N^2} - \delta_2 F_2 = 0$$

Substitusi persamaan (4.13) ke persamaan (4.16)

$$\Leftrightarrow s \left(1 - \frac{P}{K_2} \right) + \frac{\epsilon \gamma(0)}{a + b(0) + (0)^2} - \delta_2 F_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow s \left(1 - \frac{P}{K_2} \right) - \delta_2 F_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow s - \frac{sP}{K_2} - \delta_2 F_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{sP}{K_2} = -s + \delta_2 F_2$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -sP = -K_2s + K_2\delta_2F_2 \\
&\Leftrightarrow P = \frac{-K_2s + K_2\delta_2F_2}{-s} \\
&\Leftrightarrow P = \frac{-(K_2s - K_2\delta_2F_2)}{-s} \\
&\Leftrightarrow P = \frac{K_2(s - \delta_2F_2)}{s} \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium bebas prey atau kepunahan prey $E_2 = (N, P) = \left(\frac{K_2(s - \delta_2F_2)}{s}, 0 \right)$. Terlihat bahwa titik ekuilibrium E_2 eksis jika $s > \delta_2F_2$.

4.4.4. Titik Ekuilibrium Kedua Populasi Hidup Bersama

Titik ekuilibrium kedua populasi hidup bersama terjadi ketika populasi predator dan prey tidak sama dengan 0. Titik ekuilibrium kedua populasi hidup bersama dapat diketahui dari persamaan (4.14) dan persamaan (4.16).

Dari persamaan (4.16), diperoleh

$$\begin{aligned}
&s \left(1 - \frac{P}{K_2} \right) + \frac{\epsilon\gamma N}{a + bN + N^2} - \delta_2F_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow s - \frac{sP}{K_2} + \frac{\epsilon\gamma N}{a + bN + N^2} - \delta_2F_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow -\frac{sP}{K_2} = -s + \delta_2F_2 - \frac{\epsilon\gamma N}{a + bN + N^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{sP}{K_2} = s - \delta_2F_2 + \frac{\epsilon\gamma N}{a + bN + N^2} \\
&\Leftrightarrow P^* = \frac{K_2}{s} \left(s - \delta_2F_2 + \frac{\epsilon\gamma N}{a + bN + N^2} \right) \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Karena $P > 0$ maka P eksis jika $s > \delta_2 F_2$.

Mensubstitusikan persamaan (4.19) ke persamaan (4.14) untuk memperoleh nilai N^* sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 & r \left(1 - \frac{N}{K_1} \right) - \frac{\gamma P}{a + bN + N^2} - \delta_1 F_1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & r \left(1 - \frac{N}{K_1} \right) - \frac{\gamma}{a + bN + N^2} \cdot \frac{K_2}{s} \left(s - \delta_2 F_2 + \frac{\epsilon \gamma N}{a + bN + N^2} \right) \\
 & - \delta_1 F_1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & r - \frac{rN}{K_1} - \frac{\gamma K_2}{s(a + bN + N^2)} \cdot \left(s - \delta_2 F_2 + \frac{\epsilon \gamma N}{a + bN + N^2} \right) - \delta_1 F_1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & r - \frac{rN}{K_1} - \frac{\gamma K_2}{s(a + bN + N^2)} \cdot \frac{(s(a + bN + N^2) - \delta_2 F_2(a + bN + N^2))}{a + bN + N^2} \\
 & + \frac{\epsilon \gamma N}{a + bN + N^2} - \delta_1 F_1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & r - \frac{rN}{K_1} - \frac{\gamma K_2 (sa + sbN + sN^2 - \delta_2 F_2 a - \delta_2 F_2 bN - \delta_2 F_2 N^2 + \epsilon \gamma N)}{s(a + bN + N^2)(a + bN + N^2)} \\
 & - \delta_1 F_1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & r - \frac{rN}{K_1} - \frac{\gamma K_2 sa + \gamma K_2 sbN + \gamma K_2 sN^2 - \gamma K_2 \delta_2 F_2 a - \gamma K_2 \delta_2 F_2 bN}{s(a + bN + N^2)^2} \\
 & - \frac{\gamma K_2 \delta_2 F_2 N^2 - \gamma^2 K_2 \epsilon N}{s(a + bN + N^2)^2} - \delta_1 F_1 = 0
 \end{aligned}$$

Penyebut pada masing-masing suku disamakan dengan cara mengalikan seluruh ruas persamaan dengan $K_1 s(a + bN + N^2)^2$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{K_1 s(a + bN + N^2)^2 r}{K_1 s(a + bN + N^2)^2} - \frac{s(a + bN + N^2)^2 r N}{K_1 s(a + bN + N^2)^2} \\
&\quad - \frac{K_1(\gamma K_2 s a + \gamma K_2 s b N + \gamma K_2 s N^2 - \gamma K_2 \delta_2 F_2 a - \gamma K_2 \delta_2 F_2 b N)}{K_1 s(a + bN + N^2)^2} \\
&\quad - \frac{K_1(\gamma K_2 \delta_2 F_2 N^2 - \gamma^2 K_2 \epsilon N)}{K_1 s(a + bN + N^2)^2} - \frac{K_1 s(a + bN + N^2)^2 \delta_1 F_1}{K_1 s(a + bN + N^2)^2} = 0 \\
&\quad K_1 s(a + bN + N^2)^2 r - s(a + bN + N^2)^2 r N \\
&\quad - K_1(\gamma K_2 s a + \gamma K_2 s b N + \gamma K_2 s N^2 - \gamma K_2 \delta_2 F_2 a - \gamma K_2 \delta_2 F_2 b N \\
&\quad - \gamma K_2 \delta_2 F_2 N^2 + \gamma^2 K_2 \epsilon N) - K_1 s(a + bN + N^2)^2 \delta_1 F_1 \\
&\Leftrightarrow \frac{K_1 s(a + bN + N^2)^2 r - s(a + bN + N^2)^2 r N - K_1(\gamma K_2 s a + \gamma K_2 s b N + \gamma K_2 s N^2 - \gamma K_2 \delta_2 F_2 a - \gamma K_2 \delta_2 F_2 b N - \gamma K_2 \delta_2 F_2 N^2 + \gamma^2 K_2 \epsilon N) - K_1 s(a + bN + N^2)^2 \delta_1 F_1}{K_1 s(a + bN + N^2)^2} = 0
\end{aligned}$$

Untuk menyederhanakan persamaan, kedua ruas dikalikan dengan penyebut $K_1 s(a + bN + N^2)^2$, sehingga seluruh pecahan dapat dihilangkan

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow K_1 s r(a^2 + b^2 N^2 + N^4 + 2abN + 2aN^2 + 2bN^3) \\
&\quad - rNs(a^2 + b^2 N^2 + N^4 + 2abN + 2aN^2 + 2bN^3) \\
&\quad - K_1 \gamma K_2 s a - K_1 \gamma K_2 s b N - K_1 \gamma K_2 s N^2 + K_1 \gamma K_2 \delta_2 F_2 a \\
&\quad + K_1 \gamma K_2 \delta_2 F_2 b N + K_1 \gamma K_2 \delta_2 F_2 N^2 - K_1 \gamma^2 K_2 \epsilon N \\
&\quad - K_1 s \delta_1 F_1(a^2 + b^2 N^2 + N^4 + 2abN + 2aN^2 + 2bN^3) = 0 \\
&\Leftrightarrow K_1 s r a^2 + K_1 s r b^2 N^2 + K_1 s r N^4 + 2K_1 r s a b N + 2K_1 s r a N^2 \\
&\quad + 2K_1 s r b N^3 - r N s a^2 - r s b^2 N^3 - r N^5 s - 2r N^2 a b s - 2r N^3 a s \\
&\quad - 2r N^4 s b - K_1 \gamma K_2 s a - K_1 \gamma K_2 s b N - K_1 \gamma K_2 s N^2 + K_1 \gamma K_2 \delta_2 F_2 a \\
&\quad + K_1 \gamma K_2 \delta_2 F_2 b N + K_1 \gamma K_2 \delta_2 F_2 N^2 - K_1 \gamma^2 K_2 \epsilon N - K_1 s \delta_1 F_1 a^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -K_1s\delta_1F_1b^2N^2 - K_1s\delta_1F_1N^4 - K_1s\delta_1F_12abN - K_1s\delta_1F_12aN^2 \\
& - K_1s\delta_1F_12bN^3 = 0
\end{aligned}$$

Kelompokkan semua suku berdasarkan pangkat N

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow & -rsN^5 + K_1rsN^4 - 2sbrN^4 - K_1s\delta_1F_1N^4 + 2K_1sbrN^3 \\
& - sb^2rN^3 - 2arsN^3 - 2K_1s\delta_1F_1bN^3 + K_1srb^2N^2 + 2aK_1rsN^2 \\
& - K_1K_2\gamma sN^2 + K_1K_2\delta_2F_2\gamma N^2 - 2arsbN^2 - sb^2K_1\delta_1F_1N^2 \\
& - 2aK_1s\delta_1F_1N^2 + 2K_1rsabN - a^2rsN - K_1K_2\gamma sbN \\
& + K_1K_2\gamma\delta_2F_2bN - K_1K_2\epsilon\gamma^2N - 2K_1abs\delta_1F_1N + a^2K_1sr \\
& - aK_1K_2\gamma s + aK_1K_2\gamma\delta_2F_2 - a^2K_1s\delta_1F_1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow & rsN^5 - K_1rsN^4 + 2sbrN^4 + K_1s\delta_1F_1N^4 - 2K_1sbrN^3 \\
& + sb^2rN^3 + 2arsN^3 + 2K_1s\delta_1F_1bN^3 - K_1srb^2N^2 - 2aK_1rsN^2 \\
& + K_1K_2\gamma sN^2 - K_1K_2\delta_2F_2\gamma N^2 + 2arsbN^2 + sb^2K_1\delta_1F_1N^2 \\
& + 2aK_1s\delta_1F_1N^2 - 2K_1rsabN + a^2rsN + K_1K_2\gamma sbN \\
& - K_1K_2\gamma\delta_2F_2bN + K_1K_2\epsilon\gamma^2N + 2K_1abs\delta_1F_1N - a^2K_1sr \\
& + aK_1K_2\gamma s - aK_1K_2\gamma\delta_2F_2 + a^2K_1s\delta_1F_1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow & rsN^5 + (-K_1rs + 2sbr + K_1s\delta_1F_1)N^4 + (2ars - 2K_1sbr + sb^2r \\
& + 2K_1s\delta_1F_1b)N^3 + (-K_1srb^2 - 2aK_1rs + K_1K_2\gamma s + 2arsb \\
& + sb^2K_1\delta_1F_1 - K_1K_2\delta_2F_2\gamma + 2aK_1s\delta_1F_1)N^2 + (-2K_1rsab + a^2rs \\
& + K_1K_2\gamma sb - K_1K_2\gamma\delta_2F_2b + K_1K_2\epsilon\gamma^2 + 2K_1abs\delta_1F_1)N \\
& - a^2K_1sr + aK_1K_2\gamma s - aK_1K_2\gamma\delta_2F_2 + a^2K_1s\delta_1F_1 = 0
\end{aligned}$$

atau bisa dituliskan dengan

$$a_1 N^{*5} + a_2 N^{*4} + a_3 N^{*3} + a_4 N^{*2} + a_5 N^* + a_6 = 0 \quad (4.20)$$

dengan

$$a_1 = rs$$

$$a_2 = s(2br + K_1 \delta_1 F_1 - K_1 r)$$

$$a_3 = s(r(2a - 2K_1 b + b^2) + 2K_1 \delta_1 F_1 b)$$

$$a_4 = sK_1(-r(b^2 + 2a) + (b^2 + 2a)\delta_1 F_1) + 2arsb + K_1 K_2 \gamma(s - \delta_2 F_2)$$

$$a_5 = s(2K_1 ab(\delta_1 F_1 - r) + a^2 r) + K_1 K_2 \gamma(\epsilon \gamma + b(s - \delta_2 F_2))$$

$$a_6 = -a^2 K_1 sr + a^2 K_1 s \delta_1 F_1 + a K_1 K_2 \gamma(s - \delta_2 F_2)$$

Untuk mendapatkan nilai N^* , dapat dilakukan dengan mencari akar positif dari persamaan (4.20). Akar-akar N^* dalam persamaan (4.20) sulit untuk ditunjukkan secara eksplisit. Namun, eksistensinya dapat ditunjukkan dengan menggunakan aturan tanda Descartes, yakni untuk mendapatkan tepat satu akar positif dengan memperhatikan jumlah perubahan tanda koefisien tepat terdapat satu perubahan tanda dalam persamaan tersebut. Diperhatikan bahwa

$$a_1 = rs \quad (4.21)$$

Dari persamaan (4.21) terlihat bahwa a_1 bernilai positif, kemudian persamaan selanjutnya yaitu

$$a_2 = s(2br + K_1 \delta_1 F_1 - K_1 r) \quad (4.22)$$

Dari persamaan (4.22) terlihat bahwa terdapat dua kemungkinan

yakni a_2 dapat bernilai positif atau negatif, kemudian persamaan selanjutnya yaitu

$$a_3 = s(r(2a - 2K_1b + b^2) + 2K_1\delta_1F_1b) \quad (4.23)$$

Dari persamaan (4.23) terlihat bahwa terdapat dua kemungkinan yakni a_3 dapat bernilai positif atau negatif, kemudian persamaan selanjutnya yaitu

$$a_4 = sK_1(-r(b^2 + 2a) + (b^2 + 2a)\delta_1F_1) + 2arsb + K_1K_2\gamma(s - \delta_2F_2) \quad (4.24)$$

Dari persamaan (4.24) terlihat bahwa terdapat dua kemungkinan yakni a_4 dapat bernilai positif atau negatif, kemudian persamaan selanjutnya yaitu

$$a_5 = s(2K_1ab(\delta_1F_1 - r) + a^2r) + K_1K_2\gamma(\epsilon\gamma + b(s - \delta_2F_2)) \quad (4.25)$$

Dari persamaan (4.25) terlihat bahwa terdapat dua kemungkinan yakni a_5 dapat bernilai positif atau negatif, kemudian persamaan selanjutnya yaitu

$$a_6 = -a^2K_1sr + a^2K_1s\delta_1F_1 + aK_1K_2\gamma(s - \delta_2F_2) \quad (4.26)$$

Dari persamaan (4.26) terlihat bahwa terdapat dua kemungkinan yakni a_6 dapat bernilai positif atau negatif.

Oleh karena itu, diketahui bahwa a_1 selalu bernilai positif, dan a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 dapat bernilai positif atau negatif. Berdasarkan aturan tanda Descartes diperoleh beberapa kemungkinan solusi untuk persamaan (4.20) yang disajikan pada Tabel berikut (penentuan banyaknya akar real positif berdasarkan aturan tanda

Descartes dapat dilihat pada lampiran 1):

Tabel 4.3. Kemungkinan solusi persamaan (4.20) berdasarkan aturan tanda Descartes

Kemungkinan	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\sum n$	$\sum np$
1	+	+	+	+	+	+	0	0
2	+	+	+	+	+	-	1	1
3	+	+	+	+	-	+	2	0, 2
4	+	+	+	+	-	-	1	1
5	+	+	+	-	+	+	2	0, 2
6	+	+	+	-	+	-	3	1, 3
7	+	+	+	-	-	+	2	0, 2
8	+	+	+	-	-	-	1	1
9	+	+	-	+	+	+	2	0, 2
10	+	+	-	+	+	-	3	1, 3
11	+	+	-	+	-	+	4	0, 2, 4
12	+	+	-	+	-	-	3	1, 3
13	+	+	-	-	+	+	2	0, 2
14	+	+	-	-	+	-	3	1, 3
15	+	+	-	-	-	+	2	0, 2
16	+	+	-	-	-	-	1	1
17	+	-	+	+	+	+	2	0, 2
18	+	-	+	+	+	-	3	1, 3
19	+	-	+	+	-	+	4	0, 2, 4
20	+	-	+	+	-	-	3	1, 3
21	+	-	+	-	+	+	4	0, 2, 4
22	+	-	+	-	+	-	5	1, 3, 5
23	+	-	+	-	-	+	4	0, 2, 4
24	+	-	+	-	-	-	3	1, 3

Kemungkinan	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\sum n$	$\sum np$
25	+	-	-	+	+	+	2	0, 2
26	+	-	-	+	+	-	3	1, 3
27	+	-	-	+	-	+	4	0, 2, 4
28	+	-	-	+	-	-	3	1, 3
29	+	-	-	-	+	+	2	0, 2
30	+	-	-	-	+	-	3	1, 3
31	+	-	-	-	-	+	2	0, 2
32	+	-	-	-	-	-	1	1

Tabel 4.3 menunjukkan bahwa terdapat tiga puluh dua kemungkinan dalam persamaan (4.20) dan setiap kemungkinan mengalami perubahan tanda koefisien. Berdasarkan aturan tanda Descartes, persamaan tersebut mempunyai tepat satu akar positif jika terdapat tepat satu perubahan tanda koefisien. Dikarenakan pada persamaan (4.20), nilai dari a_1 selalu positif, maka untuk memastikan bahwa N^* memiliki tepat satu akar real positif, solusi yang memenuhi adalah kemungkinan 2, 4 8, 16, dan 32.

Maka, titik ekuilibrium dari sistem persamaan (4.3) adalah sebagai berikut:

1. Titik ekuilibrium kepunahan kedua populasi $E_0 = (N, P) = (0, 0)$.
2. Titik ekuilibrium bebas predator atau kepunahan predator:

$$E_1 = (N, P) = \left(\frac{K_1(r - \delta_1 F_1)}{s}, 0 \right).$$

Titik ekuilibrium dikatakan eksis jika $r > \delta_1 F_1$.

3. Titik ekuilibrium bebas prey atau kepunahan prey:

$$E_2 = (N, P) = \left(0, \frac{K_2(s - \delta_2 F_2)}{s} \right).$$

Titik ekuilibrium dikatakan eksis jika $s > \delta_2 F_2$.

4. Titik ekuilibrium kedua populasi hidup bersama:

$$E_3 = (N^*, P^*)$$

Nilai P^* dikatakan eksis jika $s > \delta_2 F_2$, sedangkan nilai N^* dikatakan eksis jika memenuhi salah satu kemungkinan dalam Tabel 4.3, yaitu kombinasi tanda yang memberikan tepat satu akar positif berdasarkan aturan tanda Descartes pada persamaan (4.20).

Tabel 4.4. Kemungkinan eksistensi solusi N^* berdasarkan aturan tanda Descartes pada persamaan (4.20)

Kemungkinan	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\sum n$	$\sum np$
2	+	+	+	+	+	-	1	1
4	+	+	+	+	-	-	1	1
8	+	+	+	-	-	-	1	1
16	+	+	-	-	-	-	1	1
32	+	-	-	-	-	-	1	1

4.4. Analisis Kestabilan Lokal

Analisis kestabilan lokal dilakukan dengan membentuk matriks Jacobian, selanjutnya ditentukan nilai eigen dari matriks Jacobian, kemudian menentukan sifat kestabilannya. Matriks Jacobian dari sistem persamaan (4.3) adalah sebagai berikut.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\frac{dN}{dt})}{\partial N(t)} & \frac{\partial(\frac{dN}{dt})}{\partial P(t)} \\ \frac{\partial(\frac{dP}{dt})}{\partial N(t)} & \frac{\partial(\frac{dP}{dt})}{\partial P(t)} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial\left(rN\left(1-\frac{N}{K_1}\right)-\frac{\gamma NP}{a+bN+N^2}-\delta_1 F_1 N\right)}{\partial N} & \frac{\partial\left(rN\left(1-\frac{N}{K_1}\right)-\frac{\gamma NP}{a+bN+N^2}-\delta_1 F_1 N\right)}{\partial P} \\ \frac{\partial\left(sP\left(1-\frac{P}{K_2}\right)+\frac{\epsilon\gamma NP}{a+bN+N^2}-\delta_2 F_2 P\right)}{\partial N} & \frac{\partial\left(sP\left(1-\frac{P}{K_2}\right)+\frac{\epsilon\gamma NP}{a+bN+N^2}-\delta_2 F_2 P\right)}{\partial P} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} r\left(1-\frac{2N}{K_1}\right) - \frac{\gamma P(a-N^2)}{(a+bN+N^2)^2} - \delta_1 F_1 & -\frac{\gamma N}{a+bN+N^2} \\ \frac{\epsilon\gamma P(a-N^2)}{(a+bN+N^2)^2} & s\left(1-\frac{2P}{K_2}\right) + \frac{\epsilon\gamma N}{a+bN+N^2} - \delta_2 F_2 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

4.1.1. Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Kepunahan Kedua Populasi

Teorema 4.4.1

Titik ekuilibrium $E_0 = (N, P) = (0, 0)$ pada sistem persamaan (4.3) stabil asimtotik lokal jika $r < \delta_1 F_1$ dan $s < \delta_2 F_2$.

Bukti.

Mencari kestabilan lokal titik ekuilibrium kepunahan kedua populasi dengan mensubstitusikan titik ekuilibrium kepunahan kedua populasi $E_0 = (0, 0)$ ke dalam matriks Jacobian, sehingga

diperoleh matriks $J(E_0)$ sebagai berikut:

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} r - \delta_1 F_1 & 0 \\ 0 & s - \delta_2 F_2 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya mencari nilai eigen matriks $J(E_0)$

$$\det |J(E_0) - \lambda I| = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left| \begin{pmatrix} r - \delta_1 F_1 & 0 \\ 0 & s - \delta_2 F_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left| \begin{pmatrix} r - \delta_1 F_1 - \lambda & 0 \\ 0 & s - \delta_2 F_2 - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow (r - \delta_1 F_1 - \lambda)(s - \delta_2 F_2 - \lambda) - (0 \cdot 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (r - \delta_1 F_1 - \lambda)(s - \delta_2 F_2 - \lambda) = 0$$

Berdasarkan persamaan diatas, diperoleh nilai eigen dari titik ekuilibrium E_0 yaitu $\lambda_1 = r - \delta_1 F_1$ dan $\lambda_2 = s - \delta_2 F_2$. Berdasarkan Teorema 4.4.1 titik ekuilibrium kepunahan kedua populasi dikatakan stabil asimtotik lokal ketika $\lambda_{1,2} < 0$, maka

1. Akan ditunjukkan $\lambda_1 < 0$

Perhatikan bahwa

$$\lambda_1 = r - \delta_1 F_1 < 0$$

$$\Leftrightarrow r < \delta_1 F_1$$

2. Akan ditunjukkan $\lambda_2 < 0$

Perhatikan bahwa

$$\lambda_2 = s - \delta_2 F_2 < 0$$

$$\Leftrightarrow s < \delta_2 F_2$$

Maka dapat disimpulkan bahwa semua bagian real nilai eigen titik ekuilibrium E_0 bernilai negatif. Oleh karena itu, Teorema 4.4.1 terbukti dan dapat diketahui bahwa titik ekuilibrium $E_0 = (0, 0)$ bersifat stabil asimtotik lokal jika $r < \delta_1 F_1$ dan $s < \delta_2 F_2$. ■

4.2.2. Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Bebas Predator

Teorema 4.4.2

Titik ekuilibrium bebas predator $E_1 = (N, P) = \left(\frac{K_1(r-\delta_1 F_1)}{s}, 0\right)$ pada sistem persamaan (4.3) stabil asimtotik lokal jika $r > \delta_1 F_1$ dan $s + b_1 < \delta_2 F_2$, dengan $b_1 = \frac{\epsilon \gamma K r (r - \delta_1 F_1)}{ar^2 + bK r (r - \delta_1 F_1) + K^2 (r - \delta_1 F_1)^2}$.

Bukti.

Mencari kestabilan lokal titik ekuilibrium bebas predator dengan mensubstitusikan titik ekilibrium bebas predator $E_1 = \left(\frac{K_1(r-\delta_1 F_1)}{s}, 0\right)$ ke dalam matriks Jacobian, sehingga diperoleh matriks $J(E_1)$ sebagai berikut:

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -r + \delta_1 F_1 & -\frac{\gamma K_1 r (r - \delta_1 F_1)}{ar^2 + bK_1 r (r - \delta_1 F_1) + K_1^2 (r - \delta_1 F_1)^2} \\ 0 & s + \frac{\epsilon \gamma K_1 r (r - \delta_1 F_1)}{ar^2 + bK_1 r (r - \delta_1 F_1) + K_1^2 (r - \delta_1 F_1)^2} - \delta_2 F_2 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya mencari nilai eigen matriks $J(E_1)$

$$\det |J(E_1) - \lambda I| = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left| \begin{pmatrix} -r + \delta_1 F_1 & -\frac{\gamma K_1 r(r - \delta_1 F_1)}{ar^2 + bK_1 r(r - \delta_1 F_1) + K_1^2(r - \delta_1 F_1)^2} \\ 0 & s + \frac{\epsilon \gamma K_1 r(r - \delta_1 F_1)}{ar^2 + bK_1 r(r - \delta_1 F_1) + K_1^2(r - \delta_1 F_1)^2} - \delta_2 F_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left| \begin{pmatrix} -r + \delta_1 F_1 - \lambda & -\frac{\gamma K_1 r(r - \delta_1 F_1)}{ar^2 + bK_1 r(r - \delta_1 F_1) + K_1^2(r - \delta_1 F_1)^2} \\ 0 & s + \frac{\epsilon \gamma K_1 r(r - \delta_1 F_1)}{ar^2 + bK_1 r(r - \delta_1 F_1) + K_1^2(r - \delta_1 F_1)^2} - \delta_2 F_2 - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow (-r + \delta_1 F_1 - \lambda) \left(s + \frac{\epsilon \gamma K_1 r(r - \delta_1 F_1)}{ar^2 + bK_1 r(r - \delta_1 F_1) + K_1^2(r - \delta_1 F_1)^2} - \delta_2 F_2 - \lambda \right) - \left(-\frac{\gamma K_1 r(r - \delta_1 F_1)}{ar^2 + bK_1 r(r - \delta_1 F_1) + K_1^2(r - \delta_1 F_1)^2} \cdot 0 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-r + \delta_1 F_1 - \lambda) \left(s + \frac{\epsilon \gamma K_1 r(r - \delta_1 F_1)}{ar^2 + bK_1 r(r - \delta_1 F_1) + K_1^2(r - \delta_1 F_1)^2} - \delta_2 F_2 - \lambda \right) = 0$$

Berdasarkan persamaan diatas, diperoleh nilai eigen dari titik ekuilibrium E_1 yaitu $\lambda_1 = -r + \delta_1 F_1$ dan $\lambda_2 = s + \frac{\epsilon \gamma K_1 r(r - \delta_1 F_1)}{ar^2 + bK_1 r(r - \delta_1 F_1) + K_1^2(r - \delta_1 F_1)^2} - \delta_2 F_2$. Berdasarkan Teorema 4.4.2 titik ekuilibrium bebas predator dikatakan stabil asimtotik lokal ketika $\lambda_{1,2} < 0$. Maka

1. Akan ditunjukkan $\lambda_1 < 0$

Perhatikan bahwa

$$\lambda_1 = -r + \delta_1 F_1 < 0$$

$$\Leftrightarrow r > \delta_1 F_1$$

2. Akan ditunjukkan $\lambda_2 < 0$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= s + \frac{\epsilon\gamma K_1 r(r - \delta_1 F_1)}{ar^2 + bK_1 r(r - \delta_1 F_1) + K_1^2(r - \delta_1 F_1)^2} - \delta_2 F_2 < 0 \\ \Leftrightarrow s + \frac{\epsilon\gamma K_1 r(r - \delta_1 F_1)}{ar^2 + bK_1 r(r - \delta_1 F_1) + K_1^2(r - \delta_1 F_1)^2} &< \delta_2 F_2 \\ \Leftrightarrow s + b_1 &< \delta_2 F_2\end{aligned}$$

$$\text{dengan } b_1 = \frac{\epsilon\gamma K r(r - \delta_1 F_1)}{ar^2 + bK r(r - \delta_1 F_1) + K^2(r - \delta_1 F_1)^2}.$$

Maka dapat disimpulkan bahwa semua bagian real nilai eigen titik ekuilibrium E_1 bernilai negatif. Oleh karena itu, Teorema 4.4.2 terbukti dan dapat diketahui bahwa titik ekuilibrium $E_1 = \left(\frac{K_1(r - \delta_1 F_1)}{s}, 0\right)$ bersifat stabil asimtotik lokal jika $r > \delta_1 F_1$ dan $s + b_1 < \delta_2 F_2$. ■

4.3.3. Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Bebas Prey

Teorema 4.4.3

Titik ekuilibrium bebas prey $E_2 = (N, P) = \left(0, \frac{K_2(s - \delta_2 F_2)}{s}\right)$ pada sistem persamaan (4.3) stabil asimtotik lokal jika $r < \frac{K_2\gamma(s - \delta_2 F_2)}{sa} + \delta_1 F_1$ dan $s > \delta_2 F_2$.

Bukti.

Mencari kestabilan lokal titik ekuilibrium bebas prey dengan mensubstitusikan titik ekuilibrium bebas prey $E_2 = \left(0, \frac{K_2(s - \delta_2 F_2)}{s}\right)$ ke dalam matriks Jacobian, sehingga diperoleh matriks $J(E_2)$ sebagai berikut:

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} r - \frac{K_2\gamma(s-\delta_2F_2)}{sa} - \delta_1F_1 & 0 \\ \frac{\epsilon\gamma K_2(s-\delta_2F_2)}{sa} & -s + \delta_2F_2 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya mencari nilai eigen matriks $J(E_2)$

$$\det |J(E_2) - \lambda I| = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left| \begin{pmatrix} r - \frac{K_2\gamma(s-\delta_2F_2)}{sa} - \delta_1F_1 & 0 \\ \frac{\epsilon\gamma K_2(s-\delta_2F_2)}{sa} & -s + \delta_2F_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left| \begin{pmatrix} r - \frac{K_2\gamma(s-\delta_2F_2)}{sa} - \delta_1F_1 - \lambda & 0 \\ \frac{\epsilon\gamma K_2(s-\delta_2F_2)}{sa} & -s + \delta_2F_2 - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(r - \frac{K_2\gamma(s-\delta_2F_2)}{sa} - \delta_1F_1 - \lambda \right) (-s + \delta_2F_2 - \lambda) - \left(0 \cdot \frac{\epsilon\gamma K_2(s-\delta_2F_2)}{sa} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(r - \frac{K_2\gamma(s-\delta_2F_2)}{sa} - \delta_1F_1 - \lambda \right) (-s + \delta_2F_2 - \lambda) = 0$$

Berdasarkan persamaan diatas, diperoleh nilai eigen dari titik ekuilibrium E_2 yaitu $\lambda_1 = r - \frac{K_2\gamma(s-\delta_2F_2)}{sa} - \delta_1F_1$ dan $\lambda_2 = -s + \delta_2F_2$. Berdasarkan Teorema 4.4.3 titik ekuilibrium bebas prey dikatakan stabil asimtotik lokal ketika $\lambda_{1,2} < 0$. Maka

1. Akan ditunjukkan $\lambda_1 < 0$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= r - \frac{K_2\gamma(s - \delta_2 F_2)}{sa} - \delta_1 F_1 < 0 \\ \Leftrightarrow r &< \frac{K_2\gamma(s - \delta_2 F_2)}{sa} + \delta_1 F_1\end{aligned}$$

2. Akan ditunjukkan $\lambda_2 < 0$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= -s + \delta_2 F_2 < 0 \\ \Leftrightarrow s &> \delta_2 F_2\end{aligned}$$

Maka dapat disimpulkan bahwa semua bagian real nilai eigen titik ekuilibrium E_2 bernilai negatif. Oleh karena itu, Teorema 4.4.3 terbukti dan dapat diketahui bahwa titik ekuilibrium $E_2 = \left(0, \frac{K_2(s - \delta_2 F_2)}{s}\right)$ bersifat stabil asimtotik lokal jika $r < \frac{K_2\gamma(s - \delta_2 F_2)}{sa} + \delta_1 F_1$ dan $s > \delta_2 F_2$. ■

4.4.4. Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Kedua Populasi Hidup Bersama

Teorema 4.4.4

Titik ekuilibrium kedua populasi hidup bersama $E_3 = (N^*, P^*)$ pada sistem persamaan (4.3) stabil asimtotik lokal jika $\frac{2rN^*}{K_1} + \frac{\gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} + \frac{2sP^*}{K_2} > \frac{\epsilon\gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}}$ dan $\frac{2\epsilon\gamma r N^{*2}}{K_1(D)} < \frac{4rsN^*P^*}{K_1K_2} + \frac{2\gamma s P^{*2}}{K_2(D)^2} + \frac{2\epsilon\gamma^2 N^{*3}P^* - a\epsilon\gamma^2 N^*P^*}{(D)^3}$, dengan $D = a + bN^* + N^{*2}$.

Bukti.

Mencari kestabilan lokal titik ekuilibrium kedua populasi hidup bersama dengan mensubstitusikan titik ekilibrium kedua populasi hidup bersama $E_3 = (N^*, P^*)$ ke dalam matriks Jacobian, sehingga diperoleh matriks $J(E_3)$ sebagai berikut:

$$J(E_3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

dengan

$$a_{11} = r \left(1 - \frac{2N^*}{K_1} \right) - \frac{\gamma P^* (a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} - \delta_1 F_1$$

$$a_{12} = -\frac{\gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}}$$

$$a_{21} = \frac{\epsilon \gamma P^* (a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2}$$

$$a_{22} = s \left(1 - \frac{2P^*}{K_2} \right) + \frac{\epsilon \gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}} - \delta_2 F_2$$

Selanjutnya mencari nilai eigen matriks $J(E_3)$

$$\det |J(E_3) - \lambda I| = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left| \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{11}a_{22} - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + \lambda^2 - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda(-a_{11} - a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

Persamaan diatas dapat disederhanakan menjadi

$$\Leftrightarrow A_0\lambda^2 + A_1\lambda + A_2 = 0 \quad (4.28)$$

dengan

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = -a_{11} - a_{22}$$

$$A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Untuk mencari nilai eigen dari persamaan (4.28) dapat dilakukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Adapun langkah-langkah penyelesaian menggunakan kriteria Routh-Hurwitz sebagai berikut:

$$H_2 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ A_0 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 1 & A_2 \end{vmatrix}$$

$$\det(H_2) = A_1 \cdot A_2 - 0 \cdot 1$$

$$= A_1 A_2 > 0, \quad \text{jika } A_1 > 0 \text{ dan } A_2 > 0.$$

Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz λ_1 dan λ_2 akan bernilai negatif apabila $A_1 > 0$ dan $A_2 > 0$.

1. Akan ditunjukkan $A_1 > 0$

Perhatikan bahwa $A_1 = -a_{11} - a_{22}$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= - \left(r \left(1 - \frac{2N^*}{K_1} \right) - \frac{\gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} - \delta_1 F_1 \right) \\
 &\quad - \left(s \left(1 - \frac{2P^*}{K_2} \right) + \frac{\epsilon \gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}} - \delta_2 F_2 \right) > 0 \\
 &\Leftrightarrow -r + \frac{2rN^*}{K_1} + \frac{\gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} + \delta_1 F_1 - s + \frac{2sP^*}{K_2} \\
 &\quad - \frac{\epsilon \gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}} + \delta_2 F_2 > 0 \\
 &\Leftrightarrow -r - s + \delta_1 F_1 + \delta_2 F_2 + \frac{2rN^*}{K_1} + \frac{2sP^*}{K_2} + \frac{\gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} \\
 &\quad - \frac{\epsilon \gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}} > 0
 \end{aligned}$$

Berdasarkan syarat kestabilan E_0 pada Teorema 4.4.1, diketahui bahwa $r < \delta_1 F_1$ dan $s < \delta_2 F_2$, sehingga diperoleh

$$-r - s + \delta_1 F_1 + \delta_2 F_2 > 0$$

Maka, agar $A_1 > 0$, harus dipenuhi ketidaksamaan berikut

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \frac{2rN^*}{K_1} + \frac{\gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} + \frac{2sP^*}{K_2} - \frac{\epsilon \gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}} > 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{2rN^*}{K_1} + \frac{\gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} + \frac{2sP^*}{K_2} > \frac{\epsilon \gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}}
 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, terbukti bahwa $A_1 > 0$ dengan syarat $\frac{2rN^*}{K_1} + \frac{\gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} + \frac{2sP^*}{K_2} > \frac{\epsilon \gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}}$.

2. Akan ditunjukkan $A_2 > 0$

Perhatikan bahwa $A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \left(r \left(1 - \frac{2N^*}{K_1} \right) - \frac{\gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} - \delta_1 F_1 \right) \\
 &\quad \left(s \left(1 - \frac{2P^*}{K_2} \right) + \frac{\epsilon \gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}} - \delta_2 F_2 \right) \\
 &\quad - \left(-\frac{\gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}} \right) \left(\frac{\epsilon \gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} \right) > 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(r - \frac{2rN^*}{K_1} - \frac{\gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} - \delta_1 F_1 \right) \\
 &\quad \left(s - \frac{2sP^*}{K_2} + \frac{\epsilon \gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}} - \delta_2 F_2 \right) \\
 &\quad + \frac{\epsilon \gamma^2 N^{*3} P^* - a \epsilon \gamma^2 N^* P^*}{(a + bN^* + N^{*2})^3} > 0
 \end{aligned}$$

Berasarkan syarat kestabilan E_1 pada Teorema 4.4.2 dan syarat kestabilan E_2 pada Teorema 4.4.3, diketahui bahwa $r > \delta_1 F_1$ dan $s > \delta_2 F_2$, sehingga diperoleh

$$r - \delta_1 F_1 > 0 \quad \text{dan} \quad s - \delta_2 F_2 > 0$$

Maka, agar $A_2 > 0$, harus dipenuhi ketidaksamaan berikut

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \left(-\frac{2rN^*}{K_1} - \frac{\gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} \right) \left(-\frac{2sP^*}{K_2} + \frac{\epsilon \gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}} \right) \\
 &\quad + \frac{\epsilon \gamma^2 N^{*3} P^* - a \epsilon \gamma^2 N^* P^*}{(a + bN^* + N^{*2})^3} > 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{4rsN^*P^*}{K_1K_2} - \frac{2\epsilon\gamma rN^{*2}}{K_1(a+bN^*+N^{*2})} + \frac{2\gamma sP^{*2}}{K_2(a+bN^*+N^{*2})^2} \\
&\quad + \frac{\epsilon\gamma^2N^{*3}P^* - a\epsilon\gamma^2N^*P^*}{(a+bN^*+N^{*2})^3} + \frac{\epsilon\gamma^2N^{*3}P^* - a\epsilon\gamma^2N^*P^*}{(a+bN^*+N^{*2})^3} > 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{4rsN^*P^*}{K_1K_2} - \frac{2\epsilon\gamma rN^{*2}}{K_1(a+bN^*+N^{*2})} + \frac{2\gamma sP^{*2}}{K_2(a+bN^*+N^{*2})^2} \\
&\quad + \frac{2\epsilon\gamma^2N^{*3}P^* - a\epsilon\gamma^2N^*P^*}{(a+bN^*+N^{*2})^3} > 0
\end{aligned}$$

atau dapat dituliskan dengan

$$\frac{2\epsilon\gamma rN^{*2}}{K_1(D)} < \frac{4rsN^*P^*}{K_1K_2} + \frac{2\gamma sP^{*2}}{K_2(D)^2} + \frac{2\epsilon\gamma^2N^{*3}P^* - a\epsilon\gamma^2N^*P^*}{(D)^3}$$

dengan $D = a + bN^* + N^{*2}$. Oleh karena itu, terbukti bahwa $A_2 > 0$ dengan syarat $\frac{2\epsilon\gamma rN^{*2}}{K_1(D)} < \frac{4rsN^*P^*}{K_1K_2} + \frac{2\gamma sP^{*2}}{K_2(D)^2} + \frac{2\epsilon\gamma^2N^{*3}P^* - a\epsilon\gamma^2N^*P^*}{(D)^3}$.

Maka dapat disimpulkan bahwa semua bagian real nilai eigen titik ekuilibrium E_3 bernilai negatif. Oleh karena itu, Teorema 4.4.4 terbukti dan dapat diketahui bahwa titik ekuilibrium kedua populasi hidup bersama $E_3 = (N^*, P^*)$ stabil asimtotik lokal jika

$$\begin{aligned}
&\frac{2rN^*}{K_1} + \frac{\gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} + \frac{2sP^*}{K_2} > \frac{\epsilon\gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}}, \quad \text{dan} \\
&\frac{2\epsilon\gamma rN^{*2}}{K_1(D)} < \frac{4rsN^*P^*}{K_1K_2} + \frac{2\gamma sP^{*2}}{K_2(D)^2} + \frac{2\epsilon\gamma^2N^{*3}P^* - a\epsilon\gamma^2N^*P^*}{(D)^3},
\end{aligned}$$

dengan $D = a + bN^* + N^{*2}$.

■

Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh, maka syarat kestabilan dari titik ekuilibrium disajikan pada Tabel 4.5

Tabel 4.5. Syarat kestabilan titik ekuilibrium sistem persamaan (4.3)

Titik Ekuilibrium	Syarat Eksistensi	Sifat Kestabilan	Syarat Kestabilan
$E_0(N, P) = (0, 0)$	—	Stabil asimtotik lokal	Memenuhi Teorema 4.4.1
$E_1(N, P) = \left(\frac{K_1(r - \delta_1 F_1)}{r}, 0 \right)$	$r > \delta_1 F_1$	Stabil asimtotik lokal	Memenuhi Teorema 4.4.2
$E_2 = (N, P) = \left(0, \frac{K_2(s - \delta_2 F_2)}{s} \right)$	$s > \delta_2 F_2$	Stabil asimtotik lokal	Memenuhi Teorema 4.4.3
$E_3(N^*, P^*)$	Syarat N^* adalah memenuhi salah satu kemungkinan solusi berdasarkan aturan tanda Descartes pada Tabel 4.3. Syarat P^* adalah $s > \delta_2 F_2$.	Stabil asimtotik lokal	Memenuhi Teorema 4.4.4

4.5. Simulasi Numerik Model Matematika Predator-Prey dengan Fungsi Respon Holling Tipe IV dan Pemanenan Predator-Prey

Pada tahap ini, model matematika dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey yang dinyatakan dalam sistem persamaan (4.3) akan disimulasikan. Simulasi ini bertujuan untuk memastikan bahwa hasil analisis kestabilan sesuai dengan hasil simulasi numerik yang diperoleh serta untuk mengetahui perilaku sistem dalam persamaan (4.3). Simulasi dilakukan menggunakan *software* MATLAB R2013a dan hasilnya akan disajikan dalam bentuk grafik.

4.1.1. Simulasi Titik Ekuilibrium Kepunahan Kedua Populasi

Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi model matematika dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey ditunjukkan pada Tabel 4.6 berikut:

Tabel 4.6. Nilai parameter titik ekuilibrium kepunahan kedua populasi

Parameter	Nilai	Keterangan
r	3	(Kumar dan Poonia, 2023)
s	2	(Kumar dan Poonia, 2023)
K_1	100	(Kumar dan Poonia, 2023)
K_2	40	(Kumar dan Poonia, 2023)
γ	0,6	(Kumar dan Poonia, 2023)
ϵ	0,7	(Kumar dan Poonia, 2023)
a	0,3	(Sirisubtawee et al., 2021)
b	0,05	(Sirisubtawee et al., 2021)
δ_1	0,95	asumsi

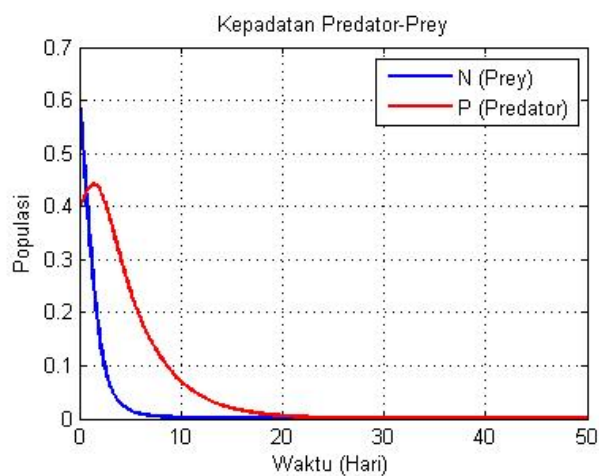
Parameter	Nilai	Keterangan
δ_2	0,9	(Putra et al., 2023)
F_1	3,25	(Kumar dan Poonia, 2023)
F_2	2,5	(Kumar dan Poonia, 2023)

Selanjutnya, kestabilan titik ekuilibrium $E_0 = (0, 0)$ akan dianalisis berdasarkan Teorema 4.4.1. Titik ekuilibrium ini dikatakan stabil asimtotik lokal karena memenuhi kedua syarat dalam Teorema 4.4.1 yaitu:

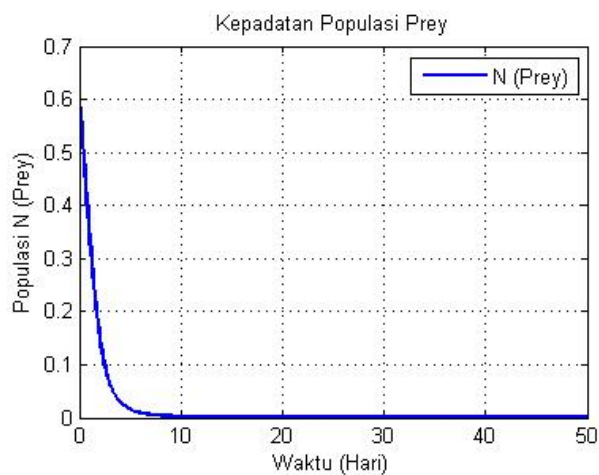
1. Karena $r = 3$ kurang dari $\delta_1 F_1 = (0,95 \times 3,25) = 3,0875$, maka syarat pertama terpenuhi.
2. Karena $s = 2$ kurang dari $\delta_2 F_2 = (0,9 \times 2,55) = 2,25$, maka syarat kedua terpenuhi.

Dengan terpenuhinya kedua syarat tersebut, maka dapat diketahui bahwa titik ekuilibrium E_0 bersifat stabil asimtotik lokal. Untuk memvalidasi hasil analisis tersebut, dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta pada sistem persamaan (4.3) dengan bantuan *software* MATLAB R2013a. Berdasarkan hasil iterasi, diketahui bahwa solusi perilaku kepadatan populasi prey menuju nilai titik ekuilibriumnya, yaitu 0 dan kepadatan populasi predator menuju nilai titik ekuilibriumnya, yaitu 0. Hasil iterasi secara lengkap dapat dilihat pada Lampiran 3.

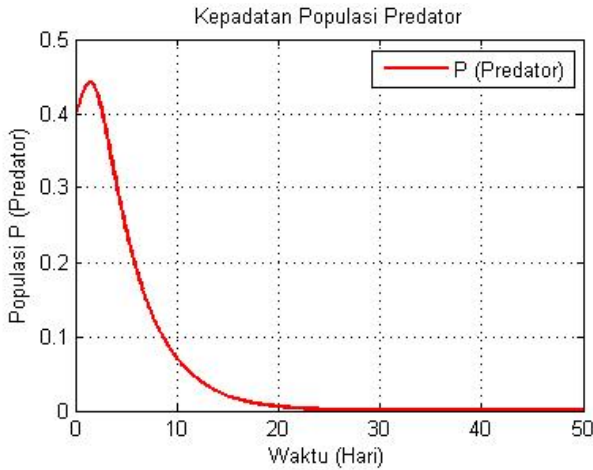
Selanjutnya, hasil simulasi menggunakan *software* MATLAB R2013a dalam rentang waktu 50 hari ditampilkan pada gambar berikut.



Gambar 4.1. Kepadatan populasi predator-prey



Gambar 4.2. Kepadatan populasi prey



Gambar 4.3. Kepadatan populasi predator

Gambar (4.1)-(4.3) menunjukkan bahwa solusi sistem selalu menuju pada titik ekuilibrium $E_0 = (0,0)$. Titik ekuilibrium ini merepresentasikan kondisi di mana kepadatan populasi predator dan prey secara bertahap menurun hingga mencapai nol. Dengan kata lain, dalam jangka waktu panjang, kedua populasi mengalami kepunahan.

Hal ini sesuai dengan Teorema 4.4.1, yang menyatakan bahwa titik ekuilibrium E_0 bersifat stabil asimtotik lokal. Artinya, jika kondisi awal populasi berada di sekitar E_0 , maka populasi tersebut akan terus menurun sampai mengalami kepunahan seiring waktu. Fenomena ini menunjukkan bahwa dalam kondisi model yang dianalisis, tidak ada populasi yang dapat bertahan hidup.

4.2.2. Simulasi Titik Ekuilibrium Bebas Predator

Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi model matematika dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey ditunjukkan pada Tabel 4.7 berikut:

Tabel 4.7. Nilai parameter titik ekuilibrium bebas predator

Parameter	Nilai	Keterangan
r	3	(Kumar dan Poonia, 2023)
s	2	(Kumar dan Poonia, 2023)
K_1	100	(Kumar dan Poonia, 2023)
K_2	40	(Kumar dan Poonia, 2023)
γ	0,6	(Kumar dan Poonia, 2023)
ϵ	0,7	(Kumar dan Poonia, 2023)
a	0,3	(Sirisubtawee et al., 2021)
b	0,05	(Sirisubtawee et al., 2021)
δ_1	0,5	(Kumar dan Poonia, 2023)
δ_2	0,9	(Putra et al., 2023)
F_1	3,25	(Kumar dan Poonia, 2023)
F_2	2,5	(Kumar dan Poonia, 2023)

Nilai parameter pada Tabel 4.7 memenuhi syarat eksis titik ekuilibrium E_1 yaitu $r > \delta_1 F_1 = 3 > 1,625$. Selanjutnya, kestabilan titik ekuilibrium $E_1 = \left(\frac{K_1(r - \delta_1 F_1)}{s}; 0 \right) = (45,83; 0)$ akan dianalisis berdasarkan Teorema 4.4.2. Titik ekuilibrium ini dikatakan stabil asimtotik lokal karena memenuhi kedua syarat pada Teorema 4.4.2 yaitu:

1. Karena $r = 3$ lebih dari $\delta_1 F_1 = (0,5 \times 3,25) = 1,625$, maka syarat pertama terpenuhi.

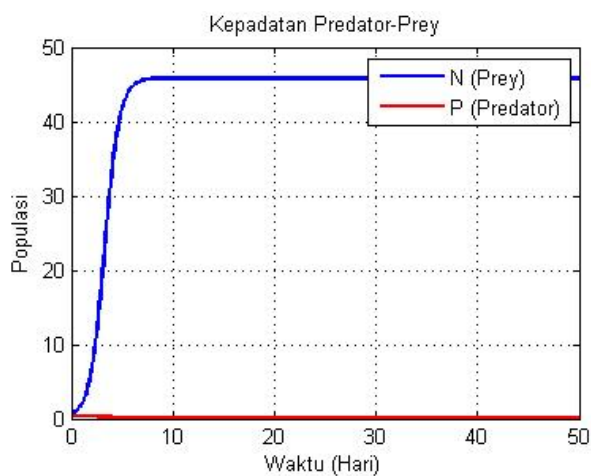
2. Karena

$$\begin{aligned}
 s &+ \frac{\epsilon\gamma K_1 r(r - \delta_1 F_1)}{ar^2 + bK_1 r(r - \delta_1 F_1) + K_1^2(r - \delta_1 F_1)^2} \\
 &= 2 + \frac{0,7 \cdot 0,6 \cdot 100 \cdot 3 \cdot (3 - 0,5 \cdot 3,25)}{0,3 \cdot 3^2 + 0,05 \cdot 100 \cdot 3 \cdot (100 - 0,5 \cdot 3,25) + 100^2(3 - 0,5 \cdot 3,25)^2} \\
 &= 2 + \frac{126(3 - 1,625)}{2,7 + 15(100 - 1,625) + 10000(3 - 1,625)^2} \\
 &= 2 - \frac{6930}{815383} \\
 &= \frac{1637696}{815383} \\
 &= 2,0085
 \end{aligned}$$

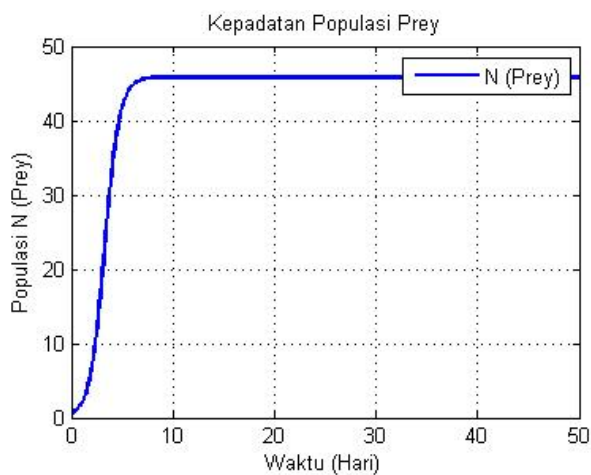
kurang dari $\delta_2 F_2 = (0,9 \times 2,5) = 2,25$, maka syarat kedua terpenuhi.

Dengan terpenuhinya kedua syarat tersebut, maka dapat diketahui bahwa titik ekuilibrium E_1 bersifat stabil asimtotik lokal. Untuk memvalidasi hasil analisis tersebut, dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta pada sistem persamaan (4.3) dengan *software* MATLAB R2013a. Berdasarkan hasil iterasi, diketahui bahwa solusi perilaku kepadatan populasi prey menuju nilai titik ekuilibriumnya, yaitu 45.83 dan kepadatan populasi predator menuju nilai titik ekuilibriumnya, yaitu 0. Hasil iterasi dapat dilihat pada Lampiran 3.

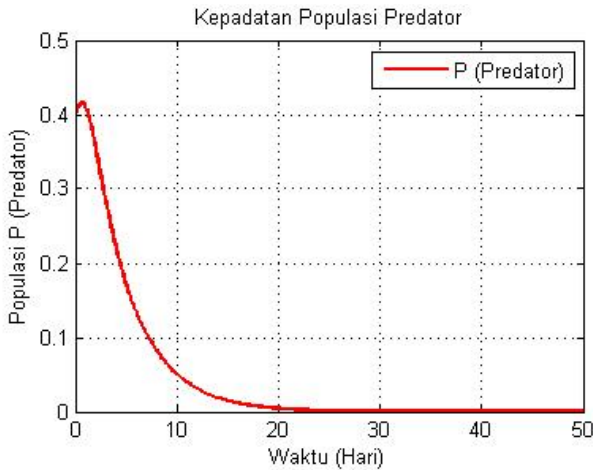
Selanjutnya, hasil simulasi menggunakan *software* MATLAB R2013a dalam rentang waktu 50 hari ditampilkan pada gambar berikut.



Gambar 4.4. Kepadatan populasi predator-prey



Gambar 4.5. Kepadatan populasi prey



Gambar 4.6. Kepadatan populasi predator

Gambar (4.4)-(4.6) menunjukkan bahwa ketika parameter $r > \delta_1 F_1$, solusi sistem akan selalu menuju pada titik ekuilibrium $E_1 = (45, 83; 0)$. Ini menunjukkan bahwa dalam kondisi tersebut, kepadatan populasi prey tetap bertahan dalam ekosistem, sedangkan kepadatan populasi predator mengalami kepunahan.

Hal ini sesuai dengan Teorema 4.4.2, yang menyatakan bahwa titik ekuilibrium E_1 bersifat stabil asimtotik lokal. Dengan kata lain, jika kondisi awal populasi berada di sekitar E_1 , maka solusi sistem akan mendekati titik tersebut seiring waktu. Fenomena ini menunjukkan bahwa dalam kondisi model yang dianalisis, populasi prey mampu mempertahankan keberadaannya meskipun predator tidak dapat bertahan, yang dapat mencerminkan situasi kepunahan predator akibat ketidakseimbangan ekosistem atau faktor lingkungan lainnya.

4.3.3. Simulasi Titik Ekuilibrium Bebas Prey

Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi model matematika dengan fungsi respon holling tipe IV dan pemanenan predator-prey ditunjukkan pada Tabel 4.8 berikut:

Tabel 4.8. Nilai parameter titik ekuilibrium bebas prey

Parameter	Nilai	Keterangan
r	3	(Kumar dan Poonia, 2023)
s	2	(Kumar dan Poonia, 2023)
K_1	100	(Kumar dan Poonia, 2023)
K_2	40	(Kumar dan Poonia, 2023)
γ	0,6	(Kumar dan Poonia, 2023)
ϵ	0,7	(Kumar dan Poonia, 2023)
a	0,3	(Sirisubtawee et al., 2021)
b	0,05	(Sirisubtawee et al., 2021)
δ_1	0,8	asumsi
δ_2	0,65	(Kumar dan Poonia, 2023)
F_1	3,25	(Kumar dan Poonia, 2023)
F_2	2,5	(Kumar dan Poonia, 2023)

Nilai parameter pada Tabel 4.8 memenuhi syarat eksis titik ekuilibrium E_2 yaitu $s > \delta_2 F_2 = 2 > 1,625$. Selanjutnya, kestabilan titik ekuilibirum $E_2 = \left(0, \frac{K_2(s - \delta_2 F_2)}{s}\right) = (0; 7,5)$ akan dianalisis berdasarkan Teorema 4.4.3. Titik ekuilibrium dikatakan stabil asimtotik lokal karena memenuhi kedua syarat pada Teorema 4.4.3 yakni:

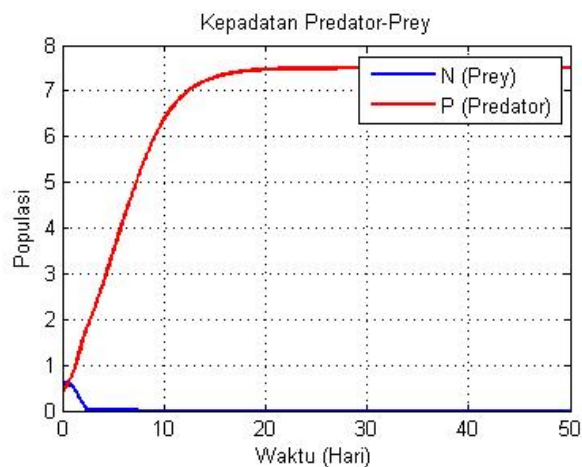
1. Karena $r = 3$ kurang dari

$$\begin{aligned}
 & \frac{K_2 \gamma (s - \delta_2 F_2)}{sa} + \delta_1 F_1 \\
 &= \frac{40 \cdot 0,6 \cdot (2 - 0,65 \cdot 2,5)}{2 \cdot 0,3} + 0,8 \cdot 3,25 \\
 &= \frac{24 \cdot (2 - 1,625)}{0,6} + 2,6 \\
 &= \frac{24 \cdot (0,375)}{0,6} + 2,6 \\
 &= \frac{9}{0,6} + 2,6 \\
 &= 15 + 2,6 \\
 &= 17,6, \quad \text{maka syarat pertama terpenuhi.}
 \end{aligned}$$

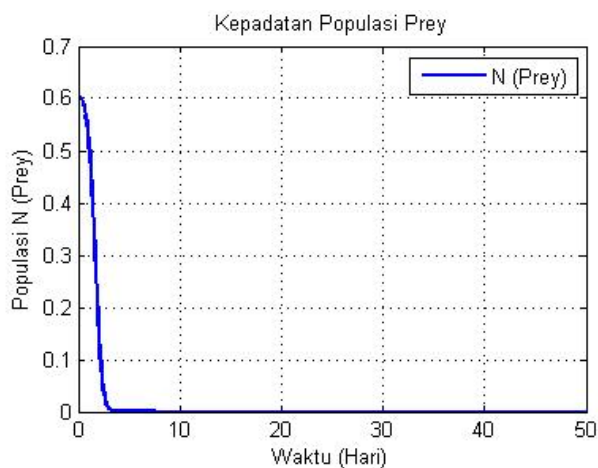
2. Karena $s = 2$ lebih dari $\delta_2 F_2 = (0,65 \times 2,5) = 1,625$, maka syarat kedua terpenuhi.

Dengan terpenuhinya kedua syarat tersebut, maka dapat diketahui bahwa titik ekuilibrium E_2 bersifat stabil asimtotik lokal. Untuk memvalidasi hasil analisis tersebut, dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta pada sistem persamaan (4.3) dengan *software* MATLAB R2013a. Berdasarkan hasil iterasi, diketahui bahwa solusi perilaku kepadatan populasi prey menuju nilai titik ekuilibriumnya, yaitu 0 dan kepadatan populasi predator menuju nilai titik ekuilibriumnya, yaitu 7,5. Hasil iterasi dapat dilihat pada Lampiran 3.

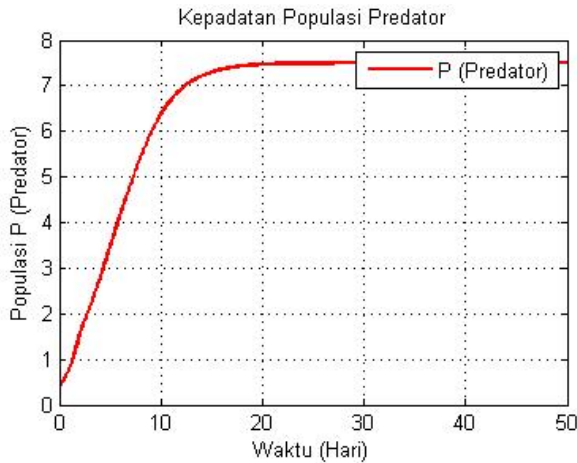
Selanjutnya, hasil simulasi menggunakan *software* MATLAB R2013a dalam rentang waktu 50 hari ditampilkan pada gambar berikut.



Gambar 4.7. Kepadatan populasi predator-prey



Gambar 4.8. Kepadatan populasi prey



Gambar 4.9. Kepadatan populasi predator

Gambar (4.7)-(4.9) menunjukkan bahwa ketika parameter $s > \delta_2 F_2$, solusi sistem akan selalu menuju pada titik ekuilibrium $E_2 = (0; 7, 5)$. Ini menunjukkan bahwa dalam kondisi tersebut, kepadatan populasi predator tetap bertahan dalam ekosistem, sedangkan kepadatan populasi prey mengalami kepunahan.

Hal ini sesuai dengan Teorema 4.4.3, yang menyatakan bahwa titik ekuilibrium E_2 bersifat stabil asimtotik lokal. Dengan kata lain, jika kondisi awal populasi berada di sekitar E_2 , maka solusi sistem akan mendekati titik tersebut seiring waktu. Fenomena ini menunjukkan bahwa dalam kondisi model yang dianalisis, populasi predator mampu mempertahankan keberadaanya meskipun prey tidak dapat bertahan, yang dapat mencerminkan situasi kepunahan prey akibat ketidakseimbangan ekosistem atau faktor lingkungan lainnya.

4.4.4. Simulasi Titik Ekuilibrium Kedua Populasi Hidup Bersama

Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi model matematika dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey ditunjukkan pada Tabel 4.9 berikut:

Tabel 4.9. Nilai parameter titik ekuilibrium kedua populasi hidup bersama

Parameter	Nilai	Keterangan
r	3	(Kumar dan Poonia, 2023)
s	2	(Kumar dan Poonia, 2023)
K_1	100	(Kumar dan Poonia, 2023)
K_2	40	(Kumar dan Poonia, 2023)
γ	0,4	(Mahmudah dan Rifai, 2020)
ϵ	0,7	(Kumar dan Poonia, 2023)
a	2,2	Asumsi
b	0,9	(Liu & Huang, 2020)
δ_1	0,5	(Kumar dan Poonia, 2023)
δ_2	0,65	(Kumar dan Poonia, 2023)
F_1	3,25	(Kumar dan Poonia, 2023)
F_2	2,5	(Kumar dan Poonia, 2023)

Berdasarkan nilai parameter yang terdapat pada Tabel 4.9, maka diperoleh titik ekuilibrium kedua populasi hidup bersama sebagai berikut:

1. Titik ekuilibrium populasi prey (N^*)

Nilai N^* diperoleh dari persamaan (4.20) berikut

$$a_1 N^{*5} + a_2 N^{*4} + a_3 N^{*3} + a_4 N^{*2} + a_5 N^* + a_6 = 0$$

N^* diketahui menggunakan aturan tanda descartes, dengan

menggunakan bantuan *software* MATLAB R2013a sehingga diperoleh,

$$6N^{*5} - 264,2N^{*4} - 455,34N^{*3} - 1186,43N^{*2} - 397,04N^{*} - 572,75 = 0 \quad (4.29)$$

Persamaan (4.29) sesuai dengan kemungkinan 32 pada Tabel (4.3). Lalu diperoleh lima solusi N^{*} yakni

$$N^{*} = 45,7859 + 0,0000i; -0,0771 - 0,7667i; -0,0771 + 0,7667i; \\ -0,7991 - 1,6948i; -0,7991 + 1,6948i$$

Berdasarkan aturan tanda Descartes, maka N^{*} memiliki satu akar real positif yaitu 45,7859. Sehingga nilai N^{*} adalah 45,7859.

2. Titik ekuilibrium populasi predator (P^{*})

$$P^{*} = \frac{K_2}{s} \left(s - \delta_2 F_2 + \frac{\epsilon \gamma N^{*}}{a + bN^{*} + N^{*2}} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{40}{2} \left(2 - 2,5 \cdot 0,65 + \frac{0,7 \cdot 0,4 \cdot 45,7859}{2,2 + 0,9 \cdot 45,7859 + 45,7859^2} \right) \\ \Leftrightarrow 20 \left(2 - 1,625 + \frac{12,820052}{2,2 + 41,20731 + 2096,34864} \right) \\ \Leftrightarrow 20 \left(2 - 1,625 + \frac{12,820052}{2139,75595} \right) \\ \Leftrightarrow 20 (2 - 1,625 + 0,00599136) \\ \Leftrightarrow 20 (0,38099136) \\ \Leftrightarrow 7,6198272$$

Sehingga nilai P^{*} adalah 7,6198. Kemudian P^{*} ada karena

memenuhi syarat $s > \delta_2 F_2 = 2 > 0$, $65 \cdot 2,5 = 2 > 1$, 625 . Karena syarat terpenuhi maka dapat diketahui bahwa titik ekuilibrium E_3 eksis dengan nilai titik ekuilibrium $E_3 = (45,7859; 7,6198)$. Berdasarkan nilai titik ekuilibrium yang sudah diketahui, titik ekuilibrium tersebut akan diperiksa kestabilannya menggunakan Teorema 4.4.4.

Berdasarkan Teorema 4.4.4 titik ekuilibrium $E_3 = (45,7859; 7,6198)$ dikatakan stabil karena memenuhi syarat, yaitu:

$$1. A_1 > 0$$

Diketahui

$$\begin{aligned} A_1 &= - \left(r \left(1 - \frac{2N^*}{K_1} \right) - \frac{\gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} - \delta_1 F_1 \right) \\ &\quad - \left(s \left(1 - \frac{2P^*}{K_2} \right) + \frac{\epsilon \gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}} - \delta_2 F_2 \right) > 0 \\ \Leftrightarrow -r + \frac{2rN^*}{K_1} + \frac{\gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} + \delta_1 F_1 - s + \frac{2sP^*}{K_2} \\ &\quad - \frac{\epsilon \gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}} + \delta_2 F_2 > 0 \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -3 + \frac{2 \cdot 3 \cdot 45,7859}{100} + \frac{0,4 \cdot 7,6198 \cdot (2,2 - 45,7859^2)}{(2,2 + 0,9 \cdot 45,7859 + (45,7859)^2)^2} \\ + 0,5 \cdot 3,25 - 2 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 7,6198}{40} - \frac{0,7 \cdot 0,4 \cdot 45,7859}{2,2 + 0,9 \cdot 45,7859 + (45,7859)^2} \\ + 0,65 \cdot 2,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -3 + \frac{274,7154}{100} + \frac{3,04792 \cdot (2,2 - 2096,34864)}{(2,2 + 41,20731 + 2096,34864)^2} \\
&\quad + 1,625 - 2 + \frac{30,4792}{40} - \frac{12,820052}{2,2 + 41,20731 + 2096,34864} \\
&\quad + 1,625 \\
&\Leftrightarrow -3 + 2,747154 + \frac{3,04792 \cdot (-2094,14864)}{(2139,75595)^2} + 1,625 - 2 \\
&\quad + 0,76198 - \frac{12,820052}{2139,75595} + 1,625 \\
&\Leftrightarrow -0,252846 + \frac{-6382,79752}{4578555,53} + 0,38698 - 0,00599136 \\
&\quad + 1,625 \\
&\Leftrightarrow -0,252846 - 0,00139406 + 0,38698 - 0,00599136 + 1,625 \\
&\Leftrightarrow 1,75174858
\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh nilai akhir $A_1 = 1,75174858$. Karena A_1 bernilai positif, yaitu lebih dari 0, maka syarat pertama terpenuhi.

2. $A_2 > 0$

Diketahui

$$A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

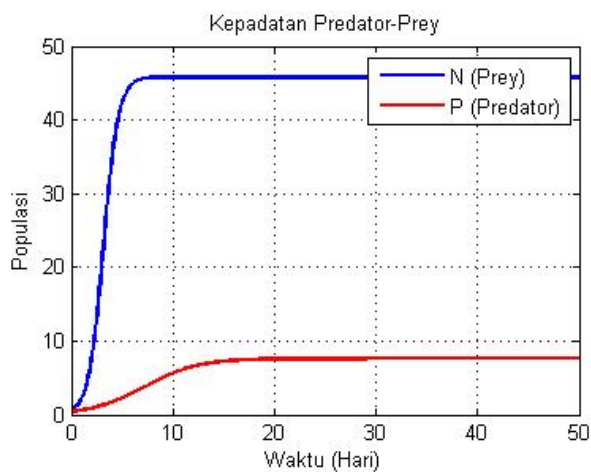
$$\begin{aligned} A_2 = & \left(r \left(1 - \frac{2N^*}{K_1} \right) - \frac{\gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} - \delta_1 F_1 \right) \\ & \left(s \left(1 - \frac{2P^*}{K_2} \right) + \frac{\epsilon \gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}} - \delta_2 F_2 \right) \\ & - \left(-\frac{\gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}} \right) \left(\frac{\epsilon \gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} \right) \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh nilai akhir $A_2 = 0,522234$. Karena A_2 bernilai positif, yaitu lebih dari 0, maka syarat pertama terpenuhi.

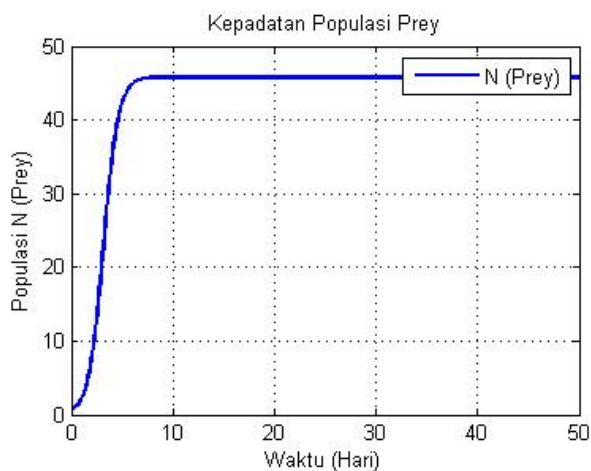
Perhitungan manual untuk memperoleh A_2 dapat dilihat pada Lampiran 2.

Dengan terpenuhinya kedua syarat tersebut, maka dapat diketahui bahwa titik ekuilibrium E_3 bersifat stabil asimtotik lokal. Untuk memvalidasi hasil analisis tersebut, dilakukan simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta pada sistem (4.3) dengan *software* MATLAB R2013a. Berdasarkan hasil iterasi, diketahui bahwa solusi perilaku kepadatan populasi prey menuju nilai titik ekuilibriumnya, yaitu 45,7859 dan kepadatan populasi predator menuju nilai titik ekuilibriumnya, yaitu 7,6198. Hasil iterasi dapat dilihat pada Lampiran 3.

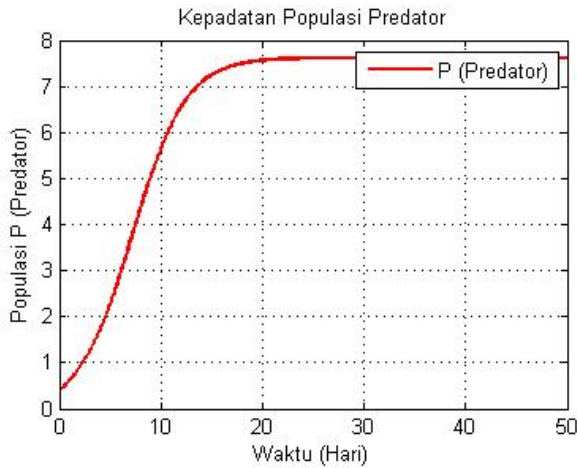
Selanjutnya, hasil simulasi menggunakan *software* MATLAB R2013a dalam rentang waktu 50 hari ditampilkan pada gambar berikut.



Gambar 4.10. Kepadatan populasi predator-prey



Gambar 4.11. Kepadatan populasi prey



Gambar 4.12. Kepadatan populasi predator

Berdasarkan Gambar (4.10)-(4.12) dapat diketahui bahwa peningkatan koefisien pertahanan kelompok prey (a) dari 0,3 menjadi 2,2 serta peningkatan koefisien kepadatan populasi prey yang mempengaruhi laju pemangsaan predator terhadap prey (b) dari 0,05 menjadi 0,9, berdampak signifikan terhadap dinamika populasi dalam sistem. Perubahan parameter ini menyebabkan kedua populasi predator dan prey mampu mempertahankan eksistensinya dalam ekosistem dan hidup berdampingan.

Gambar (4.10)-(4.12) menunjukkan bahwa solusi sistem selalu menuju titik ekuilibrium $E_3 = (45,7859; 7,6198)$. Artinya, sistem berada dalam kondisi stabil di mana kedua populasi tidak mengalami kepunahan, melainkan mencapai keseimbangan populasi tertentu. Hal ini sesuai dengan Teorema 4.4.4, yang menyatakan bahwa titik ekuilibrium E_3 bersifat stabil asimtotik lokal.

BAB V

PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dari model predator-prey dengan fungsi Respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Model predator-prey dengan fungsi Respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey dapat disusun dalam sistem persamaan diferensial nonlinear berikut:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K_1}\right) - \frac{\gamma NP}{a+bN+N^2} - \delta_1 F_1 N \\ \frac{dP}{dt} = sP \left(1 - \frac{P}{K_2}\right) + \frac{\epsilon \gamma NP}{a+bN+N^2} - \delta_2 F_2 P \end{cases}$$

2. Titik ekuilibrium model predator-prey dengan fungsi Respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey adalah sebagai berikut:

- (a) Titik ekuilibrium kepunahan kedua populasi $E_0 = (N, P) = (0, 0)$ bersifat stabil asimtotik lokal jika $r < \delta_1 F_1$ dan $s < \delta_2 F_2$.
- (b) Titik ekuilibrium bebas predator atau kepunahan predator $E_1 = (N, P) = \left(\frac{K_1(r-\delta_1 F_1)}{s}, 0\right)$ eksis jika $r > \delta_1 F_1$, sedangkan untuk kestabilan titik ekuilibrium bebas predator atau kepunahan predator bersifat stabil asimtotik lokal jika $r > \delta_1 F_1$ dan $s + b_1 < \delta_2 F_2$.

- (c) Titik ekuilibrium bebas prey atau kepunahan prey $E_2 = (N, P) = \left(0, \frac{K_2(s - \delta_2 F_2)}{s}\right)$, eksis jika $s > \delta_2 F_2$, sedangkan untuk kestabilan titik ekuilibrium bebas prey atau kepunahan prey bersifat stabil asimtotik lokal jika $r < \frac{K_2 \gamma (s - \delta_2 F_2)}{sa} + \delta_1 F_1$ dan $s > \delta_2 F_2$.
- (d) Titik ekuilibrium kedua populasi hidup bersama adalah $E_3 = (N^*, P^*)$, nilai P^* dikatakan eksis jika $s > \delta_2 F_2$, nilai N^* dikatakan eksis jika memenuhi salah satu kemungkinan dalam Tabel (4.3). Sedangkan untuk kestabilan titik ekuilibrium kedua populasi hidup bersama bersifat stabil asimtotik lokal jika

$$\frac{2rN^*}{K_1} + \frac{\gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} + \frac{2sP^*}{K_2} > \frac{\epsilon \gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}}, \quad \text{dan}$$

$$\frac{2\epsilon \gamma r N^{*2}}{K_1(D)} < \frac{4rsN^*P^*}{K_1K_2} + \frac{2\gamma s P^{*2}}{K_2(D)^2} + \frac{2\epsilon \gamma^2 N^{*3}P^* - a\epsilon \gamma^2 N^*P^*}{(D)^3},$$

dengan $D = a + bN^* + N^{*2}$.

3. Simulasi Numerik

Berdasarkan hasil simulasi numerik menggunakan *software* MATLAB R2013a terhadap model predator-prey dengan fungsi Respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey, diperoleh bahwa titik ekuilibrium E_0, E_1, E_2 dan E_3 bersifat stabil asimtotik lokal dalam rentang parameter tertentu. Titik ekuilibrium E_0 , yang merepresentasikan kepunahan kedua populasi bersifat stabil asimtotik lokal apabila koefisien daya tangkap untuk populasi prey (δ_1) dan predator (δ_2) bernilai tinggi.

Titik ekuilibrium E_1 , yaitu kondisi bebas predator, stabil asimtotik lokal jika koefisien daya tangkap untuk populasi

prey (δ_1) kecil dan daya tangkap untuk populasi predator (δ_2) tetap tinggi, yang mencerminkan kondisi di mana populasi predator punah akibat pemanenan. Sebaliknya, titik ekuilibrium E_2 , yakni kondisi bebas prey, akan stabil jika koefisien daya tangkap untuk populasi prey (δ_1) tinggi dan daya tangkap untuk populasi predator (δ_2) kecil, yang mencerminkan kondisi di mana predator bertahan hidup sementara populasi prey punah akibat pemanenan. Sementara itu, titik ekuilibrium E_3 yang menggambarkan kedua populasi hidup bersama, menjadi stabil ketika laju pemangsaan predator terhadap prey γ cukup kecil, serta koefisien pertahanan kelompok prey a dan koefisien kepadatan populasi prey yang mempengaruhi laju pemangsaan b berilai tinggi.

5.2. Saran

1. Bagi Peneliti

Diharapkan penelitian ini bisa menambah wawasan dan pemahaman lebih lanjut terhadap mengaplikasikan ilmu pengetahuan terutama matematika terapan yang telah digunakan dalam penelitian sebagai skripsi.

2. Bagi peneliti selanjutnya

Pada penelitian ini menggunakan dua variabel, yaitu populasi prey dan predator. Disarankan untuk penelitian selanjutnya dapat menambahkan variabel dan saran yang mempengaruhi perubahan dari kepadatan populasi prey dan predator.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdullah Bin Muhammad, Abdurrahman Bin Ishak Al-Syikh. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 7, Mu-assasah Daar Al-Hilaal*. Kairo: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.
- Altwegg, R., Eng, M., Caspersen, S., & Anholt, B. R. 2006. Functional response and prey defence level in an experimental predator-prey system. *Evolutionary Ecology Research*. 8: 115–128.
- Andrews, J. H. 1968. A mathematical model for the predator-prey interaction. *Journal of Theoretical Biology*. 21(2): 269-276.
- Anton, H., & Rorres, C. 2013. *Elementary Linear Algebra: Applications Version 11th Editon*. United States of America: John Wiley & Sons, Inc.
- Arnold, V. I. 1992. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. 2009. *Elementary Diferential Equations Ninth Edition*. New york: United State of America.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. 2012. *Elementary Diferential Equations and Boundary Value Problem*. John Wiley Sons Inc. United State of America.
- Chapra, Steven C dan Canale, Raymond P. 2010. *Numerical Method For Engineers Sixth Edition*. NewYork : McGraw-Hill.
- Darmawan, Randhi Nanang & Hariastuti, Rachmaniah Mirza. 2018. *Analisis Simulasi Solusi Numerik Model Lotka-Volterra*

- dengan Metode Runge-Kutta-Fehlberg. Kubik. Universitas PGRI Banyuwangi.
- Dawes, J. 2003. *Concise Enchylopedia of popular Freshwater Tropical Fish*. Parragon.
- Didiharyono. 2016. Analisis Kestabilan dan Keuntungan Maksimum Model Predator-Prey Fungsi Respon tipe Holling III dengan Usaha Pemanenan. *Jurnal Masagena*. 11(2): 314-326.
- Edwards, Henry C dan Penney, David E. 2008. *Elementary Differential Equations (6th ed.)*. New Jersey: Pearson education, Inc.
- Ghosh, Uttam., Majumdar, Pahlad., & Ghosh, Jayanta Kumar. 2020. Bifurcation Analysis of a two Dimensional Predator-Prey model with Holling Type IV Functional Response and Non-Linear Predator Harvesting. *Journal of Biological Systems*. 28(4).
- Guin, L. N., Murmu, R., Baek, H., & Kim, K.H. 2020. Dynamical Analysis of a Beddington-DeAngelis Interacting Species System with Prey Harvesting. *Mathematical Problems in Engineering*. 20: 1-22. <https://doi.org/10.1155/2020/7596394>.
- Haque, M. 2011. A detailed study of the Beddington-DeAngelis predator-prey model. *Mathematical Biosciences*. 234(1): 1-16.

- Huang, Q., & Xiao, Y. 2004. Dynamics of a predator-prey system with a Holling type IV functional response. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 297(1): 365-388.
- Hunsicker, M. E et al., 2011. *Functional responses and scaling in predator-prey interactions of marine fishes: Contemporary Issues and Emerging Concepts*. Ecology Letters. 14: 1288-1299. doi: 10.1111/j.1461-0248.2011.01696.x.
- Kaur, M., Rani, R., Bhatia, R., Verma, G. N., & Ahirwar, S. 2020. Dynamical study of quadratic harvesting of a predator-prey model with Monod-Haldane functional response. *Journal of Applied Mathematics and Computing*. <https://doi.org/10.1007/s12190-020-01438-0>.
- Kumar, A. & Poonia, Ashish. 2023. Dynamical analysis and optimal harvesting policy of a prey-predator model with Holling type-III functional response. <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-2710709/v1>.
- Kurniawati, I., & Rosyidi, A. H. 2019. Profil Pemodelan Matematika Siswa SMP dalam Menyelesaikan Masalah Pada Materi Fungsi Linear. *MATHEdusa Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*. 8: 174-180.
- Lebl, Jiri. 2019. *Differential Equations for Engineer*. California: Creative Common Attribution.
- Liu, X., & Huang, Q. 2020. Analysis of optimal harvesting of a predator-prey model with Holling type IV functional response. *Ecological Complexity*. 42. <https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2020.100816>.

- Mahmudah, Wilda., & Rifai, Mohammad. 2020. "Analisis Kestabilan Model Prey-Predator Dengan Penambahan Makanan Alternatif Dan Fungsi Respon Holling Tipe III". *Buana Matematika : Jurnal Ilmiah Matematika Dan Pendidikan Matematika*. 10 (2): 133-46.
- Majumdar, P., Debnath, S., Sarkar, S., & Ghosh, U. 2022. The Complex Dynamical Behavior of a Prey-Predator Model with Holling Type-III Functional Response and Non-Linear Predator Harvesting. *International Journal of Modelling and Simulation*. 42(2): 287–304.
- Maknun, Djohar. 2017. *Ekologi Populasi, Komunitas, Ekosistem Mewujudkan Kampus Hijau Asri, Islami dan Ilmiah*. Cirebon: Nurjati Press.
- Murray, J. D. 2001. *Mathematical Biology I : An Introduction Interdisciplinary Applied Mathematics. Third Edition*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. New York.
- Nagle, R. K., Saff, E. B. & Snider, A. D. 2012. *Fundamentals of Differential Equations*. Eighth Edition. Boston: Pearson Education.
- N.H.T Siahaan. 2004. *Hukum Lingkungan dan Ekologi Pembangunan*. Jakarta: Erlangga.
- Nurkholipah, N. S., Anggriani, N., & Supriatna, A. K. 2017. Perbandingan Proyeksi Penduduk Jawa Barat Menggunakan Malthus dan Verhust dengan Variasi Internal Pengambilan Sampel. *Jurnal DIALEKTIKA*. 1(1): 195-202.

- Olsder, G. J., & Woude, J. W. 2004. *Mathematical Systems Theory intermediate third edition*. Delft University of Technology: Netherlands.
- Perko, L.M. 1991. *Differential Equations and Dynamical Systems*. New York: Springer Verlag.
- Perko, L. 2001. *Differential Equations and Dynamical Systems. 3rd Edition*. Springer-Verlag.
- Perko, L. 2000. *Differential Equations and Dynamical Systems. Third Edition*, New York: Springer.
- Pusawidyanti, K., Asmianto., & Kusumasari, V. 2021. Dynamical Analysis Predator-Prey Population with Holling Type II Functional Response. *Journal of Physics: Conference Series*. doi:10.1088/1742-6596/1872/1/012035.
- Putra, M. A. J. D., Firdaus, E. M., & Findasari. 2023. Analisis dinamik model predator-prey dengan pemanenan linear pada kedua populasi. *Jurnal Ilmu Komputer dan Matematika*. 4(2): 52-56.
- Resmawan. 2019. *Pemodelan Deterministik Dinamika Populasi*. Universitas Negeri Gorontalo
- Ross, Shepley L. 1984. *Differensial Equantions Third Edition*. New York: John Wiley & Sons.Inc.
- Sani, Asrul. 2020. *Pengantar Pemodelan Matematika dalam Bidang Biologi*. Bandung: Media Sains Indonesia.
- Sipayung, Tetty Natalia. 2018. *Buku Ajar Persamaan Diferensial Jilid 2*. Yogyakarta: Deepublish.

- Sirisubtawee, S., Khansai, N., dan Charoenloedmongkhon, A. 2021. Investigation on the Dynamics of an Impulsive Predator–Prey System with Generalized Holling Type IV Functional Response and Anti-Predator Behavior. SpringerOpen Journal. 160. <https://doi.org/10.1186/s13662-021-03324-w>.
- Stevenson, L., & Haberman, D. L. 1998. *Ten Theories of Human Nature* (3rd ed.). Oxford University Press.
- Syahidi, Khaerus., & Himayatul Asri, Indra. 2022. *Buku Ajar Ilmu Alamiah Dasar*. CV Jejak: Sukabumi.
- Ulya, F. H., Toaha, S., & Kasbawati. 2019. Analisis Kestabilan Dan Kontrol Optimal Model Leslie-Gower Fungsi Respon Holling III dengan Pemanenan Pada Populasi Predator dan Prey. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*. 16(1): 74.
- Ummah, C., & Abadi. 2013. Analisis Kestabilan Model Ekoepidemiologi Dengan Pemanenan Sebagai Kontrol Penyebaran Penyakit. *MATHunesa*.
- Wang, Xiaoshen. 2004. A Simple Proof of Descartes's Rule of Signs. *American Mathematical Monthly*. 111(6): 525-526.
- Widowati, S. and Sutimin, S., 2007. *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang: Jurusan Matematika UNDIP.
- Zed, Mestika. 2004. *Metode Penelitian Kepustakaan*. Jakarta: Yayasan Obor Indonesia.
- Zill, Dennis G & Cullen, Michael R. 2009. *Differential Equations with Boundary Value Problems*. 7th. Ed. Boston: Brooks/Cole.

Zhuang, K. & Wen, Z. 2011. Dynamical Behaviors in a Discrete Prey Predator Model with a Prey Refuge. *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*. 5(4): 195-197.

Lampiran 1. Perhitungan aturan tanda descartes untuk menentukan banyaknya akar positif

Karena dalam analisis ini hanya a_1 yang selalu bernilai positif, sedangkan lima koefisien lainnya (a_2 hingga a_6) masing-masing dapat bernilai positif atau negatif, maka jumlah total kemungkinan kombinasi tanda dapat dihitung dengan rumus:

$$\text{Jumlah kemungkinan} = 2^{\text{jumlah koefisien selain } a_1} = 2^5 = 32.$$

Dengan demikian, terdapat 32 kemungkinan kombinasi tanda koefisien dalam akar-akar persamaan (4.20).

1. Kemungkinan 1

$$f(N) = a_1N^5 + a_2N^4 + a_3N^3 + a_4N^2 + a_5N + a_6 = 0$$

Tidak terjadi perubahan tanda, sehingga $u = 0$. Selanjutnya, diperoleh $u - np = 0 \Leftrightarrow np = 0$. Maka dari kemungkinan 1 tidak terdapat akar real positif.

$$f(-N) = -a_1N^5 + a_2N^4 - a_3N^3 + a_4N^2 - a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 5 kali, sehingga $v = 5$. Selanjutnya diperoleh

$v - nq = 0$	$v - nq = 2$	$v - nq = 4$
$5 - nq = 0$	$5 - nq = 2$	$5 - nq = 4$
$nq = 5$	$nq = 3$	$nq = 1$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 1 adalah 1, 3, dan 5. Jadi diperoleh 3 kemungkinan yaitu:

- (a) 0 akar real positif dan 5 akar real negatif.
- (b) 0 akar real positif, 3 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 0 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

2. Kemungkinan 2

$$f(N) = a_1N^5 + a_2N^4 + a_3N^3 + a_4N^2 + a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 1 kali, sehingga $u = 1$. Selanjutnya diperoleh

$$u - np = 0$$

$$1 - np = 0$$

$$np = 1$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 2 adalah 1.

$$f(-N) = -a_1N^5 + a_2N^4 - a_3N^3 + a_4N^2 - a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 4 kali, sehingga $v = 4$.

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{lll}
 v - nq = 0 & v - nq = 2 & v - nq = 4 \\
 4 - nq = 0 & 4 - nq = 2 & 4 - nq = 4 \\
 nq = 4 & nq = 2 & nq = 0
 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 2 adalah 0, 2, dan 4. Jadi diperoleh 3 kemungkinan yaitu:

- (a) 1 akar real positif dan 4 akar real negatif.
- (b) 1 akar real positif, 2 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 1 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

3. Kemungkinan 3

$$f(N) = a_1N^5 + a_2N^4 + a_3N^3 + a_4N^2 - a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $u = 2$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll}
 u - np = 0 & u - np = 2 \\
 2 - np = 0 & u - np = 2 \\
 np = 2 & np = 0
 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 3 adalah 0 dan 2.

$$f(-N) = -a_1N^5 + a_2N^4 - a_3N^3 + a_4N^2 + a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 3 kali, sehingga $v = 3$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 3 - nq = 0 & 3 - nq = 2 \\ nq = 3 & nq = 1 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 3 adalah 1 dan 3. Jadi diperoleh 4 kemungkinan yaitu:

- (a) 2 akar real positif dan 3 akar real negatif.
- (b) 2 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 0 akar real positif dan 3 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (d) 0 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

4. Kemungkinan 4

$$f(N) = a_1N^5 + a_2N^4 + a_3N^3 + a_4N^2 - a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 1 kali, sehingga $u = 1$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{l} u - np = 0 \\ 1 - np = 0 \\ np = 1 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 4 adalah

1.

$$f(-N) = -a_1N^5 + a_2N^4 - a_3N^3 + a_4N^2 + a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 4 kali, sehingga $v = 4$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{lll} v - nq = 0 & v - nq = 2 & v - nq = 4 \\ 4 - nq = 0 & 4 - nq = 2 & 4 - nq = 4 \\ nq = 4 & nq = 2 & nq = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 4 adalah 0, 2, dan 4. Jadi diperoleh 3 kemungkinan yaitu:

- (a) 1 akar real positif dan 4 akar real negatif.
- (b) 1 akar real positif, 2 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 1 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 4 akar real kompleks.

5. Kemungkinan 5

$$f(N) = a_1N^5 + a_2N^4 + a_3N^3 - a_4N^2 + a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $u = 2$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} u - np = 0 & u - np = 2 \\ 2 - np = 0 & 2 - np = 2 \\ np = 2 & np = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 5 adalah 0 dan 2.

$$f(-N) = -a_1N^5 + a_2N^4 - a_3N^3 - a_4N^2 - a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 3 kali, sehingga $v = 3$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 3 - nq = 0 & 3 - nq = 2 \\ nq = 3 & nq = 1 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 5 adalah 1 dan 3. Jadi diperoleh 4 kemungkinan yaitu:

- (a) 2 akar real positif dan 3 akar real negatif.
- (b) 2 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 0 akar real positif, 3 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (d) 0 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

6. Kemungkinan 6

$$f(N) = a_1N^5 + a_2N^4 + a_3N^3 - a_4N^2 + a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 3 kali, sehingga $u = 3$.

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} u - np = 0 & u - np = 2 \\ 3 - np = 0 & 3 - np = 2 \\ np = 3 & np = 1 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 6 adalah 1 dan 3.

$$f(-N) = -a_1N^5 + a_2N^4 - a_3N^3 - a_4N^2 - a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $v = 2$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 2 - nq = 0 & 2 - nq = 2 \\ nq = 2 & nq = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 6 adalah 0 dan 2. Jadi diperoleh 4 kemungkinan yaitu:

- (a) 3 akar real positif dan 2 akar real negatif.
- (b) 3 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 1 akar real positif, 2 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (d) 1 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

7. Kemungkinan 7

$$f(N) = a_1N^5 + a_2N^4 + a_3N^3 - a_4N^2 - a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $u = 2$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} u - np = 0 & u - np = 2 \\ 2 - np = 0 & 2 - np = 2 \\ np = 2 & np = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 7 adalah 0 dan 2.

$$f(-N) = -a_1N^5 + a_2N^4 - a_3N^3 - a_4N^2 + a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 3 kali, sehingga $v = 3$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 3 - nq = 0 & 3 - nq = 2 \\ nq = 3 & nq = 1 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 7 adalah 1 dan 3. Jadi diperoleh 4 kemungkinan yaitu:

- (a) 2 akar real positif dan 3 akar real negatif.
- (b) 2 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 0 akar real positif, 3 akar real negatif, dan 2 akar

kompleks.

- (d) 0 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

8. Kemungkinan 8

$$f(N) = a_1N^5 + a_2N^4 + a_3N^3 - a_4N^2 - a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 1 kali, sehingga $u = 1$. Selanjutnya diperoleh

$$u - np = 0$$

$$1 - np = 0$$

$$np = 1$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 8 adalah 1.

$$f(-N) = -a_1N^5 + a_2N^4 - a_3N^3 - a_4N^2 + a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 4 kali, sehingga $v = 4$. Selanjutnya diperoleh

$$v - nq = 0$$

$$v - nq = 2$$

$$v - nq = 4$$

$$4 - nq = 0$$

$$4 - nq = 2$$

$$4 - nq = 4$$

$$nq = 4$$

$$nq = 2$$

$$nq = 0$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 8 adalah 0, 2, dan 4. Jadi diperoleh 3 kemungkinan yaitu:

- (a) 1 akar real positif dan 4 akar real negatif.

- (b) 1 akar real positif, 2 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 1 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

9. Kemungkinan 9

$$f(N) = a_1N^5 + a_2N^4 - a_3N^3 + a_4N^2 + a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $u = 2$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} u - np = 0 & u - np = 2 \\ 2 - np = 0 & 2 - np = 2 \\ np = 2 & np = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 9 adalah 0 dan 2.

$$f(-N) = -a_1N^5 + a_2N^4 + a_3N^3 + a_4N^2 - a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 3 kali, sehingga $v = 3$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 3 - nq = 0 & 3 - nq = 2 \\ nq = 3 & nq = 1 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 9 adalah 1 dan 3. Jadi diperoleh 4 kemungkinan yaitu:

- (a) 2 akar real positif dan 3 akar real negatif.
- (b) 2 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 0 akar real positif, 3 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (d) 0 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

10. Kemungkinan 10

$$f(N) = a_1N^5 + a_2N^4 - a_3N^3 + a_4N^2 + a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 3 kali, sehingga $u = 3$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} u - np = 0 & u - np = 2 \\ 3 - np = 0 & 3 - np = 2 \\ np = 3 & np = 1 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 10 adalah 1 dan 3.

$$f(-N) = -a_1N^5 + a_2N^4 + a_3N^3 + a_4N^2 - a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $v = 2$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 2 - nq = 0 & 2 - nq = 2 \\ nq = 2 & nq = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 10 adalah 0 dan 2. Jadi diperoleh 4 kemungkinan yaitu:

- (a) 3 akar real positif dan 2 akar real negatif.
- (b) 3 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 1 akar real positif, 2 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (d) 1 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

11. Kemungkinan 11

$$f(N) = a_1N^5 + a_2N^4 - a_3N^3 + a_4N^2 - a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 4 kali, sehingga $u = 4$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{lll} u - np = 0 & u - np = 2 & u - np = 4 \\ 4 - np = 0 & 4 - np = 2 & 4 - np = 4 \\ np = 4 & np = 2 & np = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 11 adalah 0, 2, dan 4.

$$f(-N) = -a_1N^5 + a_2N^4 + a_3N^3 + a_4N^2 + a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 1 kali, sehingga $v = 1$.

Selanjutnya diperoleh

$$v - nq = 0$$

$$1 - nq = 0$$

$$nq = 1$$

Maka, banyaknya akar real neaktif dari kemungkinan 11 adalah 1. Jadi diperoleh 3 kemungkinan yaitu:

- (a) 4 akar real positif dan 1 akar real negatif.
- (b) 2 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 0 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

12. kemungkinan 12

$$f(N) = a_1N^5 + a_2N^4 - a_3N^3 + a_4N^2 - a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 3 kali, sehingga $u = 3$. Selanjutnya diperoleh

$$u - np = 0$$

$$3 - np = 0$$

$$np = 3$$

$$u - np = 2$$

$$3 - np = 2$$

$$np = 1$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 12 adalah 1 dan 3.

$$f(-N) = -a_1N^5 + a_2N^4 + a_3N^3 + a_4N^2 + a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $v = 2$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 2 - nq = 0 & 2 - nq = 2 \\ nq = 2 & nq = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 12 adalah 0 dan 2. Jadi diperoleh 4 kemungkinan yaitu:

- (a) 3 akar real positif dan 2 akar real negatif.
- (b) 3 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 1 akar real positif, 2 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (d) 1 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

13. Kemungkinan 13

$$f(N) = a_1N^5 + a_2N^4 - a_3N^3 - a_4N^2 + a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $u = 2$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} u - np = 0 & u - np = 2 \\ 2 - np = 0 & 2 - np = 2 \\ np = 2 & np = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 13

adalah 0 dan 2.

$$f(-N) = -a_1N^5 + a_2N^4 + a_3N^3 - a_4N^2 - a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 3 kali, sehingga $v = 3$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 3 - nq = 0 & 3 - nq = 2 \\ nq = 3 & nq = 1 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 13 adalah 1 dan 3. Jadi diperoleh 4 kemungkinan yaitu:

- (a) 2 akar real positif dan 3 akar real negatif.
- (b) 2 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 0 akar real positif, 3 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (d) 0 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 4 akar kompleks

14. Kemungkinan 14

$$f(N) = a_1N^5 + a_2N^4 - a_3N^3 - a_4N^2 + a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 3 kali, sehingga $u = 3$.

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} u - np = 0 & u - np = 2 \\ 3 - np = 0 & 3 - np = 2 \\ np = 3 & np = 1 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 14 adalah 1 dan 3.

$$f(-N) = -a_1N^5 + a_2N^4 + a_3N^3 - a_4N^2 - a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $v = 2$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 2 - nq = 0 & 2 - nq = 2 \\ nq = 2 & nq = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 14 adalah 0 dan 2. Jadi diperoleh 4 kemungkinan yaitu:

- (a) 3 akar real positif dan 2 akar real negatif.
- (b) 3 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 1 akar real positif, 2 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (d) 1 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

15. Kemungkinan 15

$$f(N) = a_1N^5 + a_2N^4 - a_3N^3 - a_4N^2 - a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $u = 2$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} u - np = 0 & u - np = 2 \\ 2 - np = 0 & 2 - np = 2 \\ np = 2 & np = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 15 adalah 0 dan 2.

$$f(-N) = -a_1N^5 + a_2N^4 + a_3N^3 - a_4N^2 + a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 3 kali, sehingga $v = 3$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 3 - nq = 0 & 3 - nq = 2 \\ nq = 3 & nq = 1 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 15 adalah 1 dan 3. Jadi diperoleh 4 kemungkinan yaitu:

- (a) 2 akar real positif dan 3 akar real negatif.
- (b) 2 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 0 akar real positif, 3 akar real negatif, dan 2 akar

kompleks.

- (d) 0 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

16. Kemungkinan 16

$$f(N) = a_1N^5 + a_2N^4 - a_3N^3 - a_4N^2 - a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 1 kali, sehingga $u = 1$. Selanjutnya diperoleh

$$u - np = 0$$

$$1 - np = 0$$

$$np = 1$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 16 adalah 1.

$$f(-N) = -a_1N^5 + a_2N^4 + a_3N^3 - a_4N^2 + a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 4 kali, sehingga $v = 4$. Selanjutnya diperoleh

$$v - nq = 0$$

$$v - nq = 2$$

$$v - nq = 4$$

$$4 - nq = 0$$

$$4 - nq = 2$$

$$4 - nq = 4$$

$$nq = 4$$

$$nq = 2$$

$$nq = 0$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 16 adalah 0, 2, dan 4. Jadi diperoleh 3 kemungkinan yaitu:

- (a) 1 akar real positif dan 4 real akar negatif.

- (b) 1 akar real positif, 2 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 1 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

17. Kemungkinan 17

$$f(N) = a_1N^5 - a_2N^4 + a_3N^3 + a_4N^2 + a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $u = 2$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} u - np = 0 & u - np = 2 \\ 2 - np = 0 & 2 - np = 2 \\ np = 2 & np = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 17 adalah 0 dan 2.

$$f(-N) = -a_1N^5 - a_2N^4 - a_3N^3 + a_4N^2 - a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 3 kali, sehingga $v = 3$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 3 - nq = 0 & 3 - nq = 2 \\ nq = 3 & nq = 1 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 17 adalah 1 dan 3. Jadi diperoleh 4 kemungkinan yaitu:

- (a) 2 akar real positif dan 3 akar real negatif.
- (b) 2 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 0 akar real positif, 3 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (d) 0 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

18. Kemungkinan 18

$$f(N) = a_1N^5 - a_2N^4 + a_3N^3 + a_4N^2 + a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 3 kali, sehingga $u = 3$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} u - np = 0 & u - np = 2 \\ 3 - np = 0 & 3 - np = 2 \\ np = 3 & np = 1 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 18 adalah 1 dan 3.

$$f(-N) = -a_1N^5 - a_2N^4 - a_3N^3 + a_4N^2 - a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $v = 2$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 2 - nq = 0 & 2 - nq = 2 \\ nq = 2 & nq = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 18 adalah 0 dan 2. Jadi diperoleh 4 kemungkinan yaitu:

- (a) 3 akar real positif dan 2 akar real negatif.
- (b) 3 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 1 akar real positif, 2 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (d) 1 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

19. Kemungkinan 19

$$f(N) = a_1N^5 - a_2N^4 + a_3N^3 + a_4N^2 - a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 4 kali, sehingga $u = 4$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{lll} u - np = 0 & u - np = 2 & u - np = 4 \\ 4 - np = 0 & 4 - np = 2 & 4 - np = 4 \\ np = 4 & np = 2 & np = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 19 adalah 0, 2, dan 4.

$$f(-N) = -a_1N^5 - a_2N^4 - a_3N^3 + a_4N^2 + a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 1 kali, sehingga $v = 1$.

Selanjutnya diperoleh

$$v - nq = 0$$

$$1 - nq = 0$$

$$nq = 1$$

Maka, banyaknya akar real neaktif dari kemungkinan 19 adalah 1. Jadi diperoleh 3 kemungkinan yaitu:

- (a) 4 akar real positif dan 1 akar real negatif.
- (b) 2 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 0 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

20. Kemungkinan 20

$$f(N) = a_1N^5 - a_2N^4 + a_3N^3 + a_4N^2 - a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 3 kali, sehingga $u = 3$. Selanjutnya diperoleh

$$u - np = 0$$

$$3 - np = 0$$

$$np = 3$$

$$u - np = 2$$

$$3 - np = 2$$

$$np = 1$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 20 adalah 1 dan 3.

$$f(-N) = -a_1N^5 - a_2N^4 - a_3N^3 + a_4N^2 + a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $v = 2$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 2 - nq = 0 & 2 - nq = 2 \\ nq = 2 & nq = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 20 adalah 0 dan 2. Jadi diperoleh 4 kemungkinan yaitu:

- (a) 3 akar real positif dan 2 akar real negatif.
- (b) 3 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 1 akar real positif, 2 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (d) 1 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

21. Kemungkinan 21

$$f(N) = a_1N^5 - a_2N^4 + a_3N^3 - a_4N^2 + a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 4 kali, sehingga $u = 4$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{lll} u - np = 0 & u - np = 2 & u - np = 4 \\ 4 - np = 0 & 4 - np = 2 & 4 - np = 4 \\ np = 4 & np = 2 & np = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 21

adalah 0, 2, dan 4.

$$f(-N) = -a_1N^5 - a_2N^4 - a_3N^3 - a_4N^2 - a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 1 kali, sehingga $v = 1$. Selanjutnya diperoleh

$$v - nq = 0$$

$$1 - nq = 0$$

$$nq = 1$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 21 adalah 1. Jadi diperoleh 3 kemungkinan yaitu:

- (a) 4 akar real positif dan 1 akar real negatif.
- (b) 2 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 0 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

22. Kemungkinan 22

$$f(N) = a_1N^5 - a_2N^4 + a_3N^3 - a_4N^2 + a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 5 kali, sehingga $u = 5$. Selanjutnya diperoleh

$$u - np = 0$$

$$u - np = 2$$

$$u - np = 4$$

$$5 - np = 0$$

$$5 - np = 2$$

$$5 - np = 4$$

$$np = 5$$

$$np = 3$$

$$np = 1$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 22 adalah 1, 3, dan 5.

$$f(-N) = -a_1N^5 - a_2N^4 - a_3N^3 - a_4N^2 - a_5N - a_6 = 0$$

Tidak terjadi perubahan tanda, sehingga $v = 0$. Selanjutnya, diperoleh $v - nq = 0 \Leftrightarrow nq = 0$. Maka dari kemungkinan 22 tidak terdapat akar real negatif. Jadi diperoleh 3 kemungkinan yaitu:

- (a) 5 akar real positif dan 0 akar real negatif.
- (b) 3 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 1 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

23. Kemungkinan 23

$$f(N) = a_1N^5 - a_2N^4 + a_3N^3 - a_4N^2 - a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 4 kali, sehingga $u = 4$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{lll} u - np = 0 & u - np = 2 & u - np = 4 \\ 4 - np = 0 & 4 - np = 2 & 4 - np = 4 \\ np = 4 & np = 2 & np = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 23 adalah 0, 2, dan 4.

$$f(-N) = -a_1N^5 - a_2N^4 - a_3N^3 - a_4N^2 + a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 1 kali, sehingga $v = 1$.
Selanjutnya diperoleh

$$v - nq = 0$$

$$1 - nq = 0$$

$$nq = 1$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 23 adalah 1. Jadi diperoleh 3 kemungkinan yaitu:

- (a) 4 akar real positif dan 1 akar real negatif.
- (b) 2 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 0 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

24. Kemungkinan 24

$$f(N) = a_1N^5 - a_2N^4 + a_3N^3 - a_4N^2 - a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 3 kali, sehingga $u = 3$.
Selanjutnya diperoleh

$$u - np = 0$$

$$3 - np = 0$$

$$np = 3$$

$$u - np = 2$$

$$3 - np = 2$$

$$np = 1$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 24

adalah 1 dan 3.

$$f(-N) = -a_1N^5 - a_2N^4 - a_3N^3 - a_4N^2 + a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $v = 2$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 2 - nq = 0 & 2 - nq = 2 \\ nq = 2 & nq = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 24 adalah 0 dan 2. Jadi diperoleh 4 kemungkinan yaitu:

- (a) 3 akar real positif dan 2 akar real negatif.
- (b) 3 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 1 akar real positif, 2 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (d) 1 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

25. Kemungkinan 25

$$f(N) = a_1N^5 - a_2N^4 - a_3N^3 + a_4N^2 + a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $u = 2$.

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} u - np = 0 & u - np = 2 \\ 2 - np = 0 & 2 - np = 2 \\ np = 2 & np = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 25 adalah 0 dan 2.

$$f(-N) = -a_1N^5 - a_2N^4 + a_3N^3 + a_4N^2 - a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 3 kali, sehingga $v = 3$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 3 - nq = 0 & 3 - nq = 2 \\ nq = 3 & nq = 1 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 25 adalah 1 dan 3. Jadi diperoleh 4 kemungkinan yaitu:

- (a) 2 akar real positif dan 3 akar real negatif.
- (b) 2 akar real positif, 1 akarreal negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 0 akar real positif, 3 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (d) 0 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

26. Kemungkinan 26

$$f(N) = a_1N^5 - a_2N^4 - a_3N^3 + a_4N^2 + a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 3 kali, sehingga $u = 3$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} u - np = 0 & u - np = 2 \\ 3 - np = 0 & 3 - np = 2 \\ np = 3 & np = 1 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 26 adalah 1 dan 3.

$$f(-N) = -a_1N^5 - a_2N^4 + a_3N^3 + a_4N^2 - a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $v = 2$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 2 - nq = 0 & 2 - nq = 2 \\ nq = 2 & nq = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 26 adalah 0 dan 2. Jadi diperoleh 4 kemungkinan yaitu:

- (a) 3 akar real positif dan 2 akar real negatif.
- (b) 3 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 1 akar real positif, 2 akar real negatif, dan 2 akar

kompleks.

- (d) 1 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

27. Kemungkinan 27

$$f(N) = a_1N^5 - a_2N^4 - a_3N^3 + a_4N^2 - a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 4 kali, sehingga $u = 4$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{lll} u - np = 0 & u - np = 2 & u - np = 4 \\ 4 - np = 0 & 4 - np = 2 & 4 - np = 4 \\ np = 4 & np = 2 & np = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 27 adalah 0, 2, dan 4.

$$f(-N) = -a_1N^5 - a_2N^4 + a_3N^3 + a_4N^2 + a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 1 kali, sehingga $v = 1$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{l} v - nq = 0 \\ 1 - nq = 0 \\ nq = 1 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 27 adalah 1. Jadi diperoleh 3 kemungkinan yaitu:

- (a) 4 akar real positif dan 1 akar real negatif.

- (b) 2 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 0 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

28. Kemungkinan 28

$$f(N) = a_1N^5 - a_2N^4 - a_3N^3 + a_4N^2 - a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 3 kali, sehingga $u = 3$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} u - np = 0 & u - np = 2 \\ 3 - np = 0 & 3 - np = 2 \\ np = 3 & np = 1 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 28 adalah 1 dan 3.

$$f(-N) = -a_1N^5 - a_2N^4 + a_3N^3 + a_4N^2 + a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $v = 2$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 2 - nq = 0 & 2 - nq = 2 \\ nq = 2 & nq = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 28 adalah 0 dan 2. Jadi diperoleh 4 kemungkinan yaitu:

- (a) 3 akar real positif dan 2 akar real negatif.
- (b) 3 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 1 akar real positif, 2 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (d) 1 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

29. Kemungkinan 29

$$f(N) = a_1N^5 - a_2N^4 - a_3N^3 - a_4N^2 + a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $u = 2$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} u - np = 0 & u - np = 2 \\ 2 - np = 0 & 2 - np = 2 \\ np = 2 & np = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 29 adalah 0 dan 2.

$$f(-N) = -a_1N^5 - a_2N^4 + a_3N^3 - a_4N^2 - a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 3 kali, sehingga $v = 3$.
Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 3 - nq = 0 & 3 - nq = 2 \\ nq = 3 & nq = 1 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 29 adalah 1 dan 3. Jadi diperoleh 4 kemungkinan yaitu:

- (a) 2 akar real positif dan 3 akar real negatif.
- (b) 2 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 0 akar real positif, 3 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (d) 0 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

30. Kemungkinan 30

$$f(N) = a_1N^5 - a_2N^4 - a_3N^3 - a_4N^2 + a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 3 kali, sehingga $u = 3$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} u - np = 0 & u - np = 2 \\ 3 - np = 0 & 3 - np = 2 \\ np = 3 & np = 1 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 30 adalah 1 dan 3.

$$f(-N) = -a_1N^5 - a_2N^4 + a_3N^3 - a_4N^2 - a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $v = 2$.

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 2 - nq = 0 & 2 - nq = 2 \\ nq = 2 & nq = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 30 adalah 0 dan 2. Jadi diperoleh 4 kemungkinan yaitu:

- (a) 3 akar real positif dan 2 akar real negatif.
- (b) 3 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 1 akar real positif, 2 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (d) 1 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

31. Kemungkinan 31

$$f(N) = a_1N^5 - a_2N^4 - a_3N^3 - a_4N^2 - a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 2 kali, sehingga $u = 2$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} u - np = 0 & u - np = 2 \\ 2 - np = 0 & 2 - np = 2 \\ np = 2 & np = 0 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 31

adalah 0 dan 2.

$$f(-N) = -a_1N^5 - a_2N^4 + a_3N^3 - a_4N^2 + a_5N + a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 3 kali, sehingga $v = 3$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{array}{ll} v - nq = 0 & v - nq = 2 \\ 3 - nq = 0 & 3 - nq = 2 \\ nq = 3 & nq = 1 \end{array}$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 31 adalah 1 dan 3. Jadi diperoleh 4 kemungkinan yaitu:

- (a) 2 akar real positif dan 3 akar real negatif.
- (b) 2 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 0 akar real positif, 3 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (d) 0 akar real positif, 1 akar real negatif, dan 4 akar kompleks

32. Kemungkinan 32

$$f(N) = a_1N^5 - a_2N^4 - a_3N^3 - a_4N^2 - a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 1 kali, sehingga $u = 1$.

Selanjutnya diperoleh

$$u - np = 0$$

$$1 - np = 0$$

$$np = 1$$

Maka, banyaknya akar real positif dari kemungkinan 32 adalah 1.

$$f(-N) = -a_1N^5 - a_2N^4 + a_3N^3 - a_4N^2 + a_5N - a_6 = 0$$

Terjadi perubahan tanda sebanyak 4 kali, sehingga $v = 4$.
Selanjutnya diperoleh

$$v - nq = 0$$

$$v - nq = 2$$

$$v - nq = 4$$

$$4 - nq = 0$$

$$4 - nq = 2$$

$$4 - nq = 4$$

$$nq = 4$$

$$nq = 2$$

$$nq = 0$$

Maka, banyaknya akar real negatif dari kemungkinan 32 adalah 0, 2, dan 4. Jadi diperoleh 3 kemungkinan yaitu:

- (a) 1 akar real positif dan 4 akar real negatif.
- (b) 1 akar real positif, 2 akar real negatif, dan 2 akar kompleks.
- (c) 1 akar real positif, 0 akar real negatif, dan 4 akar kompleks.

Lampiran 2. Perhitungan manual untuk mencari nilai A_2

Diketahui

$$A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{aligned} A_2 = & \left(r \left(1 - \frac{2N^*}{K_1} \right) - \frac{\gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} - \delta_1 F_1 \right) \\ & \left(s \left(1 - \frac{2P^*}{K_2} \right) + \frac{\epsilon \gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}} - \delta_2 F_2 \right) \\ & - \left(-\frac{\gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}} \right) \left(\frac{\epsilon \gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} \right) \end{aligned}$$

Sehingga

1. a_{11}

$$\begin{aligned} a_{11} &= r \left(1 - \frac{2N^*}{K_1} \right) - \frac{\gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} - \delta_1 F_1 \\ &\Leftrightarrow 3 \left(1 - \frac{2 \cdot 45,7859}{100} \right) - \frac{0,4 \cdot 7,6198 \cdot (2,2 - (45,7859)^2)}{(2,2 + 0,9 \cdot 45,7859 + (45,7859)^2)^2} \\ &\quad - 0,5 \cdot 3,25 \\ &\Leftrightarrow 3 - \frac{2 \cdot 3 \cdot 45,7859}{100} - \frac{3,04792 \cdot (2,2 - 2096,34864)}{(2,2 + 41,20731 + 2096,34864)^2} \\ &\quad - 1,625 \\ &\Leftrightarrow 3 - \frac{274,7154}{100} - \frac{3,04792 \cdot (-2094,14864)}{(2139,75595)^2} - 1,625 \\ &\Leftrightarrow 3 - 2,747154 - \frac{-6382,79752}{4578555,53} - 1,625 \\ &\Leftrightarrow 3 - 2,747154 + 0,00139406 - 1,625 \\ &\Leftrightarrow -1,37075594 \end{aligned}$$

2. a_{22}

$$\begin{aligned}
 a_{22} &= s \left(1 - \frac{2P^*}{K_2} \right) + \frac{\epsilon \gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}} - \delta_2 F_2 \\
 &\Leftrightarrow 2 \left(1 - \frac{2 \cdot 7,6198}{40} \right) + \frac{0,7 \cdot 0,4 \cdot 45,7859}{2,2 + 0,9 \cdot 45,7859 + (45,7859)^2} \\
 &\quad - 0,65 \cdot 2,5 \\
 &\Leftrightarrow 2 - \frac{2 \cdot 2 \cdot 7,6198}{40} + \frac{12,820052}{2,2 + 41,20731 + 2096,34864} \\
 &\quad - 1,625 \\
 &\Leftrightarrow 2 - \frac{30,4792}{40} + \frac{12,820052}{2139,75595} - 1,625 \\
 &\Leftrightarrow 2 - 0,76198 + 0,00599136 - 1,625 \\
 &\Leftrightarrow -0,38098864
 \end{aligned}$$

3. a_{12}

$$\begin{aligned}
 a_{12} &= - \frac{\gamma N^*}{a + bN^* + N^{*2}} \\
 &\Leftrightarrow - \frac{0,4 \cdot 45,7859}{2,2 + 0,9 \cdot 45,7859 + (45,7859)^2} \\
 &\Leftrightarrow - \frac{18,31436}{2,2 + 41,20731 + 2096,34864} \\
 &\Leftrightarrow - \frac{18,31436}{2139,75595} \\
 &\Leftrightarrow -0,00855909
 \end{aligned}$$

4. a_{21}

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= \frac{\epsilon \gamma P^*(a - N^{*2})}{(a + bN^* + N^{*2})^2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{0,7 \cdot 0,4 \cdot 7,6198 \cdot (2,2 - (45,7859)^2)}{(2,2 + 0,9 \cdot 45,7859 + (45,7859)^2)^2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{2,133544 \cdot (2,2 - 2096,34864)}{(2,2 + 41,20731 + 2096,34864)^2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{2,133544 \cdot (-2094,14864)}{(2139,75595)^2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{-4467,95826}{4578555,53} \\
 &\Leftrightarrow -0,000975845
 \end{aligned}$$

Hitung nilai akhir A_2 :

$$A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= (-1,37075594)(-0,38098864) - (-0,00855909)(-0,000975845) \\
 &= 0,522242 - 0,00000835 \\
 &= 0,522234
 \end{aligned}$$

Lampiran 3. Hasil iterasi sistem persamaan (4.3) berdasarkan metode Runge-Kutta menggunakan MATLAB R2013a

1. Tabel hasil iterasi pada titik ekuilibrium E_0

Waktu	N (Prey)	P (Predator)
0.00	0.6000	0.4000
1.00	0.3388	0.4360
2.00	0.1506	0.4326
3.00	0.0634	0.3770
4.00	0.0296	0.3067
5.00	0.0157	0.2428
6.00	0.0094	0.1903
7.00	0.0061	0.1485
8.00	0.0043	0.1157
9.00	0.0032	0.0901
10.00	0.0025	0.0702
11.00	0.0020	0.0547
12.00	0.0017	0.0426
13.00	0.0014	0.0332
14.00	0.0012	0.0258
15.00	0.0011	0.0201
16.00	0.0010	0.0157
17.00	0.0009	0.0122
18.00	0.0008	0.0095
19.00	0.0007	0.0074
20.00	0.0006	0.0058
21.00	0.0006	0.0045
22.00	0.0005	0.0035
23.00	0.0005	0.0027
24.00	0.0004	0.0021
25.00	0.0004	0.0017

27.00	0.0003	0.0010
28.00	0.0003	0.0008
29.00	0.0003	0.0006
30.00	0.0002	0.0005
31.00	0.0002	0.0004
32.00	0.0002	0.0003
33.00	0.0002	0.0002
34.00	0.0002	0.0002
35.00	0.0002	0.0001
36.00	0.0001	0.0001
37.00	0.0001	0.0001
38.00	0.0001	0.0001
39.00	0.0001	0.0001
40.00	0.0001	0.0000
41.00	0.0001	0.0000
42.00	0.0001	0.0000
43.00	0.0001	0.0000
44.00	0.0001	0.0000
45.00	0.0001	0.0000
46.00	0.0001	0.0000
47.00	0.0001	0.0000
48.00	0.0001	0.0000
49.00	0.0000	0.0000
50.00	0.0000	0.0000

Hasil Akhir Simulasi:

Populasi Mangsa (N): 0.0000

Populasi Predator (P): 0.0000

2. Tabel hasil iterasi pada titik ekuilibrium E_1

Waktu	N (Prey)	P (Predator)
0.00	0.6000	0.4000
1.00	1.9073	0.4109
2.00	6.5808	0.3535
3.00	18.2484	0.2817
4.00	33.1546	0.2203
5.00	41.7906	0.1718
6.00	44.7379	0.1341
7.00	45.5505	0.1047
8.00	45.7608	0.0819
9.00	45.8145	0.0642
10.00	45.8282	0.0503
11.00	45.8317	0.0394
12.00	45.8327	0.0309
13.00	45.8330	0.0243
14.00	45.8331	0.0191
15.00	45.8332	0.0150
16.00	45.8332	0.0118
17.00	45.8332	0.0092
18.00	45.8332	0.0073
19.00	45.8333	0.0057
20.00	45.8333	0.0045
21.00	45.8333	0.0035
22.00	45.8333	0.0028
23.00	45.8333	0.0022
24.00	45.8333	0.0017
25.00	45.8333	0.0013
26.00	45.8333	0.0011

27.00	45.8333	0.0008
28.00	45.8333	0.0007
29.00	45.8333	0.0005
30.00	45.8333	0.0004
31.00	45.8333	0.0003
32.00	45.8333	0.0002
33.00	45.8333	0.0002
34.00	45.8333	0.0002
35.00	45.8333	0.0001
36.00	45.8333	0.0001
37.00	45.8333	0.0001
38.00	45.8333	0.0001
39.00	45.8333	0.0000
40.00	45.8333	0.0000
41.00	45.8333	0.0000
42.00	45.8333	0.0000
43.00	45.8333	0.0000
44.00	45.8333	0.0000
45.00	45.8333	0.0000
46.00	45.8333	0.0000
47.00	45.8333	0.0000
48.00	45.8333	0.0000
49.00	45.8333	0.0000
50.00	45.8333	0.0000

Hasil Akhir Simulasi:

Populasi Mangsa (N): 45.8333

Populasi Predator (P): 0.0000

3. Tabel hasil iterasi pada titik ekuilibrium E_2

Waktu	N (Prey)	P (Predator)
0.00	0.6000	0.4000
1.00	0.5161	0.8149
2.00	0.1463	1.5323
3.00	0.0056	2.1675
4.00	0.0001	2.7919
5.00	0.0000	3.4739
6.00	0.0000	4.1747
7.00	0.0000	4.8467
8.00	0.0000	5.4496
9.00	0.0000	5.9590
10.00	0.0000	6.3682
11.00	0.0000	6.6836
12.00	0.0000	6.9191
13.00	0.0000	7.0909
14.00	0.0000	7.2139
15.00	0.0000	7.3010
16.00	0.0000	7.3621
17.00	0.0000	7.4047
18.00	0.0000	7.4342
19.00	0.0000	7.4547
20.00	0.0000	7.4688
21.00	0.0000	7.4785
22.00	0.0000	7.4852
23.00	0.0000	7.4898
24.00	0.0000	7.4930
25.00	0.0000	7.4952
26.00	0.0000	7.4967

27.00	0.0000	7.4977
28.00	0.0000	7.4984
29.00	0.0000	7.4989
30.00	0.0000	7.4993
31.00	0.0000	7.4995
32.00	0.0000	7.4997
33.00	0.0000	7.4998
34.00	0.0000	7.4998
35.00	0.0000	7.4999
36.00	0.0000	7.4999
37.00	0.0000	7.4999
38.00	0.0000	7.5000
39.00	0.0000	7.5000
40.00	0.0000	7.5000
41.00	0.0000	7.5000
42.00	0.0000	7.5000
43.00	0.0000	7.5000
44.00	0.0000	7.5000
45.00	0.0000	7.5000
46.00	0.0000	7.5000
47.00	0.0000	7.5000
48.00	0.0000	7.5000
49.00	0.0000	7.5000
50.00	0.0000	7.5000

Hasil Akhir Simulasi:

Populasi Mangsa (N): 0.0000

Populasi Predator (P): 7.5000

4. Tabel hasil iterasi pada titik ekuilibrium E_3

Waktu	N (Prey)	P (Predator)
0.00	0.6000	0.4000
1.00	2.1932	0.6073
2.00	7.5029	0.8953
3.00	19.9585	1.2610
4.00	34.5016	1.7209
5.00	42.3066	2.2823
6.00	44.8739	2.9340
7.00	45.5710	3.6441
8.00	45.7476	4.3659
9.00	45.7893	5.0490
10.00	45.7970	5.6532
11.00	45.7964	6.1566
12.00	45.7942	6.5554
13.00	45.7920	6.8590
14.00	45.7903	7.0830
15.00	45.7890	7.2447
16.00	45.7881	7.3595
17.00	45.7874	7.4400
18.00	45.7869	7.4961
19.00	45.7866	7.5348
20.00	45.7864	7.5616
21.00	45.7862	7.5799
22.00	45.7861	7.5925
23.00	45.7860	7.6011
24.00	45.7860	7.6071
25.00	45.7859	7.6111
26.00	45.7859	7.6139

27.00	45.7859	7.6158
28.00	45.7859	7.6170
29.00	45.7859	7.6179
30.00	45.7859	7.6185
31.00	45.7859	7.6189
32.00	45.7859	7.6192
33.00	45.7859	7.6194
34.00	45.7859	7.6195
35.00	45.7859	7.6196
36.00	45.7859	7.6197
37.00	45.7859	7.6197
38.00	45.7859	7.6198
39.00	45.7859	7.6198
40.00	45.7859	7.6198
41.00	45.7859	7.6198
42.00	45.7859	7.6198
43.00	45.7859	7.6198
44.00	45.7859	7.6198
45.00	45.7859	7.6198
46.00	45.7859	7.6198
47.00	45.7859	7.6198
48.00	45.7859	7.6198
49.00	45.7859	7.6198
50.00	45.7859	7.6198

Hasil Akhir Simulasi:

Populasi Mangsa (N): 45.7859

Populasi Predator (P): 7.6198

Lampiran 4. Pembuktian kestabilan titik ekuilibrium model predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey

0.1. Kestabilan titik ekuilibrium kepunahan kedua populasi

Berdasarkan Tabel 4.6, dapat dilakukan analisis kestabilan titik ekuilibrium kepunahan kedua populasi sebagai berikut

Teorema 0.1.1

Titik ekuilibrium kepunahan kedua populasi E_0 pada sistem persamaan (4.3) bersifat stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika $Re \lambda_i < 0$ untuk semua $i = 1, 2$.

Bukti.

$$\begin{aligned}
 J(E_0) &= \begin{pmatrix} r - \delta_1 F_1 & 0 \\ 0 & s - \delta_2 F_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 - 0,95 \cdot 3,25 & 0 \\ 0 & 2 - 0,9 \cdot 2,5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -0,0875 & 0 \\ 0 & -0,25 \end{pmatrix} \tag{L4.1}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, mencari nilai eigen dari matriks jacobi persamaan (L4.1) dengan persamaan karakteristik $\det |J(E_0) - \lambda I| = 0$, seperti berikut

$$\begin{aligned}
& \det |J(E_0) - \lambda I| = 0 \\
& \Leftrightarrow \det \left| \begin{pmatrix} -0,0875 & 0 \\ 0 & -0,25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \\
& \Leftrightarrow \det \left| \begin{pmatrix} -0,0875 - \lambda & 0 \\ 0 & -0,25 - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \\
& \Leftrightarrow (-0,0875 - \lambda)(-0,25 - \lambda) - (0)(0) = 0 \\
& \Leftrightarrow (-0,0875 - \lambda)(-0,25 - \lambda) = 0
\end{aligned}$$

Diperoleh nilai eigen E_0 yaitu $\lambda_1 = -0,0875$ dan $\lambda_2 = -0,25$. Karena semua nilai eigen bernilai negatif, maka titik ekuilibrium kepunahan kedua populasi E_0 bersifat stabil asimtotik lokal. ■

Berikut perhitungan kestabilan titik ekuilibrium kepunahan kedua populasi menggunakan *software* Maple 11

```
// Model Matematika
dN_dt := r*N*(1 - N/K1)
        - (gamma*N*P)/(a + b*N + N^2)
        - delta1*F1*N:
dP_dt := s*P*(1 - P/K2)
        + (epsilon*gamma*N*P)/(a + b*N + N^2)
        - delta2*F2*P:

// Mendefinisikan parameter sesuai Tabel 4.6
r := 3:
K1 := 100:
K2 := 40:
s := 2:
```

```

gamma := 0.6:
epsilon := 0.7:
a := 0.3:
b := 0.05:
delta1 := 0.95:
delta2 := 0.9:
F1 := 3.25:
F2 := 2.5:

// Matriks Jacobian di TE E0 = (N=0, P=0)
J_E0 := Matrix(2, 2, [[-0.0875, 0], [0, -0.25]]):
// Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian
(lambda1 + 0.0875)(lambda2 + 0.25) = 0

// Nilai eigen:
lambda1 := -0.0875:
lambda2 := -0.25:

// Berdasarkan Teorema 0.1.1:
Karena semua nilai eigen < 0, maka titik
ekuilibrium E0 bersifat stabil asimtotik lokal.

```

0.2. Kestabilan titik ekuilibrium bebas predator

Berdasarkan Tabel 4.7, dapat dilakukan analisis kestabilan titik ekuilibrium bebas predator sebagai berikut

Teorema 0.2.1

Titik ekuilibrium bebas predator E_1 pada sistem persamaan (4.3) bersifat stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ untuk semua $i = 1, 2$.

Bukti.

$$\begin{aligned}
 J(E_1) &= \begin{pmatrix} -r + \delta_1 F_1 & -\frac{\gamma K_1 r(r - \delta_1 F_1)}{ar^2 + bK_1 r(r - \delta_1 F_1) + K_1^2(r - \delta_1 F_1)^2} \\ 0 & s + \frac{\epsilon \gamma K_1 r(r - \delta_1 F_1)}{ar^2 + bK_1 r(r - \delta_1 F_1) + K_1^2(r - \delta_1 F_1)^2} - \delta_2 F_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1,375 & -0,0130 \\ 0 & -0,2408 \end{pmatrix} \quad (L4.2)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, mencari nilai eigen dari matriks jacobi persamaan (L4.2) dengan persamaan karakteristik $\det |J(E_1) - \lambda I| = 0$, seperti berikut

$$\begin{aligned}
 &\det |J(E_1) - \lambda I| = 0 \\
 \Leftrightarrow &\det \left| \begin{pmatrix} -1,375 & -0,0130 \\ 0 & -0,2408 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \\
 \Leftrightarrow &\det \left| \begin{pmatrix} -1,375 - \lambda & -0,0130 \\ 0 & -0,2408 - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \\
 \Leftrightarrow &(-1,375 - \lambda)(-0,2408 - \lambda) - (0,0130)(0) = 0 \\
 \Leftrightarrow &(-1,375 - \lambda)(-0,2408 - \lambda) = 0
 \end{aligned}$$

Diperoleh nilai eigen E_1 yaitu $\lambda_1 = -1,375$ dan $\lambda_2 = -0,2408$. Karena semua nilai eigen bernilai negatif, maka titik ekuilibrium bebas predator E_1 bersifat stabil asimtotik lokal. ■

Berikut perhitungan kestabilan titik ekuilibrium bebas predator menggunakan software Maple 11

```
// Model Matematika
dN_dt := r*N*(1 - N/K1)
        - (gamma*N*P)/(a + b*N + N^2)
```

```

- delta1*F1*N:
dP_dt := s*P*(1 - P/K2)
        + (epsilon*gamma*N*P)/(a + b*N + N^2)
- delta2*F2*P:

// Mendefinisikan parameter sesuai Tabel 4.7
r := 3:
K1 := 100:
K2 := 40:
s := 2:
gamma := 0.6:
epsilon := 0.7:
a := 0.3:
b := 0.05:
delta1 := 0.5:
delta2 := 0.9:
F1 := 3.25:
F2 := 2.5:

// Matriks Jacobian di TE E1 = (N = 45.8333, P = 0)
J_E1 := Matrix(2, 2, [[-1.374998000,-0.01307478799],
                      [0,-0.2408476484]]):
// Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian
(lambda1 + 1.374998000)(lambda2 + 0.2408476484) = 0

// Nilai eigen:
lambda1 := -1.374998000:
lambda2 := -0.2408476484:

// Berdasarkan Teorema 0.2.1:
Karena semua nilai eigen < 0, maka titik
ekuilibrium E1 bersifat stabil asimtotik lokal.

```

0.3. Kestabilan titik ekuilibrium bebas prey

Berdasarkan Tabel 4.8, dapat dilakukan analisis kestabilan titik ekuilibrium bebas prey sebagai berikut

Teorema 0.3.1

Titik ekuilibrium bebas prey E_2 pada sistem persamaan (4.3) bersifat stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika $Re \lambda_i < 0$ untuk semua $i = 1, 2$.

Bukti.

$$\begin{aligned}
 J(E_2) &= \begin{pmatrix} r - \frac{K_2 \gamma (s - \delta_2 F_2)}{sa} - \delta_1 F_1 & 0 \\ \frac{\epsilon \gamma K_2 (s - \delta_2 F_2)}{sa} & -s + \delta_2 F_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 - \frac{40 \cdot 0,6(2 - 0,65 \cdot 2,5)}{2 \cdot 0,3} - 0,8 \cdot 3,25 & 0 \\ \frac{0,7 \cdot 0,6(2 - 0,65 \cdot 2,5)}{2 \cdot 0,3} & 2 + 0,65 \cdot 2,5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -14,6 & 0 \\ 10,5 & -0,375 \end{pmatrix} \tag{L4.3}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, mencari nilai eigen dari matriks jacobi persamaan (L4.3) dengan persamaan karakteristik $\det |J(E_2) - \lambda I| = 0$, seperti berikut

$$\begin{aligned}
 &\det |J(E_2) - \lambda I| = 0 \\
 \Leftrightarrow &\det \left| \begin{pmatrix} -14,6 & 0 \\ 10,5 & -0,375 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \\
 \Leftrightarrow &\det \left| \begin{pmatrix} -14,6 - \lambda & 0 \\ 10,5 & -0,375 - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (-14,6 - \lambda)(-0,375 - \lambda) - (0)(10,5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-14,6 - \lambda)(-0,375 - \lambda) = 0$$

Diperoleh nilai eigen E_2 yaitu $\lambda_1 = -14,6$ dan $\lambda_2 = -0,375$. Karena semua nilai eigen bernilai negatif, maka titik ekuilibrium bebas prey E_2 bersifat stabil asimtotik lokal. ■

Berikut perhitungan kestabilan titik ekuilibrium bebas prey menggunakan software Maple 11

```
// Model Matematika
dN_dt := r*N*(1 - N/K1)
        - (gamma*N*P)/(a + b*N + N^2)
        - delta1*F1*N:
dP_dt := s*P*(1 - P/K2)
        + (epsilon*gamma*N*P)/(a + b*N + N^2)
        - delta2*F2*P:

// Mendefinisikan parameter sesuai Tabel 4.8
r := 3:
K1 := 100:
K2 := 40:
s := 2:
gamma := 0.6:
epsilon := 0.7:
a := 0.3:
b := 0.05:
delta1 := 0.8:
delta2 := 0.65:
F1 := 3.25:
F2 := 2.5:

// Matriks Jacobian di TE E2 = (N = 0, P = 7.5)
```

```

J_E2 := Matrix(2, 2, [[-14.6 ,0], [10.5 ,-0.375]]):
// Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian
(lambda1 + 14.6)(lambda2 + 0.375) = 0

// Nilai eigen:
lambda1 := -14.6:
lambda2 := -0.375:

// Berdasarkan Teorema 0.3.1:
Karena semua nilai eigen < 0, maka titik
ekuilibrium E2 bersifat stabil asimtotik lokal.

```

0.4. Kestabilan titik ekuilibrium kedua populasi hidup bersama

Berdasarkan Tabel 4.9, dapat dilakukan analisis kestabilan titik ekuilibrium kedua populasi hidup bersama sebagai berikut

Teorema 0.4.1

Titik ekuilibrium kedua populasi hidup bersama E_3 pada sistem persamaan (4.3) bersifat stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ untuk semua $i = 1, 2$.

Bukti.

$$\begin{aligned}
 J(E_3) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1,37075594 & -0,00855909 \\ -0,00097545 & -0,38098864 \end{pmatrix} \quad (\text{L4.4})
 \end{aligned}$$

Perhitungan manual untuk memperoleh a_{11} , a_{12} , a_{21} , dan a_{22} dapat dilihat pada Lampiran 2. Selanjutnya, mencari nilai

eigen dari matriks jacobi persamaan (L4.4) dengan persamaan karakteristik $\det |J(E_3) - \lambda I| = 0$, seperti berikut

$$\begin{aligned}
 & \det |J(E_3) - \lambda I| = 0 \\
 \Leftrightarrow & \det \left| \begin{pmatrix} -1,37075594 & -0,00855909 \\ -0,00097545 & -0,38098864 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \\
 \Leftrightarrow & \det \left| \begin{pmatrix} -1,37075594 - \lambda & -0,00855909 \\ -0,00097545 & -0,38098864 - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \\
 \Leftrightarrow & (-1,37075594 - \lambda)(-0,38098864 - \lambda) \\
 & - (-0,00855909)(-0,00097545) = 0 \\
 \Leftrightarrow & 0,52224244 + 1,370755\lambda + 0,38098\lambda + \lambda^2 - 0,00000834 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 0,52223414 + 1,751755\lambda + \lambda^2
 \end{aligned}$$

Diketahui persamaan kuadrat:

$$0,52223414 + 1,751755\lambda + \lambda^2 = 0$$

Susun kembali dalam bentuk umum:

$$\lambda^2 + 1,751755\lambda + 0,52223414 = 0$$

Misalkan

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = 1,751755$$

$$A_2 = 0,52223414$$

Gunakan Rumus Kuadrat

$$\lambda = \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{2A_0}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{-1,751755 \pm \sqrt{(1,751755)^2 - 4(1)(0,52223414)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1,751755 \pm \sqrt{3,06864258 - 2,08893656}}{2} \\ &= \frac{-1,751755 \pm \sqrt{0,97970602}}{2} \\ &= \frac{-1,751755 \pm 0,989803}{2}\end{aligned}$$

$$\lambda_1 = \frac{-1,751755 + 0,989803}{2} = \frac{-0,761952}{2} \approx -0,380976$$

$$\lambda_2 = \frac{-1,751755 - 0,989803}{2} = \frac{-2,741558}{2} \approx -1,370779$$

Diperoleh nilai eigen E_3 yaitu $\lambda_1 = -0,380976$ dan $\lambda_2 = -1,370779$. Karena semua nilai eigen bernilai negatif, maka titik ekuilibrium kedua populasi hidup bersama E_3 bersifat stabil asimtotik lokal. ■

Berikut perhitungan kestabilan titik ekuilibrium kedua populasi hidup bersama menggunakan *software* Maple 11

```
// Model Matematika
dN_dt := r*N*(1 - N/K1)
        - (gamma*N*P)/(a + b*N + N^2)
        - delta1*F1*N:
dP_dt := s*P*(1 - P/K2)
        + (epsilon*gamma*N*P)/(a + b*N + N^2)
```

```

- delta2*F2*P:

// Mendefinisikan parameter sesuai Tabel 4.9
r := 3:
K1 := 100:
K2 := 40:
s := 2:
gamma := 0.4:
epsilon := 0.7:
a := 2.2:
b := 0.9:
delta1 := 0.5:
delta2 := 0.65:
F1 := 3.25:
F2 := 2.5:

// Matriks Jacobian di TE E3 = (N = 45.7859,
P = 7.6198)
J_E2 := Matrix(2, 2, [[-1.370759936,-0.008559088248],
                      [-0.0009758445090,-.3809886382]]):
// Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian
lambda^2 + 1.751748574*lambda + 0.5222356090 = 0

// Nilai eigen:
lambda1 := -0.3809801997:
lambda2 := -1.370768374:

// Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz:
A2 := 0.5222356090 > 0:
A1 := 1.751748574 > 0:
A0 := 1: // koefisien lambda^2

// Berdasarkan Teorema 0.4.1:

```

Karena semua nilai eigen < 0 , maka titik ekuilibrium E3 bersifat stabil asimtotik lokal.

Lampiran 5. Program MATLAB R2013a model predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan predator-prey.

0.5. Program MATLAB untuk titik ekuilibrium kepunahan kedua populasi

```
% Program Utama
clc;
clear all;

% Waktu Simulasi
t_start = 0;
t_end = 50;
dt = 0.1;
num_steps = round((t_end - t_start) / dt) + 1;
t = linspace(t_start, t_end, num_steps);

% Nilai parameter
r = 3;
K1 = 100;
K2 = 40;
s = 2;
gamma = 0.6;
epsilon = 0.7;
a = 0.3;
b = 0.05;
delta1 = 0.95;
delta2 = 0.9;
F1 = 3.25;
F2 = 2.5;
```

```

% Nilai awal populasi N dan P
n0 = 0.6;
p0 = 0.4;
x = [0.6; 0.4];

% Sistem persamaan diferensial
f = @(t, x) [
    r * x(1) * (1 - x(1) / K1)
    - (gamma * x(1) * x(2)) / (a+b*x(1)+x(1)^2)
    - delta1 * F1 * x(1);
    s * x(2) * (1 - x(2) / K2)
    + (epsilon * gamma * x(1) * x(2)) / (a+b*x(1)+x(1)^2)
    - delta2 * F2 * x(2);
];

% Menyimpan hasil simulasi
results = zeros(num_steps, 2);
results(1,:) = x';

% Header output tabel
fprintf('\nSimulasi Predator-Prey:\n');
fprintf('Waktu\t\tN (Prey)\t\tP (Predator)\n');

% Kondisi awal dicetak sebelum loop
fprintf('%.2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n', t(1), x(1), x(2));

% Runge-Kutta Orde 4 (RK4)
for i = 1:num_steps-1
    k1 = f(t(i), x);
    k2 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k1);
    k3 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k2);
    k4 = f(t(i) + dt, x + dt * k3);

    % Update nilai x
    x = x + (dt/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    results(i+1,:) = x';

```

```

% Menampilkan hasil setiap langkah waktu
    if mod(t(i+1), 1) == 0
        fprintf('%0.2f\t\t%0.4f\t\t%0.4f\n', t(i+1), x(1),
            x(2));
    end
end

% Menyimpan hasil ke file CSV
filename = 'predator_preysimulation_E0.csv';
csvwrite(filename, [t' results]);
fprintf('\nHasil simulasi disimpan ke file: %s\n',
    filename);

% Grafik Prey dan Predator Bersama
figure;
plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
    'N (Prey)');
hold on;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
    'P (Predator)');
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi');
title('Kepadatan Predator-Prey');
legend('show');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Prey
figure;
plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
    'N (Prey)');
hold on
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi N (Prey)');
title('Kepadatan Populasi Prey');
legend('show');

```

```

grid on;

% Grafik Terpisah untuk Predator
figure;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'P (Predator)');
hold on
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi P (Predator)');
title('Kepadatan Populasi Predator');
legend('show');
grid on;

% Menampilkan tabel hasil akhir
fprintf('\nHasil Akhir Simulasi:\n');
fprintf('Populasi Mangsa (N): %.4f\n', results(end, 1));
fprintf('Populasi Predator (P): %.4f\n', results(end, 2));

```

0.6. Program MATLAB untuk titik ekuilibrium bebas predator

```

% Program Utama
clc;
clear all;

% Waktu Simulasi
t_start = 0;
t_end = 50;
dt = 0.1;
num_steps = round((t_end - t_start) / dt) + 1;
t = linspace(t_start, t_end, num_steps);

% Nilai parameter
r = 3;

```

```

K1 = 100;
K2 = 40;
s = 2;
gamma = 0.6;
epsilon = 0.7;
a = 0.3;
b = 0.05;
delta1 = 0.5;
delta2 = 0.9;
F1 = 3.25;
F2 = 2.5;

% Nilai awal populasi N dan P
n0 = 0.6;
p0 = 0.4;
x = [0.6; 0.4];

% Sistem persamaan diferensial
f = @(t, x) [
    r * x(1) * (1 - x(1) / K1)
    - (gamma * x(1) * x(2)) / (a+b*x(1)+x(1)^2)
    - delta1 * F1 * x(1);
    s * x(2) * (1 - x(2) / K2)
    + (epsilon * gamma * x(1) * x(2)) / (a+b*x(1)+x(1)^2)
    - delta2 * F2 * x(2);
];

% Menyimpan hasil simulasi
results = zeros(num_steps, 2);
results(1,:) = x';

% Header output tabel
fprintf('\nSimulasi Predator-Prey:\n');
fprintf('Waktu\t\tN (Prey)\t\tP (Predator)\n');

% Kondisi awal dicetak sebelum loop

```

```

fprintf('%.2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n', t(1), x(1), x(2));

% Runge-Kutta Orde 4 (RK4)
for i = 1:num_steps-1
    k1 = f(t(i), x);
    k2 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k1);
    k3 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k2);
    k4 = f(t(i) + dt, x + dt * k3);

    % Update nilai x
    x = x + (dt/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    results(i+1,:) = x';

% Menampilkan hasil setiap langkah waktu
    if mod(t(i+1), 1) == 0
        fprintf('%.2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n', t(i+1), x(1),
            x(2));
    end
end

% Menyimpan hasil ke file CSV
filename = 'predator_preysimulation_E1.csv';
csvwrite(filename, [t' results]);
fprintf('\nHasil simulasi disimpan ke file: %s\n',
filename);

% Grafik Prey dan Predator Bersama
figure;
plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'N (Prey)');
hold on;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'P (Predator)');
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi');
title('Kepadatan Predator-Prey');

```

```

legend('show');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Prey
figure;
plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'N (Prey)');
hold on
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi N (Prey)');
title('Kepadatan Populasi Prey');
legend('show');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Predator
figure;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'P (Predator)');
hold on
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi P (Predator)');
title('Kepadatan Populasi Predator');
legend('show');
grid on;

% Menampilkan tabel hasil akhir
fprintf('\nHasil Akhir Simulasi:\n');
fprintf('Populasi Mangsa (N): %.4f\n', results(end, 1));
fprintf('Populasi Predator (P): %.4f\n', results(end, 2));

```

0.7. Program MATLAB untuk titik ekuilibrium bebas prey

```

% Program Utama
clc;
clear all;

```

```

% Waktu Simulasi
t_start = 0;
t_end = 50;
dt = 0.1;
num_steps = round((t_end - t_start) / dt) + 1;
t = linspace(t_start, t_end, num_steps);

% Nilai parameter
r = 3;
K1 = 100;
K2 = 40;
s = 2;
gamma = 0.6;
epsilon = 0.7;
a = 0.3;
b = 0.05;
delta1 = 0.8;
delta2 = 0.65;
F1 = 3.25;
F2 = 2.5;

% Nilai awal populasi N dan P
n0 = 0.6;
p0 = 0.4;
x = [0.6; 0.4];

% Sistem persamaan diferensial
f = @(t, x) [
    r * x(1) * (1 - x(1) / K1)
    - (gamma * x(1) * x(2)) / (a+b*x(1)+x(1)^2)
    - delta1 * F1 * x(1);
    s * x(2) * (1 - x(2) / K2)
    + (epsilon * gamma * x(1) * x(2)) / (a+b*x(1)+x(1)^2)
    - delta2 * F2 * x(2);
];

```

```

% Menyimpan hasil simulasi
results = zeros(num_steps, 2);
results(1,:) = x';

% Header output tabel
fprintf('\nSimulasi Predator-Prey:\n');
fprintf('Waktu\t\tN (Prey)\t\tP (Predator)\n');

% Kondisi awal dicetak sebelum loop
fprintf('%.2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n', t(1), x(1), x(2));

% Runge-Kutta Orde 4 (RK4)
for i = 1:num_steps-1
    k1 = f(t(i), x);
    k2 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k1);
    k3 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k2);
    k4 = f(t(i) + dt, x + dt * k3);

    % Update nilai x
    x = x + (dt/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    results(i+1,:) = x';

    % Menampilkan hasil setiap langkah waktu
    if mod(t(i+1), 1) == 0
        fprintf('%.2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n', t(i+1), x(1),
            x(2));
    end
end

% Menyimpan hasil ke file CSV
filename = 'predator_pre_simulation_E2.csv';
csvwrite(filename, [t' results]);
fprintf('\nHasil simulasi disimpan ke file: %s\n',
    filename);

```

```

% Grafik Prey dan Predator Bersama
figure;
plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'N (Prey)');
hold on;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'P (Predator)');
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi');
title('Kepadatan Predator-Prey');
legend('show');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Prey
figure;
plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'N (Prey)');
hold on
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi N (Prey)');
title('Kepadatan Populasi Prey');
legend('show');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Predator
figure;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'P (Predator)');
hold on
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi P (Predator)');
title('Kepadatan Populasi Predator');
legend('show');
grid on;

% Menampilkan tabel hasil akhir

```

```
fprintf('\nHasil Akhir Simulasi:\n');
fprintf('Populasi Mangsa (N): %.4f\n', results(end, 1));
fprintf('Populasi Predator (P): %.4f\n', results(end, 2));
```

0.8. Program MATLAB untuk titik ekuilibrium kedua populasi hidup bersama

```
% Program Utama
clc;
clear all;

% Waktu Simulasi
t_start = 0;
t_end = 50;
dt = 0.1;
num_steps = round((t_end - t_start) / dt) + 1;
t = linspace(t_start, t_end, num_steps);

% Nilai parameter
r = 3;
K1 = 100;
K2 = 40;
s = 2;
gamma = 0.4;
epsilon = 0.7;
a = 2.2;
b = 0.9;
delta1 = 0.5;
delta2 = 0.65;
F1 = 3.25;
F2 = 2.5;

% Nilai awal populasi N dan P
n0 = 0.6;
```

```

p0 = 0.4;
x = [0.6; 0.4];

% Sistem persamaan diferensial
f = @(t, x) [
    r * x(1) * (1 - x(1) / K1)
    - (gamma * x(1) * x(2)) / (a+b*x(1)+x(1)^2)
    - delta1 * F1 * x(1);
    s * x(2) * (1 - x(2) / K2)
    + (epsilon * gamma * x(1) * x(2)) / (a+b*x(1)+x(1)^2)
    - delta2 * F2 * x(2);
];

% Menyimpan hasil simulasi
results = zeros(num_steps, 2);
results(1,:) = x';

% Header output tabel
fprintf('\nSimulasi Predator-Prey:\n');
fprintf('Waktu\ttN (Prey)\t\tP (Predator)\n');

% Kondisi awal dicetak sebelum loop
fprintf('%0.2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n', t(1), x(1), x(2));

% Runge-Kutta Orde 4 (RK4)
for i = 1:num_steps-1
    k1 = f(t(i), x);
    k2 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k1);
    k3 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k2);
    k4 = f(t(i) + dt, x + dt * k3);

    % Update nilai x
    x = x + (dt/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    results(i+1,:) = x';

% Menampilkan hasil setiap langkah waktu

```

```

        if mod(t(i+1), 1) == 0
            fprintf('%.2f\t\t%.4f\t\t%.4f\n', t(i+1), x(1),
                x(2));
        end
    end
end

% Menyimpan hasil ke file CSV
filename = 'predator_prey_simulation_E3.csv';
csvwrite(filename, [t' results]);
fprintf('\nHasil simulasi disimpan ke file: %s\n',
    filename);

% Grafik Prey dan Predator Bersama
figure;
plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
    'N (Prey)');
hold on;
plot(t, results(:,2), 'r', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
    'P (Predator)');
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi');
title('Kepadatan Predator-Prey');
legend('show');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Prey
figure;
plot(t, results(:,1), 'b', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
    'N (Prey)');
hold on
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi N (Prey)');
title('Kepadatan Populasi Prey');
legend('show');
grid on;

```

```
% Grafik Terpisah untuk Predator
figure;
plot(t, results(:,LineWidth', 2, 'DisplayName',
'P (Predator)'));
hold on
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi P (Predator)');
title('Kepadatan Populasi Predator');
legend('show');
grid on;

% Menampilkan tabel hasil akhir
fprintf('\nHasil Akhir Simulasi:\n');
fprintf('Populasi Mangsa (N): %.4f\n', results(end, 1));
fprintf('Populasi Predator (P): %.4f\n', results(end, 2));
```

RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

1. Nama : Liya Tsanyyatul Khishol
2. Tempat & Tgl. Lahir : Jepara, 28 Februari 2004
3. Alamat Rumah : Ds. Tulakan RT. 005/ RW. 008
Kec. Donorojo, Kab. Jepara, Jawa Tengah
4. Hp : 083849585751
5. Email : liyatsanyya04@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. Pendidikan Formal
 - a. SDN 03 Blingoh
 - b. SMP Islam Donorojo
 - c. MAN 2 Jepara
 - d. UIN Walisongo Semarang
2. Pendidikan Non-Formal
 - a. TPQ Al-Islah

Semarang, 26 Mei 2025



Liya Tsanyyatul Khishol

NIM : 2108046083